E. CARTAN

Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien

Bulletin de la S. M. F., tome 47 (1919), p. 125-160
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1919__47__125_1>

SUR LES VARIÉTÉS DE COURBURE CONSTANTE D'UN ESPACE EUCLIDIEN OU NON-EUCLIDIEN;

PAR M. E. CARTAN.

Le présent Mémoire est consacré à une étude d'ensemble des variétés à p dimensions situées dans un espace euclidien ou non-euclidien à n dimensions, et dont le ds^2 est de courbure constante. Si cette courbure est la même que celle de l'espace, la variété est *développable*, c'est-à-dire applicable sur une variété plane à p dimensions de l'espace lui-même. J'ai indiqué dans des Notes récentes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. **167**, année 1918, p. 367, 426, 482, 550), Notes auxquelles le lecteur est prié de se reporter, les principaux résultats auxquels j'étais parvenu pour les variétés à trois dimensions de l'espace euclidien. On trouvera ici des résultats plus généraux applicables à toutes les valeurs de p.

Dans l'espace à trois dimensions, les surfaces développables (variétés à deux dimensions) sont des enveloppes de plans à un paramètre. Dans le cas général, les variétés développables à p dimensions ne jouissent pas nécessairement de la propriété que leur hyperplan tangent dépend d'un paramètre; si cet hyperplan tangent dépend de $q > 1$ paramètres, et si la variété est réelle, le nombre n est au moins égal à $p + q$; d'une manière plus précise, l'hyperplan osculateur à la variété a un nombre de dimensions qui peut varier entre une limite inférieure $p + q$ et une limite supérieure $p + \frac{q(q+1)}{2}$; les variétés développables pour lesquelles la limite inférieure est atteinte dépendent de $\frac{q(q-1)}{2}$ fonctions arbitraires de deux arguments; celles pour lesquelles la limite supérieure est atteinte dépendent de $n - p - \frac{q(q-1)}{2}$ fonctions arbitraires de q arguments. Ces résultats sont vrais aussi pour $q = p$. Si q est égal à 1, les deux limites coïncident, mais alors les variétés dépendent de $n-1$ fonctions arbitraires d'un argument : ce sont les lieux des variétés planes à $p-1$ dimensions osculatrices à une courbe gauche arbitraire.

On a des résultats analogues pour les variétés de courbure constante différente de celle de l'espace dans lequel elles sont placées. Si la courbure de la variété est *inférieure* à celle de l'espace, et si la variété est *réelle*, le nombre n des dimensions de l'espace est au moins égal à $2p-1$; s'il est supérieur à $2p-1$, l'hyperplan normal a en commun avec l'hyperplan normal infiniment voisin une variété plane qui est au plus à $n-2p$ dimensions, au moins à $n-\frac{p(p+3)}{2}$ dimensions. Les variétés pour lesquelles la limite supérieure est atteinte dépendent de $p(n-p)$ fonctions arbitraires d'un argument ; celles pour lesquelles la limite inférieure est atteinte dépendent de $n-\frac{p(p+1)}{2}$ fonctions arbitraires de p arguments. Les premières admettent en chaque point comme tangentes principales p variétés planes à $p-1$ dimensions rectangulaires entre elles, et les p centres de courbure principaux correspondants sont conjugués par rapport à une certaine hypersphère de rayon fixe ayant son centre au point considéré de la variété.

Les premiers Chapitres du Mémoire sont consacrés aux principes des méthodes susceptibles d'être employées dans une étude systématique des variétés à courbure constante. Ces méthodes reposent d'abord sur l'emploi de systèmes de référence mobiles et sur la considération des expressions de Pfaff qui représentent les composantes mobiles du déplacement instantané de ces systèmes. Le système de référence le plus général employé est formé d'un $(n+1)$-èdre auquel on adjoint une hypersphère : un tel système est caractérisé par deux formes, une linéaire qui représente la masse d'un point de coordonnées (relatives) données, une quadratique qui représente la puissance par rapport à l'hypersphère d'un point (de masse 1) de coordonnées données. Les composantes du déplacement instantané du système de référence sont liées par certaines relations identiques qui sont étudiées (1-16).

Le second Chapitre (17-25), après avoir rappelé les principes de la théorie des formes bilinéaires alternées et des formes quadratiques symboliques à multiplication extérieure qui leur sont associées, expose la théorie de certaines formes quadratiques, que j'appelle *extérieurement orthogonales* et qui jouent un rôle important dans la suite : elles sont définies au fond par la propriété que la somme des mineurs du second degré de même espèce de leurs discriminants est nulle. Les formes extérieurement orthogonales réelles jouissent de propriétés intéressantes (**19-20**).

Le troisième Chapitre (**26-32**), après avoir rappelé la définition du covariant bilinéaire, rappelle les propriétés fondamentales des systèmes de Pfaff en involution. Dans beaucoup de systèmes d'équations aux dérivées partielles d'origine géométrique, par exemple ceux définissant des variétés jouissant de propriétés géométriques déterminées, ces propriétés géométriques peuvent être exprimées par des relations linéaires entre les composantes du déplacement instantané d'un système de référence mobile attaché à chaque point de la variété ; le système différentiel est ainsi ramené à un système de Pfaff. Un tel procédé a en apparence l'inconvénient d'introduire des variables surabondantes, puisque le système de référence associé à chaque point de la variété a en général un certain degré d'arbitraire ; mais il existe un théorème (**30**) qui supprime cet inconvénient et qui ne conserve que les avantages de la méthode, car il montre que pour la discussion de la compatibilité du système et pour l'évaluation du degré de généralité de la solution, on n'a pas à se préoccuper de ces variables surabondantes qui, au fond, s'éliminent d'elles-mêmes et automatiquement.

Le quatrième Chapitre (**33-49**) est consacré à une étude sommaire des propriétés infinitésimales *projectives* des variétés à p dimensions. Les principales notions introduites sont celles des *hyperplans osculateurs* et des *réseaux asymptotiques* des différents ordres. L'*hyperplan osculateur* d'ordre h en un point A de la variété est la plus petite variété plane contenant les variétés planes à $h+1$ dimensions osculatrices aux différentes courbes tracées sur la variété et passant par A ; pour $h=0$, on a l'hyperplan tangent. Le *réseau asymptotique* d'ordre h est formé des cônes de degré $h+1$ lieux des tangentes aux courbes dont la variété plane osculatrice à $h+1$ dimensions est contenue dans une variété plane assujettie aux conditions de contenir l'hyperplan osculateur d'ordre $h-1$, d'être contenue dans l'hyperplan osculateur d'ordre h

et d'avoir une dimension de moins que ce dernier. Les dérivées partielles d'ordre k d'une *forme* asymptotique d'ordre h (premier membre de l'équation d'un cône d'ordre h) sont des formes asymptotiques d'ordre $h-k$. Comme application des théories du troisième Chapitre, je détermine le degré de généralité des variétés à p dimensions dont le réseau asymptotique (du premier ordre) admet pour cônes de base p variétés planes doubles n'ayant d'autre point commun que le point A : elles dépendent de $p(p-1)$ fonctions arbitraires de deux arguments. Lorsque les formes asymptotiques du premier ordre peuvent s'exprimer en fonction d'un nombre maximum $q < p$ de variables, l'hyperplan tangent dépend de q paramètres; si alors l'hyperplan osculateur a le nombre maximum $p + \frac{q(q+1)}{2}$ de dimensions, la variété contient une variété plane fixe à $p-q-1$ dimensions. Une dernière application du troisième Chapitre est faite aux variétés dont l'hyperplan osculateur a le nombre maximum $\frac{p(p+3)}{2}$ de dimensions, le réseau asymptotique du second ordre admettant comme cônes de base p variétés planes triples n'ayant d'autre point commun que A : ces variétés dépendent de $\frac{p(p-1)}{2}$ fonctions arbitraires de p arguments.

Le cinquième Chapitre (50-61) et le sixième (62-77) sont consacrés aux variétés développables et aux variétés de courbure constante. En dehors des résultats signalés plus haut, j'indique une méthode générale pour déterminer les variétés à courbure constante dont le réseau asymptotico-isotrope appartient à un type projectif déterminé. Cette méthode permettrait une monographie détaillée des variétés classées suivant la nature de leur réseau asymptotico-isotrope (ou de leur réseau asymptotique pour les variétés développables) : cette monographie est possible sans trop de difficultés pour $p=3$; mais elle sortirait du cadre de ce Mémoire.

CHAPITRE I.

SUR DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE DE L'ESPACE PROJECTIF, DES ESPACES EUCLIDIEN ET NON-EUCLIDIENS.

1. *Espace projectif.* — Considérons dans l'espace projectif à n dimensions un système de coordonnées projectives fixe, la posi-

tion de chaque point étant définie par les rapports mutuels de $n+1$ coordonnées. Nous désignerons par une lettre majuscule, non pas un point, mais plutôt l'ensemble de $n+1$ coordonnées ; nous désignerons par mA, où m est un nombre ordinaire, l'ensemble des $n+1$ coordonnées de A multipliées toutes par le coefficient m. On peut dire que A et mA sont deux points distincts, mais qui occupent la même position dans l'espace. Enfin nous désignerons par $mA+nB+pC+\ldots$ le point dont les $n+1$ coordonnées s'obtiennent en multipliant respectivement celles de A, B, C, ... par m, n, p, ... et en ajoutant les résultats ainsi obtenus.

