JACQUES PEYRIÈRE

Deux questions d'analyse harmonique : multiplicateurs et produits de Riesz

Thèses d'Orsay, 1974

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1974__0025__P0_0>

UNIVERSITE PARIS_SUD

Centre d'Orsay

THESES

présentées pour obtenir le grade de docteur ès-sciences mathématiques

par

Jacques PEYRIERE

1ère thèse : Deux questions d'analyse harmonique : multiplicateurs et produits de Riesz.

2ème thèse : propositions données

soutenues le 24 octobre 1974 devant la commission d'examen

MM. J.-P. Kahane, Président
M. Demazure
P. Eymard
M. Nivat
A. Zygmund

Introduction

Les questions que j'ai abordées peuvent se grouper autour de deux pôles : d'une part les multiplicateurs des transformées de Fourier des fonctions de L^p, d'autre part une étude de certaines mesures singulières, principalement les produits de Riesz.

Mon premier travail est une étude des fonctions qui s'écrivent ainsi : $\sum_{j\geq 0} F_j * G_j$ où F_j et G_j sont des fonctions sur $\mathbb{R}^n$ invariantes par rotation (nous dirons radiales) et où $\sum_{j\geq 0} \|F_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|G_j\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}$ est fini. J'ai montré que, suivant les valeurs de n et p, ces fonctions sont un certain nombre de fois presque partout dérivables. L'espoir que j'avais était d'exhiber une fonction radiale appartenant à l'algèbre $A_p(\mathbb{R}^n)$ et n'ayant pas ces propriétés ; un argument de dualité aurait alors montré l'existence d'une distribution radiale sur $\mathbb{R}^n$ qui convole l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ radial sans convoler $L^p(\mathbb{R}^n)$. Actuellement on connaît la réponse à ce problème lorsque p est strictement compris entre $4/3$ et 2. Charles Fefferman a en effet montré que la fonction caractéristique d'une boule de $\mathbb{R}^n$ n'est pas multiplicateur de $\mathfrak{M}(L^p(\mathbb{R}^n))$

si p est différent de 2 ; c'autre part C. S. Herz avait déjà montré que cette fonction est un multiplicateur de $\mathcal{F}(L^p_{rad}(\mathbb{R}^n))$ lorsque p est strictement compris entre $\frac{2n}{n+1}$ et $\frac{2n}{n-1}$.

Ensuite R. Spector et moi, au cours d'une école d'Analyse Harmonique qui s'est tenue à Aussois en 1969, nous avons obtenu une caractérisation des multiplicateurs radiaux de $\mathcal{F}(L^p(G))$ lorsque G est un groupe abélien localement compact métrisable totalement discontinu. A partir de là, j'ai généralisé dans ce cadre les théorèmes classiques de Littlewood, Marcinkiewicz et Paley sur les multiplicateurs ; on obtient en ce qui concerne les séries de Walsh des résultats un peu plus généraux que ceux de Paley : l'ordre usuel de sommation d'une telle série n'est pas le seul naturel, il en existe beaucoup d'autres, non équivalents, qui donnent formellement les mêmes théorèmes. Diverses compactifications du groupe $\mathbb{Z}^n$ sont des groupes métrisables totalement discontinus, les restrictions à $\mathbb{Z}^n$ des multiplicateurs précédemment construits sont des multiplicateurs.Ce transport nécessite d'établir des théorèmes du type de ceux de Littlewood-Paley et de Zygmund ; pour ce faire j'ai employé une méthode plus compliquée que celle que m'a communiquée R. Spector et moins puissante que les théorèmes de transfert de multiplicateurs de N. Lohoué, elle a l'avantage d'être élémentaire et de permettre aussi le transport du théorème maximal de Carleson-Hunt ce qui, pour les séries de Fourier des fonctions de $L^2(\mathbb{T}^n)$, donne des ordres de sommation non habituels pour lesquels il y a convergence presque partout.

A la suite de ceci avec N. Lohoué nous avons étudié le groupe M(2) des déplacements du plan euclidien. Nous avons obtenu pour ce groupe des analogues des théorèmes de Hörmander et Marcinkiewicz sur les multiplicateurs. Ceci permet de construire des opérateurs bornés de $L^p(\mathbf{T})$ non cécessairement invariants par translation. Ce travail est en cours de parution aux Ann. Ec. Norm. Sup. de Pise, il est reproduit dans le chapitre III de ce présent ouvrage.

Le chapitre IV contient une étude que j'ai faite plus récemment des produits de Riesz, c'est-à-dire des mesures que les produits $\prod_{j\geq 0} (1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x}))$ définissent sous des hypothèses convenables. Le premier problème qui se posait était d'étendre le théorème de Zygmund caractérisant les produits de Riesz absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue. J'ai obtenu des conditions assurant ou bien que deux produits de Riesz sont étrangers ou bien qu'un produit de Riesz est absolument continu par rapport à un autre. Ensuite j'ai évalué la dimension de Hausdorff de certains boréliens portant un produit de Riesz. La difficulté principale de ce calcul est de montrer qu'une certaine suite de fonctions converge presque partout par rapport au produit de Riesz que l'on étudie. Suivant les hypothèses faites les techniques sont différentes : on emploie soit des inégalités sur des martingales soit le théorème de Menšov (en s'inspirant d'un article de Kac, Salem et Zygmund). Bien sûr dans le cas particulier où il existe une transformation du tore ergodique par rapport au produit de Riesz le théorème de Birkhoff donne plus rapidement la solution. Enfin, on montre que certaines séries convergent presque partout par rapport à un produit de Riesz ce qui donne quelques résultats sur la répartition modulo 1. Ces diverses propriétés ont des extensions au cas de plusieurs variables. Par la même méthode on peut obtenir une évaluation de la dimension de Hausdorff de certains boréliens portant une g-mesure (cette notion développée par

M. Keane généralise en un certain sens les produits de Riesz).

En dernier lieu j'ai étudié des mesures aléatoires que B. Mandelbrot a introduites et dont J.-P. Kahane a montré l'existence sous des hypothèses très générales. Il se trouve qu'en ce qui concerne la dimension de Hausdorff on peut obtenir des résultats très analogues à ceux que l'on a pour les produits de Riesz.

TABLE DES MATIERES.

C'est avec plaisir que j'exprime ici ma gratitude à Monsieur Kahane, maître patient et attentif, il m'a prodigué conseils et encouragements. Je remercie Monsieur Zygmund de s'être intéressé à mon travail et de me faire l'honneur de siéger dans le jury. Monsieur Nivat a bien voulu me donner à étudier un intéressant sujet de seconde thèse, je l'en remercie vivement. Je suis reconnaissant à Messieurs Demazure et Eymard d'avoir accepté de faire partie du jury. Je remercie aussi Y. Meyer avec qui j'ai eu quelques fructueuses discussions, c'est en particulier lui qui m'a suggéré un premier problème sur les produits de Riesz.

Je dois beaucoup à ceux qui sont ou ont été mes collègues au département de mathématiques d'Orsay et spécialement aux membres de l'équipe d'analyse harmonique, j'ai eu avec eux d'innombrables discussions, ils m'ont aidé à approfondir un certain nombre de questions, avec certains ce travail a débouché sur des publications communes. Qu'ils reçoivent tous ici mes sincères remerciements.

Mme Dumas a assuré avec beaucoup de gentillesse et de compétence la majeure partie de la frappe de mon travail, je lui en suis reconnaissant. Je remercie aussi Mesdames Bonnardel, Launay, Mazeau et Zielinski pour la part qu'elles ont prise à la réalisation matérielle de ce travail.

DERIVABILITE DE CERTAINES CONVOLUTIONS

Les fonctions radiales de $A(R^n)$ sont $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ fois différentiables en dehors de l'origine et ce sont les convolutions de deux fonctions de $L^2(R^n)$. Il est donc naturel d'étudier la dérivabilité des convolutions $F*G$ où F et G sont deux fonctions radiales, $F\in L^p(R^n)$, $G\in L^q(R^n)$, (où $p^{-1}+q^{-1}=1$). Si $F(x)=f(|x|)$ et $G(x)=g(|x|)$ on sait (1) que $F*G(x)=f\# g(|x|)$ où l'opération $\#$ est la suivante.

$$f\# g(z)=C_n z^{2-n}\iint_{x>0,y>0} xyf(x)g(y)(\Delta^+(x,y,z))^{\frac{n-3}{2}}\,dx\,dy \quad ,$$

où $\Delta^+(x,y,z)=\sup(0,((x+y)^2-z^2)(z^2-(x-y)^2))$.

Nous étudions les fonctions $h(z)=z^{n-2}f\# g(z)$ sans nous limiter au cas où n est entier. On a le résultat suivant.

<u>Théorème</u>. <u>Lorsque</u> $q\leq(n-1)/\nu$ <u>la fonction</u> h <u>est</u> ν <u>fois continûment dérivable sur</u> $]0,+\infty[$, <u>lorsque</u> $q<n/\nu$ <u>et</u> $n\geq 2\nu+1$ <u>elle est presque partout</u> ν <u>fois dérivable</u>.

I. NOTATIONS

Soient n et u deux nombres réels tels que $n>1$ et $u\geq 1$.

Si φ est une fonction mesurable de $[0,+\infty[$ dans $\mathbf{C}$, on pose :

$$N_{n,u}(\varphi)=\left(\int_0^{+\infty} t^{n-1}|\varphi(t)|^u\,dt\right)^{1/u}$$

$$M_{n,u}(\varphi)(z)=\sup_{x>0}\frac{1}{2x}\int_{(z-x)^+}^{z+x} t^{\frac{n-1}{u}}|\varphi(t)|\,dt \qquad (z>0)$$

$$M^{(2)}_{n,u}(\varphi)(z)=\sup_{x>0}\frac{1}{2x}\int_{(z-x)^+}^{z+x} |M_{n,u}(\varphi)(t)|^u\,dt$$

En vertu du théorème maximal de Hardy et Littlewood [(3), p.30-33] nous avons lorsque $u>1$:

$$\left(\int_0^{+\infty} |M_{n,u}(\varphi)\ (t)|^u\, dt \right)^{1/u} \leqslant C\, N_{n,u}(\varphi)$$

et

$$m\left(\left\{z>0\ ;\ M^{(2)}_{n,u}(\varphi)\ (z) > \lambda\right\}\right) \leqslant C\, \lambda^{-1} \left(N_{n,u}(\varphi)\right)^u .$$

Nous désignerons par L^u_n l'espace des fonctions mesurables, φ , telles que $N_{n,u}(\varphi) < \infty$ muni de $N_{n,u}$ comme norme.

Soient p et q deux exposants conjugués : $1 < p \leqslant 2 \leqslant q$. On se donne deux fonctions, f et g, $f \in L^p_n$, $g \in L^q_n$.

On pose $\Delta(x,y,z) = \left((x+y)^2 - z^2\right)\left(z^2 - (x-y)^2\right)$

$$D(z) = \left\{(x,y)\ ;\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ \Delta(x,y,z) \geqslant 0\right\} = \left\{(x,y)\ ;\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ |x-y| \leqslant z \leqslant x+y\right\}$$

$$h(z) = \iint_{D(z)} xy\ f(x)\ g(y) \left(\Delta(x,y,z)\right)^{\frac{n-3}{2}} dx\, dy$$

Soit $\Delta_1(x,y,t) = \Delta(x,y,\sqrt{t})$. On vérifie par récurrence que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \left(\Delta_1^{\frac{n-3}{2}}\right)(x,y,z^2) = \sum_{0\leqslant \ell \leqslant \frac{k}{2}} \alpha_{n,k,\ell}\ (x^2+y^2-z^2)^{k-2\ell} \left(\Delta(x,y,z)\right)^{\frac{n-3}{2} - k + \ell}$$

avec des coefficients $\alpha_{n,k,l}$ convenables.

On montrera que, sous certaines conditions,

$$h_k(z) = \iint_{D(z)} xy\ f(x)\ g(y) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \left(\Delta_1^{\frac{n-3}{2}}\right)(x,y,z^2)\, dx\, dy$$

existe presque partout et que l'on a :

$$h_{k-1}(z) = \int_0^z 2t\ h_k(t)\, dt .$$

Ce qui prouvera que h_{k-1} est presque partout dérivable.

On est donc conduit à étudier la convergence des intégrales :

$$\iint_{D(z)} xy\ f(x)\ g(y)\ (x^2+y^2-z^2)^{k-2\ell} \left(\Delta(x,y,z)\right)^{\frac{n-3}{2} - k + \ell} dx\, dy .$$

.../...

II. EXISTENCE DES INTEGRALES $k_{\alpha,\beta}(z) = \iint_{D(z)} xy\ f(x)\ g(y)\ (x^2+y^2-z^2)^{\alpha}\ \Delta^{\beta}(x,y,z)\ dx\ dy$

(α désigne un entier positif ou nul, β un réel).

2.1 Lemme

1°) Lorsque (x,y) appartient à $D(z)$ on a

$$|x^2+y^2-z^2| \leqslant 2xy \quad \text{et} \quad \Delta(x,y,z) \leqslant 4x^2z^2 .$$

2°) Pour tout nombre réel, u, strictement supérieur à -1, il existe un nombre, C_u, tel que :

$$\int_{|z-x|}^{z+x} y\ \Delta^{u}\ (x,y,z)\ dy \leqslant C_u\ (xz)^{2u+1}$$

La première inégalité du 1° est immédiate.

Si l'on pose $y = \left[t(x+z)^2 + (1-t)(x-z)^2\right]^{1/2}$ on a

$$\Delta(x,y,z) = 16\ x^2z^2\ t(1-t) \qquad \text{d'où la seconde inégalité ;}$$

en outre $y\ dy = 2xz\ dt$ d'où

$$\int_{|z-x|}^{z+x} y\ \Delta^{u}(x,y,z)\ dy = 2^{4u+1}\ (xz)^{2u+1} \int_0^1 t^u\ (1-t)^u\ dt .$$

Dans la suite C désignera une fonction de α, β, n, p seulement.

2.2 Proposition

On suppose que l'on a $\alpha+\beta \leqslant \frac{n-3}{2}$, $\beta > -1$.

1°) Si $\alpha + 2\beta - n + 3 + \frac{n-1}{q} > 0$ on a :

$$|k_{\alpha,\beta}(z)| \leqslant C\ z^{2\alpha+4\beta-n+4}\ N_{n,p}(f)\ N_{n,q}(g)$$

2°) Si $\alpha + 2\beta - n + 3 + \frac{n}{q} > 0$ on a

$$|k_{\alpha,\beta}(z)| \leqslant C\ z^{2\alpha+4\beta-n+4} \left[N_{n,p}(f) N_{n,q}(g) + N_{n,p}(f) \left[zM^{(2)}_{n,q}(g)(z)\right]^{1/q} + N_{n,q}(g) \left[zM^{(2)}_{n,p}(f)(z)\right]^{1/p}\right]$$

.../...

Considérons le recouvrement suivant de D(z)

$$D_1(z) = D(z) \cap \left\{(x,y)\ ;\ x \geqslant \frac{3}{2} z\right\}$$

$$D_2(z) = D(z) \cap \left\{(x,y)\ ;\ x \leqslant \frac{z}{2}\right\}$$

$$D_3(z) = D(z) \cap \left\{(x,y)\ ;\ y \leqslant \frac{z}{2}\right\}$$

$$D_4(z) = D(z) \cap \left\{(x,y)\ ;\ |x-z| \leqslant \frac{z}{2}\ ,\ y \geqslant \frac{z}{2}\right\}$$

Posons, lorsque j = 1, 2, 3, 4,

$$A_j(z) = \iint_{D_j(z)} (xy)^{\alpha+1}\, |f(x)\ g(y)|\ \Delta^{\beta}(x,y,z)\ dx\ dy$$

Tenant compte du lemme 2.1 nous obtenons

$$|k_{\alpha,\beta}(z)| \leqslant 2^{\alpha} \sum_{j=1}^{4} A_j(z)$$

Nous allons maintenant établir des majorations des $A_j(z)$.

$$\text{- a)}\quad A_1(z) = \int_{\frac{3z}{2}}^{+\infty} x^{\alpha+1}\, |f(x)| dx \int_{x-z}^{x+z} y^{\alpha+1}\, |g(y)|\ \Delta^{\beta}(x,y,z)\ dy$$

Considérons d'abord le cas où β est positif. On applique l'inégalité de Hölder :

$$\int_{x-z}^{x+z} y^{\alpha+1}\, |g(y)|\ \Delta^{\beta}(x,y,z)\ dy \leqslant$$

$$\left(\int_{x-z}^{x+z} y^{n-1}\, |g(y)|^{q}\ dy\right)^{1/q} \left(\int_{x-z}^{x+z} y^{(\alpha+1-\frac{n-1}{q})p}\ \Delta^{\beta p}(x,y,z)\ dy\right)^{1/p}$$

Lorsque x est supérieur à $\frac{3z}{2}$ on a

$$\sup_{y:|y-x|<z} \left(\frac{y}{x}\right)^{(\alpha+1-\frac{n-1}{q})p-1} < +\infty$$

d'où

$$\int_{x-z}^{x+z} y^{(\alpha+1-\frac{n-1}{q})p}\ \Delta^{\beta p}(x,y,z)\ dy \leqslant C\ x^{(\alpha+1-\frac{n-1}{q})p-1} \int_{x-z}^{x+z} y\ \Delta^{\beta p}(x,y,z)\ dy$$

.../...

Appliquant de nouveau le lemme 2.1 nous obtenons

$$\int_{x-z}^{x+z} y^{(\alpha+1-\frac{n-1}{q})p}\,\Delta^{\beta p}(x,y,z)\,dy \leqslant C\,z^{2\beta p+1}\,x^{(\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q})p}$$

et

$$A_1(z) \leqslant C\,z^{2\beta+\frac{1}{p}} \int_{\frac{3z}{2}}^{+\infty} x^{2\alpha+2\beta-2-\frac{n-1}{q}}\,|f(x)| \Big(\int_{x-z}^{x+z} y^{n-1}\,|g(y)|^q\,dy \Big)^{1/q}\,dx$$

On utilise l'inégalité de Hölder

$$A_1(z) \leqslant C\,z^{2\beta+\frac{1}{p}} \Big(\int_{\frac{3z}{2}}^{+\infty} x^{n-1}\,|f(x)|^p\,dx \Big)^{1/p}$$

$$\Big(\int_{\frac{3z}{2}}^{+\infty} x^{(2\alpha+2\beta-n+3)q} \Big(\int_{x-z}^{x+z} y^{n-1}\,|g(y)|^q\,dy \Big)\,dx \Big)^{1/q}$$

Or

$$\int_{\frac{3z}{2}}^{+\infty} x^{(2\alpha+2\beta-n+3)q} \Big(\int_{x-z}^{x+z} y^{n-1}\,|g(y)|^q\,dy \Big)\,dx =$$

$$\int_{\frac{z}{2}}^{+\infty} y^{n-1}\,|g(y)|^q \Big(\int_{\sup(\frac{3z}{2},\,y-z)}^{y+z} x^{(2\alpha+2\beta-n+3)q}\,dx \Big)\,dy$$

et, lorsque $2\alpha+2\beta-n+3 \leqslant 0$, ceci est inférieur à

$$C\,z^{(2\alpha+2\beta-n+3)q+1} \int_0^{+\infty} y^{n-1}\,|g(y)|^q\,dy$$

On obtient donc

$$A_1(z) \leqslant C\,z^{2\alpha+4\beta-n+4}\,N_{n,p}(f)\,N_{n,q}(g)$$

Soit maintenant $\beta < 0$.

$$\int_{x-z}^{x+z} y^{1+\alpha}\,|g(y)|\,\Delta^{\beta}(x,y,z)\,dy \leqslant C\,x^{\alpha-\frac{n-1}{q}} \int_{x-z}^{x+z} y^{\frac{n-1}{q}}\,|g(y)|\,y\,\Delta^{\beta}(x,y,z)\,dz$$

$$\leqslant C\, x^{\alpha-\frac{n-1}{q}}\left(M_{n,q}(g)(x+z)+M_{n,q}(g)(x-z)\right)\int_{x-z}^{x+z} y\,\Delta^{\beta}(x,y,z)\,dy$$

$$\leqslant C\, z^{2\beta+1}\, x^{2\beta+\alpha+1-\frac{n-1}{q}}\left(M_{n,q}(g)(x+z)+M_{n,q}(g)(x-z)\right)$$

Si, en outre, $\beta>-1$, alors

$$A_1(z)\leqslant C\, z^{2\beta+1}\int_{\frac{3z}{2}}^{+\infty} x^{2\alpha+2\beta+2-\frac{n-1}{q}}|f(x)|\left(M_{n,q}(g)(x+z)+M_{n,q}(g)(x-z)\right)dx$$

$$\leqslant C\, z^{2\beta+1}\, N_{n,p}(f)\left[\int_{\frac{3z}{2}}^{+\infty} x^{(2\alpha+2\beta-n+3)q}\left(M_{n,q}(g)(x+z)+M_{n,q}(g)(x-z)\right)^q dx\right]^{1/q}$$

et, si $2\alpha+2\beta-n+3\leqslant 0$, ceci est inférieur à

$$C\, z^{2\beta+1+2\alpha+2\beta-n+3}\, N_{n,p}(f)\left(\int_0^{+\infty}\left(M_{n,q}(g)(x)\right)^q dx\right)^{1/q}$$

d'où

$$A_1(z)\leqslant C\, z^{2\alpha+4\beta-n+4}\, N_{n,p}(f)\, N_{n,q}(g)$$

- b) $$A_2(z)=\int_0^{z/2} x^{\alpha+1}|f(x)|\left(\int_{z-x}^{z+x} y^{\alpha+1}|g(y)|\Delta^{\beta}(x,y,z)\,dy\right)dx$$

Etudions d'abord le cas où $\beta\geqslant 0$.

$$\int_{z-x}^{z+x} y^{\alpha+1}|g(y)|\Delta^{\beta}(x,y,z)\,dy\leqslant C\, z^{\alpha+1-\frac{n-1}{q}}\int_{z-x}^{z+x} y^{\frac{n-1}{q}}|g(y)|\,\Delta^{\beta}(x,y,z)\,dy$$

$$\leqslant C\, xz^{\alpha+1-\frac{n-1}{q}}\left(M_{n,q}(g)(z+x)+M_{n,q}(g)(z-x)\right)\sup_{y:\,|y-z|<x}\Delta^{\beta}(x,y,z)$$

$$\leqslant C\, z^{\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q}}\, x^{2\beta+1}\left(M_{n,q}(g)(z+x)+M_{n,q}(g)(z-x)\right)$$

d'où

$$A_2(z)\leqslant C\, z^{\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q}}\int_0^{z/2} x^{\alpha+2\beta+2}|f(x)|\left(M_{n,q}(g)(z+x)+M_{n,q}(g)(z-x)\right)dx$$

.../...

$$\leqslant C\, z^{\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q}}\, N_{n,p}(f)\Big(\int_0^{z/2} x^{(\alpha+2\beta+2-\frac{n-1}{p})q}\big(M_{n,q}(g)(x+z) +$$

$$M_{n,q}(g)(z-x)\big)^q\, dx\Big)^{1/q}$$

Ce qui donne, si $\alpha+2\beta+2-\frac{n-1}{p}\geqslant 0$ (c'est à dire si $\alpha+2\beta-n+3+\frac{n-1}{q}\geqslant 0$),

$$A_2(z) \leqslant C\, z^{2\alpha+4\beta+4-n}\, N_{n,p}(f)\, N_{n,q}(g)\,.$$

Lorsque l'on a $\alpha+2\beta-n+3+\frac{n-1}{q}<0$ et $\alpha+2\beta-n+3+\frac{n}{q}>0$, on opère ainsi

$$\int_0^{z/2} x^{(\alpha+2\beta+2-\frac{n-1}{p})q}\, |M_{n,q}(g)(x+z)|^q\, dx \leqslant M^{(2)}_{n,q}(g)(z)\int_0^{z/2} x^{(\alpha+2\beta+2-\frac{n-1}{p})q}\, dx\,.$$

Alors

$$A_2(z) \leqslant C\, z^{2\alpha+4\beta+4-n+\frac{1}{q}}\, N_{n,p}(f)\left(M^{(2)}_{n,q}(g)(z)\right)^{1/q}.$$

Etudions maintenant le cas où β est strictement compris entre -1 et 0.

$$\int_{z-x}^{z+x} y^{\alpha+1}\, |g(y)|\, \Delta^{\beta}(x,y,z)\, dy \leqslant C\, z^{\alpha-\frac{n-1}{q}}\int_{z-x}^{z+x} y^{\frac{n-1}{q}}\, |g(y)|\, y\, \Delta^{\beta}(x,y,z)\, dy$$

$$\leqslant C\, z^{\alpha-\frac{n-1}{q}}\big(M_{n,q}(g)(z+x) + M_{n,q}(g)(z-x)\big)\int_{z-x}^{z+x} y\, \Delta^{\beta}(x,y,z)\, dy$$

$$\leqslant C\, z^{\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q}}\, x^{2\beta+1}\big(M_{n,q}(g)(z+x) + M_{n,q}(g)(z-x)\big)$$

d'où

$$A_2(z) \leqslant C\, z^{\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q}}\int_0^{z/2} x^{\alpha+2\beta+2}\, |f(x)|\big(M_{n,q}(g)(z+x) + M_{n,q}(g)(z-x)\big)\, dx$$

$$\leqslant C\, z^{\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q}}\, N_{n,p}(f)\Big(\int_0^{z/2} x^{(\alpha+2\beta+2-\frac{n-1}{p})q}\big(M_{n,q}(g)(z+x) +$$

$$M_{n,q}(g)(z-x)\big)^q\, dx\Big)^{1/q}.$$

.../...

Cela donne, lorsque $\alpha+2\beta+3-n+\frac{n-1}{q}>0$,

$$A_2(z) \leqslant C\, z^{2\alpha+4\beta+4-n}\, N_{n,p}(f)\, N_{n,q}(g)$$

et lorsque $-\frac{1}{q}<\alpha+2\beta+3-n+\frac{n-1}{q}<0$,

$$A_2(z) \leqslant C\, z^{\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q}}\, N_{n,p}(f)\Big(M^{(2)}_{n,q}(z)\Big)^{1/q}\Big(\int_0^{z/2} x^{(\alpha+2\beta+2-\frac{n-1}{p})q}\, dx\Big)^{1/q}$$

d'où finalement

$$A_2(z) \leqslant C\, z^{2\alpha+4\beta+4-n+\frac{1}{q}}\, N_{n,p}(f)\Big(M^{(2)}_{n,q}(g)\Big)^{1/q}.$$

- c) La majoration de A_3 est analogue à celle de A_2.

- d) $A_4(z) = \int_{z/2}^{3z/2} x^{\alpha+1}\, |f(x)| \Big(\int_{z/2}^{z+x} y^{\alpha+1}\, |g(y)|\, \Delta^{\beta}(x,y,z)\, dy\Big)\, dx$

Considérons en premier le cas où β est positif :

$$\int_{z/2}^{z+x} y^{\alpha+1}\, |g(y)|\, \Delta^{\beta}(x,y,z)\, dy \leqslant N_{n,q}(g)\Big(\int_{z/2}^{z+x} y^{(\alpha+1-\frac{n-1}{q})p}\, \Delta^{\beta p}(x,y,z)\, dy\Big)^{1/p}$$

$$\leqslant C\, z^{\alpha+1-\frac{n-1}{q}-\frac{1}{p}}\, N_{n,q}(g)\Big(\int_{z/2}^{z+x} y\, \Delta^{\beta p}(x,y,z)\, dy\Big)^{1/p}$$

$$\leqslant C\, z^{\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q}}\, x^{2\beta+\frac{1}{p}}\, N_{n,q}(g)$$

d'où

$$A_4(z) \leqslant C\, z^{\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q}}\, N_{n,q}(g) \int_{z/2}^{3z/2} x^{\alpha+2\beta+1+\frac{1}{p}}\, |f(x)|\, dx$$

$$\leqslant C\, z^{\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q}}\, N_{n,q}(g)\, N_{n,p}(f)\Big(\int_{z/2}^{3z/2} x^{(\alpha+2\beta+1+\frac{1}{p}-\frac{n-1}{p})q}\, dx\Big)^{1/q}$$

$$\leqslant C\, z^{2\alpha+4\beta+4-n}\, N_{n,p}(f)\, N_{n,q}(g)\ .$$

Soit maintenant $-1<\beta<0$

$$\int_{z/2}^{z+x} y^{\alpha+1}\,|g(y)|\,\Delta^{\beta}(x,y,z)\,dy \leqslant C\, z^{\alpha-\frac{n-1}{q}}\,(xz)^{2\beta+1}\Big(M_{n,q}(g)(z+x) + M_{n,q}(g)(|z-x|)\Big)$$

$$A_4(z) \leqslant C\, z^{\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q}} \int_{z/2}^{3z/2} x^{\alpha+2\beta+2}\,|f(x)|\Big(M_{n,q}(g)(z+x) + M_{n,q}(g)(|z-x|)\Big)\,dx$$

$$\leqslant C\, z^{\alpha+2\beta+1-\frac{n-1}{q}}\, N_{n,p}(f)\Big(\int_{z/2}^{3z/2} x^{(\alpha+2\beta+2-\frac{n-1}{p})q}\Big(M_{n,q}(g)(z+x) + M_{n,q}(g)(|z-x|)\Big)^{q}\,dx\Big)^{1/q}$$

$$\leqslant C\, z^{2\alpha+4\beta+4-n}\, N_{n,p}(f)\, N_{n,q}(g).$$

Cela achève la preuve de la proposition 2.2.

2.3. Corollaire

Si $\beta>-1$, $\alpha+\beta\leqslant\frac{n-3}{2}$, $\alpha+2\beta-n+3+\frac{n-1}{q}\geqslant 0$, $k_{\alpha,\beta}$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.

En effet, si f et g sont des fonctions caractéristiques de compacts de $]0,+\infty[$ il en est bien ainsi, car alors $k_{\alpha,\beta}$ est une combinaison linéaire finie de convolées de Hankel de fonctions de L^2 $(]0,+\infty[,\ t^{m-1}\,dt)$ pour des m convenables. Le résultat vient de ce que les fonctions en escalier sont denses dans les espaces L^p_n et des majorations précédentes.

2.4. Corollaire

Si $\beta>-1$, $\alpha+\beta\leqslant\frac{n-3}{2}$, $\alpha+2\beta-n+3+\frac{n}{q}>0$, la fonction $tk_{\alpha,\beta}(t)$ est intégrable sur tout intervalle $[0,z]$.

Il suffit d'examiner l'intégrabilité de chacun des termes de la majoration obtenue.

$$\int_0^z t^{2\alpha+4\beta-n+5}\,dt<+\infty \quad \text{si } 2\alpha+4\beta-n+6 \text{ est strictement positif,}$$

.../...

ce qui a lieu puisque $0 < \alpha+2\beta-n+3+\frac{n}{q} \leqslant \alpha+2\beta-n+3+\frac{n}{2}$.

Soit q_1 un nombre strictement inférieur à q, nombre que l'on choisira ultérieurement ; soit p_1 l'exposant conjugué de q_1 . On sait que

$$\int_0^z \left(M^{(2)}_{n,q}(g)(t)\right)^{q_1/q} dt < +\infty \quad \text{car} \quad M^{(2)}_{n,q}(g) \text{ est faiblement dans } L^1.$$

On a

$$\int_0^z t^{2\alpha+4\beta-n+5+\frac{1}{q}} \left(M^{(2)}_{n,q}(g)(t)\right)^{1/q} dt \leqslant \left(\int_0^z |M^{(2)}_{n,q}(g)(t)|^{q_1/q} dt\right)^{1/q_1}$$

$$\left(\int_0^z t^{(2\alpha+4\beta-n+5+\frac{1}{q})p_1} dt\right)^{1/p_1}.$$

Ceci est fini si l'on a choisi p_1 de façon que $2\alpha+4\beta-n+5+\frac{1}{q}+\frac{1}{p_1} > 0$, ce qui est possible car $2\alpha + 4\beta - n + 5 + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} > 0$.

On opère de même pour $t^{2\alpha+4\beta-n+5+\frac{1}{p}} \left(M^{(2)}_{n,p}(f)(t)\right)^{1/p}$.

III. DERIVABILITE DE $k_{\alpha,\beta}$

Soit $K_{\alpha,\beta}(x,y,z) = (x^2+y^2-z^2)^{\alpha}\,\Delta^{\beta}(x,y,z)$

Si $(x,y) \in D(z)$ on a

$$\frac{\partial K_{\alpha,\beta}}{\partial z}(x,y,z) = 2z\left(2\beta K_{\alpha+1,\beta-1}(x,y,z) - \alpha K_{\alpha-1,\beta}(x,y,z)\right)$$

3.1. Proposition

On suppose $\beta > 0$, $\alpha+\beta \leqslant \frac{n-3}{2}$, $\alpha + 2\beta - n + 2 + \frac{n}{q} > 0$.

La fonction $k_{\alpha,\beta}$ *est presque partout dérivable et sa dérivée est*

$$2z\left(2\beta k_{\alpha+1,\beta-1}(z) - \alpha k_{\alpha-1,\beta}(z)\right).$$

De plus, si $\alpha + 2\beta - n + 2 + \frac{n-1}{q} \geqslant 0$, $k_{\alpha,\beta}$ *est continûment dérivable sur* $]0, +\infty[$.

.../...

