P. FATOU

Sur les équations fonctionnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 47 (1919), p. 161-271

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1919__47__161_0>

SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES;

PAR M. P. FATOU.

(*Premier Mémoire.*)

INTRODUCTION.

Les équations fonctionnelles exprimant des égalités entre des fonctions inconnues d'une ou plusieurs variables et celles qu'on en déduit en effectuant sur ces variables des substitutions connues ou inconnues, ont attiré depuis plus d'un siècle l'attention des géomètres. Mais les premières recherches relatives à ces équations, recherches sans lien entre elles et sans méthode bien définie, appartenaient pour la plupart au domaine des mathématiques délectables. Dans une série de Mémoires d'une remarquable élégance, publiés vers 1884, M. Kœnigs (1) a rattaché l'étude de ces équations à la théorie générale des fonctions analytiques d'après Weierstrass. Considérant une fonction holomorphe d'une variable complexe, M. Kœnigs étudie les valeurs limites des fonctions itérées au voisinage d'un point double attractif, c'est-à-dire un point où la fonction et la variable prennent la même valeur, la dérivée de la première étant inférieure en module à l'unité. Il est ainsi conduit à démontrer l'existence d'une solution holomorphe de l'équation fonctionnelle de Schröder, d'où il déduit la solution du problème de l'itération analytique et de diverses équations fonctionnelles à une variable. Ses recherches ont été poursuivies par différents auteurs, notamment par MM. Leau (2), Grévy (3) et, dans le cas beaucoup plus difficile des fonctions de deux ou

(1) KŒNIGS, *Recherches sur les substitutions uniformes* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1883); *Recherches sur les équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*, 1884); *Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*, 1885).

(2) LEAU, *Étude sur les équations fonctionnelles à une ou plusieurs variables* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. XI, 1897).

(3) GRÉVY, *Sur les équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*, 1894).

trois variables, par MM. Picard (¹), Poincaré (²), Hadamard (³) et Lattès (⁴).

Mais les recherches de ces différents auteurs ne les conduisent en général, à part quelques cas simples, qu'à la démonstration de l'existence des solutions des équations fonctionnelles, qui se trouvent définies par un élément de fonction analytique. La connaissance du domaine d'existence de ces fonctions et l'étude de leurs singularités est en relation étroite avec l'étude des domaines de convergence des puissances des substitutions qui figurent dans l'équation considérée. Me bornant à l'étude de l'itération des substitutions rationnelles effectuées sur une seule variable complexe, et des équations fonctionnelles qui s'y rattachent, je me suis efforcé de déterminer ces domaines de convergences et d'établir quelques propriétés des transcendantes uniformes qui satisfont à ces équations. Dans une Note parue en 1906 (⁵), j'ai fait connaître une condition suffisante pour que les itérées d'une fonction rationnelle convergent vers un point double attractif dans tout le plan, sauf aux points d'un ensemble parfait partout discontinu qui forme la frontière du domaine de convergence. J'ai également indiqué des cas où la substitution présente deux points doubles attractifs dont les domaines respectifs sont d'un seul tenant, simplement connexes et séparés par une courbe qui, en

---

(¹) H. Poincaré, *Sur les courbes définies par des équations différentielles* (*Journal de Liouville*, 1886, p. 193-195).

(²) E. Picard, *Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1900); *Sur certaines équations fonctionnelles et sur une classe de surfaces algébriques* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, juillet 1904).

(³) J. Hadamard, *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1901).

(⁴) S. Lattès, *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (*Annali di Matematica*, 1906); *Nouvelles recherches sur les courbes invariantes par une transformation* (X, Y; x, y, y'). (*Annales de l'École Normale*, 1908).

(⁵) P. Fatou, *Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 143, 1906, p. 546); *Sur les substitutions rationnelles* (*Ibid.*, t. 165, 1917, p. 992); *Sur l'itération des substitutions rationnelles* (*Ibid.*, t. 164, 1917, p. 806); *Sur les équations fonctionnelles et les propriétés de certaines frontières* (*Ibid.*, t. 166, 1918, p. 204); *Sur les suites de fonctions analytiques* (*Ibid.*, t. 167, 1918, p. 1024).

général, n'est pas analytique. Ayant repris récemment l'étude de ces questions, j'ai d'abord fait connaître une classe étendue de substitutions rationnelles, pour lesquelles le problème de l'itération du point de vue qui nous occupe peut être complètement et simplement résolu. Ce sont les substitutions qui admettent un cercle fondamental. J'ai ensuite reconnu que les recherches récentes relatives aux fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles permettaient d'aborder le problème dans toute sa généralité; les propriétés des fonctions auxquelles nous faisons allusion sont dues principalement à MM. Landau et Schottky, et sont l'extension des théorèmes de M. Picard sur les fonctions entières. M. P. Montel, en leur appliquant la notion de suite normale de fonctions analytiques qui lui est due, est parvenu à des théorèmes élégants et d'un emploi très commode dans les applications. Nous avons fait exclusivement usage dans nos recherches des propositions de M. Montel (¹). Nous avons ainsi reconnu que la limitation des domaines de convergence des itérées d'une fonction rationnelle est liée à l'étude d'un ensemble parfait, que nous définissons comme l'ensemble des points où les itérées ne forment pas une suite normale; c'est également l'ensemble dérivé des points frontières des domaines où les itérées se répartissent en suites partielles uniformément convergentes. En appliquant aux fonctions inverses des fonctions itérées les théorèmes de M. Montel, nous avons obtenu d'autre part un résultat important, à savoir la limitation du nombre des groupes de points périodiques ou cycles dont le multiplicateur est au plus égal en module à l'unité. Enfin nous avons pu établir, du moins dans des cas très étendus, que les courbes limites des domaines de convergence sont des courbes qui n'ont de tangente en aucun point, ou dans quelques cas singuliers des tangentes en une infinité dénombrable de points seulement; on doit excepter les substitutions à cercle fondamental et hypothétiquement d'autres substitutions singulières pour lesquelles la question paraît difficile à élucider. Nous nous sommes

(¹) P. Montel, *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales de l'École Normale*, 1912); *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (*Annales de l'École Normale*, 1916); *Sur la représentation conforme* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 7ᵉ série, t. III, 1917) rencontrés dans ces recherches avec plusieurs auteurs qui sont parvenus en même temps et indépendamment à des résultats analogues aux nôtres, notamment MM. Ritt, Lattès et surtout M. G. Julia, dont les remarquables recherches ont fait l'objet d'un Mémoire non encore publié, couronné par l'Académie des Sciences, et dont les résultats ont été résumés par l'auteur dans diverses communications ([1]).

Nous avons divisé ce Mémoire en sept Chapitres.

Le Chapitre I traite de l'itération des fonctions rationnelles à un point de vue purement algébrique. On y établit une relation fondamentale entre les multiplicateurs des points doubles d'une même substitution et qui conduit facilement à cette conséquence qu'il y a toujours au moins un point double de multiplicateur plus grand que 1 en module ou égal à $+1$. La même relation appliquée aux substitutions itérées conduit à cette conséquence qu'il y a toujours une infinité de cycles dont le multiplicateur est plus grand que 1 en module ou égal à $+1$. Bien que ce résultat soit beaucoup moins précis que celui qui résulte de l'application des théorèmes généraux sur les suites de fonctions analytiques, la manière élémentaire dont il est obtenu mérite d'attirer l'attention, et la méthode pourrait peut-être conduire à d'autres résultats. Nous terminons ce Chapitre par l'exposé de quelques remarques se rapportant aux éléments de la théorie des fonctions algébriques et concernant les domaines invariants.

Le Chapitre II, qui a trait au problème local de l'itération, comprend, après rappel des résultats bien connus dus surtout à MM. Kœnigs et Leau, l'exposé de propositions nouvelles concernant les points doubles de multiplicateur égal à $+1$ ou à une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité. On y donne une expression asymptotique précise des fonctions itérées qui conduit à la démonstration de l'existence d'une solution de l'équation d'Abel et à l'étude des propriétés de cette solution.

Le Chapitre III est consacré à l'étude des substitutions à cercle fondamental et de quelques autres qui peuvent être étudiées d'une manière analogue. On aurait pu abréger cette exposition en

---

([1]) *Voir* notamment : G. Julia, *Sur les substitutions rationnelles* (*Comptes rendus*, t. 165, 31 décembre 1917, p. 1098).

utilisant les théorèmes généraux du Chapitre suivant; mais il nous a paru préférable de conserver cette exposition élémentaire, les méthodes qui y sont employées pouvant être utiles dans la solution d'autres problèmes que l'on rencontre dans cette théorie.

Le Chapitre IV contient l'application de la théorie des familles normales aux fonctions itérées et à leurs inverses. On y donne les principales propriétés de l'ensemble parfait caractéristique $\mathcal{F}$ et on y fait connaître le moyen, d'ailleurs en théorie très imparfait, de trouver les points doubles ou périodiques en nombre limité, qui sont des points limites de conséquents de certains domaines.

Le Chapitre V contient l'exposé de certaines propriétés des domaines relatifs aux points doubles, concernant notamment l'ordre de connexion, et diverses applications numériques.

Le Chapitre VI contient les recherches relatives au caractère non analytique des courbes qui limitent les domaines et à la non-existence des tangentes à ces courbes. Les démonstrations qui y sont employées reposent d'une part sur les propriétés de la représentation conforme, d'autre part sur les propriétés des suites normales dues à M. Montel, et quelques autres nouvelles qui en découlent aisément.

Le Chapitre VII est consacré à l'étude des transcendantes uniformes qui vérifient les équations fonctionnelles de Schröder et d'Abel et quelques équations analogues.

On verra que les recherches exposées dans ce Mémoire présentent encore en bien des points des lacunes que nous ne sommes pas parvenus à combler, notamment dans l'étude de certains cas singuliers qui paraît beaucoup plus difficile que celle des cas généraux, et pour lesquels les méthodes employées ne donnent que des résultats tout à fait insuffisants. Il est donc à souhaiter qu'elles soient poursuivies.

CHAPITRE I.

1. Soit $R(z)$ une fonction rationnelle de degré d $(d > 1)$ [1] de la variable complexe z; si l'on pose

$$z_1 = R(z), \qquad z_n = R(z_{n-1}),$$

---

[1] Nous laisserons de côté en général les substitutions linéaires dont l'itération conduit à des résultats simples et parfaitement connus.

on peut exprimer z en fonction de z au moyen de la formule

$$z_n = \mathrm{R}_n(z),$$

$\mathrm{R}_n(z)$ désignant une fraction rationnelle dont le degré est exactement d^n. Les fonctions $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots, \mathrm{R}_n, \ldots$ sont les *itérées* successives de $\mathrm{R}(z)$. Les points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ s'appellent les *conséquents* successifs du point z; en particulier $z_1 = \mathrm{R}(z)$ est le *conséquent immédiat* de z. Inversement z étant donné, les points racines z_{-n} de l'équation $\mathrm{R}_n(y) = z$ sont les *antécédents* de rang n du point z; ces points au nombre de d^n sont distincts quand z est arbitraire. En particulier les antécédents de rang 1 seront aussi appelés *antécédents immédiats* de z. On peut écrire : $z_{-n} = \mathrm{R}_{-n}(z)$, $\mathrm{R}_{-n}(z)$ étant une fonction algébrique à d^n branches qui est la fonction inverse de $\mathrm{R}_n(z)$. Par suite de l'existence de ces valeurs multiples, deux points peuvent donner lieu à un terme commun dans les suites de leurs conséquents respectifs sans être conséquent l'un de l'autre; si deux points z et z' sont tels que $\mathrm{R}_n(z) = \mathrm{R}_{n'}(z')$ pour deux valeurs entières positives convenables n et n', on dit qu'ils sont *équivalents;* c'est en effet la condition nécessaire et suffisante pour que les deux points z et z' se déduisent l'un de l'autre par une substitution du groupe G de substitutions algébriques qui dérive de la substitution $[z|\mathrm{R}(z)]$ et de son inverse; nous verrons que ce groupe peut être proprement ou improprement discontinu; son étude est intimement liée à toutes les questions examinées dans ce Mémoire.

L'un des problèmes fondamentaux qui se posent dans l'étude de l'itération des substitutions rationnelles est la recherche des figures invariantes par ces substitutions et tout d'abord des points invariants. Les points invariants ou *points doubles* de substitution : $z_1 = \mathrm{R}(z)$, correspondent aux valeurs finies ou infinies de z qui vérifient la relation $z = \mathrm{R}(z)$. Pour que le point à l'infini soit un point double, il faut et il suffit que le degré du numérateur de $\mathrm{R}(z)$ soit supérieur au degré du dénominateur. On appelle *multiplicateur* d'un point double α un nombre s égal à $\mathrm{R}'(\alpha)$ si α est fini, à $\frac{1}{\mathrm{R}'(\alpha)}$ si α est infini. On vérifie immédiatement que ce nombre s est invariant relativement à toute transformation homographique effectuée simultanément sur les deux variables z_1 et z, et plus généralement à toute transformation conforme régulière et biunivoque au voisinage du point double. On a d'ailleurs, au voisinage de α,

$$z_1 - \alpha = s(z - \alpha) + R(z - \alpha)^2 + \dots$$

ou, si α est à l'infini,

$$z_1 = \frac{z}{s} + k + \frac{l}{z} + \dots.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le point double α soit racine multiple de l'équation $R(z) = z$ est que le multiplicateur s soit égal à $+1$. S'il en est ainsi on aura, au voisinage de ce point double supposé racine d'ordre q de l'équation $R(z) = z$,

$$z_1 - \alpha = z - \alpha + k(z - \alpha)^{q+1} + \dots \qquad (k \neq 0)$$

ou, si α est à l'infini,

$$z_1 = z + \frac{k}{z^{q-1}} + \dots.$$

Le nombre total des points invariants, chacun d'eux étant compté avec son degré de multiplicité en tant que racine de $R(z) = z$, est égal à $d + 1$.

2. Nous allons établir une relation importante entre les multiplicateurs des points doubles d'une même substitution rationnelle. On peut supposer que le point à l'infini n'est pas un point double. Nous supposerons, en outre, que tous les points doubles sont distincts. Considérons alors la fraction rationnelle : $\varphi(z) = \frac{1}{R(z) - z}$. Les points doubles α sont des pôles simples de $\varphi(z)$ qui, en outre, s'annule à l'infini. On a donc

$$\varphi(z) = \frac{1}{R(z) - z} = \sum \frac{A}{z - \alpha}.$$

On trouve immédiatement $A = \frac{1}{R'(\alpha) - 1} = \frac{1}{s - 1}$. En égalant les termes principaux $\left(\text{en } \frac{1}{z}\right)$ des deux derniers membres, il vient

$$\Sigma A = -1$$

ou

$$\sum_{1}^{d+1} \frac{1}{s-1} + 1 = 0.$$

Telle est la relation que nous voulions établir.

Une conséquence facile de cette relation est l'existence d'au moins un point double de multiplicateur plus grand en module que l'unité.

Posons, en effet,

$$s = u + iv,$$

$$\sigma = \frac{1}{s-1} = \xi + i\eta.$$

Il s'ensuit

$$\xi = \frac{u-1}{u^2+v^2-2u+1}.$$

Les relations $\xi = -\frac{1}{2}$, $\xi > -\frac{1}{2}$, $\xi < -\frac{1}{2}$ équivalent respectivement à : $u^2+v^2=1$, $u^2+v^2>1$, $u^2+v^2<1$, c'est-à-dire que la circonférence $|s|=1$, l'extérieur et l'intérieur de cette circonférence correspondent respectivement dans le plan de la variable σ à la droite $\mathcal{R}(\sigma) = -\frac{1}{2}$, et aux demi-plans à droite et à gauche de cette droite. En vertu de la relation fondamentale, on a

$$\sum_{1}^{d+1} \xi = -1.$$

Comme $d+1$ est au moins égal à $3\,(d>1)$, les ξ ne sont pas tous inférieurs ou égaux à $-\frac{1}{2}$, car cela entraînerait $\Sigma\xi \leqq -\frac{3}{2} < -1$. On a donc, pour au moins un point double,

$$\mathcal{R}(\sigma) > -\frac{1}{2}$$

ou

$$|s| > 1$$

Remarquons qu'on peut donner des valeurs arbitraires à tous les multiplicateurs, sauf un seul qui se trouve alors déterminé par la relation fondamentale; il peut donc n'y avoir qu'un seul point double pour lequel $|s|$ soit supérieur à l'unité.

Si l'on considère les coefficients de la fraction $R(z)$ de degré d comme des variables indépendantes, les s qui sont des fonctions algébriques de ces coefficients vérifient identiquement la relation fondamentale. Si ces coefficients tendent vers des valeurs numériques telles que l'un des s devienne égal à $+1$ et par suite $\frac{1}{s-1}$ infini, il y a, en vertu de la relation fondamentale, un autre multiplicateur qui tend vers $+1$.

Supposons maintenant que, l'infini n'étant pas un point double, certains des multiplicateurs soient égaux à $+1$. On aura alors pour la fraction $\frac{1}{R(z)-z}$ une décomposition en éléments simples de la forme

$$\frac{1}{R(z)-z} = \sum \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{z-\alpha} + \sum{}' \left[\frac{a_{-q}}{(z-\beta)^q} + \frac{a_{-(q-1)}}{(z-\beta)^{q-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-\beta}\right],$$

la seconde sommation étant étendue aux points doubles de multiplicateur égal à $+1$ et l'entier q étant par suite > 1. On en déduit, entre les coefficients a_{-1} et les multiplicateurs s différents de 1, la relation

$$\sum \frac{1}{s-1} + \sum{}' a_{-1} + 1 = 0.$$

3. Considérons maintenant une fonction $R_n(z)$, itérée de $R(z)$ et les points racines de l'équation

$$R_n(z) = z.$$

Soit α un tel point et p le plus petit entier tel que $R_p(\alpha) = \alpha$; les points $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ sont tous distincts, car si l'on avait $\alpha_h = \alpha_k$, h et k étant plus petits que p, on en déduirait

$$R_{p-h}(\alpha_h) = R_{p-h}(\alpha_k),$$

c'est-à-dire

$$R_p(\alpha) = R_{p-h+k}(\alpha),$$

et comme $R_p(\alpha) = \alpha$:

$$\alpha = R_{p+k-h}(\alpha) = R_q(\alpha).$$

Si $h > k$, on a $q = p + k - h < p$; d'ailleurs $q \geqq 1$. Donc p ne serait pas le plus petit entier tel que $R_p(\alpha) = \alpha$.

La suite α, α_1, α_2, ... est périodique, la période comprenant p termes et tous les termes d'une période étant distincts. On dit que les points $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ forment un *cycle* d'ordre p. Tous les points du cycle sont racines de l'équation $R_p(z) = z$. Considérés comme points doubles de la substitution $Z = R_p(z)$, ils ont tous même multiplicateur. On a en effet, en supposant qu'aucun des points α ne soit à l'infini,

$$s = R'_p(\alpha) = R'(\alpha)R'(\alpha_1)\ldots R'(\alpha_{p-1}) = R'_p(\alpha_1) = R'_p(\alpha_2) = \ldots;$$

le nombre s est le multiplicateur du cycle.

Remarquons que les racines de $R_n(z) = z$ se répartissent en cycles dont les ordres sont des diviseurs de n. En particulier, parmi ces racines, se trouvent celles de $R(z) = z$, c'est-à-dire les points doubles. Soit α un point double de multiplicateur s, de sorte que

$$R(z) = \alpha + s(z-\alpha) + a(z-\alpha)^q + \ldots \qquad (a \neq 0).$$

On trouve aisément par récurrence

$$R_n(z) = \alpha + s^n(z-\alpha)$$
$$+ as^{n-1}[1 + s^{q-1} + s^{2(q-1)} + \ldots + s^{(n-1)(q-1)}](z-\alpha)^q + \ldots$$

ou

$$R_n(z) - z = (s^n - 1)(z-\alpha)$$
$$+ as^{n-1}[1 + s^{q-1} + s^{2(q-1)} + \ldots + s^{(n-1)(q-1)}](z-\alpha)^q + \ldots.$$

Il s'ensuit que tant que s est différent de l'unité, α est un zéro de même ordre de multiplicité pour $R(z) - z$ et $R_n(z) - z$ (c'est alors un zéro simple). Il en est de même si $s = +1$, car on a dans ce cas

$$R(z) - z = a(z-\alpha)^q + \ldots,$$
$$R_n(z) - z = na(z-\alpha)^q + \ldots,$$

c'est-à-dire que α est un zéro d'ordre q pour ces deux expressions.

Supposons maintenant que s soit une racine primitive de $s^r = 1$ $(r > 1)$. Si n n'est pas multiple de r, α est racine simple des deux équations. Si n est multiple de r, α racine simple de la première équation est racine d'ordre q au moins pour la seconde : exactement d'ordre q si $s^{q-1} = +1$, c'est-à-dire si $q-1$ est multiple de r, d'ordre supérieur à q, si $q-1$ n'est pas multiple de r.

Si n est un nombre premier absolu, et distinct des entiers r en nombre limité correspondant aux multiplicateurs des points doubles qui sont de la forme $e^{2i\pi\frac{m}{r}}$, les zéros de $R(z) - z$ sont des zéros du même ordre de multiplicité de $R_n(z) - z$; les zéros de cette dernière fonction qui n'appartiennent pas à la première et dont le nombre est $d^n - d$ forment alors $\frac{d^n - d}{n}$ cycles d'ordre n. On voit donc qu'il y a des cycles de points d'ordre aussi élevé qu'on le veut, notamment des cycles d'ordre n quand n est un nombre premier supérieur à une certaine limite.

4. Considérons une fraction rationnelle $R(z)$ telle que $R(z) = z$ ait toutes ses racines distinctes ; soit n un nombre premier distinct des entiers r définis au paragraphe précédent et t le multiplicateur d'un cycle d'ordre n. Si aucun des t n'est égal à $+1$, l'analyse du n° 2 appliquée à $R_n(z)$ conduit à la relation

$$n\sum \frac{1}{t-1} + \sum \frac{1}{s^n - 1} + 1 = 0,$$

la première sommation étant étendue aux $\frac{d^n - d}{n}$ cycles d'ordre n, la seconde aux $(d+1)$ points doubles de multiplicateurs s.

Pour $n = 2$, on a la relation

$$2\sum_{1}^{\frac{d^2-d}{2}} \frac{1}{t-1} + \sum_{1}^{d+1} \frac{1}{s^2 - 1} + 1 = 0,$$

valable tant qu'aucun s n'est égal à ± 1, ni aucun t à $+1$. Multiplions par 2 les deux membres de cette relation et retranchons de la relation

$$\sum \frac{1}{s-1} + 1 = 0.$$

Il vient

$$4\sum_{1}^{\frac{d^2-d}{2}} \frac{1}{t-1} + \sum_{1}^{d+1} \frac{1}{-s-1} + 1 = 0.$$

Cette relation qui a lieu identiquement quand les coefficients de $R(z)$ sont arbitraires conserve un sens quand certains des s tendent vers $+1$ et demeure vérifiée, comme nous l'exposerons en détail à la fin de ce paragraphe, à condition d'y remplacer s par $+1$ un nombre de fois égal à la somme des ordres de multiplicité des points doubles de multiplicateur $+1$ en tant que racines de l'équation $R(z) = z$.

Il découle aisément de cette relation (où l'on suppose $t \neq +1$, $s \neq -1$) qu'il y a toujours soit une valeur de t, soit deux valeurs de s supérieures à l'unité en module, soit encore un s égal à $+1$ et un autre plus grand que 1 en module.

En effet, si l'on a $|t| \leqq 1$ pour tous les couples d'ordre 2, aucun s n'étant égal à $+1$, et un seul s, que nous désignons par s', étant supérieur à 1 en module, la relation précédente donne en égalant à zéro la partie réelle du premier membre

$$4\sum_{1}^{\frac{d^2+d}{2}} \mathcal{R}\left(\frac{1}{t-1}\right) + \sum_{1} \mathcal{R}\left(\frac{1}{-s-1}\right) + \mathcal{R}\left(\frac{1}{-s'-1}\right) + 1 = 0,$$

$$4\sum_{1}^{\frac{d^2-d}{2}} \left(-\frac{1}{2} - P\right) + \sum_{1}^{d} \left(-\frac{1}{2} - Q\right) + \mathcal{R}\left(\frac{1}{-s'-1}\right) + 1 = 0,$$

P et Q étant des quantités positives ou nulles. Comme $d \geqq 2$, $\frac{d^2-d}{2} \geqq 1$, on tire de là

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{-s'-1}\right) = -1 + 4\sum_{1}^{\frac{d^2-d}{2}} \frac{1}{2} + \sum_{1}^{d} \frac{1}{2} + H,$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{-s'-1}\right) = 2 + K,$$

H et K étant des quantités positives ou nulles.

D'autre part, la relation fondamentale du n° 2 donne

$$\sum_{1}^{d} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s'-1} + 1 = 0,$$

$$\sum_{1}^{d} \left(-\frac{1}{2} - L\right) + \mathcal{R}\left(\frac{1}{s'-1}\right) + 1 = 0 \qquad (L \geqq 0),$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{s'-1}\right) = -1 + \sum_{1}^{d} \left(-\frac{1}{2}\right) + \Sigma L,$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{s'-1}\right) = M \geqq 0.$$

On aura donc simultanément

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{s'-1}\right) \geqq 0,$$
$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{-s'-1}\right) \geqq 2 > 0.$$

Ces deux inégalités sont incompatibles. En effet, en posant $s' = u + iv$, on en déduirait

$$u - 1 \geqq 0$$

et

$$u + 1 < 0,$$

qui le sont évidemment.

Supposons maintenant qu'il y ait un s égal à $+1$ (les hypothèses $t \neq +1$, $s \neq -1$ étant conservées). L'égalité

$$4\sum_{1}^{\frac{d^2-d}{2}} \mathfrak{R}\left(\frac{1}{t-1}\right) + \sum_{1}^{a+1} \mathfrak{R}\left(\frac{1}{-s-1}\right) + 1 = 0$$

montre alors, ainsi qu'il découle de l'analyse du n° 2, qu'il y a un $|t|$ ou un $|s|$ supérieur à 1.

En combinant ces résultats avec ceux du n° 2, on voit en définitive qu'*il y a toujours soit deux points doubles distincts, soit un point double et un couple périodique d'ordre* 2 *dont les multiplicateurs sont supérieurs à* 1 *en module ou égaux à* ± 1.

Supposons maintenant que n soit un nombre premier quelconque distinct des entiers r considérés plus haut. On a la relation

$$n\sum_{1}^{\frac{d^n-d}{n}} \frac{1}{t-1} + \sum_{1}^{d+1} \frac{1}{s^n-1} + 1 = 0,$$

si aucun des s ni aucun des t n'est égal à $+1$. Il s'ensuit, comme nous allons le voir, que pour n suffisamment grand, il y a au moins un t supérieur en module à l'unité; car en égalant à zéro la partie réelle du premier membre, on a

$$n\sum_{1}^{\frac{d^n-d}{n}} \mathfrak{R}\left(\frac{1}{t-1}\right) + \sum_{1}^{d+1} \mathfrak{R}\left(\frac{1}{s^n-1}\right) + 1 = 0.$$

Le second terme du premier membre reste borné quel que soit n; car la partie réelle de $\frac{1}{s^n - 1}$ tend vers -1 pour n infini si $|s| > 1$, vers zéro si $|s| < 1$ et est constamment égale à $-\frac{1}{2}$ si $|s| = 1$; on a donc, quel que soit n,

$$-A < \sum_{1}^{d+1} \mathcal{R}\left(\frac{1}{s^n - 1}\right) + 1 < +A,$$

A étant fixe. Si tous les $|t|$ étaient inférieurs à 1, on aurait

$$n \sum_{1}^{\frac{d^n - d}{n}} \mathcal{R}\left(\frac{1}{t - 1}\right) < -\left(\frac{d^n - d}{2}\right)$$

en valeur algébrique; et par suite

$$\frac{d^n - d}{2} < A,$$

ce qui est manifestement impossible, $\frac{d^n - d}{2}$ tendant vers l'infini avec n. Ainsi donc, si une substitution rationnelle n'a que des points invariants distincts, elle possède des cycles d'ordre n dont le multiplicateur est plus grand que 1 en module ou égal à $+1$, pourvu que n soit un nombre premier suffisamment grand.

Nous allons montrer que la conclusion subsiste quand la substitution a des points invariants confondus, c'est-à-dire de multiplicateur égal à $+1$. En effet, si d'abord les coefficients de $R(z)$ sont arbitraires, on a les deux relations

$$n \sum_{1}^{\frac{d^n - d}{n}} \frac{1}{t - 1} + \sum_{1}^{d+1} \frac{1}{s^n - 1} + 1 = 0,$$

$$\sum_{1}^{d+1} \frac{1}{s - 1} + 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$n \sum_{1}^{\frac{d^n - l}{n}} \frac{1}{t - 1} + \sum_{1}^{d+1} \beta_n(s) + 1 - \frac{1}{n} = 0,$$

en posant

$$\beta_n(s) = \frac{1}{s^n - 1} - \frac{1}{n}\frac{1}{s-1}.$$

$\beta_n(s)$ n'a pas de pôle en $s = 1$; sa valeur en ce point est égale à $-\frac{n-1}{2n}$.

L'identité qui précède ayant lieu quand lès coefficients de $R(z)$ sont arbitraires subsiste quand certains des multiplicateurs s deviennent égaux à $+1$, en tenant compte de ce que ces valeurs de s sont multiples. En égalant à zéro la partie réelle du premier membre, on a

$$\sum_1^{\frac{d^n-d}{n}} \mathcal{R}\left(\frac{1}{t-1}\right) + \sum_1^{d+1} \mathcal{R}[\beta_n(s)] + 1 - \frac{1}{n} = 0.$$

On voit facilement que $\mathcal{R}[\beta_n(s)]$ tend vers zéro si $|s| > 1$, vers -1 si $|s| < 1$, et vers $-\frac{1}{2}$ si $|s| = 1$, la valeur $s = +1$ n'étant pas exclue. L'analyse précédente montre alors que lorsque n dépasse une certaine limite, il y a au moins une valeur de $|t| > 1$, la conclusion n'étant en défaut que s'il existe un $t = +1$.

Il importe de justifier d'une manière précise le remplacement de s par $+1$ dans la dernière formule, lorsqu'il y a des points invariants confondus. Soit $R(z)$ une fraction rationnelle telle que l'équation $R(z) = z$ admette la racine $z = 0$ avec un ordre de multiplicité égal à $q > 1$, de sorte que

$$R(z) = z + a z^q + b z^{q+h} + \ldots.$$

Remplaçons $R(z)$ par $R(z) + \lambda$, λ étant un paramètre arbitraire; $R_n(z)$ devient $R_n(z, \lambda)$, fonction rationnelle de z et de λ. Les racines des équations

$$R_n(z, \lambda) = z \qquad \text{et} \qquad R(z) + \lambda = z$$

sont des fonctions algébriques de λ qui sont holomorphes pour $\lambda = 0$ si les expressions

$$\frac{\partial}{\partial z}[R_n(z, \lambda) - z] \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial z}[R(z) + \lambda - z]$$

ne sont pas nulles pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire si les multiplicateurs t

et s sont différents de $+1$ pour $\lambda = 0$; s'il en est ainsi les multiplicateurs des points doubles et des cycles d'ordre n, pour λ quelconque, ayant pour expressions

$$\frac{\partial}{\partial z} R_n(z, \lambda) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial z}[R(z) + \lambda] = R'(z),$$

sont également des fonctions holomorphes de λ, continues par conséquent pour $\lambda = 0$.