Choisissons $n+1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ tels que le déterminant de leurs coordonnées ne soit pas nul, ou encore $n+1$ points formant un véritable $(n+1)$-èdre ; tout point M de l'espace pourra être mis sous la forme

$$M = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_{n+1} A_{n+1} ;$$

les coefficients $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont les coordonnées du point M dans le système de référence déterminé par les $n+1$ points donnés.

2. Cela posé, imaginons le système de référence le plus général possible ; il dépend de $(n+1)^2$ paramètres. Donnons à ces paramètres une variation infiniment petite quelconque ; les *différentielles* des points $A_1, \ldots, A_{n+1}$ (c'est-à-dire les points dont les coordonnées sont les différentielles des coordonnées de $A_1, \ldots, A_{n+1}$) peuvent évidemment se mettre sous la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} dA_1 \phantom{{}_{+1}} = \omega_{11} \phantom{{}_{+1,}} A_1 + \omega_{12} \phantom{{}_{+1,}} A_2 + \ldots + \omega_{1,n+1} \phantom{{}_{+1}} A_{n+1}, \\ dA_2 \phantom{{}_{+1}} = \omega_{21} \phantom{{}_{+1,}} A_1 + \omega_{22} \phantom{{}_{+1,}} A_2 + \ldots + \omega_{2,n+1} \phantom{{}_{+1}} A_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dA_{n+1} = \omega_{n+1,1} A_1 + \omega_{n+1,2} A_2 + \ldots + \omega_{n+1,n+1} A_{n+1}, \end{array}\right.$$

où les coefficients ω_{ik} sont $(n+1)^2$ expressions linéaires par rapport aux différentielles des $(n+1)^2$ paramètres dont dépendent les coordonnées fixes de $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Ces $(n+1)^2$ expressions ω_{ik} sont du reste linéairement indépendantes, car si on les annule, les formules (1) montrent que les points $A_1, \ldots, A_{n+1}$ restent fixes, c'est-à-dire que les $(n+1)^2$ paramètres dont dépend le système de référence mobile restent constants. Les expressions de

Pfaff ω_{ik} vont jouer dans la suite un rôle important. On peut les considérer comme les composantes relatives du mouvement instantané du système de référence mobile.

3. *Espace euclidien.* — Plaçons-nous maintenant dans un espace euclidien à n dimensions rapporté à un système de coordonnées rectangulaires. Nous désignerons, ici aussi, par une grande lettre l'ensemble de $n+1$ coordonnées, comme on le fait quand on introduit une coordonnée d'homogénéité ; la $(n+1)^{\text{ième}}$ coordonnée s'appellera la *masse* du point ; si cette masse est nulle, on aura par définition le *vecteur* (ou plutôt un quelconque des vecteurs) dont les projections sont les n premières coordonnées. Avec ces conventions le symbole $A+I$, où A est un point de masse 1 et I un vecteur, représente le point de masse 1 obtenu en portant à partir du point A le vecteur I ; de même le symbole $B-A$, où A et B sont des points de masse 1, représente le vecteur d'origine A et d'extrémité B, ou tout vecteur équipollent. La masse du point $A+B+C+\ldots$ est la somme des masses des points A, B, C, ... Enfin, si A, B, C, ... sont des points de masse 1, le symbole $\alpha A+\beta B+\gamma C+\ldots$ représente le barycentre des points A, B, C, ... affectés des masses α, β, γ, ..., ce barycentre étant lui-même affecté de la masse totale $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$.

4. Nous pouvons imaginer maintenant un système de référence formé d'un point A de masse 1 et de n vecteurs rectangulaires $I_1, \ldots, I_n$, de longueur égale à l'unité. Un tel système de référence, que nous appellerons système de référence *normal*, dépend de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres arbitraires. Quand on donne à ces paramètres des accroissements infiniment petits, on a des formules de la forme

$$\begin{aligned}
dA &= \omega_{00}\,A + \omega_{01}\,I_1 + \ldots + \omega_{0n}\,I_n,\\
dI_1 &= \omega_{10}\,A + \omega_{11}\,I_1 + \ldots + \omega_{1n}\,I_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
dI_n &= \omega_{n0}\,A + \omega_{n1}\,I_1 + \ldots + \omega_{nn}\,I_n;
\end{aligned}$$

mais ici les $(n+1)^2$ expressions ω_{ij} ne sont pas indépendantes. D'abord les masses de $A, I_1, \ldots, I_n$ étant constantes, les masses de leurs différentielles sont nulles ; on a donc

$$\omega_{00} = \omega_{10} = \ldots = \omega_{n0} = 0.$$

Exprimons maintenant que les vecteurs $I_1, \ldots, I_n$ sont de longueur égale à 1 et rectangulaires entre eux. Introduisons le symbole $I|J$ pour désigner le produit géométrique de deux vecteurs I, J. On a évidemment

$$d(I \mid J) = dI \mid J + I \mid dJ ;$$

comme les produits $I_i|I_j$ sont tous constants (égaux à 1 si $i = j$, à 0 si $i \neq j$), on en déduit facilement

$$\omega_{ii} = 0, \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Finalement on a les formules suivantes, où les notations sont légèrement simplifiées :

$$(2) \quad \begin{cases} dA = \omega_1 \, I_1 + \omega_2 \, I_2 + \ldots + \omega_{n-1} \, I_{n-1} + \omega_n \, I_n, \\ dI_1 = \qquad\quad \omega_{12} \, I_2 + \ldots + \omega_{1,n-1} \, I_{n-1} + \omega_{1n} I_n, \\ dI_2 = \omega_{21} \, I_1 \qquad\quad + \ldots + \omega_{2,n-1} \, I_{n-1} + \omega_{2,n} I_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dI_n = \omega_{n1} I_1 + \omega_{n2} I_2 + \ldots + \omega_{n,n-1} \, I_{n-1}, \end{cases}$$

avec les relations identiques

$$(2') \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0.$$

Il reste donc $\frac{n(n+1)}{2}$ expressions de Pfaff qui sont des combinaisons linéairement indépendantes des différentielles des $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres dont dépend le système de référence mobile.

3. Nous pouvons considérer plus généralement un système de référence formé d'un point A de masse 1 et de n vecteurs *quelconques* $I_1, I_2, \ldots, I_n$, ces n vecteurs étant cependant assujettis à la condition de n'être pas tous parallèles à une même variété plane à $n - 1$ dimensions. Tout point M de l'espace est de la forme

$$M = xA + x_1 I_1 + x_2 I_2 + \ldots + x_n I_n,$$

où x est la masse du point et $\frac{x_1}{x}, \frac{x_2}{x}, \ldots, \frac{x_n}{x}$ constituent un système de coordonnées cartésiennes. Si M est un point de masse 1, le carré de la distance du point M à l'origine A est de la forme

$$\overline{\mathrm{MA}}^2 = \mathrm{H}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où H désigne une certaine forme quadratique définie positive.

Réciproquement donnons-nous *a priori* une forme quadratique définie positive $\mathrm{H}(x_1, \ldots, x_n)$; il existe une infinité de systèmes de référence cartésiens tels que, pour chacun d'eux, la forme H représente le carré de la distance à l'origine A du point M, supposé de masse 1, dont les coordonnées sont $(x_1, \ldots, x_n)$. Il suffit en effet de décomposer H en une somme de n carrés indépendants,

$$\mathrm{H}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{X}_1^2 + \mathrm{X}_2^2 + \ldots + \mathrm{X}_n^2,$$

et de regarder

$$\mathrm{X}_1 + a_1, \quad \mathrm{X}_2 + a_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{X}_n + a_n,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont n nombres quelconques, comme les coordonnées *rectangulaires* fixes du point M ; les coordonnées fixes de A sont alors $(a_1, \ldots, a_n)$ et les projections du vecteur I_i sur les axes rectangulaires fixes sont les coefficients de x_i dans les formes $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$. On se rend compte facilement que le système de référence cartésien ainsi défini par la forme quadratique H dépend de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres arbitraires. On retrouve le cas du n° 4 en supposant

$$\mathrm{H} \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

6. Donnons-nous maintenant une forme quadratique définie positive H dépendant d'un certain nombre r de paramètres arbitraires : il lui correspondra une infinité de systèmes de référence dépendant de $\frac{n(n+1)}{2} + r$ paramètres arbitraires. Pour toute variation infiniment petite de ces paramètres, on aura des formules de la forme

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} d\mathrm{A} = \omega_1 \ \mathrm{I}_1 + \omega_2 \ \mathrm{I}_2 + \ldots + \omega_n \ \mathrm{I}_n, \\ d\mathrm{I}_1 = \omega_{11} \mathrm{I}_1 + \omega_{12} \mathrm{I}_2 + \ldots + \omega_{1n} \mathrm{I}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d\mathrm{I}_n = \omega_{n1} \mathrm{I}_1 + \omega_{n2} \mathrm{I}_2 + \ldots + \omega_{nn} \mathrm{I}_n. \end{array}\right.$$

Les $n(n+1)$ coefficients ω_i, ω_{ij} sont des combinaisons linéaires des différentielles des $\frac{n(n+1)}{2} + r$ paramètres dont dépend le système de référence mobile. Ces coefficients sont donc assujettis à satisfaire à $\frac{n(n+1)}{2} - r$ relations linéaires qu'on peut obtenir de la manière suivante :

La forme $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ représentant le carré de la distance MA, si M est un point de masse 1, on a

$$dH = d(M - A \mid M - A) = 2(M - A) \mid (dM - dA).$$

Choisissons en particulier un point M *fixe* ; on aura

$$dH = -2(M - A) \mid dA = -2(x_1 I_1 + \ldots + x_n I_n) \mid (\omega_1 I_1 + \ldots + \omega_n I_n)$$