Il résulte de 2.2., 2.4. et des hypothèses que la fonction

$\ell_{\alpha,\beta}(t) = 2t\left(2\beta\, k_{\alpha+1,\beta-1}(t) - \alpha k_{\alpha-1,\beta}(t)\right)$ est intégrable sur $[0,z]$.

$$\int_0^z \ell_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \int_0^z dt \iint_{D(t)} xy\, f(x)g(y)\,\frac{\partial K_{\alpha,\beta}}{\partial z}(x,y,t)\,dx\,dy$$

On peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\int_0^z \ell_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \iint_{\substack{x\geqslant 0,\,y\geqslant 0\\ |x-y|\leqslant z}} xy\, f(x)g(y)\left(\int_{|x-y|}^{\inf(z,x+y)} \frac{\partial K_{\alpha,\beta}}{\partial z}(x,y,t)\,dt\right)dx\,dy$$

Puisque β est strictement positif on a :

$$K_{\alpha,\beta}(x,y,\ x+y) = K_{\alpha,\beta}(x,y,|x-y|) = 0$$

donc

$$\int_0^z \ell_{\alpha,\beta}(t)\,dt = \iint_{D(z)} xy\, f(x)g(y)\, K_{\alpha,\beta}(x,y,z)\,dx\,dy = k_{\alpha,\beta}(z)$$

et la proposition résulte du théorème de Lebesgue sur la dérivation des intégrales.

3.2. Proposition

Si $\alpha \leqslant \frac{n-3}{2}$ et $\alpha + 2 - n + \frac{n}{q} > 0$

les intégrales

$$m_\alpha^{(1)}(z) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1}\,(x+z)^{\alpha+1}\, f(x)g(x+z)\,dx$$

$$m_\alpha^{(2)}(z) = \int_0^{+\infty} (y+z)^{\alpha+1}\, y^{\alpha+1}\, f(y+z)g(y)\,dy$$

$$m_\alpha^{(3)}(z) = \int_0^{z} x^{\alpha+1}\,(z-x)^{\alpha+1}\, f(x)g(z-x)\,dx$$

existent pour presque tout z, la fonction $k_{\alpha,0}(z)$ est presque partout dérivable et sa dérivée est

$$-\,2\alpha z\, k_{\alpha-1,0}(z) + 2^\alpha\left(m_\alpha^{(1)}(z) + m_\alpha^{(2)}(z) - (-1)^\alpha m_\alpha^{(3)}(z)\right).$$

Preuve.

Sous ces hypothèses la fonction $\ell_{\alpha,0}(t) = -\,2\alpha t\, k_{\alpha-1,0}(t)$ est intégrable sur $[0,z]$ et on a

.../...

$$\int_0^z \ell_{\alpha,0}(t)\,dt = \int_0^z dt \iint_{D(t)} xy\, f(x)g(y)\, \frac{\partial K_{\alpha,0}}{\partial z}(x,y,t)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\substack{x\geq 0,\ y\geq 0 \\ |y-x|\leq z}} xy\, f(x)g(y)\left(\int_{|x-y|}^{\inf(z,x+y)} \frac{\partial K_{\alpha,0}}{\partial z}(x,y,t)\,dt\right) dx\,dy$$

$$= \iint_{D(z)} xy\, f(x)g(y)\, K_{\alpha,0}(x,y,z)\,dx\,dy - \iint_{D(z)} xy\, f(x)g(y)\, K_{\alpha,0}(x,y,|x-y|)\,dx\,dy$$

$$+ \iint_{\substack{x\geq 0,y\geq 0 \\ x+y\leq z}} xy\, f(x)g(y)\left(K_{\alpha,0}(x,y,x+y) - K_{\alpha,0}(x,y,|x-y|)\right) dx\,dy\,.$$

Or

$$K_{\alpha,0}(x,y,|x-y|) = (2xy)^{\alpha}\quad,\quad K_{\alpha,0}(x,y,x+y) = (-2xy)^{\alpha}\,.$$

On a donc

$$k_{\alpha,0}(z) = \int_0^z \ell_{\alpha,0}(t)\,dt + 2^{\alpha}\left[\iint_{D(z)} (xy)^{1+\alpha} f(x)g(y)\,dx\,dy + \left(1-(-1)^{\alpha}\right) \iint_{\substack{x\geq 0,y\geq 0 \\ x+y\leq z}} (xy)^{1+\alpha} f(x)g(y)\,dx\,dy\right].$$

L'application du théorème de Fubini est légitimée par le lemme suivant.

3.3. <u>Lemme</u>

<u>Si</u> $\alpha - n + 2 + \frac{n}{q} > 0$ <u>et</u> $\alpha \leq \frac{n-3}{2}$ <u>on a</u>

$$\iint_{\substack{x\geq 0,y\geq 0 \\ |x-y|\leq z}} (xy)^{1+\alpha}|f(x)||g(y)|\,dx\,dy \leq C\, z^{2\alpha-n+4}\, N_{n,p}(f)\, N_{n,q}(g)\,.$$

Preuve

$$\int_0^{2z} x^{\alpha+1}|f(x)|\,dx \int_0^{z+x} y^{\alpha+1}|g(y)|\,dy \leq N_{n,p}(f)\, N_{n,q}(g)\left(\int_0^{2z} x^{(\alpha+1-\frac{n-1}{p})q} dx\right)^{1/q} \left(\int_0^{3z} y^{(\alpha+1-\frac{n-1}{q})p}\,dy\right)^{1/p}$$

.../...

$$\leqslant C\, z^{2\alpha-n+4}\, N_{n,p}(f)\, N_{n,q}(g).$$

$$\int_{2z}^{+\infty} x^{\alpha+1}\,|f(x)|\,dx \int_{x-z}^{x+z} y^{\alpha+1}\,|g(y)|\,dy \leqslant \int_{2z}^{+\infty} x^{\alpha+1}\,|f(x)|\,dx \left(\int_{x-z}^{x+z} y^{n-1}\,|g(y)|^{q}\,dy\right)^{1/q}$$

$$\left(\int_{x-z}^{x+z} y^{(\alpha+1-\frac{n-1}{q})p}\,dy\right)^{1/p}$$

$$\leqslant C\, z^{\frac{1}{p}} \int_{z}^{+\infty} x^{2\alpha+2-\frac{n-1}{q}}\,|f(x)|\,dx \left(\int_{x-z}^{x+z} y^{n-1}\,|g(y)|^{q}\,dy\right)^{1/q}$$

$$\leqslant C\, z^{\frac{1}{p}}\, N_{n,p}(f)\left(\int_{z}^{+\infty} x^{(2\alpha+3-n)q}\left(\int_{x-z}^{x+z} y^{n-1}\,|g(y)|^{q}\,dy\right)dx\right)^{1/q}$$

$$\leqslant C\, z^{\frac{1}{p}}\, N_{n,p}(f)\left(\int_{0}^{+\infty} y^{n-1}\,|g(y)|^{q}\left(\int_{\sup(z,y-z)}^{y+z} x^{(2\alpha+3-n)q}\,dx\right)dy\right)^{1/q}$$

$$\leqslant C\, z^{2\alpha+4-n}\, N_{n,p}(f)\, N_{n,q}(g)$$

Ce qui achève la démonstration du lemme.

Reprenons la démonstration de la proposition 3.2.

On a

$$\iint_{\substack{x\geqslant 0\\ 0\leqslant y-x\leqslant z}} (xy)^{\alpha+1}\, f(x)g(y)\,dxdy = \iint_{\substack{u\geqslant 0\\ 0\leqslant v\leqslant z}} u^{\alpha+1}(u+v)^{\alpha+1}\, f(u)\, g(u+v)\,dv$$

$$= \int_{0}^{z} dv \int_{0}^{+\infty} u^{\alpha+1}(u+v)^{\alpha+1}\, f(u)\, g(u+v)\,dudv$$

de même

$$\iint_{\substack{y\geqslant 0\\ 0\leqslant x-y\leqslant z}} (xy)^{\alpha+1} f(x)\, g(y)\,dxdy = \int_{0}^{z} du \int_{0}^{+\infty} (u+v)^{\alpha+1} v^{\alpha+1}\, f(u+v)\, g(v)\,dudv$$

et

$$\iint_{\substack{x\geqslant 0,\, y\geqslant 0\\ x+y\leqslant z}} (xy)^{\alpha+1} f(x)\, g(y)\,dxdy = \int_{0}^{z} dv \int_{0}^{v} u^{\alpha+1}(v-u)^{\alpha+1} f(u)\, g(v-u)\,du$$

.../...

Et l'on conclut en utilisant le théorème de Fubini et le théorème de Lebesgue relatif à la dérivation des intégrales.

IV. DERIVABILITE DE h

4.1. Théorème

Lorsque $q \leqslant \frac{n-1}{\nu}$, la fonction h est ν fois continûment dérivable sur $]0,+\infty[$, lorsque $q < \frac{n}{\nu}$ et $n \geqslant 2\nu + 1$ elle est presque partout ν fois dérivable.

Le fait que h soit ν fois dérivable équivaut à la dérivabilité de $h_{\nu-1}$.

On a

$$h_{\nu-1} = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant \frac{\nu-1}{2}} \alpha_{n,\nu-1,\ell} \; k_{\nu-1-2\ell,\frac{n-3}{2}-\nu+1+\ell}$$

Le théorème résulte des propositions 3.1. et 3.2.

4.2. Les estimations qui précèdent montrent que ce résultat est encore vrai pour les fonctions $\sum_{j \geqslant 0} f_j \# g_j$ lorsque $\sum_{j \geqslant 0} \| f_j \|_{n,p} \| g_j \|_{n,q}$ est fini.

(1) M. Gatesoupe Thèse, Orsay 1970.

(2) A. Zymund Trigonometric series, Cambridge 1959.

1. MULTIPLICATEURS SUR CERTAINS GROUPES TOTALEMENT DISCONTINUS

1.1. G et Γ désignent deux groupes abéliens localement compacts duaux ; $\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier de $L^2(G)$ dans $L^2(\Gamma)$.

Si E est un ensemble mesurable de Γ et si $f \in L^2(G)$, on pose $f_E = \mathcal{F}^{-1}(\chi_E . \mathcal{F}f)$.

Si E a une mesure finie, on pose $K_E = \mathcal{F}^{-1}(\chi_E)$, c'est une fonction continue.

1.2. Une classe de groupes totalement discontinus

A est un intervalle de $\mathbb{Z}$ contenant 0 ; $A' = A \cap (A - 1)$.

G est un groupe abélien localement compact muni d'une suite strictement décroissante $(G_n)_{n \in A}$ de sous groupes ouverts compacts telle que

1° $\bigcup_{n \in A} G_n = G$, $\bigcap_{n \in A} G_n = \{0\}$

2° $k(G) = \sup_{n \in A'} (G_{n+1} : G_n) < \infty$.

G est totalement discontinu. On choisit sur G la mesure de Haar telle que $m(G_0) = 1$; on pose, pour $n \in A$, $i_n = \left(m(G_n)\right)^{-1}$ et pour $n \in A'$, $k_n = (G_{n+1} : G_n)$ de sorte que l'on a $i_{n+1} = k_n i_n$.

Γ est le dual de G , Γ_n l'orthogonal de G_n . Les sous groupes Γ_n sont ouverts et compacts, l'indice de Γ_n dans Γ_{n+1} est k_n.

On choisit sur Γ la mesure de Haar telle que $m(\Gamma_0) = 1$, alors $m(\Gamma_n) = i_n$.

Si $x \in G$ et si $x \neq 0$ $x \in G_n \setminus G_{n+1}$ pour un $n \in A'$, on pose alors $|x| = i_n^{-1}$; on pose $|0| = 0$. La fonction $(x,y) \longmapsto |x-y|$ est une distance ultramétrique sur G définissant sa topologie.

On définit de même une distance sur Γ .

.../...

1.3. Intégrales singulières

$\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont deux espaces de Hilbert séparables ; $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ désigne l'espace de Banach des applications linéaires continues de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$.

Une application $K : G \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est dite mesurable si, pour tout $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, l'application $x \longmapsto \left(K(x)h_1, h_2\right)$ est mesurable ; la convolution $K * f$, où f est une fonction mesurable de G dans $\mathcal{H}_1$, est definie lorsque cela est possible au sens faible. On a le théorème suivant :

1.4. Théorème

Soit K une application mesurable de G dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ telle que $K * f$ soit défini pour un ensemble de fonctions, $\mathcal{S}$, dense dans tous les espaces $L^p(G, \mathcal{H}_1)$, $1 \leqslant p < \infty$.

On suppose en outre que

1° Pour tout $f \in \mathcal{S}$, $\|K * f\|_{L^2(G, \mathcal{H}_2)} \leqslant A_2 \|f\|_{L^2(G, \mathcal{H}_1)}$,

2° $$\sup_{n \in A} \sup_{y \in G_n} \int_{G_n^C} \|K(x-y) - K(x)\|_{\mathcal{B}} \, dx = A_1 < \infty .$$

Alors, pour tout $p \in]1, \infty[$, il existe une constante $A_p > 0$, telle que, pour tout $f \in \mathcal{S}$, $\|K * f\|_{L^p(G, \mathcal{H}_2)} \leqslant A_p \|f\|_{L^p(G, \mathcal{H}_1)}$, A_p ne dépend que de p, A_2, A_1 et $k(G)$.

De plus si p et p' sont conjugués $A_p = A_{p'}$, et $A_p = \mathcal{O}\left((p-1)^{-1}\right)$ lorsque p tend vers 1.

Ce théorème est la version pour les groupes totalement discontinus d'un théorème de Calderon et Zygmund (2), sa démonstration se trouve dans l'article

.../...

de Rivière (10).

Dans la suite, A_p désignera une constante telle que $A_p = O(p^2(p-1)^{-1})$ quand p tend vers 1 ou l'infini.

1.5. Lemme

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, μ étant une mesure positive. Soit (P_n) $n \geq 0$ une famille de projecteurs de $L^2(\mu)$ deux à deux orthogonaux ; soit H l'adhérence dans $L^2(\mu)$ de la somme de leurs images.

On suppose que, pour tout $p \in]1, \infty[$, il existe $C_p > 0$ tel que pour tout $f \in L^2(\mu) \cap L^p(\mu)$ on ait

$$\left\| \left(\sum_{n \geq 0} |P_n f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mu)} \leq C_p \| f \|_{L^p(\mu)} .$$

Alors, pour tout $p \in]1, \infty[$, pour tout $f \in L^p(\mu) \cap H$, on a

$$\| f \|_{L^p(\mu)} \leq C_{p'} \left\| \left(\sum_{n \geq 0} |P_n f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mu)} \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 .$$

Soit en effet P l'application de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\mu, \ell^2)$ définie par $P f = (P_n f)_{n \geq 0}$; il résulte de l'orthogonalité des projecteurs P_n que la norme de P est 1.

Un calcul facile montre que si $g = (g_n)_{n \geq 0} \in L^2(\mu, \ell^2)$ on a $P^* g = \sum_{n \geq 0} P_n g_n$, cette dernière série convergeant dans $L^2(\mu)$.

L'hypothèse faite signifie que P se prolonge en une application linéaire continue de $L^p(\mu)$ dans $L^p(\mu, \ell^2)$ de norme inférieure à A_p. Par conséquent si $g \in L^2(\mu, \ell^2) \cap L^p(\mu, \ell^2)$ on a $\| P^* g \|_{L^p(\mu)} \leq A_{p'} \| g \|_{L^p(\mu, \ell^2)}$.

.../...

Si $f \in H \cap L^p(\mu)$ on a $f = \sum_{n \geqslant 0} P_n f$ dans $L^2(\mu)$.

Prenons $g = P f$ alors $P^* g = \sum_{n \geqslant 0} P_n f = f$ d'où le résultat.

1.6. Définition

$\mathcal{E}_0(\Gamma)$ est l'ensemble des parties E de Γ telles que

$$E = \bigcup_{m \in A'} \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant \lambda(m)} C_{m,j}$$

où

1° $0 \leqslant \lambda(m) \leqslant k_m$ et $\inf \{n ;\ \text{pour tout } m \geqslant n,\ \lambda(m) = 0\} < \infty$

2° $C_{m,j}$ est une classe de Γ_m dans Γ_{m+1}

3° Les classes $C_{m,j}$ figurant effectivement dans la réunion sont deux à deux disjointes.

Ces ensembles sont des ouverts relativement compacts, leur frontière a au plus un élément. La décomposition précédente d'un tel ensemble peut n'être pas unique lorsque $\inf A = -\infty$. Il est commode d'écrire

$$C_{m,j} = \xi_{m,j} + \Gamma_m \ , \qquad \xi_{m,j} \in \Gamma_{m+1} \ .$$

1.7. On a $K_E = \sum_{m \in A'} \sum_{1 \leqslant j \leqslant \lambda(m)} i_m\ \xi_{m,j}\ \chi_{G_m}$.

1.8. Lemme

Si $E \in \mathcal{E}_0(\Gamma)$ et $n \in A$ les relations $y \in G_n$ et $x \notin G_n$ entraînent $K_E(x-y) - K_E(x) = 0$.

En effet chacun des termes de la décomposition 1.7. a cette propriété.

.../...

1.9. Lemme

Soit $(E_n)_{n \geqslant 0}$ une suite (éventuellement finie) d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{E}_0(\Gamma)$. Alors, pour tout $x \neq 0$ de G, $\sum_{n \geqslant 0} |K_{E_n}(x)|^2 < \infty$.

Si G est discret on a aussi $\sum_{n \geqslant 0} |K_{E_n}(0)|^2 < \infty$.

Soit en effet $E_n = \bigcup_{m \in A'} \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant \lambda_n(m)} (\xi_{n,m,j} + \Gamma_m)$.

Les E_n étant deux à deux disjoints on a nécessairement $\sum_{n \geqslant 0} \lambda_n(m) \leqslant k_m$

pour tout $m \in A'$. Soit x_0 non nul dans G : $x_0 \in G_{m_0} \setminus G_{m_0+1}$ pour un $m_0 \in A'$.

$$K_{E_n}(x_0) = \sum_{\substack{m \in A' \\ m \leqslant m_0}} \sum_{1 \leqslant j \leqslant \lambda_n(m)} i_m \, \xi_{n,m,j}(x_0) ,$$

d'où

$$|K_{E_n}(x_0)|^2 \leqslant \sum_{\substack{m_1 \in A' \\ m_1 \leqslant m_0}} \sum_{\substack{m_2 \in A' \\ m_2 \leqslant m_0}} i_{m_1} i_{m_2} \lambda_n(m_1) \lambda_n(m_2)$$

et

$$\sum_{n \geqslant 0} |K_{E_n}(x_0)|^2 \leqslant \sum_{m_1} \sum_{m_2} i_{m_1} i_{m_2} \sum_{n \geqslant 0} \lambda_n(m_1) \lambda_n(m_2)$$

$$\leqslant \sum_{m_1} \sum_{m_2} i_{m_1} i_{m_2} k_{m_1} k_{m_2}$$

$$\leqslant \Big(\sum_{\substack{m \in A' \\ m \leqslant m_0}} i_{m+1} \Big)^2 \leqslant 4 \, i^2_{m_0+1} .$$

Si G est discret Γ est compact et $\sum_{n \geqslant 0} m(E_n) \leqslant m(\Gamma)$, donc

.../...

$$\sum_{n\geq 0} |K_{E_n}(0)| \leqslant m(\Gamma) \quad , \text{ par suite } \quad \sum_{n\geq 0} |K_{E_n}(0)|^2 \leqslant \left(m(\Gamma)\right)^2 .$$

1.10. Proposition

Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{E}_0(\Gamma)$. On a, pour tout $p\in]1,\infty[$, et pour tout $f\in L^2(G)$,

$$\left\| \left(\sum_{n\geq 0} |f_{E_n}|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^p(G)} \leqslant A_p \|f\|_{L^p(G)} .$$

D'après le lemme précédent, pour presque tout x dans G, $\left(K_{E_n}(x)\right)_{n\geq 0}$ appartient à ℓ^2. Prenons $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_2 = \ell^2$, $K(x) = \left(K_{E_n}(x)\right)$ définit une application mesurable de G dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$.

Si $f\in L^2(G)$, $K * f = (f_{E_n})_{n\geq 0}$ et l'on a

$$\|K*f\|^2_{L^2(G,\ell^2)} = \sum_{n\geq 0} \|f_{E_n}\|^2_{L^2(G)} = \sum_{n\geq 0} \int_{E_n} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant \|\hat{f}\|^2_{L^2(\Gamma)} = \|f\|^2_{L^2(G)}$$

D'autre part $y\in G_n$ et $x\notin G_n$ entraîne $K(x-y) - K(x) = 0$ et l'on conclut en appliquant le théorème 1.4.

1.11. Corollaire

Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{E}_0(\Gamma)$ telle que $m(\Gamma\setminus\bigcup_{n\geq 0} E_n) = 0$.

Alors, pour tout $p\in]1,\infty[$, pour tout $f\in L^2(G)$, on a

$$A_p^{-1}\|f\|_{L^p(G)} \leqslant \left\| \left(\sum_{n\geq 0} |f_{E_n}|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^p(G)} \leqslant A_p \|f\|_{L^p(G)} .$$

.../...

Cela résulte de 1.5 et 1.10 ; en effet les projecteurs $f \to f_{E_n}$ de $L^2(G)$ sont mutuellement orthogonaux et la somme de leurs images engendre $L^2(G)$.

1.12. Définition

$\mathcal{E}(\Gamma)$ désigne l'ensemble des translatés des éléments de $\mathcal{E}_0(\Gamma)$.

Les éléments E de $\mathcal{E}(\Gamma)$ sont ceux qui se décomposent ainsi

$$E = \bigcup_{m \in A'} \; \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant \lambda(m)} C_{m,j}$$

où 1° $0 \leqslant \lambda(m) \leqslant k_m$ et $\inf \{n \;;\; \text{pour tout } m \geqslant n \;,\; \lambda(m) = 0\} < \infty$

2° $C_{m,j}$ est une classe modulo Γ_m et, pour tout $m_0 \in A'$,

$$\bigcup_{\substack{m \in A' \\ m \leqslant m_0}} \; \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant \lambda(m)} C_{m,j} \quad \text{est contenu dans une classe modulo } \Gamma_{m_0+1} \;.$$

3° les classes $C_{m,j}$ qui figurent effectivement dans la décomposition sont deux à deux disjointes.

1.13. Lemme

Soit $E \in \mathcal{E}(\Gamma)$.

Si $x \in G_n \setminus G_{n+1}$ $|K_E(x)| \leqslant 2i_{n+1}$, si G est discret $|K_E(0)| \leqslant m(\Gamma)$.

Il s'agit d'un cas particulier du lemme 1.9.

1.14. Théorème

Pour tout $p \in]1, \infty[$, pour toute suite $(E_n, f_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathcal{E}(\Gamma) \times L^2(G)$ on a

$$\Big\| \Big(\sum_{n \geqslant 0} |f_n * K_{E_n}|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(G)} \leqslant A_p \Big\| \Big(\sum_{n \geqslant 0} |f_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(G)} .$$

On a $E_n = E'_n + \xi_n$, $E'_n \in \mathcal{E}_0(\Gamma)$. Le lemme 1.13. assure que pour presque tout x de G il y a un seul opérateur continu, $K(x)$, de ℓ^2 tel que $K(x)(e_n) = K_{E'_n}(x)\, e_n$ où $(e_n)_{n \geqslant 0}$ désigne la base orthonormale canonique de ℓ^2.

L'application $x \to K(x)$ est manifestement mesurable et, d'après le lemme 1.8., si $y \in G_m$ et $x \notin G_m$ on a $K(x-y) - K(x) = 0$.

D'autre part, si $g = (g_n)_{n \geqslant 0} \in L^2(G, \ell^2)$ on a $K * g(x) = \big(K_{E'_n} * g_n(x)\big)_{n \geqslant 0}$

et aussi $\|K*g\|^2_{L^2(G,\, \ell^2)} = \sum_{n \geqslant 0} \|K_{E'_n} * g_n\|^2_{L^2(G)} \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \|g_n\|^2_{L^2(G)} = \|g\|^2_{L^2(G, \ell^2)}$

On peut donc appliquer le théorème 1.4.

$$\Big\| \Big(\sum_{n \geqslant 0} |K_{E'_n} * g_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(G)} \leqslant A_p \Big\| \Big(\sum_{n \geqslant 0} |g_n|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(G)} .$$

Et l'on obtient le résultat en prenant $g_n = \overline{\xi}_n \cdot f_n$, en effet

$K_{E'_n} * g_n = \overline{\xi}_n \cdot K_{E_n} * f_n$.

1.15. Ordres sur Γ

On considère le sous groupe $\tilde{\Gamma}$ de $\prod_{n\in A'} (\mathbb{Z} / k_n \mathbb{Z})$ constitué des suites dont au plus un nombre fini de termes d'indices positifs sont nuls ; soit $\tilde{\Gamma}_n$ le sous groupe de $\tilde{\Gamma}$ constitué des suites $(\omega_n)_{n\in A'}$ telles que , pour tout $m \geqslant n$, $\omega_m = 0$; on munit $\tilde{\Gamma}$ de la distance associée à la suite $(\tilde{\Gamma}_n)_{n\in A}$, $\tilde{\Gamma}_n$ est ouvert compact .

Identifions $\mathbb{Z} / k_n \mathbb{Z}$ à l'ensemble ordonné $\{0,1, \dots, k_n-1\}$, considérons sur $\tilde{\Gamma}$ l'ordre dont la restriction à chaque $\tilde{\Gamma}_n$ est l'ordre lexicographique. Soit $\Phi(\Gamma)$ l'ensemble des isométries de Γ sur $\tilde{\Gamma}$. Soit $\mathcal{O}(\Gamma)$ l'ensemble des ordres sur Γ obtenus à partir de l'ordre de $\tilde{\Gamma}$ par transport sur Γ au moyen des éléments de $\Phi(\Gamma)$.

1.16. Proposition

Pour tout $\varepsilon \in \mathcal{O}(\Gamma)$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$ l'ensemble $\{\xi \in \Gamma \,;\, \xi \,\varepsilon\, \gamma \text{ et } \xi \neq \gamma\}$ appartient à $\mathcal{E}(\Gamma)$.

D'après la caractérisation des éléments de $\mathcal{E}$ donnée en 1.12. toute isométrie de Γ sur $\tilde{\Gamma}$ transporte $\mathcal{E}(\Gamma)$ sur $\mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$; il suffit donc de remarquer que la proposition est vraie pour l'ordre de $\tilde{\Gamma}$.

Soit h l'application de $\tilde{\Gamma}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie ainsi : $h\left((\omega_n)\right) = \sum_{n\in A'} \omega_n \, i_n$ l'application h est croissante.

1.17. Théorème

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite croissante lacunaire à la Hadamard de nombres > 0

.../...

Soit $\varphi \in \Phi(\Gamma)$, notons $E_n = (h \circ \varphi)^{-1}([\lambda_n, \lambda_{n+1}[)$, $E_{-\infty} = (h \circ \varphi)^{-1}(\{0\})$.

Alors, pour tout $p \in]1, \infty[$, pour tout $f \in L^2(G)$, on a

$$C_p^{-1} \|f\|_{L^p(G)} \leqslant \Big\| \Big(\sum_{-\infty \leqslant n < \infty} |f_{E_n}|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(G)} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(G)}$$

où $C_p \leqslant A\, p^4 (p-1)^{-2}$.

Ce théorème est vrai dans le cas où la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un prolongement à $\mathbb{Z}$ d'une sous-suite de la suite $(i_n)_{n \in A}$; en effet, les ensembles $\{E_n - (h \circ \varphi)^{-1}(0)\}_{-\infty \leqslant n < \infty}$ satisfont alors les hypothèses de la proposition 1.11.

En vertu de 1.5. il suffit de démontrer l'inégalité de droite.

Supposons que $\lambda_{n+1} / \lambda_n \geqslant \delta > 1$ et soit $K = [\operatorname{Log} k / \operatorname{Log} \delta]$.

Prolongeons si besoin est la suite $(i_n)_{n \in A}$ à $\mathbb{Z}$ en une suite encore notée i_n telle que $2 \leqslant i_{n+1} / i_n \leqslant k$. Chaque intervalle $[i_n, i_{n+1}[$ contient au plus K intervalles $[\lambda_m, \lambda_{m+1}[$; il existe donc une partition de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} = \bigcup_{j=0}^{K} A_j$ telle que

1° si $n \in A_0$ l'intervalle $]\lambda_n, \lambda_{n+1}[$ contient au moins un i_m,

2° si $K > 0$ et si m et n sont deux éléments distincts d'un même A_j $(1 \leqslant j \leqslant K)$ les deux intervalles $[\lambda_m, \lambda_{m+1}[$ et $[\lambda_n, \lambda_{n+1}[$ sont contenus dans deux intervalles $[i_{m'}, i_{m'+1}[$ et $[i_{n'}, i_{n'+1}[$ distincts.

Si $x \in \mathbb{R}^+$, notons $S_x f = f_{(h \circ \varphi)^{-1}([0, x[)}$.

Posons $f_n^* = f_{(h \circ \varphi)^{-1}([i_n, i_{n+1}[)}$; en vertu de la remarque du début

.../...

nous avons $\left\|\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n^*|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(G)} \leqslant A_p \|f\|_{L^p(G)}$.

Soit $j\in\{1,2,\dots,K\}$; si $n\in A_j$, $\sigma(n)$ est l'entier tel que $[\lambda_n, \lambda_{n+1}[\ \subset [i_{\sigma(n)}, i_{\sigma(n)+1}[$. On a alors

$$f_{E_n} = S_{\lambda_{n+1}}(f) - S_{i_{\sigma(n)}}(f) - \left(S_{\lambda_n}(f) - S_{i_{\sigma(n)}}(f)\right)$$

$$= S_{\lambda_{n+1}}\left(f^*_{\sigma(n)}\right) - S_{\lambda_n}\left(f^*_{\sigma(n)}\right)$$

et $\left(\sum_{n\in A_j} |f_{E_n}|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{n\in A_j} |S_{\lambda_{n+1}}(f^*_{\sigma(n)})|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n\in A_j} |S_{\lambda_n} f^*_{\sigma(n)}|^2\right)^{1/2}$

donc,en vertu de 1.14. et 1.16.

$$\left\|\left(\sum_{n\in A_j} |f_{E_n}|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(G)} \leqslant 2A_p \left\|\left(\sum_{n\in A_j} |f^*_{\sigma(n)}|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(G)} \leqslant 2A_p^2 \|f\|_{L^p(G)} .$$

Etudions maintenant le cas où $j = 0$.

Si $n\in A_0$, $\sigma(n)$ et $\tau(n)$ sont les deux entiers tels que $i_{\sigma(n)} \leqslant \lambda_n < i_{\sigma(n)+1}$, $i_{\tau(n)} \leqslant \lambda_{n+1} < i_{\tau(n)+1}$. On a

$$f_{E_n} = S_{\lambda_{n+1}}(f) - S_{i_{\tau(n)}}(f) + \left(S_{i_{\tau(n)}}(f) - S_{i_{\sigma(n)}}(f)\right) - \left(S_{\lambda_n}(f) - S_{i_{\sigma(n)}}(f)\right)$$

et l'on opère comme précédemment . On obtient

$$\left\|\left(\sum_{n\in A_0} |f_{E_n}|^2 + |f_{E_{-\infty}}|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(G)} \leqslant 3A_p^2 \|f\|_{L^p(G)} .$$

En définitive

$$\left\|\left(\sum_{-\infty\leqslant n<\infty} |f_{E_n}|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(G)} \leqslant (2K+3)\, A_p^2 \|f\|_{L^p(G)} .$$

.../...

Cet énoncé généralise un théorème de Paley (8). Le cas où $\lambda_n = i_n$ se trouve dans (9).

1.18. Lemme

Soient $(m_{j,n})_{j=1,2,\dots,\lambda;\ n\geq 0}$ λ suites de fonctions de $L^{\infty}(\Gamma)$ telles que

1° pour chaque j, $m_{j,n}$ converge vers m_j pour la topologie $\sigma(L^{\infty}, L^1)$,

2° pour un $p \in]1, \infty[$, il existe $B > 0$ tel que pour tout n et pour toutes fonctions $f_j \in L^2(G)$, $j = 1,2,\dots,\lambda$ on ait

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\lambda} |\mathcal{F}^{-1}(m_{j,n}\, \mathcal{F} f_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(G)} \leqslant B \left\| \left(\sum_{j=1}^{\lambda} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(G)} .$$

Alors, dans les mêmes conditions

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{\lambda} |\mathcal{F}^{-1}(m_j\, \mathcal{F} f_j)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(G)} \leqslant B \left\| \left(\sum_{j=1}^{\lambda} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(G)} .$$

C'est une version vectorielle d'un lemme de De Leeuw (6)

Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert séparables, une condition nécessaire et suffisante pour que $m : \Gamma \longrightarrow B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ soit un multiplicateur de $\mathcal{F}(L^p(G, \mathcal{H}_1))$ dans $\mathcal{F}(L^p(G, \mathcal{H}_2))$ est que, pour toute $f \in L^p \cap L^2(G, \mathcal{H}_1)$ et pour toute $g \in L^{p'} \cap L^2(G, \mathcal{H}_2)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ on ait :

$$\left| \int_{\Gamma} \langle m(\gamma).\, \hat{f}(\gamma), \hat{g}(\gamma) \rangle_{\mathcal{H}_2} \, d\gamma \right| \leqslant B \|f\|_{L^p(G, \mathcal{H}_1)} \|g\|_{L^{p'}(G, \mathcal{H}_2)} .$$

La démonstration est identique à celle du cas des multiplicateurs scalaires.