Considérons maintenant le point double $z = 0$, racine d'ordre q de l'équation $R(z) = z$. Pour λ infiniment petit, l'équation $R(z) + \lambda = z$, c'est-à-dire

$$\lambda + az^q + bz^{q+h} + \ldots = 0$$

admet q racines infiniment petites, formant un cycle et développables suivant les puissances de $\lambda^{\frac{1}{q}}$,

$$z = A\lambda^{\frac{1}{q}} + B\lambda^{\frac{2}{q}} + \ldots.$$

Les multiplicateurs correspondants ont pour expression

$$s = R'(z)\,1 + qaz^{q-1} + (q+h)bz^{q+h-1} + \ldots = 1 + (\quad)\lambda^{\frac{q-1}{q}} + \ldots.$$

Ces q multiplicateurs prennent la valeur 1 et sont continus pour $\lambda = 0$. On voit par là que le passage à la limite effectué au cours de ce paragraphe est légitime à condition de remplacer s par $+1$ dans les formules un nombre de fois égal à

$$q + q' + q'' + \ldots,$$

q, q', q'', ... étant les ordres de multiplicité des divers points doubles de multiplicateur $+1$, en tant que racines de $R(z) = z$.

Il est donc démontré dans tous les cas qu'*il existe une infinité de cycles dont les multiplicateurs sont supérieurs à l'unité en valeur absolue ou égaux à* $+1$. Nous démontrerons plus tard un théorème beaucoup plus précis, à savoir qu'il existe seulement un nombre fini de cycles dont les multiplicateurs sont au plus égaux à l'unité en valeur absolue; mais ce dernier résultat ne pourra être obtenu que par des méthodes transcendantes, à savoir par l'application des théorèmes récents concernant les suites de fonctions analytiques. Le résultat démontré ici, qui nous servira d'ailleurs pour les développements ultérieurs, a été obtenu au contraire par une méthode algébrique élémentaire qui serait peut-être susceptible d'être poussée plus loin.

5. Nous allons aborder maintenant une autre recherche également très élémentaire, à savoir celle des points qui n'ont qu'un nombre limité d'antécédents. Soit a un tel point et $R(z)$ la fraction rationnelle considérée. Il est clair que a est un point périodique, car a ayant deux antécédents de rangs différents p et $p+q$ qui coïncident, on aura

$$R_{p+q}(a_{-p+q}) = a,$$
$$R_{p+q}(a_{-p}) = R_q[R_p(a_{-p})] = R_q(a).$$

Comme $a_{-p} = a_{-p-q}$, on a aussi : $a = R_q(a)$, c'est-à-dire que a est un point double de substitution $[z|S(z)]$, en posant

$$S(z) = R_q(z).$$

Cette dernière substitution donne lieu à une chaîne d'antécédents de a que nous désignerons encore par

$$a, \quad a_{-1}, \quad a_{-2}, \quad \ldots, \quad a_{-n}, \quad \ldots,$$

et dont chacun est un antécédent immédiat de celui qui est écrit à sa gauche, c'est-à-dire que l'on a

$$S(a_{-n}) = a_{-(n-1)},$$

d'où l'on déduit

$$S_k(a_{-n}) = a_{-(n-k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Les antécédents distincts de a étant en nombre limité, on aura

$$a_{-p} = a_{-p-q} \qquad (q \geqq 1),$$

d'où

$$S_{p+q-1}(a_{-p}) = S_{p+q-1}(a_{-p-q}).$$

Or on a évidemment

$$S_{p+q-1}(a_{-p}) = S_{q-1}[S_p(a_{-p})] = S_{q-1}(a) = a,$$
$$S_{p+q-1}(a_{-p-q}) = a_{-1}.$$

Par suite,

$$a = a_{-1}.$$

Donc tous les antécédents immédiats de a sont égaux à a. Si l'on fait en sorte, par une transformation homographique préalable, que a soit le point à l'infini, l'équation $S(z) = \infty$ n'ayant que des racines infinies, $S(z)$ est un polynome.

Nous sommes donc ramenés à traiter le problème suivant :

Trouver les fonctions rationnelles $R(z)$ *dont l'une des itérées* $R_q(z)$ *est un polynome.*

Si $R(z)$ n'est pas un polynome, soit ϖ un pôle de $R(z)$ à distance finie. En vertu de l'identité

$$R[R_{q-1}(z)] = S(z) = \text{polynome en } z,$$

l'équation

$$R_{q-1}(z) = \varpi$$

entraîne

$$S(z) = \infty \qquad \text{et} \qquad z = \infty.$$

Il s'ensuit que la fraction rationnelle $\dfrac{1}{R_{q-1}(z) - \varpi}$ ne devient infinie que pour z infini ; c'est donc un polynome $P(z)$, et l'on a

$$R_{q-1}(z) = \varpi + \frac{1}{P(z)}.$$

Si $R(z)$ avait un autre pôle ϖ' à distance finie, on aurait

$$R_{q-1}(z) = \varpi + \frac{1}{P(z)} = \varpi' + \frac{1}{P'(z)}.$$

P' étant un autre polynome, ceci est impossible, car on en déduirait

$$\varpi - \varpi' = \frac{P(z) - P'(z)}{P(z)\,P'(z)}.$$

P et P' n'étant pas des constantes, le degré du numérateur au second membre est inférieur à celui du dénominateur ; l'égalité ne peut avoir lieu que si les deux membres sont identiquement nuls ; $\omega = \varpi'$. $R(z)$ a donc un pôle unique à distance finie, et l'on peut écrire

$$R(z) = \frac{A}{(z - \varpi)^h} + B,$$

A et B étant des polynomes en z dont le premier est de degré inférieur à h. On voit que B est une constante, sinon l'infini serait un point double de la substitution $Z = R(z)$ et de toutes ses itérées, en particulier de $Z = R_{q-1}(z)$, ce qui est incompatible avec l'égalité $R_{q-1}(z) = \varpi + \frac{1}{P(z)}$ qui donne $R_{q-1}(\infty) = \varpi$.

Nous allons voir que A est aussi une constante. On a, en effet,

$$R_{q-1}[R(z)] = S(z) = \text{polynome en } z.$$

En intervertissant le rôle des fonctions R et R_{q-1} dans le raisonnement fait plus haut, on voit que $R_{q-1}(z)$ a un pôle unique ρ à distance finie, et que de plus

$$R(z) = \rho + \frac{1}{Q(z)},$$

$Q(z)$ étant un polynome. En égalant les deux expressions obtenues pour $R(z)$, on a

$$\rho + \frac{1}{Q(z)} = \frac{A}{(z-\varpi)^h} + B,$$

ce qui donne pour $z = \infty$

$$\rho = B,$$

et comme A n'est pas divisible par $(z - \varpi)$, on obtient ensuite

$$A = \text{const.}$$

On a donc

$$R(z) = \frac{A}{(z-\varpi)^h} + \rho.$$

Mais on a aussi pour $R_{q-1}(z)$, qui admet le pôle unique ρ à distance finie, l'expression suivante, où C et D sont des polynomes :

$$R_{q-1}(z) = \frac{C}{(z-\rho)^k} + D,$$

C étant de degré inférieur à k et non divisible par $z - \rho$. En égalant les deux expressions de $R_{q-1}(z)$, on a

$$\frac{C}{(z-\rho)^k} + D = \varpi + \frac{1}{P(z)}.$$

En faisant $z = \infty$, on voit que D est égal à la constante ϖ; il s'ensuit que C est aussi une constante. On a finalement

$$R\quad(z) = \frac{A}{(z-\varpi)^h} + \rho,$$
$$R_{q-1}(z) = \frac{A}{(z-\rho)^k} + \varpi,$$

A et C étant des constantes. L'identité

$$R_{q-1}[R(z)] = R[R_{q-1}(z)]$$

donne alors

$$\frac{A}{C^h}(z-\rho)^{kh}+\rho = \frac{C}{A^k}(z-\varpi)^{kh}+\varpi.$$

On en déduit, en égalant dans les deux membres les termes en z^{kh} et z^{kh-1} (il n'y a pas lieu de s'attarder au cas banal où $k = h = 1$),

$$\frac{A}{C^h} = \frac{C}{A^k},$$

$$\varpi = \rho.$$

Nous obtenons finalement l'expression de $R(z)$:

$$R(z) = \frac{A}{(z-\varpi)^h} + \varpi$$

ou

$$R(z) - \varpi = \frac{A}{(z-\varpi)^h}.$$

Sous cette forme, il est évident que les itérées d'ordre pair de $R(z)$ sont des polynomes, tandis que les itérées d'ordre impair admettent le pôle $z = \varpi$.

Il suit de là facilement qu'étant donnée une substitution rationnelle $Z = R(z)$, tout point a admet une infinité d'antécédents, sauf dans les cas suivants : 1° si la substitution se ramène à la forme polynomiale, il y a un point : le point à l'infini, qui est confondu avec tous ses antécédents; 2° si la substitution se ramène à la forme $Z = Az^m$, il y a deux points o et ∞ jouissant de cette même propriété; 3° si la substitution se ramène à la forme $Z = \frac{A}{z^m}$, il y a deux points o et ∞ formant un cycle d'ordre deux qui constituent l'ensemble des antécédents de chacun d'eux.

6. Nous aurons à faire intervenir fréquemment, dans les Chapitres suivants, les points critiques des fonctions inverses $R_{-n}(z)$. Nous allons montrer que ces points sont les conséquents jusqu'au rang $n-1$ inclus des points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$. En effet, les points critiques c de $R_{-1}(z)$ sont les valeurs de c pour lesquelles l'équation $R(z) = c$ a deux racines égales. De même les points critiques de $R_{-n}(z)$ sont les nombres c' pour lesquels l'équation

$$R_n(z) = R_{n-1}[R(z)] = c'$$

a deux racines égales. Cette dernière équation équivaut au système

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x) &= c', \\ R\quad(z) &= x. \end{aligned}$$

Elle aura une racine double si l'une ou l'autre de ces deux équations a une racine double ; si c'est la seconde, x est confondu avec un point critique c de $R_{-1}(z)$ et l'on a

$$c' = R_{n-1}(c).$$

Si c'est la première équation qui a une racine double, c' est un point critique de la fonction $R_{-(n-1)}(z)$. Il s'ensuit que si la proposition énoncée est vraie quand on remplace n par $n - 1$, elle est encore vraie pour n, car les points critiques de $R_{-n}(z)$ sont alors les points : c, $R(c), \ldots, R_{n-2}(c)$ et $R_{n-1}(c)$. Or, pour $n = 1$, la proposition est une simple tautologie; elle est donc générale.

Nous aurons à compléter ces remarques au sujet des points critiques, mais auparavant nous devons donner certaines définitions et propriétés simples concernant les domaines invariants par une substitution rationnelle. Soit D un domaine connexe et ouvert, c'est-à-dire un ensemble de points bien enchaîné et n'ayant que des points intérieurs; les points frontières de D sont les points qui, n'appartenant pas à D, sont limites de points de D; si z décrit D, $z_1 = R(z)$ décrit D_1 qui est aussi un domaine connexe et ouvert (la démonstration est immédiate); les points frontières de D_1 proviennent des points frontières de D, la réciproque n'étant pas toujours vraie (à moins de considérer D_1 comme étendu sur une surface de Riemann à feuillets distincts). Si D et D_1 coïncident, on dit que D est invariant par la substitution $|z|R(z)|$. Nous n'aurons à considérer par la suite que des domaines invariants à frontière invariante, c'est-à-dire tels que $R(\xi)$ soit point frontière de D s'il en est ainsi de ξ. Nous supposerons dorénavant, pour simplifier les discussions, que cette condition est réalisée.

Nous allons définir maintenant la fonction inverse de $R(z)$ *restreinte à* D; c'est, pour chaque point z de D, l'ensemble des valeurs de la fonction $R_{-1}(z)$ dont les points représentatifs sont eux-mêmes intérieurs à D, les diverses valeurs de cette fonction, que nous désignerons par $R_{-1}^{(D)}(z)$, se permutant entre elles par cheminement le long de lignes fermées intérieures à D; car si b et b' sont deux valeurs de cette fonction au point a, on a

$$R(b) = R(b') = a;$$

b et b', étant intérieurs à D, peuvent être joints par une ligne simple L intérieure à D; z décrivant L, $z_1 = R(z)$ décrit L_1 également intérieure à D qui se ferme en a; inversement, z décrivant le chemin fermé L_1 dans D, la fonction $R_{-1}^{(D)}(z)$, qui prend en a la valeur b prolongée analytiquement le long de la ligne L_1, prendra la valeur b' à l'extrémité de cette ligne parcourue en entier. Réciproquement, si nous partons de a avec la détermination b de $R_{-1}(z)$ (b étant intérieur à D), tant que z décrit des chemins intérieurs à D, il en est de même du point $z_{-1} = R_{-1}(z)$, sinon z_{-1} atteindrait la frontière de D et il en serait de même de z, puisque nous supposons la frontière invariante.

Il s'ensuit que la fonction $R_{-1}^{(D)}(z)$ possède ν valeurs, ν étant indépendant de z, et ces ν valeurs étant celles qui s'obtiennent à partir de l'une des valeurs de la fonction en un point de D par prolongement analytique le long d'un chemin quelconque intérieur à D. Si l'on considère maintenant la fonction $R_n(z)$ qui transforme également en eux-mêmes le domaine D et sa frontière, la fonction inverse restreinte à D possède ν^n valeurs; on a, en outre, l'identité

$$R_{-(n+n')}^{(D)}(z) = R_{-n}^{(D)}[R_{-n'}^{(D)}(z)],$$

en attribuant dans le second membre aux fonctions $R_{-n}^{(D)}$ et $R_{-n'}^{(D)}$ leurs diverses valeurs en nombre ν^n et $\nu^{n'}$ respectivement.

Les points critiques de la fonction $R_{-1}^{(D)}(z)$ sont les points c intérieurs à D et tels que l'équation $R(z) = c$ ait au moins deux points racines confondus et intérieurs à D. Même observation pour la fonction $R_{-n}^{(D)}(z)$. Il résulte de là et du raisonnement fait au début de ce paragraphe que les points critiques de la fonction $R_{-n}^{(D)}(z)$ sont les conséquents jusqu'au rang $n-1$ inclus des points critiques de la fonction $R_{-1}^{(D)}(z)$.

Nous allons introduire maintenant une notion également utile pour les développements des Chapitres qui suivent, celle de *domaine complètement invariant;* nous appellerons ainsi un domaine qui non seulement est invariant par la substitution considérée, mais encore contient tous les antécédents de chacun de ses points. Un domaine complètement invariant est toujours à frontière invariante. Nous allons établir que, si un domaine complètement invariant est simplement connexe, il renferme toujours au moins $d - 1$ points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$. Laissons de côté les cas faciles où D contient tout le plan ou bien possède un point frontière unique. On peut supposer que D ne contienne pas le point à l'infini; il s'ensuit que $R(z)$ n'a pas de pôles intérieurs à D. Si a est un point intérieur à D, on peut tracer dans D un contour fermé simple $\mathcal{C}$ (constitué si l'on veut par un arc régulier et sans point double de courbe analytique) comprenant a à son intérieur et dont tous les points sont aussi rapprochés qu'on le veut de la frontière de D; on peut, pour s'en convaincre, utiliser la représentation conforme de D sur un cercle de rayon 1 en prenant pour $\mathcal{C}$ la courbe qui correspond dans D à une circonférence de rayon $1 - \varepsilon$ concentrique au cercle représentatif; ou encore faire un raisonnement direct en regardant D comme limite de domaines limités par des arcs de cercle. Ceci posé, je dis que si $\mathcal{C}$ est suffisamment voisin de la frontière, toutes les branches de la fonction $R_{-1}(z)$ se permutent circulairement sur $\mathcal{C}$. Dans le cas général, les diverses branches d'une fonction algébrique, quand le point représentatif de la variable décrit un contour fermé, forment un certain nombre de cycles distincts et les valeurs correspondant à un même cycle se permutent circulairement entre elles quand la variable revient à son point de départ. Soit un cycle d'ordre ν des valeurs de $R_{-1}(z)$ sur $\mathcal{C}$ auquel il correspond une courbe $\mathcal{C}_1$ décrite par le point représentatif de $R_{-1}(z)$ et qui se ferme quand z a décrit ν fois $\mathcal{C}$ dans le même sens; il résulte du caractère complètement invariant de la frontière et de la continuité des fonctions algébriques que les courbes $\mathcal{C}_{-1}$ tendent uniformément vers la frontière en même temps que $\mathcal{C}$. Considérons maintenant les divers points racines a_{-1} de l'équation $R(z) = a$; ils sont intérieurs à D et peuvent être joints deux à deux par des lignes λ intérieures à D dont la distance à la frontière est supérieure au nombre positif ε; comme on peut supposer que tous les points du contour fermé $\mathcal{C}_{-1}$ sont à une distance de la frontière moindre que ε, $\mathcal{C}_{-1}$ ne rencontre pas les lignes λ; les points a_{-1} sont donc tous intérieurs ou tous extérieurs à $\mathcal{C}_{-1}$; or, quand z décrit une fois $\mathcal{C}_{-1}$, $R(z)$ décrit ν fois de suite dans le même sens le contour fermé $\mathcal{C}$ qui renferme a à son intérieur; l'argument de $R(z)-a$ a donc varié de $2\nu\pi$ et, puisque $R(z)-a$ n'a pas de pôles dans D; on en conclut que le nombre des zéros de cette fonction à l'intérieur de $\mathcal{C}_{-1}$ est égal à ν; comme on a $\nu \geqq 1$, il faut donc que tous les points a_{-1} soient intérieurs au contour $\mathcal{C}_{-1}$; donc $\nu = d$ et toutes les branches de la fonction $R_{-1}(z)$ se permutent circulairement entre elles le long de $\mathcal{C}$.

Supposons maintenant que $R_{-1}(z)$ n'ait que des points critiques simples autour desquels se permutent seulement deux déterminations de cette fonction, ce qui est le cas général. Appelons Δ le domaine limité par $\mathcal{C}$ et intérieur à D, puisque D est simplement connexe; à partir de chacun des points critiques de $R_{-1}(z)$ contenu dans Δ, traçons une coupure s'étendant jusqu'au contour $\mathcal{C}$; quand on traverse une coupure, deux branches u_i et u_k de la fonction sont permutées entre elles; on dit que la coupure a le *caractère* (ik). Soient $L_1, \ldots, L_p$ les diverses coupures écrites dans l'ordre où se succèdent leurs points de rencontre avec $\mathcal{C}$ décrit dans le sens direct. Soit $T=(i_1, k_1)(i_2, k_2)\ldots(i_p, k_p)$ le tableau des caractères de ces coupures. On peut [1] changer le tracé des coupures de manière à ramener le tableau T à la forme canonique

$$T=(1, 2)^{\lambda_1}(2, 3)^{\lambda_2}\ldots(d-1, d)^{\lambda_{d-1}},$$

les λ_i étant des entiers positifs ou nuls. Ces entiers sont impairs, car, si λ_1 était pair, en décrivant $\mathcal{C}$ avec la détermination initiale u_1, on retrouverait u_1 comme détermination finale après un tour complet et il n'y aurait pas permutation circulaire des u_i sur $\mathcal{C}$. λ_1 étant impair, il en est de même de λ_2, sinon en décrivant $\mathcal{C}$ avec la détermination initiale u_1 on obtiendrait u_2 comme détermination finale et réciproquement, de sorte que les deux valeurs u_1 et u_2 formeraient à elles seules un cycle sur $\mathcal{C}$. λ_1 et λ_2 étant impairs, il en est de même de λ_3, sinon les trois valeurs u_1, u_3, u_2 se permuteraient

---

[1] C. JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. II, 2e édition, p. 557-561.

circulairement sur $\mathcal{C}$, et ainsi de suite. Il y a donc au moins $d-1$ coupures distinctes et de caractères distincts, donc au moins $d-1$ points critiques distincts dans Δ et *a fortiori* dans D.

Si les points critiques de $R_{-1}(z)$ ne sont pas simples, la conclusion subsiste, un point critique auquel correspondent différents cycles de racines d'ordres $\nu, \nu', \nu'', \ldots$ respectivement étant regardé comme la réunion de $(\nu-1)+(\nu'-1)+(\nu''-1)+\ldots-$ points critiques simples. Il suffira pour s'en convaincre de faire varier infiniment peu les coefficients de $R(z)$, ce qui fera varier infiniment peu la position des points critiques sans modifier la propriété que possèdent les branches de $R_{-1}(z)$ d'être toutes permutées entre elles sur $\mathcal{C}$.

Le nombre total des points critiques de $R_{-1}(z)$ étant $2(d-1)$, il résulte de là qu'*il ne peut exister plus de deux domaines simplement connexes et complètement invariants par la substitution* $[z \mid R(z)]$, si on laisse de côté les domaines qui n'ont pas plus d'un point frontière. Ce résultat est fondamental pour la suite.

Considérons maintenant le cas où le domaine D est invariant par une certaine puissance de la substitution donnée, de sorte qu'en appelant $D_1, D_2, \ldots$ ses conséquents successifs on ait $D = D_p$, $D_1 = D_{p+1}, \ldots$; l'ensemble des domaines $D, D_1, \ldots, D_{p-1}$ forme alors un cycle de domaines invariant; nous supposerons toujours que les frontières de ces domaines ont le même caractère d'invariance que les domaines eux-mêmes. Quand z est intérieur à l'un d'eux, D par exemple, il y a des branches de $R_{-1}(z)$ dont les points représentatifs sont intérieurs à D_{p-1}; ces diverses branches, dont le nombre est indépendant de la position de z dans D, sont celles qui se déduisent de l'une d'entre elles par prolongement analytique le long des chemins intérieurs à D; on définit ainsi la fonction $R_{-1}(z)$ restreinte à D_{p-1} et l'on passe aisément de là à la définition de la fonction $R_{-n}(z)$ restreinte au domaine D_{p-h}, h étant le reste de $n \pmod p$; les points critiques de cette dernière fonction dans D sont les conséquents jusqu'au rang $n-1$ des points critiques des fonctions restreintes $R_{-1}(z)$ correspondant aux divers domaines D_i. Prenons par exemple $n=4$, $p=3$. Les points critiques intérieurs à D de la fonction restreinte $R_{-4}(z)$ sont les points c, $R_3(c)$, $R(c'')$ et $R_2(c')$ en appelant c, c', c'' les points critiques des fonctions restreintes $R_{-1}(z)$ quand z varie successivement dans les domaines D, D_1, D_2 qui forment un cycle d'ordre 3. La notion de domaine complètement invariant s'étend d'elle-même à un cycle de domaines. Il est clair par ce qui précède que si un cycle de domaines d'ordre p est complètement invariant et formé de domaines simplement connexes, p ne peut avoir que les valeurs 1 ou 2; car les domaines simplement connexes D, D_1, ..., D_{p-1} sont complètement invariants par la substitution $|z|R_p(z)|$; leur nombre ne peut donc surpasser deux.

Les notions de domaine invariant ou complètement invariant s'étendent sans difficulté à des ensembles quelconques. On verra sans peine qu'un ensemble invariant ne comprenant qu'un nombre fini de points est formé par la réunion d'un nombre fini de cycles. Un ensemble complètement invariant et ne comprenant qu'un nombre fini de points est formé d'un ou de deux points exceptionnels (n° 5).

CHAPITRE II.

7. Nous étudierons dans ce Chapitre les valeurs limites des fonctions itérées au voisinage d'un point double quand l'indice d'itération croît indéfiniment; nous ne supposerons pas, en général, que la fonction dont on fait l'itération soit rationnelle, mais seulement holomorphe au voisinage du point double.

Nous devons rappeler tout d'abord les résultats relatifs aux points doubles de multiplicateur inférieur en module à l'unité et que nous appellerons *points doubles attractifs*, en renvoyant pour plus de détails aux Mémoires déjà cités de M. Kœnigs. Soit α un point double attractif au voisinage duquel $R(z)$ est développable en série de Taylor :

$$R(z) = \alpha + s(z - \alpha) + (\quad)(z - \alpha)^2 + \ldots \qquad (|s| < 1).$$

Il existe un nombre $\rho > 0$ et un nombre k compris entre $|s|$ et 1 tel que l'inégalité $|z - \alpha| \leqq \rho$ entraîne

$$|R(z) - \alpha| < k\, |z - \alpha|,$$
$$|R_n(z) - \alpha| < k^n |z - \alpha|.$$

Il s'ensuit que z étant intérieur au cercle γ de rayon ρ et de centre α, son $n^{\text{ième}}$ conséquent tend uniformément vers α pour

n infini. En outre, si $s \neq 0$, le rapport $\dfrac{R_n(z) - \alpha}{s^n}$ tend uniformément vers une fonction $F(z)$ holomorphe dans γ et vérifiant l'équation fonctionnelle de Schröder

$$F[R(z)] = sF(z)$$

avec les conditions $F(\alpha) = 0$, $F'(\alpha) = 1$. Le changement de variable $t = F(z)$, qui équivaut à une représentation conforme et biunivoque au voisinage de $z = \alpha$, permet de ramener la substitution $z_1 = R(z)$ à la forme canonique $t_1 = st$. On déduit de là

$$t_n = F[R_n(z)] = s^n t.$$

Le groupe des substitutions linéaires $t_n = s^{\pm n} t$, étant proprement discontinu dans tout domaine borné qui ne renferme pas le point $t = 0$, on en déduit que le groupe G (n° 1) est improprement discontinu dans toute couronne comprise entre deux cercles de rayon suffisamment petit. Il en est de même dans tous les domaines antécédents de ce domaine coronal.

Considérons maintenant le cas d'un point double de multiplicateur nul. On peut, par une transformation linéaire simple, ramener la substitution à la forme

$$z_1 = z^q + az^{q+r} + \ldots = R(z) \qquad (q > 1),$$

le point double étant à l'origine. Considérons alors un cercle γ ayant son centre à l'origine et de rayon assez petit pour contenir à son intérieur les conséquents de tous les points et pour que, d'autre part, la fonction $R(z)$ n'y possède pas d'autre zéro que l'origine. Les fonctions $[R_n(z)]^{\frac{1}{q^n}}$ sont alors holomorphes dans ce cercle; le radical est choisi de manière que le terme principal à l'origine soit égal à z. Je dis que ces fonctions convergent uniformément vers une fonction limite holomorphe dans γ. Posons, en effet,

$$u_n = [R_n(z)]^{\frac{1}{q^n}} = z_n^{\frac{1}{q^n}},$$

$$u_{n+1} = [R_{n+1}(z)]^{\frac{1}{q^{n+1}}} = \left[R^{\frac{1}{q}}(z_n)\right]^{\frac{1}{q^n}}.$$

Il vient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left[\frac{1}{z_n} R^{\frac{1}{q}}(z_n)\right]^{\frac{1}{q^n}} = [H(z_n)]^{\frac{1}{q^n}}$$

en appelant $H(z)$ la fonction holomorphe

$$\frac{1}{z} R^{\frac{1}{q}}(z) = 1 + lz + \ldots.$$

D'autre part, on a évidemment

$$u_{n+1} = z \prod_{i=0}^{i=n} \frac{u_{i+1}}{u_i} = z \prod_{i=0}^{i=n} [H(z_i)]^{\frac{1}{q^i}}.$$

Il suffit donc de prouver la convergence uniforme du produit infini dont le terme général est $[H(z_n)]^{\frac{1}{q^n}}$, ou, ce qui revient au même, de la série dont le terme général est $\frac{1}{q^n}\log[H(z_n)]$, en prenant la détermination du logarithme qui est nulle à l'origine. Comme z_n tend uniformément vers zéro quand z est dans γ et qu'il en est de même de $H(z_n)$, on aura, à partir d'un certain rang n',

$$|H(z_n) - 1| < \frac{1}{2}$$

et

$$|H(z_n) - 1| < A|z_n| \qquad (A, \text{ constante positive}).$$

Comme on a pour $|w| < \frac{1}{2}$

$$|\log(1+w)| < |w| + |w|^2 + |w|^3 + \ldots < 2|w|,$$

il s'ensuit que

$$|\log H(z_n)| < 2A|z_n|.$$

Or la convergence uniforme de la série $\sum \frac{2A}{q_n}|z_n|$ se démontre immédiatement, les $|z_n|$ étant bornés dans leur ensemble et même décroissant plus vite que les termes d'une progression géométrique convergente. On voit finalement que la suite des fonctions $[R_n(z)]^{\frac{1}{q^n}}$ converge vers une fonction holomorphe dans γ dont le développement en série de Taylor autour de l'origine commence par un terme égal à z. Si $\Phi(z)$ désigne cette fonction limite, on a

$$\Phi[R(z)] = \lim_{n=\infty} \left[R(z) \atop n+1 \right]^{\frac{1}{q^n}},$$

$$\Phi^q(z) = \lim_{n=\infty} \left\{ \left[R(z) \atop n+1 \right]^{\frac{1}{q^{n+1}}} \right\}^q = \lim_{n=\infty} \left[R(z) \atop n+1 \right]^{\frac{1}{q^n}},$$

d'où

$$\Phi[R(z)] = \Phi^q(z).$$

L'existence de cette fonction $\Phi(z)$ semble avoir été démontrée pour la première fois par M. Böttcher; elle joue un rôle analogue à celui de la fonction de Schröder pour le cas de $s \neq 0$. Si l'on pose $t = \Phi(z)$, on obtient une représentation conforme et biunivoque d'un cercle de centre O du plan des z sur un domaine du plan des t entourant l'origine et la substitution $z_1 = R(z)$ se trouve ramenée à la forme canonique : $t_1 = t^q$. On peut appeler *points associés* deux points qui ont même conséquent de rang n; dans le plan des t, les associés d'un point t sont les points $te^{\frac{2i\pi N}{q^n}}$ qui, lorsqu'on donne aux entiers N et n toutes les valeurs positives, forment un ensemble dense sur toute la circonférence de rayon $|t|$ ayant son centre à l'origine. Si l'on revient au plan de la variable z, on voit que, dans un certain domaine entourant l'origine, les associés d'un point sont denses sur une courbe fermée analytique passant par ce point. Comme deux points associés sont équivalents par rapport au groupe G (n° 1), il s'ensuit que ce groupe est improprement discontinu dans un certain domaine entourant l'origine et, par suite, aussi dans tous les domaines antécédents, c'est-à-dire en définitive dans tout domaine fermé dans lequel les $R_n(z)$ convergent uniformément vers un point double de multiplicateur nul. Il y a donc à ce point de vue une différence essentielle entre les points doubles de multiplicateur nul et les points doubles attractifs de multiplicateur non nul.