D'autre part, si $x_1, \ldots, x_n$ sont les projections d'un *vecteur*, la forme H représente évidemment le carré de la longueur de ce vecteur, et par suite le produit géométrique de deux vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ est la forme polaire de H :

$$(x_1 I_1 + \ldots + x_n I_n) \mid (y_1 I_1 + \ldots + y_n I_n)$$
$$= \frac{1}{2}\left(y_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + \ldots + y_n \frac{\partial H}{\partial x_n}\right);$$

on a donc

$$dH = -\left(\omega_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + \omega_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} + \ldots + \omega_n \frac{\partial H}{\partial x_n}\right).$$

Pour calculer dH, il faut savoir calculer $dx_1, \ldots, dx_n$; or, en exprimant que le point

$$M = A + x_1 I_1 + \ldots + x_n I_n$$

est fixe, on obtient, en tenant compte de (3),

$$dx_i + \omega_i + x_1 \omega_{1i} + x_2 \omega_{2i} + \ldots + x_n \omega_{ni} = 0.$$

Finalement, en posant

$$H = \sum_{i,j}^{1,\ldots,n} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \ldots,$$

on obtient les relations

$$(3') \qquad da_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} (a_{ik} \omega_{jk} + a_{jk} \omega_{ik}) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces relations (3′) sont au nombre de $\frac{n(n+1)}{2}$ et, comme parmi les différentielles da_{ij} il y en a r seulement d'indépendantes, il reste $\frac{n(n+1)}{2} - r$ relations linéaires entre les ω_{ij} : ce sont les relations cherchées. On retrouve les formules (2') en supposant $H = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

7. Nous serons conduit, plus loin, à considérer des systèmes de référence un peu plus compliqués, formés de $n+1$ points (ou vecteurs) $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ non situés dans une même variété plane à $n+1$ dimensions et d'une hypersphère (Σ) de centre A et de rayon R (réel ou purement imaginaire) mais non nul. A un tel système on peut associer :

1° Une forme linéaire

$$K = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_{n+1} x_{n+1}$$

qui indique la masse du point

$$M = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_{n+1} A_{n+1};$$

2° Une forme quadratique

$$H = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \ldots,$$

qui indique la puissance par rapport à (Σ) du point M supposé de masse 1 (et par suite cette puissance multipliée par m^2, si m est la masse de M, ou le carré de M, si M est un vecteur).

Remarquons que la forme quadratique H est réductible soit à une somme de $n+1$ carrés positifs indépendants, si R est purement imaginaire, soit à une somme de n carrés positifs et d'un carré négatif si R est réel. Remarquons encore que, l'équation $K = 0$ étant celle de l'hyperplan à l'infini, les équations

$$H = 0, \qquad K = 0$$

n'ont aucune solution commune (en dehors de $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$).

Réciproquement donnons-nous *a priori* une forme linéaire K et une forme quadratique H de discriminant non nul telles que ces deux formes ne puissent s'annuler simultanément que pour $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$. Il existe une infinité de systèmes de référence caractérisés par ces deux formes. Déterminons en effet un coefficient ρ tel que la forme $H + \rho K^2$ ait son discriminant nul ; il faut et il suffit pour cela qu'il existe $n + 1$ quantités $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ telles qu'on ait

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \xi_1} + \rho c_1 \quad K(\xi) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial \xi_{n+1}} + \rho c_{n+1} K(\xi) = 0; \end{aligned}$$

on déduit de là

$$K(\xi)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n+1} & \rho c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n+1} & \rho c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n+1} & \rho c_{n+1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le coefficient $K(\xi)$ ne peut être nul puisqu'alors les demi-dérivées partielles de H s'annuleraient toutes pour $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ et le discriminant de H ne serait pas nul ; on a donc

$$\rho\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n+1} & c_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n+1} & c_{n+1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \ldots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}.$$

Dans cette équation le coefficient de ρ n'est pas nul ; c'est en effet la valeur que prend la forme adjointe de H pour $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ et si cette forme adjointe était nulle, cela signifierait que l'hyperplan $K = 0$ est tangent à la quadrique $H = 0$, contrairement à l'hypothèse faite. On a donc bien pour ρ une valeur déterminée et différente de zéro.

Cela posé la forme à discriminant nul $H + \rho K^2$ est réductible à une somme de n carrés, positifs ou négatifs ; ils sont sûrement tous positifs, car, dans le cas contraire, la forme $H + \rho K^2$ pourrait s'annuler en établissant $n - 1$ relations linéaires réelles entre les variables $x_1, \ldots, x_{n+1}$ et par suite le système d'équations

$$H = K = 0$$

pourrait être vérifié en établissant n relations linéaires entre les

$n+1$ variables x, ce qui est contraire à l'hypothèse. On peut alors poser

$$H + \rho K^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

ou

$$H = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 - \rho K^2$$

Regardons maintenant X_1, X_2, $_n$, K comme les $n+1$ coordonnées d'un point par rapport à des axes de directions fixes ayant pour origine un point mobile quelconque A ; prenons pour A_i le point dont les coordonnés par rapport à ces axes sont les coefficients de x_i dans $X_1, \ldots, X_n$, K ; la masse d'un point sera alors donnée par la forme linéaire K et la puissance de ce point (supposé de masse 1) par rapport à l'hypersphère de centre A et de rayon $\sqrt{\rho}$ sera donnée par la forme quadratique H. On se rend facilement compte enfin que la position de ce système de référence dépend de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres arbitraires.

Remarquons enfin que les coordonnées du centre A de l'hypersphère (Σ) par rapport au système de référence $(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1})$ sont les $n+1$ quantités $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}$ supposées liées par la relation

$$c_1\xi_1 + \ldots + c_{n+1}\xi_{n+1} = 1.$$

8. Considérons maintenant une forme linéaire K (x) et une forme quadratique H (x) satisfaisant aux conditions énoncées précédemment et dont les coefficients dépendent de r paramètres indépendants. Il leur correspond un système de référence mobile dépendant de $\frac{n(n+1)}{2} + r$ paramètres arbitraires. On aura naturellement, pour tout accroissement donné à ces paramètres, des relations de la forme

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dA_1 \;\;\;\; = \omega_{11}\;\;\;\; A_1 + \omega_{12}\;\;\;\; A_2 + \ldots + \omega_{1,n+1}\;\;\;\; A_{n+1}, \\ dA_2 \;\;\;\; = \omega_{21}\;\;\;\; A_1 + \omega_{22}\;\;\;\; A_2 + \ldots + \omega_{2,n+1}\;\;\;\; A_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dA_{n+1} = \omega_{n+1,1} A_1 + \omega_{n+1,2} A_2 + \ldots + \omega_{n+1,n+1} A_{n+1}, \end{array} \right.$$

auxquelles on pourra ajouter

$$(4') \qquad dA = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \ldots + \omega_{n+1} A_{n+1}$$

avec $(n+1)(n+2)$ expressions de Pfaff ω_i, ω_{ij}.

Nous allons exprimer :

1° Que la masse de A étant égale à 1, la masse de dA est nulle, ce qui donne

$$c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \ldots + c_{n+1}\omega_{n+1} = 0; \tag{5}$$

2° Que la valeur (4′) de dA est la même que celle de

$$d(\xi_1 A_1 + \ldots + \xi_{n+1} A_{n+1}),$$

ce qui donne

$$d\xi_i = \omega_i - \sum_{k=1}^{k=n+1} \xi_k \omega_{ki}; \tag{6}$$

3° Que la masse K d'un point *fixe* M reste constante, ce qui donne

$$dc_i = \sum_{k=1}^{k=n+1} c_k \omega_{ik}; \tag{7}$$

4° Que la puissance d'un point *fixe* M de masse 1 par rapport à l'hypersphère (Σ) a pour différentielle

$$dH = -2(M - A) \mid dA - d\rho;$$

pour exprimer cela remarquons que le carré de la longueur d'un vecteur étant représenté par la forme H, le produit géométrique de deux vecteurs est la forme polaire de H, ce qui donne

$$\begin{aligned}(M - A) \mid dA &= \frac{1}{2}(x_1 - \xi_1)\frac{\partial H}{\partial \omega_1} + \ldots + \frac{1}{2}(x_{n+1} - \xi_{n+1})\frac{\partial H}{\partial \omega_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\omega_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + \ldots + \omega_{n+1}\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}\right) + \rho(c_1\omega_1 + \ldots + c_{n+1}\omega_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\omega_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + \ldots + \omega_{n+1}\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}\right) K(x),\end{aligned}$$

d'où

$$dH = -K(x)\left(\omega_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + \ldots + \omega_{n+1}\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}\right) - d\rho[K(x)]^2.$$

Le second membre de cette formule étant une forme quadratique en $x_1, \ldots, x_{n+1}$, l'égalité a lieu quels que soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$, et l'on en déduit, comme au n° 5,

$$\left\{\begin{aligned} da_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n+1} [a_{ik}(\omega_{jk} - c_j\omega_k) + a_{jk}(\omega_{ik} - c_i\omega_k)] - c_i c_j\, d\rho \\ (i, j = 1, 2, \ldots, n+1).\end{aligned}\right. \tag{8}$$

En tenant compte de (5), on peut encore écrire les formules (6) et (7) sous la forme

$$(6') \qquad d\xi_i = -\Sigma\, \xi_k(\omega_{ki} - c_k\omega_i),$$

$$(7') \qquad dc_i = \Sigma\, c_k(\omega_{ik} - c_i\,\omega_k).$$

9. Démontrons d'abord que les ξ_i et ρ se déduisant comme il a été dit plus haut des coefficients des formes K et H, les équations (6) sont une conséquence des équations (5), (7) et (8), et que les équations (7) sont une conséquence des équations (5), (6) et (8).