Ici nous prenons $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^{\lambda}$ et $m_n(x) = (m_{j,n}(x))_{j=1,2,\dots,\lambda}$

L'hypothèse 2° implique

.../...

$$\left|\sum_{j=1}^{\lambda} \int_{\Gamma} m_{j,n}(\gamma)\, \hat{f}_j(\gamma)\, \hat{g}_j(\gamma)\, d\gamma\right| \leqslant B \|f\|_{L^p(G,\,\mathbb{C}^\lambda)} \|g\|_{L^{p'}(G,\,\mathbb{C}^\lambda)}$$

pour toutes fonctions $f_j \in L^p \cap L^2(G)$ et $g_j \in L^{p'} \cap L^2(G)$.

L'hypothèse 1° permet de passer à la limite dans l'intégrale, en effet $\hat{f}_j\, \hat{g}_j \in L^1(\Gamma)$.

Ce lemme est valable pour tout groupe G abélien localement compact.

1.19. Théorème

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite croissante lacunaire à la Hadamard de réels supérieurs à 0.

Soit m une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ telle que

1° $\|m\|_\infty \leqslant M$

2° la variation de m sur chaque intervalle $[\lambda_n, \lambda_{n+1}[$ est majorée par M.

Alors pour tout $\varphi \in \Phi(\Gamma)$, pour tout $p \in]1, 2]$, $m \circ h \circ \varphi$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}\left(L^p(G)\right)$.

La démonstration est très proche de celle du théorème de Marcinkiewicz relatif aux multiplicateurs de $\mathcal{F}\left(L^p(T)\right)$ (11, p.232).

Etudions le cas où Γ n'est ni discret ni compact, les autres cas s'en déduisant facilement.

La mesure image par $h \circ \varphi$ de la mesure de Haar de Γ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$.

Introduisons les notations suivantes : soit ψ une section de $h \circ \varphi$

$$E_n = \psi([\lambda_n, \lambda_{n+1}[) \quad , \quad \Delta_n = f_{E_n} \quad , \quad S_t(f) = f_{\psi([0,t[)}$$

$\Delta'_n = \mathcal{F}^{-1}\left(m \cdot h \circ \varphi \cdot \chi_{E_n} \cdot \mathcal{F}(f)\right)$.

.../...

On a
$$S_t(f)(x) = \int_{[0,t[} \left(\psi(\tau), x\right) \hat{f}\circ\psi(\tau)\, d\tau$$
$$\Delta'_n(x) = \int_{[\lambda_n, \lambda_{n+1}[} m(\tau) \left(\psi(\tau), x\right) \hat{f}\circ\psi(\tau)\, d\tau$$

Intégrant par parties, nous obtenons

$$\Delta'_n(x) = S_{\lambda_{n+1}}(\Delta_n)(x)\, m(\lambda_{n+1} -) - \int_{[\lambda_n, \lambda_{n+1}[} S_\tau(\Delta_n)(x)\, dm(\tau),$$

d'où, par application de l'inégalité de Schwarz et utilisation des hypothèses faites sur m

$$|\Delta'_n(x)|^2 \leqslant 2M\left(M\,|S_{\lambda_{n+1}}(\Delta_n)(x)|^2 + \int_{[\lambda_n, \lambda_{n+1}[} |S_\tau(\Delta_n)(x)|^2 |dm(\tau)|\right),$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\Delta'_n(x)|^2 \leqslant 2M\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(M\,|S_{\lambda_{n+1}}(\Delta_n)(x)|^2 + \int_{[\lambda_n, \lambda_{n+1}[} |S_\tau(\Delta_n)(x)|^2 |dm(\tau)|\right)\right)$$

Si la mesure dm est atomique on a, par application de 1.14

$$\left\|\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\Delta'_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(G)} \leqslant (2M)^{1/2} A_p \left\|\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\Delta_n|^2 \left(M + \int_{[\lambda_n, \lambda_{n+1}[} |dm(\tau)|\right)\right)^{1/2}\right\|_{L^p(G)}$$

d'où

$$\left\|\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\Delta'_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(G)} \leqslant 2\,M\,A_p \left\|\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\Delta_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(G)},$$

et l'on conclut par application de 1.17.

Dans le cas où la mesure dm n'est pas atomique, on approche m au sens $\sigma\left(L^\infty(\mathbb{R}^+), L^1(\mathbb{R}^+)\right)$ par une suite m_j de fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ de façon que chaque m_j vérifie les hypothèses 1° et 2° quitte à remplacer M par $2M$ et de façon que les mesures dm_j soient atomiques. Alors les fonctions $m_j\circ h\circ\varphi$ sont des multiplicateurs uniformément bornés de $\mathcal{F}L^p(G)$ convergeant vers $m\circ h\circ\varphi$ au sens $\sigma\left(L^\infty(\Gamma), L^1(\Gamma)\right)$ ce qui prouve que $m\circ h\circ\varphi$ est un multiplicateur (Lemme 1.18.) .

2. APPLICATIONS A CERTAINS GROUPES COMPACTS

2.1. Soient G_1 et G_2 deux groupes abéliens localement compacts et j un homomorphisme continu de G_1 dans G_2 ; $\hat{j}$ désigne l'homomorphisme dual de j ; si $\mu \in M(G_1)$ $\check{j}(\mu)$ désigne la mesure image de μ par j . On sait que dans ces conditions $\left(\check{j}(\mu)\right)^\wedge = \hat{\mu} \circ \hat{j}$.

2.2. Lemme

Soit H un sous groupe fermé du groupe localement compact abélien G tel que G / H soit compact ; on note π la surjection canonique de G sur G / H et l'on suppose qu'il existe une section borélienne s de π ; on note s^* l'application de $\mathbb{C}^H$ dans $\mathbb{C}^G$ définie par $s^*(\alpha)\ (x) = \alpha\left(x - s \circ \pi(x)\right)$. Alors

1° Pour tout n entier $\geqslant 1$, pour toute application ψ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ on a $\psi \circ s^{*n} = s^* \circ \psi$.

2° Si α est mesurable $s^*(\alpha)$ l'est aussi . Si de plus on choisit les mesures de Haar m_G, m_H, $m_{G/H}$ de façon compatible on a, pour tout $p > 0$,

$$\|s^*(\alpha)\|_{L^p(G)} = \left(m_{G/H}\ (G/H)\right)^{1/p} \|\alpha\|_{L^p(H)} .$$

Preuve

1° est évident modulo l'abus de notations suivant :

ψ désigne aussi l'application de $(\mathbb{C}^H)^n$ dans $\mathbb{C}^H$ définie par $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longrightarrow \psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

2° $$\int_G |s^*(\alpha)\ (x)|^p\, dx = \int_G |\alpha\left(x - s \circ \pi\ (x)\right)|^p\, dx ,$$

.../...

$$\int_G |s^*(\alpha)(x)|^p \, dx = \int_{G/H} dm_{G/H}(u) \int_H |\alpha(x+h-s\circ\pi(x+h))|^p \, dm_H(h)$$

où $u = \pi(x)$. Remarquons que $\pi(h) = 0$ et que $x - s\circ\pi(x) \in H$,

donc $$\int_G |s^*(\alpha)(x)|^p \, dx = m_{G/H}(G/H) \int_H |\alpha(h)|^p \, dh \, .$$

2.3. Lemme

Les hypothèses sont celles du lemme précédent ; i désigne l'injection canonique de H dans G. Pour toute mesure $\mu \in M(H)$, pour toute fonction α continue bornée sur H on a : $s^*(\alpha *_H \mu) = s^*(\alpha) *_G \check{i}(\mu)$.

En effet :

$$s^*(\alpha) * \check{i}(\mu)(x) = \int_H \alpha\left(x - t - s\circ\pi(x-t)\right) d\mu(t) = \alpha * \mu\left(x - s\circ\pi(x)\right) \, .$$

2.4. G et Γ sont deux groupes duaux satisfaisant les hypothèses 1.2 ; Γ est compact, c'est à dire $A = -\mathbb{N}$. On considère un groupe abélien discret dénombrable $\tilde{\Gamma}$ (sans rapport avec le groupe du même nom déjà considéré) plongé de façon dense dans Γ ; on note i l'injection de $\tilde{\Gamma}$ dans Γ et j l'injection d'image dense, duale de i, de G dans $\tilde{G}$ dual de G.

Soit $\tilde{G}_n = j(G_n)$. $\tilde{G}$ est compact métrisable. On suppose que pour chaque $n \leqslant 0$ il existe une section borélienne σ_n de la surjection canonique de $\tilde{G}/\tilde{G}_n$ sur $(\tilde{G}/\tilde{G}_n) / (\tilde{G}_{n-1}/\tilde{G}_n)$ de sorte que, posant $s_0 =$ identité de $\tilde{G}$ et $s_{n-1} = s_n \circ \sigma_n$ pour $n \leqslant 0$, le diamètre de $s_n(\tilde{G}/\tilde{G}_n)$ tende vers 0 lorsque n tend vers $-\infty$. s_n est une section borélienne de la surjection $\pi_n : \tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}/\tilde{G}_n$.

Soit $\mathcal{K}_n(G)$ l'ensemble des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ à support dans G_n ; on identifiera une fonction à support dans G_n à une fonction définie sur $\tilde{G}_n$.

.../...

Dans ces conditions, l'ensemble de fonctions $\bigcup_{n\leqslant 0} s_n^*\left(\mathcal{K}_n(G)\right)$ est dense dans tous les espaces $L^p(\widetilde{G})$, $p\in[1,\infty[$.

On suppose, en outre, que le fait suivant est vrai :

si $m<n$ $\quad s_n^*\left(\mathcal{K}_n(G)\right) \subset s_m^*\left(\mathcal{K}_m(G)\right)$.

2.5. Définitions

$$\mathcal{E}_0(\widetilde{\Gamma}) = \{i^{-1}(E) \quad ; \quad E \in \mathcal{E}_0(\Gamma)\}$$

$$\mathcal{E}(\widetilde{\Gamma}) = \{i^{-1}(E) \quad ; \quad E \in \mathcal{E}(\Gamma)\}$$

$$\mathcal{E}_1(\widetilde{\Gamma}) = \{i^{-1}(\bar{E}) \quad ; \quad E \in \mathcal{E}(\Gamma)\} \cup \mathcal{E}(\widetilde{\Gamma})$$

2.6. Proposition

Pour tout $p\in\,]1,\infty[$, pour toute suite $(f_n\ ,\ \widetilde{E}_n)_{n\geqslant 0}$ de $L^2(\widetilde{G})\times\mathcal{E}(\widetilde{\Gamma})$ on a $\left\|\left(\sum_{n\geqslant 0}|f_n * K_{\widetilde{E}_n}|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\widetilde{G})} \leqslant A_p \left\|\left(\sum_{n\geqslant 0}|f_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\widetilde{G})}$.

Il suffit de démontrer ce résultat pour une suite finie avec une constante indépendante du nombre de termes. D'après le lemme 1.18. il suffit de considérer le cas où $\widetilde{E}_n = i^{-1}(E_n)$, E_n étant la réunion finie de classes de sous groupes de Γ .

Soit donc N le nombre de termes de la suite et Γ_M le plus petit sous groupe apparaissant dans la décomposition des E_n . Le support de K_{E_n} est dans G_M .

Soit $f_n \in \bigcup_m s_m^*\left(\mathcal{K}_m(G)\right)$, pour un $m\leqslant M$ $f_n = s_m^*(\alpha_n)$, $\alpha_n\in\mathcal{K}_m(G)$.

D'après 2.1. et 2.3. nous avons $f_n * K_{\widetilde{E}_n} = s_m^*(K_{E_n} * \alpha_n)$.

.../...

D'après 2.2. $\left(\sum_{n=1}^{N} |f_n * K_{\tilde{E}_n}|^2\right)^{1/2} = s_m^*\left(\left(\sum_{n=1}^{N} |K_{E_n} * \alpha_n|^2\right)^{1/2}\right)$

$$\left\|\left(\sum_{n=1}^{N} |f_n * K_{\tilde{E}_n}|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\tilde{G})} = \left(m_{\tilde{G}/\tilde{G}_m}(\tilde{G}/\tilde{G}_m)\right)^{1/p} \left\|\left(\sum_{n=1}^{N} |K_{E_n} * \alpha_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(G)}$$

or, en vertu de 1.14.

$$\left\|\left(\sum_{n=1}^{N} |K_{E_n} * \alpha_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(G)} \leqslant A_p \left\|\left(\sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(G)},$$

et l'on conclut par une nouvelle application du lemme 2.2.

2.7. Corollaire

L'énoncé précédent est vrai en remplaçant $\mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$ par $\mathcal{E}_1(\tilde{\Gamma})$.

En effet on obtient les éléments de $\mathcal{E}_1(\tilde{\Gamma})$ en ajoutant au plus un point à ceux de $\mathcal{E}(\tilde{\Gamma})$. On utilise aussi l'inégalité $\left(\sum_{n\geqslant 0} |\hat{f}_n(\xi_n)|^2\right)^{1/2} \leqslant A_p \left\|\left(\sum_{n\geqslant 0} |f_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\tilde{G})}$.

2.8. Proposition

Si $f \in L^2(\tilde{G})$ posons $f_n = f_{\tilde{\Gamma}_n \setminus \tilde{\Gamma}_{n-1}}$ pour $n \leqslant 0$.

On a, pour tout $p \in]1, \infty[$, pour tout $f \in L^2(\tilde{G})$,

$$\left\|\left(\sum_{n\leqslant 0} |f_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\tilde{G})} \leqslant A_p \|f\|_{L^p(\tilde{G})}.$$

Soit $f \in \bigcup_{m\leqslant 0} s_m^*\left(\mathcal{K}_m(G)\right)$, pour tout $m \leqslant m_0$, $f = s_m^*(\alpha)$ où $\alpha \in \mathcal{K}_m(G)$.

Soit μ_n la mesure sur G dont la transformée de Fourier est $\chi_{\Gamma_n \setminus \Gamma_{n-1}}$, son support est G_{n-1} ; $f_n = f * \check{j}(\mu_n)$; par conséquent, si $n > m$, $f_n = s_m^*(\alpha * \mu_n)$ en vertu de 2.3.

.../...

d'où $\left(\sum_{m<n\leq 0} |f_n|^2\right)^{1/2} = s_m^*\left(\left(\sum_{m<n\leq 0} |\alpha * \mu_n|^2\right)^{1/2}\right)$

et l'on conclut en utilisant 1.10. , 2.2. et le lemme de Fatou.

2.9. Corollaire

Avec les notations précédentes, pour tout $f \in L^2(\tilde{G})$ telle que $\hat{f}(0) = 0$,

on a
$$A_p^{-1} \| f \|_{L^p(\tilde{G})} \leqslant \left\| \left(\sum_{n \leqslant 0} |f_n|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^p(\tilde{G})} \leqslant A_p \| f \|_{L^p(\tilde{G})} .$$

Cela résulte de 2.8 et 1.5.

R. Spector m'a communiqué une démonstration du fait suivant : $\sum_{n\leqslant 0} \pm \chi_{\tilde{\Gamma}_n \setminus \tilde{\Gamma}_{n-1}}$ est un multiplicateur de $\mathcal{F}(L^p(\tilde{G}))$ pour tout $p \in]1,\infty[$. Cela résulte aussi des théorèmes très généraux de N. Lohoué (7) relatifs au transport des multiplicateurs. De là, en utilisant, la technique des fonctions de Rademacher on pourrait déduire les propositions 2.6 et 2.8. On a préféré une démonstration élémentaire qui fournit une meilleure évaluation des constantes.

2.10. Soit $\mathcal{O}(\tilde{\Gamma})$ les ordres de $\mathcal{O}(\Gamma)$ transportés sur $\tilde{\Gamma}$ au moyen de i . Il résulte de 1.16. que pour tout $\varepsilon \in \mathcal{O}(\tilde{\Gamma})$, pour tout $\gamma \in \tilde{\Gamma}$, les ensembles $\{\xi \in \tilde{\Gamma} \ ; \ \xi \,\varepsilon\, \gamma\}$ et $\{\xi \in \tilde{\Gamma} ; \xi \,\varepsilon\, \gamma \text{ et } \xi \neq \gamma\}$ appartiennent à $\mathcal{E}_1(\tilde{\Gamma})$.

2.11. Théorème

Soit $(\lambda_n)_{n<0}$ une suite croissante lacunaire à la Hadamard de réels supérieurs à 0 telle que $\lambda_0 = 1$.

Considérons une partition de $]0,1]$ ou $]0,1[$ par des ensembles de la forme $]\lambda_n, \lambda_{n+1}[$ ou $]\lambda_n, \lambda_{n+1}]$ ou $[\lambda_n, \lambda_{n+1}[$ ou $[\lambda_n, \lambda_{n+1}]$.

Soit $\varphi \in \Phi(\Gamma)$, soient $\tilde{E}_n$ les images réciproques par $h \circ \varphi \circ i$ de ces ensembles, $E_{-\infty} = (h \circ \varphi \circ i)^{-1}(\{0\})$ et éventuellement $E_1 = (h \circ \varphi \circ i)^{-1}(\{1\})$.

Alors, pour tout $p \in]1,\infty[$ il existe $C_p > 0$ tel que pour toute fonction $f \in L^2(G)$ on ait
$$C_p^{-1} \| f \|_{L^p(\tilde{G})} \leqslant \left\| \left(\sum_{-\infty \leqslant n \leqslant 1} |f_{\tilde{E}_n}|^2\right)^{1/2} \right\|_{L^p(\tilde{G})} \leqslant C_p \| f \|_{L^p(\tilde{G})} .$$

Compte tenu de 2.7. et 2.9. ceci se démontre de la même façon que 1.17.

.../...

2.12. Théorème

Soit $(E_n)_{n>0}$ une partition de $\widetilde{\Gamma}$ telle que pour un $p \in]1,\infty[$ il existe B et $C>0$ tels que, pour tout $f \in L^2(\widetilde{G})$,

$$B^{-1}\| f \|_{L^p(\widetilde{G})} \leqslant \|(\sum_{n\geqslant 0} |f_{E_n}|^2)^{1/2}\|_{L^p(\widetilde{G})} \leqslant C\|f\|_{L^p(\widetilde{G})}$$

Soit m une fonction de Γ dans $\mathbb{C}$ telle que

1° $\|m\|_\infty \leqslant M$

2° pour tout $n>0$ il existe $\varepsilon_n \in \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma})$ tel que la variation de $m|_{E_n}$ relativement à $\varepsilon_n|_{E_n}$ soit majorée par M .

Alors m est un multiplicateur de $\mathcal{F}L^p(\widetilde{G})$ dont la norme est majorée par $2MBC\,A_p$.

Preuve . $A(\widetilde{G})$ étant dense dans $L^p(\widetilde{G})$ il suffit de montrer que, pour tout $f \in A(\widetilde{G})$,

$$\|\mathcal{F}^{-1}(m.\,\mathcal{F}f)\|_{L^p(\widetilde{G})} \leqslant 2\,M\,B\,C\,A_p\|f\|_{L^p(\widetilde{G})} .$$

Posons $\Delta_n = f_{E_n}$, $\Delta'_n = \mathcal{F}^{-1}(m.\,\Delta_n)$; à cause de l'hypothèse faite sur les E_n il suffit de montrer que

$$\|(\sum_{n>0} |\Delta'_n|^2)^{1/2}\|_{L^p(\widetilde{G})} \leqslant 2\,M\,A_p\|(\sum_{n>0} |\Delta_n|^2)^{1/2}\|_{L^p(\widetilde{G})} .$$

Il suffit de faire la démonstration dans le cas où m est à valeurs réelles.

Si $\varepsilon \in \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma})$ et $\xi \in \widetilde{\Gamma}$ posons

$$s_{\varepsilon,\xi}(f) = \sum_{\zeta\,\varepsilon\,\xi} \hat{f}(\zeta)\,\zeta \quad , \quad s^-_{\varepsilon,\xi}(f) = s_{\varepsilon,\xi}(f) - \hat{f}(\xi)\,.\,\xi .$$

On a $\Delta'_n = \sum_{\xi\in E_n} m(\xi)\, f(\xi)\, \xi$.

Pour alléger les notations la relation d'ordre ε sera notée $\leqslant$.

.../...

Soit $\eta>0$, il existe pour chaque n une partie finie F_n de E_n telle que $\sum_{\xi\in E_n\setminus F_n} \hat{f}(\xi) < \eta\, 2^{-n-1}$.

On a manifestement $\|\Delta'_n - \sum_{\xi\in F_n} m(\xi)\,\hat{f}(\xi)\,\xi\|_{L^\infty(\tilde{G})} < \eta M 2^{-n-1}$

Soit $F_n = \{\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \dots, \xi_{\lambda_n,n}\}$, $\xi_{1,n} < \xi_{2,n} < \dots < \xi_{\lambda_n,n}$

Posons $s_j^{(n)} = \sum_{1\leqslant k\leqslant j} \hat{f}(\xi_{k,n})\,\xi_{k,n}$, $s_{j,n} = s_{\varepsilon,\xi_{j,n}}(\Delta_n)$

si $j\geqslant 1$ $s_0^{(n)} = s_{0,n} = 0$

Alors

$$\sum_{\xi\in F_n} m(\xi)\,\hat{f}(\xi)\,\xi = \sum_{j=1}^{\lambda_n} \left(s_j^{(n)} - s_{j-1}^{(n)}\right) m\,(\xi_{j,n})$$

Mais $\|s_j^{(n)} - s_{j-1}^{(n)} - (s_{j,n} - s_{j-1,n})\|_{L^\infty(\tilde{G})} \leqslant \sum_{\substack{\xi_{j-1,n}<\zeta<\xi_{j,n}\\ \zeta\in E_n}} |f(\zeta)|$

d'où

$$\|\Delta'_n - \sum_{j=1}^{\lambda_n} (s_{j,n} - s_{j-1,n})\, m\,(\xi_{j,n})\|_{L^\infty(\tilde{G})} \leqslant 2\,M\,\eta\, 2^{-n}$$

et $\|\Delta'_n - \sum_{j=1}^{\lambda_n-1} s_{j,n}\left(m(\xi_{j,n}) - m(\xi_{j+1,n})\right) - s_{\lambda_n,n}\, m(\xi_{\lambda_n,n})\|_{L^\infty(\tilde{G})} \leqslant M\,\eta 2^{-n}$.

En définitive, pour tout $\eta>0$, on peut écrire :

$$\Delta'_n = \sum_{\xi\in F_n} \alpha(\xi)\; s_{\varepsilon,\xi}\,(\Delta_n) + \psi_n$$

où

$$\sum_{\xi\in F_n} |\alpha(\xi)| \leqslant 2M \qquad \text{et} \qquad \|\psi_n\|_{L^\infty(\tilde{G})} \leqslant 2\,M\,\eta\, 2^{-n-1}\,.$$

Alors, l'inégalité de Schwarz donne

$$|\Delta'_n|^2 \leqslant \left(\sum_{\xi\in F_n} |\alpha(\xi)| + M\eta\, 2^{-n}\right)\left(\sum_{\xi\in F_n} \left|s_{\varepsilon,\xi}\left(|\alpha(\xi)|^{1/2}\,\Delta_n\right)\right|^2 + M\eta\, 2^{-n}\right).$$

.../...

et

$$\sum_{n>0}|\Delta'_n|^2 \leqslant (2M + M\eta)\left(\sum_{n>0}\sum_{\xi\in F_n}\left|s_{\varepsilon,\xi}\left(|\alpha(\xi)|^{1/2}\Delta_n\right)\right|^2 + M\eta\right),$$

$$\left(\sum_{n>0}|\Delta'_n|^2\right)^{1/2} \leqslant M^{1/2}(2+\eta)^{1/2}\left(\left(\sum_{n>0}\sum_{\xi\in F_n}\left|s_{\varepsilon,\xi}\left(|\alpha(\xi)|^{1/2}\Delta_n\right)\right|^2\right)^{1/2} + (M\eta)^{1/2}\right).$$

D'où,en vertu de 2.6.

$$\left\|\left(\sum_{n>0}|\Delta'_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\tilde{G})} \leqslant (2M + M\eta)^{1/2}\left(\left\|\left(\sum_{n>0}\sum_{\xi\in F_n}|\alpha(\xi)|\,|\Delta_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\tilde{G})} + (2\eta)^{1/2}\right)$$

d'où

$$\left\|\left(\sum_{n>0}|\Delta'_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\tilde{G})} \leqslant 2M\left\|\left(\sum_{n>0}|\Delta_n|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^p(\tilde{G})} .$$

2.13. <u>Exemples</u>

1° Soient $\tilde{\Gamma}^i$, Γ^i des groupes vérifiant les hypothèses 2.4. ; alors $\tilde{\Gamma}^1 \times \tilde{\Gamma}^2$ et $\Gamma^1 \times \Gamma^2$ satisfont aussi ces hypothèses ; on peut prendre dans $\Gamma^1 \times \Gamma^2$ la suite de sous groupes :

$\Gamma^1 \times \Gamma^2$, $\Gamma^1_{-1} \times \Gamma^2$, $\Gamma^1_{-1} \times \Gamma^2_{-1}$, $\Gamma^1_{-2} \times \Gamma^2_{-1}$, $\Gamma^1_{-2} \times \Gamma^2_{-2}$, etc .

$\prod_{i\in I} \tilde{\Gamma}^i$ et $\Pi\Gamma^i$ satisfont aussi ces hypothèses à condition que $\sup_{i\in I} k(\Gamma^i) < \infty$; on prend la suite de sous groupes suivants

$\Pi\Gamma^j$, $\Gamma^1_{-1} \times \prod_{j>1}\Gamma^j$, $\Gamma^1_{-1} \times \Gamma^2_{-1} \times \prod_{j>2}\Gamma^j$, $\Gamma^1_{-2} \times \Gamma^2_{-1} \times \prod_{j>2}\Gamma^j$,

$\Gamma^1_{-2} \times \Gamma^2_{-2} \times \prod_{j>2}\Gamma^j$, $\Gamma^1_{-2} \times \Gamma^2_{-2} \times \Gamma^3_{-1} \times \prod_{j>3}\Gamma_j$, $\Gamma^1_{-3} \times \Gamma^2_{-2} \times \Gamma^3_{-1} \times \prod_{j>3}\Gamma_j$ etc.

.../...

2° Si $\mathbb{D}_n = \prod_1^{\infty} (\mathbb{Z} / n \mathbb{Z})$, $\hat{\mathbb{D}}_n$ est un sous groupe dense de $\mathbb{D}_n$ et les hypothèses 2.4. sont satisfaites.

3° Soit Δ_a un groupe d'entiers a-adique (la définition de Δ_a se trouve dans (4, p.108)) tel que $\sup a_{n+1} / a_n < \infty$. $\mathbb{Z}$ est un sous groupe dense de Δ_a ; les hypothèses 2.4. sont satisfaites.

3. CONVERGENCE PONCTUELLE

3.1. Lemme

Soit $\mathcal{F}$ une famille de classes de fonctions mesurables supérieures ou égales à 0 sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mu \geqslant 0$ σ-finie.

Soit $\mathcal{F}_0$ une partie de $\mathcal{F}$ telle que tout élément de $\mathcal{F}$ soit approchable en mesure par une suite d'éléments de $\mathcal{F}_0$. Alors $\operatorname{ess\,sup}_{f \in \mathcal{F}} f = \operatorname{ess\,sup}_{f \in \mathcal{F}_0} f$

Par extraction de sous suites presque partout convergentes et appliquant le théorème d'Egoroff on voit que tout élément de $\mathcal{F}$ est approchable presque uniformément par des éléments de $\mathcal{F}_0$, c'est à dire $\forall f \in \mathcal{F}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \varepsilon$, $\forall \eta > 0$, $\exists\, g \in \mathcal{F}_0$, $|f - g| < \eta$ hors de A.

Soit $F = \operatorname{ess\,sup}_{f \in \mathcal{F}} f$; on sait que $F = \sup_{n \geqslant 1} f_n$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe des ensembles $A_n \in \mathcal{A}$ tels que $\mu(A_n) \leqslant \varepsilon . 2^{-n}$ et tels que pour tout $\eta > 0$ il existe $g_n \in \mathcal{F}_0$ tels que $|f_n - g_n| < \eta$ hors de A_n . Donc $\sup_{n \geqslant 1} f_n \leqslant \eta + \sup_{n \geqslant 1} g_n$ pour tout η hors de l'ensemble $\bigcup A_n$ dont la mesure est inférieure ou égale à ε . On en déduit que $F \leqslant \operatorname{ess\,sup}_{f \in \mathcal{F}_0} f$ presque partout.

Soient G et Γ des groupes vérifiant les hypothèses 1.2. Il résulte des articles de Billard (1) et Hunt (5) que le théorème de Carleson est vrai pour G compact.

3.2. Théorème

Si G est compact il existe $C>0$ ne dépendant que de $k(G)$ tel que pour tout $\varepsilon \in \mathcal{O}(\Gamma)$, pour toute $f \in L^2(G)$,

$$m\left(\left\{\sup_{\xi\in\Gamma} |s_{\varepsilon,\xi}(f)|>\lambda\right\}\right) \leqslant C\,\lambda^{-2}\,\|f\|^2_{L^2(G)} .$$

3.3. Corollaire

Le théorème précédent est valable pour tout groupe vérifiant les hypothèses 1.2.

L'espace L^2 faible étant complet, il suffit de démontrer le résultat pour les fonctions à support compact.

Soit $f \in L^2(G)$ dont le support est dans G_{n_0} , sa transformée de Fourier est constante sur les classes de Γ_{n_0} .

Soit $\varepsilon \in \mathcal{O}(\Gamma)$, ε induit un ordre ε_n de $\mathcal{O}(\Gamma/\Gamma_n)$.

Posons $s_\xi = s_{\varepsilon,\xi}$, $s_\xi^{(n)} = s_{\varepsilon_n,\xi}$ si $\xi \in \Gamma/\Gamma_n$. On a la propriété suivante :

$s_\xi^{(n)}(f)$ est, lorsque $n \leqslant n_0$, une somme partielle de f pour l'ordre ε et toute somme $s_\xi f$ est approchable dans $L^2(G)$ (donc en mesure) par de telles sommes lorsque n tend vers $-\infty$.

Appliquons le théorème 3.2. à G_n ,

$$m\left(\sup_{\xi\in\Gamma/\Gamma_n} |s_\xi^{(n)}(f)|>\lambda\right) \leqslant m(G_n)\,C\,\lambda^{-2}\,\|f\|^2_{L^2(G_n)} = C\,\lambda^{-2}\|f\|^2_{L^2(G)} ;$$

et l'on conclut par application du lemme 3.1.

Soient G , Γ , $\tilde{G}$, $\tilde{\Gamma}$ des groupes vérifiant les hypothèses 2.4.

3.4. Proposition

L'énoncé précédent est valable pour $\tilde{G}$.

.../...

Il suffit de considérer $f \in \bigcup_{m \leqslant 0} s_m^* \left(\mathcal{K}_m(G)\right)$.

Soit $\varepsilon \in \mathcal{O}(\widetilde{\Gamma})$; les ensembles $\{\xi \in \widetilde{\Gamma} \ ; \ \xi \varepsilon \zeta \ \text{ et } \ \xi \neq \zeta\}$ sont des réunions de classes de groupes $\widetilde{\Gamma}_n$. En vertu du lemme 3.1. il suffit de considérer parmi ces ensembles ceux qui sont réunions finies de telles classes .

Soit $\mathcal{U}_n$ $(n \leqslant 0)$ l'ensemble des $\{\xi \in \widetilde{\Gamma} \ ; \ \xi \varepsilon \zeta \ \text{ et } \ \xi \neq \zeta\}$ qui sont réunions de classes de sous groupes $\widetilde{\Gamma}_m$ avec $m \geqslant n$. Il suffit de démontrer que

$$m\left(\sup_{E \in \mathcal{U}_n} |f_E| > \lambda\right) \leqslant C\, \lambda^{-2} \|f\|_{L^2(G)} .$$

Si $E \in \mathcal{U}_n$, $E = i^{-1}(F)$ où K_F a son support dans G_n .
Pour tout $m \leqslant m_0 \leqslant n$ $f = s_m^*(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{K}_m(G)$, alors $f_E = s_m^*(\alpha * K_F)$ (lemme 2.2.)

et d'après le même lemme $\sup_{E \in \mathcal{U}_n} |f_E| = s_m^*(\sup |\alpha * K_F|)$

or

$$m_{\widetilde{G}}\left(|s_m^*(\alpha)| > \lambda\right) = m_{\widetilde{G}/\widetilde{G}_m}(\widetilde{G}/\widetilde{G}_m) \ \text{card}\ (|\alpha| > \lambda)$$

d'après 3.3. $\text{card}\ (\sup |\alpha * K_F| > \lambda) \leqslant C\, \lambda^{-2} \|\alpha\|^2_{L^2(G)}$

et l'on termine en utilisant 2.2.

3.5. <u>Proposition</u>

<u>Supposons que l'on ait dans $\widetilde{\Gamma}$ une suite $(E_n)_{n \geqslant 0}$ croissante de parties finies dont la réunion est $\widetilde{\Gamma}$ telles qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout</u> $f \in L^2(\widetilde{G})$ $m_{\widetilde{G}}\left(\sup |f_{E_n}| > \lambda\right) \leqslant A\, \lambda^{-2} \|f\|^2_{L^2(\widetilde{G})}$.