Nous donnerons maintenant quelques indications sur les courbes analytiques invariantes passant par un point double attractif. Si le multiplicateur n'est pas nul, on est ramené à chercher les courbes analytiques invariantes par la substitution $t_1 = st$, et passant par l'origine; si s est réel, les droites passant par l'origine répondent à la question et ce sont les seules courbes régulières à l'origine qui jouissent de ces propriétés. Il leur correspond dans le plan de la variable z un faisceau de courbes analytiques passant par le point double, régulières en ce point et invariantes par la substitution $z_1 = R(z)$. Si, au contraire, s est imaginaire, il n'y à pas de courbe régulière au point double qui réponde à la question, mais seulement des courbes analytiques pour lesquelles ce point est un point singulier isolé; les plus simples sont celles qui correspondent aux spirales logarithmiques du plan de la variable t représentées par l'équation $t = s^{\lambda} t_0$, où λ désigne une variable réelle et t_0 un point fixe quelconque; les courbes correspondantes du plan des z sont également des spirales ayant le point double pour point asymptote.

Dans le cas de $s = 0$, on est ramené à l'étude des courbes invariantes par la substitution $t_1 = t^q$. Il y a $q - 1$ courbes régulières à l'origine, qui répondent à la question; ce sont les droites d'argument $\frac{N\pi}{q-1}$. Il y a, en outre, des spirales logarithmiques invariantes ayant l'origine pour point asymptote et dont l'équation en coordonnées polaires est

$$\rho = e^{c\left(\omega + \frac{2N\pi}{q-1}\right)},$$

c étant une constante réelle arbitraire, N un entier auquel il suffit de donner les valeurs $0, 1, 2, \ldots, q-2$. En revenant à la variable z, on conclura à l'existence de $q - 1$ courbes analytiques invariantes, régulières au point double et dont les tangentes en ce point forment un faisceau isogonal; ce sont les seules courbes invariantes qui soient régulières au point double. Il y a, en outre, $q - 1$ faisceaux de courbes spirales invariantes ayant le point double pour point asymptote et dont les équations s'écrivent simplement à l'aide du module et de l'argument de la fonction $\Phi(z)$.

Considérons maintenant un cycle de points $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ de multiplicateur plus petit en module que l'unité; soient δ un petit domaine circulaire de centre α; $\delta_1, \delta_2, \ldots$ les domaines conséquents qui entourent respectivement les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Si le diamètre de δ est suffisamment petit, les domaines $\delta, \delta_p, \delta_{2p}, \ldots$ sont emboîtés les uns dans les autres; il en est de même de δ_1, $\delta_{p1}, \delta_{p+1}, \delta_{2p+1}, \ldots$ et en général de $\delta_h, \delta_{p+h}, \delta_{2p+h}, \ldots$. En outre, le diamètre de δ_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, de sorte que z étant intérieur à l'un des domaines $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{p-1}$, $R_n(z)$ converge périodiquement et uniformément vers le système des p constantes $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$. Si le multiplicateur n'est pas nul, on démontre qu'il existe un système de p fonctions holomorphes respectivement dans les domaines $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{p-1}$ et de dérivées non nulles en ces points qui vérifient les équations fonctionnelles

$$\begin{aligned} F[R(z)] &= R'(\alpha)F_1(z), \\ F_1[R(z)] &= R'(\alpha_1)F_2(z), \\ F_2[R(z)] &= R'(\alpha_2)F_3(z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{p-1}[R(z)] &= R'(\alpha_{p-1})F(z), \end{aligned}$$

d'où

$$F[R_p(z)] = sF(z) \qquad [s = R'(\alpha)R'(\alpha_1)\ldots.R'(\alpha_{p-1})].$$

Tout ceci suppose $R(z)$ définie et uniforme dans tout le plan, par exemple rationnelle. Ce résultat se déduit facilement de l'existence de la fonction de Schröder dans le cas d'un point double, en remarquant que les points α, α_1, ... sont des points doubles de la substitution $[z \mid R_p(z)]$.

8. Nous allons maintenant étudier l'itération d'une substitution uniforme dans le voisinage d'un point double de multiplicateur égal en module à l'unité, en commençant par le cas le plus simple, celui de $s = +1$. Cette étude a été faite par M. Leau dans sa Thèse; nous allons reprendre son analyse sous une forme différente et compléter sur beaucoup de points les résultats obtenus par cet éminent géomètre.

Soit α un point double au voisinage duquel on a

$$z_1 = R(z) = z + \frac{1}{2} R''(\alpha)(z-\alpha)^2 + \ldots.$$

Nous nous placerons d'abord dans le cas où $R''(\alpha)$ n'est pas nul (condition dont on démontre bien facilement le caractère d'invariance) et pour plus de commodité nous supposerons α rejeté à l'infini par une transformation homographique préalable. On aura alors

$$z_1 = z + a + \frac{b}{z} + \ldots \qquad (a \neq 0).$$

On peut toujours orienter les axes de manière que a soit réel et positif. Enfin il y a intérêt à étudier le cas un peu plus général où la substitution est de la forme

$$z_1 = z + a + \psi(z),$$

$\psi(z)$ étant une fonction qui peut avoir un point critique à l'infini, mais telle que

$$|\psi(z)| < \frac{C}{|z|^\gamma} \qquad (C, \gamma : \text{constantes positives}).$$

En outre l'infini est pour cette fonction un point singulier isolé. Soit r le rayon d'un cercle Γ de centre O tel que $\psi(z)$ soit holomorphe et uniforme dans le domaine D extérieur à ce cercle où l'on a tracé une coupure allant du point $z = -r$ à l'infini négatif suivant l'axe réel. Soit z un point de ce domaine et cherchons à quelle condition les conséquents successifs de z y seront encore contenus. Appelons μ le module maximum de $\psi(z)$ dans ce domaine; si ρ est suffisamment grand, on aura $\mu < a$, ce que nous supposerons. Le point z_1 est à l'intérieur d'un cercle de centre $z + a$ et de rayon ρ; z est extérieur à ce cercle. Si ce cercle est intérieur au domaine $\mathfrak{D}$, le point z_2 se trouvera à l'intérieur d'un deuxième cercle ayant pour centre $z + 2a$ et pour rayon 2μ; en général, le point z_n sera intérieur au cercle de centre $z + na$ et de rayon $n\mu$, pourvu que tous les cercles précédents soient intérieurs à $\mathfrak{D}$. Tous ces cercles sont compris dans l'angle des deux demi-droites issues du point z et faisant avec Ox un angle aigu α dont le sinus est égal à $\frac{\mu}{a}$ (*fig.* 1). Il suffit, pour que la condition cherchée soit remplie, que cet angle n'ait aucun point commun avec Γ. Les points z pour lesquels il en est ainsi sont intérieurs au domaine $\mathcal{C}$ défini comme il suit : menons les deux tangentes au cercle Γ qui font avec Ox des angles égaux à $\pm\alpha$ et qui se coupent sur la partie positive de Ox; soient BT, B′T′ les parties de ces tangentes comprises entre les points de contact et l'infini vers les x négatifs; le domaine $\mathcal{C}$ est limité par BT, B′T′, l'arc BAB′ et s'étend à l'infini vers les x positifs (*fig.* 1). Nous pouvons ensuite faire croître le rayon du cercle Γ depuis sa valeur initiale r jusqu'à l'infini; on aura, en vertu des hypothèses faites sur $\psi(z)$:

$$\mu < \frac{C}{\rho^\gamma}.$$

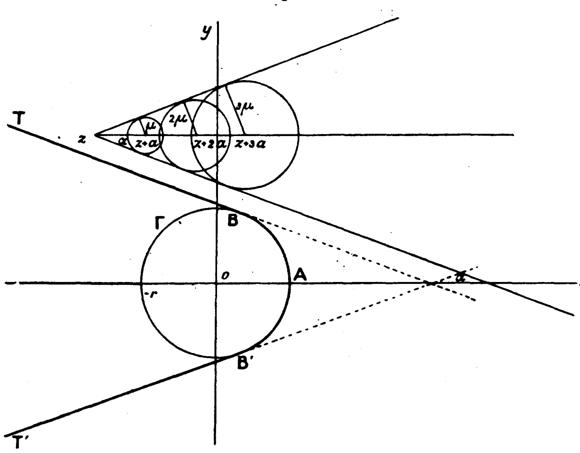
pour toutes les valeurs ρ du rayon comprises dans l'intervalle $(r + \infty)$. Comme on peut remplacer le maximum μ de $|\psi(z)|$ par un nombre plus grand, on peut définir constamment l'inclinaison ω

de la droite BT par la formule

$$\sin\omega = \frac{C}{a} \cdot \frac{1}{\rho\gamma}.$$

Cette droite, qui a pour équation $x \sin\omega + y \cos\omega = \rho$, enveloppe un arc de courbe parabolique dont le rayon de courbure ne

Fig. 1.



change pas de signe, car il a pour expression $\rho + \frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ ou, en vertu de la relation entre ρ et ω,

$$\gamma\rho\left[1 + (\gamma + 1)\frac{\cos^2\omega}{\sin^2\omega}\right],$$

quantité essentiellement positive. La courbe est donc convexe. Il s'ensuit que le domaine total, somme des domaines analogues à $\mathcal{C}$, quand on fait varier ρ, est limité par les deux arcs paraboliques ML, M'L' s'étendant à l'infini vers la gauche, les deux segments de droite MB, M'B' et l'arc de cercle BAB' (*fig.* 2). Soit D le domaine ainsi limité et s'étendant à l'infini vers la droite. Je vais montrer que les conséquents d'un point de D tendent vers l'infini, la convergence étant uniforme dans tout domaine fermé Δ intérieur à D et borné vers les x négatifs. Le domaine D, d'après la manière dont il a été obtenu, contient les conséquents de tous ses points, de même que les domaines $\mathcal{C}$; de plus, tout domaine tel que Δ fait partie d'un domaine $\mathcal{C}$; enfin, dans tout le domaine D, les modules des quantités $\psi(z)$, $\psi(z_1)$, $\psi(z_2)$, ... restent inférieurs à un nombre fixe μ inférieur à a. Ces remarques faites, la proposition annoncée est immédiate. On a, en effet,

$$\begin{aligned}
z_1 &= z + a + \psi(z),\\
z_2 &= z_1 + a + \psi(z_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
z_n &= z_{n-1} + a + \psi(z_{n-1}),
\end{aligned}$$

d'où

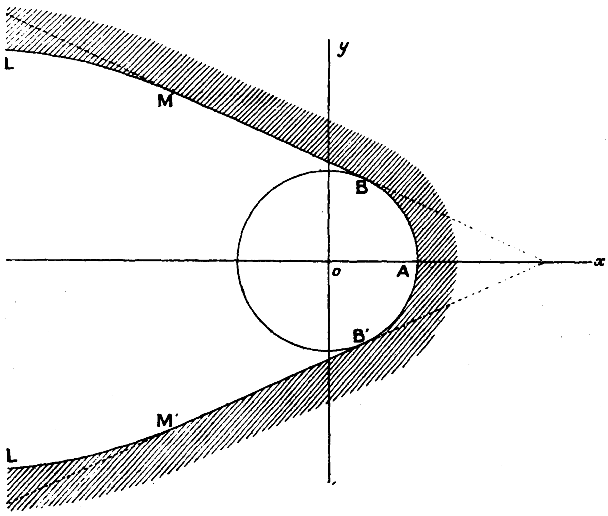
$$z_n = z + na + \sum_0^{n-1} \psi(z_i),$$

et, en prenant les parties réelles des deux membres,

$$x_n = x + na + \sum_0^{n-1} \mathfrak{R}[\psi(z_i)] \qquad (z_n = x_n + iy_n).$$

Comme la partie réelle de $\psi(z_i)$ reste comprise entre $+\mu$ et

Fig. 2.



$-\mu$ et que, d'autre part, dans Δ on a $x > -A$, A étant fini et positif, on tire de l'égalité précédente

$$x_n > n(a - \mu) - A$$

et cette dernière expression est infinie positive en même temps que n, puisque $a - \mu > 0$. Donc x_n et $|z_n|$ tendent uniformément vers l'infini quand z est dans Δ. On peut remarquer qu'on aura, à partir d'un certain rang, $|z_n| > (a - \mu\varepsilon)n$, si $\varepsilon > 0$; on peut aussi écrire $\frac{|1|}{z_n} < \frac{B}{n+1}$ pour toutes les valeurs de n, B étant une constante. Il est alors aisé d'obtenir la valeur asymptotique de z_n, car d'après l'égalité

$$z_n = z + na + \sum_0^{n-1} \psi(z_i),$$

on aura

$$z_n = z + na + \theta \sum_1^n \frac{C'B\gamma}{n\gamma} \qquad (|\theta| < 1)$$

ou

$$z_n = z + na + H_n \sum_1^n \frac{1}{n^\gamma},$$

H_n étant une quantité uniformément bornée. Il en résulte, en supposant $0 < \gamma < 1$,

$$z_n = z + na + \Theta_n n^{1-\gamma},$$

Θ_n étant uniformément bornée. Si le domaine Δ est borné, on peut aussi écrire

$$z_n = na + \Lambda_n n^{1-\gamma},$$

Λ_n étant toujours uniformément bornée; z_n a donc pour valeur asymptotique na et l'argument de z_n tend uniformément vers zéro. Pour $\gamma = 1$, les deux dernières formules demeurent exactes si l'on y remplace $n^{1-\gamma}$ par $\mathcal{L}n$ (logarithme népérien de n).

9. Il importe de préciser davantage l'expression asymptotique obtenue dans l'hypothèse de $\gamma = 1$. D'une manière plus précise, nous supposerons

$$\psi(z) = \frac{b}{z} + \chi(z), \qquad |\chi(z)| < \frac{k}{|z|^{1+\beta}} \qquad (k, \beta > 0).$$

Posons

$$z_n = an + \frac{b}{a}\mathcal{L}n + u_n,$$

$$z_{n+1} = an + a + \frac{b}{a}\mathcal{L}(n+1) + u_{n+1}.$$

En remplaçant z_n et z_{n+1} par ces expressions dans l'équation

$$z_{n+1} = z_n + a + \frac{b}{z_n} + \chi(z_n),$$

il vient

$$u_{n+1} - u_n = \frac{b}{a}\left[\frac{1}{n} - \mathcal{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] + b\left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{an}\right) + \chi(z_n).$$

Dans le second membre, le premier terme est le terme général d'une série numérique absolument convergente; on a, en effet,

$$\frac{1}{n} - \mathcal{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \ldots = \frac{\lambda_n}{2n^2}\ (\lim \lambda_n = 1).$$

Le second terme est celui d'une série uniformément convergente dans le domaine borné Δ, car il peut s'écrire

$$-\frac{b(z_n - na)}{naz_n},$$

et l'on a

$$|z_n| > Kn$$
$$|z_n - na| < K'\mathcal{L}n;$$

K, K' indépendants de n et de z; ce terme est donc comparable à $\frac{\mathcal{L}n}{n^2}$, terme général d'une série convergente.

Même remarque pour le troisième terme, car on a

$$|\chi(z_n)| < \frac{K}{|z_n|^{1+\beta}} < \frac{K'}{n^{1+\beta}}.$$

Comme on a

$$u_n = u_1 + \sum_1^{n-1} (u_{i+1} - u_i),$$

u_n a une limite pour n infini qui est la somme d'une série uniformément convergente de fonctions holomorphes dans Δ, qui est donc elle-même une fonction holomorphe dans Δ. Si $F(z)$ désigne cette fonction, holomorphe en tout point intérieur à D, on peut écrire

$$z_n = an + \frac{b}{a}\mathcal{L}n + F(z) + \varepsilon_n(z) \qquad (\lim \varepsilon_n = 0).$$

Changeons n en $n - 1$ et z en $R(z)$, dans cette égalité, il vient

$$z_n = a(n-1) + \frac{b}{a}\mathcal{L}(n-1) + F(z_1) + \varepsilon_{n-1}(z_1).$$

En retranchant membre à membre et passant à la limite, on obtient l'équation fonctionnelle

$$F(z_1) = F[R(z)] = F(z) + a$$

qui est l'équation d'Abel.

Ainsi l'équation d'Abel, relative à la substitution $[z \mid R(z)]$, est vérifiée par une fonction $F(z)$ holomorphe dans D, pour laquelle le point à l'infini est d'ailleurs un point singulier transcendant.

Remarquons de suite que si $R(z)$ a simplement comme singularité un pôle au point à l'infini, on pourra choisir le cercle Γ assez grand pour qu'à l'extérieur de ce cercle $R(z)$ ne prenne qu'une fois chaque valeur; il en sera de même dans le domaine D pour les fonctions itérées, et par suite aussi pour les fonctions

$$R_n(z) - na - \frac{b}{a} \mathcal{L} n;$$

$F(z)$, étant la limite uniformément atteinte de ces dernières fonctions, ne prendra aussi qu'une fois chaque valeur dans D [1]. Nous allons étudier les valeurs asymptotiques de cette fonction quand z tend vers l'infini en restant dans un domaine Δ borné vers les x négatifs, par exemple dans le domaine défini par $x > A\,(A > r)$. Je dis qu'on aura dans ces conditions

$$F(z) = z + o(\mathcal{L} |z|),$$

$o(\mathcal{L} |z|)$ désignant un infiniment grand qui est au plus de l'ordre de $\mathcal{L} |z|$. Pour le dénominateur, remarquons qu'on a par définition

$$F(z) = \lim_{n=\infty} \left[z_n - \frac{b}{a} \mathcal{L} n - na \right].$$

On a ensuite

$$z_n = z + na + \sum_0^{n-1} \frac{b}{z_i} + \sum_0^{n-1} \chi(z_i),$$

d'où

$$F(z) - z = \lim_{n=\infty} \left[\sum_0^{n-1} \frac{b}{z_i} - \frac{b}{a} \mathcal{L} n + \sum_0^{n-1} \chi(z_i) \right].$$

---

[1] *Cf.* Montel, *Sur la représentation conforme* (*Journ. Math.*, t. III, 1917, Chap. I, n° 5).

La série $\Sigma\chi(z_i)$ converge uniformément dans le domaine non borné Δ et représente une fonction bornée dans ce domaine ; on peut donc n'en pas tenir compte. On peut d'autre part remplacer $\frac{b}{a}\log n$ par $\frac{b}{a}\sum_1^n \frac{1}{i}$, puisque la différence de ces deux quantités tend vers une constante finie. On peut enfin négliger le facteur b et l'on est ramené à étudier la fonction représentée par la série

$$G(z) = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{z_n} - \frac{1}{na}\right)$$

$\left(\text{en supprimant le premier terme en } \frac{1}{z}\right)$.

On peut admettre que les $|z_n|$ vont en croissant avec n, c'est-à-dire (puisque le domaine Δ contient ses conséquents) qu'on a toujours $|z_1| > |z|$. On voit aisément, par une représentation géométrique, que cette condition sera remplie si

$$\frac{\pi}{2} - \arg. z > \arc\sin \frac{|\psi(z)|}{a} \qquad [\psi(z) = z_1 - z - a|$$

ou

$$\frac{x}{|z|} > \frac{|\psi(z)|}{a}.$$

Comme on a $|\psi(z) < \frac{C}{|z|}$, il suffit qu'on ait $x > \frac{C}{a}$. Nous supposerons donc, pour simplifier l'analyse qui va suivre, qu'on a pris $A > \frac{C}{a}$. Les $|z_n|$ vont alors en croissant avec n. Ceci posé, on peut écrire

$$G(z) = \sum_1^\infty \frac{na - z_n}{na\, z_n}.$$

Mais, en vertu du paragraphe précédent, on a

$$z_n = z + na + \theta_n \log n,$$

les θ_n étant uniformément bornés quand z est dans Δ. La série qui définit $G(z)$ se décompose en deux

$$G(z) = \sum_1^\infty \frac{-z}{na\, z_n} + \sum_1^\infty \frac{-\theta_n \log n}{na\, z_n}.$$

Comme on a $|\Theta_n| < \Theta$ et $|z_n| > \mathrm{K}n$, la seconde série représente une fonction de z bornée $\left(\text{inférieure à } \frac{\Theta}{a\mathrm{K}} \sum_1^\infty \frac{\mathfrak{L}n}{n^2}, \text{ quantité finie}\right)$. Il suffit donc de considérer la première.

Posons

$$\sum_1^\infty \frac{z}{na\,z_n} = \sum_1^{\mathrm{N}} + \sum_{\mathrm{N}+1}^\infty,$$

l'entier n étant la partie entière de $|z|$. La première somme partielle est inférieure en module à $\sum_1^{\mathrm{N}} \frac{1}{na}$, puisque $|z| < |z_n|$; or $\sum_1^{\mathrm{N}} \frac{1}{n}$ est égal, en négligeant les quantités bornées, à $\mathfrak{L}\mathrm{N}$ ou à $\mathfrak{L}(|z|)$. La seconde somme partielle est inférieure en module à

$$\frac{|z|}{a\mathrm{K}} \sum_{\mathrm{N}+1}^\infty \frac{1}{n^2} < \frac{|z|}{\mathrm{N}a\mathrm{K}},$$

quantité bornée puisque $\frac{|z|}{\mathrm{N}}$ tend vers 1.

On obtient donc finalement

$$|\mathrm{G}(z)| < \mathrm{C}'\mathfrak{L}|z|,$$

C′ *constante* finie positive et, ce qui revient au même,

$$\mathrm{F}(z) = z + \mathrm{o}(\mathfrak{L}|z|).$$

Dans le cas particulier où $b = 0$, on a même

$$\mathrm{F}(z) = z + \text{fonct. bornée}.$$

Nous allons démontrer maintenant que, lorsque z tend vers l'infini en restant toujours dans le domaine $\Delta(x > \mathrm{A})$ considéré ci-dessus, la dérivée $\mathrm{F}'(z)$ tend vers l'unité. Nous admettrons que $\mathrm{R}(z)$ est développable en série ordonnée suivant les puissances décroissantes de z :

$$\mathrm{R}(z) = z + a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^p} + \frac{d}{z^q} + \dots,$$

certains des exposants p, q, ... pouvant d'ailleurs n'être pas entiers, mais le second membre étant dérivable terme à terme,

$$R'(z) = 1 - \frac{b}{z^2} - \frac{pc}{z^{p+1}} - \ldots.$$

Pour ne pas écarter le cas de $b = 0$, appelons $\frac{1}{z^h}$ la première puissance de z dont le coefficient ne soit pas nul dans ce développement. Pour de grandes valeurs de $|z|$, $R'(z) - 1$ sera compris entre $\frac{C}{|z|^h}$ et $\frac{C'}{|z|^h}$, C et C′ étant des constantes finies positives [1] et h étant au moins égal à 2. On aura donc

$$1 - \frac{C'}{|z|^h} < |R'(z)| < 1 + \frac{C}{|z|^h}.$$

Or $F'(z)$ est la limite de $R'_n(z)$ pour z infini et l'on a

$$R'_n(z) = R'(z)\,R'(z_1)\ldots R'(z_{n-1})\,;$$

z et par suite tous les z_n étant supposés assez grands pour que les inégalités précédentes soient applicables, on aura

$$\prod_{p=0}^{n-1}\left(1 - \frac{C'}{|z_i|^h}\right) < |R'_n(z)| < \prod_{0}^{n-1}\left(1 + \frac{C}{|z_i|^h}\right).$$

$|F'(z)|$ a donc une valeur comprise entre celles des deux produits infinis

$$\prod\left(1 - \frac{C'}{|z_n|^h}\right) \quad \text{et} \quad \prod\left(1 + \frac{C}{|z_n|^h}\right),$$

et, pour prouver que $F'(z)$ tend vers 1 pour z infini, il suffit de prouver que la somme de la série

$$\frac{1}{|z|^h} + \frac{1}{|z_1|^h} + \ldots + \frac{1}{|z_n|^h} + \ldots$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{|z|}$. Cela résulte des inégalités bien connues

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)\ldots < e^{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots},$$
$$(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n)\ldots > 1 - (a_1 + a_2 + \ldots),$$

où les a_n sont compris entre 0 et 1. Or ce dernier point est bien

---

(1) Ces constantes peuvent différer de celles déjà ainsi dénommées.

facile à établir, car si l'on divise cette série en deux parties comme précédemment,

$$\sum_0^\infty = \sum_0^{N'} + \sum_{N+1}^\infty,$$

N étant la partie entière de $|z|$, la première somme partielle est inférieure à $\frac{N+1}{|z|^h}$ (puisque $|z_n| < |z|$ à partir de $n=1$), quantité qui tend vers zéro puisqu'elle est le produit de $\frac{N+1}{|z|}$ qui tend vers 1 par $\frac{1}{|z|^{h-1}}$, qui tend vers zéro. Quant à la seconde, en vertu de $|z_n| > Kn$ et de $h > 1$, elle représente le reste d'une série convergente qui tend vers zéro avec $\frac{1}{N}$. La proposition est donc démontrée [1].

Relativement à cette démonstration et à celle qui précède, remarquons que le résultat subsiste si z tend vers l'infini en restant dans un domaine Δ intérieur à D et borné vers les x négatifs, sans qu'il y ait lieu de retenir la condition supplémentaire $\left(A > \frac{C}{a}\right)$ imposée à la borne inférieure des x des points de Δ. Car le $p^{\text{ième}}$ conséquent d'un tel domaine Δ sera toujours intérieur à un domaine Δ' qui vérifie cette condition supplémentaire pourvu que p soit assez grand, et les équations fonctionnelles

$$F[R(z)] = F(z) + a,$$
$$F'[R(z)] = \frac{1}{R'(z)} F'(z)$$

montrent que les fonctions $F(z)$, $F'(z)$ satisfont aux propositions limites que nous venons d'examiner, le long d'un chemin $\mathcal{L}$, si elles y satisfont le long du chemin conséquent $\mathcal{L}_1$. Par exemple, si

$$F(z_1) = z_1 + o(\mathcal{L}|z_1|),$$

on a

$$F(z) = F(z_1) - a = z_1 + o[\mathcal{L}|z_1|),$$

---

[1] On déduit aisément de cette analyse l'égalité asymptotique plus précise

$$F'(z) = 1 + o\left(\frac{1}{z}\right),$$

mais nous n'en aurons pas besoin.

ce qui peut encore s'écrire $z + o(\mathcal{L}|z|)$, puisque z_1 et z ne diffèrent que par une quantité bornée.

Nous pouvons maintenant étudier, dans un domaine $\Delta(x > A)$, les courbes invariantes par la substitution donnée. Nous supposerons $R(z) - z$ régulière à l'infini. Dans ces conditions, on peut prendre A assez grand pour que, dans le domaine fermé Δ : 1° $R_n(z)$ tende uniformément vers l'infini; 2° la fonction $F(z)$ d'Abel ne prenne qu'une fois chaque valeur; 3° la partie réelle de $F'(z)$ soit positive (puisqu'elle tend vers 1 quand la partie réelle de z tend vers $+\infty$). Si l'on pose alors $Z = F(z)$, on obtient une représentation conforme et biunivoque du domaine Δ sur une région simplement connexe et illimitée du plan des Z, ayant pour frontière la courbe $\mathcal{C}$ qui correspond à la droite $x = A$. Cette courbe $\mathcal{C}$ est coupée en un point et en un seul par tout parallèle à l'axe des X; en effet, soit

$$Z = F(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

La courbe $\mathcal{C}$ est représentée par

$$X = P(A, y),$$
$$Y = Q(A, y).$$

En raison de l'expression asymptotique $Z = z + o(\mathcal{L}|z|)$, Y prend des valeurs infiniment grandes en même temps que y est de même signe; Y prend donc toutes les valeurs réelles quand y croît de $-\infty$ à $+\infty$. Si $\mathcal{C}$ était coupée en deux points par une parallèle à l'axe des X, on aurait en ces deux points

$$Y_1 = Q(A, y_1) = Q(A, y_2) \qquad (y_1 < y_2).$$

On aurait donc, pour une valeur y_3 comprise entre y_1 et y_2,

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(A, y_3) = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}(A, y_3),$$

ce qui est impossible, puisque $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ reste positive sur la droite $x = A$. On voit aussi que la direction limite de la tangente à $\mathcal{C}$, quand on s'éloigne à l'infini, est parallèle à l'axe des Y, puisqu'on a sur cette courbe

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial y}(A, y)}{\frac{\partial P}{\partial y}(A, y)} = \frac{-\frac{\partial P}{\partial x}(A, y)}{\frac{\partial Q}{\partial x}(A, y)},$$

et ce rapport tend vers l'infini avec y puisque le numérateur tend vers -1 et le dénominateur vers zéro. Cette courbe Γ partage alors le plan des Z en deux régions, dont l'une Δ', celle qui s'étend à l'infini vers les x positifs, correspond au domaine Δ. Au faisceau des droites parallèles à l'axe des X dans Δ' correspond dans Δ un faisceau de courbes invariantes par la substitution $[z \mid R(z)]$. Ces courbes ont pour équation $Q(x, y) = \text{const.}$ Il en passe une et une seule par chaque point de Δ et elles s'étendent depuis la droite $x = A$ jusqu'à l'infini. On a sur ces courbes

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\partial Q}{\partial y}} = \frac{-\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\partial P}{\partial x}};$$

$\frac{dy}{dx}$ n'est donc jamais infini et tend vers zéro quand on s'éloigne à l'infini sur la courbe; la direction limite de la tangente est donc parallèle à Ox. Elle contient naturellement les conséquents de tous les points et aussi les antécédents jusqu'à un certain rang; ces points correspondent aux points $Z + na$ du plan des Z, n prenant toutes les valeurs entières positives (ce qui donne les points homologues des conséquents de z) et certaines valeurs négatives pour lesquelles $Z + na$ reste intérieur à Δ' (ce qui donne les homologues des antécédents de z intérieurs à Δ). Cette représentation donne immédiatement le moyen de définir $R_n(z)$ pour des valeurs non entières de z. Il suffit de substituer au groupe discontinu de translations $(Z \mid Z + na)$, le groupe continu des translations représentées par la même formule, n étant un paramètre continu. On résout ainsi le problème de l'itération analytique. En effet, soit $z = G(Z)$ la fonction inverse de $F(z)$ qui donne la représentation conforme de Δ' sur Δ_1. De l'équation d'Abel

$$F[R(z)] = F(z) + a,$$

on déduit

$$R(z) = G(Z + a),$$

$$R_n(z) = G(Z + na).$$

Cette dernière égalité permet de définir $R_n(z)$ pour n quelconque au moyen d'une fonction analytique de n et de z. On aura toujours

$$R_n[R_{n'}(z)] = R_{n+n}(z),$$

puisque les deux membres de cette égalité désignent deux points qui ont pour homologues, dans le plan des Z,

$$Z + n'a + na \qquad \text{et} \qquad Z + (n + n')a,$$

c'est-à-dire le même point.

10. Examinons maintenant comment les choses se passent quand le point double α de multiplicateur $+1$ [avec $R''(\alpha) \neq 0$] est à distance finie. On peut supposer $\alpha = 0$ et

$$z_1 = R(z) = z - az^2 + bz^3 + \ldots,$$

les axes étant orientés de manière que a soit réel et positif. Le changement de variables $\left(z = \frac{1}{t}, z_1 = \frac{1}{t_1}\right)$ nous ramène à la forme

$$t_1 = t + a + \frac{a^2 - b}{t} + \ldots.$$

Il suffit alors d'appliquer les résultats du paragraphe précédent pour pouvoir énoncer ce qui suit : Il existe un domaine D limité par un contour simple, formé par exemple d'arcs analytiques, et présentant en O une pointe rentrante avec une tangente dirigée suivant la partie négative de l'axe réel qui jouit de la propriété que les conséquents d'un point de D (y compris les points frontières autres que l'origine) sont intérieurs à D et tendent vers l'origine quand l'indice d'itération croît indéfiniment; la convergence est uniforme dans tout domaine fermé intérieur à D dont la frontière ne contient pas l'origine. Il existe en outre des domaines Δ formés, par exemple, par l'intérieur d'un cercle tangent en O à l'axe imaginaire du côté des x positifs, et jouissant des mêmes propriétés que D, la convergence uniforme des conséquents d'un point ayant lieu en outre pour tout le domaine fermé Δ (y compris l'origine).