En effet partons des équations (5), (7) et (8); la relation

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} a_{ik}\xi_k + \rho c_i = 0$$

donne, par différentiation,

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} a_{ik}\,d\xi_k + \sum_{k=1}^{k=n+1}\sum_{h=1}^{h=n+1}\left[\begin{array}{l} a_{ih}\,\xi_k(\omega_{kh} - c_k\omega_h) \\ + a_{kh}\,\xi_k(\omega_{ih} - c_i\omega_h)\end{array}\right]$$
$$- \sum_{k=1}^{k=n+1} c_i c_k \xi_k\,d\rho + c_i\,d\rho + \rho \sum_{k=1}^{k=n+1} c_k\omega_{ik} = 0;$$

et, par des symplifications évidentes,

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} a_{ik}\left[d\xi_k + \sum_{h=1}^{h=n+1} \xi_h(\omega_{hk} - c_h\omega_k)\right] = 0;$$

on déduit de là, le déterminant des a_{ik} n'étant pas nul, les formules (6′) et par suite (6).

De même partons des équations (5), (6) et (8). La même relation que plus haut donne

$$-\sum_{k=1}^{k=n+1}\sum_{h=1}^{h=n+1} a_{ik}\,\xi_h(\omega_{hk} - c_h\omega_k)$$
$$+\sum_{k=1}^{k=n+1}\sum_{h=1}^{h=n+1}\left[a_{ih}\xi_k(\omega_{kh} - c_k\omega_h) + a_{kh}\,\xi_k(\omega_{ih} - c_i\,\omega_h)\right]$$
$$- \sum_{k=1}^{k=n+1} c_i c_k \xi_k\,d\rho + c_i\,d\rho + \rho\,dc_i = 0,$$

d'où, par simplifications évidentes et division par ρ, on déduit les équations (7).

Remarquons en second lieu que les équations (5), (7) et (8), linéaires en ω_i, ω_{ij}, dc_i, da_{ij} (on suppose qu'on y a remplacé ρ par sa valeur en fonction des c_i et des a_{ij}), ne sont pas indépendantes; elles sont au nombre de $\frac{(n+1)(n+4)}{2}+1$, mais sont liées identiquement par une relation et une seule. Cherchons en effet si l'on peut trouver des coefficients λ, λ_i, λ_{ij} tels qu'on ait identiquement, c'est-à-dire quels que soient ω_i, ω_{ij}, dc_i, da_{ij},

$$\lambda \sum_{k=1}^{k=n+1} c_k\omega_k + \sum_{i=1}^{i=n+1} \lambda_i \left[dc_i - \sum_{k=1}^{k=n+1} c_k(\omega_{ik} - c_i\omega_k)\right]$$
$$+ \sum_{ij}^{1,\ldots,n+1} \theta_{ij}\lambda_{ij}\left\{ da_{ij} + c_ic_j\,d\rho - \sum_{k=1}^{k=n+1} [a_{ik}(\omega_{jk} - c_j\omega_k) + a_{jk}(\omega_{ik} - c_i\omega_k)]\right\} = 0$$
$$(\theta_{ii} = 1,\ \theta_{ij} = 2 \text{ si } i \neq j).$$

On voit tout de suite que le coefficient λ est nul; on a ensuite, en annulant le coefficient de $\omega_{ij} - c_i\omega_j$,

$$-\lambda_i c_j - 2\sum_{k=1}^{k=n+1} \lambda_{ik} a_{jk} = 0,$$

ou, en remplaçant c_j par sa valeur en fonction des a_{ik} et des ξ_k,

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} a_{jk}\left(2\lambda_{ik} - \frac{1}{\rho}\lambda_i\xi_k\right) = 0,$$

d'où

$$2\lambda_{ik} - \frac{1}{\rho}\lambda_i\xi_k = 0;$$

comme d'autre part on a $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$, on voit qu'on peut poser

$$\lambda_{ij} = \mu\xi_i\xi_j, \qquad \lambda_i = 2\mu\rho\xi_i,$$

et l'on peut supposer $\mu = 1$. Ces résultats montrent déjà qu'il y a entre les équations (5), (7) et (8) une relation identique indépendante au plus. En donnant aux coefficients λ_i, λ_{ij}, les valeurs qui viennent d'être trouvées, la relation à vérifier se réduit à

$$2\rho\sum_{i=1}^{i=n+1} \xi_i dc_i + (c_1\xi_1 + \ldots + c_{n+1}\xi_{n+1})^2 d\rho + \xi_1^2\,da_{11} + 2\xi_1\xi_2\,da_{12} + \ldots = 0$$

ou

$$-2\rho\sum c_i\, d\xi_i + d\rho + d\,\mathrm{H}(\xi) - 2\sum_{i=1}^{i=n+1} d\xi_i \sum_{k=1}^{k=n+1} a_{ik}\xi_k = 0\,;$$

sous cette forme la vérification est immédiate.

On pourrait vérifier de même que les $\frac{(n+1)(n+4)}{2}+1$ relations (5), (6) et (8) se réduisent à $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$.

10. Cela posé nous avons introduit $(n+1)(n+2)$ expressions de Pfaff ω_i, ω_{ij} et les $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$ différentielles dc_i, da_{ij} qui se réduisent par hypothèse à r indépendantes; nous avons donc en somme $(n+1)(n+2)+r$ expressions de Pfaff liées par les relations (5), (7) et (8), qui sont au nombre de $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$; il en reste donc

$$(n+1)(n+2)+r-\frac{(n+1)(n+4)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}+r$$

indépendantes, ce qui est bien le nombre des paramètres dont dépend le système de référence mobile.

On peut encore dire que les $(n+1)(n+2)$ expressions de Pfaff ω_i, ω_{ij}, qui sont des combinaisons linéaires des paramètres dont dépend le système de référence mobile, sont liées identiquement par les relations obtenues en éliminant entre (5), (7) et (8) les différentielles des r paramètres dont dépendent les formes K et H; les relations ainsi obtenues étant au nombre de $\frac{(n+1)(n+4)}{2}-r$, le nombre des expressions ω_i, ω_{ij} indépendantes est

$$(n+1)(n+2)-\left[\frac{(n+1)(n+4)}{2}-r\right]=\frac{n(n+1)}{2}+r.$$

Supposons par exemple que la forme H soit

$$\mathrm{H}=a_{11}x_1^2+\ldots+a_{n+1,n+1}x_{n+1}^2,$$

et que les cœfficients a_{ii}, c_i soient des paramètres arbitraires $[r=2(n+1)]$. Les relations identiques qui existent entre les expressions ω_i et ω_{ij} sont d'abord la relation (5),

$$c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \ldots + c_{n+1}\omega_{n+1} = 0, \tag{5}$$

ensuite les $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ relations obtenues en éliminant $d\rho$ entre les $\frac{n(n+1)}{2}$ relations

$$a_{ii}(\omega_{ji} - c_j\omega_i) + a_{jj}(\omega_{ij} - c_i\omega_j) - c_ic_j\,d\rho = 0.$$

Supposons en second lieu que H ait la même forme, mais que les $2(n+1)$ coefficients c_i, a_{ii} soient assujettis à la seule condition que le rayon de l'hypersphère (Σ) ait une valeur constante donnée. Les relations qui lient identiquement ω_i et ω_{ij} sont

$$c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \ldots + c_{n+1}\omega_{n+1} = 0,$$
$$a_{ii}(\omega_{ji} - c_j\omega_i) + a_{jj}(\omega_{ij} - c_i\omega_j) = 0;$$

elles sont maintenant au nombre de $\frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Dans la suite, on ne considérera du reste que des systèmes de référence pour lesquels (Σ) est de rayon constant.

11. *Espace non-euclidien.* — Nous adopterons le point de vue de Cayley qui surbordonne la géométrie non-euclidienne à la géométrie projective. Considérons dans l'espace projectif à n dimensions une quadrique (quadrique absolue) d'équation

$$\Omega = 0,$$

où Ω est une forme quadratique à $n+1$ variables réductible à une somme de $n+1$ carrés indépendants tous positifs (géométrie *elliptique*), ou n positifs et un négatif (géométrie *hyperbolique*). Dans le cas de l'espace hyperbolique, les points de l'espace non-euclidien sont les points de l'espace projectif *intérieurs* à la quadrique absolue, c'est-à-dire qui rendent la forme Ω négative : les points de l'espace projectif extérieurs à la quadrique absolue sont des points *idéaux* de l'espace non-euclidien.

Étant donnés deux points M, M′, désignons par le symbole $M\,|\,M'$ la forme polaire de Ω correspondant aux coordonnées de ces deux points. La distance δ de ces deux points est définie, dans l'espace elliptique, par la formule

$$\cos(\delta\sqrt{\mathbf{C}}) = \frac{M \mid M'}{\sqrt{M \mid M . M' \mid M'}};$$

dans l'espace hyperbolique par la formule

$$\operatorname{ch}(\delta\sqrt{-\mathbf{C}}) = \frac{\mid M \mid M' \mid}{\sqrt{M \mid M . M' \mid M'}}.$$

La constante $\mathbf{C}$ s'appelle la *courbure* de l'espace considéré, positive pour l'espace elliptique, négative pour l'espace hyperbolique.