<u>Alors il existe des bons ordres sur $\widetilde{\Gamma}$ tels que</u>

$$m_{\widetilde{G}}\left(\sup_{\xi \in \widetilde{\Gamma}} |f_{]\leftarrow \xi[}| > \lambda\right) \leqslant B\, \lambda^{-2} \|f\|^2_{L^2(\widetilde{G})} .$$

.../...

Par suite les sommes partielles suivant cet ordre de la série de Fourier d'une fonction de $L^2(\widetilde{G})$ convergent presque partout.

On se donne une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{O}(\widetilde{\Gamma})$. Construisons sur $\widetilde{\Gamma}$ un ordre $(\leqslant)$ de la façon suivante

1° Si $\xi\in E_n$ et $\zeta\notin E_n$ $\xi<\zeta$

2° Si ξ et ζ appartiennent à $E_{n+1}\setminus E_n$ $\xi\leqslant\zeta \Longleftrightarrow \xi \;\varepsilon_n\; \zeta$.

Cet ordre est un bon ordre sur $\widetilde{\Gamma}$.

Soit $f_{n+1} = f_{E_{n+1}\setminus E_n}$, $f_0 = f_{E_0}$.

$s_\xi(f) = f_{\{\zeta\,;\,\zeta<\xi\}}$

si $\xi\in E_n\setminus E_{n-1}$,on a $s_\xi(f) = s_{\varepsilon_n,\xi}(f_n) + f_{E_n}$,

alors $\sup\limits_{\xi\in\widetilde{\Gamma}} |s_\xi(f)| \leqslant \sup\limits_n \sup\limits_\xi |s_{\varepsilon_n,\xi}(f_n)| + \sup\limits_n |f_{E_n}|$.

D'après 3.4.

$$m\left(\sup_\xi |s_{\varepsilon_n,\xi}(f_n)| > \lambda\right) \leqslant C\,\lambda^{-2}\|f_n\|^2_{L^2(\widetilde{G})} ,$$

d'où

$$m\left(\sup_n \sup_\xi |s_{\varepsilon_n,\xi}(f_n)| > \lambda\right) \leqslant C\,\lambda^{-2}\sum \|f_n\|^2_{L^2(\widetilde{G})} = C\,\lambda^{-2}\|f\|^2_{L^2(\widehat{G}}$$

et

$$m\left(\sup_{\xi\in\widetilde{\Gamma}} |s_\xi(f)| > \lambda\right) \leqslant 4\,(A + C)\,\lambda^{-2}\|f\|^2_{L^2(\widetilde{G})} .$$

3.6. Exemple

Prenons $\widetilde{\Gamma} = \mathbb{Z}^2$, $\Gamma = \Delta_a \times \Delta_b$

Fefferman (3) a montré que l'on peut prendre dans la proposition précédente pour E_n une suite de rectangles dépendant d'un paramètre ; on a ainsi construit sur $\mathbb{Z}^2$ des bons ordres tels que la série de Fourier d'une fonction $L^2(\mathbb{T}^2)$ sommée suivant ces ordres converge presque partout. .../...

BIBLIOGRAPHIE

(1) P.BILLARD "Sur la convergence presque partout des séries de Fourier-Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0,1)$" Studia Math. 28 (1967) p. 363,388.

(2) A.P.CALDERON - A.ZYGMUND "On the existence of certain singular integrals". Acta Math. 88 (1952) p. 85,139.

(3) C.FEFFERMAN "On the convergence of multiple Fourier series". Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971) p. 744,745

(4) E.HEWITT - K.ROOS "Abstract Harmonic Analysis". Springer Verlag, Berlin 1963, tome 1, p. 109 et 402

(5) R.A.HUNT "Almost everywhere convergence of Walsh-Fourier series of L^2 functions'

(6) K. de LEEUW "Sur les multiplicateurs de $\mathfrak{F}L^p$ ". Ann. of Math. 81 (1965) p. 364

(7) N. LOHOUE Algèbres $A_p(G)$ et convoluteurs de $L^p(G)$. Thèse Orsay 1972.

(8) PALEY "A remarquable system of orthogonal functions". Proc. London Math. Soc. 34 (1932) p. 241- 271

(9) J.PEYRIERE-SPECTOR C.R. Acad. Sci. Paris, série A, 269 , p. 973,974

(10) N.M.RIVIERE "On singular integrals". Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) p. 843,847

(11) A.ZYGMUND "Trigonometric series II". Cambridge University Press, tome 2, p.232.

Estimations de la norme de certains opérateurs de $L^p(T)$.

(en collaboration avec N. Lohoué)

Introduction.

1° Nous nous proposons d'étudier le problème suivant .

Soit $\mathbb{T}$ le cercle unité ; soit $\{a_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ une matrice infinie, trouver des conditions variationnelles sur les coefficients de cette matrice pour qu'elle définisse, dans un sens évident, un opérateur borné sur $L^p(T)$, $(1 < p < \infty)$.

Le cas où la matrice $\{a_{m,n}\}$ est diagonale a déjà été étudié par plusieurs auteurs (Marcinkiewicz (8), Mihlin (9)). Plus récemment E.M. Stein a donné des conditions suffisantes, liées à un semi-groupe de Poisson, sur un espace mesuré, M , quelconque, pour qu'un opérateur soit borné sur $L^p(M)$ (voir 11).

En général il n'y a pas de méthode directe pour s'attaquer à un tel problème ; nous prendrons un détour, en appliquant des méthodes d'intégrales singulières à un groupe contenant $\mathbb{T}$ comme sous-groupe.

2° Idées directrices ; utilisation de $M(2)$.

a) Nous notons $M(2)$ le groupe des déplacements du plan, il se réalise comme le produit semi-direct $\mathbb{R}^2 \circledS \mathbb{T}$; $\mathbb{T}$ est identifié au groupe des rotations du plan. Le point générique de $M(2)$ sera noté $g = (x,\alpha)$ ou $g = (r,\varphi,\alpha)$, r et φ étant les coordonnées polaires de x .

b) Pour chaque $\rho > 0$, on définit une représentation, T_ρ , de $M(2)$ sur $L^p(\mathbb{T})$ de la façon suivante :

si $g = (r,\varphi,\alpha)$ et si $f \in L^p(\mathbb{T})$ on pose $T_\rho(g)f(\psi) = e^{i\rho r\cos(\psi-\varphi)}f(\psi-\alpha)$.

Soit h une fonction sommable sur $M(2)$ pour la mesure $dxd\alpha$, l'opérateur $\hat{h}(\rho)$ défini par :

$$\hat{h}(\rho)f = \iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}} T_\rho(x,\alpha)f\ h(x,\alpha)dxd\alpha$$

est borné sur $L^p(\mathbb{T})$.

L'application $h \mapsto \hat{h}(\rho)$ se prolonge en une application linéaire d'un certain sous-espace de Banach de l'espace des opérateurs de convolution de $L^p(M(2))$ sur $\mathcal{L}(L^p(\mathbb{T}))$, (voir (2)). Par conséquent tout théorème garantissant qu'un opérateur de convolution est borné sur $L^p(M(2))$ donne des conditions suffisantes pour que certains opérateurs soient bornés sur $L^p(\mathbb{T})$.

3° Enoncés des résultats.

Les résultats que nous obtenons par cette méthode paraissent nouveaux. Malheureusement leurs énoncés ne sont pas très simples, et ils ne répondent que partiellement à la question posée.

Nous commencerons par les énoncés concernant $L^p(M(2))$, et nous donnerons ensuite en application ceux qui intéressent $L^p(\Gamma)$.

Soit $M(\rho) = \{M(\rho,m,n)\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ une fonction du nombre réel strictement positif, ρ , à valeurs dans l'ensemble des matrices infinies à coefficients complexes. Le théorème 1 donne une condition suffisante pour que cette fonction soit un multiplicateur à gauche de $\mathcal{F}(L^p(M(2)))$ pour $p \in]1,2]$ (la définition est rappelée au § 2.3.2).

On suppose que chacune des fonctions $\rho \mapsto M(\rho,m,n)$ est de classe C^2 et que, lorsque n est non nul, $M(\rho,m,n) = o(\rho^{-|m-n|})$ et $M'(\rho,m,n) = o(\rho^{-(1+|m-n|)})$ au voisinage de 0.

Si j est un entier négatif on pose :

$$A_j = 2^{-4j}\int_{2^{j-1}}^{2^j} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |M(\rho,m,0)(1+m^2)|^2\Big)\, \rho d\rho$$

$$B_j = 2^{-2j}\int_{2^{j-1}}^{2^j} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |M'(\rho,m,0)|^2\Big)\, \rho d\rho$$

$$C_j = \int_{2^{j-1}}^{2^j} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |M''(\rho,m,0)|^2\Big)\, \rho d\rho$$

$$D_j = 0$$

On appelle $\{n_j\}_{j\geq 0}$ la suite d'entiers ainsi définie : $n_0 = 0$, $n_j = 2^{2(j-1)}$.

Si j est un entier strictement positif on pose :

$$A_j = \int_0^{2^{j-1}} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n_{j-1}\leq|n|\leq n_j} |(m-n)^2 M(\rho,m,n)|^2\Big) \frac{d\rho}{\rho^3}$$
$$+ \int_{2^{j-1}}^{2^j} \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{|n|\leq n_j} |(m-n)^2 M(\rho,m,n)|^2\Big) \frac{d\rho}{\rho^3}$$

$$+\ 2^{-4j}\int_0^{2^{j-1}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\ \sum_{n_{j-1}\leqslant|n|\leqslant n_j}|M(\rho,m,n)|^2\Big)\,\rho d\rho$$

$$+\ 2^{-4j}\int_{2^{j-1}}^{2^j}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\ \sum_{|n|\leqslant n_j}|M(\rho,m,n)|^2\Big)\,\rho d\rho\ .$$

$$B_j = \int_0^{2^{j-1}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\ \sum_{n_{j-1}\leqslant|n|\leqslant n_j}|M'(\rho,m,n)|^2\Big)\,\frac{d\rho}{\rho}$$

$$+\int_{2^{j-1}}^{2j}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\ \sum_{|n|\leqslant n_j}|M'(\rho,m,n)|^2\Big)\,\frac{d\rho}{\rho}$$

$$C_j = \int_0^{2^{j-1}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\ \sum_{n_{j-1}\leqslant|n|\leqslant n_j}|M''(\rho,m,n)|^2\Big)\,\rho d\rho + \int_{2^{j-1}}^{2^j}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\ \sum_{|n|\leqslant n_j}|M''(\rho,m,n)|^2\Big)\,\rho d\rho$$

$$D_j = \int_0^{2^{j-1}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\ \sum_{n_{j-1}\leqslant|n|\leqslant n_j}|M(\rho,m,n)-M(\rho,m+1,n+1)|^2\Big)\,\rho d\rho$$

$$+\int_{2^{j-1}}^{2^j}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\ \sum_{|n|\leqslant n_j}|M(\rho,m,n)-M(\rho,m+1,n+1)|^2\Big)\,\rho d\rho$$

Théorème 1. Si, pour tout j, les nombres A_j, B_j, C_j, D_j sont finis, si, lorsque j tend vers $-\infty$, $A_j+B_j+C_j = 0(2^{-2j})$ et, lorsque j tend vers $+\infty$, $A_j+B_j+C_j+D_j = 0(j^{-3})$, M est, pour tout $p \in \,]1,2]$, un multiplicateur à gauche de $\mathcal{F}(L^p(M(2)))$.

Si S est une distribution sur $M(2)$ c'est aussi une distribution sur le groupe abélien $\mathbb{R}^2\times\mathbb{T}$ dont nous noterons $\mathcal{F}S$ la transformée de Fourier. Le théorème suivant donne des conditions portant sur $\mathcal{F}S$ suffisantes pour que S soit un convoluteur à gauche de $L^p(M(2))$ $(1 < p < \infty)$.

Théorème 2. On suppose que la distribution $\mathcal{F}S$ est une fonction, qu'elle est de classe C^2 en dehors des axes et qu'il existe un nombre C tel que

(i) $\mathcal{F}S(x,y,0) \leqslant C$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\mathcal{F}S(x,y,n+1)-\mathcal{F}S(x,y,n)| \leqslant C$

quels que soient x et y .

(ii) Pour tout nombre strictement positif, R ,

$$\int_{-R}^{R} \left(\left|\frac{\partial \mathcal{F}S}{\partial y}(\varepsilon R,t,0)\right| + \left|\frac{\partial \mathcal{F}S}{\partial x}(t,\varepsilon R,0)\right|\right)dt \leqslant C \quad , \quad (\varepsilon = \pm 1) ,$$

et $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-R}^{R} \left(\left|\frac{\partial \mathcal{F}S}{\partial y}(\varepsilon R,t,n+1) - \frac{\partial \mathcal{F}S}{\partial y}(\varepsilon R,t,n)\right| + \left|\frac{\partial \mathcal{F}S}{\partial x}(t,\varepsilon R,n+1) - \frac{\partial \mathcal{F}S}{\partial x}(t,\varepsilon R,n)\right|\right)dt \leqslant C \quad ,$$

(iii) Pour tout nombre positif, R ,

$$\iint_{R\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 2R} \left|\frac{\partial^2 \mathcal{F}S}{\partial x \partial y}(x,y,0)\right| \, dxdy \leqslant C$$

et $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \iint_{R\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 2R} \left|\frac{\partial^2 \mathcal{F}S}{\partial x \partial y}(x,y,n+1) - \frac{\partial^2 \mathcal{F}S}{\partial x \partial y}(x,y,n)\right| \, dxdy \leqslant C \ .$$

Alors pour tout $p\in]1,+\infty[$, l'application $f \longmapsto S*f$, définie sur les fonctions de $\mathcal{D}(M(2))$, se prolonge continûment à $L^p(M(2))$.

Utilisant le théorème 1 nous obtenons le résultat suivant sur les opérateurs de $L^p(\mathbb{T})$.

Théorème 3. Soit $A = \{a_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ une matrice infinie de nombres complexes telle que

(i) $$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_{m,0}|^2 < +\infty \quad ,$$

(ii) $$\sup_{j>0} j^3 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{2^{2j}\leqslant|n|\leqslant 2^{2j+2}} |(1+(m-n)^2)a_{m,n}|^2 < +\infty \ .$$

Alors A définit un opérateur, T, sur les polynômes trigonométriques ainsi $Te^{inx} = \sum a_{m,n} e^{imx}$; cet opérateur se prolonge continûment à $L^p(\mathbb{T})$ lorsque $p\in]1,+\infty[$.

I Quelques résultats d'analyse harmonique générale

1 Rappels

1.1 Le point générique de $M(2)$ sera noté $g = (x,\alpha)$ ou $g = (r,\varphi,\alpha)$, $x \in \mathbb{R}^2$ $r \in [0,+\infty[$, $\varphi \in [0,2\pi[$, $\alpha \in [0,2\pi[$, r et φ étant les coordonnées polaires de x . On notera aussi x_α le point transformé de x par la rotation d'angle α .

Le groupe $M(2)$ est unimodulaire ; la mesure de Haar est $dg = \frac{1}{4\pi^2}\, dx d\alpha = \frac{1}{4\pi^2}\, r dr d\varphi d\alpha$. Une fonction sur $M(2)$ sera identifiée suivant le cas à une fonction sur $\mathbb{R}^3$, 2π périodique de la dernière variable ou à une fonction sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, 2π-périodique des deux dernières variables.

$M(2)$ est un groupe de Lie résoluble, donc moyennable ; nous utiliserons cette propriété sous la forme suivante : pour tout compact K_1 de $M(2)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_2 de $M(2)$ tel que

$$\operatorname{mes}(K_1 K_2) \leqslant (1+\varepsilon)\operatorname{mes}(K_1) \ ,$$

$\operatorname{mes}(K_i)$ est la mesure de K_i (voir 2) .

1.2 Pour chaque $\rho > 0$, on définit une représentation, T_ρ , unitaire irréductible de $M(2)$ sur $L^2(\mathbf{T})$ de la façon suivante .

Si $g = (r,\varphi,\alpha)$ et $f \in L^2(\mathbf{T})$, on pose $T_\rho(g)f(\psi) = e^{i\rho r\cos(\psi-\varphi)}\, f(\psi-\alpha)$.

On montre dans (8) que toute représentation unitaire irréductible de $M(2)$ est équivalente à l'une d'elles.

1.3 Nous utiliserons la base de $L^2(\mathbf{T})$ formée des fonctions $e_n(\psi) = e^{in\psi}$, $n \in \mathbb{Z}$. Dans cette base les coefficients de Fourier de la représentation T_ρ sont

$$t^{\rho}_{m,n}(r,\varphi,\alpha) = \langle T_{\rho}(r,\varphi,\alpha)e_n, e_m\rangle_{L^2(\mathbb{T})} \quad ,$$

$$\text{soit} \quad t^{\rho}_{m,n}(r,\varphi,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\rho r\cos(\psi-\varphi)}\, e^{i[(n-m)\psi-n\alpha]}\,d\psi$$

$$= i^{n-m}\, e^{-i[n\alpha+(m-n)\varphi]} J_{n-n}(\rho r) \quad ,$$

où J_γ désigne la fonction de Bessel d'indice γ.

On trouve les résultats de 1.1 et 1.2 dans [12].

1.4 Nous utiliserons certains espaces de Banach introduits par Kunze et Stein dans [5]. Nous notons $\mathcal{L}L^2(\mathbb{T})$ l'espace de Banach des endomorphismes continus de $L^2(\mathbb{T})$ et $\mathcal{L}\mathcal{C}L^2(\mathbb{T})$ le sous-espace de $\mathcal{L}L^2(\mathbb{T})$ constitué des opérateurs compacts.

Une fonction $F : R^+ \to \mathcal{L}L^2(\mathbb{T})$ sera dite mesurable si elle est faiblement mesurable.

Pour tout $p \in [1,+\infty[$, on note $\mathbf{L}^p(\rho d\rho, \mathcal{B}_p)$, l'espace de Banach, pour la norme évidente, des fonctions $F : R^+ \to \mathcal{L}L^2(\mathbb{T})$ qui vérifient la relation

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}[F(\rho)F^*(\rho)]^{p/2}\, \rho d\rho < \infty \quad ,$$

où $\mathrm{Tr}(A)$ désigne la trace de l'opérateur A .

On a une définition analogue de $\mathbf{L}^\infty$ en faisant les modifications classiques.

On montre que, pour tout $p \in [1,+\infty[$, l'espace de Banach dual de $\mathbf{L}^p(\rho d\rho, \mathcal{B}_p)$ est $\mathbf{L}^{p'}(\rho d\rho, \mathcal{B}_{p'})$ où $1/p + 1/p' = 1$.

On pourra consulter [5] pour avoir plus de précision sur cette partie.

2 Transformation de Fourier

2.1.1 Soit f une fonction continue à support compact sur $M(2)$ et soit ρ un nombre strictement positif ; on pose

$$\hat{f}(\rho) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{M(2)} T_\rho(r,\varphi,\alpha) f(r,\varphi,\alpha) r dr d\varphi d\alpha \ .$$

$\hat{f}(\rho)$ est un opérateur compact de $L^2(\mathbf{T})$; les coefficients de la matrice de cet opérateur par rapport à la base $\{e_n\}$ sont

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}(\rho) e_n, e_m \rangle &= \hat{f}(\rho,m,n) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+2\pi} \int_0^{2\pi} t^{\rho}_{m,n}(r,\varphi,\alpha) f(r,\varphi,\alpha) r dr d\varphi d\alpha \ . \end{aligned}$$

L'application $f \mapsto \hat{f}(\rho)$ est un homomorphisme d'image dense de $L^1(M(2))$ dans $\mathcal{L}\, c\, (L^2(\mathbf{T}))$.

2.1.2 Une fonction, f, de $L^1(M(2))$ peut aussi être considérée comme un élément de $L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbf{T})$ ce qui permet de définir sa transformée de Fourier habituelle, les formules suivantes relient les diverses transformées .

Si l'on pose

$$\mathcal{F}_1 f(\rho,\psi,\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos(\psi-\varphi)} f(r,\varphi,\alpha) \, r dr d\varphi \ ,$$

$$\mathcal{F} f(\rho,\psi,n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos(\psi-\varphi) - in\alpha} f(r,\varphi,\alpha) \, r dr d\varphi d\alpha \ ,$$

on a

$$\hat{f}(\rho,m,n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i((n-m)\psi - n\alpha)} \mathcal{F}_1 f(\rho,\psi,\alpha) \, d\psi d\alpha$$

et

$$\hat{f}(\rho,m,n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\psi} \mathcal{F} f(\rho,\psi,n) \, d\psi \ .$$

2.2 Formule de Plancherel

Nous énonçons ci-dessous une proposition dont la démonstration est presque évidente.Ce résultat est sûrement déjà connu.Faute de référence et pour éviter des recherches inutiles au lecteur nous en donnons ici la preuve.

Proposition .

La transformation $f \to \hat{f}$ est une isométrie de $L^2(M(2))$ sur $\mathbf{L}^2(\rho d\rho, \mathcal{B}_2)$.

(On peut montrer, en utilisant une idée de Kunze et E.M. Stein (7) qu'elle applique $L^p(M(2))$ dans $\mathbf{L}^{p'}(\rho d\rho, \mathcal{B}_{p'})$ lorsque $p \in [1,2]$.

Adoptons la

Définition. Soit f une fonction sur R^+ , de carré intégrable par rapport à la mesure $\rho d\rho$; on appelle transformée de Fourier-Bessel d'ordre n de f la fonction

2.2.1 $$\mathfrak{F}\mathcal{B}_n(f)(r) = \int_0^{+\infty} f(r)J_n(\rho r)\rho d\rho \ .$$

On montre que $\mathfrak{F}\mathcal{B}_n$ est un automorphisme isométrique de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+, \rho d\rho)$ dont le carré est l'identité.

Passons à la démonstration de la proposition.

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $M(2)$, à support compact,

$$\hat{f}(\rho, m+n, n) = \frac{i^{-m}}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\alpha - im\varphi} J_{-m}(\rho r) f(r,\varphi,\alpha) r dr d\varphi d\alpha \ .$$

On obtient donc la transformation de Fourier opératorielle sur $M(2)$ en composant la transformation de Fourier sur $\mathbf{T}$ et la transformation de Fourier Bessel.

En utilisant les formules d'inversion, on trouve

2.2.2 $$f(r,\varphi,\alpha) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{Z}}} (i)^m e^{i[n\alpha+m\varphi]} \int_0^{+\infty} \rho J_{-m}(\rho r)\hat{f}(\rho,m+n,n)d\rho$$

Par ailleurs

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(\rho,n+m,n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha\left[\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{+\infty} J_{-m}(\rho r)rdr\int_0^{2\pi} e^{im\varphi} f(r,\varphi,\alpha)d\varphi\right|\right]^2,$$

2.2.3 $$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(\rho,m+n,n)|^2\right)\rho d\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha\int_0^{+\infty} rdr\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} f(r,\varphi,\alpha)d\varphi\right|^2,$$

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(\rho,m+n,n)|^2\right)\rho d\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha\int_0^{+\infty} rdr\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r,\varphi,\alpha)|^2 d\varphi\right).$$

Cette dernière égalité s'écrit aussi $\|\hat{f}\|_{L^2(\rho d\rho,\mathcal{B}_2)} = \|f\|_{L^2(M(2))}$.

Puisque $\mathcal{D}(M(2))$ est dense dans $L^2(M(2))$ ceci montre que la transformation de Fourier est une isométrie de $L^2(M(2))$ dans $L^2(\rho d\rho,\mathcal{B}_2)$.

Par ailleurs si F est une fonction simple de $L^2(\rho d\rho,\mathcal{B}_2)$, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{LC}(L^2(\Gamma))$ prenant un nombre fini de valeurs qui sont des opérateurs de rang fini, la formule 2.2.2 donne une fonction, f, dont F est la transformée de Fourier. Il suffit d'utiliser la densité de l'ensemble des fonctions simples dans $L^2(\rho d\rho,\mathcal{B}_2)$ pour voir que la transformation de Fourier est surjective.

2.3 <u>Transformée de Fourier d'un convoluteur de</u> $M(2)$

Soit $CONV_p(M(2))$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires de $L^p(M(2))$ qui commutent avec les translations à droite.

2.3.1 <u>Proposition.</u> $CONV_2(M(2))$ <u>et</u> $L^\infty(\rho d\rho,\mathcal{B}_\infty)$ <u>sont isométriquement isomorphes.</u>

La démonstration de cette proposition ressemble à la démonstration classique pour un groupe abélien (7).

2.3.2 Corollaire. Soit $S \in CONV_p(M(2))$, il existe une fonction, $\hat{S} \in L^\infty(\rho d\rho, \mathcal{B}_\infty)$, telle que pour toute fonction, $f \in L^p(M(2)) \cap L^2(M(2))$, la transformée de Fourier de $S * f$ soit $\hat{S}.\hat{f}$.

Il suffit de remarquer que le groupe $M(2)$ est moyennable et d'appliquer un résultat de (4).

3 Etude de certains convoluteurs

Les convoluteurs portés par R^2 ou T et les convoluteurs centraux (ceux qui commutent avec les translations à droite et à gauche) se décrivent facilement.

On sait que tout sous-groupe fermé de $M(2)$ est moyennable, par conséquent de synthèse pour l'algèbre $A_p(M(2))$ d'après (3). Plus précisément on a la proposition suivante :

3.1 Proposition. Soit S une distribution portée par l'un des deux sous-groupes R^2 ou T, les deux conditions suivantes sont équivalentes.

a) L'opérateur $f \mapsto S * f$ (convolution non abélienne) est borné sur $L^p(M(2))$.

b) L'opérateur $f \mapsto S * f$ (convolution abélienne) est borné sur $L^p(R^2)$ ou $L^p(T)$ suivant que S est porté par R^2 ou T ; de plus, selon les cas on a

$$\|S\|_{CONV_p(M(2))} = \|S\|_{CONV_p(R^2)} \quad \text{ou} \quad \|S\|_{CONV_p(M(2))} = \|S\|_{CONV_p(T)} .$$

On montre facilement qu'un convoluteur central est porté par R^2 et que sa transformée de Fourier est une fonction radiale.

On peut remarquer que les convoluteurs à support dans T sont exactement ceux dont la transformée de Fourier s'écrit : $\hat{S}(\rho,m,n) = \mathcal{F}S(m)\,\delta_{m,n}$ où $\mathcal{F}S$ est la suite bornée, transformée de Fourier de la distribution tempérée S , sur le groupe commutatif T .

3.2 Etant donnée une fonction, f , définie sur $\mathbb{R}^2$ on définit deux fonctions, $\tilde{f}$ et $f^\#$, sur M(2) ainsi :

$$\tilde{f}(x,\alpha) = f(x_{-\alpha}) \ , \ f^\#(x,\alpha) = f(x) \ .$$

On a le résultat suivant .

3.3 Proposition. Etant donnée une fonction, f , appartenant à $L^1(\mathbb{R}^2)$ les normes de $\tilde{f}$ et $f^\#$ dans $CONV_p(M(2))$ sont majorées par celle de f dans $CONV_p(\mathbb{R}^2)$.

Soit h un élément de $\mathcal{D}(M(2))$. On a

$$\tilde{f}*h(x,\alpha) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^{2\pi} f(x_{\beta-\alpha}-y)\, h(y,\beta)\, dy d\beta \ .$$

Or

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(x_{\beta-\alpha}-y)h(y,\beta)dy\right|^p dx \leq \|f\|^p_{CONV_p(\mathbb{R}^2)} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} |h(x,\beta)|^p dx\right) ,$$

donc

$$\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(x_{\beta-\alpha}-y)\, h(y,\beta)dy\right|^p d\alpha dx\right)^{1/p}$$

$$\leq \|f\|_{CONV_p(\mathbb{R}^2)} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} |h(x,\beta)|^p dx\right)^{1/p} ;$$

utilisant l'inégalité de Minkowski nous obtenons

$$\|\tilde{f}*h\|_{L^p(M(2))} \leq \|f\|_{CONV_p(\mathbb{R}^2)} \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} |h(x,\beta)|^p dx\right)^{1/p} d\beta \quad ,$$

d'où $$\|\tilde{f}*h\|_{L^p(M(2))} \leq \|h\|_{L^p(M(2))} \|f\|_{CONV_p(\mathbb{R}^2)} \ .$$

Un calcul analogue montre que

$$\|h*\tilde{f}\|_{L^p(M(2))} \leqslant \|h\|_{L^p(M(2))} \|f\|_{CONV_p(R^2)} .$$

Remarquons, d'autre part, que

$$\tilde{f}((x,\alpha)^{-1}) = \tilde{f}(-x_{-\alpha},-\alpha) = f(-x) * f^{\#}(-x,\alpha)$$

ce qui prouve l'assertion relative à $f^{\#}$.

f étant toujours une fonction de $L^1(R^2)$, nous noterons $\mathcal{F}f$ sa transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}f(\rho,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{i\rho r\cos(\phi-\varphi)} f(r,\varphi)\, r dr d\varphi$$

en vertu des formules 2.1.2 nous avons

3.4
$$\hat{f}^{\#}(\rho,m,n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n\neq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-im\phi}\mathcal{F}f(\rho,\phi)d\phi & \text{si } n=0 \end{cases}$$

$$\hat{\tilde{f}}(\rho,m,n) = \begin{cases} 0 & \text{si } m\neq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{in\phi}\mathcal{F}f(\rho,\phi)d\phi & \text{si } m=0 \end{cases}$$

3.5 <u>Remarque</u>. Les résultats de cette partie, à l'exception des formules 3.4, s'étendent aux convoluteurs vectoriels. De façon plus précise soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert séparables, appelons $\mathcal{B}$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$. Soit f un élément de $L^1(R^2,\mathcal{B})$. Alors f définit un convoluteur de $L^p(M(2),\mathcal{H}_1)$ dans $L^p(M(2),\mathcal{H}_2)$ à support dans R^2 , dont la norme est majorée par celle de f comme convoluteur de $L^p(R^2,\mathcal{H}_1)$ dans $L^p(R^2,\mathcal{H}_2)$, (le même résultat vaut pour les convoluteurs portés par Γ) en outre les résultats relatifs à $\tilde{f}$ et $f^{\#}$ sont valides.

III Démonstration des théorèmes

Pour démontrer les principaux résultats, nous aurons besoin des théorèmes d'intégrales singulières sur $M(2)$.

1 Intégrales singulières sur $M(2)$

1.0 Soit $g = (x,\alpha) \in M(2)$, posons $\lambda(g) = \lambda(x,\alpha) = |x|^2 + |\sin(\frac{\alpha}{2})|$.

Alors

$$\lambda[(x,\alpha)(y,\beta)] = |x+y_\alpha|^2 + |\sin[\frac{\alpha+\beta}{2}]| \quad ,$$

et

$$|\lambda[(x,\alpha)(y,\beta)]| \leqslant 2\ [\lambda(x,\alpha) + \lambda(y,\beta)] \ .$$

1.1 Pour tout $t > 0$, on pose $v(t) = \int_{\lambda(g)\leqslant t} dg$.

Si $t \geqslant 1$ $\qquad v(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{\pi}$

Si $0 \leqslant t \leqslant 1$ $\qquad v(t) = \frac{t}{\pi}\,\mathrm{ARCsin}t - \frac{1}{\pi}(1-\sqrt{1-t^2})$.

Par conséquent $v(t)$ est équivalent à $\frac{1}{2}t$ au voisinage de l'infini et à $\frac{t^2}{2\pi}$ au voisinage de 0.

Alors $\sup\limits_{t>0} \frac{v(2t)}{v(t)} < \infty$, ce qui montre que λ est une pseudo-distance.

Comme dans [1 chap.3]. Ceci donne d'après [1 p.74] l'énoncé suivant .

1.2 Théorème. Soit k une fonction localement intégrable sur $M(2)\setminus\{0\}$. On suppose que

1° $\|\hat{k}\|_{L^\infty[R^+,\rho d\rho,\mathcal{B}_\infty]} \leqslant A$,

2° Il existe une constante $\tau > 0$ telle que

$$\sup_{\lambda(g_0)\leqslant t}\int_{\lambda(g)\geqslant\tau t}|k(gg_0)-k(g)|\,dg \leqslant A\ .$$

Alors, pour tout $p\in\,]1,2]$, k est un opérateur de convolution à gauche de $L^p[M(2)]$; sa norme est $\mathcal{O}[[p-1]^{-1}]$.

2 Quelques inégalités

2.1 Pour tout $t>0$, posons $w(t)=\int_{\lambda(g)\geqslant t}\frac{dg}{\lambda(g)^2}$.

On a

$$w(t)=\int_t^{+\infty}\frac{dv(s)}{s^2}\ .$$

Par conséquent $w(t)\simeq\frac{1}{2t}$ au voisinage de $+\infty$,

$w(t)\simeq\frac{1}{4\pi}\log(\frac{1}{t})$ au voisinage de 0.