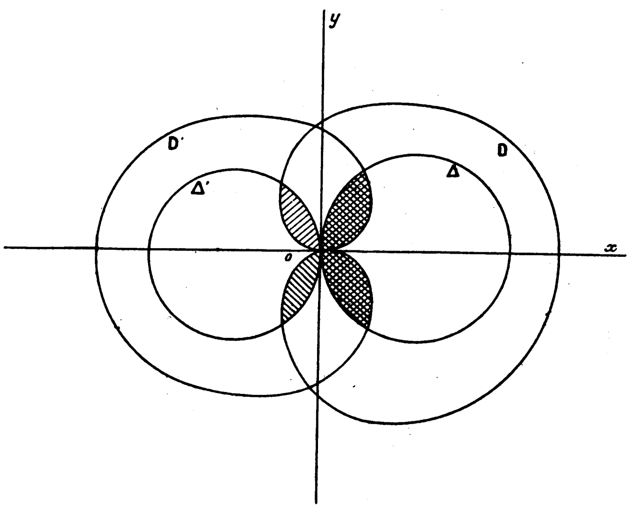
Si l'on applique ces résultats à la fonction inverse de $R(z)$, ou plus exactement à la branche de fonction inverse nulle à l'origine et représentée par la série

$$z_{-1} = z + az^2 + \ldots,$$

on obtient un résultat analogue, à cela près que les domaines D et Δ' qui remplacent D et Δ ont une disposition symétrique de ces derniers par rapport à l'origine ; ce sont des domaines de convergence simple ou uniforme pour les antécédents d'un point obtenus au moyen de la branche de fonction $R_{-1}(z)$ que nous venons de définir (*fig.* 3).

Les domaines D et Δ' ont en commun deux secteurs d'angle au

Fig. 3.



sommet $\frac{\pi}{2}$ dans lesquels les z_n convergent vers zéro (uniformément ou non), tandis que les z_{-n} convergent uniformément vers zéro. De même D' et Δ ont en commun deux secteurs d'angle au sommet $\frac{\pi}{2}$ dans lesquels les z_n convergent uniformément vers zéro, tandis que les z_{-n} convergent vers zéro (uniformément ou non).

Les conséquents d'un point de D sont répartis sur des courbes invariantes tangentes en O à l'axe réel du côté des x positifs ; remarque analogue pour les antécédents.

Les z_n ont pour expression asymptotique

$$z_n = \frac{1}{na + \frac{a^2 - b}{a} \mathcal{L} n + F(z) + \varepsilon_n} \qquad (\lim \varepsilon_n = 0),$$

$F(z)$ étant une fonction holomorphe à l'intérieur de D, qui vérifie l'équation d'Abel

$$F[R(z)] = F(z) + a.$$

Si z tend vers l'origine en restant à l'intérieur du cercle Δ, on a

$$F(z) = \frac{1}{z} + o\left(\log\left|\frac{1}{z}\right|\right).$$

11. Nous allons étudier maintenant le cas d'un point double pour lequel on a

$$S = 1, \qquad R''(\alpha) = 0, \qquad \ldots, \qquad R^{(p)}(\alpha) = 0, \qquad R^{p+1}(\alpha) \neq 0.$$

En ramenant ce point à l'origine, on a

$$z_1 = z - az^{p+1} + \ldots.$$

Les axes sont supposés orientés de manière que a soit réel et positif. En changeant z et z_1 en $\frac{1}{z}$ et $\frac{1}{z_1}$ de manière à rejeter le point double à l'infini, on a

$$z_1 = R(z) = z + \frac{a}{z^{p-1}} + \frac{b}{z^p} + \ldots = z\left(1 + \frac{a}{z^p} + \frac{b}{z^{p+1}} + \ldots\right).$$

Posons

$$z = t^{\frac{1}{p}},$$
$$z_1 = t_1^{\frac{1}{p}},$$

il vient

$$t_1^{\frac{1}{p}} = t^{\frac{1}{p}}\left(1 + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^{1+\frac{1}{p}}} + \ldots\right),$$

$$t_1 = t\left(1 + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^{1+\frac{1}{p}}} + \ldots\right)^p = t\left(1 + \frac{pa}{t} + \frac{pb}{t^{1+\frac{1}{p}}} + \ldots\right),$$

$$t_1 = t + pa + \frac{pb}{t^{\frac{1}{p}}} + \ldots = S(t).$$

$S(t)$ étant à partir du troisième terme ordonnée suivant les puissances négatives descendantes de $t^{\frac{1}{p}}$ rentre dans la catégorie des fonctions étudiées au n° 8 qui donnent lieu à un algorithme d'itération convergent dans un domaine D que nous avons décrit et qui laisse à son extérieur la partie négative de l'axe réel. Si t varie dans ce domaine, son argument varie entre $-\pi$ et $+\pi$ limites exclues, et les p déterminations de $t^{\frac{1}{p}}$ restent respectivement à l'intérieur de p secteurs de sommet O d'angle $\frac{2\pi}{p}$. Choisissons l'une de ces déterminations, par exemple celle dont l'argument est compris entre $\frac{\pi}{p}$ et $\frac{3\pi}{p}$, et portons cette valeur de t dans la formule

$$t_1 = S(t)$$

qui équivaut à $t_1 = [R(z)]^p$, en appelant z la détermination que nous venons de choisir de $t^{\frac{1}{p}}$. t_1 étant intérieur à D $t_1^{\frac{1}{p}}$ admet une détermination dont l'argument est compris (limites exclues) entre $\frac{\pi}{p}$ et $\frac{3\pi}{p}$ comme celui de $t^{\frac{1}{p}}$. On a alors pour ce choix du radical

$$t_1^{\frac{1}{p}} = \omega R(z) = \omega z_1,$$

ω étant une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité. Je dis que $\omega = 1$. En effet, si t, en restant intérieur à D, s'éloigne vers l'infini, par exemple suivant la partie positive de l'axe réel, il résulte de la forme de $S(t)$ que t_1 devient infini avec le même argument limite que t, c'est-à-dire zéro. D'autre part, $t_1^{\frac{1}{p}}$ et $t^{\frac{1}{p}} = z$ auront des arguments limites égaux à $\frac{2\pi}{p}$ d'après le choix qu'on s'est imposé. Enfin, d'après la forme de $R(z)$, z_1 aura le même argument limite que z. Donc finalement $t_1^{\frac{1}{p}}$ et z_1 ayant le même argument limite, on a $\omega = +1$, c'est-à-dire $t_1^{\frac{1}{p}} = z_1$, cette égalité subsistant tant que t est dans D. Si maintenant on calcule de proche en proche :

$$t_1 = S(t), \qquad t_2 = S(t_1), \qquad \ldots, \qquad t_n = S(t_{n-1}), \qquad \ldots$$

en prenant toujours dans les seconds membres les valeurs de $t^{\frac{1}{p}}$,

$t_1^{\frac{1}{p}}, \ldots, t_n^{\frac{1}{p}}, \ldots$ dont les arguments appartiennent au même intervalle $\left(\frac{\pi}{p}, \frac{3\pi}{p}\right)$, on aura aussi

$$z_1 = R(z), \qquad z_2 = R(z_1), \qquad \ldots, \qquad z_n = R(z_{n-1}),$$

$z, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ étant les valeurs choisies pour $t^{\frac{1}{p}}, t_1^{\frac{1}{p}}, \ldots, t_n^{\frac{1}{p}}, \ldots$. Or les t_n ainsi calculés convergeant vers l'infini dans le domaine D, les $z_n = R_n(z)$ convergent vers l'infini dans les p domaines distincts qui se déduisent de D par la transformation $z = \sqrt[p]{t}$.

On peut d'ailleurs ramener le point double à distance finie. On obtient ainsi p domaines de convergence assemblés autour de l'origine ayant chacun comme frontière une courbe formée d'arcs analytiques qui a en O un point anguleux d'angle $\frac{2\pi}{p}$. Chacun de ces domaines renferme à son intérieur les conséquents de tous ces points, y compris les points frontières autres que l'origine. A l'intérieur de ces domaines de convergence élémentaires qui correspondent à D, s'en trouvent d'autres qui correspondent à Δ (n^{os} 8, 9, 10); ces domaines également assemblés autour de l'origine présentent en O un point anguleux d'angle deux fois moindre $\left(\frac{\pi}{p}\right)$ et de même bissectrice que les précédents; dans ces domaines la convergence des z_n est uniforme (frontière comprise). Enfin, si l'on remplace $R(z)$ par la branche de fonction inverse représentée par la série

$$z_{-1} = R_{-1}(z) = z + az^{p+1} + \ldots,$$

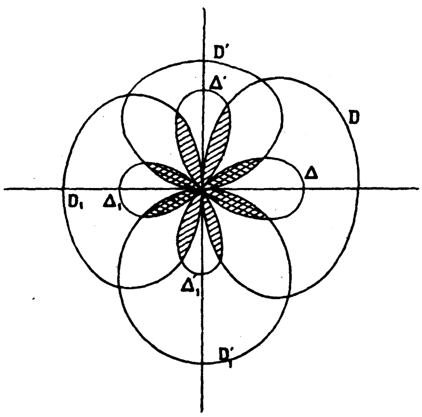
on obtient un assemblage analogue de domaines de convergence simple ou uniforme D' et Δ' qui offrent une disposition semblable à celle des domaines D et Δ moyennant une rotation de $\frac{\pi}{p}$; les bissectrices des angles en O des domaines du premier assemblage coïncident avec les tangentes en O aux courbes limites des domaines du second. Les domaines D de convergence simple relatifs aux conséquents d'un point et les domaines Δ' de convergence uniforme relatifs aux antécédents ont encore des secteurs communs d'angle au sommet $\frac{p}{2\pi}$, leur nombre étant $2p$. De même pour les domaines D' et Δ.

Remarquons enfin qu'on aura pour les z_n, quand z est dans un domaine D, une expression asymptotique de la forme

$$z_n = \frac{1}{\sqrt[p]{npa + o\left(n^{1-\frac{1}{p}}\right)}}.$$

Nous donnons (*fig.* 4) une figure schématique de l'ensemble des

Fig. 4.



divers domaines D, Δ, D', Δ' dans le cas de $p = 2$. Nous donnerons souvent à cet assemblage de domaines le nom d'*étoile* relative ou point double. Il est bon de noter au sujet de cette étoile : 1° que les domaines qui la composent sont intérieurs à un cercle dont le rayon peut être pris aussi petit qu'on le veut; 2° que la forme et la nature des courbes qui les limitent peuvent être variées d'une infinité de manières et sont sans importance. Il faut seulement retenir le fait qu'ils sont simplement connexes et la grandeur des angles qu'ils présentent au point O.

12. L'analyse précédente ne donne pas une expression asymptotique des z_n qui permettent de démontrer l'existence d'une fonction satisfaisant à l'équation d'Abel. Pour y parvenir nous ferons précéder l'emploi de la transformation conforme ($t^p = z$) d'une autre transformation destinée à faire disparaître un certain nombre de termes de R(z). Le point double étant supposé à l'origine, nous poserons

$$z_1 = R(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{p+2} z^{p+2} + \ldots + a_{2p} z^{2p} + a_{2p+1} z^{2p+1} + \ldots$$

et nous ferons le changement de variables

$$w = P(z) = z + \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_p z^p,$$
$$w_1 = P(z_1).$$

On tire de là les expressions de z et z_1 en fonction de w et w_1 sous forme de série entière commençant par les termes w et w_1. En portant ces valeurs dans l'équation $z_1 = R(z)$, on obtient une relation entre w et w_1 qui, résolue par rapport à w, sera encore de la forme

$$w_1 = w + A_{p+1} w^{p+1} + A_{p+2} w^{p+2} + \ldots,$$

ce qu'on vérifie aisément. Nous chercherons à déterminer les λ de manière que $A_{p+2} = A_{p+3} = \ldots = A_{2p} = 0$. Nous écrirons donc *a priori*

$$w_1 = w + A_{p+1} w^{p+1} + A_{2p+1} w^{2p+1} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} R(z) + \lambda_2 R^2(z) + \ldots + \lambda_p R^p(z) = z &+ \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_p z^p \\ &+ A_{p+1}(z + \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_p z^p)^{p+1} \\ &+ A_{2p+1}(z + \ldots)^{2p+1} + \ldots . \end{aligned}$$

Les coefficients des puissances de z jusqu'à z^p sont identiques dans les deux membres; en égalant les termes en z^{p+1}, on obtient $A_{p+1} = a_{p+1}$. L'égalité précédente peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} &(z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{p+2} z^{p+2} + \ldots + a_{2p} z^{2p} + \ldots) \\ &\quad + \lambda_2 z^2(1 + a_{p+1} z^p + a_{p+2} z^{p+1} + \ldots + a_{2p} z^{2p-1} + \ldots)^2 \\ &\quad + \lambda_3 z^3(1 + a_{p+1} z^p + \ldots + a_{2p} z^{2p-1} + \ldots)^3 + \ldots \\ &\quad + \lambda_p z^p[1 + a_{p+1} z^p + a_{p+2} z^{p+1} + \ldots + a_{2p} z^{2p-1} + \ldots]^p \\ &= z + \lambda_2 z^2 + \ldots + \lambda_p z^p + a_{p+1} z^{p+1}(1 + \lambda_2 z + \ldots + \lambda_p z^{p-1})^{p+1} + H z^{2p+1}. \end{aligned}$$

En égalant les coefficients de $z^{p+2}, z^{p+3}, \ldots, z^{2p}$ dans les deux membres, on obtient

$$a_{p+2} + 2 a_{p+1} \lambda_2 = (p+1) a_{p+1} \lambda_2,$$
$$a_{p+3} + 2\lambda_2 a_{p+2} + 3 a_{p+1} \lambda_3 = \frac{p(p+1)}{2} a_{p+1} \lambda_2^2 + (p+1) a_{p+1} \lambda_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$F_k(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k-1}) + k a_{p+1} \lambda_k = \Phi_k(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k-1}) + (p+1) a_{p+1} \lambda_k,$$
$$F_p(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{p-1}) + p a_{p+1} \lambda_p = \Phi_p(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{p-1}) + (p+1) a_{p+1} \lambda_p.$$

Dans ces équations, les F_k et Φ_k sont des polynomes en λ_2, $\lambda_3, \ldots, \lambda_{k-1}$ qui dépendent des coefficients a jusqu'à a_{2p} au plus. On déduit de là en posant $a_{p+1} = a\ (a \neq 0)$

$$\begin{aligned}
(p-1)\quad & a\lambda_2 = a_{p+2},\\
(p-2)\quad & a\lambda_3 = a_{p+3} + 2\lambda_2 a_{p+2} - \frac{p(p+1)}{2} a\lambda_2^2,\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(p-k+1)\, & a\lambda_k = \Psi_k(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{k-1}),\\
& a\lambda_p = \Psi_p(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{p-1}).
\end{aligned}$$

On obtient donc de proche en proche les valeurs des coefficients $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p$. Les λ étant ainsi déterminés, le changement de variables $w = P(z)$, $w_1 = P(z_1)$ conduit bien à une relation de la forme

$$w_1 = w - a\,w^{p+1} + A_{2p+1}\,w^{2p+1} + \ldots = Q(w),$$

le second membre étant convergent dans un cercle de rayon non nul, ainsi qu'il résulte de la théorie des fonctions implicites. (Nous avons changé le signe de a pour nous conformer aux notations précédemment employées.) Effectuons maintenant le changement de variables déjà employées $w = t^{-\frac{1}{p}}$, $w_1 = t_1^{-\frac{1}{p}}$. Nous obtenons

$$t_1 = S(t) = t + pa + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^{1+\frac{1}{p}}} + \ldots.$$

Nous sommes donc dans le cas où le développement de $S(t)$, ordonné suivant les puissances descendantes de t, a pour premier terme à exposant négatif un terme en $\frac{1}{t}$. Les considérations du n° 10 sur les valeurs asymptotiques de $S_n(t)$ et l'équation d'Abel sont donc applicables. Si t est dans le domaine D, on a pour

$$t_n = S_n(t)$$

l'expression asymptotique

$$t_n = pan + \frac{b}{pa}\,\mathcal{L}n + F(t) + \varepsilon_n,$$

$F(t)$ satisfaisant à l'équation d'Abel. Si t reste dans un domaine $\Delta\,[R(t) > A]$, on a pour de grandes valeurs de t

$$F(t) = t + o[\mathcal{L}(t)].$$

A ces domaines D et Δ la transformation conforme $w = t^{-\frac{1}{p}}$ fait correspondre dans le plan de la variable w un assemblage de $2p$ domaines $D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots, D^{(p)}$; $\Delta^{(1)}, \Delta^{2}, \ldots, \Delta^{(p)}$ dont la disposition a été décrite précédemment et dans lesquels les fonctions $Q_n(w)$, résultant de l'itération de $R(w)$, convergent soit simplement, soit uniformément vers zéro (n° 11) [1]. Nous pouvons d'ailleurs supposer cette *étoile* intérieure au cercle de convergence de la série $w - \lambda_2 w^2 + \ldots$ par laquelle on fait l'inversion de la fonction $P(z)$. A cette étoile, la transformation conforme $w = P(z)$, régulière quand n est dans ce cercle, fait correspondre une étoile présentant une disposition analogue, la transformation conservant les angles et même les directions autour de l'origine. Dans les nouveaux domaines ainsi obtenus $D_{(1)}, D_{(2)}, \ldots, D_{(p)}$; $\Delta_{(1)}, \Delta_{(2)}, \ldots, \Delta_{(p)}$; les $R_n(z)$ convergent soit simplement, soit uniformément vers zéro. Remarquons en passant que cette étoile n'est pas nécessairement identique à celle qu'on eût obtenue par le procédé du n° 11, sans faire usage de la transformation auxiliaire $w = P(z)$. Quoi qu'il en soit, on aura dans le domaine $D_{(1)}$ par exemple une expression asymptotique qui s'obtient en éliminant les variables auxiliaires entre les équations

$$w_n = P(z_n), \quad w = P(z),$$
$$w_n = t_n^{-\frac{1}{p}}, \quad w = t^{-\frac{1}{p}},$$
$$t_n = npa + \frac{b}{a}\,\mathfrak{L}\,n + F(t) + \varepsilon_n;$$

d'où

$$P(z_n) = \frac{1}{\sqrt[p]{npa + \frac{b}{a}\,\mathfrak{L}\,n + f(z) + \varepsilon_n}},$$

avec

$$f(z) = F\left[\frac{1}{P^p(z)}\right],$$
$$f[R(z)] = f(z) + pa.$$

---

[1] Malgré la présence de termes à exposant fractionnaire dans le développement de $S(t)$, on peut supposer que D et Δ restent les mêmes quel que soit le choix de l'argument de $t^{\frac{1}{p}}$. Les domaines $D^{(i)}$, par exemple, sont donc les images d'un même domaine D par les transformations $w = \frac{1}{\omega t^{\frac{1}{p}}}\left(\omega = e^{\frac{2ik\pi}{p}}\right)$.

Au sujet de ces formules, diverses remarques sont nécessaires :

1° Pour obtenir l'expression asymptotique explicite de z_n, il faut résoudre l'équation $P(z_n) = w_n$ par rapport à z_n au moyen de la série convergente

$$z_n = w_n + \mu_2 w_n^2 + \ldots + \mu_p w_n^p + \mu_{p+1} w_n^{p+1} + \ldots$$

et remplacer w_n par $t_n^{-\frac{1}{p}} = \dfrac{1}{\sqrt[p]{nap + \dfrac{b}{a}\mathcal{L}\, n + C(z) + \varepsilon_n}}$. On peut ne conserver que les $p+1$ premiers termes du développement. En effet, ε_n étant un infiniment petit dont l'ordre de grandeur nous est inconnu, le premier terme w_n n'est connu qu'à une quantité près de l'ordre de $\dfrac{1}{t_n^{\frac{1}{p}}} - \dfrac{1}{(t_n+\varepsilon_n)^{\frac{1}{p}}}$ ou de $\dfrac{\varepsilon_n}{t_n^{1+\frac{1}{p}}}$, c'est-à-dire d'un ordre inférieur à celui de w_n^{p+1}, mais d'ailleurs inconnu. Il est donc inutile d'écrire les termes en w_n^{p+2}, ...

2° Nous rappelons que a est le coefficient changé de signe de z^{p+1} dans le développement de $R(z)$; les coefficients b, λ_i et μ_i, d'autre part, sont des fonctions rationnelles des coefficients de $R(z)$ jusqu'au terme en z^{2p}.

3° Le choix des radicaux dans ces formules dépend de celui des domaines $D_{(i)}$. Remarquons en outre que la fonction d'Abel $F(t)$ dans le plan de la variable t n'est pas en général la même pour les différentes déterminations de $t^{\frac{1}{p}}$; elle sera la même dans le cas particulier où $S(t)$ ne contient pas de terme à exposant fractionnaire, c'est-à-dire si $Q(w)$ ne contient que des termes en w^{hp+1}. Les p fonctions d'Abel $f(z)$, relatives à la substitution $[z|R(z)]$ et déduites de F par la formule $F\left[\dfrac{1}{P^p(z)}\right] = f(z)$, sont définies et holomorphes dans les p domaines $D_{(i)}$ respectivement. Dans les domaines $\Delta_{(i)}$ elles vérifient la condition asymptotique

$$f(z) = \frac{1}{z} + o\left(\mathcal{L}\frac{1}{|z|}\right).$$

On démontrera aisément que les domaines $\Delta_{(i)}$ peuvent être choisis de manière qu'elles n'y prennent qu'une fois chaque valeur, et l'on étendra facilement les propriétés démontrées au paragraphe 9 concernant les courbes invariantes et l'itération analytique. On verra par exemple que les conséquents d'un point du domaine $D_{(i)}$ sont répartis sur une courbe invariante ayant pour tangente en O la bissectrice de l'angle formé par le contour de $D_{(i)}$ en ce point.

Exemple : $R(z) = z + \frac{1}{z}$. — Le point à l'infini est un point double de multiplicateur 1 pour lequel l'entier $p = 2$. On vérifiera que $R_n(z)$ converge uniformément vers l'infini dans tout domaine borné ne contenant aucun point de l'axe des quantités imaginaires. Dans chacun des deux demi-plans $(x > 0)$ et $(x < 0)$ on a

$$R_n(z) = \sqrt{2n + f(z) + \varepsilon_n},$$

$f(z)$ vérifiant l'équation d'Abel

$$f\left(z + \frac{1}{z}\right) = f(z) + 2.$$

$f(z)$ est holomorphe tant à droite qu'à gauche de l'axe imaginaire. On montrera, et nous y reviendrons ultérieurement, que cette droite est une ligne singulière essentielle de $f(z)$.

13. Ainsi, étant donné un point double de multiplicateur $+1$, nous avons appris à trouver des régions du plan pour lesquelles ce point double est un point frontière et dans lesquelles il y a convergence des conséquents d'un point quelconque vers ce point double. Nous devons nous demander maintenant si les points ainsi obtenus, en y ajoutant leurs antécédents, sont les seuls points pour lesquels les $R_n(z)$ convergent vers le point double. Soient toujours, le point double étant rejeté à l'infini,

$$R(z) = z + \frac{a}{z^{p-1}} + \frac{b}{z^p} + \ldots \qquad (a \text{ réel positif})$$

et z un point dont les conséquents tendent vers l'infini; les z_n étant à partir d'un certain rang dans le domaine de convergence de la série qui précède, on peut supposer qu'il en est ainsi à partir de z lui-même. Si l'on pose $z^p = t$, $z_n^p = t_n$, on a

$$t_n = S(t_{n-1}),$$
$$S(t) = t + pa + \frac{b'}{t^{\frac{1}{p}}} + \frac{c'}{t^{\frac{2}{p}}} + \ldots$$

La partie infiniment petite de $S(t)$ a en général des déterminations multiples, mais nous n'aurons pas besoin de savoir de quelle manière il faut choisir les déterminations des radicaux. Il nous suffit de remarquer que $\psi(t) = \frac{b'}{t^{\frac{1}{p}}} + \ldots$ peut être supposée en module plus petite que $\frac{pa}{2}$ quand on y remplace t par $t, t_1, \ldots, t_n$. On aura alors

$$\begin{aligned} t_1 &= t + pa + \theta\frac{pa}{2}, \\ t_2 &= t_1 + pa + \theta_1\frac{pa}{2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad |\theta_i| \leqq 1, \\ t_n &= t_{n-1} + pa + \theta_{n-1}\frac{pa}{2}; \end{aligned}$$

d'où

$$t_n = t + npa + n\theta'\frac{pa}{2} \qquad |\theta'| \leqq 1;$$

ou, en prenant la partie réelle des deux membres,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(t_n) &= \mathfrak{R}(t) + npa + n\theta''\frac{pa}{2} \qquad |\theta''| \leqq 1, \\ \mathfrak{R}(t_n) &> \mathfrak{R}(t) + n\frac{pa}{2}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est infinie positive en même temps que n. Si donc les points t_n ne coïncident jamais avec le point à l'infini, ils demeurent à partir d'un certain rang intérieurs au sens étroit au domaine D et même au domaine Δ; on peut ajouter que l'argument de t_n tend vers zéro. Les points z_n seront donc à partir d'un certain rang constamment intérieurs à l'un des p domaines $\Delta_{(i)}$ qui s'en déduisent par la transformation conforme $z^p = t$; ce sera naturellement toujours le même domaine $D_{(i)}$. Les points cherchés sont donc, d'une part, les antécédents du point double; d'autre part, les points intérieurs au sens étroit aux domaines $\Delta_{(i)}$

ou $D_{(i)}$ et leurs antécédents. Les points de la seconde catégorie sont chacun le centre d'un domaine dans lequel il y a convergence uniforme puisqu'il y a convergence uniforme dans les domaines fermés $\Delta_{(i)}$. Les points de la catégorie, c'est-à-dire les antécédents du point double qui sont en infinité dénombrable [on supposera pour plus de netteté $R(z)$ rationnelle] ne jouissent pas de cette propriété. Nous allons montrer en effet que les $R_n(z)$ ne peuvent pas former une suite uniformément convergente dans un domaine comprenant le point double à son intérieur. Supposons cette fois le point double placé à l'origine. Dans un cercle de centre O, il y a des régions où les fonctions $R_n(z)$ convergent uniformément vers zéro. Soit ξ un point intérieur à l'une de ces régions. Dans un cercle γ de centre O et de rayon ρ arbitraire, il y a donc des points $\xi - n$ pour lesquels

$$R_n(\xi_{-n}) = \xi \neq 0,$$

quel que soit l'entier n, les fonctions $R_n(z)$ ne peuvent donc pas converger uniformément vers zéro dans γ. Mais il y a aussi des régions de γ où les $R_n(z)$ convergent uniformément vers la constante zéro. Il s'ensuit que les $R_n(z)$ ne convergent pas uniformément dans tout le cercle γ.

On peut démontrer la même proposition d'une manière plus directe et plus instructive. $R_n(z)$ étant toujours supposée rationnelle pour plus de netteté, je dis que dans un cercle γ de centre O et de rayon ρ arbitraire, les $R_n(z)$ ne peuvent pas être uniformément formées. Car si elles l'étaient, elles seraient holomorphes dans γ quel que soit n; on aurait donc dans γ le développement convergent (n° 3)

$$R_n(z) = z - naz^{p+1} + bz^{p+2} + \ldots.$$

Soit $M(r)$ le module maximum de $R_n(z)$ sur la circonférence de centre O et de rayon $r < \rho$. On a

$$M^2(r) > r^2 + n^2\,|a|^2 r^{2(p+1)} + |b|^2 r^{2(p+2)} + \ldots.$$

Le second membre devient infini avec n. Donc, dans le cercle γ, ou bien les fonctions $R_n(z)$ ont des pôles, ou bien elles prennent des valeurs de module infiniment grand avec n. D'autre part, on a toujours $R_n(0) = 0$. Donc dans un cercle quelconque de centre O les $R_n(z)$ et, plus généralement, une suite quelconque extraite des $R_n(z)$ ne peuvent pas converger uniformément.

Il en sera de même pour tout domaine entourant un antécédent du point double. Nous savons en revanche que dans certains domaines fermés simplement connexes ayant le point double (ou l'un de ses antécédents) sur sa frontière, il y a convergence uniforme.

14. Nous allons étudier maintenant ce qui se passe autour d'un point double dont le multiplicateur a pour module l'unité avec un argument commensurable à 2π. Soit donc

$$R(z) = sz - a_2 z^2 + \ldots + a_h z^h + \ldots,$$

où $s = e^{i\alpha} = e^{2i\pi\frac{m}{p}}$, m et p étant des entiers premiers entre eux. On aura

$$R_n(z) = s^n z + \ldots$$

et en particulier

$$R_p(z) = z + A_h z^h + A_{h+1} z^{h+1} + \ldots.$$

On suppose $A_h \neq 0$, c'est-à-dire que $A_h z^h$ est le premier terme non nul qui suit le terme en z; on laisse donc de côté pour l'instant le cas particulier où $R_p(z)$ serait égal à z. Je dis que h est de la forme $pp' + 1$. En effet, en vertu de l'identité

$$R_p[R(z)] = R[R_p(z)],$$

on aura

$$\begin{aligned}(sz + a_2 z^2 + \ldots + a_h z^h + \ldots) + A_h[sz + a_2 z^2 + \ldots a_h z^h + \ldots]^h + H z^{h+1} \\ = s[z + A_h z^h + A_{h+1} z^{h+1} + \ldots] + a_2[z + a_h z^h + \ldots]^2 \\ + a_h[z + \ldots]^h + K z^{h+1},\end{aligned}$$

H et K étant des séries entières. En égalant les termes en z^h, on a

$$a_h + A_h s^h = A_h s + a_h,$$

d'où

$$A_h s(s^{h-1} - 1) = 0.$$

Comme $A_h s \neq 0$, on a donc $s^{h-1} = 1$, et comme s est racine primitive de $s^p = 1$, $h - 1$ est multiple de p ou $h = pp' + 1$.