Un point réel M sera dit un point-unité si l'on a

$$M \mid M = \frac{1}{\mathbf{C}};$$

si l'on considère un point-unité mobile, le carré ds^2 de la longueur de l'élément d'arc décrit par ce point est donné par la formule

$$ds^2 = dM \mid dM.$$

On appelle *distance réduite* l de deux points M, M' dont la distance (non-euclidienne) est δ, la longueur donnée par la formule

$$l = \frac{\operatorname{tang}(\delta\sqrt{\mathbf{C}})}{\sqrt{\mathbf{C}}} \quad \text{ou} \quad l = \frac{\operatorname{th}(\delta\sqrt{-\mathbf{C}})}{\sqrt{-\mathbf{C}}}.$$

Étant donné un point-unité A, associons à ce point n points $A_1, \ldots, A_n$ formant avec A un $(n+1)$-èdre conjugué par rapport à la quadrique absolue et tels que $A_i \mid A_i = 1$; la forme quadratique absolue, avec ce système de référence que nous appellerons *système de référence normal*, sera de la forme

$$\Omega = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + \frac{X^2}{\mathbf{C}}.$$

On vérifie facilement que $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ est égal au carré de la distance réduite au point A d'un point M pour lequel la coordonnée X serait égale à 1. Nous donnerons à cette coordonnée X le nom de *masse relative* du point M par rapport au point-unité A; on a

$$X = \mathbf{C} . A \mid M.$$

L'équation de l'hypersphère (Σ) lieu des points dont la distance réduite au point A est égale à R est d'après cela

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 - R^2 X^2 = 0;$$

le premier membre de cette équation s'appelle la puissance du point M par rapport à (Σ); elle est égale, si la masse de M est égale à 1, à $l^2 - R^2$, où l désigne la distance réduite MA et R le rayon réduit de (Σ); si la masse de M n'est pas égale à 1, la puissance est le produit de $(l^2 - R^2)$ par le carré de la masse; enfin si le point M a une masse nulle, c'est-à-dire est dans l'hyperplan conjugué de M par rapport à la quadrique absolue, la puissance est égale à $M \mid M$.

Remarquons enfin que la masse relative de $M + M'$ est égale à la somme des masses relatives de M et de M'. La masse relative de A par rapport à A est évidemment l'unité.

12. Prenons dans un espace non-euclidien de courbure $\mathbf{C}$ un système de référence formé de $n+1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ assujettis à la condition de ne pas être dans un même hyperplan à n dimensions. Avec ce système de référence, la forme Ω devient une certaine forme quadratique

$$\Omega = \sum_{i,j}^{1,\ldots,n+1} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + \ldots$$

réductible à une somme de $n+1$ carrés indépendants positifs si $\mathbf{C}$ est positif, à une somme de n carrés positifs et 1 carré négatif indépendants si $\mathbf{C}$ est négatif. Réciproquement, si l'on se donne arbitrairement une forme quadratique Ω satisfaisant aux conditions précédentes, elle définit une infinité de systèmes de référence dépendant de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres arbitraires; il suffit en effet de mettre, ce qui est toujours possible, la forme Ω sous la forme

$$\Omega = X_1^2 + \ldots + X_n^2 + \frac{X^2}{\mathbf{C}},$$

et de regarder les quantités $X_1, \ldots, X_n, X$ comme les coordonnées *fixes* du point M dont les coordonnées relatives sont $x_1, \ldots, x_{n+1}$.

Cela posé, partons d'une forme Ω dépendant de r paramètres arbitraires ; elle définit une infinité de systèmes de référence dépendant de $\frac{n(n+1)}{2}+r$ paramètres arbitraires, et pour tout accroissement infiniment petit de ces paramètres on aura

$$(9)\quad \begin{cases} dA_1 = \omega_{11} A_1 + \ldots + \omega_{1,n+1} A_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dA_{n+1} = \omega_{n+1,1} A_1 + \ldots + \omega_{n+1,n+1} A_{n+1}, \end{cases}$$

avec $(n+1)^2$ coefficients ω_{ij}, qui sont des combinaisons linéaires des différentielles des paramètres. Mais, d'autre part, si l'on exprime que pour un point *fixe* M, la forme Ω reste constante, on arrive aux relations

$$(10)\qquad d\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n+1} (\alpha_{ik}\omega_{jk} + \alpha_{jk}\omega_{ik}) \qquad (i, j = 1, \ldots, n+1).$$

Ces relations sont au nombre de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, et si l'on élimine entre ces relations les différentielles des r paramètres qui entrent dans Ω, il reste, parmi les expressions de Pfaff ω_{ij},

$$(n+1)^2 - \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} - r\right] = \frac{n(n+1)}{2} + r$$

indépendantes.

13. Prenons en particulier, pour définir le système de référence, un point-unité A et n autres points situés dans l'hyperplan conjugué de A par rapport à la quadrique absolue. On aura ici

$$\Omega = H(x_1, \ldots, x_n) + \frac{x^2}{C} = \sum_{i,j}^{1,\ldots,n} a_{ij}x_i x_j + \frac{x^2}{C}.$$

Les formules (9) seront remplacées par les suivantes :

$$(9')\quad \begin{cases} dA = \omega_{00} A + \omega_{01} A_1 + \ldots + \omega_{0n} A_n, \\ dA_1 = \omega_{10} A + \omega_{11} A_1 + \ldots + \omega_{1n} A_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dA_n = \omega_{n0} A + \omega_{n1} A_1 + \ldots + \omega_{nn} A_n ; \end{cases}$$

et les formules (10) par

$$
(10')\qquad
\begin{cases}
\omega_{00} = 0, \\
\omega_{i0} + \mathbf{C} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\omega_{0k} = 0, \\
da_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (a_{ik}\omega_{jk} + a_{jk}\omega_{ik}) \qquad (i, j = 1, \ldots, n).
\end{cases}
$$

Nous écrirons dans la suite ω_i à la place de ω_{0i}.

Comme cas plus particulier, si l'on prend

$$H = x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

les formules (10′) deviennent

$$
(10'')\qquad
\begin{cases}
\omega_{i0} + \mathbf{C}\,\omega_i = 0, \\
\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0.
\end{cases}
$$

On peut remarquer que la forme définie H représente le carré de la distance réduite MA, si M est supposé de masse relative 1 par rapport à A.

14. Revenons maintenant à un système de référence quelconque défini par $n+1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, mais auxquels on adjoint une hypersphère (Σ) ayant pour centre un point-unité A et pour rayon réduit une longueur R réelle ou purement imaginaire différente de zéro. A un tel système de référence on peut associer :

1° La forme linéaire K qui indique la masse relative d'un point quelconque M par rapport au point A;

2° La forme quadratique H, réductible à $n+1$ carrés positifs ou à n carrés positifs et 1 négatif, qui représente la puissance par rapport à (Σ) d'un point quelconque M.

Le système d'équation $H = K = 0$ n'admet évidemment d'autre solution que $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$.

Il résulte de ce qui a été dit précédemment que l'on a l'identité

$$\Omega = H + \left(R^2 + \frac{1}{\mathbf{C}}\right) K^2,$$

et que d'autre part le discriminant de $H + R^2K^2$ est nul.

Réciproquement, partons d'une forme linéaire K et d'une forme quadratique H de discriminant non nul et réductible à une somme de $n+1$ carrés positifs ou de n carrés positifs et 1 carré négatif; supposons en outre que ces deux formes ne puissent s'annuler simultanément que pour $x_1 = \ldots = x_{n+1} = 0$. Elles caractérisent alors une infinité de systèmes de référence de la nature de ceux dont il est question plus haut.

Soit

$$K(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_{n+1} x_{n+1},$$
$$H(x) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \ldots.$$

Les équations

$$\begin{array}{l} a_{11} \quad \xi_1 + a_{12} \quad \xi_2 + \ldots + a_{1,n+1} \quad \xi_{n+1} + \rho c_1 \quad = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n+1,1} \xi_1 + a_{n+1,2} \xi_2 + \ldots + a_{n+1,n+1} \xi_{n+1} + \rho c_{n+1} = 0, \\ c_1 \quad \xi_1 + c_2 \quad \xi_2 + \ldots + c_{n+1} \quad \xi_{n+1} - \quad 1 \quad = 0, \end{array}$$

définissent sans ambiguïté un point A $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ et un nombre ρ. On peut alors poser

$$H(x) + \rho K^2(x) = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2,$$
$$\Omega(x) = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + \frac{1}{C} K^2.$$

La dernière formule définit un système de référence dépendant de $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres arbitraires (n° 12); la forme K représente la masse relative d'un point quelconque par rapport au point $(X_1 = \ldots = X_n = 0,\ K = 1)$, c'est-à-dire par rapport au point-unité A $(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$, et enfin la forme H représente la puissance d'un point quelconque par rapport à l'hypersphère de centre A et de rayon réduit $\sqrt{\rho}$.

Si les coefficients des deux formes K et H dépendent de r paramètres arbitraires, le système de référence qu'elles caractérisent dépend de $\frac{n(n+1)}{2} + r$ paramètres arbitraires.

15. Posons, avec les hypothèses précédentes,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} dA_1 \quad = \omega_{11} \quad A_1 + \ldots + \omega_{1,n+1} \quad A_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dA_{n+1} = \omega_{n+1,1} A_1 + \ldots + \omega_{n+1,n+1} A_{n+1}, \\ dA \quad = \omega_1 \quad A_1 + \ldots + \omega_{n+1} \quad A_{n+1}. \end{array} \right.$$

Nous allons établir les relations qui lient identiquement les $(n+1)(n+2)$ expressions de Pfaff ω_i, ω_{ij}.