2.2 Soit f une fonction telle que $f\in L^2[M(2)]$, $\lambda f\in L^2[M(2)]$. On a les inégalités

$$\int_{\lambda(g)\leqslant t}|f(g)|\,dg\leqslant\left[\int_{M(2)}|f(g)|^2dg\right]^{\frac12}v(t)^{\frac12}\ ,$$

$$\int_{\lambda(g)\geqslant t}|f(g)|\,dg\leqslant\left[\int_{M(2)}|\lambda(g)f(g)|^2dg\right]^{\frac12}\left[\int_{\lambda(g)\geqslant t}\frac{dg}{[\lambda(g)]^2}\right]^{\frac12}\ ,$$

par conséquent

$$\|f\|_1\leqslant\operatorname*{Inf}_{t>0}\left(\|f\|_2\,[v(t)]^{\frac12}+\|\lambda f\|_2\,[w(t)]^{\frac12}\right)\ .$$

3 Une autre pseudo-distance

3.0 Soit $\lambda_1(g)=\lambda_1(x,\alpha)=|x|^2+\sin^2(\frac{\alpha}{2})$.

On vérifie que

$$\lambda_1[(x,\alpha)(y,\beta)]\leqslant 2[\lambda_1(x,\alpha)+\lambda_1(y,\beta)]\ .$$

3.1 Pour tout $t > 0$, on pose $v_1(t) = \int_{\lambda_1(g)} dg$; $w_1(t) = \int_{\lambda_1(g)>t} \frac{dg}{[\lambda_1(g)]^2}$.

Alors

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{1}{4\pi}\int_{|\sin\frac{\alpha}{2}|<\sqrt{t}}[t-\sin^2\tfrac{\alpha}{2}]d\alpha \\ &= \frac{t}{2}-\frac{1}{4} && \text{si } t \geqslant 1 \\ &= \frac{1}{\pi}[t-\tfrac{1}{2}]\text{Arcsin}\sqrt{t} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{t(1-t)} && \text{si } 0 < t \leqslant 1 . \end{aligned}$$

En opérant de la même façon que précédemment on voit que

$$v_1(t) = 0(t) \quad ; \quad w_1(t) = 0(t^{-1}) \quad \text{au voisinage de } +\infty ,$$

$$v_1(t) = 0(t^{3/2}) \; ; \; w_1(t) = 0(t^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{au voisinage de } 0 .$$

Par conséquent

$$\sup_{t>0} \frac{v_1(2t)}{v_1(t)} < +\infty ,$$

et on a un théorème d'intégrales singulières analogue au théorème 1.2 .

Démonstration du théorème 1.

Pour démontrer le premier théorème, nous aurons besoin de deux lemmes techniques : l'un étudie le comportement de la transformée de Fourier-Bessel ; le second généralise une inégalité de S. Berstein. Ces résultats feront l'objet de la première partie. Nous aurons aussi besoin d'une partition de l'unité d'un type spécial ; elle est décrite dans la seconde partie. Nous démontrons aussi le théorème dans cette partie.

Un lemme sur les transformations de Fourier-Bessel .

1.1 Lemme. Soient n un entier rationnel et u une fonction de $[0,+\infty[$ dans C, de classe C^2, à support compact. On suppose en outre que, $u'(t) = o(t^{-1-|n|})$ et que, si $n=0$, $u(t) = o(1)$ au voisinage de 0. Si l'on pose

$$v(x) = \int_0^{+\infty} u(y)\, J_n(xy) y\, dy \quad \text{on a} \quad x^2 v(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{n^2}{y^2} u(y) - \frac{1}{y} u'(y) - u''(y)\right) J_n(xy) y\, dy .$$

Rappelons les faits suivants .

$J_0(t) = O(1)$, $J_0'(t) = O(t)$ au voisinage de 0.

et, si $n \neq 0$, $J_n(t) = O(t^{|n|})$, $J_n'(t) = O(t^{|n|-1})$ au voisinage de 0.

$t^2 J_n(t) = n^2 J_n(t) - t\, J_n'(t) - t^2 J_n''(t)$,

donc

$$x^2 J_n(xy) = \frac{n^2}{y^2} J_n(xy) - \frac{x}{y} J_n'(xy) - x^2 J_n''(xy).$$

Or

$$\int_0^{+\infty} -x\, J_n'(xy) u(y) dy = [-J_n(xy) u(y)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} J_n(xy) u'(y) dy = \int_0^{+\infty} \frac{u'(y)}{y} J_n(xy) y dy ,$$

de même

$$\int_0^{+\infty} -x^2 J_n''(xy)\, u(y) dy = - \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{y} u'(y) + u''(y)\right) J_n(xy) y dy ,$$

ce qui démontre le lemme.

Ce lemme permet d'obtenir la formule suivante : soit f une fonction de $L^2(M(2))$ telle que $r^2 f$ appartienne aussi à $L^2(M(2))$, alors

$$(r^2 f)^\wedge(\rho,m,n) = \frac{|m-n|^2}{\rho^2} \hat{f}(\rho,m,n) - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \hat{f}(\rho,m,n) - \frac{d^2}{d\rho^2} \hat{f}(\rho,m,n).$$

En effet on peut supposer que f est à support compact, auquel cas $\hat{f}(\rho,m,n)$ est une fonction C^{∞}. On écrit :

$$f(r,\varphi,\alpha) = \sum_{p,q} i^q\, e^{i(p\alpha+q\varphi)} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\rho,p+q,p)\, J_{-q}(\rho r) r dr$$

et l'on applique le lemme à chaque terme.

1.2 Inégalité de Bernstein pour $M(2)$.

Considérons une fonction, $f \in L^1(M(2)) \cap L^{\infty}(M(2))$, telle que $\hat{f}(\rho,m,n)$ soit nul si $\rho \geqslant R$ ou si $|n| \geqslant N$. Comme nous avons

$$\hat{f}(\rho,m,n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\psi}\, \mathcal{F}f(\rho,\psi,n)\,d\psi \, .$$

On en déduit que $\mathcal{F}f(\rho,\psi,n)$ est nul dans les mêmes conditions si bien que l'inégalité habituelle de Bernstein donne

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{\infty} \leqslant CR\,\|f\|_{\infty} \, , \quad \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{\infty} \leqslant CR\,\|f\|_{\infty} \, , \quad \left\|\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right\|_{\infty} \leqslant CN\,\|f\|_{\infty} \, .$$

Soient $g = (x,\alpha) = (r,\varphi,\alpha)$ et $g_0 = (x_0,\alpha_0) = (r_0,\varphi_0,\alpha_0)$ deux éléments de $M(2)$. On a

$$gg_0 = (x + (x_0)_{\alpha} \, , \, \alpha + \alpha_0) \, ,$$

d'où

$$|f(gg_0) - f(g)| \leqslant C(R|x_0| + N|\sin\frac{\alpha_0}{2}|)\|f\|_{\infty} \, .$$

Ceci prouve que, pour chaque g_0, il existe une mesure, μ, sur $M(2)$ telle que $\|\mu\| \leqslant C(R|x_0|+N|\sin\frac{\alpha_0}{2}|)$ et telle que $\int_{M(2)} f d\mu = f(g_0) - f(e)$ pour toute fonction continue, f, telle que $\hat{f}(\rho,m,n)$ soit nul si $\rho \geqslant R$ ou si $|n| \geqslant N$ (e désigne bien sûr l'élément neutre de $M(2)$).

Soit donc f une telle fonction, la fonction $g_1 \mapsto f(gg_1)$ a encore la même propriété, on a donc $\int_{M(2)} f(gg_1)d\mu(g_1) = f(gg_0)-f(g)$,

par suite $\int_{M(2)} |f(gg_0)-f(g)|dg \leqslant C(R|x_0|+N|\sin\frac{\beta_0}{2}|)\|f\|_{L^1(M(2))}$.

2.1 Partition de l'unité

2.1.0 Soit w une fonction de $\mathcal{D}(R^+)$, positive, à support dans $[\frac{1}{2},2]$ et telle que, pour tout nombre, t, réel positif, on ait

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} w(2^{-k}t) = 1 .$$

Si t est dans l'intervalle $[1,2]$, il n'y a que deux termes non nuls dans la somme ci-dessus, par suite : $w(t) + w(\frac{t}{2}) = 1$.

Pour tout entier rationnel, j, posons

$$\Omega_j(t) = \sum_{k\leqslant j} w(2^{-k}t) .$$

On a les égalités suivantes

$$\Omega_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant 2^j \\ 0 & \text{si } t \geqslant 2^{j+1} \\ w(2^{-j}t) = 1-w(2^{-1-j}t) & \text{si } 2^j \leqslant t \leqslant 2^{j+1} \end{cases}$$

2.1.1 Soit $n_0 = 0$ et, si j est un entier strictement positif, $n_j = 2^{2(j-1)}$.

Pour chaque j, entier positif ou nul, on définit sur $\mathbb{Z}$ une fonction χ_j par les relations suivantes.

1° $\chi_0(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

2° $\chi_j(\pm n_j) = 1$; $\chi_j(\pm n_{j+1}) = \chi_j(\pm n_{j-1}) = 0$,

χ_j est linéaire entre les points $\pm n_{j-1}$, $\pm n_j$, $\pm n_{j+1}$, nulle en dehors de l'intervalle $[-n_{j+1}, n_{j+1}]$.

Alors

$$\sum_{j\geqslant 0} \chi_j = 1 .$$

Soit $X_j = \sum_{0\leqslant k\leqslant j} \chi_k$, j étant un entier positif.

Alors

$$X_j(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } |n| \geqslant n_{j+1} \\ 1 & \text{si } |n| \leqslant n_j \\ \chi_j(n) = 1-\chi_{j+1}(n) & \text{si } n_j \leqslant |n| \leqslant n_{j+1} \end{cases}$$

2.1.2 Posons encore, pour tout $j \leqslant 0$,

$$a_j(\rho,n) = w(2^{-j}\rho)\chi_o(n)$$

et pour tout $j > 0$

$$a_j(\rho,n) = \Omega_j(\rho)X_j(n) - \Omega_{j-1}(\rho)X_{j-1}(n) .$$

Alors

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j(\rho,n) = 1 .$$

Soit $j > 0$, on a

$$a_j(\rho,n) = \chi_j(n) \qquad \text{pour tout } \rho \in]0,2^{j-1}]$$

$$a_j(\rho,n) = X_j(n) - w(2^{-j+1}\rho)X_{j-1}(n) = \chi_j(n) + w(2^{-j}\rho)X_{j-1}(n)$$

$$\text{pour tout } \rho \in [2^{j-1}, 2^j]$$

et

$$a_j(\rho,n) = w(2^{-j}\rho)X_j(n) \qquad \text{pour tout } \rho \in [2^j, 2^{j+1}]$$

$$a_j(\rho,n) = 0 \qquad \text{pour tout } \rho \geqslant 2^{j+1} .$$

Autrement dit, $a_j(\rho,n)$ est nul dans chacun des cas suivants :

1° $\rho \geqslant 2^{j+1}$

2° $|n| \geqslant n_{j+1}$

3° $\rho \leqslant 2^{j-1}$ et $|n| \leqslant n_{j-1}$.

On remarque enfin que

2.1.3 Il existe une constante positive C , telle que

$$|a_j(\rho,n)| \leqslant C \qquad \text{et} \quad |a'_j(\rho,n)| \leqslant C2^{-j} ,$$

$$|a''_j(\rho,n)| \leqslant C2^{-2j} \qquad \text{et} \quad |a_j(\rho,n)-a_j(\rho,n-1)| \leqslant C2^{-2j} .$$

2.1.4 Dans ce paragraphe M désigne une fonction bornée de $]0,+\infty[\times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, de classe C^2 par rapport à la première variable.

On suppose que pour tout entier $n > 0$, pour tout entier m , on a

$$|M'(\rho,m,n)| = o(\rho^{-1-|m-n|})$$

au voisinage de l'origine et $M(\rho,n,n) = o(1)$.

Soit $$M_j(\rho,m,n) = M(\rho,m,n)a_j(\rho,n).$$

On note $M(\rho)$ et $M_j(\rho)$ les matrices dont les coefficients sont respectivement $M(\rho,m,n)$ et $M_j(\rho,m,n)$. On a

$$\frac{(m-n)^2}{\rho^2} M_j(\rho,m,n) - \frac{M'_j(\rho,m,n)}{\rho} - M''_j(\rho,m,n) =$$

$$a_j(\rho,n)\Big[\frac{(m-n)^2}{\rho^2} M(\rho,m,n) - \frac{1}{\rho} M'(\rho,m,n) - M''(\rho,m,n)\Big] - a'_j(\rho,n)\Big[\frac{1}{\rho} M(\rho,m,n) + 2M'(\rho,m,n)\Big] - a''_j(\rho,n)M(\rho,m,n)$$

et

$$M_j(\rho,m,n) - M_j(\rho,m+1,n+1) = [a_j(\rho,n) - a_j(\rho,n+1)]M(\rho,m,n) + a_j(\rho,n+1)[M(\rho,m,n) - M(\rho,m+1,n+1)] .$$

On conserve les notations de l'énoncé du théorème (1) et on suppose que pour tout j , A_j , B_j , C_j , D_j sont finis.

2.2 Evaluons la quantité. $\int_0^{+\infty} \|M_j(\rho)\|^2_{\mathcal{E}_2}\rho d\rho$ pour voir que M_j est la transformée de Fourier d'une fonction f_j dans $L^2[M(2)]$.

A cette fin, remarquons d'abord que pour j négatif ou nul, f_j ne dépend pas de α , puisque sa transformée de Fourier est telle que $\hat{f}_j(\rho,m,n) = 0$ si $n \neq 0$; nous évaluerons alors la quantité $\|r^2 f_j\|_2$ pour $j \leqslant 0$ et $\|\lambda f_j\|_2$ pour j strictement positif.

2.2.1 Soit $j \leqslant 0$ nous ferons une évaluation classique du type-Hörmander

$$\|f_j\|_2^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} |M_j(\rho,m,0)|^2 \rho d\rho \leqslant C^P \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} |M(\rho,m,0)|^2 \rho d\rho \leqslant C2^{4j}(A_j+A_{j+1}) .$$

Mais d'après le lemme

$$\|r^2 f_j\|_2^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^{+\infty} |\frac{m^2}{\rho^2} M_j(\rho,m,0) - \frac{1}{\rho} M_j'(\rho,m,0) - M_j''(\rho,m,0)|^2 \rho d\rho$$

$$< C \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} [|\frac{m^2}{\rho^2} M(\rho,m,0) - \frac{1}{\rho} M'(\rho,m,0) - M''(\rho,m,0)|^2 + 2^{-2j}|\frac{1}{\rho} M(\rho,m,0) + 2M'(\rho,m,0)|^2]\rho d\rho$$

$$+ C \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} 2^{-4j}|M(\rho,m,0)|^2 \rho d\rho$$

$$< C \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}} (2^{-4j}(1+m^4)|M(\rho,m,0)|^2 + 2^{-2j}|M'(\rho,m,0)|^2 + |M''(\rho,m,0)|^2)\rho d\rho$$

$$< C\, [A_{j1} + B_j + C_j + A_{j+1} + B_{j+1} + C_{j+1}] .$$

2.2.2 Supposons $j > 0$; alors d'après le lemme (1.1)

$$\|r^2 f_j\|_2^2 = \sum_{m,n} \int_0^{+\infty} |\frac{1}{\rho^2} (m-n)^2 M_j(\rho,m,n) - \frac{1}{\rho} M_j'(\rho,m,n) - M_j''(\rho,m,n)|^2 \rho d\rho$$

$$\leqslant 3 \sum_{m,n} [\int_0^{+\infty} |a_j(\rho,n)|^2 |(\frac{m-n}{\rho})^2 M(\rho,m,n) - \frac{1}{\rho} M'(\rho,m,n) - M''(\rho,m,n)|^2 \rho d\rho$$

$$+3\sum_{m,n}\int_0^{+\infty}|a_j'(\rho,n)|^2\left|\frac{1}{\rho}\,M(\rho,m,n)+2M'(\rho,m,n)\right|^2\rho d\rho$$

$$+3\sum_{m,n}\int_0^{+\infty}|a_j''(\rho,n)|^2|M(\rho,m,n)|^2\rho d\rho$$

$$\leqslant C\,(A_j+B_j+C_j+A_{j+1}+B_{j+1}+C_{j+1})$$

$$\|\sin\tfrac{\alpha}{2}\,f_j\|_2^2=\frac{1}{4}\,\|(1-e^{-i\alpha})f_j\|_2^2=\frac{1}{4}\sum_{m,n}\int_0^{+\infty}|M_j(\rho,m,n)-M_j(\rho,m+1,n+1)|^2\rho d\rho$$

$$\leqslant C\sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big[\sum_{n_{j-1}\leqslant|n|\leqslant n_{j+1}}\int_0^{2^{j-1}}|M(\rho,m,n)-M(\rho,m+1,n+1)|^2\rho d\rho+\sum_{|n|\leqslant n_{j+1}}\int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}}|M(\rho,m,n)-M(\rho,m+1,n+1)|^2\rho d\rho\Big]$$

$$+\,2^{-4j}C\sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big[\sum_{n_{j-1}\leqslant|n|\leqslant n_{j+1}}\int_0^{2^{j-1}}|M(\rho,m,n)|^2\rho d\rho+\sum_{|n|\leqslant n_{j+1}}\int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}}|M(\rho,m,n)|^2\rho d\rho\Big]$$

$$\leqslant C(A_j+A_{j+1}+D_j+D_{j+1})$$

d'où $\|\lambda f_j\|_2^2\leqslant C(A_j+B_j+C_j+D_j+A_{j+1}+B_{j+1}+C_{j+1}+D_{j+1})$.

2.2.3 $$\|f_j\|_2^2=\sum_{m,n}\int_0^{+\infty}|M_j(\rho,m,n)|^2\rho d\rho$$

$$\leqslant C\sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big[\sum_{n_{j-1}\leqslant|n|\leqslant n_{j+1}}\int_0^{2^{j-1}}|M(\rho,m,n)|^2\rho d\rho+\sum_{|n|\leqslant n_{j+1}}\int_{2^{j-1}}^{2^{j+1}}|M(\rho,m,n)|^2\rho d\rho\Big]$$

$$\leqslant C2^{4j}(A_j+A_{j+1})$$

2.2.4 Posons, si $j\leqslant 0$, $u_j=(A_j+B_j+C_j+A_{j+1}+B_{j+1}+C_{j+1})^{\frac{1}{2}}$

et, si $j>0$, $u_j=(A_j+B_j+C_j+D_j+A_{j+1}+B_{j+1}+C_{j+1}+D_{j+1})^{\frac{1}{2}}$.

2.2.5 Soit $j\leqslant 0$, on a

$$\|f_j\|_1\leqslant C\inf_{t>0}\,(\|f_j\|_2t+\|r^2f_j\|_2t^{-1})\leqslant C\,u_j\,2^j\,.$$

D'autre part puisque $\hat{f}_j(\rho,m,n)$ est nul lorsque n est différent de 0 on a $f_j(x,\alpha)=f_j^b(x)$, le spectre de la fonction f^b étant contenu dans la boule de centre 0 et de rayon 2^{j+1} . Des estimations classiques de Hörmander [5] montrent que, sous l'hypothèse $\sup_{j<0} 2^j u_j < \infty$, $\sum_{j<0} f_j^b$ est un convoluteur de $L^p(\mathbb{R}^2)$ pour tout $p \in]1,+\infty[$ et donc que $\sum_{j<0} f_j$ est un convoluteur à droite et à gauche de $L^p(M(2))$.

2.2.6 Soit $j > 0$. Puisque $\|f_j\|_2 \leqslant C 2^{2j} u_j$ et $\|\lambda f_j\|_2 \leqslant C u_j$

nous avons : $\|f_j\|_1 \leqslant C u_j \inf_{t>0}(2^{2j}(v(t))^{\frac{1}{2}},(w(t))^{\frac{1}{2}})$.

Prenant $t = 2^{-2j}$ nous obtenons

$$\|f_j\|_1 \leqslant C\, j^{\frac{1}{2}} u_j .$$

2.2.7 Soit T_j l'opérateur de $L^2(M(2))$ défini par la convolution à gauche par f_j ; T_j^* est l'opération de convolution à gauche par f_j^*. La norme de $T_i T_j^*$ ainsi que celle de $T_i^* T_j$ ne dépasse pas $\|f_i\|_{L^1(M(2))} \|f_j\|_{L^1(M(2))}$; d'autre part $T_i^* T_j$ et $T_i T_j^*$ sont nuls si $|i-j| > 1$ donc l'hypothèse $\sup_{j>0} j^{\frac{1}{2}} u_j < \infty$ implique $\sup_j \sum_i \|T_i T_j^*\|^{\frac{1}{2}} < \infty$ et $\sup_j \sum_i \|T_i^* T_j\|^{\frac{1}{2}}$ et l'on conclut au moyen d'un lemme de Cotlar [1 p.155] que $\sum_{j>0} T_j$ est un opérateur borné de $L^2(M(2))$.

2.2.8 Soit $g_0 \in M(2)$; on pose $t = \lambda(g_0)$ et l'on veut évaluer

$$\mu_j(g_0) = \int_{\lambda(g)>4t} |f_j(gg_0) - f_j(g)|\, dg .$$

Puisque $\lambda(gg_0) \geqslant \frac{1}{2}(\lambda(g) - 2\lambda(g_0))$ on a $\{g ; \lambda(g) \geqslant 4t\} \subset \{g ; \lambda(gg_0) \geqslant t\}$,

donc $\displaystyle\int_{\lambda(g)>4t} |f_j(gg_0)|\, dg \leqslant \int_{\lambda(gg_0)>t} |f_j(gg_0)|\, dg \leqslant \|\lambda f_j\|_2 (w(t))^{\frac{1}{2}}$.

On a aussi $\displaystyle\int_{\lambda(g)>4t} |f_j(g)|\, dg \leqslant \|\lambda f_j\|_2 (w(4t))^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\lambda f_j\|_2 (w(t))^{\frac{1}{2}}$,

donc $\mu_j(g_0) \leqslant C u_j (w(t))^{\frac{1}{2}}$.

On peut aussi appliquer l'inégalité de Bernstein établie en 1.2 à f_j :

$$\int_{M(2)} |f_j(gg_0) - f_j(g)|\, dg \leqslant C(r_0 2^j + 2^{2j} |\sin \frac{\beta_0}{2}|)\, \|f_j\|_1 ,$$

où $g_o(r_o,\varphi_o,\beta_o)$. On a $r_o \leqslant t^{\frac{1}{2}}$, $|\sin\frac{\beta_o}{2}| \leqslant \inf(t,1)$,

donc $\displaystyle\int_{M(2)} |f_j(gg_o)-f_j(g)|dg \leqslant Cj^{\frac{1}{2}}2^j(t^{\frac{1}{2}}+2^j\inf(t,1))u_j$.

En définitive $\mu_j(g_o) \leqslant Cu_j \inf(j^{\frac{1}{2}}2^j(t^{\frac{1}{2}}+2^j\inf(t,1)),(w(t))^{\frac{1}{2}})$.

2.2.9 Nous allons montrer que, sous l'hypothèse $\sup\limits_{j>0} j^{3/2}u_j < \infty$, on a

$$\sup_{g_o\in M(2)} \sum_{j>0} \mu_j(g_o) < +\infty \ .$$

Lorsque $t \geqslant \frac{1}{2}$ nous avons $\mu_j(g_o) \leqslant Cu_j$ et, par conséquent,

$$\sum_{j>0} \mu_j(g_o) \leqslant C \sum_{j>0} u_j < +\infty \ .$$

Lorsque $t < \frac{1}{2}$ on a

$$\sum_{j>0} \mu_j(g_o) < C[(\mathrm{Log}\,\tfrac{1}{t})^{\frac{1}{2}} \sum_{j>\frac{1}{4}\frac{\mathrm{Log}t^{-1}}{\mathrm{Log}2}} u_j + t^{\frac{1}{2}} \sum_{0<j\leqslant\frac{1}{4}\frac{\mathrm{Log}t^{-1}}{\mathrm{Log}2}} j^{\frac{1}{2}} u_j\, 2^{2j}] \ .$$

Puisque $u_j = O(j^{-3/2})$ nous avons

$$\sum_{j>\frac{1}{4}\frac{\mathrm{Log}t^{-1}}{\mathrm{Log}2}} u_j \leqslant C(\frac{1}{4}\frac{\mathrm{Log}t^{-1}}{\mathrm{Log}2})^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \sum_{0<j\leqslant\frac{1}{4}\frac{\mathrm{Log}t^{-1}}{\mathrm{Log}2}} j^{\frac{1}{2}}\, 2^{2j}\, u_j \leqslant C2^{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{Log}t^{-1}}{\mathrm{Log}2}} \ ,$$

d'où le résultat annoncé.

2.2.10 Le calcul précédent montre que les noyaux $\sum\limits_{0<j\leqslant k} f_j$ vérifient uniformément les conditions du théorème III 1.2. Ceci, joint à 2.2.7, prouve que $\sum\limits_{k_1<j\leqslant k_2} M_j$ est, pour tout $p \in]1,2[$, un multiplicateur à gauche de $\mathcal{F}(L^p(M(2)))$ dont la norme est majorée indépendamment de k_1 et k_2 . On obtient le théorème par passage à la limite.

Théorème du type Marcinkiewicz

La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes : on prouve d'abord des inégalités du type de celles de Zygmund et de Littlewood-Paley puis on démontre le théorème par un procédé standard.

1 <u>Inégalité de Littlewood-Paley</u>

Soit w une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ à support dans $[\frac{1}{2},2]$ et telle que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} w(2^{-j}\rho) = 1$. On désigne par u_j la fonction sur $\mathbb{R}^2$ dont la transformée de Fourier, $\hat{u}_j$, est telle que $\hat{u}_j(x) = w(2^{-j}|x|)$. Si f est une fonction de $L^p(M(2))$ on pose

$$\Delta_j(f) = f*(u_j\otimes\delta_T)$$

(δ_T désigne la masse unité placée en l'élément neutre de T).

<u>Proposition</u>. <u>Pour tout</u> p , <u>nombre strictement supérieur à</u> 1, <u>il existe un nombre</u>, C_p , <u>tel que pour toute fonction</u>, $f \in L^p(M(2))$, <u>on ait</u>

$$C_p^{-1} \|f\|_{L^p(M(2))} \leqslant \|(\sum_j |\Delta_j(f)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(M(2))} .$$

C'est une simple conséquence de la remarque I.3.5 et de l'inégalité de Littlewood-Paley habituelle

$$C_p^{-1} \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|(\sum_j |u_j*h|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_p \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

pour toute fonction, h , dans $L^p(\mathbb{R}^2)$.

2 Inégalité de Zygmund

Etant donné un entier positif, n , on appelle H_n la distribution sur $\mathbb{T}$ dont la transformée de Fourier est la fonction caractéristique de $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Si a est un point de $\mathbb{R}^2$ on note D_a la fonction sur $\mathbb{R}^2$ dont la transformée de Fourier est la fonction caractéristique du rectangle à côtés parallèles aux axes dont 0 et a sont deux sommets.

Proposition. Pour tout nombre, p , strictement supérieur à 1, il existe un nombre, c_p , tel que, pour toute suite, $(f_n)_{n\geq 0}$, de fonctions de $L^p(M(2))$ et pour toute suite, $(a_n, k_n)_{n\geq 0}$, d'éléments de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}$ on ait

$$\|(\sum_n |(D_{a_n} \otimes H_{k_n}) * f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))} \leqslant c_p \|(\sum_n |f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))} .$$

On a

$$(D_{a_n} \otimes H_{k_n}) * f_n = (D_{a_n} \otimes \delta_{\mathbb{T}}) * (\delta_{\mathbb{R}^2} \otimes H_{k_n}) * f_n \quad ,$$

($\delta_{\mathbb{R}^2}$ désigne la masse 1 placée en 0 dans $\mathbb{R}^2$).

Les inégalités habituelles de Zygmund s'écrivent

$$\|(\sum_n |D_{a_n} * g_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leqslant c_p \|(\sum_n |g_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \quad , \quad (g_n \in L^p(\mathbb{R}^2)) ,$$

$$\|(\sum_n |H_{k_n} * h_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant c_p \|(\sum_n |h_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(\mathbb{T})} \quad , \quad (h_n \in L^p(\mathbb{T})) .$$

D'après la remarque I.3.5 nous avons

$$\|(\sum_n |(\delta_{\mathbb{R}^2} \otimes H_{k_n}) * f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))} \leqslant c_p \|(\sum_n |f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))}$$

et

$$\|(\sum_n |(D_{a_n} \otimes \delta_{\mathbb{T}}) * (\delta_{\mathbb{R}^2} \otimes H_{k_n}) * f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))} \leqslant c_p \|(\sum_n |(\delta_{\mathbb{R}^2} \otimes H_{k_n}) * f_n|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^p(M(2))}$$

d'où la proposition.

On utilisera de cette proposition une version continue qui se démontre de même.

3 Théorème de Marcinkiewicz

Si f appartient à $L^p(M(2))$, a à $\mathbb{R}^2$, n à $\mathbb{N}$ on note

$$S_{a,n}(f) = (D_a \otimes H_n) * f \ .$$

Le principe de la démonstration est le suivant : si T est un opérateur de convolution à gauche tel que l'on puisse écrire

$$\Delta_j(Tf) = \int S_{a,n}(\Delta_j(f))\, d\mu_j(a,n) \ ,$$

où μ_j est une mesure sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}$ de façon que $M = \sup \|\mu_j\| < +\infty$, on a

$$|\Delta_j(Tf)|^2 \leqslant M \int |S_{a,n}(\Delta_j(f))|^2 d|\mu_j|(a,n) \ ,$$

$$\left(\sum_j |\Delta_j(Tf)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M^{\frac{1}{2}}\left(\sum_j \int |S_{a,n}(\Delta_j(f))|^2 d|\mu_j|(a,n)\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Prenant les normes L^p des deux membres et tenant compte des deux dernières propositions nous obtenons

$$\|Tf\|_{L^p(M(2))} \leqslant MC_p^3 \|f\|_{L^p(M(2))} \ .$$

Il sera commode dans la suite de travailler sur la transformée de Fourier abélienne, Ω, de T.

Soit donc Ω une fonction de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, deux fois continûment dérivable et bornée. C'est la transformée de Fourier abélienne d'une distribution T sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}$. Ce n'est pas une restriction de supposer que $\Omega(x,y,n)$ est nul si l'un au moins des trois nombres x, y, n est négatif.

Soit j un entier rationnel. Pour tout point, (x,y), de R^2 tel que l'on ait $x > 0$, $y > 0$ et $2^{j-1} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 2^{j+1}$, pour tout entier, n , on a

$$\Omega(x,y,n) = \int_x^{2^{j+1}}\int_y^{2^{j+1}} \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}(u,v,n)dudv - \int_y^{2^{j+1}} \frac{\partial\Omega}{\partial y}(2^{j+1},v,n)dv$$
$$- \int_x^{2^{j+1}} \frac{\partial\Omega}{\partial x}(u,2^{j+1},n)du + \Omega(2^{j+1},2^{j+1},n) \text{ .}$$

Notons $\chi_{(x,y)}$ la fonction telle que

$\chi_{(x,y)}(u,v)$ égale 1 si $0 \leqslant x \leqslant u$ et $0 \leqslant y \leqslant v$, 0 sinon.

On a alors

$$\Omega(x,y,n) = \iint_{\mathcal{E}_j} \chi_{u,v}(x,y)\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}(u,v,n)dudv$$
$$- \int_0^{2^{j-1}} \chi_{(2^{j+1},v)}(x,y)\frac{\partial\Omega}{\partial y}(2^{j+1},v,n)dv - \int_0^{2^{j+1}} \chi_{(u,2^{j+1})}(x,y)\ \frac{\partial\Omega}{\partial x}(u,2^{j+1},n)du$$
$$+ \chi_{(2^{j+1},2^{j+1})}(x,y)\ \Omega(2^{j+1},2^{j+1},n)$$

où $\mathcal{E}_j = \{(x,y) \ ; \ 0 \leqslant x \leqslant 2^{j+1} \ , \ 0 \leqslant y \leqslant 2^{j+1} \ , \ \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 2^j\}$.

On a aussi, lorsque n est supérieur à 1

$$\Omega(x,y,n) = \Omega(x,y,0)1_N(n) + \sum_{\ell=0}^{+\infty} (\Omega(x,y,\ell+1)-\Omega(x,y,\ell))1_{\ell+N^*}(n) \text{ .}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\Delta_j(Tf) = \int S_{(u,v),\ell}(\Delta_j f)\ d\mu_j(u,v,\ell)$$

où

$$\|\mu_j\| \leqslant \iint_{\mathcal{E}_j} (|\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}(u,v,0)| + \sum_{\ell=0}^{\infty} |\frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}(u,v,\ell+1) - \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\partial y}(u,v,\ell)|dudv$$
$$+ \int_0^{2^{j+1}} (|\frac{\partial\Omega}{\partial y}(2^{j+1},t,0)| + |\frac{\partial\Omega}{\partial x}(t,2^{j+1},0)|)dt$$

$$+ \int_0^{2^{j+1}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\left|\frac{\partial\Omega}{\partial y}(2^{j+1},t,\ell+1) - \frac{\partial\Omega}{\partial y}(2^{j+1},t,\ell)\right| + \left|\frac{\partial\Omega}{\partial x}(t,2^{j+1},\ell+1) - \frac{\partial\Omega}{\partial x}(t,2^{j+1},\ell)\right| \right) dt$$

$$+ |\Omega(2^{j+1},2^{j+1},0)| + \sum_{\ell=0}^{+\infty} |\Omega(2^{j+1},2^{j+1},\ell+1) - \Omega(2^{j+1},2^{j+1},\ell)| \; .$$

Bien sûr on opère de même lorsque Ω a son support dans l'un des produits d'un quadrant de $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{N}$ ou $-\mathbb{N}$. Ceci prouve le théorème 2.