Ceci posé, la transformation $[z | R_n(z)]$ est, dans un domaine suffisamment petit autour de l'origine, une transformation conforme sans points singuliers qui équivaut pour z infiniment petit à une rotation de l'angle $n\alpha$ autour de l'origine. D'autre part, nous savons que les fonctions itérées de $R_p(z)$ convergent vers zéro dans pp' domaines assemblés autour de O et forment une étoile; ces domaines ont en O une pointe d'angle $\frac{2\pi}{pp'}$. Nous considérons p' de ces domaines rencontrés successivement sur une circonférence infiniment petite de centre O et assemblés dans un secteur d'angle $\frac{2\pi}{p}$. Soient $D^0, D^1, \ldots, D^{p'-1}$, ces p' domaines que nous allons transformer successivement par $R(z), R_2(z), \ldots, R_{p-1}(z)$. Nous obtenons ainsi pp' domaines qui sont désignés par le Tableau suivant :

$$\left\{\begin{array}{llll} D^0 & D^1 & \ldots & D^{p'-1}, \\ D_1^0 & D_1^1 & \ldots & D_1^{p'-1}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots, \\ D_{p-1} & D_{p-1}^1 & \ldots & D_{p-1}^{p'-1}. \end{array}\right.$$

Ces domaines peuvent être supposés tous intérieurs au cercle $|z| \leqq \rho$, les fonctions $R_n(z)$ jusqu'à $n = p - 1$, étant toutes régulières et ne prenant qu'une fois chaque valeur dans ce cercle. Il s'ensuit que les domaines de ce Tableau sont des domaines simples ne se recouvrant pas eux-mêmes. Ils sont d'autre part assemblés autour de O et présentent tous en O une pointe d'angle $\frac{2\pi}{pp'}$, les tangentes à ces pointes en O formant un faisceau isogonal dont les angles recouvrent sans double emploi un intervalle égal à 2π. Je dis de plus que ces pp' domaines sont sans point commun.

En effet, soit z un point appartenant à un domaine inscrit dans la première ligne $D^{(i)}$. Nous savons que $R_{np}(z)$ tend vers zéro et que son argument a pour limite l'angle ω de Ox avec la bissectrice de la pointe du domaine $D^{(i)}$ au point O; pour $R_n(z)$, n n'étant plus nécessairement multiple de p, cet argument aura pour valeur limite $\omega + \frac{2n\pi}{p}$; la même propriété subsiste pour tous les domaines du Tableau; il s'ensuit aisément que deux points appartenant à deux domaines distincts ont leurs conséquents distincts à partir d'un certain rang. Ces deux domaines sont donc sans points communs et se touchent seulement en O. Les domaines du Tableau forment donc un assemblage étoilé de même structure que l'étoile considérée au début. Les domaines d'une même colonne forment un cycle, les conséquents successifs d'un point de l'un de ces domaines étant périodiquement intérieurs aux p domaines du cycle. Au contraire, deux domaines appartenant à deux colonnes distinctes sont formés de points qui ne s'équivalent jamais par les puissances de la substitution $[z R(z)]$.

Enfin, tous les points du plan dont les conséquents tendent vers l'origine sont des antécédents des points intérieurs aux domaines du Tableau, ou de l'origine elle-même. Nous laisserons de côté les extensions faciles des propriétés démontrées dans les paragraphes qui précèdent concernant les valeurs asymptotiques de z_n et l'équation d'Abel. On démontre d'autre part très aisément que les $R_n(z)$, ni aucune des suites infinies qu'on peut en extraire, ne convergent uniformément dans un cercle de centre O. Car s'il existait une telle suite, on pourrait en extraire une autre où tous les entiers n seraient congrus entre eux (mod p) et de la forme $\lambda p - q$; les fonctions $R_{\lambda p-q}(z) = f_\lambda(z)$ convergeant uniformément dans un cercle de centre O, il en serait de même des fonctions $R_q[f_{\lambda p}(z)] = R_\lambda(z)$ qui sont les itérées d'une fonction de multiplicateur $+1$ au point double O. On est donc ramené à une question déjà résolue. Remarquons aussi qu'on pourrait compléter l'étoile obtenue par un ensemble analogue de domaines relatifs aux antécédents d'un point.

Nous avons laissé de côté le cas où $R_p(z)$ est identique à z. S'il en est ainsi, les fonctions $R_n(z)$ sont périodiquement égales aux fonctions z, $R(z)$, $R_2(z)$, ..., $R_{p-1}(z)$, et ne convergent donc pas vers zéro. Cette circonstance se présente pour les substitutions du premier degré $z = sz = e^{\frac{2i\pi m}{p}} z$, et pour celles qu'on en déduit par une même transformation conforme, $z = f(t)$, $z_1 = f(t)_1$, $f(t)$ étant holomorphe et nulle, mais de dérivée non nulle pour $t = 0$. La relation $z_1 = sz$ devient alors

$$f(t_1) = sf(t), \qquad \text{d'où} \qquad t_1 = F[sf(t)].$$

Cette dernière équation ne sera elle-même de la forme $t_1 = st$ que si $f(st) = sf(t)$; écartons cette hypothèse; on aura alors une substitution $t_1 = Q(t)$, où Q n'est pas du premier degré, dont l'itération indéfinie ne conduit qu'à p substitutions distinctes. Par exemple pour $p = 2$, on pourra prendre $Q(t) = L(2 - e^t)$, avec la détermination du logarithme nulle pour $t = 0$. Cette circonstance ne peut d'ailleurs pas se présenter si $R(z)$ est une fraction rationnelle de degré supérieur à 1, ou une fonction uniforme ayant des points singuliers essentiels isolés, car l'inverse d'une telle fonction n'est jamais uniforme d'après les théorèmes de Picard.

Considérons maintenant le cas d'un point périodique dont le multiplicateur est de la forme $e^{2i\pi\frac{m}{p}}$; si q est la période, on ramènera ce cas au précédent en considérant la substitution $[z\,|\,R_q(z)]$. On obtiendra ainsi autour des q points du cycle q assemblages de domaines ou étoiles dans lesquelles les $R_n(z)$ convergent périodiquement vers les points du cycle; si z appartient à l'un de ces domaines, le point z_q appartiendra à la même étoile, mais à un domaine différent si $p > 1$; le point R_{pq} appartiendra au même domaine que z; les points $z_{\lambda pq}$ tendent vers le point double correspondant sans sortir de ce domaine; il y a en quelque sorte une double périodicité, l'une de position et l'autre d'orientation. Les domaines des q étoiles forment ainsi p' groupes ou cycles ($p' \geqq 1$); deux points qui appartiennent à des domaines de deux cycles distincts ne sont jamais équivalents par les puissances de la substitution donnée.

Il reste à étudier les points doubles dont le multiplicateur est de la forme $e^{i\alpha}$, α étant un nombre réel incommensurable à π. Nous ne savons que fort peu de choses sur ces points doubles, dont l'étude au point de vue qui nous occupe paraît très difficile. Considérons d'abord une substitution du premier degré $z_1 = e^{i\alpha}z$; l'itération donne $z_n = e^{ni\alpha}z$; les points z_n sont répartis d'une manière dense sur toute la circonférence de centre O passant par z et la suite des fonctions $R_n(z)$ admet comme fonctions limites toutes les fonctions $e^{i\beta}z$, où β est un nombre réel quelconque. Si l'on pose comme plus haut $z = f(t)$, $z_1 = f(t_1)$ avec $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, on obtient une nouvelle substitution $t_1 = Q(t)$ avec $Q(0) = 0$, $Q'(0) = e^{i\alpha}$, qui en général n'est pas du premier degré et telle que les conséquents d'un point sont répartis d'une manière dense sur une courbe fermée analytique entourant le point double.

Au voisinage du point double, les conséquents d'un point (autre que le point double) ne tendent donc jamais vers ce point. Mais la substitution $z_1 = R(z) = e^{i\alpha}z + \ldots$ étant donnée, il n'est pas facile de reconnaître si elle rentre dans la catégorie précédente. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; existe-t-il alors des domaines dont les conséquents tendent vers le point double? Nous ne pouvons actuellement ni en donner d'exemple, ni prouver que la chose soit impossible ([1]).

15. Nous n'avons plus maintenant à étudier que les points doubles *répulsifs* dont le multiplicateur est plus grand que 1 en module. Si α est un point de cette espèce, il existe un nombre réel k compris entre 1 et $|s| > 1$, tel que pour tout point z intérieur au cercle $(|z - \alpha| \leqq \rho)$, on ait

$$|z_1 - \alpha| = |R(z) - \alpha| > k\,|z - \alpha|.$$

Si les points $z, z_1, \ldots, z_{n-1}$ sont tous intérieurs à ce même cercle, on aura aussi $|z_n - \alpha| > k^n |z - \alpha$, quantité qui croît indéfiniment avec n; les points z_n finiront donc par sortir du cercle. Il est clair qu'à part le point double lui-même, les conséquents d'un point du cercle ne tendent jamais vers le point double. Si $R(z)$ est définie et uniforme dans tout le plan et même rationnelle pour fixer les idées, on aura sur une circonférence de centre α et de rayon ρ

$$M_n(\rho) > k^n \rho,$$

$M_n(\rho)$ désignant le module maximum de $R_n(z)$ supposée holomorphe pour $|z - \alpha| \leqq \rho$. Si cette dernière condition n'est pas remplie, $R_n(z)$ a au moins un pôle sur la circonférence ou à l'intérieur. Par conséquent, dans tout cercle de centre α, $R_n(z)$ prend des valeurs de module indéfiniment croissant avec n. Comme, d'autre part, on a toujours $R_n(\alpha) = \alpha$, aucune suite infinie extraite des $R_n(z)$ ne peut converger uniformément dans un cercle de centre α.

La fonction inverse de $R(z)$, égale à α pour $z = \alpha$, est déve-

---

([1]) Nous donnerons souvent, aux points doubles ou périodiques de multiplicateur égal à 1 en module, le nom de points doubles ou périodiques *indifférents*.

loppable pour $|z = \alpha|$ suffisamment petit en série entière :

$$z_{-1} = R_{-1}(z) = \alpha + \frac{1}{s}(z - \alpha) + (\quad)(z - \alpha)^2 + \ldots.$$

Le point α est donc un point double attractif de multiplicateur $\frac{1}{s}$ pour la substitution $[z \mid R_{-1}(z)]$. Donc, dans un certain domaine du point α, les antécédents de z obtenus au moyen de la branche de fonction $R_{-1}(z)$ que nous venons de définir convergent uniformément vers α. Il existe une fonction holomorphe et nulle en α, de dérivée égale à 1 en ce point qui vérifie l'équation fonctionnelle de Schröder

$$F[R_{-1}(z)] = \frac{1}{s} F(z),$$

d'où

$$s F(z) = F[R(z)].$$

La fonction inverse de $F(z)$, $G(z)$ égale à α pour $Z = 0$ et holomorphe en ce point vérifie l'équation fonctionnelle

$$R[G(Z)] = G(sZ).$$

Nous allons maintenant démontrer un théorème général concernant l'ensemble dérivé des conséquents d'un point, en supposant toujours pour éviter toute obscurité $R(z)$ rationnelle. Supposons que cet ensemble dérivé contienne le point double α de multiplicateur s tel que $|s| \geqq 1$. Si cet ensemble renferme d'autres points que α (ce qui est certainement le cas, comme nous venons de le voir, quand $|s| > 1$ et que z n'est pas un antécédent de α), il en renferme une infinité qui ont α pour point limite. En effet, z n'étant pas un antécédent de α aura tous ses conséquents distincts, sinon z serait l'antécédent d'un point périodique qui coïnciderait nécessairement avec α, puisque α est un point invariant et limite de certains conséquents de z. Ceci posé, on aura, dans un cercle de centre α et de rayon r,

$$|R(z) - \alpha| < k|z - \alpha|,$$

k étant un nombre fini mais plus grand que 1 ; r doit être supposé assez petit pour qu'il existe à l'extérieur du cercle un point limite β des z_n, ce qui est possible puisque α n'est pas le seul point limite. Soient ρ un nombre compris entre 0 et $\frac{r}{k}$, z_λ un conséquent de z tel que $|z_\lambda - \alpha| < \rho$; puisque les z_n ont β parmi leurs points limites, il y a des conséquents de z_λ dont la distance à α est supérieure à ρ. Soit $z_{\lambda+\mu}$ le premier conséquent de z_λ pour lequel $|z_{\lambda+\mu} - \alpha| > \rho$; comme $|z_{\lambda+\mu-1} - \alpha| \leqq \rho$, on aura $|z_{\lambda+\mu} - \alpha| < k\rho$. Le point $z_{\lambda+\mu}$ est donc intérieur à la couronne $(\rho, k\rho)$. Soit $z_{\lambda'}$, le premier conséquent de z après $z_{\lambda+\mu}$ pour lequel $|z_{\lambda'} - \alpha| < \rho$; $z_{\lambda'}$ existe puisque α est point limite des z_n. On en déduira comme précédemment l'existence de $z_{\lambda'+\mu'}$ compris dans la couronne $(\rho, k\rho)$. On obtient ainsi la suite de points $z_{\lambda+\mu}, z_{\lambda'+\mu'}, z_{\lambda''+\mu''}, \ldots$ dont les indices vont en croissant, qui sont donc tous distincts et tous intérieurs à la couronne $(\rho, k\rho)$. Ils sont donc au moins un point limite dans cette couronne ou sur son contour. En faisant successivement $\rho = \frac{r}{k}, \frac{r}{k^2}, \ldots, \frac{r}{k^n}, \ldots$, on obtient une suite de couronnes tendant vers le point α et qui contiennent toutes au moins un point limite des z_n. L'ensemble E$'$ contient donc au moins un point.

Nous allons donner, pour terminer, quelques exemples des diverses sortes de points doubles que nous avons étudiées dans ce Chapitre.

Prenons $R(z) = z^2 + 5$. Il y a un point double attractif, qui est le point à l'infini et deux points doubles répulsifs qui sont les points $\alpha = \frac{1 + i\sqrt{19}}{2}$ et $\beta = \frac{1 - i\sqrt{19}}{2}$, dont les multiplicateurs sont respectivement 2α et 2β. Les z_n convergent vers l'infini pour $|z| \geqq 3$. En effet, si $|z| \geqq 3$, on a

$$
\begin{aligned}
&|z_1| \geqq |z|^2 - 5 \geqq 4,\\
&|z_2| \geqq |z_1^2| - 5 > 8,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&|z_n| > 2^{n+1},\\
&|z_{n+1}| > 2^{2n+2} - 5 > 2^{2n+2} - 8 = 8(2^{2n-1} - 1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots > 8.2^{2n-2} = 2^{2n+1} > 2^{n+2}.
\end{aligned}
$$

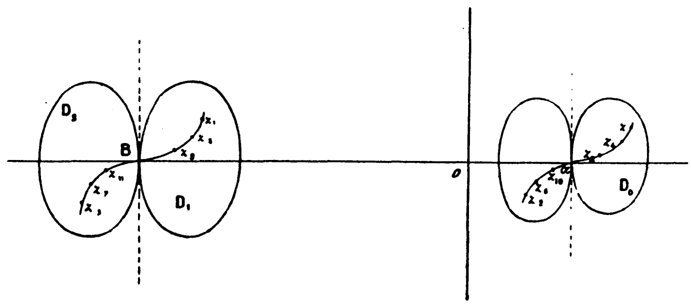
On a donc $\lim z_n = \infty$ pour $|z| \geqq 3$. Nous étudierons plus tard cet exemple d'une manière plus complète.

Prenons ensuite $R(z) = z^2 - \frac{5}{4}$. Nous avons toujours le point attractif $z = \infty$, et les deux points doubles répulsifs $z = \frac{+1 \pm \sqrt{6}}{2}$, de multiplicateurs $1 \pm \sqrt{6}$. Nous trouvons ensuite un cycle d'ordre 2 correspondant aux points racines α et β, l'équation

$$z^2 + z - \frac{1}{4} = 0,$$

et dont le multiplicateur est égal à $R'(\alpha) R'(\beta) = 4\alpha\beta = -1$. L'étoile du point $\alpha = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ se compose des deux domaines D_0, D_2 placés de part et d'autre de la parallèle à l'axe imaginaire menée par α et dont les contours sont tangents à cette droite; l'étoile du point $\beta = \frac{-1\sqrt{2}}{2}$ se compose des domaines D_1, D_3 offrant une disposition analogue. Les conséquents d'un point z de D_0 sont les points z_{4n} intérieurs à D_0, z_{4n+1} extérieurs à D_1, z_{4n+2} intérieurs à D_2 et z_{4n+3} à D_3. Ils tendent vers α ou β en restant sur des courbes tangentes à l'axe réel (*fig.* 5).

Fig. 5.



Considérons enfin l'exemple un peu plus général $R(z) = z^d + a$. Les points périodiques d'ordre n, n étant premier, sont les points racines de l'équation

$$U_n(z) = \frac{R_n(z) - z}{R(z) - z} = z^{d^n - d} + \ldots + P_n(a) = 0.$$

$P_n(a)$ est un polynome en a, ayant comme premier terme $a^{d^{n-1}-1}$ et comme dernier terme l'unité. Les points racines de l'équation précédente se répartissent en $\frac{d^n - d}{n}$ cycles d'ordre n.

Soit $(z, z_1, \dots, z_{n-1})$ l'un de ces cycles. Son multiplicateur sera

$$t = R'(z)R'(z_1)\dots R'(r_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n=1} dz_i^{d-1} = d^n(\Pi z_i)^{d-1}.$$

Le produit des multiplicateurs des différents cycles en nombre $\frac{d^n - d}{n}$ sera donc

$$d^{nd-d}\,\Pi(z)^{d-1},$$

le produit Π étant étendu à toutes les racines de $U_n(z) = 0$, c'est-à-dire

$$\pm d^{dn-d}[P(a)]^{d-1}.$$

Si a est arbitraire, on peut en disposer de manière que cette expression prenne telle valeur que l'on voudra. Si cette valeur est plus petite que 1 en module, il y aura au moins un $(t) < 1$, donc au moins un cycle attractif d'ordre n.

CHAPITRE III.

16. Nous étudierons dans ce Chapitre une classe particulièrement simple et importante de substitutions rationnelles, celles qui transforment respectivement en eux-mêmes l'intérieur et la circonférence d'un cercle et par conséquent aussi l'extérieur du cercle. Nous allons chercher l'expression générale d'une telle substitution en supposant d'abord que par une inversion préalable on ait transformé le cercle en le demi-plan : $I(z) \geqq 0$. $Z = R(z)$ est une substitution cherchée, la fonction $R(z)$ qui est évidemment réelle pour z réel a tous ses pôles sur l'axe réel; car si elle avait un pôle z_0 dans le demi-plan supérieur, z décrivant autour de z_0 une circonférence infiniment petite, Z décrirait un contour extérieur à un cercle de rayon infiniment grand, de manière que l'argument de $z - z_0$ ayant augmenté de 2π, celui de Z aurait diminué de $2q\pi (q \geqq 1)$ et le lieu de Z aurait des points dans le demi-plan inférieur, ce qui est impossible, puisque z reste dans le demi-plan supérieur. De plus, les pôles de $R(z)$ ne peuvent être que des pôles simples, car z décrivant autour du pôle réel z_0 une demi-circonférence de rayon très petit dans le demi-plan supérieur de sorte que l'argument de $z - z_0$ croisse de 0 à π, Z décrira une

courbe extérieure à un cercle de très grand rayon, de manière que l'argument de Z diminue approximativement de $q\pi$, si z_0 est un pôle d'ordre q. Si $q \geqq 2$, cette courbe aura des points dans le demi-plan inférieur, ce qui est impossible. On voit d'une manière analogue que l'infini est un pôle simple de $R(z)$. On a donc

$$R(z) = kz + h - \sum \frac{A}{z-a},$$

les a étant réels; il en est de même des constantes A, h, k, puisque

$$A = \lim_{z=a} R(z)(z-a),$$
$$k = \lim_{z=\infty} \frac{R(z)}{z}$$

et que $R(z)$ est réelle pour z réel. Je dis enfin que les A et k sont positifs, car, pour $z = x + iy$ voisin de a, la partie principale de de $R(z)$ est

$$-\frac{A}{z-a} = -\frac{A(x-a)}{(x-a)^2+y^2} + \frac{Aiy}{(x-a)^2+y^2},$$

qui se réduit pour $x = a$, $y > 0$ à $\frac{Ai}{y}\cdot$ On doit donc avoir $\frac{A}{y} > 0$, donc $A > 0$. De même pour $z + iy$, où y est infiniment grand positif, on a $R(z) = kiy +$ quantité bornée, par suite, $ky > 0$, donc $k > 0$. Bien entendu, k peut être nul, alors l'infini n'est plus un pôle, donc n'est plus un point double de la substitution.

Réciproquement, toute fraction rationnelle de la forme précédente répond à la question, puisqu'en posant $Z = X + iY$, il vient

$$Y = ky + \sum \frac{Ay}{(x-a)^2+y^2} \qquad (k \geqq 0, \ A > 0),$$

Y et y sont donc toujours de même signe et nuls en même temps.

Nous allons chercher les points doubles de la substitution en supposant $k = 0$, ce qui doit être regardé comme le cas général; autrement, l'infini étant un point double, on posera

$$\frac{-1}{Z-\alpha} = T, \qquad \frac{-1}{z-\alpha} = t,$$

α constante réelle; on aura alors une relation de même forme entre T et t, l'infini n'étant plus un point double si α est convenablement choisi.

Nous poserons donc

$$R(z) = h - \sum_{1}^{d} \frac{A}{z-a}$$

et nous aurons à discuter l'équation

$$z = R(z) = h - \sum \frac{A}{z-a}$$

ou

$$f(z) = R(z) - z = h - z - \sum \frac{A}{z-a} = 0.$$

Faisons varier z de $-\infty$ à $+\infty$ en notant les valeurs de discontinuité a de $f(z)$; nous avons le tableau de variation suivant :

z..........	$-\infty$		a_1		a_2 ...		a_{d-1}		a_d		$+\infty$
$f(z)$.....	$+\infty$		$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Il y a d'après cela un nombre impair de racines réelles, donc au moins une, dans chacun des intervalles (a_j, a_{j+1}), ce qui donne au moins $d - 1$ racines réelles et distinctes, et un nombre pair qui ne peut donc être que 0 ou 2 dans les intervalles extrêmes (le nombre total de racines distinctes ou non est $d + 1$, y compris les racines imaginaires).

L'équation a ainsi $d - 1$ racines réelles et distinctes respectivement dans les intervalles (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., et en outre suivant les cas :

1° Deux racines imaginaires conjuguées.

Il y a alors une racine simple réelle et unique dans chacun des intervalles (a_j, a_{j+1}). Pour chacune de ces racines α, $f(z)$ passe du négatif au positif, donc $f'(\alpha) > 0$ ou $R'(\alpha) > 1$. Les α sont donc des points doubles répulsifs. Considérons ensuite les deux racines imaginaires conjuguées, dont les multiplicateurs s et s' sont également imaginaires conjugués. D'après la relation connue entre les multiplicateurs, on a

$$\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s'-1} + \sum_{1}^{d-1} \frac{1}{s_i - 1} + 1 = 0,$$

le $\sum$ étant étendu aux points doubles réels pour lesquels s_i est réel et > 1. On ne considère que des substitutions de degré $\geqq 2$, donc $d - 1 \geqq 1$. En égalant à zéro la partie réelle du premier membre, on a

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \mathcal{R}\left(\frac{1}{s'-1}\right) + 1 + \mathrm{P} = 0 \qquad (\mathrm{P} > 0)$$

ou

$$2u + 1 + \mathrm{P} = 0$$

en posant

$$\frac{1}{s-1} = u + iv, \qquad \frac{1}{s'-1} = u - iv.$$

On a donc $u < -\frac{1}{2}$, d'où résulte comme on sait

$$|s| = |s'| < 1.$$

On a donc deux points doubles attractifs imaginaires conjugués.

2° Deux racines réelles distinctes entre elles et des précédentes, donc au total $d + 1$ racines réelles et distinctes.

Il y a alors nécessairement soit trois racines réelles et distinctes dans un intervalle (a_j, a_{j+1}), soit deux racines réelles et distinctes dans l'un des intervalles extrêmes. S'il y a trois racines $\alpha < \alpha' < \alpha''$ entre a_j et a_{j+1}, pour α et α'', $f(z)$ est croissante

$$\mathrm{R}'(\alpha) > 1, \qquad \mathrm{R}''(\alpha'') > 1;$$

pour α', $f(z)$ est décroissante et $\mathrm{R}'(\alpha') < 1$. S'il y a deux racines réelles et distinctes dans l'intervalle $(a_d, +\infty)$, par exemple, on aura $\mathrm{R}'(\alpha) > 1$ et $\mathrm{R}'(\alpha') < 1$ $(\alpha < \alpha')$. Dans les deux cas, il y a d points doubles pour lesquels s est réel et > 1, donc $\frac{1}{s-1} > 0$. Pour le $(d+1)^{\text{ième}}$, on aura, en vertu de la relation connue,

$$\frac{1}{s-1} = -1 - \sum{}' \frac{1}{s-1} = -1 - \mathrm{P} \qquad (\mathrm{P} > 0),$$

d'où

$$0 < s < 1.$$

Il y a donc un point double attractif et un seul sur l'axe réel.

3° Deux racines réelles confondues soit entre elles, soit avec l'une des précédentes, c'est-à-dire en tout $d-1$ racines réelles et distinctes et une racine double.

Pour la racine double, on a $s=R'(\alpha)=+1$. On voit facilement que $s>1$ pour les autres.

4° Deux racines réelles confondues entre elles et avec l'une des précédentes, c'est-à-dire au total une racine triple appartenant alors à l'un des intervalles (a_j, a_{j+1}) et $d-2$ racines réelles distinctes appartenant respectivement aux $d-2$ autres intervalles finis. Pour la première, on a $s=R'(\alpha)=+1$, $R''(\alpha)=0$. Pour les autres, on a toujours $s>1$.

Résumons ces conclusions en considérant un cercle quelconque au lieu de la partie supérieure du demi-plan. Nous pouvons dire que toute substitution rationnelle de degré $d>1$ admettant un *cercle fondamental* Γ possède :

Soit 1° deux points doubles attractifs qui sont l'image l'un de l'autre par rapport à Γ et $d-1$ points doubles répulsifs situés sur la circonférence;

Soit 2° un point double attractif et d points doubles répulsifs tous situés sur la circonférence;

Soit 3° un point double de multiplicateur égal à $+1$ qui équivaut à deux ou à trois points doubles confondus et $d-1$ et $d-2$ points doubles répulsifs, tous ces points étant sur la circonférence.

Remarquons que le multiplicateur d'un point double situé sur la circonférence est toujours réel et positif, ce qui est à peu près évident *a priori*. Au contraire, les multiplicateurs des points doubles attractifs non situés sur la circonférence, s'ils existent, peuvent avoir des valeurs quelconques réelles ou complexes (<1 en module).

17. Nous pouvons étendre la notion de substitution à cercle fondamental en considérant aussi le cas où $R(z)$ permute entre eux l'intérieur et l'extérieur du cercle, la circonférence restant invariante. Si l'on transforme la circonférence en l'axe réel, on a tout de suite l'expression de $R(z)$ en remarquant que $-R(z)$ laisse invariant le demi-plan supérieur :

$$R(z)=-kz-h+\sum\frac{A}{z-a},$$

les A et k étant encore positifs. On pourrait faire comme plus haut la discussion de l'équation $R(z) = z$; mais cela est inutile. Il suffit de remarquer : 1° que les deux demi-plans étant permutés entre eux, il n'y a pas de point invariant imaginaire; 2° que les points doubles situés sur l'axe réel ont leurs multiplicateurs réels et négatifs pour la même raison; que $Z = R_2(z)$ définit une substitution à cercle fondamental du type déjà étudié.

D'après cela, si $R_2(z)$ est de la première espèce, c'est-à-dire possède deux points doubles imaginaires, ces points forment un cycle d'ordre 2 pour $R(z)$. Par ailleurs, les autres points doubles de $R_2(z)$ étant tous réels et répulsifs, il en est de même pour $R(z)$. La substitution proposée a donc tous ses points invariants sur l'axe réel avec des multiplicateurs réels et négatifs; elle a en outre un cycle attractif d'ordre 2.

Si $R_2(z)$ est de la deuxième espèce, c'est-à-dire possède un point invariant attractif sur l'axe réel, tous les autres étant répulsifs et également réels, $R(z)$ a également un point invariant attractif de multiplicateur compris entre 0 et -1 (limites exclues) et d points invariants répulsifs, tous ces points étant réels.

Si $R_2(z)$ est de l'espèce singulière, c'est-à-dire possède un point double de multiplicateur égal à $+1$, $R(z)$ aura sur l'axe réel un point double de multiplicateur égal à -1 [pour lequel $R_2''(z) = 0$]. Les autres points doubles sont réels et répulsifs.

Il y a correspondance entre les diverses espèces pour les deux types de substitution, sauf en ce qui concerne les substitutions singulières du premier type avec un point double α où $R'(\alpha) = +1$, $R''(\alpha) \neq 0$ qui n'ont pas de correspondantes dans le deuxième type.

18. Si $R(z)$ est une fonction à cercle fondamental, il en sera de même de $R_n(z)$ quel que soit l'entier n; $R_n(z)$ sera du second type s'il en est ainsi pour $R(z)$ et si n est impair.

Il en résulte de suite que tous les cycles d'ordre n sont répulsifs et formés de points réels dès que $n > 2$ et même pour $n = 2$, exception faite des substitutions du deuxième type et de la première espèce.

D'une manière générale, en composant entre elles des substitutions qui admettent le même cercle fondamental Γ, dans un ordre quelconque, on a encore une substitution qui admet le même cercle fondamental; ces substitutions forment un groupe si on leur adjoint leurs inverses qui, naturellement, ne sont pas rationnelles.

Les propriétés des points doubles que nous venons d'étudier caractérisent les substitutions à cercle fondamental et permettent de les exprimer d'une autre manière.

Supposons que $[z, R(z)]$ admette $d-1$ points doubles α_1, α_2, ..., α_{d-1}, situés sur une circonférence Γ, de multiplicateurs réels et >1, et deux points doubles α, α' de multiplicateurs s et s' imaginaires conjugués, α et α' étant l'image l'un de l'autre par rapport à Γ; les s sont liés par la relation

$$\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s'-1}+\sum_1^{d-1}\frac{1}{s_i-1}+1=0,$$

qui entraîne, comme nous l'avons déjà vu,

$$|s|=|s'|<1.$$

Je dis que la substitution admet Γ comme cercle fondamental. Nous savons en effet que

$$\frac{1}{R(z)-z}=\frac{1}{(s-1)(z-\alpha)}+\frac{1}{(s'-1)(z-\alpha')}+\sum_1^{d-1}\frac{1}{(s_i-1)(z-\alpha_i)}.$$

On peut supposer, sans diminuer la généralité, que Γ est l'axe réel, donc α_i réel, α et α' imaginaires conjugués. Posons $R(z)=A$ dans l'égalité précédente; nous avons une équation en z qui aura toutes ses racines réelles si A est réel. En effet, cette équation peut s'écrire

$$\sum_1^{d-1}\frac{1}{(s_i-1)(z-\alpha_i)}+\frac{1}{z-A}+\Phi(z)=0,$$

$\Phi(z)$ étant réelle et bornée pour z réel, car c'est une fraction rationnelle de la forme $\frac{Cz+C'}{(z-a)^2+b^2}$, où $b>0$. D'autre part, les coefficients des $\frac{1}{z-\alpha_i}$ sont positifs puisque $s_i>1$, de même que le coefficient de $\frac{1}{z-A}$ qui est égal à 1. Donc, si l'on considère les

$d - 1$ intervalles déterminés par les d nombres $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{d-1}, A)$, le premier membre prenant des valeurs infinies de signe contraire aux deux extrémités d'un intervalle s'annule une fois dans cet intervalle; donc $d - 1$ racines réelles, et comme l'équation est de degré d (à cause de la relation entre les multiplicateurs), il y a bien d racines réelles. Donc $R(z) = A$ a toutes ses racines réelles pour A réel; mais $Z = R(z)$ coïncidant avec z pour $z = \alpha = a + bi$, si z décrit un chemin quelconque dans le demi-plan supérieur à partir de α, Z restera aussi dans ce demi-plan, sinon Z franchirait l'axe réel au point $Z = A$ et l'équation $R(z) = A$ aurait une racine imaginaire. D'autre part, $R(z)$ est à coefficients réels. Donc $Z = R(z)$ définit une substitution à cercle fondamental du premier type et de la première espèce.