En premier lieu, la formule

$$A \mid A = \frac{1}{\mathbf{C}}$$

donne par différentiation

$$\mathbf{C}\, dA \mid A = 0,$$

ce qui signifie que la masse relative de dA par rapport à A est nulle; on a donc

$$(12) \qquad c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2 + \ldots + c_{n+1} \omega_{n+1} = 0.$$

Si, en second lieu, nous calculons la différentielle de

$$A = \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \ldots + \xi_{n+1} A_{n+1},$$

nous obtenons

$$(13) \qquad d\xi_i = \omega_i - \sum_{k=1}^{k=n+1} \xi_k \omega_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

En troisième lieu, la formule

$$c_i = \mathbf{C}\, A_i \mid A,$$

qui exprime que la masse relative de A_i par rapport à A est C_i, donne, par différentiation,

$$dc_i = \mathbf{C}\, dA_i \mid A + \mathbf{C}\, A_i \mid dA,$$

le premier terme du second membre est la masse relative de dA_i; quant au produit géométrique $A_i \mid dA$, c'est la forme polaire de Ω relative à A_i et à dA, ou, comme la masse de dA est nulle, c'est la forme polaire de H; on a donc

$$(14) \qquad dc_i = \sum_{k=1}^{k=n+1} c_k \omega_{ik} + \mathbf{C} \sum_{k=1}^{k=n+1} a_{ik} \omega_k.$$

En dernier lieu, si l'on calcule la différentielle de la forme H pour un point *fixe* M, en partant de la formule

$$H = \Omega - \left(\rho + \frac{1}{\mathbf{C}}\right) K^2,$$

on trouve

$$dH = -K^2\, d\rho - 2\left(\rho + \frac{1}{\mathbf{C}}\right) K\, dK;$$

or

$$K = \mathbf{C} M \mid A \qquad \text{et} \qquad dK = \mathbf{C} M \mid dA;$$

donc

$$dH = -K^2\, d\rho - 2(1+\mathbf{C}\rho)K.M \mid dA.$$

On en déduit sans difficulté

$$(15)\quad da_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n+1} (a_{ik}\omega_{jk} + a_{jk}\omega_{ik})$$
$$- (1+\mathbf{C}\rho)\left(c_i \sum_{k=1}^{k=n+1} a_{jk}\omega_k + c_j \sum_{k=1}^{k=n+1} a_{ik}\omega_k\right) - c_i c_j\, d\rho.$$

On remarquera que les formules (5), (6), (7) et (8) se déduisent des formules (12), (13), (14) et (15) en faisant $\mathbf{C}=0$.

16. On démontre facilement, comme au n° 9, que les relations (13) sont des conséquences des relations (12), (14) et (15) et que les relations (14) sont des conséquences des relations (12), (13) et (15).

Quant aux relations (12), (14) et (15), qui sont au nombre de $\frac{(n+1)(n+4)}{2}+1$, elles ne sont pas indépendantes, mais se réduisent à $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$. Il en est de même des relations (12), (13) et (15). On en tire les mêmes conséquences qu'au n° **10** relativement aux relations identiques entre les ω_i et les ω_{ij}.

Si, par exemple, les coefficients c_i et a_{ij} sont assujettis aux conditions que les rectangles de la forme H soient tous nuls et que la valeur de ρ soit constante, les relations qui lient identiquement les expressions de Pfaff ω_i et ω_{ij} sont

$$a_{ii}\omega_{ji} + a_{jj}\omega_{ij} - (1+\mathbf{C}\rho)(c_i a_{jj}\omega_j + c_j a_{ii}\omega_i) = 0$$
$$(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n+1).$$

CHAPITRE II.

LES FORMES BILINÉAIRES ALTERNÉES ET LES FORMES QUADRATIQUES EXTÉRIEUREMENT ORTHOGONALES.

17. Etant donnée une forme bilinéaire $f(x,y)$ à deux séries de variables $x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n$:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_i y_j,$$

cette forme est dite *alternée* si l'on a entre les coefficients les relations

$$a_{ij}+a_{ji}=0 \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n).$$

Une forme bilinéaire alternée jouit de la propriété fondamentale que, si l'on effectue sur les deux séries de variables deux substitutions linéaires *cogrédientes* (c'est-à-dire avec les mêmes coefficients), la nouvelle forme bilinéaire obtenue est encore alternée. Cette propriété rapproche les formes alternées des formes symétriques pour lesquelles on a

$$a_{ij}-a_{ji}=0.$$

Cette analogie entre les deux types de formes peut être poussée plus loin.

Une forme bilinéaire symétrique $f(x,y)$ est complètement déterminée par la forme quadratique $f(x,x)$ obtenue en identifiant les variables des deux séries ; on a

$$f(x,y)=\frac{1}{2}y_1\frac{\partial f(x,x)}{\partial x_1}+\frac{1}{2}y_2\frac{\partial f(x,x)}{\partial x_2}+\ldots+\frac{1}{2}y_n\frac{\partial f(x,x)}{\partial x_n}.$$

Pour obtenir la transformée de $f(x,y)$ par deux substitutions linéaires cogrédientes effectuées sur les deux séries de variables, il suffit de chercher la transformée de la forme quadratique associée $f(x,x)$ par une substitution linéaire effectuée sur les seules variables x.

On peut de même associer à une forme bilinéaire alternée une forme à une seule série de variables ; c'est encore une forme du second degré, mais où les lois de la multiplication en ce qui concerne les variables x ne sont plus les lois de la multiplication algébrique ordinaire, mais les lois de la multiplication *extérieure* de Grassmann. Si l'on écrit

$$[x_i x_j]$$

à la place de

$$x_i y_j - x_j y_i,$$

les crochets indiquant qu'il s'agit d'un produit extérieur, on a

$$[x_i x_i]=0, \qquad [x_i x_j]=-[x_j x_i],$$

et la forme quadratique alternée associée à la forme bilinéaire

$f(x, y)$ est

$$[F(x)] = \sum_{(ij)} a_{ij}[x_i x_j],$$

où la somme du second nombre est étendue à toutes les *combinaisons* des n indices deux à deux.

On posera par définition

$$\frac{\partial[F]}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_j.$$

Le produit extérieur de deux formes linéaires

$$X = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n,$$
$$X' = a'_1 x_1 + \ldots + a'_n x_n,$$

s'obtient en effectuant le produit suivant les règles ordinaires de l'algèbre, mais en ayant soin, dans chaque produit partiel, de ne pas intervertir l'ordre des facteurs, ou, si l'on intervertit cet ordre, de changer le signe de ce produit partiel ; autrement dit, on a

$$[XX'] = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_i a'_j [x_i x_j] = \sum_{(ij)} (a_i a'_j - a_j a'_i)[x_i x_j],$$

la dernière somme étant étendue aux $\frac{n(n+1)}{2}$ combinaisons des n indices deux à deux. En somme, la forme quadratique alternée $[XX']$ est associée à la forme bilinéaire alternée

$$X(x)X'(y) - X(y)X'(x) = \begin{vmatrix} X(x) & X(y) \\ X'(x) & X'(y) \end{vmatrix}.$$

On a la relation

$$\frac{\partial[XX']}{\partial x_i} = \frac{\partial X}{\partial x_i} X' - \frac{\partial X'}{\partial x_i} X.$$

Étant donnée une forme bilinéaire alternée $f(x, y)$, si l'on veut chercher sa transformée par deux substitutions linéaires cogrédientes effectuées sur les deux séries de variables x, y, il suffit de chercher la transformée de la forme associée $[F(x)]$ quand on effectue sur les seules variables x la substitution considérée. Si, par exemple, cette substitution est définie par les formules

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} \lambda_{ik} X_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on a

$$\begin{aligned}[F(x)] &= \sum_{(ij)} \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{h=1}^{h=n} a_{ij} \lambda_{ik} \lambda_{jh} [X_k X_h] \\ &= \sum_{(kh)} \sum_{(ij)} a_{ij} (\lambda_{ik}\lambda_{jh} - \lambda_{ih}\lambda_{jk}) [X_k X_h],\end{aligned}$$

et les coefficients A_{kh} de la forme transformée sont

$$A_{kh} = \sum_{(ij)} a_{ij} (\lambda_{ik}\lambda_{jh} - \lambda_{ih}\lambda_{jk}).$$

De même qu'une forme quadratique ordinaire peut se ramener à une forme normale simple, à savoir une somme de carrés, une forme quadratique alternée peut toujours se réduire à la forme simple

$$[F(x)] = [x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \ldots + [x_{2p-1} x_{2p}].$$

Signalons enfin le théorème suivant, dont il sera fait un fréquent usage :

Si l'on a la relation

$$[X_1 Y_1] + [X_2 Y_2] + \ldots + [X_h Y_h] = 0,$$

où les X *et les* Y *sont des formes linéaires à n variables* $x_1, \ldots, x_n$, *et si les h formes* X *sont indépendantes, les formes* Y *peuvent s'exprimer par des combinaisons linéaires des formes* X, *et les coefficients des formules qui donnent les* Y *en fonctions des* X *forment un Tableau carré symétrique.*

Choisissons en effet $n - h$ formes quelconques $X_{h+1}, \ldots, X_n$ indépendantes de $X_1, \ldots, X_h$ et indépendantes entre elles. Il est évident que toute forme linéaire pourra s'exprimer linéairement au moyen de $X_1, \ldots, X_n$; soit alors

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11} X_1 + \ldots + a_{1h} X_h + a_{1,h+1} X_{h+1} + \ldots + a_{1n} X_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_h &= a_{h1} X_1 + \ldots + a_{hh} X_h + a_{h,h+1} X_{h+1} + \ldots + a_{hn} X_n; \end{aligned}$$

en portant dans l'identité, supposée vraie par hypothèse, on obtient

$$\sum_{(ij)}^{i,j=1,\ldots,h} (a_{ij}-a_{ji})[X_iX_j]+\sum_{i=1}^{i=h}\sum_{\alpha=h+1}^{\alpha=n} a_{i,\alpha}[X_iX_\alpha]=0.$$

La forme du premier membre étant identiquement nulle, les coefficients de $[X_i\,X_j]$ et $[X_i\,X_\alpha]$ sont nuls, ce qui démontre le théorème.