Comme cas particulier de ce théorème on peut examiner ce que deviennent ces conditions lorsque

$$\Omega(\rho\cos\phi,\rho\sin\phi,n) = \Omega_1(\phi,n) \; .$$

Un calcul facile montre que s'il existe un nombre M tel que

(i) $|\Omega_1(\phi,n)| \leqslant M \; , \; \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\Omega_1(\phi,n) - \Omega_1(\phi,n+1)| \leqslant M$,

(ii) $\int_0^{2\pi} |\Omega_1'(\phi,n)|\,d\phi \leqslant M \; , \; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\Omega_1'(\phi,n) - \Omega_1'(\phi,n+1)|\,d\phi \leqslant M$,

(iii) $\int_0^{2\pi} |\sin 2\phi\, \Omega_1''(\phi,n)|\,d\phi \leqslant M \; , \; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int^{2\pi} |\sin 2\phi|\; |\Omega_1''(\phi,n) - \Omega_1''(\phi,n+1)|\,d\phi \leqslant M$

les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites.

Restriction d'un multiplicateur

Théorème. Soit S un convoluteur à gauche de $L^p(M(2))$ dont la transformée de Fourier abélienne, $\mathcal{F}$, est une fonction continue sur la couronne,

$\{(\rho,\psi,n)\ ;\ 0 < \rho_1 < \rho < \rho_2\ ,\ n \in \mathbb{Z}\ ,\ 0 \leqslant \phi < 2\pi\}$.

Alors, lorsque l'on a $\rho_1 < \rho < \rho_2$, $\hat{S}(\rho)$ est un opérateur borné de $L^p(\mathbf{T})$.

Soient deux fonctions, u et v , la première dans $L^p(\mathbf{T})$, la seconde dans $L^{p'}(\mathbf{T})$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1)$. La fonction $g \mapsto \langle T_\rho(g)u,v\rangle$ est dans $B_p(M(2))$ (voir (2)), sa norme est majorée par $\|u\|_{L^p(\mathbf{T})}\ \|v\|_{L^{p'}(\mathbf{T})}$.

Soit w une fonction paire, indéfiniment dérivable, à support compact dans $\mathbb{R}$, telle que $\int_0^{+\infty} rw(r)dr = 1$. On note w_ε la fonction telle que $w_\varepsilon(r) = \frac{1}{\varepsilon^2} w(\frac{r}{\varepsilon})$ et F_ε la fonction sur $M(2)$ telle que $\mathcal{F}F_\varepsilon(x,n) = w_\varepsilon(|x|)\delta_{0,n}$.

La fonction F_ε est dans $A_p(M(2))$ et sa norme est majorée indépendamment de ε .

On peut écrire

$$|\langle F_\varepsilon . S\ ,\ \langle T_\rho(.)u,v\rangle\rangle| \leqslant C\ \|S\|_{CONV_p(M(2))}\|u\|_{L^p(\mathbf{T})}\|v\|_{L^{p'}(\mathbf{T})}\ ,$$

d'autre part

$$\langle F_\varepsilon . S\ ,\ \langle T_\rho(.)u,v\rangle\rangle = \langle (F_\varepsilon . S)^\wedge(\rho)u,v\rangle\ .$$

Ceci signifie que les $\widehat{F_\varepsilon . S}(\rho)$ constituent un ensemble borné d'opérateurs de $L^p(\mathbf{T})$, il suffit donc pour montrer que $\hat{S}(\rho)$ est un opérateur borné de $L^p(\mathbf{T})$ de prouver que, pour chaque m et n ,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (F_\varepsilon S)^\wedge(\rho,m,n) = \hat{S}(\rho,m,n)\ .$$

On a, en effet

$$\mathcal{F}(F_\varepsilon . S) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\varepsilon^2} w(\frac{|y|}{\varepsilon}) \ \mathcal{F}S(x-y,n)dy \ .$$

Ceci montre que, lorsque ρ appartient à $]\rho_1,\rho_2[$, $\mathcal{F}(F_\varepsilon . S)(x,n)$ converge vers $\mathcal{F}S(x,n)$ uniformément sur l'ensemble $\{ x \ ; \ |x| = \rho\}$.

Par suite

$$(F_\varepsilon S)^\wedge(\rho,m,n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\phi}\, \mathcal{F}(F_\varepsilon . S)(\rho,\phi,n)d\phi \to \hat{S}(\rho,m,n) \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \to 0 \ .$$

Comme application de ceci nous avons les démonstrations des théorèmes 3 et 4.

Soit $A = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ une matrice infinie de nombres complexes. Soit u une fonction indéfiniment dérivable à support dans $[1,2]$ et telle que $u(\frac{3}{2}) = 1$. Les hypothèses du théorème 3 impliquent que la fonction matricielle $M(\rho) = A\, u(\rho)$ satisfait aux hypothèses du théorème 1. Le théorème de restriction permet alors d'affirmer que $A = M(\frac{3}{2})$ est un opérateur borné de $L^p(\Gamma)$ $(1 < p < 2)$.

Bibliographie

[1] R. Coifman et G. Weiss. Analyse Harmonique non commutative sur certains espaces homogènes. Lecture notes in Mathematics. Springer

[2] C.S. Herz. The theory of p-spaces with an application to convolutions operators. Trans. Amer. Math. Society, 154, p. 69

[3] C.S. Herz Harmonic synthesis for subgroups (à paraître) Ann. Inst. Fourier

[4] L. Hörmander. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. Acta Math. 104 (1960) p. 93-139

[5] R.A. Kunze et E.M. Stein. Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group.
I Amer. J. of Math. 82 (1960) p. 1, 62
II Amer. J. of Math. 83 (1961) p. 723, 786

[6] N. Lohoué. Algèbres $A_p(G)$ et convoluteurs de $L^p(G)$. Thèse Orsay (à paraître)

[7] N. Lohoué. Sur certains sous espaces de $B_p(G)$. (à paraître) Studia Math.(1973)

[8] J. Marcinkiewicz. Sur les multiplicateurs des séries de Fourier. Studia Math. 8 (1939) p. 78, 91

[9] S.G. Mihlin. On the multipliers of Fourier intégral (en russe) Dok. Akad. Nauk. 109 (1956) p. 701-703

[10] H. Reiter. Classical Harmonic Analysis and locally compact group (1968) Oxford Mathematical monographs.

[11] E.M. Stein. Topics in Harmonic Analysis. Annals in Mathematics Studies n° 63. Princeton

[12] N . Vilenkin. Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes. Dunod 1969.

Chapitre IV.

ETUDE DE QUELQUES PROPRIETES DES PRODUITS DE RIESZ

La première partie de ce travail est la rédaction détaillée d'une note [9] avec quelques additions et simplifications. On y donne des conditions assurant que deux produits de Riesz sont mutuellement singuliers ou que l'un est absolument continu par rapport à l'autre.

Dans la seconde partie on étudie le problème suivant : étant donné un produit de Riesz définissant une mesure μ_a peut-on minorer la dimension de Hausdorff d'un borélien, E, tel que $\mu_a(E)$ soit non nul ?

Dans la troisième partie on s'occupe de la convergence de certaines séries presque partout par rapport à un produit de Riesz. On obtient, par exemple, le résultat suivant : étant donnés un nombre α dans $]\frac{1}{2}, 1[$, un nombre complexe non nul z, et une suite d'entiers strictement positifs, $\{\lambda_j\}_{j\geq 0}$, telle que λ_{j+1}/λ_j soit supérieur à 3 l'ensemble, $\left\{x \in [0,2\pi] \,;\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{j=1}^{n} e^{i\lambda_n x} = z\right\}$ a 1 pour dimension de Hausdorff.

Enfin dans la quatrième partie on a regroupé divers résultats. En premier lieu, la plupart des résultats précédents restent vrais pour les produits $\prod_{j\geq 0}(1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i2^j x}))$.

Ensuite on étend les résultats relatifs à la dimension de Hausdorff au cas de plusieurs variables puis au cas de R. Enfin on montre que la convergence en loi vers la loi de Gauss de certaines sommes normalisées de séries de Fourier lacunaires établie par R. Salem et A. Zygmund [10] subsiste dans le cadre des produits de Riesz.

I. 1.1. On considère une suite d'entiers strictement positifs, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$, telle que, pour tout n, λ_{n+1}/λ_n soit supérieur à 3. On sait que dans ces conditions tout entier rationnel s'écrit d'une façon au plus sous la forme $\sum_{j\geq 0} \varepsilon_j \lambda_j$ où les nombres ε_j valent -1, 0, ou 1, un nombre fini seulement d'entre eux étant non nuls.

Si $a = \{a_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes dont les modules sont inférieurs à 1 on pose :

$$P_{a,n}(e^{ix}) = \prod_{0\leq j\leq n} (1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})).$$

Ces polynômes trigonométriques sont positifs, la moyenne de chacun d'eux est 1. Les mesures $P_{a,n}(x)\frac{dx}{2\pi}$ convergent vaguement vers une mesure, μ_a, positive de masse 1. On a

$$\hat{\mu}_a(\sum_{j\geq 0} \varepsilon_j \lambda_j) = \prod_{j\geq 0} a_j'(\varepsilon)$$

où $a_j'(\varepsilon)$ vaut $\frac{1}{2} a_j$, 1, $\frac{1}{2} \bar{a}_j$ selon que ε_j vaut $1, 0, -1$.

1.2. THEOREME. Soient a et b deux suites de $\mathbb{C}$ telles que :

$$\|a\|_\infty \leq 1 \quad , \quad \|b\|_\infty \leq 1 \quad , \quad \sum_{j\geq 0} |b_j - a_j|^2 = \infty.$$

Alors les deux mesures μ_a et μ_b sont étrangères.

Démonstration.

Il résulte du calcul des coefficients de Fourier de μ_a que les fonctions $\left\{e^{i\lambda_n x} - \frac{1}{2}\bar{a}_n\right\}_{n\geq 0}$ forment un système orthogonal dans $L^2(\mu_a)$. Remarquons aussi que l'on a :

$$\int |e^{i\lambda_n x} - \tfrac{1}{2}\bar{a}_n|^2 \, d\mu_a(x) = 1 - \tfrac{1}{4}|a_n|^2 \leq 1.$$

Puisque $\sum_{n\geq 0} |b_n - a_n|^2$ est infini il existe une suite de nombres complexes, $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, de carré sommable et telle que :

i) pour tout $n \geq 0$, $\alpha_n(\bar{b}_n - \bar{a}_n)$ est positif,

ii) $\sum_{n\geq 0} \alpha_n(\bar{b}_n - \bar{a}_n) = +\infty$.

(c'est une conséquence facile du théorème de Banach-Steinhaus).

Les séries $\sum_{n\geq 0} \alpha_n(e^{i\lambda_n x} - \frac{1}{2}\bar{a}_n)$ et $\sum_{n\geq 0} \alpha_n(e^{i\lambda_n x} - \frac{1}{2}\bar{b}_n)$ convergent l'une dans $L^2(\mu_a)$, l'autre dans $L^2(\mu_b)$. En extrayant des sous-suites presque partout convergentes on montre l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers positifs, $\{N_n\}_{n\geq 0}$, telle que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\sum_{0\leq j\leq N_n} \alpha_j(e^{i\lambda_j x} - \frac{1}{2}\bar{a}_j)$ converge μ_a-presque partout et $\sum_{0\leq j\leq N_n} \alpha_j(e^{i\lambda_j x} - \frac{1}{2}\bar{b}_j)$ converge μ_b-presque partout. Si les mesures μ_a et μ_b n'étaient pas étrangères il existerait un x tel que les deux suites précédentes convergent ce qui montrerait que la série $\sum_{j\geq 0} \alpha_j(\bar{b}_j - \bar{a}_j)$ converge contrairement aux hypothèses.

1.3. THEOREME. Soient a et b deux suites de nombres complexes telles que $\|a\|_\infty$ et $\|b\|_\infty$ soient inférieurs à 1. On suppose que : $\sup_{j\geq 0} \frac{|b_j - a_j|}{1-|a_j|} < +\infty$.

1) Soit p un nombre réel strictement supérieur à 1. On suppose que :

i) pour tout j, $|p\, b_j + (1-p)\, a_j| < 1$,

ii) $\sum_{j\geq 0} |b_j - a_j|^2 / \left[(1-|a_j|)(1 - |pb_j + (1-p)a_j|)\right] < \infty.$

Alors μ_b est absolument continue par rapport à μ_a et sa densité est dans $L^p(\mu_a)$ (dorénavant nous dirons simplement que μ_b appartient à $L^p(\mu_a)$).

2) Si l'on suppose que, pour tout $j \geq 0$, λ_j n'appartient pas au groupe engendré par $\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \ldots$, si en outre $\sum_{j\geq 0} |b_j - a_j|^2/(1-|a_j|)$ est fini alors μ_b appartient à $L^p(\mu_a)$ pour tout p fini.

Dans le cas où p égale 2 on n'a pas besoin de l'hypothèse : $\sup_{j\geq 0} \dfrac{|b_j - a_j|}{1-|a_j|} < +\infty$.

Démonstration.

Posons $f_n(e^{ix}) = \prod_{0\leq j\leq n} \dfrac{1+\mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})}{1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})}$. Soit p un nombre strictement supérieur à 1. Nous montrerons que la suite $\{f_n\}_{n\geq 0}$ est bornée dans $L^p(\mu_a)$. Supposant ceci établi considérons une valeur d'adhérence faible dans $L^p(\mu_a)$, f, de cette suite ; un calcul de coefficients de Fourier montre que μ_b égale $f\mu_a$.

Soit $M = \sup_{j\geq 0} \dfrac{|b_j - a_j|}{1-|a_j|}$; il existe un nombre A tel que pour tout nombre t appartenant à $[0,M]$ on ait :

$$(1+t)^p \leq 1 + pt + At^2.$$

Alors

$$\left[1+\mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})\right]^p \leq \left[1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})\right]^p \left[1 + \frac{p\,\mathrm{Re}((b_j - a_j)e^{i\lambda_j x})}{1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})} + A\frac{|b_j - a_j|^2}{(1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x}))^2}\right]$$

d'où

$$1.4. \quad \frac{[1+\mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})]^p}{[1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})]^{p-1}} \leq 1 + \mathrm{Re}\left[(pb_j + (1-p)a_j)e^{i\lambda_j x}\right] + \frac{A|b_j - a_j|^2}{1-|a_j|}.$$

Démontrons la première assertion. De l'inégalité précédente on tire :

$$\frac{(1+\mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x}))^p}{[1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})]^{p-1}} \leq \left\{1+\mathrm{Re}\left[(pb_j+(1-p)a_j)e^{i\lambda_j x}\right]\right\}(1+u_j)$$

où l'on a posé $u_j = A\,|b_j-a_j|^2/\left[(1-|a_j|)(1-|pb_j+(1-p)\,a_j|)\right]$. On a donc, quels que soient les entiers m et n tels que $m \leq n$:

$$\int \left|f_m(e^{ix})\right|^p P_{a,n}(e^{ix})\frac{dx}{2\pi} \leq \prod_{j\geq 0}(1+u_j) < +\infty$$

d'où
$$\sup_{n\geq 0} \|f_n\|_{L^p(\mu_a)} < +\infty .$$

Démontrons la seconde assertion. On remarque que :

$$\int \prod_{0\leq j\leq m} \frac{[1+\mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})]^p}{[1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})]^{p-1}} \prod_{m<j\leq n}(1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x}))\frac{dx}{2\pi}$$

$$\leq \int \left(1+\mathrm{Re}\left[(pb_0+(1-p)a_0)e^{i\lambda_0 x}\right]+\frac{A\,|b_0-a_0|^2}{1-|a_0|}\right)\prod_{1\leq j\leq m}\frac{[1+\mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})]^p}{[1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})]^{p-1}}\prod_{m<j\leq n}[1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})]\frac{dx}{2\pi}$$

$$=\left(1+A\frac{|b_0-a_0|^2}{1-|a_0|}\right)\int\prod_{1\leq j\leq m}\frac{[1+\mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x})]^p}{[1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})]^{p-1}}\prod_{m<j\leq n}(1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x}))\frac{dx}{2\pi}.$$

Itérant le procédé nous obtenons, lorsque $m \leq n$:

$$\int |f_m(e^{ix})|^p\, P_{a,n}(e^{ix})\frac{dx}{2\pi} \leq \prod_{j\geq 0}\left(1+\frac{A\,|b_j-a_j|^2}{1-|a_j|}\right)$$

et l'on conclut comme précédemment.

Le théorème 1.2 et une version plus faible du théorème 1.3 se trouvent dans [9].
G. Brown et W. Moran [2] ont donné une autre démonstration du théorème 1.2 et des conditions assurant que μ_b appartient à $L^1(\mu_a)$.

Le théorème 1.2 permet de retrouver le résultat suivant de O. Padé [8]: si, pour tout p de $]1,+\infty[$, a n'appartient pas à ℓ^p les mesures $\{\mu_a^n\}_{n\geq 1}$ sont mutuellement singulières et même, toute translatée de l'une est étrangère aux autres. Cette propriété s'étend au semi-groupe continu à un paramètre engendré par la mesure μ_a.

1.4. THEOREME. Soit $a = \{a_j\}_{j\geq 0}$ une suite de nombres complexes telle que $\sup_{j\geq 0} |a_j| \leq 1$ et $\sum_{j\geq 0} |a_j|^2 = \infty$. Alors

1) presque toute (au sens de n'importe quelle mesure dont les coefficients de Fourier tendent vers 0 à l'infini) translatée de μ_a est étrangère à μ_a.

2) presque toute (par rapport à n'importe quel produit de Riesz μ_b) translatée de μ_a est étrangère à μ_a.

En effet, la translatée de μ_a par $e^{i\varphi}$, $\tau_\varphi(\mu_a)$, est le produit de Riesz $\prod_{j\geq 0} \left[1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j\varphi} e^{i\lambda_j x})\right]$. Les mesures μ_a et $\tau_\varphi \mu_a$ seront donc étrangères si l'on a

$$\sum_{j\geq 0} |a_j|^2 \, |1 - e^{i\lambda_j\varphi}|^2 = +\infty \qquad \text{(théorème 1.2)}$$

c'est-à-dire

$$1.5. \qquad \sum_{j\geq 0} |a_j|^2 (1 - \cos \lambda_j \varphi) = +\infty.$$

L'ensemble des $e^{i\varphi}$ tels que 1.5 n'ait pas lieu est un ensemble d'unicité (cf. Kahane et Salem [5]), il est donc de mesure nulle par rapport à toute mesure pseudo-fonction.

Pour démontrer la seconde assertion, considérons un produit de Riesz μ_b. Montrons que 1.5 a lieu pour μ_b-presque tout φ. Voici le principe de la démonstration : on construit une suite, $\{\alpha_j\}_{j\geq 0}$, de nombres compris entre 0 et 1, tels que $\sum_{j\geq 0} \alpha_j |a_j|^2 = +\infty$ et tels que pour un ordre de sommation convenable la série $\sum_{j\geq 0} \alpha_j |a_j|^2(\cos \lambda_j\varphi - \frac{1}{2} \operatorname{Re} b_j)$ converge pour μ_b-presque tout φ.

Observons d'abord que la suite $\{\cos \lambda_j\varphi - \frac{1}{2} \operatorname{Re} b_j\}_{j\geq 0}$ est une suite orthogonale dans $L^2(\mu_b)$, elle est aussi bornée dans $L^2(\mu_b)$; on appliquera le théorème de convergence presque partout de Menchoff [11].

Le cas où la suite $\{a_j\}_{j\geq 0}$ ne tend pas vers 0 est immédiat : on extrait une sous-suite $\{|a_{n_j}|\}_{j\geq 0}$ ayant une limite non nulle. La série $\sum_{j\geq 0} \frac{1}{j+1} |a_{n_j}|^2$ est manifestement divergente alors que la série $\sum_{j\geq 0} \frac{|a_{n_j}|^2}{j+1}(\cos \lambda_{n_j} \varphi - \frac{1}{2} \operatorname{Re} b_{n_j})$ converge μ_b-presque partout car on a : $\sum_{j\geq 0} \left[\frac{1}{j+1} |a_{n_j}|^2\right]^2 \left[\operatorname{Log}(j+1)\right]^2 < \infty$.

Supposons que la suite $\{|a_j|\}_{j\geq 0}$ tend vers 0. Soit τ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que la suite $\{|a_{\tau(j)}|\}_{j\geq 0}$ soit décroissante. Nous savons que la série $\sum_{j\geq 0} |a_{\tau(j)}|^2$ diverge, il en est de même de la série

$$\sum_{j\geq 0} \frac{|a_{\tau(j)}|^2}{|a_{\tau(0)}|^2 + |a_{\tau(1)}|^2 + \ldots + |a_{\tau(j)}|^2} .$$

D'autre part, nous avons : $(|a_{\tau(0)}|^2 + |a_{\tau(1)}|^2 + \ldots + |a_{\tau(j)}|^2)^{-1} \leq \frac{1}{(j+1)|a_{\tau(j)}|^2}$.

Donc : $\sum_{j\geq 0} \left(\frac{|a_{\tau(j)}|^2}{|a_{\tau(0)}|^2 + \ldots + |a_{\tau(j)}|^2}\right)^2 (\log(j+1))^2 < \infty$ et l'on peut appliquer le théorème de Menchoff, ce qui achève la démonstration.

1.6. Ce qui précède s'applique aussi bien au cas où la suite $\{\lambda_j\}_{j\geq 0}$ est une suite de caractères d'ordres différents de 2 d'un groupe compact satisfaisant en outre la propriété suivante : il n'y a pas de répétition dans les sommes $\sum_{j\geq 0} \varepsilon_j \lambda_j$ où tous les ε_j sauf un nombre fini d'entre eux sont nuls, les autres valant ± 1 (il s'agit de la notion d'ensemble dissocié introduite dans [3]).

1.7. Revenons au cas où $\{\lambda_j\}_{j\geq 0}$ est une suite d'entiers telle que λ_{j+1}/λ_j soit supérieur à 3. On considère pour tout j un polynôme trigonométrique positif, p_j, dont le degré est inférieur à $\frac{1}{2}(\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} - 1)$ et tel que $\hat{p}_j(0)$ égale 1. On voit facilement que les mesures $\prod_{j=0}^{n} p_j(e^{i\lambda_j x}) \frac{dx}{2\pi}$ convergent vaguement vers une mesure que nous noterons $\mu_{(p)}$. On considère une autre mesure $\mu_{(q)}$ construite de la même façon. On peut démontrer les résultats suivants.

1.8. PROPOSITION. 1) Si, pour tout j, $\|p_j-1\|_\infty$ et $\|2q_j-p_j-1\|_\infty$ sont strictement inférieurs à 1 et si $\sum_{j\geq 0} \|p_j-q_j\|_\infty^2 / \left[(1-\|p_j-1\|_\infty)(1-\|2q_j-p_j-1\|_\infty)\right]$ est fini alors $\mu_{(q)}$ appartient à $L^2(\mu_{(p)})$.

2) S'il existe une suite d'entiers $\{k_j\}_{j\geq 0}$ telle que $\sum_{j\geq 0} |\hat{p}_j(k_j) - \hat{q}_j(k_j)|^2$ soit infini alors les deux mesures $\mu_{(p)}$ et $\mu_{(q)}$ sont étrangères.

II. PRODUITS DE RIESZ ET DIMENSION DE HAUSDORFF

Y. Meyer et B. Weiss [6] ont démontré en utilisant le théorème ergodique de Birkhoff que

$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} \mathrm{Log}(1+2\cos 3^j x)$ converge vers une constante presque partout par rapport au produit de Riesz $\prod_{j\geq 0}(1+r\cos 3^j x)$.

Kac, Salem et Zygmund [4] ont montré en utilisant la notion de système presque orthogonal de fonctions que, si la fonction f est assez régulière et si sa moyenne est nulle, la série $\sum_{j\geq 0} \alpha_j f(\lambda_j x)$ converge presque partout quelle que soit la suite $\{\alpha_j\}_{j\geq 0}$ telle que $\sum_{j\geq 0} |\alpha_j \mathrm{Log}(j+2)|^2$ soit fini ($\{\lambda_j\}_{j\geq 0}$ est une suite lacunaire à la Hadamard).

Nous nous proposons d'étendre ces résultats à certains produits de Riesz.

Rappelons les notations. $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ est une suite d'entiers strictement positifs tels que λ_{j+1}/λ_j soit supérieur à 3 pour tout j. Dans ces conditions on a : $\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_n<\frac{3}{2}\lambda_n$, $\lambda_n-(\lambda_0+\ldots+\lambda_{n-1})>\frac{1}{2}\lambda_n$. Dans ce qui suit a désigne une suite de nombres complexes telle que $\|a\|_\infty<1$.

$$P_{a,n}(e^{ix})=\prod_{j=0}^{n}(1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x}))$$

μ_a est la limite vague des mesures $P_{a,n}(e^{ix})\frac{dx}{2\pi}$.

2.1. LEMME. Soit I un intervalle de $\mathbf{T}$, on désigne par $|I|$ sa mesure de Lebesgue normalisée, on a :

$$|\mu_a(I)-|I||\leq\frac{5\|a\|_\infty}{\pi\lambda_0}.$$

En effet, si 1_I désigne la fonction indicatrice de I on a :

$\hat{1}_I(0)=|I|$, $|\hat{1}_I(n)|\leq\frac{1}{\pi|n|}$ si n est non nul.

$\mu_a(I)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\hat{1}_I(n)\hat{\mu}_a(-n)=|I|+\sum_{n\neq 0}\hat{1}_I(n)\hat{\mu}_a(-n)$

d'où

$$|\mu_a(I) - |I|| \le \frac{2}{\pi\lambda_o}|\hat{\mu}_a(\lambda_o)| + 2\sum_{n\ge1}\frac{2}{\pi\lambda_n}\sum_{\varepsilon_o,\varepsilon_1,..\varepsilon_{n-1}=-1,0,1}|\hat{\mu}_a(\lambda_n + \sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon_j\lambda_j)|$$

$$\le \frac{|a_o|}{\pi\lambda_o} + \frac{4}{\pi}\sum_{n\ge1}\lambda_n^{-1}\sum_{\varepsilon_o,..\varepsilon_{n-1}=-1,0,1}\left(\frac{\|a\|_\infty}{2}\right)^{1+\sum_{j=0}^{n-1}|\varepsilon_j|}$$

$$\le \frac{\|a\|_\infty}{\pi}\left[\lambda_o^{-1} + 2\sum_{n\ge1}\lambda_n^{-1}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\right]$$

$$\le \frac{\|a\|_\infty}{\pi}(\lambda_o^{-1} + 2\sum_{n\ge1}\lambda_n^{-1}2^n) \le \frac{\|a\|_\infty}{\pi\lambda_o}(1 + 2\sum_{n\ge1}(\tfrac{2}{3})^n)$$

$$\le \frac{5\|a\|_\infty}{\pi\lambda_o}.$$

Supposons maintenant que, pour tout n, λ_n divise λ_{n+1}. Soit $\mathfrak{a}_n$ la plus petite tribu sur $\mathbf{T}$ rendant mesurable la fonction $e^{i\lambda_n x}$. On munit $\mathbf{T}$ de la probabilité μ_a, on note E^n l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\mathfrak{a}_n$. Observons que la suite, $\{\mathfrak{a}_n\}_{n\ge0}$, est décroissante.

2.2. LEMME.

$$E^{n+1}(e^{ij\lambda_n x}) = \begin{cases} e^{ij\lambda_n x} & \text{si } j \equiv 0 \mod (\lambda_{n+1}/\lambda_n) \\ \frac{1}{2}\bar{a}_n e^{i(j-1)\lambda_n x} & \text{si } j \equiv 1 \mod(\lambda_{n+1}/\lambda_n) \\ \frac{1}{2}a_n e^{i(j+1)\lambda_n x} & \text{si } j \equiv -1 \mod(\lambda_{n+1}/\lambda_n) \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Il suffit de montrer ceci lorsque $-1 \le j \le \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 2$. Soit donc j ainsi et k quelconque. Si $j\lambda_n + k\lambda_{n+1}$ s'écrit sous la forme $\sum_{\ell\ge0}\varepsilon_\ell\lambda_\ell$ les nombres $\varepsilon_o, \varepsilon_1, ..$ $..., \varepsilon_{n-1}$ sont tous nuls (il suffit de considérer les restes modulo λ_n) ; alors $(j - \varepsilon_n)\lambda_n$ est un multiple de λ_{n+1}, ce qui n'est possible que si j égale ε_n. Ceci montre que l'on a :

$$\hat{\mu}_a(-j\lambda_n - k\lambda_{n+1}) = \hat{\mu}_a(-j\lambda_n)\,\hat{\mu}_a(-k\lambda_{n+1})$$

ou, si l'on préfère

$$\int e^{ij\lambda_n x}\, e^{ik\lambda_{n+1}x}\, d\mu_a(x) = \hat{\mu}_a(-j\lambda_n) \int e^{ik\lambda_{n+1}x}\, d\mu_a(x)$$

pour tout k, ce qui démontre le lemme.

2.3. LEMME. On suppose que, pour tout n, λ_n divise λ_{n+1}. Alors $\int \mathrm{Log}(1 + \mathrm{Re}(a_o e^{i\lambda_o x}))\, d\mu_a(x)$ est positif.

On peut supposer que λ_o égale 1 et que a_o est non nul. Posons :

$a_o = re^{i\varphi}$ $(r > 0)$, $\rho = (\sqrt{1 - r^2} - 1)/r$; on a :

$$\mathrm{Log}(1 + \mathrm{Re}(a_o e^{ix})) = -\log(1+\rho^2) - \sum_{n\neq 0} \frac{\rho^{|n|}}{|n|}\, e^{in\varphi}\, e^{inx}.$$

Utilisons le lemme précédent pour calculer l'espérance conditionnelle, w, de la fonction $\mathrm{Log}(1 + \mathrm{Re}(a_o e^{ix}))$ par rapport à la tribu $\mathcal{a}_1$:

$$w(e^{ix}) = -\,\mathrm{Log}(1 + \rho^2) - \frac{1}{2}\rho(e^{i\varphi}\bar{a}_o + e^{-i\varphi}a_o)$$
$$+ \sum_{j\neq 0} e^{ij\lambda_1 x}\left[\frac{\rho^{|j\lambda_1|}\, e^{ij\lambda_1\varphi}}{|j\lambda_1|} + \frac{\bar{a}_o\,\rho^{|j\lambda_1+1|}\, e^{i(j\lambda_1+1)\varphi}}{2\,|j\lambda_1+1|} + \frac{a_o\rho^{|j\lambda_1-1|}\, e^{i(j\lambda_1-1)\varphi}}{2\,|j\lambda_1-1|}\right]$$

ou

$$w(e^{ix}) + \log(1+\rho^2) - \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} = -2\sum_{j\geq 1} \frac{1 + j\lambda_1\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}{j\lambda_1(j^2\lambda_1^2 - 1)}\,\rho^{j\lambda_1}\cos j\lambda_1(x+\varphi)$$

par suite :

$$\left|\int \left| w(e^{ix}) + \log(1+\rho^2) - \frac{2\rho^2}{1+\rho^2}\right| d\mu_a(x)\right| \leq \sum_{j\geq 1}\frac{1+j\lambda_1\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}{j\lambda_1(j^2\lambda_1^2-1)}\,|\rho|^{j\lambda_1} < |\rho|^3 \sum_{j\geq 1}\frac{1}{3j(3j-1)}$$

d'où

$$\int \log(1+\mathrm{Re}(a_o e^{ix}))d\mu_a(x) \geq \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} - \log(1+\rho^2) - |\rho|^3 \sum_{j\geq 1} \frac{1}{3j(3j-1)}$$

or

$$\sum_{j\geq 1} \frac{1}{3j(3j-1)} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{3x(3x-1)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\,\mathrm{Log}\,\frac{6}{5} < \frac{1}{5} + \frac{1}{15} < \frac{3}{10}$$

donc

$$\int \log(1+\mathrm{Re}(a_o e^{ix}))d\mu_a(x) \geq \frac{2\rho^2}{1+\rho^2} - \log(1+\rho^2) - \frac{3}{10}\,|\rho|^3.$$

Appelons $v(\rho)$ la fonction $\frac{2\rho^2}{1+\rho^2} - \log(1+\rho^2) - \frac{3}{10}|\rho|^3$; il est facile de montrer que $v'(\rho)$ change une fois de signe sur l'intervalle $]0,1[$. Il s'ensuit que la fonction, v, croît puis décroît sur $[0,1]$, or $v(0)$ est nul, $v(1) = \frac{7}{10} - \log 2$ est positif, donc v est positif, ce qu'il fallait démontrer.

2.4. LEMME. Il existe un nombre C tel que quels que soient l'entier non nul n et la suite $\{\alpha_j\}_{j\geq 0}$ de carré sommable on ait :

$$\left[\int \sup_{m\geq 0} \left|\sum_{j=0}^{m} \alpha_j (e^{in\lambda_j x} - \hat{\mu}_a(-n\lambda_j))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2} \leq C\,\sqrt{1+\mathrm{Log}\,|n|}\,(\sum_{j\geq 0} |\alpha_j|^2)^{1/2}.$$

Démonstration.