Supposons maintenant tous les points doubles sur la circonférence, leurs multiplicateurs étant réels et plus grands que 1 en valeur algébrique pour d d'entre eux, donc réel et compris entre 0 et 1 pour le $(d+1)^{\text{ième}}$ comme il résulte de la relation

$$\frac{1}{s-1} + \sum_1^d \frac{1}{s_i - 1} + 1 = 0,$$

qu'on doit supposer vérifiée. Je dis qu'on aura une substitution du premier type et de la deuxième espèce. Cela revient à démontrer comme plus haut que $R(z) = A$ a ses racines réelles pour A réel; cette équation peut s'écrire

$$\sum_1^d \frac{1}{s_i - 1} \frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{z - A} - \frac{1}{1 - s} \frac{1}{z - \alpha} = 0.$$

On a encore $\frac{1}{s_i - 1} > 0$. Considérons les d intervalles déterminés par les $d+1$ nombres $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d, A)$ en excluant toutefois celui, s'il y en a un, qui contient α. Dans les $d - 1$ intervalles restants, le premier membre étant continu sauf aux deux extrémités s'annule une fois puisqu'il passe de $+\infty$ à $-\infty$; donc $d - 1$ racines réelles et même d. On achève le raisonnement comme plus haut en remarquant que $R(z)$, définie par

$$\frac{1}{R(z) - z} = \frac{1}{s - 1} \frac{1}{z - \alpha} + \sum_1^d \frac{1}{s_i - 1} \frac{1}{z - \alpha_i},$$

prend des valeurs de même signe que z quant à la partie imaginaire au voisinage des points doubles à cause de $s > 0$.

Considérons enfin le cas où l'on se donne sur la circonférence un point double α pour lequel

$$s = R'(\alpha) = +1, \qquad R''(\alpha) \neq 0$$

et $d - 1$ points doubles pour lesquels $s > 1$. Les choses sont un peu moins simples dans ce cas; la substitution $R(z)$, admettant les points doubles donnés avec leurs multiplicateurs et du degré d, n'est pas entièrement déterminée et dépend d'une constante arbitraire. On a en effet (§ 2)

$$\frac{1}{R(z) - z} = \frac{l}{(z-\alpha)^2} + \frac{h}{z-\alpha} + \sum_1^{d-1} \frac{1}{s_i - 1}\,\frac{1}{z - \alpha_i},$$

$$h + \sum_1^{d-1} \frac{1}{s_i - 1} + 1 = 0.$$

On voit que l reste indéterminée. Si nous supposons les α sur l'axe réel, pour que $R(z)$ laisse cette droite invariante, il faut que l soit réel. On a d'ailleurs, au voisinage de α,

$$R(z) = \alpha + (z - \alpha) + \frac{1}{l}(z-\alpha)^2 + \ldots \qquad \left(R''(\alpha) = \frac{2}{l}\right).$$

Supposer l réel revient à supposer que la tangente à Γ coïncide avec la tangente de rebroussement à la courbe qui limite le domaine de convergence élémentaire relatif à α (§ 10). Sous cette forme, la condition est invariante par rapport à toute transformation conforme ([1]). Si elle est remplie, on voit encore facilement que $R(z)$ appartient alors à la classe que nous étudions et définit une substitution singulière du premier type. Le procédé est toujours le même. On a à démontrer que

$$\frac{l}{(z-\alpha)^2} + \frac{h}{z-\alpha} + \sum_1^{d-1} \frac{1}{(s_i - 1)}\,\frac{1}{z-\alpha_i} + \frac{1}{z - A} = 0$$

admet d racines réelles pour A réel. Les $s_i - 1$ étant positifs, on consi-

([1]) Cela revient à dire que la direction déterminée par l'argument de $R''(\alpha)$ est celle de la tangente en α au cercle.

dère encore les $d - 1$ intervalles déterminés par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{d-1}, A)$. Si aucun d'eux ne contient α, on voit qu'ils contiennent tous une racine. Si l'un d'eux contient α, soit par exemple $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, dans l'un des deux intervalles (α_1, α) et (α, α_2), le premier membre passera de $+\infty$ à $-\infty$ parce qu'il devient infini sans changer de signe pour $z = \alpha$. On aura donc $d - 1$ et même d racines réelles et la conclusion s'ensuit.

Nous laisserons de côté le cas où l'on a

$$R'(\alpha) = +1, \qquad R''(\alpha) = 0,$$

qui donne lieu à une discussion analogue.

Enfin, pour les substitutions du second type, on aura des résultats semblables. Par exemple, si l'on se donne $d + 1$ points doubles sur une circonférence avec $s < -1$ en valeur algébrique, on aura par la formule de décomposition en éléments simples une expression de $R(z)$ qui donnera une substitution du second type et de la première espèce.

19. Il peut être avantageux de choisir comme cercle fondamental Γ le cercle unité $|t| \leqq 1$. On passe de ce cercle au demi-plan supérieur du plan des z par la transformation

$$t = \frac{z - \beta}{z - \bar{\beta}}, \qquad T = \frac{Z - \beta}{Z - \bar{\beta}},$$

β et $\bar{\beta}$ étant imaginaires conjuguées et β ayant sa partie imaginaire positive. La relation $Z = R(z)$ devient alors $T = \Phi(t)$. Il est clair que si $\Phi^{(1)}$ et $\Phi^{(2)}$ laissent invariant le cercle $|t| \leqq 1$, il en est de même de $\Phi = \Phi^{(1)}\Phi^{(2)}$. Aux fonctions $\Phi^{(1)}(t)$ et $\Phi^{(2)}(t)$ correspondent $R^{(1)}(z)$ et $R^{(2)}(z)$. Un calcul simple montre que $R(z)$ correspondant à $\Phi(t) = \Phi^{(1)}(t)\Phi^{(2)}(t)$ est donnée par la formule

$$R(z) = \frac{R^{(1)}(z)R^{(2)}(z) - |\beta|^2}{R^{(1)}(z) + R^{(2)}(z) - 2\mathcal{R}(\beta)}.$$

Si β est purement imaginaire et égal à bi, la formule devient

$$R(z) = \frac{R^{(1)}(z)R^{(2)}(z) - b^2}{R^{(1)}(z) + R^{(2)}(z)}.$$

Supposons en particulier que $T = \Phi(t)$ ait l'origine pour point double; $\frac{\Phi(t)}{t}$ étant holomorphe à l'origine, et égale en module à l'unité pour $|t| = 1$, sera plus petite, en module, que l'unité pour $|t| < 1$.

Donc $\Psi(t) = \frac{\Phi(t)}{t}$ laisse Γ invariant. Prenons $\Phi^{(1)}(t) = \Psi(t)$ et $\Phi^{(2)}(t) = t$; il leur correspond les fonctions $R^{(1)}(z) = \lambda(z)$ et $R^{(2)}(z) = z$. On a alors

$$R(z) = \frac{z\lambda(z) - b^2}{z + \lambda(z)}.$$

Nous allons déduire de cette formule une conséquence importante à savoir que $|\Phi'(t)|$ est supérieur à l'unité sur la circonférence Γ. On a en effet

$$\Phi'(t) = R'(z)\left[\frac{z + bi}{R(z) + bi}\right]^2.$$

On trouve pour $R'(z)$ l'expression

$$R'(z) = \frac{\lambda'(z)(z^2 + b^2) + b^2 + \lambda^2(z)}{[z + \lambda(z)]^2}.$$

En remplaçant $R(z)$ et $R'(z)$ par leurs valeurs en fonction de $\lambda(z)$ dans l'expression de $\Phi'(t)$, on trouve après réductions

$$\Phi'(t) = \frac{\lambda'(z)(z^2 + b^2) + \lambda^2(z) + b^2}{[\lambda(z) + bi]^2}.$$

Pour $|t| = 1$, z est réel et $\lambda(z)$ également; on a alors

$$|\Phi'(t)| = 1 + \lambda'(z)\frac{z^2 + b^2}{\lambda^2(z) + b^2}.$$

Nous connaissons l'expression de $\lambda(z)$:

$$\lambda(z) = kz + h - \sum \frac{A}{z - a} \qquad (K,\ A > 0);$$

donc

$$\lambda'(z) = k + \sum \frac{A}{(z - a)^2},$$

$\lambda'(z)$ est donc positive pour z réel. L'expression de $|\Phi'(t)|$ montre alors que $|\Phi'(t)| \geqq 1$. Je dis qu'on n'aura jamais $|\Phi'(t)| = 1$. Il faudrait pour cela que z ou $\lambda(z)$ deviennent infinies. Or quand z vient coïncider avec un pôle a, on trouve que la valeur limite de $\Phi'(t)$ est égale à $1 + \frac{a^2 + b^2}{A} > 1$. Pour $z = \infty$, on obtient la valeur limite $1+\frac{1}{K}>1$ si K n'est pas nul, et $1+\sum\frac{A}{b^2+h^2}$ si $K=0$.

On a donc toujours

$$|\Phi'(t)|>C>1 \qquad \text{pour} \qquad |t|=1.$$

20. Les considérations qui précèdent permettent de résoudre le problème limite de l'itération, c'est-à-dire de trouver l'ensemble dérivé des conséquents d'un point, pour les substitutions des diverses espèces que nous avons considérées.

Considérons d'abord une substitution du premier type et de première espèce. Elle admet deux points doubles attractifs que nous supposerons être, comme dans ce qui précède, l'origine et le point à l'infini, le cercle Γ étant $|t|\leqq 1$.

Soit $Z=R(z)$ cette substitution. Je dis d'abord que les conséquents de tout point situé dans un cercle γ concentrique à Γ de rayon plus petit tendent uniformément vers zéro. En effet, le module maximum pour $|z|=\rho$ de $\frac{R(z)}{z}$ étant une fonction croissante quand ρ varie de 0 à 1 et égale à 1 pour $|z|=1$, on a uniformément

$$|R(z)|<c|z| \qquad (0<|c|<1)$$

dans γ. Les conséquents d'un point de γ restent dans γ et l'on a

$$|z_n|<c^n|z|, \qquad \lim z_n=0$$

uniformément dans γ. De même, à l'extérieur de tout cercle de rayon plus grand que 1, z_n tend uniformément vers l'infini.

Inversement, étant donné un ensemble fermé quelconque E, les antécédents de tout point de E tendent uniformément vers la circonférence pourvu que E ne contienne pas les points doubles 0 et ∞. Car, s'il en était autrement, il y aurait des antécédents de divers points de E de rang indéfiniment croissant, extérieurs à la couronne $(1-a,\ 1+a)$ et intérieurs, par exemple, au cercle Γ. Soient z', z'', ... ces antécédents; on aurait

$$\begin{gathered}R_{n_1}(z')=\xi',\\ R_{n_2}(z'')=\xi'',\\ R_{n_p}[z^{(p)}]=\xi^{(p)}.\\ \dots\dots\dots\dots\end{gathered}$$

Mais les $|z^{(p)}|$ étant pour p suffisamment grand $< 1 - a$, il s'ensuit que $R_{n_p}(z) < C^{n_p}|1 - a|$, $(C < 1)$, quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n_p}$; or les ξ étant des points de E, on a par hypothèse

$$|\xi^{(p)}| > K > 0;$$

il y a contradiction.

On peut préciser davantage la manière dont les antécédents d'un point se rapprochent de la circonférence.

Considérons la circonférence γ de centre o et de rayon $\rho < 1$. Je dis que si ρ est suffisamment voisin de 1, les différentes branches de $R_{-1}(z)$ se permutent circulairement quand z décrit γ. Supposons r supérieur au module de toutes les racines de $R(z) = 0$, et soit γ_{-1} la courbe (comprise entre γ et Γ) décrite par une détermination de $R_{-1}(z)$ quand z décrit γ; γ_{-1} se ferme quand z a décrit ν fois γ; réciproquement, si z décrit γ_{-1} une seule fois, $R(z)$ décrit ν fois γ dans le sens direct, son argument augmente de $2\nu\pi$ qui doit représenter le nombre des zéros de $R(z)$ compris à l'intérieur de γ_{-1}, multiplié par 2π. Donc ce nombre est au moins 1 (puisque $\nu \geqq 1$); donc γ_{-1} entoure l'origine et, par suite, puisque extérieure à γ, tous les points racines de $R(z) = 0$. On a $\nu = d$, degré de $R(z)$, et les d branches de $R_{-1}(z)$ se permutent circulairement quand z décrit γ; ceci subsiste quand on déforme γ sans traverser les points critiques de $R_{-1}(z)$.

Considérons donc la couronne (γ, Γ) ne contenant aucun point critique de $R_{-1}(z)$, ni par conséquent de $R_{-n}(z)$, et traçons-y une coupure, par exemple, suivant un rayon; les $R_{-n}(z)$ deviennent uniformes dans le domaine ainsi obtenu δ. Les antécédents δ_{-1} du domaine δ sont des quadrilatères curvilignes juxtaposés dans la couronne comprise entre γ_{-1} et Γ; les antécédents δ_{-2} du domaine δ, c'est-à-dire les antécédents immédiats des δ_{-1}, sont des quadrilatères curvilignes juxtaposés dans la couronne comprise entre γ_{-2} et Γ et ainsi de suite, les courbes $\gamma_{-1}, \gamma_{-2}, \ldots, \gamma_{-n}, \ldots$ s'enveloppant mutuellement et tendant uniformément vers Γ. Je dis que les dimensions linéaires des δ_{-n} tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$; car la différentielle de l'arc du contour de δ_{-n} étant désignée par $d\sigma_{-n}$, on a pour un δ_{-n} et un $\delta_{-(n-1)}$ convenablement associés

$$d\sigma_{-(n-1)} = |R'(z)|\, d\sigma_{-n},$$

z étant un point de σ_{-n}. Mais nous avons démontré au paragraphe précédent que $|R'(z)| > K > 1$ sur Γ et, par suite, dans une couronne autour de Γ. Comme les courbes γ_{-n} tendent vers Γ, on aura pour $n > n'$

$$d\sigma_{-n} < \frac{1}{K}\, d\sigma_{-(n-1)},$$

la même relation s'appliquant aux longueurs finies des contours de δ_{-n} et $\delta_{-(n-1)}$; ces longueurs décroissent donc comme les termes d'une progression géométrique convergente et tendent vers zéro. En particulier, les côtés des quadrilatères δ_{-n} juxtaposés sur la circonférence tendant vers zéro quand leur nombre d^n croît indéfiniment auront pour points limites tous les points de la circonférence; il en sera de même des domaines superficiels δ_{-n}. Si nous prenons un point m sur la circonférence, dans la partie de Γ comprise dans un cercle de centre m et de rayon ε arbitrairement petit, il y aura un domaine δ_{-n} pour n suffisamment grand.

Les mêmes phénomènes se produisent pour l'extérieur du cercle en raison de la symétrie par rapport au cercle. Donc le $n^{\text{ième}}$ conséquent d'un domaine circulaire de rayon aussi petit qu'on le veut ayant son centre en un point quelconque de la circonférence Γ couvrira pour une valeur finie de n toute une couronne d'épaisseur finie entourant Γ. Mais les conséquents d'ordre p de cette couronne recouvriront tout le plan pour une valeur finie de p, sauf peut-être l'entourage des deux points doubles o et ∞, cette dernière exception ne se produisant que si ces points n'ont d'autre antécédent qu'eux-mêmes, c'est-à-dire sont des points exceptionnels dont nous avons parlé au Chapitre I; ceci n'aura lieu que pour $R(z) = Az^d$. Il suit de là que :

1° *Le conséquent d'ordre n d'un domaine arbitrairement petit entourant un point de la circonférence couvrira tout le plan pour une valeur finie de n* [sauf, dans le cas où $R(z) = Az^d$, l'intérieur d'un cercle de rayon arbitrairement petit et l'extérieur d'un cercle de rayon arbitrairement grand de centre o];

2° *Le conséquent d'ordre n d'un arc aussi petit qu'on le veut de la circonférence la recouvrira tout entière pour une valeur finie de n.*

Ainsi l'ensemble dérivé des antécédents d'un point quelconque du plan (sauf les deux points exceptionnels s'ils existent) est formé par toute la circonférence.

Nous connaissons donc l'ensemble dérivé des antécédents et des conséquents d'un point du plan d'une manière très précise, sauf en ce qui concerne les conséquents d'un point de la circonférence; la recherche de l'ensemble dérivé des conséquents d'un point de Γ est un problème de nature arithmétique qui se rapporte à l'approximation des incommensurables et que nous ne chercherons pas à approfondir ici. Nous montrerons seulement sur des exemples quelles sont les principales circonstances qui peuvent se présenter.

Considérons donc les conséquents d'un point m de Γ; ces points sont tous distincts à moins que m ne soit l'antécédent d'un point double ou périodique; de tels antécédents sont denses sur Γ et pour chacun d'eux l'ensemble E' dérivé des conséquents de m peut être regardé comme formé par les points d'un cycle, ou comme ne contenant aucun point suivant qu'on regarde comme faisant partie ou non de E' les points où sont confondus une infinité de conséquents. C'est en général le premier point de vue qu'il semble le plus naturel d'adopter.

Je vais démontrer que les points périodiques eux-mêmes sont denses sur Γ. En effet, σ étant un arc quelconque de Γ, il existe une branche de la fonction $R_{-h}(z)$, pour h suffisamment grand, qui donne comme image de σ l'arc σ_{-h} complètement intérieur à σ; quand on transforme par R_{-h} l'arc σ et l'arc σ_{-h} qui y est contenu, on obtient comme image de σ_{-h} un arc σ_{-2h} intérieur à σ_{-h}; l'arc σ_{-2h} aura à son tour un transformé σ_{-3h} et ainsi de suite; les arcs σ_{-nh} emboîtés les uns dans les autres et de longueurs tendant vers zéro comme les termes d'une progression géométrique convergente tendent vers un point ξ; comme on a toujours symboliquement

$$\sigma_{-(n-1)h} = R_h(\sigma_{-nh}),$$

on a aussi

$$\xi = R_h(\xi).$$

Le point ξ fait donc partie d'un cycle dont l'ordre est un diviseur de h; l'arc σ étant arbitraire, on voit que tout point de Γ est point périodique ou limite de points périodiques; il est même toujours limite de points périodiques et de période indéfiniment croissante puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de tels points dont la période ne dépasse pas un nombre donné.

On peut remarquer qu'il y a toujours ici des points de période n quel que soit n; en effet, comme il n'y a pas de points périodiques dont le multiplicateur soit de la forme $e^{\frac{2pi\pi}{q}}$, le cas d'exception examiné au paragraphe 3 ne se présente pas et les équations $R_n(z) = z$ n'ont que des racines simples. Le nombre $P(n)$ des points périodiques d'ordre n s'obtient alors en faisant l'inversion de la formule

$$\sum_{\delta/n} P(n) = d^n + 1,$$

où la sommation est étendue aux diviseurs δ de n; cela donne, comme on le sait,

$$P(n) = \sum_{\delta/n} \mu(\delta)\left[d^{\frac{n}{\delta}} + 1\right] = \sum_{\frac{\delta}{n}} \mu(\delta)\, d^{\frac{n}{\delta}},$$

où $\mu(\delta)$ est la fonction arithmétique bien connue égale à ± 1 ou à o, suivant que δ est un produit d'un nombre pair ou impair de facteurs premiers distincts ou divisible par un carré; on a, en outre, $\mu(1) = 1$. On obtient ainsi :

$$P(n) = \sum \mu(\delta)\, d^{\frac{n}{\delta}} \equiv 0 \qquad (\bmod n),$$

$\frac{P(n)}{n}$ étant le nombre des cycles d'ordre n. Cette propriété arithmétique se rattache aux théorèmes de Fermat et d'Euler.

Nous avons donc dans tout arc de Γ une infinité dénombrable de points périodiques pour lesquels par conséquent E' se réduit à un nombre fini de points. Nous allons montrer qu'on peut trouver également dans tout arc de Γ des points pour lesquels E' est formé par la circonférence tout entière. Considérons une infinité dénombrable d'arcs de Γ, soit $\sigma, \sigma', \sigma''$, ... que nous écrirons dans l'ordre suivant tel que chacun d'eux y figure une infinité de fois :

$$\sigma,\ \sigma',\ \sigma,\ \sigma',\ \sigma'',\ \sigma,\ \sigma',\ \sigma'',\ \sigma''',\ \sigma,\ \sigma',\ \ldots$$

Il y a un antécédent de σ contenu dans σ' : soit σ_{-a_1} le premier arc qui satisfasse à cette condition; il y a un antécédent de σ_{-a_1}

contenu dans σ, soit σ_{-a_1}; il y a de même un antécédent de σ_{-a_1} contenu dans σ', soit σ_{-a_3}; un antécédent de σ_{-a_3} dans σ'', soit σ_{-a_4}; nous choisirons ensuite un antécédent de σ_{-a_4} non seulement intérieur à σ, mais même intérieur à σ_{-a_2} qui a été déjà introduit dans σ et ainsi de suite. Nous formons donc le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\sigma & \sigma' & \sigma & \sigma' & \sigma'' & \sigma & \sigma' & \sigma'' & \sigma''' & \sigma & \dots \\
 & & \times & & & \times & & & & \times & \\
 & \sigma_{-a_1} & \sigma_{-a_2} & \sigma_{-a_3} & \sigma_{-a_4} & \sigma_{-a_5} & \sigma_{-a_6} & \sigma_{-a_7} & \sigma_{-a_8} & \sigma_{-a_9} & \dots
\end{array}$$

dans lequel les termes de la seconde ligne désignent des arcs intérieurs à ceux qui sont inscrits au-dessus; de plus, ceux des σ_{-a_n} qui sont inscrits au-dessous de σ s'emboîtent les uns dans les autres; enfin, chacun des σ_{-a_n} est un conséquent de tous ceux qui sont inscrits à sa droite.

Les arcs

$$\sigma, \quad \sigma_{-a_2}, \quad \sigma_{-a_5}, \quad \sigma_{-a_9}, \quad \dots, \quad \sigma_{-a_{\frac{n(n+1)}{2}-1}}, \quad \dots,$$

emboîtés les uns dans les autres et tendant vers zéro, ont un point limite ξ, intérieur à chacun d'eux. ξ a donc des conséquents de rang aussi élevé qu'on le veut contenu dans $\sigma^{(K)}$ et cela quel que soit K.

Il y a ainsi des points de E′ dans σ, σ', σ'', ...; si ces arcs ont été choisis de manière qu'il y en ait une infinité qui soient complètement extérieurs les uns aux autres, E′ contiendra une infinité de points.

Pour fixer les idées, considérons l'infinité dénombrable des arcs qui ont pour milieux les points d'argument $2\pi\frac{p}{q}$ et de longueur $\frac{1}{q}$, en prenant tous les couples d'entiers p et q tels que $p < q$, mais non premiers entre eux; il y aura des points de E′ dans tous les arcs qui ont pour milieu un point donné $2\pi\frac{p}{q}$ et une longueur $\frac{1}{Nq}$ ($N = 1, 2, 3, \dots$); ce point est donc de E′ ou limite de points de E′; il est donc de E′ qui est fermé et qui comprend ainsi toute la circonférence puisqu'il renferme tous les points d'argument commensurable à 2π.

Ainsi E′ peut comprendre toute la circonférence ou être formé d'un nombre fini de points. Des cas intermédiaires peuvent se produire; mais il y a lieu de remarquer que E′ étant un ensemble invariant qui comprend les conséquents de tous ses points comprendra toute la circonférence s'il comprend un arc aussi petit qu'on le veut. Si cela n'a pas lieu, E' est partout disoontinu. Nous allons montrer sur un exemple que E' peut être un ensemble parfait discontinu. Considérons la substitution $Z = z^3$, et un point z_0 d'argument θ_0 sur la circonférence Γ tel que $\frac{\theta_0}{2\pi}$ s'écrit dans le système de numération à base 3 en n'employant que les chiffres 0 et 2 ; $\frac{\theta_0}{2\pi}$ appartient donc à l'ensemble parfait P, exemple classique dû à Cantor d'un ensemble parfait qui n'est dense dans aucun intervalle. Les valeurs de $\frac{\theta}{2\pi}$ correspondant aux conséquents du point z_0 s'obtiennent en déplaçant la virgule vers la droite et annulant la partie entière dans le développement qui correspond au point initial; les nombres obtenus appartiennent toujours à P. Appelons Π l'ensemble parfait de points de la circonférence qui correspond à P; les points de E étant de Π, il en est de même des points de E' puisque Π est parfait. On peut choisir θ de manière que E' soit identique à Π. Considérons les nombres qui s'écrivent en n'employant que les chiffres 0 et 2 un nombre fini de fois et rangeons les en une suite linéaire telle que chacun d'eux y figure une infinité de fois : α, β, γ, δ, ... Il suffit de poser

$$\frac{\theta_0}{2\pi} = 0,\quad (\alpha)0(\beta)00(\gamma)000(\delta)0000(\varepsilon),\quad \ldots,$$

en appelant (α), (β), (γ), ... les suites de chiffres en nombre limité qui appartiennent respectivement aux expressions de α, β, γ, ... dans le système de base 3; on intercale un nombre croissant de zéros entre ces groupes de chiffres. On voit facilement que par ce choix les conséquents de z_0 auront pour limites toutes les extrémités d'arcs contigus à Π correspondant aux nombres α, β, γ, ...; comme tout point de Π est limite de ces derniers points, on aura $E' = \Pi$.

On peut former d'une manière analogue des exemples où E' est un ensemble réductible. Mais il résulte de ce que nous avons vu au paragraphe 15 qu'un ensemble fermé et de plus invariant par la substitution étant donné sur la circonférence, cet ensemble ne sera pas en général le dérivé des conséquents d'un point; car l'ensemble formé par deux points doubles distincts est bien un ensemble fermé et invariant et nous savons que si un ensemble E′ renferme ces deux points il en renferme une infinité d'autres.

Ces exemples suffisent à montrer que l'étude de l'ensemble E′ est un problème de nature arithmétique auquel on pourrait appliquer les méthodes de Borel-Lebesgue pour la mesure des ensembles, et qui appelle de nouvelles recherches; mais dans tous les cas nous avons prouvé surabondamment que les points limites des conséquents d'un point z de la circonférence sont des fonctions discontinues de z en chaque point de celle-ci.

21. Nous passons maintenant à l'étude des substitutions du premier type et de la deuxième espèce. Le point double attractif étant rejeté à l'infini, nous pouvons poser

$$R(z) = kz + h - \sum \frac{A}{z-a} \qquad (A > 0,\ k > 1),$$

d'où

$$R'(z) = k + \sum \frac{A}{(z-a)^2}.$$

On a donc sur l'axe réel

$$R'(z) > k > 1.$$

En posant

$$Z = R(z) = X + iY,$$

on a

$$\left\{ \begin{aligned} X &= kx + h - \sum \frac{A(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} \\ Y &= ky + \sum \frac{Ay}{(x-a)^2 + y^2}. \end{aligned} \right.$$

On a constamment

$$|Y| > k|y|, \quad |y_n| > k^n |y|,$$

d'où il résulte déjà que $\lim y_n = \infty$ uniformément pour $y > y_0 > 0$. On a, en outre,

$$|X| > k'|x| \qquad (k' > 1)$$

quand $|x|$ surpasse P. Considérons, par exemple, un rectangle ayant pour centre l'origine avec des côtés parallèles aux axes et de longueurs $2P$ et 2η, η étant choisi de manière qu'on ait dans ce rectangle

$$|R'(z)| > k' > 1,$$

ce qui est possible pour η assez petit puisque $R'(z) > k$ sur l'axe réel.

Dans toute la région $\mathcal{D}$ du plan extérieure au rectangle et sur le contour, on a

$$\begin{cases} |X| > k'|x| \\ |Y| > k|y| \end{cases} \qquad (k > 1,\ k' > 1),$$

d'où l'on conclut que le domaine $\mathcal{D}_1 = R(\mathcal{D})$ est intérieur à $\mathcal{D}$ et que les conséquents z_n d'un point z de $\mathcal{D}$ tendent uniformément vers l'infini. On peut si l'on veut déformer le contour du rectangle de manière à obtenir un contour analytique C à tangente continue sans que les deux propriétés précédentes cessent d'être exactes. On voit de plus que les points critiques de $R_{-1}(z)$ qui sont les conséquents immédiats des zéros de $R'(z)$ seront extérieurs à C. Quand z décrit C, les d branches de la fonction $R_{-1}(z)$ reviennent chacune à sa valeur initiale après que z a fait un tour complet sur C; les d courbes ainsi décrites sont intérieures à C puisque les conséquents d'un point de C ou extérieur à C sont extérieurs à C. Elles ne se coupent pas elles-mêmes ni entre elles puisque les $R_{-1}(z)$ sont les inverses d'une même fonction uniforme et que C est lui-même un contour simple. Je dis qu'elles sont extérieures les unes aux autres. Soit C_{-1} l'une d'elles correspondant à une branche de $R_{-1}(z)$ que nous appelons $f(z)$ et qui est holomorphe à l'intérieur et sur le contour de C; soient, de plus, z' un point intérieur à C et $z'_{-1} = f(z')$. La variation de l'argument de $f(z) - f(z')$ sera zéro ou 2π suivant que z'_{-1} est extérieur ou intérieur à C_{-1}; or elle est différente de zéro puisque z' est un point racine de

$$f(z) - f(z') = 0.$$

Elle est donc égale à 2π. Donc à un point z' intérieur à C correspond un point z'_{-1} intérieur à C_{-1} et un seul, et réciproquement. Il y a application conforme et biunivoque de l'intérieur de C_{-1} sur l'intérieur de C.

La même chose a lieu pour les d courbes distinctes $C_{-1}^{(1)}, C_{-1}^{(2)} \ldots C_{-1}^{(d)}$. Ces courbes sont donc extérieures les unes aux autres, car si un point ξ était par exemple à la fois à l'intérieur de $C_{-1}^{(1)}$ et sur le contour $C_{-1}^{(2)}$, on aurait à la fois $R(\xi)$ intérieur à C et $R(\xi)$ sur C.