Remarquons que les coefficients de la forme quadratique en $X_1, \ldots, X_h$

$$\Phi = X_1Y_1+X_2Y_2+\ldots+X_hY_h$$

sont précisément ceux qui entrent dans les expressions des Y en fonctions linéaires des X ; autrement dit, on a

$$Y_i=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial X_i}\qquad (i=1, 2, \ldots, h).$$

18. *Formes quadratiques extérieurement orthogonales.* — Etant données r formes quadratiques Φ_1, Φ_2, ..., Φ_r à n variables x_1, x_2, ..., x_n, ces formes seront dites *extérieurement orthogonales* si l'on a les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations

$$\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_j}\right]+\left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_j}\right]+\ldots+\left[\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_j}\right]=0\qquad (i,j=1, 2, \ldots, n),$$

où les produits entre crochets sont des produits extérieurs.

La propriété des r formes quadratiques Φ_h d'être extérieurement orthogonales subsiste si l'on effectue sur les variables x_i une substitution linéaire quelconque. Soit en effet

$$x_i=\alpha_{i1}X_1+\ldots+\alpha_{in}X_n\qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

une substitution linéaire effectuée sur les variables x. On a

$$\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial X_i}=\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_{ki}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial X_j}=\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_{kj}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_k},$$

et par suite

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r}\left[\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial X_i}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial X_j}\right]=\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{h=1}^{h=n}\alpha_{ki}\alpha_{hj}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r}\left[\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_k}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_h}\right]=0.$$

La propriété subsiste encore quand on remplace les formes quadratiques Φ par d'autres formes quadratiques Ψ se déduisant des premières par une substitution orthogonale. Soit en effet

$$\Psi_\alpha=\beta_{\alpha 1}\Phi_1+\beta_{\alpha 2}\Phi_2+\ldots+\beta_{\alpha r}\Phi_r;$$

on a

$$\left[\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_j}\right]=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\beta_{\alpha\lambda}\beta_{\alpha\mu}\left[\frac{\partial\Phi_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_j}\right]$$

et par suite

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r}\left[\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\Psi_\alpha}{\partial x_j}\right]=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\left(\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r}\beta_{\alpha\lambda}\beta_{\alpha\mu}\right)\left[\frac{\partial\Phi_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_j}\right]=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\left[\frac{\partial\Phi_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_\lambda}{\partial x_j}\right]=0.$$

Il n'est pas supposé, dans ce qui précède, que les r formes Φ soient linéairement indépendantes.

19. Étant données r formes extérieurement orthogonales, mettons en évidence dans ces formes les termes qui contiennent la variable x_1 ; on peut écrire

$$\Phi_\alpha=a_\alpha x_1^2+2x_1 H_\alpha+\overline{\Phi}_\alpha\qquad(\alpha=1,2,\ldots,r),$$

où les H_α sont des formes linéaires et les $\overline{\Phi}_\alpha$ des formes quadratiques en $x_2,\ldots,x_n$.

Si l'on exprime les conditions d'orthogonalité extérieure, on obtient en particulier

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r}\left[(a_\alpha x_1+H_\alpha)\left(\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i}x_1+\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{\Phi}_\alpha}{\partial x_i}\right)\right]=0,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r}a_\alpha\frac{\partial\overline{\Phi}_\alpha}{\partial x_i}-\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r}H_\alpha\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i}=0,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r}\left[H_\alpha\frac{\partial\overline{\Phi}_\alpha}{\partial x_i}\right]=0.$$

Les premières relations expriment l'identité

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r} a_\alpha \overline{\Phi}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=r} \mathrm{H}_\alpha^2$$

ou

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r} a_\alpha \Phi_\alpha = \frac{1}{4} \sum \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_1}\right)^2.$$

Il résulte de là que *si les formes* $\Phi_1, \ldots \Phi_r$ *sont extérieurement orthogonales, la forme*

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_1}\right)^2$$

est une combinaison linéaire de $\Phi_1, \ldots \Phi_r$. Plus généralement, il en sera de même de la forme (¹)

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i}\right)^2.$$

Or le nombre de celles des $r\,n$ formes linéaires $\frac{d\Phi_\alpha}{dx_i}$ qui sont linéairement indépendantes, indique évidemment le nombre minimum de variables en fonction desquelles on peut exprimer les formes données. On a donc le théorème suivant :

Étant données r formes quadratiques à n variables extérieurement orthogonales ne pouvant pas s'exprimer en fonction de moins de n variables, il existe une combinaison linéaire de ces formes qui est définie positive.

20. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Étant données r formes extérieurement orthogonales $\Phi_1, \ldots \Phi_r$ *à n variables, ne pouvant pas s'exprimer en fonction de moins de r variables, elles sont linéairement indépendantes et elles peuvent se déduire par une substitution orthogonale de r formes carrés parfaits de r formes linéaires indépendantes.*

(¹) Il en sera de même également des formes

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_j}, \qquad i\,(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Le théorème est vrai pour $r = 1$, car si Φ_1 dépend effectivement de x_1, les relations

$$\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_i}\right] = 0$$

montrent que toutes les dérivées partielles de la forme Φ_1 dépendent de $\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}$, et par suite Φ_1 est un carré parfait. On peut encore dire que la forme $\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\right)^2$ doit être de la forme $a\,\Phi_1$ (n° 19), ce qui démontre le théorème.

Supposons donc le théorème vrai pour $1, 2, \ldots, r-1$. D'après le n° 19, si les formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ ne peuvent pas s'exprimer en fonction de moins de $n \geqq r$ variables, l'une des combinaisons linéaires de ces formes est définie positive; si l'on prend alors une autre combinaison linéaire, on aura deux formes qui, comme on sait, peuvent être simultanément décomposées en carrés; on peut supposer que ces carrés sont

$$x_1^2, \quad x_2^2, \quad \ldots, \quad x_n^2.$$

D'après cela il est évident que les r dérivées partielles

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\Phi_r}{\partial x_1}$$

ne sont pas indépendantes; supposons que le nombre de celles d'entre elles qui sont indépendantes soit $q < r$. On peut alors, par une substitution orthogonale, supposer

$$\frac{\partial\Phi_{q+1}}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial\Phi_r}{\partial x_1} = 0;$$

on peut aussi supposer, par un changement de variables effectué sur $x_2, \ldots, x_n$, que les autres dérivées $\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_1}$ ne dépendent que de $x_1, x_2, \ldots, x_q$. Les relations

$$\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_i}\right] + \left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_i}\right] + \ldots + \left[\frac{\partial\Phi_q}{\partial x_1}\,\frac{\partial\Phi_q}{\partial x_i}\right] = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

montrent alors (n° 17) que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial\Phi_q}{\partial x_i}$ ne dépendent que de $x_1, \ldots, x_q$; autrement dit, *les q premières formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ ne dépendent que de $x_1, \ldots, x_q$*, les $r-q$ dernières pouvant dépendre de $x_2, \dots, x_n$, (et l'on peut même, sans compliquer la démonstration, supposer qu'elles dépendent aussi de x_1).

Cela posé, il existe une combinaison linéaire

$$\lambda_1 \Phi_1 + \dots + \lambda_q \Phi_q + \lambda_{q+1} \Phi_{q+1} + \dots + \lambda_r \Phi_r,$$

réductible à une somme de n carrés positifs indépendants; si l'on considère la forme

$$\lambda_{q+1} \Phi_{q+1} + \dots + \lambda_r \Phi_r,$$

elle est nécessairement réductible à une somme de carrés de

$$n - q' \geqq n - q,$$

formes linéaires indépendantes et, de ces $n - q'$ formes linéaires, $n - q$ doivent être indépendantes par rapport à $x_{q+1}, \dots, x_n$; on peut les prendre comme nouvelles variables $x_{q+1}, \dots, x_n$. En ne considérant alors dans $\Phi_{q+1}, \dots, \Phi_r$ que les termes du second degré en $x_{q+1}, \dots, x_n$, nous voyons que nous sommes dans les conditions d'application du théorème, car si $\Psi_{q+1}, \dots, \Psi_r$ sont les formes réduites ainsi obtenues, elles sont évidemment extérieurement orthogonales et elles ne peuvent pas s'exprimer avec moins de $n - q \geqq r - q$ variables. On peut donc par une substitution orthogonale ramener ces formes à

$$\begin{aligned} \Psi_{q+1} &= x_{q+1}^2, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ \Psi_r &= x_r^2, \end{aligned}$$

ce qui montre déjà que $n = r$.