Le lemme 2.2 montre que : $E^{j+1}(e^{in\lambda_j x}) = u_j e^{i\nu\lambda_{j+1}x}$ où l'entier ν est tel que $|\nu| \leq \frac{|n|+1}{3}$. Par conséquent si k est un entier tel que $\frac{|n|}{3^k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^k} < 1$ (ceci a lieu si k est strictement supérieur à $\mathrm{Log}(2|n|-1)/\mathrm{Log}\,3$) alors $E^{j+k}(e^{in\lambda_j x})$ est constant (donc égal à $\hat{\mu}_a(-n\lambda_j)$).

Soit donc k le plus petit entier strictement supérieur à $\mathrm{Log}(2|n|-1)/\mathrm{Log}\,3$; pour tout j, entier compris entre 0 et $k-1$, les fonctions $\left\{\alpha_{j+k\ell}\left[\exp(in\lambda_{j+k\ell}x) - \hat{\mu}_a(-n\lambda_{j+k\ell})\right]\right\}_{\ell\geq 0}$ sont des accroissements de martingale, une inégalité de Doob donne :

$$\left[\int \sup_{0\le m\le N} \Big|\sum_{m\le \ell\le N} \alpha_{j+k\ell}\big(e^{in\lambda_{j+k\ell}x} - \hat{\mu}_a(-n\lambda_{j+k\ell})\big)\Big|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2}$$

$$\le C_1\Big(\sum_{\ell=0}^{N} |\alpha_{j+k\ell}|^2\Big)^{1/2}$$

d'où

$$\left[\int \sup_{0\le m\le N} \Big|\sum_{0\le \ell< m} \alpha_{j+k\ell}\big(e^{in\lambda_{j+k\ell}x} - \hat{\mu}_a(-n\lambda_{j+k\ell})\big)\Big|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2}$$

$$\le C_2\Big(\sum_{\ell=0}^{N} |\alpha_{j+k\ell}|^2\Big)^{1/2}.$$

Par suite

$$\left[\int \sup_{N\ge 0} \Big|\sum_{m=0}^{N} \alpha_m\big(e^{in\lambda_m x} - \hat{\mu}_a(-n\lambda_m)\big)\Big|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2}$$

$$\le C_2 \sum_{j=0}^{k-1}\Big(\sum_{\ell\ge 0} |\alpha_{j+k\ell}|^2\Big)^{1/2} \le C_2\sqrt{k}\Big(\sum_{\ell\ge 0}|\alpha_\ell|^2\Big)^{1/2}$$

ce qui achève la démonstration.

2.5. PROPOSITION. On suppose que, pour tout n, λ_n divise λ_{n+1}. Soit $\{f_n\}_{n\ge 0}$ une suite de fonctions de $A(T)$ telle qu'il existe deux nombres strictement positifs, ρ et C, tels que :

$$0<\rho<1 \quad \text{et} \quad \sup_{j\in Z}\rho^{-|j|}\sup_{n\ge 0}|\hat{f}_n(j)| \le C.$$

Alors pour toute suite $\{\alpha_n\}_{n\ge 0}$ de carré sommable la série $\sum_{n\ge 0}\alpha_n\left[f_n(e^{i\lambda_n x}) - \int f_n(e^{i\lambda_n t})d\mu_a(t)\right]$ converge pour μ_a-presque tout x.

Démonstration.

Posons $\varphi_{n,j}(x) = e^{in\lambda_j x} - \hat{\mu}_a(-n\lambda_j)$, $\hat{f}_j(n) = c_{n,j}$. On a :

$$f_j(e^{i\lambda_j x}) - \int f_j(e^{i\lambda_j t})\,d\mu_a(t) = \sum_{n\ne 0} c_{n,j}\,\varphi_{n,j}(x)$$

$$\left|\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \sum_{n\neq 0} c_{n,j}\,\varphi_{n,j}(x)\right| \le \sum_{n\neq 0}\left|\sum_{j=0}^{N} \alpha_j\, c_{n,j}\,\varphi_{n,j}(x)\right|$$

d'où

$$\sup_{N\ge 0}\left|\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \sum_{n\neq 0} c_{n,j}\,\varphi_{n,j}(x)\right| \le \sum_{n\neq 0}\,\sup_{N\ge 0}\left|\sum_{j=0}^{N} \alpha_j\, c_{n,j}\,\varphi_{n,j}(x)\right|$$

utilisons le lemme précédent :

$$\left\|\sup_{N\ge 0}\left|\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \sum_{n\neq 0} c_{n,j}\,\varphi_{n,j}\right|\right\|_{L^2(\mu_a)} \le C_2 \sum_{n\neq 0} \sqrt{1+\mathrm{Log}\,|n|}\,\Big(\sum_{j\ge 0} |\alpha_j\, c_{n,j}|^2\Big)^{1/2}$$

$$\le CC_2\Big(\sum_{n\neq 0} \rho^{|n|}\sqrt{1+\mathrm{Log}\,|n|}\Big)\Big(\sum_{j\ge 0}|\alpha_j|^2\Big)^{1/2}.$$

On déduit facilement la proposition de cette inégalité.

2.6. LEMME. Supposons que λ_{n+1}/λ_n tend vers $+\infty$ et que $\inf\limits_{n\ge 0} \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \ge 4$. Posons $\xi_n = \inf\left\{j\ge 0\ ;\ \forall k\ge j,\ n\le \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - \dfrac{3}{2}\right\}$, $(n\ge 0)$. Alors, pour tout n, pour toute suite de carré sommable, $\{x_j\}_{j\ge 0}$, on a :

$$\left|\sum_{j\ge 0,k\ge 0} \langle e^{in\lambda_j x} - \hat{\mu}_a(-n\lambda_j)\,,\, e^{in\lambda_k x} - \hat{\mu}_a(-n\lambda_k)\rangle_{L^2(\mu_a)}\, x_j \bar{x}_k\right| \le (1+\xi_{|n|}\sqrt{2})\sum_{j\ge 0}|x_j|^2.$$

Démonstration.

Posons $\varphi_{n,j}(e^{ix}) = e^{in\lambda_j x} - \hat{\mu}_a(-n\lambda_j)$. Dans ce qui suit n est fixe ; j et k sont deux nombres entiers tels que $0\le j<k$. On vérifie que :

$$\langle \varphi_{n,j}\,,\,\varphi_{n,k}\rangle_{L^2(\mu_a)} = \hat{\mu}_a(n(\lambda_k-\lambda_j)) - \hat{\mu}_a(n\lambda_k)\,\hat{\mu}_a(-n\lambda_j)\,.$$

Si $|n|$ égale 0 ou 1 cette expression est nulle ; elle est nulle aussi lorsqu'aucun des deux nombres $n\lambda_k$ et $n(\lambda_k-\lambda_j)$ n'appartient au spectre de μ_a, ce qui est assuré si l'on a :

$$\frac{3}{2}\lambda_k \le |n|(\lambda_k-\lambda_j) \le |n|\lambda_k \le \lambda_{k+1} - \frac{3}{2}\lambda_k$$

ce qui est réalisé si $\dfrac{3}{2\left(1-\dfrac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right)} \le |n| \le \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - \dfrac{3}{2}$ c'est-à-dire si

$2\le |n| \le \lambda_{k+1}/\lambda_k - \frac{3}{2}$.

Nous avons donc montré que si j et k sont distincts et si l'on a : $\sup(j,k)\ge \xi_{|n|}$, le produit scalaire $\langle \varphi_{n,j}\,,\,\varphi_{n,k}\rangle_{L^2(\mu_a)}$ est nul.

On a donc :

$$\sum_{0\le j<k} \langle \varphi_{n,j},\varphi_{n,k}\rangle_{L^2(\mu_a)} x_j\bar{x}_k = \sum_{0\le k<\xi_{|n|}} \bar{x}_k \sum_{0\le j<k} \langle \varphi_{n,j},\varphi_{n,k}\rangle_{L^2(\mu_a)} x_j .$$

Puisque $\langle \varphi_{n,j},\varphi_{n,j}\rangle_{L^2(\mu_a)} = 1 - |\hat{\mu}_a(-n\lambda_j)|^2 \le 1$, on a :

$$\Big|\sum_{0\le j<k} \langle \varphi_{n,j},\varphi_{n,k}\rangle_{L^2(\mu_a)} x_j\bar{x}_k\Big| \le \Big(\sum_{0\le k<\xi_{|n|}} |x_k|\sqrt{k}\Big)\Big(\sum_{j\ge0}|x_j|^2\Big)^{1/2}$$

$$\le \frac{\xi_{|n|}}{\sqrt{2}}\sum_{j\ge0}|x_j|^2$$

d'où le lemme.

2.7. PROPOSITION. On suppose que λ_{n+1}/λ_n tend vers $+\infty$. Soit $\{f_n\}_{n\ge0}$ une suite de fonctions de $A(\mathbf{T})$ telle qu'existent deux nombres strictement positifs, ρ et C, tels que :

$$0<\rho<1,\quad \sup_{j\in\mathbf{Z}} \rho^{-|j|} \sup_{n\ge0} |\hat{f}_n(j)| \le C \quad , \quad \sum_{j>0} \rho^{+|j|}\sqrt{\xi_j} < +\infty .$$

Alors, quelle que soit la suite $\{\alpha_j\}_{j\ge0}$ telle que $\sum_{j\ge0}|\alpha_j|^2(\mathrm{Log}(j+2))^2$ soit fini, la série $\sum_{n\ge0}\alpha_n\Big[f_n(e^{i\lambda_n x}) - \int f_n(e^{i\lambda_n t})\,d\mu_a(t)\Big]$ converge pour μ_a-presque tout x.

Démonstration.

On peut supposer que, pour tout n, λ_{n+1}/λ_n est supérieur à 4.

Posons $\hat{f}_n(j) = c_{j,n}$; gardons les notations du lemme précédent. On a :

$$f_n(e^{i\lambda_n x}) - \int f_n(e^{i\lambda_n t})\,d\mu_a(t) = \sum_{j\ne0} c_{j,n}\,\varphi_{j,n}$$

$$\Big|\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\sum_{j\ne0} c_{j,n}\,\varphi_{j,n}\Big| \le \sum_{j\ne0}\Big|\sum_{n=0}^{N}\alpha_n c_{j,n}\,\varphi_{j,n}\Big|$$

d'où

$$\sup_{N\ge0}\Big|\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\sum_{j\ne0} c_{j,n}\,\varphi_{j,n}\Big| \le \sum_{j\ne0}\sup_{N\ge0}\Big|\sum_{n=0}^{N}\alpha_n c_{j,n}\,\varphi_{j,n}\Big| .$$

Le lemme précédent et le théorème de Mensov-Rademacher ([11], t. II p. 193, [4]).

montrent que :

$$\Big\| \sup_{N\geq 0} \Big|\sum_{n=0}^{N} \alpha_n c_{j,n} \varphi_{j,n}\Big| \Big\|_{L^2(\mu_a)} \leq \sqrt{1+\xi_{|j|}}\sqrt{2}\Big(\sum_{n\geq 0} |\alpha_n c_{j,n} \mathrm{Log}(n+2)|^2\Big)^{1/2}$$

$$\leq 2\,C\,\sqrt{1+\xi_{|j|}}\;\rho^{+|j|}\Big(\sum_{n\geq 0} |\alpha_n \mathrm{Log}(n+2)|^2\Big)^{1/2}.$$

On a donc

$$\Big[\int \sup_{m\geq 0} \Big|\sum_{n=0}^{m} \alpha_n \big(f_n(e^{i\lambda_n x}) - \int f_n(e^{i\lambda_n t})\, d\mu_a(t)\big)\Big|^2 d\mu_a(x)\Big]^{1/2}$$

$$\leq 4C\Big(\sum_{j>0} \sqrt{1+\xi_j}\,\rho^j\Big)\Big(\sum_{n\geq 0} |\alpha_n \mathrm{Log}(n+2)|^2\Big)^{1/2}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

2.8. THEOREME. 1. Si, pour tout n, λ_n divise λ_{n+1} la dimension de Hausdorff de tout borélien, E, tel que $\mu_a(E)$ soit non nul est supérieure à

$1 - \limsup_{n\to+\infty} (\mathrm{Log}\,\lambda_n)^{-1} \int \mathrm{Log}\, P_{a,n}(e^{it})\, d\mu_a(t)$. Il existe un borélien portant μ_a dont la dimension de Hausdorff est inférieure à

$1 - \liminf_{n\to+\infty} (\mathrm{Log}\,\lambda_{n+1})^{-1} \int \mathrm{Log}\, P_{a,n}(e^{it})\, d\mu_a(t)$.

2. Si λ_{n+1}/λ_n tend vers $+\infty$, si α est un nombre de $[0,1[$ tel que $\sum_{n\geq 0} \alpha^n \sqrt{\xi_n}$ soit fini et si à partir d'un certain rang $|a_n|$ est inférieur à $2\alpha/(1+\alpha^2)$ la dimension de Hausdorff de tout borélien, E, tel que $\mu_a(E)$ soit non nul est 1.

3. Si $\sum_{n\geq 1} |a_n|(\mathrm{Log}\,\lambda_n)^{-1}$ est fini, on a la même conclusion qu'en 2.

Démonstration.
Dans tous les cas la série

$\sum_{n\geq 1} (\log \lambda_n)^{-1} \Big[\log(1+\mathrm{Re}(a_n e^{i\lambda_n x})) - \int \log(1+\mathrm{Re}(a_n e^{i\lambda_n t}))\, d\mu_a(t)\Big]$ converge pour μ_a-presque tout x (cela résulte des propositions 2.5 ou 2.7, dans le troisième cas la série converge uniformément). Un lemme de Kronecker ([7], p.139) montre que, pour

μ_a-presque tout x, $(\mathrm{Log}\,\lambda_n)^{-1}\left[\mathrm{Log}\,P_{a,n}(e^{ix}) - \int \mathrm{Log}\,P_{a,n}(e^{it})\,d\mu_a(t)\right]$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; désignons par E_a l'ensemble des tels x. Posons $b_n = \int \mathrm{Log}\,P_{a,n}(e^{it})\,d\mu_a(t)$.

Soit x un point de E_a ; on a : $\mathrm{Log}\,P_{a,n}(e^{ix}) = b_n + \varepsilon_n(x)\,\mathrm{Log}\,\lambda_n$ où $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n(x) = 0$.

Soit I un intervalle de $\mathbf{T}$ contenant x tel que $\frac{3}{\lambda_{n+1}} \leq |I| \leq \frac{1}{\lambda_n}$. Soit t un élément de I. On a :

$$|\mathrm{Log}(1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})) - \mathrm{Log}(1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j t}))| \leq \frac{|a_j|}{1-|a_j|}\,2\pi\lambda_j\,|I|.$$

Donc

$$|\mathrm{Log}\,P_{a,n}(e^{it}) - \mathrm{Log}\,P_{a,n}(e^{ix})| \leq (1 - \|a\|_\infty)^{-1} 2\pi |I| \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \leq 3\pi(1 - \|a\|_\infty)^{-1}$$

et

$$b_n + \varepsilon_n(x)\mathrm{Log}\,\lambda_n - 3\pi(1-\|a\|_\infty)^{-1} \leq \inf_{t\in I} \mathrm{Log}\,P_{a,n}(e^{it}) \leq \sup_{t\in I} \mathrm{Log}\,P_{a,n}(e^{it}) \leq b_n+\varepsilon_n(x)\mathrm{Log}\,\lambda_n + 3\pi(1-\|a\|_\infty)^{-1}.$$

Appelons $\mu_a^{(n)}$ la mesure $(P_{a,n}(e^{it}))^{-1}d\mu_a(t)$, le lemme 2.1 montre que :

$$|\mu_a^{(n)}(I) - |I|| \leq \frac{5}{\pi}\cdot\frac{1}{\lambda_{n+1}} \leq \frac{5}{3\pi}|I|$$

d'où $$\mathrm{Log}\,|I| - \mathrm{Log}\,3 \leq \mathrm{Log}\,\mu_a^{(n)}(I) \leq \mathrm{Log}\,|I| + \mathrm{Log}\,3.$$

Puisque $$\mu_a(I) = \int_I P_{a,n}(t)\,d\mu_a^{(n)}(t),$$ on a :

$$\mathrm{Log}\,|I| + b_n + \varepsilon_n(x)\mathrm{Log}\,\lambda_n - C \leq \mathrm{Log}\,\mu_a(I) \leq b_n + \mathrm{Log}\,|I| + \varepsilon_n(x)\mathrm{Log}\,\lambda_n + C$$

où $C = \mathrm{Log}\,3 + 3\pi(1-\|a\|_\infty)^{-1}$.

En définitive :

$$1 + \frac{b_n}{\mathrm{Log}\,|I|} + \frac{\varepsilon_n(x)\mathrm{Log}\,\lambda_n + C}{\mathrm{Log}\,|I|} \leq \frac{\mathrm{Log}\,\mu_a(I)}{\mathrm{Log}\,|I|} \leq 1 + \frac{b_n}{\mathrm{Log}\,|I|} + \frac{\varepsilon_n(x)\mathrm{Log}\,\lambda_n - C}{\mathrm{Log}\,|I|}.$$

On a évidemment $|b_n| \leq |a_o| + |a_1| + \ldots + |a_n|$ d'où

$\left|\frac{b_n}{\text{Log}\,|I|}\right| \leq \frac{|a_o|+|a_1|+\ldots+|a_n|}{\text{Log}\,\lambda_n}$ ce qui montre que, dans les cas 2^o et 3^o, $\frac{b_n}{\text{Log}\,|I|}$ tend vers 0 lorsque $|I|$ tend vers 0, I étant un intervalle contenant x et appartenant à la famille $\mathfrak{J} = \left\{I\ ;\ \exists n\ ,\ 3\lambda_{n+1}^{-1} \leq |I| \leq \lambda_n^{-1}\right\}$.

Puisque $\frac{\text{Log}\,\lambda_n}{\text{Log}\,|I|}$ est borné, on a :

$$\lim_{\substack{|I|\to 0 \\ x\in I\in\mathfrak{J}}} \frac{\text{Log}\,\mu_a(I)}{\text{Log}\,|I|} = 1.$$

Dans le premier cas le lemme 2.3 montre que b_n est positif, alors :

$$-\frac{b_n}{\text{Log}\,\lambda_n} \leq \frac{b_n}{\text{Log}\,|I|} \leq \frac{-b_n}{\text{Log}\,\lambda_{n+1} - \text{Log}\,3}$$

d'où

$$1 - \frac{b_n}{\text{Log}\,\lambda_n} + \frac{\varepsilon_n(x)\text{Log}\,\lambda_n + C}{\text{Log}\,|I|} \leq \frac{\text{Log}\,\mu_a(I)}{\text{Log}\,|I|} \leq 1 - \frac{b_n}{\text{Log}\,\lambda_{n+1} - \text{Log}\,3} + \frac{\varepsilon_n(x)\text{Log}\,\lambda_n - C}{\text{Log}\,|I|}$$

ce qui montre que l'on a :

$$1 - \limsup_{n\to+\infty} \frac{b_n}{\text{Log}\,\lambda_n} \leq \liminf_{\substack{|I|\to 0 \\ x\in I\in\mathfrak{J}}} \frac{\text{Log}\,\mu_a(I)}{\text{Log}\,|I|} \leq \limsup_{\substack{|I|\to 0 \\ x\in I\in\mathfrak{J}}} \frac{\text{Log}\,\mu_a(I)}{\text{Log}\,|I|} \leq 1 - \liminf_{n\to\infty} \frac{b_n}{\text{Log}\,\lambda_{n+1}}$$

Etant donné un intervalle I contenant x il existe deux intervalles J_1 et J_2 contenant x, appartenant à $\mathfrak{J}$, tels que : $J_1 \subset I \subset J_2$, $|J_1| \geq \frac{1}{3}|I|$, $|J_2| \leq 3\,|I|$ ce qui montre que dans les limites précédentes la restriction $I\in\mathfrak{J}$ peut être levée.

On conclut au moyen d'un théorème démontré par Billingsley ([1], pp. 136-145).

2.9. REMARQUE. La démonstration du lemme 2.3 montre le fait suivant : si λ_n divise λ_{n+1} et si α est le nombre compris entre 0 et 1 tel que $\|a\|_\infty = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ alors

$$\int \mathrm{Log}\left[1 + \mathrm{Re}(a_n e^{i\lambda_n t})\right] d\mu_a(t) \leq \frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} - \mathrm{Log}(1+\alpha^2) + \frac{4}{15}\alpha^3$$

d'où

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{Log}\,\lambda_n} \int \mathrm{Log}\, P_{a,n}(e^{it})\, d\mu_a(t) \leq \left(\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} - \mathrm{Log}(1+\alpha^2) + \frac{4}{15}\alpha^3\right)/\mathrm{Log}\, 3$$

et, par conséquent la dimension de Hausdorff de tout borélien E tel que $\mu_a(E)$ soit non nul est supérieure à $1 - \left(\dfrac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} - \mathrm{Log}(1+\alpha^2) + \dfrac{4}{15}\alpha^3\right)/\mathrm{Log}\, 3$. On peut s'assurer que cette fonction est minimum pour α égale 1, ce minimum est strictement positif.

III. 3.1. LEMME. On désigne par Ω le produit $\{-1,1\}^{-N}$ muni de la probabilité de pile ou face. On se donne $3(n+1)$ nombres réels $\alpha_o,\ldots,\alpha_n$, $\beta_o,\ldots,\beta_n$, $\gamma_o,\ldots,\gamma_n$ tels que $|\alpha_j|$ soit strictement inférieur à 1. On a :

$$E\left[\sup_{0\leq m\leq n} \left|\prod_{0\leq j\leq m} \frac{1+\omega_{2j}\beta_j+\omega_{2j+1}\gamma_j}{1+\omega_{2j}\alpha_j} - 1\right|^2 \prod_{0\leq j\leq n} (1+\omega_{2j}\alpha_j)\right]$$

$$\leq 4\left[\prod_{0\leq j\leq n}\left(1 + \frac{(\beta_j-\alpha_j)^2+\gamma_j^2}{1-\alpha_j^2}\right) - 1\right].$$

Soit $\mathfrak{B}_m$ la plus petite tribu sur Ω rendant mesurab les les projections ω_o, $\omega_1, \ldots, \omega_{2m+1}$. Soit E^m l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à $\mathfrak{B}_m$ lorsqu'on munit Ω de la probabilité $\prod_{0\le j\le n}(1+\omega_{2j}\alpha_j)d\omega$. On a :

$$E^{m-1}\left(\frac{1+\omega_{2m}\beta_m+\omega_{2m+1}\gamma_m}{1+\omega_{2m}\alpha_m}\right)=1 \quad \text{pour} \quad 1\le m\le n.$$

La suite $\left\{\prod_{0\le j\le m}\frac{1+\omega_{2j}\beta_j+\omega_{2j+1}\gamma_j}{1+\omega_{2j}\alpha_j}-1\right\}_{0\le m\le n}$ est donc une martingale.

On a :

$$E\left[\prod_{0\le j\le m}\left(\frac{1+\omega_{2j}\beta_j+\omega_{2j+1}\gamma_j}{1+\omega_{2j}\alpha_j}\right)\prod_{0\le j\le n}(1+\omega_{2j}\alpha_j)\right]=1$$

$$E\left[\prod_{0\le j\le m}\left(\frac{1+\omega_{2j}\beta_j+\omega_{2j+1}\gamma_j}{1+\omega_{2j}\alpha_j}\right)^2\prod_{0\le j\le n}(1+\omega_{2j}\alpha_j)\right]$$

$$=\prod_{0\le j\le m}E\left[\frac{(1+\omega_{2j}\beta_j+\omega_{2j+1}\gamma_j)^2}{1+\omega_{2j}\alpha_j}\right]$$

$$E\left[\frac{(1+\omega_{2j}\beta_j+\omega_{2j+1}\gamma_j)^2}{1+\omega_{2j}\alpha_j}\right]=E\left(\frac{(1+\omega_{2j}\beta_j)^2+\gamma_j^2}{1+\omega_{2j}\alpha_j}\right)=\frac{1+\beta_j^2+\gamma_j^2-2\alpha_j\beta_j}{1-\alpha_j^2}$$

$$=1+\frac{(\beta_j-\alpha_j)^2+\gamma_j^2}{1-\alpha_j^2}.$$

Donc

$$E\left(\left|\prod_{0\le j\le m}\left(\frac{1+\omega_{2j}\beta_j+\omega_{2j+1}\gamma_j}{1+\omega_{2j}\alpha_j}\right)-1\right|^2\right)=\prod_{0\le j\le m}\left(1+\frac{(\beta_j-\alpha_j)^2+\gamma_j^2}{1-\alpha_j^2}\right)-1.$$

Le lemme résulte alors d'une inégalité de Doob sur les martingales.

3.2. LEMME. Soient μ et ν deux mesures boréliennes positives sur $\mathbf{T}$.

1) Si f appartient à $L^1(\mu)$ la mesure $(f\mu)*\nu$ est absolument continue par rapport à la mesure $\mu*\nu$. Ceci permet de définir Tf ainsi : $(Tf)(\mu*\nu)=(f\mu)*\nu$

Tf appartient à $L^1(\mu * \nu)$, Tf est positive si f l'est.

2) Pour tout $p \in [1, +\infty]$, pour toute f appartenant à $L^p(\mathbf{T})$ on a :

$$\|T(f)\|_{L^p(\mu*\nu)} \leq \|\nu\|_{M(T)}^{1/p} \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

3) Si $\{f_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions de $L^p(\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ on a :

$$\|\sup_{n\geq 0} |T(f_n)|\|_{L^p(\mu*\nu)} \leq \|\nu\|_{M(T)}^{1/p} \|\sup_{n\geq 0} |f_n|\|_{L^p(\mu)}.$$

Preuve. Soit E un borélien tel que $\mu * \nu(E)$ égale 0 ; c'est dire que la fonction $1_E(x+y)$ est nulle $\mu \times \nu$-presque partout, on a donc :

$\int_E d[(f\mu) * \nu] = \iint 1_E(x+y) f(x) d\mu(x) d\nu(y) = 0$ d'où la première partie du lemme.

Si f est réelle dans $L^1(\mu)$ on a, à cause de la monotonie de T : $|T(f)| \leq T(|f|)$.

Supposons maintenant que $f = u + iv$ où u et v sont réelles dans $L^1(\mu)$, on a :

$$|Tf| = \sup_{0\leq\alpha\leq 2\pi} ((Tu)\cos\alpha + (Tv)\sin\alpha) = \sup_{0\leq\alpha\leq 2\pi} T(u\cos\alpha + v\sin\alpha)$$

$$\leq T(|f|).$$

Ceci montre que lorsque f appartient à $L^\infty(\mu)$ on a : $\|Tf\|_{L^\infty(\mu*\nu)} \leq \|f\|_{L^\infty(\mu)}$.

D'autre part, lorsque f appartient à $L^1(\mu)$:

$$\|Tf\|_{L^1(\mu*\nu)} \leq \|T(|f|)\|_{L^1(\mu*\nu)} = \iint |f(x)| d\mu(x)\, d\nu(y) = \|\nu\|_{M(T)} \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

La seconde partie du lemme s'obtient en utilisant le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin [[11] t. II, p. 93].

Démontrons la troisième partie. On a : $|f_n| \leq \sup_{m\geq 0} |f_m|$,

d'où $$|T(f_n)| \leq T(|f_n|) \leq T(\sup_{m\geq 0} |f_m|)$$

enfin $$\sup_{m\geq 0} |T(f_m)| \leq T(\sup_{m\geq 0} |f_m|)$$

et l'on conclut en utilisant la seconde partie.

3.3. THEOREME. 1. Soient a et b deux suites de nombres complexes dont les modules sont inférieurs à 1. Si $b-a$ appartient à ℓ^2 et si $\limsup_{j\to\infty} |a_j|$ est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ le quotient $P_{b,n}(x)/P_{a,n}(x)$ converge μ_a-presque partout.

2. Soient $a,b,c,$ trois suites bornées de nombres complexes. Supposons que l'on ait :

$$\inf_{j\geq 0} \lambda_{j+1}/\lambda_j \geq 5 \quad , \quad \limsup_{j\to\infty} |a_j| < \frac{1}{2} \quad , \quad \sum_{j\geq 0} (|b_j-a_j|^2 + |c_j|^2) < +\infty .$$

Alors le produit $\prod_{j\geq 0} \left\{ \left[1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x} + c_j e^{2i\lambda_j x})\right] / (1 + \mathrm{Re}\, a_j e^{i\lambda_j x}) \right\}$

converge μ_a-presque partout.

Dans chacun des deux cas le résultat est vrai si l'on change l'ordre des facteurs des produits.

Démonstration de 1.

On peut supposer que l'on a : $\sup_{j\geq 0} |a_j| < \frac{1}{2}$. On pose $k = 4/(1 - 4 \sup_{j\geq 0} |a_j|^2)$.

Le lemme 3.1 montre que, lorsque n est inférieur à N, on a :

$$E\left[\sup_{0\leq m\leq n} \left|\frac{P_{2\omega b,m}(x)}{P_{2\omega a,m}(x)} - 1\right|^2 P_{2\omega a,N}(x)\right]$$

$$\leq 4\left[\prod_{0\leq j\leq n}\left(1 + \frac{4\,|\mathrm{Re}(b_j-a_j)e^{i\lambda_j x}|^2}{1 - 4(\mathrm{Re}\, a_j e^{i\lambda_j x})^2}\right) - 1\right]$$

$$\leq 4\left[\prod_{j\geq 0}(1 + k\,|b_j-a_j|^2) - 1\right].$$

Intégrons par rapport à x, appliquons le théorème de Fubini et faisons tendre N vers $+\infty$:

$$E\left[\int \sup_{0\leq m\leq n} \left|\frac{P_{2\omega b,m}(x)}{P_{2\omega a,m}(x)} - 1\right|^2 d\mu_{2\omega a}(x)\right] \leq 4\left[\prod_{j\geq 0} (1 + k\,|b_j-a_j|^2) - 1\right].$$

Considérons la mesure de probabilité, ν_{ω}, définie par le produit

$\prod_{j\geq 0}(1+\omega_j \cos\lambda_j x)$; on a :

$$\mu_{2\omega a} * \nu_{\omega} = \mu_a$$

$$\left(\frac{P_{2\omega b,m}}{P_{2\omega a,m}}\mu_{2\omega a}\right) * \nu_{\omega} = \frac{P_{b,m}}{P_{a,m}}\mu_a .$$

Le lemme 3.2 montre que l'on a, pour tout n :

$$\int \sup_{0\leq m\leq n}\left|\frac{P_{b,m}(x)}{P_{a,m}(x)} - 1\right|^2 d\mu_a(x) \leq \int \sup_{0\leq m\leq n}\left|\frac{P_{2\omega b,m}(x)}{P_{2\omega a,m}(x)} - 1\right|^2 d\mu_{2\omega a}(x).$$

On prend l'espérance des deux membres, on utilise l'inégalité précédente, on fait tendre

n vers $+\infty$ en utilisant le théorème de la convergence monotone :

$$\int \sup_{m\geq 0}\left|\frac{P_{b,m}(x)}{P_{a,m}(x)} - 1\right|^2 d\mu_a(x) \leq 4\left\{\prod_{j\geq 0}(1+k\,|b_j-a_j|^2) - 1\right\}.$$

On déduit facilement de cette inégalité la convergence μ_a-presque partout du quotient

$P_{b,m}/P_{a,m}$.

<u>Démonstration de 2</u>.

Elle est analogue à la démonstration précédente. On peut supposer que l'on a :

$\sup_{j\geq 0}|a_j| < \frac{1}{2}$; on choisit un nombre σ dans l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$ tel que l'on

ait : $\sup_{j\geq 0}|a_j| < \frac{1}{2}\sigma$; on pose : $k = 4/\left[(1 - \frac{4}{\sigma^2}\sup_{j\geq 0}|a_j|^2)(1-\sigma)^2\right]$. On considère

les produits

$$\prod_{0\leq j\leq m} \frac{1+\frac{2}{\sigma}\omega_{2j}\,\mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x}) + \frac{2}{1-\sigma}\omega_{2j+1}\mathrm{Re}(c_j e^{2i\lambda_j x})}{1+\frac{2}{\sigma}\omega_{2j}\,\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})} .$$

Utilisant le lemme 3.1 nous obtenons une inégalité. Ensuite on convole avec la mesure,

ν_{ω}, définie par le produit

$\prod_{j\geq 0}(1+\sigma\omega_{2j}\cos\lambda_j x+(1-\sigma)\,\omega_{2j+1}\cos 2\lambda_j x)$; on obtient l'inégalité :

$$\int \sup_{m\geq 0}\left|\prod_{0\leq j\leq m}\frac{1+\mathrm{Re}(b_j e^{i\lambda_j x}+c_j e^{2i\lambda_j x})}{1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})}-1\right|^2 d\mu_a(x)$$

$$\leq 4\left[\prod_{j\geq 0}(1+k(|b_j-a_j|^2+|c_j|^2))-1\right]$$

ce qui achève la démonstration.

Le fait que l'ordre des termes soit sans importance vient de ce que la propriété de la suite $\{\lambda_j\}_{j\geq 0}$ que l'on a utilisée est la suivante : un entier se décompose d'une façon au plus sous la forme $\sum_{j\geq 0}\varepsilon_j\lambda_j$ où $\varepsilon_j=-1, 0, 1$ dans le cas 1., $\varepsilon_j\in\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ dans le cas 2.