Considérons l'intérieur de C avec les courbes $C_{-1}^{(1)}, C_{-1}^{(2)}, C_{-1}^{(3)}$ (en prenant par exemple $d = 3$) et faisons de nouveau l'application de cette figure sur $C_{-1}^{(1)}$, puis sur $C_{-1}^{(2)}$, puis sur $C_{-1}^{(3)}$. L'intérieur de C étant applicable d'une manière biunivoque sur l'intérieur de $C_{-1}^{(1)}$, aux trois courbes $C_{-1}^{(1)}, C_{-1}^{(2)}, C_{-1}^{(3)}$ correspondront trois nouvelles courbes intérieures à $C_{-1}^{(1)}$ et à l'intérieur des premières courbes l'intérieur des secondes. Soient $C_{-2}^{(1)}, C_{-2}^{(2)}, C_{-2}^{(3)}$ ces trois nouvelles courbes. Nous obtiendrons de même, en faisant l'application de C sur $C_{-1}^{(2)}$, les trois courbes $C_{-2}^{(4)}, C_{-2}^{(5)}, C_{-2}^{(6)}$ intérieures à $C_{-1}^{(2)}$. Enfin en appliquant C sur $C_{-1}^{(2)}$, nous obtenons $C_{-2}^{(7)}, C_{-2}^{(8)}, C_{-2}^{(9)}$ intérieures à $C_{-1}^{(3)}$. Les courbes C_{-2} limitent ainsi neuf domaines bornés sans point commun dont l'ensemble constitue la région antécédente d'ordre 2 de l'intérieur de C. D'une manière générale, l'antécédent d'ordre k de l'intérieur de C sera formé par l'intérieur de 3^k courbes :

$$C_{-k}^{(1)}, C_{-k}^{(2)} \dots C_{-k}^{(3^k)}$$

pouvant se répartir en 3^{k-1} groupes de trois courbes respectivement intérieures aux courbes de rang précédent et extérieures les unes aux autres. Le domaine antécédent de $\mathfrak{D}$ sera le domaine complémentaire s'étendant à l'infini d'un seul tenant et d'ordre de connexion 3^k.

Dans le cas qui nous occupe, toutes ces courbes coupent l'axe réel en deux points puisque tous les antécédents d'un point réel sont réels.

Le domaine ouvert de convergence des $R_n(z)$ vers l'infini est l'ensemble des points appartenant à tous les domaines

$$\mathfrak{D}_{-n} (\mathfrak{D}_{-1} < \mathfrak{D}_{-2} < \dots < \mathfrak{D}_{-n})$$

que nous venons de définir. Il comprend tout le plan sauf les points intérieurs à une infinité de courbes C_{-n} ; soit P ce dernier ensemble. Je dis qu'il est parfait et partout discontinu. On a, en effet, les courbes C_{-n} qui sont intérieures à C :

$$| R'(z) | < k' < 1.$$

Entre les différentielles des arcs d'une courbe C_{-n} et de sa conséquente immédiate qui est une courbe $C_{-(n-1)}$, on a la relation

$$d\sigma_{-(n-1)} = d\sigma_{-n} |R'(z)| \qquad (z \text{ sur } C_{-n}),$$

d'où

$$d_{-n}\sigma < \frac{1}{k'} d_{-(n-1)}.$$

Entre les longueurs finies des courbes C_{-n} et $C_{-(n-1)}$, on a la même relation :

$$l_{-n} < \frac{1}{k'} l_{-(n-1)},$$

d'où

$$l_{-n} < \frac{l_0}{k'^n}, \qquad \lim_{n=\infty} l_{-n} = 0.$$

Les longueurs des courbes C_{-n} tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. D'autre part, toute courbe C_{-n} renferme des courbes de rangs $n+1$, $n+2$, $n+3$, ... respectivement, dont chacune est intérieure à la précédente; il y a donc un point intérieur commun qui appartient à P.

Ainsi les points de P peuvent être enfermés à l'intérieur d'un nombre fini de courbes, à savoir les d^n courbes C_{-n} dont chacune a une longueur aussi petite qu'on le veut pour n suffisamment grand et qui en contiennent toutes au moins un. Il s'ensuit que P est parfait et discontinu en chaque point. D'abord P est fermé, car si ξ point limite de points α, β, γ,... de P n'appartenait pas à P, ξ serait pour une certaine valeur de n extérieur à toutes les courbes C_{-n}; h étant alors la plus courte distance de ξ aux courbes C_{-n} et les points α, β, γ, ... étant intérieurs aux C_{-n}, la distance de ξ à α, β, γ, ... serait supérieure ou égale à h; ξ ne serait donc pas point limite de P. P est parfait, car α étant enfermé dans une courbe $C_{-n}^{(i)}$ et celle-ci renfermant à son intérieur au moins deux courbes distinctes et extérieures l'une à l'autre $C_{-(n+1)}$, α sera contenu également dans l'une de ces dernières, soit $C'_{-(n+1)}$. Mais une autre courbe $C''_{-(n+1)}$ également intérieure à $C_{-n}^{(i)}$ contient au moins un point β de P nécessairement distinct de α et la distance $\alpha\beta$ est inférieure au diamètre l de la courbe $C_{-n}^{(i)}$ qui est aussi petit qu'on le veut pour n suffisamment grand. P est discontinu en chaque point, car si α et β sont deux points de P, on peut les enfermer dans des courbes C_{-n} dont le diamètre soit inférieur à la demi-distance de $\alpha\beta$; α et β sont alors enfermés dans deux courbes C_{-n} et C''_{-n} distinctes et extérieures l'une à l'autre et toute ligne polygonale joignant $\alpha\beta$ et ayant pour sommets des points de P aura un côté au moins égal à la plus courte distance de l'une des courbes C_{-n} à l'ensemble P, ou à la plus courte distance de deux courbes C_{-n}.

Dans le cas actuel, l'ensemble P appartient tout entier à l'axe réel puisque toutes les courbes C_{-n} coupent l'axe réel en deux points.

La chose est évidente *a priori* puisque nous avons vu au début de cette analyse que z_n tend vers l'infini quand z est imaginaire et que l'ensemble P est l'ensemble des points pour lesquels cette convergence n'a pas lieu. On aurait pu se servir de cette remarque pour construire l'ensemble P. En effet, considérons la plus grande racine (réelle) λ de l'équation $R(z) = z$, comprise entre le dernier pôle a vers la droite et $+\infty$, et de même la plus petite racine μ, comprise entre le dernier pôle a vers la gauche et $-\infty$, et regardons l'ensemble des deux demi-droites $(\lambda, +\infty)$ et $(\mu, -\infty)$ comme constituant un segment unique contenant le point à l'infini. Dans ce segment, z_n converge vers l'infini (sauf aux extrémités). Car, pour $z = \lambda$, on a $z < z_1 < \ldots < z_n < \ldots$, $\lim_{n=\infty} z_n = +\infty$, et pour $z < \mu$, $z > z_1 > z_2 \ldots > z_n \ldots$ (en valeur algébrique) et

$$\lim_{n=\infty} z_n = +\infty.$$

Les points de l'axe réel qui appartiennent au domaine D_∞ de convergence vers l'infini sont le segment $\lambda\mu$ et ses antécédents, extrémités non comprises; on a ainsi une infinité dénombrable d'intervalles sans points communs deux à deux et sans extrémités communes, contiguës à un ensemble parfait qui est l'ensemble P dont on prouvera facilement la discontinuité. Mais l'analyse précédente est préférable parce qu'elle s'applique à des cas où P n'est pas linéaire.

Considérons un point m de P et un cercle c de rayon ε ayant pour centre m. Pour une valeur convenable de l'entier n, le diamètre des courbes C_{-n} sera inférieur à ε; le cercle c contenant m contiendra alors un domaine $\mathcal{A}_{-n}$ limité par une courbe $C^{(i)}_{-n}$ et qui est un antécédent de rang n de l'intérieur $\mathcal{A}$ de la courbe C. Le $n^{\text{ième}}$ conséquent du cercle c couvrira donc $\mathcal{A}$. D'autre part, $\mathcal{A}$ étant le complémentaire du domaine (ouvert) $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}_p + \mathcal{D}_p$ recouvre tout le plan; comme $\mathcal{D}_p$ pour p suffisamment grand est extérieur à un cercle de rayon aussi grand qu'on le veut, $\mathcal{A}_p$ couvrira tout le plan sauf peut-être l'extérieur de ce cercle; mais $\mathcal{A}_p$ $\mathcal{A}_1$ contient $\mathcal{A}_{p'}$, si $p' < p$, et comme $\mathcal{A}$ renferme un pôle de $R(z)$, contient l'extérieur d'un certain cercle de centre O. Donc $\mathcal{A}_p$ pour p est assez grand couvre tout le plan. Comme c_n couvre $\mathcal{A}$, c_{n+p} couvre tout le plan. Ainsi :

Le $n^{ième}$ conséquent d'un domaine aussi petit qu'on le veut entourant un point de P *couvre tout le plan pour une valeur finie de n.*

Tout point de P est ainsi limite d'antécédents d'un point quelconque du plan. On voit d'ailleurs immédiatement que P renferme les conséquents et antécédents de tous ses points. Il contient aussi les points doubles et périodiques autres que $z = \infty$. On pourra encore démontrer que P est limite de points périodiques; qu'il contient des points tels que l'ensemble dérivé de leurs conséquents soit identique à P, etc. Il n'y a pas lieu d'y insister, car nous trouverons au Chapitre suivant (qui sera publié ultérieurement) des théorèmes plus généraux.

Il est intéressant de savoir si P est de mesure linéaire nulle, cette propriété intervenant dans l'étude des fonctions uniformes qui admettent P comme ensemble de leurs singularités essentielles. Il suffit pour que cela ait lieu que la somme des longueurs des courbes C_{-n} tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Cela arrivera toutes les fois qu'on aura $k > d$ [degré de $R(z)$], condition nullement nécessaire. Je ne suis d'ailleurs pas arrivé à reconnaître si P peut être de mesure non nulle.

En résumé, étant donnée une substitution à cercle fondamental de seconde espèce, les conséquents d'un point quelconque du plan convergent vers le point double attractif situé sur la circonférence, en exceptant les points d'un ensemble parfait P partout discontinu situé également sur la circonférence; cet ensemble, qui est invariant, jouit de la propriété que chacun de ses points est limite d'antécédents d'un point quelconque du plan. Dans tout domaine fermé n'ayant aucun point commun avec P, la convergence est naturellement uniforme.

22. Considérons maintenant le cas singulier où il y a sur la circonférence un point double de multiplicateur égal à $+1$, comptant pour deux points doubles confondus. La substitution peut alors se ramener à la forme

$$Z = R(z) = z + h - \sum \frac{A}{z-a},$$

où les a sont réels, les A positifs et h également si les axes sont convenablement orientés. On a alors

$$X = x + h - \sum \frac{A}{(x-a)^2 + y^2},$$
$$Y = y + \sum \frac{Ay}{(x-a)^2 + y^2}.$$

Dans tout domaine borné n'ayant aucun point commun avec l'axe réel, z_n tend uniformément vers l'infini. En effet, on a pour un point en dehors de cet axe, par exemple au-dessus :

$$y_{n+1} > y_n > \ldots > y > 0,$$

y_n tend vers une limite finie ou infinie. Si elle est finie, on a, en vertu de l'égalité

$$y_{n+1} - y_n = y_n \sum \frac{A}{(x_n - a)^2 + {}_n^2},$$

une limite infinie pour x_n. Donc, dans tous les cas, z_n tend vers l'infini; z_n se trouve donc, à partir d'un certain rang, dans un domaine limité par une parallèle à l'axe imaginaire et où il y a convergence uniforme vers l'infini (§ 8); z_p étant à l'intérieur d'un domaine de convergence uniforme, il en est de même de z; et l'on sait qu'une suite de fonctions qui converge uniformément en tous les points d'un domaine, c'est-à-dire dans des domaines partiels entourant chaque point, converge uniformément dans le domaine tout entier.

Il y a donc convergence uniforme dans toute partie bornée d'un domaine défini par $y > y_0 > 0$ ou $y < -y_0 < 0$. Nous savons qu'il y a aussi convergence uniforme dans tout domaine fermé défini par $x \geqq x_0$ pour x_0 suffisamment grand. On pourrait considérer le domaine lieu des points par lesquels on a l'une de ces trois inégalités et chercher ses antécédents successifs comme au paragraphe précédent. Nous nous contenterons d'examiner ce qui se passe sur l'axe réel. Soit λ le dernier point double à distance finie à droite des pôles a; les z_n convergent vers l'infini quand z est intérieur au segment $(\lambda, +\infty)$, et réciproquement les conséquents de tout point z tel que z_n tende vers l'infini se trouvent à partir d'un certain rang à l'intérieur de ce segment, exception faite des antécédents du point à l'infini. L'ensemble des points z de l'axe réel pour lesquels il y a convergence uniforme des $R_n(z)$ vers l'infini est l'ensemble des points intérieurs au segment $(\lambda, +\infty)$ et à tous ses antécédents. Ces segments qui sont tous décrits dans le même sens [puisque $R'(z)$ est positif pour z réel] sont alors sans points communs deux à deux et sans extrémités communes; ils sont contigus à un ensemble parfait P. Je dis que P est non dense, c'est-à-dire que tout segment contenant à son intérieur un point de P renferme des antécédents de points de σ. En effet, si z est un point de P qui ne soit pas un antécédent du point à l'infini, ses conséquents seront intérieurs une infinité de fois à un segment borné, par exemple celui qui a pour extrémités le pôle a le plus à gauche et le point double λ. Car si z est a gauche des a, on a

$$z_1 - z = R(z) - z = h - \sum \frac{A}{z - a} > 0 \qquad (z < z_1),$$

et si tous les z_n restaient à gauche des a, ils tendraient vers un point limite unique b tel que $b = R(b)$, c'est-à-dire vers un point double et il n'y en a pas à gauche des a. Donc le dernier pôle vers la gauche a' sera dépassé et l'on aura un z_p intérieur au segment précité, puisque z_p ne peut dépasser λ, extrémité du segment de convergence σ.

Ceci posé, on a

$$R'(z) = 1 + \sum \frac{A}{(z-a)^2}.$$

Donc $R'(z) > 1$ pour z réel et $R'(z) > k > 1$ dans tout segment borné.

Soit alors s un segment contenant le point z. Si les segments conséquents $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ étaient constamment extérieurs à σ, ils ne renfermeraient jamais de pôles a et seraient tous décrits dans le même sens, α_n et β_n extrémités de gauche et de droite de s_n étant les conséquents respectifs de α et β, extrémités de gauche et de droite de s; les longueurs des segments s_n croissent constamment à cause de $R'(z) > 1$; de plus, α_n, étant une infinité de fois intérieur au segment borné (a', λ) et β_n ne dépassant pas λ, on aura une infinité de fois

$$\text{longueur } s_{n+1} > k \text{ longueur } s_n \qquad (k > 1),$$

puisque s_n est tout entier dans le segment (a', λ) pour ces valeurs de n. Il s'ensuit que la longueur du segment s_n croîtrait indéfiniment et dépasserait par conséquent celle du segment (a', λ). Il y a contradiction. On doit donc supposer que les s_n empiètent à partir d'un certain rang sur le segment σ. P est non dense et chacun de ses points est limite de segments contigus, antécédents de σ. On démontrera même sans difficulté que les conséquents d'un segment contenant un point de P recouvrent chacun tout l'axe réel à partir d'un rang fini ; il s'ensuit que chaque point de P est limite d'antécédents d'un point quelconque de l'axe réel. Il est encore vrai que chaque point de P est limite d'antécédents d'un point quelconque du plan, mais nous laisserons cette démonstration de côté pour l'instant.

Nous pouvons dire en résumé qu'étant donnée une substitution de cercle fondamental Γ ayant sur la circonférence un point double α pour lequel $R'(\alpha) = +1$, $R''(\alpha) \neq 0$, le domaine de convergence uniforme des substitutions itérées vers α comprend tout le plan sauf les points d'un ensemble parfait non dense de points de la circonférence qui forme la frontière de ce domaine et contient le point α lui-même.

Considérons maintenant le cas où l'on a un point double α avec

$$R'(\alpha) = +1, \qquad R''(\alpha) = 0.$$

La substitution se ramène alors à la forme

$$R(z) = z - \sum \frac{A}{z-a} \qquad (A > 0),$$

la constante h de tout à l'heure étant nulle. Les formules

$$X = x - \sum \frac{A(x-a)}{(x-a)^2 + y^2},$$
$$Y = y\left[1 + \sum \frac{A}{(x-a)^2 + y^2}\right]$$

permettent d'établir comme précédemment que $\lim z_n = \infty$ quand z est extérieur à l'axe réel et même uniformément dant toute partie bornée du demi-plan supérieur ou du demi-plan inférieur; mais ces deux domaines de convergence sont distincts et les z_n ne peuvent converger uniformément dans aucun domaine renfermant à son intérieur un point de l'axe réel. Cela résulte déjà de ce qui a été dit au Chapitre II (§ 11). On le vérifie ici en remarquant que si z est réel on a $z_1 < z$ si z est à droite des a et $z_1 > z$ (en valeur algébrique) si z est à gauche des a, par conséquent $|z_{n+1}| < |z_n|$, quand $|z_n|$ est suffisamment grand; z_n ne peut donc tendre vers l'infini que si z est l'un des antécédents (en infinité dénombrable) du point à l'infini. Je laisserai de côté ici la démonstration du fait que les conséquents d'un segment de l'axe réel finissent par le recouvrir tout entier, démonstration qui est analogue à celle du paragraphe précédent.

Nous voyons que les substitutions de ce genre sont un cas limite de celles de seconde espèce, les deux points doubles attractifs étant confondus en un seul situé sur la circonférence; nous les appellerons donc substitutions singulières de première espèce. Au contraire, celles examinées précédemment $[R'(\alpha) = +1, R''(\alpha) = 0]$ doivent être regardées comme des substitutions singulières de seconde espèce.

Enfin, l'extension des résultats obtenus aux substitutions du second type, celles qui permutent entre eux l'intérieur et l'extérieur d'un cercle, est trop simple pour qu'il y ait lieu d'y insister.

Nous remarquerons que ce qui a été dit au Chapitre I (§ 6) au sujet des domaines invariants trouve ici son application, que notamment l'intérieur et l'extérieur du cercle fondamental qui constituent deux domaines complètement invariants renferment chacun la moitié des points critiques de la fonction inverse.

23. Nous allons montrer maintenant que les méthodes utilisées pour étudier les substitutions ayant un cercle fondamental s'appliquent à un grand nombre de cas. Considérons par exemple la substitution (§ 15) :

$$Z = z^2 + 5.$$

Nous avons remarqué qu'elle admet le seul point double attractif $z = \infty$, tous les autres points doubles ou périodiques étant répulsifs. D'autre part, les z_n convergent uniformément vers l'infini dans le domaine défini par $|z| \geqq 4$; ce domaine renferme son conséquent et contient d'autre part les deux points critiques de la fonction inverse

$$R_{-1}(z) = \sqrt{z-5}$$

qui sont le point à l'infini et le point $z = 5$. Il en résulte que l'analyse du paragraphe **21** est ici applicable. Le domaine de convergence vers l'infini, qui est le domaine limite des antécédents du domaine initial comprend tout le plan sauf les points intérieurs à une infinité de courbes C_{-n}, identiques du point de vue de l'*Analysis situs* à celle examinées dans ce paragraphe. Les dimensions de ces courbes tendent encore vers zéro, car on aura sur chacune d'elles à partir d'un certain rang

$$|R'(z)| > k > 1.$$

On peut prendre ici $k = 2$. En effet, $R'(z) = 2z$ et, pour $|z| \leqq 1$, $R(z) \geqq 4$. Le domaine antécédent de rang 1 du domaine initial ω comprend donc le domaine $|R'(z)| \geqq 2$; sur les courbes C_n on aura donc à partir de $n = 2$

$$|R'(z)| > k > 2.$$

Il en résulte que non seulement les longueurs des courbes l_{-n} tendent vers zéro, mais que la somme de leurs longueurs peut être rendue aussi petite que l'on veut pour une valeur convenable de n. L'ensemble parfait P des points qui sont intérieurs à une infinité de courbes C_{-n} est donc ici non seulement discontinu, mais de longueur nulle. On voit ici que P n'est pas sur une courbe simple, car il contient les deux points doubles $\alpha = -\frac{1 \pm i\sqrt{19}}{2}$, dont les multiplicateurs sont imaginaires : $s = 2\alpha = -1 \pm i\sqrt{19}$; P étant parfait renferme des points β voisins de α; si l'on calcule les antécédents de β au moyen de la branche de la fonction inverse $\sqrt{z-5}$ égale à α pour $z = \alpha$, ces antécédents tendent vers α en se groupant sur une courbe en spirale ayant α pour point asymptote, de manière que l'argument de $\beta_{-n} - \alpha$ ait plus de deux valeurs limites distinctes. Aucune courbe passant en α et contenant les points de P ne peut donc y avoir une tangente unique. En transformant la configuration obtenue autour de α, par les substitutions $Z = R_{-n}(z)$, on obtient des configurations analogues autour des antécédents de α qui sont denses sur P.

On obtient des résultats semblables sur de nombreux exemples de polynomes, par exemple de la forme $z^m + a$, si $|a|$ est suffisamment grand.

Voici maintenant des exemples dans lesquels $R(z)$ n'est pas un polynome. Il suffit de prendre $R(z) = \frac{z}{z^m + 2}$ $(m \geq 2)$. Pour $m = 2$, on a une substitution à cercle fondamental déjà étudiée. Je dis qu'il n'en est pas ainsi pour $m > 2$. En effet, nous avons le point double attractif $z = 0$, et les points doubles définis par $z^m = -1$, situés sur la circonférence $|z| = 1$, et qui sont répulsifs, car

$$R'(z) = \frac{2 - (m-1)z^m}{(z^m + 2)^2},$$

et prend la valeur $m + 1$ pour $z = (-1)^{\frac{1}{m}}$. S'il y avait un cercle fondamental, ce serait le cercle $|z| \leq 1$ et l'on devrait avoir un point double à l'infini conjugué de $z = 0$, ce qui n'est pas.

Les conséquents d'un point z convergent vers zéro pour $|z| < 1$ et uniformément dans tout cercle de rayon < 1. Car, pour que $|R(z)|$ soit inférieur à $|z|$, il suffit que $|z^m + 2|$ soit > 1, donc que $|z| < 1$. Pour $|z| < r < 1$, on aura $|R(z)| < k|z|$ $(k < 1)$. Les points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$ sont d'une part le point à l'infini, car, pour $Z = 0$, l'équation $\frac{z}{z^m + 2} = Z$ admet une racine nulle et $m - 1$ racines infinies; d'autre part, les points qui s'obtiennent en faisant $R'(\zeta) = 0$, $c = R(\zeta)$. On a ainsi

$$\zeta^m = \frac{2}{m-1}, \qquad |c| = \frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{2}\right)^{1-\frac{1}{m}} \qquad (|c| < 1).$$

Considérons un cercle de rayon très peu inférieur à 1, contenant à son intérieur les points c. Soit Γ ce cercle; cherchons quel sera le domaine antécédent immédiat ou tout au moins la partie de ce domaine qui est d'un seul tenant avec l'origine et qui comprend par conséquent Γ à son intérieur; elle comprendra la partie positive de l'axe réel, car quand z varie de 0 à $+\infty$, $R(z)$ varie de 0 à 0 en passant par un maximum égal à $|c|$ pour $z = \left(\frac{2}{m-1}\right)^{\frac{1}{m}}$, donc intérieur à Γ. Ceci étant, considérons le domaine limité par la circonférence Γ dont on a enlevé un arc au voisinage de $z=1$; deux parallèles à l'axe réel de part et d'autre de cet axe qu'on tracera jusqu'à la circonférence $|z|=2$, et qu'on suppose assez rapprochées pour que la bande ainsi obtenue à la droite de Γ ait sa conséquente intérieure à Γ; enfin, la circonférence $|z|=2$, en supprimant l'arc compris entre les deux parallèles. On a ainsi un contour simple C divisant le plan en deux régions simplement connexes : une région non bornée (qui est une partie de l'antécédent immédiat de l'intérieur de Γ) comprenant les points critiques de $R_{-1}(z)$, et ayant comme conséquente immédiate une région qui lui est complètement intérieure; d'autre part, la région intérieure à C où toutes les fonctions $R_{-n}(z)$ sont holomorphes. L'extérieur de C est un domaine de convergence uniforme vers le point attractif $z=0$. On se trouve ainsi dans les conditions d'application du paragraphe **21**. Je dis qu'on aura sur les courbes C_{-n} à partir d'un certain rang

$$|R'(z)|>K>1.$$

En effet, on peut écrire

$$R'(z)=-\left[(m-1)-\frac{2}{z^m}\right]R^2(z)z^{m-2}.$$

Supposons qu'on ait pris le rayon du cercle Γ rigoureusement égal à 1. Si z est sur la courbe $C_{-n}(n\geqq 1)$, on doit supposer l'argument de z^m compris entre $+\frac{\pi}{2}$ et $+3\frac{\pi}{2}$ (limites exclues), sinon on aurait

$$|2+z^m|\geqq\sqrt{5},\qquad R(z)\leqq\frac{z}{\sqrt{5}}\leqq\frac{2}{\sqrt{5}}<1,$$

et z_1 serait intérieur à C.

L'argument de $-\frac{2}{z^m}$ est alors compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et l'on a

$$\left|(m-1)-\frac{2}{z^m}\right|>\sqrt{(m-1)^2+\frac{1}{2^{2m-2}}}.$$

De plus,

$$|R^2(z)z^{m-2}|\geqq 1.$$

On a donc

$$R'(z)>K>m-1,$$

et comme on peut prendre le rayon de Γ aussi voisin de 1 qu'on le veut, l'inégalité précédente a bien lieu quand ce rayon est convenablement choisi.

Ainsi donc, les z_n convergent vers zéro dans un domaine qui a pour frontière un ensemble parfait partout discontinu. Je ne sais pas si, dans le cas actuel, la longueur de cet ensemble est nulle, mais dans tous les cas son aire est nulle, car le rapport des éléments d'aire d'un domaine limité par une courbe C_{-n} et du domaine conséquent sera inférieur à $\frac{1}{(m-1)^2}$, et comme chaque $C_{-(n-1)}$ engendre $m\, C_{-n}$, on a

$$\sum \text{aires}\, C_{-n} < \frac{m}{(m-1)^2} \sum \text{aires}\, C_{-(n-1)},$$

et comme $\frac{m}{(m-1)^2}$ $(m \geqq 3)$ est < 1, ces sommes d'aires décroissent en progression géométrique ; la conclusion s'ensuit.

Indiquons encore rapidement l'exemple qui suit :

$$R(z) = \frac{z^2}{z^3+2}.$$

Ici, tous les points critiques de la fonction inverse sont intérieurs au cercle de convergence $(|z| < 1)$. Ce sont les points $z = 0$ et $z^3 = \frac{2}{3^3}$. Une circonférence de rayon un peu inférieur à 1 jouera ici le rôle de la courbe C. Pour démontrer que $|R'(z)|$ est $> K > 1$ sur les C_{-n}, on opère comme précédemment, en remarquant encore que l'argument de z^3 est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ quand z est sur C_1. On aura ensuite

$$R'(z) = \left(\frac{4}{z^3} - 1\right) R^2(z), \qquad |z| < \sqrt{3}, \qquad |R(z)| > 1 - \varepsilon.$$

Donc :

$$|R'(z)| > K > 1.$$

L'ensemble frontière du domaine de convergence est partout discontinu. On a ici trois points doubles répulsifs, dont deux sont à multiplicateur imaginaire.

En résumé, on peut dire qu'étant donnée une substitution rationnelle $[z|R(z)]$ possédant un point double attractif, si l'on peut trouver une courbe qui partage le plan en deux régions, dont l'une contient le point double attractif et les points critiques de la substitution inverse, et telle que la substitution donnée la transforme en une autre qui lui soit complètement intérieure, de manière qu'elle fasse partie du domaine d'attraction du point double, si en outre, sur les courbes antécédentes de C, on a à partir d'un certain rang

$$|R'(z)| > k > 1,$$

le domaine total du point double a pour frontière un ensemble parfait partout discontinu; cet ensemble est de mesure linéaire nulle si k est supérieur au degré d de $R(z)$, de mesure superficielle nulle si $k > \sqrt{d}$.

Nous verrons au Chapitre suivant que certaines des conditions énoncées ici sont inutiles ou surabondantes.

Il n'est pas inutile de faire au sujet de ce théorème quelques remarques complémentaires. D'abord il peut y avoir intérêt à avoir pour les courbes antécédentes du paragraphe 21 un système de numérotage qui ne soit pas arbitraire. Si l'on désigne par $R_{-1}^{(0)}, R_{-1}^{(1)}, \ldots, R_{-1}^{(d-1)}$ les déterminations de la fonction inverse, uniformes et distinctes à l'intérieur de C, il est naturel de désigner par le groupe de chiffres $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ la courbe C_{-n} qui dérive de C par la substitution $R_{-1}^{(\alpha_1)}\left[R_{-1}^{(\alpha_2)}\left[R_{-1}^{(\alpha_3)}[\ldots z]\right]\right]$; de cette manière on voit de suite que : 1° pour que deux courbes C_{-n} et $C_{-n'}$ $(n' > n)$ soient intérieures l'une à l'autre, il faut et il suffit que le groupe de chiffres ou *indice* de $C_{-n'}$ commence par les chiffres de C_{-n}; 2° que les indices des conséquentes de C_{-n} s'obtiennent en supprimant successivement 1, 2, 3, ... chiffres à la gauche de son indice; 3° que les antécédentes de C_{-n} s'obtiennent en ajoutant des chiffres à la gauche de l'indice. A toute suite infinie de chiffres on fera correspondre le point intérieur commun à toutes les courbes ayant pour indices successifs les groupes de 1, 2, 3, ... premiers chiffres de la suite; de cette manière, il y a correspondance biunivoque entre les points de P et les suites infinies de chiffres en question. A cette suite de chiffres correspond d'ailleurs le nombre compris entre 0 et 1, tel que la suite de ses chiffres représentatifs après la virgule dans le système de numération à base d soit la suite proposée, la correspondance étant biunivoque, sauf pour une infinité dénombrable de nombres rationnels qui peuvent s'écrire de deux manières, à savoir ceux qui peuvent s'écrire de manière à n'avoir que des zéros à partir d'un certain rang et qu'on peut aussi écrire en n'employant que le chiffre $d - 1$ à partir d'un certain rang.

On voit ainsi que P a la puissance du continu ; nous n'avons fait que répéter, dans un cas particulier, la démonstration classique de cette propriété des ensembles parfaits, mais ici le mode de représentation adopté pour P est en relation étroite avec les propriétés d'invariance de cet ensemble relativement à la substitution donnée. En particulier, aux fractions périodiques simples correspondent les points périodiques, aux fractions périodiques mixtes les antécédents de ces points. Si on laisse de côté les développements qui se terminent par zéro répété indéfiniment, on a une correspondance biunivoque entre les nombres réels $(0 < t \leqq 1)$ d'une part et les points de P d'autre part, à l'exclusion des antécédents de l'un des points doubles qui ne sont pas représentés. A deux points de P infiniment voisins correspondent deux valeurs de t infiniment voisines ; la réciproque n'a pas lieu, la quantité complexe qui correspond à un point de P étant une fonction discontinue de t pour les valeurs de t à représentation ambiguë, mais continue partout ailleurs. Si l'on pose $z = f(t)$, en convenant que $f(t+1) = f(t)$, on a $R(z) = f(dt)$. A l'aide de ces remarques, on démontre immédiatement : 1° que tout point de P est limite de points périodiques ; 2° qu'il y a, au voisinage de chaque point de P, des points tels que l'ensemble dérivé de leurs conséquents soit identique à P, etc. (*cf.* § 20).