Soit alors

$$\begin{aligned} \Phi_{q+1} &= x_{q+1}^2 + 2 x_{q+1} H_{q+1,q+1} + \dots + 2 x_r H_{q+1,r} + \overline{\Phi}_{q+1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Phi_r &= x_r^2 + 2 x_{q+1} H_{r,q+1} + \dots + 2 x_r H_{r,r} + \overline{\Phi}_r, \end{aligned}$$

où les $H_{\alpha\beta}$ sont des formes linéaires et les $\overline{\Phi_\alpha}$ des formes quadratiques en $x_1, \dots, x_q$. Les relations

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r} \left[\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_{q+i}} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_{q+j}} \right] = \left[\frac{\partial \Phi_{q+1}}{\partial x_{q+i}} \frac{\partial \Phi_{q+1}}{\partial x_{q+j}} \right] + \dots + \left[\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_{q+1}} \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_{q+j}} \right]$$
$$= [x_{q+i} H_{q+i,q+j}] - [x_{q+j} H_{q+j,q+i}] + \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r} [H_{\alpha,q+i} H_{\alpha,q+j}] = 0$$

donnent en particulier

$$H_{q+i,q+j} = 0 \qquad (i \neq j).$$

On peut ensuite, en remplaçant $x_{q+i} + H_{q+i,q+i}$ par x_{q+i}, supposer

$$H_{q+i,q+i} = 0.$$

Enfin les relations

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r} \left[\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_{q+i}} \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_j}\right] = \left[x_{q+i} \frac{\partial\overline{\Phi}_{q+i}}{\partial x_j}\right] = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, q)$$

montrent que les formes $\overline{\Phi}_{q+1}, \ldots, \overline{\Phi}_r$ sont identiquement nulles.

Les formes $\Phi_{q+1}, \ldots, \Phi_r$ se réduisant toutes à des carrés parfaits, les formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_q$ à q variables sont extérieurement orthogonales ; et, comme on a $q < r$, on peut appliquer le théorème à démontrer : on peut donc supposer, au moyen au besoin d'une substitution orthogonale, qu'on a

$$\Phi_\alpha = x_\alpha^2 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r).$$

Le théorème est ainsi complètement démontré.

21. Il est théoriquement possible, en employant le procédé suggéré au n° 19, de déterminer de proche en proche tous les systèmes de formes quadratiques extérieurement orthogonales à n variables. On sera aidé dans cette détermination par le théorème du numéro précédent et par la remarque suivante :

Étant données r *formes extérieurement orthogonales, si un certain nombre d'entre elles sont des carrés parfaits, les autres sont encore extérieurement orthogonales ;* il suffit, en effet, d'observer que, pour une forme Φ_α carré parfait, on a

$$\left[\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_j}\right] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous sommes maintenant facilement en mesure de démontrer que, *si $n \leqq 3$, on peut toujours, par une substitution orthogonale, supposer que les formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ sont des carrés parfaits.*

Remarquons d'abord qu'on peut toujours se ramener au cas de formes *linéairement indépendantes*, car si sur les r formes

$\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ il y en a ρ seulement indépendantes, il est possible de trouver une substitution orthogonale telle que les $r - \rho$ dernières formes soient identiquement nulles ; les ρ premières sont alors extérieurement orthogonales.

Cela posé, si $n = 1$, le théorème est évident; si $n = 2$, et que les formes ne puissent pas s'exprimer au moyen d'une seule variable, le théorème du n° 20 prouve que le théorème à démontrer est vrai pour $r = 2$; reste donc le cas $r = 3$, car il ne peut y avoir au plus que trois formes quadratiques linéairement indépendantes à deux variables; or, si $r = 3$, toute forme quadratique à deux variables est une combinaison linéaire de Φ_1, Φ_2, Φ_3 ; on peut donc en trouver une infinité qui sont des carrés parfaits, ce qui revient à supposer, par une substitution orthogonale, que Φ_1 est carré parfait : on est alors ramené au cas $r = 2$.

Passons maintenant au cas où les formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ ne peuvent pas s'exprimer en fonction de moins de trois variables. Le théorème n'est à démontrer, en vertu du n° 20, que pour $r > 3$. Si d'abord il y a 4 formes quadratriques linéairement indépendantes, les coefficients a_{ij} de ces formes sont assujetties à satisfaire à deux relations linéaires

$$\Sigma A_{ij} a_{ij} = 0, \qquad \Sigma B_{ij} a_{ij} = 0,$$

où A_{ij} et B_{ij} sont des constantes numériques. Une combinaison linéaire de $\Phi_1, \ldots, \Phi_4$ sera un carré parfait :

$$\lambda_1 \Phi_1 + \ldots + \lambda_4 \Phi_4 = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2,$$

si les coefficients a_i satisfont aux deux relations

$$\Sigma A_{ij} a_i a_j = 0, \qquad \Sigma B_{ij} a_i a_j = 0;$$

ces deux relations peuvent être regardées comme les équations de deux coniques ; si ces coniques ont au moins un point réel commun, on peut supposer que Φ_1 est un carré parfait, et l'on sera ramené au cas $r = 3$; si elles n'ont aucun point réel commun, on peut supposer, par un changement de variables, que ces relations se réduisent à

$$a_1^2 + a_3^2 = 0, \qquad a_2^2 + a_3^2 = 0;$$

les relations entre les coefficients a_{ij} des formes Φ_α seraient donc

$$a_{11} + a_{33} = 0, \qquad a_{22} + a_{33};$$

mais alors *aucune combinaison linéaire des* Φ *ne serait une forme définie positive*, ce qui est en opposition avec les résultats du nº 19.

Si, maintenant, $r = 5$, les coefficients a_{ij} des formes Φ_α sont liés par une seule relation

$$\Sigma A_{ij} a_{ij} = 0.$$

Si l'équation

$$\Sigma A_{ij} a_i a_j = 0$$

admet des solutions réelles, cela revient à supposer que Φ_1, par exemple, est un carré parfait, et l'on est ramené au cas $r = 4$; dans le cas contraire, cette équation est réductible à la forme

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0,$$

ce qui revient à dire qu'on a entre les coefficients a_{ij} des formes données la relation

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0,$$

mais alors aucune des combinaisons linéaires de $\Phi_1, \ldots, \Phi_5$ ne peut être une forme définie.

Enfin, si $r = 6$, il est évident que l'on peut trouver une infinité de combinaisons linéaires de $\Phi_1, \ldots, \Phi_6$ qui sont des carrés parfaits, et l'on peut ainsi se ramener au cas $r = 5$.

Le théorème est donc complètement démontré pour $n = 3$.

Le théorème n'est plus vrai pour $n > 3$.

22. On peut enfin se proposer le problème suivant :

Étant donné un réseau linéaire $\lambda_1 \Phi_1 + \ldots + \lambda_r \Phi_r$ *de formes quadratiques, trouver* r *formes indépendantes de ce réseau qui soient extérieurement orthogonales.*

On sait déjà que le problème n'est possible que si, les formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ ne pouvant pas s'exprimer en fonction de moins de r variables, le réseau contient au moins une forme quadratique définie positive. Mais la condition n'est évidemment pas suffisante.

Supposons qu'il existe r formes du réseau

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= a_{11}\Phi_1 + \ldots + a_{1r}\Phi_r,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \Psi_r &= a_{r1}\Phi_1 + \ldots + a_{rr}\Phi_r,\end{aligned}$$

qui soient extérieurement orthogonales. On aura les relations

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r}\left(a_{\alpha 1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega_i}+\ldots+a_{\alpha r}\frac{\partial\Phi_r}{\partial\omega_i}\right)\left(a_{\alpha 1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega_j}+\ldots+a_{\alpha r}\frac{\partial\Phi_r}{\partial\omega_j}\right)$$
$$=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\sum_{\mu=1}^{\mu=r}\left(\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r}a_{\alpha\lambda}a_{\alpha\mu}\right)\left[\frac{\partial\Phi_\lambda}{\partial\omega_i}\,\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial\omega_j}\right]$$
$$=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\sum_{\mu=1}^{\mu=r}A_{\lambda\mu}\left[\frac{\partial\Phi_\lambda}{\partial\omega_i}\,\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial\omega_j}\right]=0 \qquad (i, j=1, 2, \ldots, n)$$

avec

$$A_{\lambda\mu}=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=r}a_{\alpha\lambda}a_{\alpha\mu}.$$

Convenons de dire que *r formes quadratiques $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ sont extérieurement conjuguées par rapport à la forme quadratique*

$$H(u)=\sum_{\lambda,\mu}^{1,\ldots,r}A_{\lambda\mu}u_\lambda u_\mu$$

en $u_1, \ldots, u_r$ si l'on a les relations

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\sum_{\mu=1}^{\mu=r}A_{\lambda\mu}\left[\frac{\partial\Phi_\lambda}{\partial\omega_i}\,\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial\omega_j}\right]$$
$$=A_{11}\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega_i}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega_j}\right]+A_{12}\left\{\left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega_i}\,\frac{\partial\Phi_2}{\partial\omega_j}\right]+\left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial\omega_i}\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial\omega_j}\right]\right\}+\ldots=0.$$

Avec cette convention de langage, nous voyons que les r formes données $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ sont extérieurement conjuguées par rapport à la forme quadratique

$$H(u)=(a_{11}u_1+\ldots+a_{1r}u_r)^2+\ldots+(a_{r1}u_1+\ldots+a_{rr}u_r)^2.$$

La solution du problème proposé se déduit des considérations précédentes : *on cherchera toutes les formes quadratiques $H(u_1, \ldots, u_r)$ par rapport auxquelles les r formes données sont extérieurement conjuguées; on déterminera, s'il y en a, celles de ces formes qui sont définies positives; à chacune de ces formes correspondra une solution du problème, les formes cherchées $\Psi_1, \ldots, \Psi_r$ se déduisant des formes données $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$.*