Une autre remarque qu'il y a lieu de faire, c'est que l'existence d'un tel domaine de convergence à frontière partout discontinue n'est pas un cas singulier, c'est-à-dire que cette circonstance se produira sans qu'il y ait d'égalités particulières entre les coefficients de la fonction $R(z)$; il suffit que ces coefficients varient dans un domaine convenable. Considérons une substitution rationnelle de degré d pour laquelle le fait se produit, par exemple une substitution à cercle fondamental de deuxième espèce non singulière et soit une courbe C qui divise le plan en deux régions jouissant des propriétés indiquées plus haut, l'extérieur de C contenant les points critiques de $R_{-1}(z)$ et le point double attractif. Si l'on fait varier les coefficients de $R(z)$, les $2(d-1)$ points critiques de $R_{-1}(z)$, qui s'obtiennent en égalant à zéro le discriminant de l'équation $R(y) = z$, varieront d'une manière continue et resteront extérieurs à C pour une variation suffisamment petite des coefficients. Comme d'autre part $R(z)$ est une fonction uniformément continue de z et des coefficients dans le domaine $\mathcal{D}$ extérieur à C, la propriété consistant en ce que $\mathcal{D}_1 = R(\mathcal{D})$ est intérieur à $\mathcal{D}$ subsistera également; pour une raison analogue, on aura encore $|R'(z)| > K' > 1$ sur C et à son intérieur ($K' < K$). Je dis que dans $\mathcal{D}$ les $R_n(z)$ convergeront vers un point double attractif. En effet, un tel point double existe encore dans $\mathcal{D}$, puisque les racines de l'équation $R(z) = z$ et les multiplicateurs correspondants $s = R'(z)$ sont des fonctions continues des coefficients; soient α ce point double et z_0 un point intérieur à C. Les fonctions $\frac{1}{R_n(z) - z_0}$ étant bornées dans leur ensemble dans $\mathcal{D}$ et tendant uniformément vers $\frac{1}{\alpha - z_0}$ dans un petit cercle de centre α intérieur à $\mathcal{D}$, tendront uniformément vers cette même constante dans tout le domaine $\mathcal{D}$ (¹). Donc les $R_n(z)$ convergent vers α dans $\mathcal{D}$ et finalement dans le domaine ayant pour frontière l'ensemble discontinu P.

On peut préciser davantage quand $R(z)$ est un polynome : il suffit que le terme constant de $R(z)$ soit suffisamment grand, les autres coefficients étant donnés pour que la substitution $|z\,|R(z)|$ rentre dans la catégorie précédente. Posons

$$R(z) = A_0 z^d + A_1 z^{d-1} + \ldots + A_{d-1} z + t = A(z) + t, \qquad R'(z) = A'(z),$$

t étant un paramètre. L'inégalité $|R'(z)| \leqq K\ (K > 1)$ définit un ou plusieurs domaines bornés E, qui sont fixes quand t varie. Soit M la plus grande distance de ces domaines à l'origine. Nous prendrons toujours $|t| > M$. Ceci étant, pour que l'on ait $|R(z)| > |z|$, il suffit que $|z|$ soit supérieur à la racine positive de l'équation

$$|A_0|\, x^d - |A_1|\, x^{d-1} - \ldots - [|A_{d-1}| + 1]\, x - |t| = 0.$$

Soit r cette racine; dans le domaine $\mathcal{D} : |z| \geqq r' > r$, les $R_n(z)$ convergent uniformément vers l'infini. Si, d'autre part, on prend z

---

(¹) STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. VIII, 1894). — MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 20 (Gauthier-Villars, 1910).

dans E, on a

$$|z_1| = |R(z)| \geqq |t| - M.$$

Pour que z_1 soit dans un domaine tel que $\mathfrak{D}$, il suffit que $|t| - M > r$, c'est-à-dire en posant $|t| = \rho$ que

$$|A_0|(\rho - M)^d - |A_1|(\rho - M)^{d-1} - \ldots - [|A_{d-1}| + 1](\rho - M) - \rho > 0.$$

Le coefficient de ρ^d étant positif au premier nombre, ceci aura lieu quand ρ sera supérieur à L, $L > M$ étant, par exemple, la plus grande racine positive du premier nombre.

Nous prendrons donc $|t| > L$, et r' assez voisin de r pour que l'inégalité $|R'(z)| \leqq K$ entraîne $|R(z)| > r'$, ce qui est possible en vertu de l'analyse précédente; $\mathfrak{D}$ contient donc les conséquents des domaines E et en particulier les conséquents immédiats des points racines de $R'(z) = 0$ qui sont, avec le point à l'infini, les points critiques de $R_{-1}(z)$. De plus, sur les courbes antécédentes du contour C de $\mathfrak{D}$, on a $|R'(z)| > K > 1$, à partir du premier rang. On est donc dans le cas où la frontière du domaine de convergence vers l'infini est partout discontinue (de longueur nulle si $K > d$).

24. Nous allons étudier maintenant des exemples de substitutions rationnelles ayant deux points doubles attractifs, dont les domaines respectifs sont d'un seul tenant et simplement connexes, et séparés par une courbe comme dans les substitutions à cercle fondamental de première espèce.

Prenons, par exemple, $R(z) = \frac{z + z^d}{2}$ $(d \geqq 2)$. Nous avons ici deux points doubles attractifs, le point à l'infini et l'origine. On constate aisément que le domaine du point à l'infini comprend l'extérieur de tout cercle C′ de rayon supérieur à $3^{\frac{1}{d-1}}$ et que dans un tel domaine on a : $|z_1| > K'|z|$ $(K' > 1)$. De même, le domaine de l'origine comprend l'intérieur de tout cercle C de rayon plus petit que 1, dans lequel on aura : $|z_1| < k|z|$ $(k < 1)$. Les points critiques de $R_{-1}(z)$ sont le point à l'infini autour duquel se permutent circulairement les d branches de R_{-1} et les points $c = R(\zeta)$, $R'(\zeta) = \frac{1 + d\zeta^{d-1}}{2} = 0$, ce qui donne $d - 1$ points critiques simples, tous intérieurs à C, si l'on prend le rayon de C supérieur à $\left(\frac{1}{d}\right)^{\frac{1}{d-1}}$. Les valeurs de $R_{-1}(z)$ se permutent circulairement sur les circonférences C et C'. Il suit de là facilement que les courbes antécédentes de C' sont des courbes simples d'un seul tenant C'_{-1}, C'_{-2}, ..., telles que C'_{-n} soit intérieure à $C'_{-(n-1)}$, et comprenant toutes l'origine à leur intérieur, de manière que z_{-n} revient à son point de départ sur C'_{-n}, son argument ayant augmenté de 2π, quand z a fait d^n fois le tour de C' dans le sens direct.

De la même manière, les courbes antécédentes de C sont des courbes qui s'enveloppent mutuellement en comprenant toujours l'origine à leur intérieur et en restant extérieures aux courbes C'_{-n}. Les domaines antécédents de l'intérieur de C et de l'extérieur de C' sont ainsi des domaines simplement connexes de plus en plus grands, limités par les courbes C_{-n} et C'_{-n}; nous allons voir dans un instant que l'écart des courbes C_{-n} et C'_{-n} tend uniformément vers zéro.

Pour préciser la manière dont les choses se passent, traçons dans la couronne (C, C'), où les fonctions $R_{-n}(z)$ sont analytiques mais non uniformes, la coupure ab dirigée suivant le segment de l'axe réel positif; ab contient donc le point double répulsif $z = 1$, et la branche de $R_{-n}(z)$, qui est égale à 1 pour $z = 1$, reste réelle pour z situé sur ab, de manière que les segments antécédents de ab, obtenus au moyen de cette branche de fonction, sont emboîtés les uns dans les autres et tendent vers le point double $z = 1$. Nous désignerons par $R_{-1}^{(0)}(z)$, $R_{-1}^{(1)}(z)$, ..., $R_{-1}^{(d-1)}(z)$ les branches d de la fonction $R_{-1}(z)$ obtenues successivement en partant d'un point de la coupure avec la détermination initiale également située sur cette coupure, et tournant autour de l'origine dans le sens direct. Au domaine initial δ, constitué par la couronne où l'on a tracé la coupure, correspondent ainsi d domaines δ_{-1} que nous affecterons des indices supérieurs $(0, 1, 2, \ldots, d-1)$ et qui sont constitués par des quadrilatères curvilignes assemblés dans la couronne comprise entre C_{-1} et C'_{-1}, ces domaines n'ayant pas de points intérieurs communs, mais deux domaines d'indices j et $j+1$ (ou 0 et $d-1$) étant contigus suivant une ligne transversale antécédente de la coupure ab. Les domaines antécédents immédiats des δ_{-1}, c'est-à-dire les domaines δ_{-2}, seront obtenus en faisant l'application de δ avec les domaines δ_{-1}, qui y sont contenus dans l'ordre où on les rencontre, successivement sur $\delta_{-1}^{(0)}, \delta_{-1}^{(1)}, \delta_{-1}^{(2)}, \ldots$. Ces domaines δ_{-2}, assemblés dans la couronne (C_{-2}, C'_{-2}) auront pour indices successifs dans l'ordre où on les rencontre

$$\begin{gathered}(0,0),\quad (0,1),\quad \ldots,\quad (0, d-1),\\ (1,0)\quad (1,1),\quad \ldots,\quad (1, d-1),\quad (2,0),\quad \ldots,\quad (d-1, d-1),\end{gathered}$$

deux domaines successifs étant contigus suivant une transversale antécédente de rang 2 de la coupure ab; le premier et le dernier sont également contigus suivant un segment de ab. D'une manière générale, les domaines δ_{-n} ou, ce qui revient au même, les points a_{-n} et b_{-n}, seront désignés par un indice formé de n chiffres $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, signifiant que le δ_{-n} en question se déduit de δ par la substitution

$$R_{-1}^{(\alpha_1)}\left[R_{-1}^{(\alpha_2)}\left[R_{-1}^{(\alpha_3)}[\ldots(z)]\right]\right].$$

On voit, comme au paragraphe **23**, que : 1° pour que deux domaines δ_{-n} et $\delta_{-n'}$ $(n' > n)$ soient intérieurs au sens large l'un à l'autre, il faut et il suffit que l'indice de $\delta_{-n'}$ commence par les chiffres de l'indice de δ_{-n}; 2° que les indices des conséquents de δ_{-n} s'obtiennent en supprimant successivement 1, 2, 3, ... chiffres à la gauche de son indice; 3° que les antécédents de δ_{-n} s'obtiennent en ajoutant des chiffres à la gauche de son indice. En outre, dans le cas actuel, deux domaines δ_{-n} sont limitrophes si l'un des indices se déduit de l'autre en augmentant le dernier chiffre de l'un d'une unité, avec la convention que si ce dernier chiffre est $d-1$, on remplace $d-1+1$ ou d par zéro, en forçant le chiffre précédent d'une unité, et recommençant au besoin l'opération. Enfin un domaine δ_{-n} aura une partie de frontière commune avec un $\delta_{-(n-1)}$ si le dernier chiffre de son indice est zéro ou $d-1$, et seulement dans ce cas.

On voit d'ailleurs clairement comment les domaines δ_{-n} sont assemblés en considérant, au lieu de l'exemple étudié, le suivant, $R(z) = z^d$, qui donne

$$z_{-n} = \rho^{\frac{1}{d^n}} e^{\frac{2iN\pi}{d^n}} \qquad (\text{pour } z = \rho > 0).$$

Les domaines δ_{-n} sont alors limités par des circonférences concentriques et des segments de rayons angulairement équidistants; mais du point de vue de l'*Analysis situs*, tout se passe comme dans l'exemple actuel.

Étudions maintenant l'ensemble limite des domaines δ_{-n}, c'est-à-dire l'ensemble des points intérieurs au sens large à une infinité de ces domaines. Je dis que les dimensions de ces domaines tendent uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$. En effet, il suffit de montrer, d'après un raisonnement déjà employé, qu'on a

$$|R'(z)| > K > 1$$

dans ces domaines à partir d'un certain rang. Or cela a bien lieu, car prenons d'abord le rayon de C égal à 1; on aura alors sur la courbe C_{-1} :

$$R'(z) = \frac{1 + dz^{d-1}}{2} \quad \text{et} \quad |z| \geqq 1,$$

d'où

$$|R'(z)| \geqq \frac{d-1}{2}.$$

Si $d \geqq 4$, on a donc $|R'(z)| \geqq \frac{3}{2}$ sur C_{-1}; donc

$$|R'(z)| > K > 1,$$

même si le rayon de C est un peu inférieur à 1.

Des calculs tout élémentaires que nous omettons montrent que la chose est encore vraie pour $d = 2$ ou 3. Les longueurs des contours des domaines δ_{-n} tendent ainsi uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$; il s'ensuit que l'ensemble limite des points de la couronne (C_{-n}, C'_{-n}) est un ensemble parfait, bien enchaîné, sans points intérieurs. A toute suite infinie d'entiers $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots)$ nous pouvons faire correspondre le point de cet ensemble P qui est intérieur au sens large aux domaines ayant pour indices (α_1), $(\alpha_1 \alpha_2)$, ..., $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)$, ..., qui sont intérieurs au sens large les uns aux autres. A deux suites d'entiers distinctes correspondront en général deux points distincts, le contraire n'ayant lieu que si ces deux suites représentent le même nombre compris entre 0 et 1 dans le système de numération à base d. En effet, il résulte de ce qui a été dit plus haut que l'ordre de succession des domaines δ_{-n}

est le même que l'ordre naturel des nombres

$$\left(\frac{\alpha_1}{d} + \frac{\alpha_2}{d^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{d^n}\right)$$

qui correspondent à l'indice $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)$. Si deux de ces nombres diffèrent d'au moins deux unités du $n^{\text{ième}}$ ordre, ils correspondent à deux domaines de rang n sans points communs et sans frontière commune. Si donc deux nombres t et t' sont distincts, leurs valeurs approchées par défaut à $\frac{1}{d^n}$ près différant de deux unités au moins pour une certaine valeur de n, les points p et p' de l'ensemble P que nous leur faisons correspondre se trouveront dans deux domaines δ_{-n} et δ'_{-n} entièrement séparés; p et p' sont distincts. Si le nombre t est de la forme $\frac{N}{d^n}$, il lui correspondra de quelque manière qu'on l'écrive dans le système de base d un même point p de P qui est un antécédent du point double répulsif $z = 1$, les domaines δ_{-n} auxquels il est intérieur au sens large étant alors tous contigus suivant une transversale antécédente de la coupure ab. On doit toutefois remarquer qu'aux deux valeurs $t = 0$ et $t = 1$ correspondent le même point $z = 1$.

A deux valeurs de t infiniment voisines correspondront deux points infiniment voisins, ces deux points appartenant à un même domaine δ_{-n} pour une valeur infiniment grande de n, et les dimensions de δ_{-n} tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Ainsi, il y a correspondance continue et biunivoque entre les points de l'ensemble P et les nombres compris entre 0 et 1. Les points de P forment une courbe représentée par une équation de la forme

$$z = f(t),$$

$f(t)$, fonction imaginaire de la variable réelle t, continue dans l'intervalle $(0, 1)$. On a $f(1) = f(0)$ et l'on peut convenir que $f(t+1) = f(t)$. On a alors

$$R(z) = f(d.t),$$

cette propriété montrant que l'étude de l'ensemble des conséquents d'un point de la courbe se ramène à celle des nombres obtenus en déplaçant la virgule vers la droite dans la représentation d'un nombre t ($0 < t < 1$) dans le système de numération à base d.

Nous voyons en définitive que, *grâce à l'introduction d'une coupure invariante passant par un point double répulsif*, nous avons pu faire l'étude de la frontière des domaines d'attraction des deux points doubles (0 et ∞) de la même manière que dans le cas précédemment examiné où la frontière est discontinue.

Dans le cas actuel, nous avons une séparation du plan en deux régions simplement connexes par une ligne continue, qui sont les régions de convergence respectives vers les deux points doubles; on voit aisément que tout point de la ligne frontière est limite d'antécédents d'un point quelconque du plan, sauf le point à l'infini. Plus précisément, le conséquent d'ordre n d'un domaine circulaire aussi petit qu'on le veut ayant pour centre un point de la frontière couvre tout le plan, sauf l'extérieur d'un cercle de rayon arbitraire, pour une valeur finie de n.

L'exemple précédent peut être facilement généralisé. Supposons que deux points doubles attractifs d'une substitution rationnelle (qu'on peut toujours supposer être l'origine et le point à l'infini), puissent être respectivement entourés de deux contours simples sans points doubles C et C' jouissant des propriétés suivantes : les conséquents d'un point de C ou intérieur à C sont intérieurs à C, les conséquents d'un point de C' ou extérieur à C' sont extérieurs à C'; sur C et C', toutes les déterminations de $R_{-1}(z)$ se permutent circulairement. Il existe alors (Chap. I, § 6) $d-1$ points critiques de $R_{-1}(z)$ à l'intérieur de C et autant à l'extérieur de C', il n'y en a donc pas dans la couronne (C, C'). Les antécédentes de C et C' sont des courbes simples d'un seul tenant, les couronnes (C_{-n}, C'_{-n}) sont intérieures à celles de rang moindre; nous supposerons qu'on a dans ces couronnes, à partir d'un certain rang,

$$|R'(z)| > k > 1.$$

L'analyse faite plus haut est applicable dans ce cas; nous allons montrer qu'il existe encore une coupure invariante dans (C, C'), constituée par une ligne rectifiable qui a un segment unique dans

$$(C_{-n},\ C_{-(n-1)}) \quad \text{ou} \quad (C'_{-n},\ C'_{-(n-1)}).$$

Soient a un point de C, p le point de C_{-1} le plus rapproché de a,

q le point de C'_{-1} le plus rapproché de p, et b le point de C' le plus rapproché de q; la ligne brisée $apqb$, formée de trois segments de droite contenus respectivement dans (C, C_{-1}), (C_{-1}, C'_{-1}), (C'_{-1}, C'), est une ligne simple sans points doubles que nous désignerons simplement par ab; si z décrit ab, une branche de $R_{-1}(z)$ décrit $a_{-1}\,b''_{-1}$ formée d'arcs algébriques et contenue dans (C_{-1}, C'_{-1}); on peut joindre aa_{-1} et bb_{-1} par des lignes brisées contenues respectivement dans (C, C_{-1}) et (C', C'_{-1}) et ne traversant pas ab; décrivons alors la ligne sans point double $a_{-1}abb_{-1}$, $R_{-1}(z)$ décrira une autre ligne sans point double formée d'arcs algébriques $a_{-2}a_{-1}\,b_{-1}\,b_{-2}$; on a

$$R(a_{-2}) = a_{-1}, \qquad R(b_{-2}) = b_{-1};$$

z décrivant cette dernière ligne, $R_{-1}(z)$ décrit $a_{-3}a_{-2}\,b_{-2}\,b_{-3}$, et ainsi de suite; on obtiendra à la $n^{\text{ième}}$ opération

$$a_{-n}\,a_{-(n-1)}\,b_{-(n-1)}\,b_{-n},$$

ligne sans points doubles, avec

$$R(a_{-n}) = a_{-(n-1)}, \qquad R(b_{-n}) = b_{-(n-1)}.$$

Les lignes $(a_{-i}, a_{-(i+1)})$ se déduisant chacune de celle qui suit par la substitution $[z, R(z)]$, on aura

$$\text{longueur } (a_{-n}, a_{-(n-1)}) < \frac{A}{K^n};$$

et, *a fortiori*,

$$|a_{-n} - a_{-(n-1)}| < \frac{A}{K^n}.$$

La série $\Sigma\,|a_{-n} - a_{-(n-1)}|$ étant absolument convergente, on a

$$\lim a_{-n} = \omega,$$
$$R(\omega) = \omega, \qquad |R'(\omega)| > 1.$$

D'ailleurs, les longueurs des courbes $a_{-n}\,b_{-n}$ tendant vers zéro pour la même raison que $a_{-(n-1)}\,a_{-n}$, les points b_{-n} tendent vers le même point double ω. Les lignes aa_{-1}, $a_{-1}\,a_{-2}$, ..., $a_{-n}a_{-(n+1)}$, ..., bb_{-1}, $b_{-1}\,b_{-2}$, ... constituent par leur réunion une coupure de la couronne (C, C') invariante par la substitution donnée, ayant un segment unique dans les couronnes $(C_{-(n-1)}, C_{-n})$ $(C'_{-(n-1)}, C'_{-n})$, de longueur finie et sans point double, qui aura en ω un point asymptote si $R'(\omega)$ est imaginaire, mais jouant dans tous les cas le même rôle que la coupure rectiligne de l'exemple précédent. Les domaines des deux points doubles attractifs O et O′ sont encore deux domaines simplement connexes séparés par une courbe sans point double

$$z = f(t) \qquad (0 \leqq t \leqq 1),$$

$f(t)$ fonction imaginaire de la variable réelle t, telle que, si l'on convient que $f(t+1) = f(t)$, on ait l'équation fonctionnelle

$$[f(t)] = f[d.t] \qquad (d, \text{ degré de R}).$$

Nous ferons encore remarquer que le cas examiné ici n'est pas un cas singulier, les mêmes circonstances continuant à se présenter si l'on donne des accroissements suffisamment petits, mais quelconques, aux coefficients de $R(z)$.

25. Nous laisserons de côté pour l'instant les cas, limites des précédents, où il y a un point double de multiplicateur égal à $+1$, et nous allons étudier des substitutions dont l'itération conduit à considérer des domaines d'un caractère différent de ceux examinés jusqu'à présent. Ces exemples nouveaux se déduisent du reste facilement des substitutions à cercle fondamental par une transformation algébrique du second ordre.

Proposons-nous le problème suivant : trouver une substitution rationnelle pour laquelle il existe un ensemble de points complètement invariant formé par un arc de cercle ; cet arc doit donc contenir les conséquents et antécédents de tous ses points. On peut, au moyen d'une transformation homographique préalable, remplacer cet arc par le demi-axe réel positif. Soit $Z = R(z)$ la substitution cherchée ; z et $R(z)$ prennent simultanément des valeurs réelles positives ou nulles.

Posons $w = \sqrt{z}$; w sera réel pour z réel positif ; si z n'est pas sur Ox, w sera, par exemple, dans le demi-plan supérieur ; $R(z)$ ou Z étant également extérieur à Ox, $W = \sqrt{Z}$ sera en dehors de l'axe réel ; nous prendrons W dans le demi-plan supérieur comme w. Si w varie en restant dans le demi-plan supérieur, il en sera de même de W, ces deux points atteignant en même temps l'axe réel. Il s'ensuit que la fonction $W(w)$ ainsi définie est rationnelle. On a, en effet, $W = \sqrt{R(w^2)}$ et les points critiques possibles de cette fonction de w sont les zéros et les pôles de $R(w^2)$. $R(w^2)$ devient nul ou infini pour $w^2 = a^2$, a étant réel. Si a est fini et différent de zéro et si a^2 est une racine d'ordre impair de $R(z)$, on aura

$$R(w^2) = (w^2 - a^2)^{2q+1} P(w^2) \qquad [P(a^2) \neq 0],$$
$$W = \sqrt{R(w^2)} = (w - a)^{q+\frac{1}{2}} H(w),$$

$H(w)$ étant holomorphe et non nul pour $w = a$. Si w décrit un demi-cercle de rayon infiniment petit dans le demi-plan supérieur autour de a comme centre, de manière que l'argument de $(w - a)$ croisse de 0 à π, l'argument de W augmentant d'un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, W ne reste pas sur l'axe réel. Il faut donc que a^2 soit racine d'ordre pair de $R(z)$, W est alors une fonction uniforme de w pour $w = \pm a$. Même remarque si a^2 est un pôle. Enfin, si l'un des points 0 ou ∞ est un zéro ou un pôle de $R(z)$, $\sqrt{R(w^2)}$ est uniforme en ce point. On a donc

$$W = R_1(w),$$

R_1 étant rationnelle et cette substitution laissant invariants l'axe réel et le demi-plan supérieur. On est donc ramené à une substitution à cercle fondamental. Posons alors (§ 16)

$$W = kw + h - \sum \frac{A}{w - a},$$

les constantes du second membre étant réelles, A et k positifs, et cherchons les conditions pour que, en remplaçant W par $\sqrt{Z}$ et w par $\sqrt{z}$, on obtienne une relation de la forme $Z = R(z)$. Il faut et il suffit pour cela que les deux expressions conjuguées

$$k\sqrt{z} + h - \sum \frac{A}{\sqrt{z} - a},$$
$$-k\sqrt{z} + h + \sum \frac{A}{\sqrt{z} + a}$$

soient égales et de signe contraire, c'est-à-dire que l'on ait, quel que soit z,

$$2h + \sum \frac{A}{\sqrt{z}+a} - \sum \frac{A}{\sqrt{z}-a} = 0$$

ou

$$h - \sum \frac{A a}{z - a^2} = 0.$$

Pour que ceci ait lieu, il faut que les a soient deux à deux égaux et de signe contraire (l'un des a peut être nul). Les deux termes $\frac{A}{w-a}$ et $\frac{A'}{w+a}$ fournissent alors dans l'expression précédente une contribution égale à $\frac{(A'-A)a}{z-a^2}$. Si $a \neq 0$, on devra avoir $A = A'$. De plus, $h = 0$. L'expression de $R_1(w)$ sera donc

$$R_1(w) = kw - \sum \frac{2Aw}{w^2 - a^2} = w\left[k - \sum \frac{2A}{w^2 - a^2}\right],$$

les constantes A, a, k étant réelles, positives ou nulles.

On en déduit

$$Z = z\left[k - \sum \frac{2A}{z - a^2}\right]^2 = R(z).$$

Telle est l'expression générale des substitutions qui satisfont aux conditions du problème.

Si l'on se donne z non situé sur la partie positive de l'axe réel, il lui correspond deux valeurs de $w = \pm\sqrt{z}$, en dehors de l'axe réel; soient w l'une d'elles, $w_1 = R_1(w), \ldots, w_n = R_1(w_{n-1}), \ldots$; les points w_n restent du même côté de l'axe réel et tendent vers le point limite α situé soit sur l'axe réel, soit en dehors, suivant l'espèce de la substitution R_1. Les points $z_n = w_n^2$, qui se déduisent de z par itération de la substitution $R(z)$, ont alors pour limite le point α^2; on voit facilement que α^2 est toujours réel.

Si R_1 est de deuxième espèce, avec un point attractif unique sur l'axe réel, il y a sur cet axe une infinité dénombrable de segments contigus à un ensemble parfait P à l'intérieur desquels les w_n convergent vers α. Il leur correspond une infinité dénombrable de segments situés sur Ox, contigus à un ensemble parfait Π sur lesquels les z_n convergent vers α^2. Π est partout discontinu; les conséquents d'un segment contenant un point de Π finissent par recouvrir entièrement Ox. Il n'y a rien dans ce cas d'essentiellement nouveau.

Au contraire, si R_1 est de première espèce, il y a convergence pour tout le plan vers le point $-c^2$ ($\alpha = ci$ étant purement imaginaire), sauf sur la partie positive de l'axe réel qui forme ici la frontière continue du domaine de convergence. On a donc un domaine de convergence d'une autre nature que ceux rencontrés jusqu'ici. On trouvera facilement les conditions que doivent vérifier les constantes A, a, k pour qu'il en soit ainsi. Si par exemple on suppose tous les a différents de zéro, ces conditions sont

$$0 < k < 1, \qquad k + \sum \frac{2A}{a^2} > 1.$$

Nous laisserons de côté la discussion de la position des points doubles qui ne présente pas de difficultés.

Si maintenant on effectue sur Z et z une même transformation homographique quelconque, on obtient l'expression générale des substitutions qui laissent invariants un arc de cercle pq et le domaine non borné qui a cet arc pour frontière; s'il existe un point double extérieur à pq, c'est alors un point double attractif situé sur le prolongement de pq et dont le domaine comprend tout le plan à l'exception de la coupure pq. Dans tous les cas, on démontre facilement que la substitution inverse $R_{-1}(z)$ admet $d-1$ points critiques extérieurs à pq, les d valeurs de cette fonction se permutant circulairement sur un contour entourant pq et voisin de cet arc; il y a également des points critiques sur pq équivalents à $d-1$ points critiques simples et qui sont tous confondus avec les points p et q (exceptionnellement avec un seul de ces points, si R est du second degré). z décrivant l'arc pq, $R(z)$ décrit d fois ce même arc en marchant dans le même sens tant qu'on n'atteint pas les extrémités p et q. On a, entre p et q, l'un des quatre systèmes de relations :

(I)	$R(p) = p,$	$R(q) = q,$
(II)	$R(p) = p,$	$R(q) = p,$
(III)	$R(p) = q,$	$R(q) = q,$
(IV)	$R(p) = q,$	$R(q) = p.$

Tout cela est très facile à vérifier et résulte de ce que $R_{-1}(z)$ ne peut pas avoir de points critiques intérieurs à pq.

Comme exemple, cherchons s'il existe des polynomes laissant invariants le segment $(-1, +1)$ de l'axe réel et le domaine extérieur à ce segment. Soit $Z = R(z)$ un polynome répondant à la question. Si l'on pose

$$w = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}, \qquad W = \sqrt{\frac{1-Z}{1+Z}},$$

on en déduit $W = R_1(w)$, qui laisse invariants l'axe réel et le demi-plan supérieur; R étant un polynome, R_1 doit admettre les points doubles $w = \pm i$ correspondant à $z = \infty$; en outre, ces deux points doubles doivent être des points exceptionnels n'ayant d'autres antécédents qu'eux-mêmes. Si l'on pose

$$\frac{w-i}{w+i} = t, \qquad \frac{W-i}{W+i} = T,$$

la relation $W = R_1(w)$ devient $T = P(t)$; $P(t)$ ayant pour cercle fondamental le cercle $(|t| \leqq 1)$ avec les points exceptionnels zéro et l'infini, on a nécessairement

$$P(t) = e^{ia}\, t^m \qquad (a \text{ réel, } m \text{ entier} > 0).$$

Si l'on pose

$$t = e^{i\varphi}, \qquad T = e^{i(m\varphi + a)} = e^{i\Phi},$$

il vient

$$w = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}, \qquad W = \operatorname{tang}\frac{\Phi}{2},$$

$$z = \frac{1-w^2}{1+w^2} = \cos\varphi, \qquad Z = \cos\Phi = \cos(m\varphi + a).$$

Nous sommes ramenés à chercher la condition pour que $\cos(m\varphi + a)$ soit une fonction rationnelle de $\cos\varphi$. Il suffit que a soit un multiple de π. Les polynomes cherchés sont donc ceux qui expriment $\pm\cos m\varphi$ en fonction de $\cos\varphi = z$. On a ainsi une représentation paramétrique commode qui met en évidence les propriétés des substitutions itérées.

Je signale enfin qu'il est possible de former des exemples analogues de substitutions ayant un point double attractif avec un domaine dont la frontière est constituée par une courbe de Jordan non fermée, cette courbure n'étant plus un arc de cercle mais une courbe non analytique. A l'inverse des cas traités au début de ce Chapitre, ce cas est singulier, c'est-à-dire suppose toujours vérifiées certaines relations entre les coefficients de la substitution. Nous reviendrons ultérieurement sur ce sujet.

FIN DU TOME XLVII.