3.4. COROLLAIRE. Si l'on a : $\inf_{j\geq 0}\lambda_{j+1}/\lambda_j\geq 5$ et $\limsup_{j\to\infty}|a_j|<\frac{1}{2}$ quelle que soit la suite de carré sommable, α, la série $\sum_{j\geq 0}\alpha_j(e^{i\lambda_j x}-\frac{1}{2}\bar{a}_j)$ converge μ_a-presque partout (ceci a lieu quel que soit l'ordre des termes).

On a

$$(e^{i\lambda_j x}-\tfrac{1}{2}\bar{a}_j)(1+\tfrac{1}{2}a_j e^{i\lambda_j x}+\tfrac{1}{2}\bar{a}_j e^{-i\lambda_j x})=$$

$$-\tfrac{1}{4}\bar{a}_j^2 e^{-i\lambda_j x}+(1-\tfrac{1}{4}|a_j|^2)e^{i\lambda_j x}+\tfrac{1}{2}a_j e^{2i\lambda_j x}.$$

Donc

$$\cos\lambda_j x-\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\,a_j=\frac{\mathrm{Re}\left[(1-\frac{1}{4}|a_j|^2-\frac{1}{4}a_j^2)\,e^{i\lambda_j x}+\frac{1}{2}a_j e^{2i\lambda_j x}\right]}{1+\mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})}$$

$$\sin \lambda_j x + \frac{1}{2} \operatorname{Im} a_j = \frac{-\operatorname{Re}\left[i(1-\frac{1}{4}|a_j|^2 + \frac{1}{4} a_j^2)e^{i\lambda_j x} + \frac{1}{2} i a_j e^{2i\lambda_j x}\right]}{1 + \operatorname{Re}(a_j e^{i\lambda_j x})} .$$

Si α est un élément réel de ℓ^2 le théorème précédent montre que les produits $\prod_{j\geq 0}\left[1 + \alpha_j(\cos\lambda_j x - \frac{1}{2} \operatorname{Re} a_j)\right]$ et $\prod_{j\geq 0}\left[1 + \alpha_j(\sin \lambda_j x + \frac{1}{2} \operatorname{Im} a_j)\right]$ convergent μ_a-presque partout il en est donc de même des séries $\sum_{j\geq 0}\alpha_j(\cos \lambda_j x - \frac{1}{2} \operatorname{Re} a_j)$ et $\sum_{j\geq 0} \alpha_j(\sin \lambda_j x + \frac{1}{2} \operatorname{Im} a_j)$ ce qui achève la démonstration.

REMARQUES. Quitte à utiliser d'autres mesures ν_ω on peut dans la première partie du théorème 2, remplacer l'hypothèse, $\limsup_{j\to\infty} |a_j| < \frac{1}{2}$, par l'hypothèse $\limsup_{j\to\infty} |a_j| \leq \cos \dfrac{\Pi}{2+\left[\frac{1}{2}(\inf_{j\geq 0} \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} - 1)\right]}$ (ici $[x]$ désigne la partie entière de x).

Nous avons déjà remarqué que les fonctions $\left\{e^{i\lambda_j x} - \frac{\bar{a}_j}{2}\right\}_{j\geq 0}$ forment un système orthogonal dans $L^2(\mu_a)$ il résulte donc du théorème de Menchoff que les hypothèses, $\inf_{j\geq 0} \lambda_{j+1}/\lambda_j \geq 3$ et $\sum_{j\geq 1} |\alpha_j|^2(\log j)^2$, entraînent la convergence de la série $\sum_{j\geq 0} \alpha_j(e^{i\lambda_j x} - \frac{1}{2} \bar{a}_j)$ pour μ_a-presque tout x.

Dans le cas où λ_{j+1}/λ_j est entier quel que soit j, on peut démontrer le corollaire 3.3 d'une autre façon, on obtient d'ailleurs un résultat plus précis.

3.5. PROPOSITION. On suppose que, pour tout j, λ_j divise λ_{j+1}. Quelle que soit la suite $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\geq 0}$ de carré sommable la série $\sum_{j\geq 0}\alpha_j(e^{i\lambda_j x} - \frac{1}{2} \bar{a}_j)$ converge μ_a-presque partout.

En effet il suffit de remarquer que les fonctions $\left\{\alpha_j(e^{i\lambda_j x} - \frac{1}{2} \bar{a}_j)\right\}_{j\geq 0}$ sont des accroissements de martingale (cf. lemme 2.1.1).

3.6. THEOREME. Soient $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ une suite d'entiers strictement positifs tels que λ_{n+1}/λ_n soit supérieur à 3 et $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ une suite croissante de nombres réels strictement positifs tels que $\sum_{n\geq 1} (\tau_n^{-1}\log n)^2$ soit fini. Pour tout nombre complexe non nul, z, tel que $|z|\limsup_{n\to\infty}(\tau_{n+1}-\tau_n)$ soit inférieur à $\frac{1}{2}$ l'ensemble des x tels que $\tau_n^{-1}\sum_{0\leq j\leq n} e^{i\lambda_j x}$ converge vers z est non dénombrable. De plus, si $\sum_{n\geq 1}(\tau_{n+1}-\tau_n)/\log\lambda_n$ est fini cet ensemble est de dimension de Hausdorff 1.

En effet, posons $\tau_{-1}=0$, $a_n = 2\bar{z}(\tau_n-\tau_{n-1})$. Alors $\limsup_{n\to\infty}|a_n|$ est strictement inférieur à 1, la remarque suivant 3.4 montre que la série $\sum_{n\geq 0}\tau_n^{-1}(e^{i\lambda_n x}-(\tau_n-\tau_{n-1})z)$ converge μ_a-presque partout ; un lemme de Kronecker ([7] p. 139) montre que $\tau_n^{-1}\sum_{j=0}^{n}(e^{i\lambda_j x}-(\tau_j-\tau_{j-1})z)$ tend vers 0 μ_a-presque partout. La seconde assertion résulte de la proposition 2.3.4.

3.7. REMARQUE. On peut utiliser les propositions 3.3 ou 3.5 pour obtenir la convergence presque partout de la série $\sum_{n\geq 0}\tau_n^{-1}(e^{i\lambda_n x}-(\tau_n-\tau_{n-1})z)$. On peut alors obtenir la même conclusion que celle du théorème 3.6 en faisant sur la suite $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ une hypothèse convenable et sur la suite τ_n l'hypothèse : $\sum_{n\geq 0}\tau_n^{-2}<\infty$.

3.8. PROPOSITION. On suppose que λ_{n+1}/λ_n est supérieur à 3. Soit $a=\{a_n\}_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs n'appartenant à ℓ^p pour aucun p fini et telle que $\limsup_{n\to\infty} a_n < 1$. Pour chaque réel strictement positif, α, on note ν_α la mesure que définit le produit $\prod_{j\geq 0}(1+a_j^\alpha\cos\lambda_j x)$. Il existe une famille de boréliens, $\{E_\alpha\}_{\alpha>0}$, telle que :

1. si α est différent de α' on a : $E_\alpha \cap E_{\alpha'} = \emptyset$ et $\nu_\alpha(E_{\alpha'}) = 0$,

2. $\nu_\alpha(E_\alpha) = 1$,

3. $\bigcup_{\alpha>0} E_\alpha$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Démonstration.

1er cas : a_n ne tend pas vers 0.

Il existe alors une suite $\{k_n\}_{n\geq 1}$ telle que a_{k_n} tende vers un nombre ℓ de $]0,1[$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(e^{i\lambda_{k_n}} - \frac{1}{2} a_n^\alpha\right)$ converge ν_α-presque partout ; soit E_α l'ensemble des x tels que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\lambda_{k_j}x}$ tende vers $\frac{1}{2}\ {}^\alpha$. Ces ensembles vérifient 1. et 2., d'autre part ils sont disjoints de l'ensemble des x tels que $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{i\lambda_{k_j}x}$ tende vers 0, ensemble qui a une mesure de Lebesgue égale à 1.

2me cas : a_n tend vers 0.

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$ telle que la suite $\{a_{\sigma(n)}\}_{n\geq 0}$ soit décroissante. S'il existait un nombre strictement positif, α, tel que la série $\sum_{n\geq 0} (n+1)^{-\frac{3}{4}} a_{\sigma(n)}^\alpha$ converge la suite $(n+1)^{\frac{1}{4}} a_{\sigma(n)}^\alpha$ serait bornée et a appartiendrait à un ℓ^p.

Soit E_α l'ensemble des x tels que la série

$$\sum_{n\geq 0} (n+1)^{-\frac{3}{4}} \left[e^{i\lambda_{\sigma(n)}x} - \frac{1}{2} a_{\sigma(n)}^\alpha\right] \text{ converge.}$$

Ces ensembles vérifient 1. et 2. et sont disjoints de l'ensemble des x tels que

$\sum_{n\geq 0} (n+1)^{-\frac{3}{4}} e^{i\lambda_{\sigma(n)}x}$ converge, ensemble dont la mesure de Lebesgue est 1.

IV. AUTRES RESULTATS.

4.1. PRODUITS DE RIESZ CONSTRUITS SUR LA SUITE $\{2^n\}_{n\geq 0}$.

4.1.1. Une somme $\sum_{j=0}^{N} \varepsilon_j 2^j$ (ε_j vaut -1, 0 ou 1) est nulle si et seulement si tous les ε_j sont nuls. Si $a = \{a_j\}_{j\geq 0}$ est une suite de nombres complexes de modules inférieurs à 1. Les polynômes trigonométriques $P_{a,n}(e^{ix}) = \prod_{0\leq j\leq N} (1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i2^j x}))$, sont positifs et de moyenne égale à 1. Nous allons montrer que la suite de mesures, $\left\{P_{a,n}(x)\frac{dx}{2\pi}\right\}_{n\geq 0}$, a une seule valeur d'adhérence vague, μ_a.

4.1.2. LEMME. Soit m un entier strictement positif, soit n l'entier défini par les inégalités : $2^n \leq m < 2^{n+1}$. Soit N un entier supérieur à $n+2$. Si l'on a

$$m = \sum_{0\leq j\leq N} \varepsilon_j 2^j \quad (\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\},\ j = 0, 1, 2, \ldots, N)$$

alors ε_N égale 1 et ε_{N-1} égale -1.

En effet, la somme $\sum_{0\leq j\leq N} \varepsilon_j 2^j$ a le signe de ε_N. Donc ε_N égale 1. D'autre part :

$$2^N - 2^{n+1} + 1 \leq 2^N - m = -\sum_{0\leq j<N} \varepsilon_j 2^j \leq -\varepsilon_{N-1} 2^{N-1} + 2^{N-1} - 1$$

par suite
$$2 \leq 2^{N-1} - 2^{n+1} + 2 \leq -2^{N-1}\,\varepsilon_{N-1}$$

ce qui montre que ε_{N-1} est strictement négatif donc égal à -1.

4.1.3. Une application répétée du lemme précédent montre que, sous les mêmes hypothèses, ε_j égale -1 lorsque l'on a : $n+1 \leq j \leq N-1$.

4.1.4. Soient m et n comme dans le lemme 4.1.2. Posons :

$$E_m = \left\{(\varepsilon_o, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,0,1\}^{n+1} \; ; \; \sum_{j=0}^{m} \varepsilon_j 2^j = m\right\}$$

$$F_m = \left\{(\varepsilon_o, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,0,1\}^{n+1} \; ; \; 2^{n+1} + \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j 2^j = m\right\}.$$

Si ε appartient à $\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$ on notera $a_j'(\varepsilon)$ le nombre valant $\frac{1}{2} a_j$, 1, $\frac{1}{2} \bar{a}_j$ selon que ε_j vaut $+1$, 0 ou -1.

Alors si N est supérieur à $n+2$ la remarque 4.1.3 montre que l'on a :

$$\hat{P}_{a,N}(m) = \sum_{\varepsilon \in E_m} \left(\prod_{j=0}^{n} a_j'(\varepsilon)\right) + \left[\sum_{\varepsilon \in F_m} \prod_{j=0}^{m} a_j'(\varepsilon)\right] \left[\frac{a_{n+1}}{2} + \sum_{k=n+2}^{N} \frac{a_k}{2} \prod_{j=n+1}^{k-1} \frac{\bar{a}_j}{2}\right].$$

Ceci montre que $\hat{P}_{a,N}(m)$ a une limite lorsque N tend vers $+\infty$, ce qui prouve l'existence et l'unicité de μ_a.

4.1.5. LEMME. Soit $\mathcal{A}_n$ la plus petite tribu rendant mesurable la fonction $e^{i2^n x}$. On a :

$$E(e^{-i2^n x} | \mathcal{A}_{n+1}) = \frac{1}{2}(a_n + \bar{a}_n e^{-i2^{n+1}x}).$$

En effet, si $2^n + k\, 2^{n+1} = \sum_{j\geq 0} \varepsilon_j 2^j$ avec les conditions habituelles sur les ε_j nous avons $\varepsilon_o = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{n-1} = 0$, $\varepsilon_n = \pm 1$. Donc

$$\int e^{-i2^n x} e^{-ik2^{n+1}x} d\mu_a(x) = \frac{a_n}{2} \int e^{-ik2^{n+1}x} d\mu_a(x) + \frac{\bar{a}_n}{2} \int e^{-i(k+1)2^{n+1}x} d\mu_a(x)$$

ce qui démontre le lemme.

4.1.6. COROLLAIRE. Il existe un nombre C tel que pour toute suite de carré sommable, $\{\alpha_j\}_{j\geq 0}$, on ait :

$$\left[\int \sup_{n\geq 0} \left|\sum_{j=0}^{n} \alpha_j (e^{i2^j x} - \hat{\mu}_a(-2^j))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2} \leq C \left(\sum_{j\geq 0} |\alpha_j|^2\right)^{1/2}.$$

Démonstration. Le lemme précédent permet de définir des nombres $u_{j,k}$ et $v_{j,k}$

$(j \geq 0, \quad k \geq 0)$ ainsi :

(i) pour tout $j \geq 0$, $u_{j,0} = 0$ et $v_{j,0} = 1$

(ii) pour tous j et k, $E\left(v_{j,k} e^{i2^{j+k}x} \middle| \mathcal{A}_{j+k+1}\right) = u_{j,k+1} + v_{j,k+1} e^{i2^{j+k+1}x}$.

On a : $|u_{j,k+1}| \leq \frac{1}{2} |v_{j,k}|$, $|v_{j,k+1}| \leq \frac{1}{2} |v_{j,k}|$

d'où $|u_{j,k+1}| \leq 2^{-k}$, $|v_{j,k}| \leq 2^{-k}$

et $\left[\int \left| v_{j,k} e^{i2^{j+k}x} - u_{j,k+1} - v_{j,k+1} e^{i2^{j+k+1}x} \right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2} \leq 2^{-k}$.

On a aussi :

$$\sum_{k\geq 0} \left(v_{j,k} e^{i2^{j+k}x} - u_{j,k+1} - v_{j,k+1} e^{i2^{j+k+1}x}\right) = e^{i2^j x} - \sum_{k\geq 0} u_{j,k+1} = e^{i2^j x} - \hat{\mu}_a(-2^j).$$

Par suite

$$\sup_{n\geq 0} \left| \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \left(e^{i2^j x} - \hat{\mu}_a(-2^j)\right) \right| \leq \sum_{k\geq 0} \sup_{n\geq 0} \left| \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \left(v_{j,k} e^{i2^{j+k}x} - u_{j,k+1} - v_{j,k+1} e^{i2^{j+k+1}x}\right) \right|$$

utilisant une inégalité sur les martingales de carrés sommables nous obtenons :

$$\left[\int \sup_{n\geq 0} \left| \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \left(e^{i2^j x} - \hat{\mu}_a(-2^j)\right) \right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2} \leq C \sum_{k\geq 0} 2^{-k} \left(\sum_{j\geq 0} |\alpha_j|^2\right)^{1/2}$$

ce qui achève la démonstration.

Ceci prouve que lorsque $\sum_{j\geq 0} |\alpha_j|^2$ est fini, la série $\sum_{j\geq 0} \alpha_j \left(e^{i2^j x} - \hat{\mu}_a(-2^j)\right)$ converge μ_a-presque partout.

4.1.7. On en déduit facilement que lorsque deux suites, a et b, de nombres complexes sont telles que : $\|a\|_\infty \leq 1$, $\|b\|_\infty \leq 1$, $\sum_{n\geq 0} |\hat{\mu}_a(2^n) - \hat{\mu}_b(2^n)|^2 = +\infty$, alors les mesures μ_a et μ_b sont étrangères. La proposition suivante explicite cette condition.

4.1.8. PROPOSITION. Soient a et b deux suites de $\mathbb{C}$ telles que $\|a\|_\infty$ et $\|b\|_\infty$ soient strictement inférieurs à 1. Si $\sum_{n\geq 0} |b_n - a_n|^2$ est infini les deux mesures μ_a et μ_b sont étrangères.

En effet, le lemme 4.1.5 montre que $\hat{\mu}_a(2^n) = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} \bar{a}_n \hat{\mu}_a(2^{n+1})$.

Résolvant par rapport à a_n nous obtenons :

$$\bar{a}_n = 2\, \frac{\overline{\hat{\mu}_a(2^n)} - \hat{\mu}_a(2^n)\, \overline{\hat{\mu}_a(2^{n+1})}}{1 - |\hat{\mu}_a(2^{n+1})|^2}\,.$$

Il est facile de montrer que : $|\hat{\mu}_a(2^n)| \leq \|a\|_\infty$. On a donc :

$$|b_n - a_n| \leq k(|\hat{\mu}_a(2^n) - \hat{\mu}_b(2^n)| + |\hat{\mu}_a(2^{n+1}) - \hat{\mu}_b(2^{n+1})|)$$

où k est un nombre ne dépendant pas de n. Alors :

$$\sum_{n\geq 0} |b_n - a_n|^2 \leq 2k^2 |\hat{\mu}_b(1) - \hat{\mu}_a(1)|^2 + 4k^2 \sum_{n\geq 1} |\hat{\mu}_b(2^n) - \hat{\mu}_a(2^n)|^2$$

ce qui achève la démonstration.

Il est d'autre part clair que les conditions d'absolue continuité de μ_b par rapport à μ_a données dans le théorème 1.3 sont encore valables dans ce cadre.

4.1.9. LEMME. Il existe un nombre C tel que quels que soient l'entier non nul, n, et la suite $\{\alpha_j\}_{j\geq 0}$ de carré sommable on ait :

$$\left[\int \sup_m \left|\sum_{j=0}^{m} \alpha_j (e^{i2^j nx} - \hat{\mu}_a(-2^j n))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2} \leq C(1 + \sqrt{\operatorname{Log}|n|})(\sum_{j\geq 0} |\alpha_j|^2)^{1/2}.$$

En effet, le lemme 4.1.5 montre que $E(e^{in2^j x} | \mathcal{A}_{j+1})$ est égal à $e^{in2^j x}$ ou à $\frac{1}{2} \bar{a}_j e^{i\frac{n-1}{2} 2^{j+1} x} + \frac{1}{2} a_j e^{i\frac{n+1}{2} 2^{j+1} x}$ selon que n est pair ou impair.

Soit n un entier supérieur à 2, notons k le plus petit entier strictement supérieur à $\mathrm{Log}(n-1)/\mathrm{Log}\,2$. On vérifie que $E(e^{in2^jx}|\mathcal{C}\!\!\mathcal{l}_{j+k}) = u_j + v_j e^{i2^{j+k+1}x}$ avec $|u_j| + |v_j| \leq 1$.

Comme dans la démonstration du lemme 2.4 nous avons

$$\left[\int \sup_{m\geq 0} \left|\sum_{j=0}^{m} \alpha_j (e^{in2^jx} - E(e^{in2^jx}|\mathcal{C}\!\!\mathcal{l}_{j+k}))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^2 \leq C\sqrt{k}\,(\sum_{j\geq 0} |\alpha_j|^2)^{1/2}.$$

Par ailleurs nous avons :

$$E(e^{in2^jx}|\mathcal{C}\!\!\mathcal{l}_{j+k}) - \hat{\mu}_a(-n2^j) = v_j\left[e^{i2^{j+k+1}x} - \hat{\mu}_a(-2^{j+k+1})\right]$$

et le lemme 4.1.6 montre que :

$$\left[\int \sup_{m\geq 0} \left|\sum_{j=0}^{m} \alpha_j (E(e^{in2^jx}|\mathcal{C}\!\!\mathcal{l}_{j+k}) - \hat{\mu}_a(-n2^j))\right|^2 d\mu_a(x)\right]^{1/2} \leq C(\sum_{j\geq 0} |a_j|^2)^{1/2}$$

d'où le lemme.

Ensuite les estimations de dimension de Hausdorff se déroulent de la même façon que précédemment à cela près que l'on peut se contenter d'étudier les intervalles $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$.

4.2. PRODUITS DE RIESZ A PLUSIEURS VARIABLES.

Indiquons brièvement comment les résultats du second chapitre peuvent se généraliser à $\mathbf{T}^2$.

4.2.1. On désigne par $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ et $\{\lambda'_n\}_{n\geq 0}$ deux suites de nombres entiers supérieurs à 1 telles que λ_{n+1}/λ_n et $\lambda'_{n+1}/\lambda'_n$ soient supérieurs à 3 pour tout n. Soit $a = \{a_n\}_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes dont les modules sont inférieurs à 1 ; on pose :

$$P_{a,n}(e^{ix}, e^{iy}) = \prod_{j=0}^{n} \left[1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i(\lambda_j x + \lambda_j' y)})\right]$$

et l'on note μ_a la limite vague des mesures $P_{a,n}(e^{ix}, e^{iy}) \frac{dx\,dy}{4\pi^2}$.

On peut démontrer les résultats suivants.

4.2.2. PROPOSITION. Soit $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Chacune des conditions suivantes :

1. Pour tout n, λ_{n+1}/λ_n et $\lambda'_{n+1}/\lambda'_n$ sont entiers, $\|a\|_\infty$ est strictement inférieur à 1, $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2$ est fini,

2. $\max(\lambda_{n+1}/\lambda_n, \lambda'_{n+1}/\lambda'_n)$ tend vers $+\infty$, $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n \mathrm{Log}(n+2)|^2$ est fini et, si α étant le nombre compris entre 0 et 1 tel que $\|a\|_\infty = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$, on a $\sum_{n\geq 1} \alpha^n \sqrt{\xi_n} < \infty$ où $\xi_n = \inf\left\{j\geq 0,\ \forall k \geq j,\ n \leq \max(\lambda_{n+1}/\lambda_n, \lambda'_{n+1}/\lambda'_n) - \frac{3}{2}\right\}$,

3. $\sum_{n\geq 0} |a_n \alpha_n|$ est fini,

implique la convergence μ_a-presque partout de la série

$$\sum_{n\geq 0} \alpha_n \left[\mathrm{Log}\left[1+\mathrm{Re}(a_n e^{i(\lambda_n x+\lambda_n' y)})\right] - \int \mathrm{Log}\left[1 + \mathrm{Re}(a_n e^{i(\lambda_n t+\lambda_n' u)})\right] d\mu_a(t,u)\right].$$

On en déduit le résultat suivant.

4.2.3. THEOREME. On suppose qu'existent deux nombres A et B tels que : $0 < A \leq \frac{\lambda'_n}{\lambda_n} \leq B$ pour tout n.

1. Si les hypothèses 2. ou 3. de la proposition précédente sont satisfaites en prenant $\alpha_n = (\log(\lambda_n \lambda'_n))^{-1}$, tout borélien E tel que $\mu_a(E)$ soit non nul a 2 pour

dimension de Hausdorff.

2. Si les hypothèses 1. de la proposition précédente sont satisfaites, tout borélien E tel que $\mu_a(E)$ soit non nul a une dimension de Hausdorff supérieure à

$$2\left(1 - \limsup_{n\to\infty} [\mathrm{Log}(\lambda_n \lambda'_n)]^{-1} \int \log P_{a,n}(e^{it}, e^{iu}) d\mu_a(t,u)\right).$$

En outre, il existe un borélien portant μ_a dont la dimension de Hausdorff est inférieure à

$$2\left(1 - \liminf_{n\to\infty} (\log(\lambda_{n+1} \lambda'_{n+1}))^{-1} \int \mathrm{Log}\, P_{a,n}(e^{it}, e^{iu}) \, d\mu_a(t,u)\right).$$

4.2.4. On peut aussi obtenir des résultats lorsque la suite $\{(\lambda_j, \lambda'_j)\}_{j\geq 0}$ est la suite des images successives d'un couple d'entiers par une application linéaire.

Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients entiers rationnels dont les valeurs propres ne sont pas réelles ; on suppose aussi que $\alpha\delta - \beta\gamma$ est différent de 1. L'équation caractéristique est $\lambda^2 - (\alpha+\delta)\lambda + \alpha\delta - \beta\gamma = 0$, par hypothèse $(\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta-\beta\gamma)$ est strictement négatif. Le module des valeurs propres est $\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}$.

A définit un automorphisme u de $\mathbf{R}^2$ et, par passage au quotient, un homomorphisme T de $\mathbf{T}^2$ sur lui-même :

$$T(e^{ix}, e^{iy}) = (e^{i(\alpha x+\beta y)}, e^{i(\gamma x+\delta y)}).$$

On notera v le transposé de u, $\Gamma_n = v^n(\mathbf{Z}^2)$, $\tilde{G}_n = u^{-n}(2\pi\mathbf{Z}^2)$; G_n désigne le sous-groupe discret de $\mathbf{T}^2$, image de $\tilde{G}_n$ par la surjection canonique de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/2\pi\mathbf{Z}^2$.

Soit (m_o, n_o) un point de $\mathbf{Z}^2$ telle que la suite $\{v^j(m_o,n_o)\}_{j\geq 0}$ soit dissociée (c'est évidemment le cas quels que soient m_o et n_o si $\sqrt{\det A}$ est supérieur à 3).

Soit $a = \{a_j\}_{j\geq 0}$ une suite de nombres complexes telle que $\|a\|_\infty < 1$. Posons :

$$P_{a,k}(e^{ix}, e^{iy}) = \prod_{j=0}^{k} \left(1 + \mathrm{Re}\, a_j \langle (m_o,n_o), T^j(e^{ix}, e^{iy}) \rangle\right)$$

$$= \prod_{j=0}^{k} \left[1 + \mathrm{Re}\, a_j \langle v^j(m_o,n_o), (e^{ix}, e^{iy})\rangle\right] .$$

La suite de mesures $\left\{P_{a,k}(e^{ix},e^{iy}) \frac{dx\,dy}{4\pi^2}\right\}_{k\geq 0}$ converge vaguement vers une mesure de probabilité μ_a.

Posons $\mu_a^{(k)} = (P_{a,k})^{-1} \mu_a$.

Observons que Γ_1 est strictement contenu dans Γ_o et que l'on a : $\bigcap_{j\geq 0} \Gamma_j = \{(0,0)\}$. Par conséquent on peut toujours se ramener au cas où (m_o,n_o) n'appartient pas à Γ_1, condition qui sera supposée satisfaite dans les démonstrations qui suivent.

Désignons par $\mathcal{A}_j$ la plus petite tribu sur $\mathbf{T}^2$ rendant mesurables les fonctions continues à spectre dans Γ_j et par E^j l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{A}_j$ lorsque l'on munit $\mathbf{T}^2$ de la probabilité μ_a.

4.2.5. LEMME. On suppose que $2(m_o,n_o)$ n'appartient pas à Γ_1. Si (m,n) appartient à Γ_j on a :

1. $E^{j+1}((m,n)) = 0$ si (m,n) n'est congru modulo Γ_{j+1} ni à 0 ni à $\pm v^j(m_o,n_o)$.

2. $E^{j+1}(v^j(m_o,n_o)) = \frac{1}{2}\bar{a}_j$

$E^{j+1}(-v^j(m_o,n_o)) = \frac{1}{2} a_j$.

<u>Démonstration</u>. On remarque d'abord que $\sum_{k=0}^{j-1} \varepsilon_k v^k(m_o,n_o)$, $(\varepsilon_k \in \{-1, 0, 1\})$ n'appartient à Γ_j que lorsque tous les ε_k sont nuls.

Soit (m',n') dans Γ_{j+1}, si l'on a : $(m,n)+(m',n') = \sum_{k\geq 0} \varepsilon_k v^k(m_o,n_o)$, $(\varepsilon_k \in \{-1, 0, 1\})$ la remarque précédente montre que $\varepsilon_o = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{j-1} = 0$, par suite $(m,n) - \varepsilon_j v^j(m_o,n_o)$ appartient à Γ_{j+1}.

Ceci prouve la première assertion. Quant à la seconde elle résulte de ce qui précède et du fait que $v^j(m_o,n_o)$ et $-v^j(m_o,n_o)$ ne sont pas congrus modulo Γ_{j+1}.

La proposition suivante se déduit de ce lemme comme la proposition 2.5 se déduit de 2.2.

4.2.6. PROPOSITION. Les hypothèses du lemme précédent étant vérifiées, soit $\{f_j\}_{j\geq 0}$ une suite de fonctions de $A(\mathbf{T})$ comme dans la proposition 2.5. Alors pour toute suite de carré sommable $\{\alpha_j\}_{j\geq 0}$ la série

$$\sum_{j\geq 0} \alpha_j \left[f_j(\langle (m_o,n_o), T^j(e^{ix},e^{iy})\rangle) - \int f_j(\langle (m_o,n_o), T^j(e^{is},e^{it})\rangle)\, d\mu_a(s,t) \right]$$

converge pour μ_a-presque tout (x,y).

4.2.7. THEOREME. Sous les hypothèses précédentes

1. Tout borélien E tel que $\mu_a(E)$ soit non nul a une dimension de Hausdorff supérieure à

$$2\left[1 - \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n\log(\det A)} \int \log P_{a,n}\, d\mu_a\right].$$

2. Il existe un borélien portant μ_a dont la dimension de Hausdorff est inférieure à

$$2\left[1 - \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n\log(\det A)} \int \log P_{a,n}\, d\mu_a\right].$$

Démonstration.

La proposition précédente montre que $\frac{1}{n}(\log P_{a,n} - \int \log P_{a,n}\, d\mu_a)$ converge vers 0 μ_a-presque partout.

Soit (x_0 , y_0) un élément de longueur minimum dans $\widetilde{G}_1 \setminus \{(0,0)\}$. Soit (x_1,y_1) un élément de longueur minimum dans $\widetilde{G}_1 \setminus \mathbb{Z}(x_0,y_0)$. Ces deux éléments forment une base du réseau $\widetilde{G}_1$. Soit J_1 l'ensemble $\{t_0(x_0,y_0)+t_1(x_1,y_1) \; ; \; 0 \leq t_0 < 1, \; 0 \leq t_1 < 1\}$. L'intersection de $\widetilde{G}_1$ et de J_1 est $\{(0,0)\}$; $u(x_0,y_0)$ et $u(x_1,y_1)$ forment une base de $2\pi\mathbb{Z}^2$. On en déduit que la restriction de T à la projection I_1 de J_1 sur $\mathbb{T}^2$ est une bijection de I_1 sur $\mathbb{T}^2$. Les ensembles $\{g+I_1 \; ; \; g\in G_1\}$ forment une partition de $\mathbb{T}^2$ en $\det A$ ensembles de mesures $(\det A)^{-1}$.

Posons $J_n = u^{1-n}(J_1)$, on a $|J_n| = 4\pi^2(\det A)^{-n}$; de plus comme u est conjugué d'une similitude de rapport $\sqrt{\det A}$ il existe deux nombres c_1 et c_2 tels que

$$0 < c_1 \leq |J_n| \Big/ \left[\text{diamètre } (J_n)\right]^2 \leq c_2.$$

Soit I_n la projection de J_n sur $\mathbb{T}^2$. Il est facile de vérifier que pour calculer la dimension de Hausdorff d'une partie de $\mathbb{T}^2$ il suffit de considérer des recouvrements au moyen d'ensembles de la famille $\{g+I_n \; ; \; n \geq 1, \; g\in G_n\}$.

T^n est une bijection de I_n sur $\mathbb{T}^2$, un changement de variables montre que si g appartient à G_n on a

$$\mu_a^{(n)}(g+I_n) = (\det A)^{-n}.$$

La démonstration s'achève comme celle du théorème 2.8.

4.3. PRODUITS DE RIESZ SUR R.

4.3.1. Soit $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Soit $a = \{a_n\}_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes dont les modules sont inférieurs à 1 et telle que $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geq 3$. On sait que la produit $\prod_{j\geq 0} (1 + \mathrm{Re}(a_j\langle\lambda_j, x\rangle))$ définit une mesure μ_a sur le compactifié de Bohr de R. Cette mesure ne permet pas d'étudier le comportement de certaines séries sur R aussi est-on conduit aux considérations qui suivent.

4.3.2. Soit K une fonction positive intégrable sur R dont la transformée de Fourier, $\hat{K}$, est positive, à support dans $\left[-\frac{1}{2}\lambda_o, \frac{1}{2}\lambda_o\right]$ et telle que $\hat{K}(0)$ égale 1. On pose :

$$P_{a,n}(x) = \prod_{j=0}^{n} (1 + \mathrm{Re}(a_j e^{i\lambda_j x}))$$

$$Q_{a,n}(x) = K(x)\, P_{a,n}(x).$$

Il est facile de voir que les mesures $Q_{a,n}(x)\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ convergent vaguement vers une mesure que nous noterons $\nu_{a,K}$ ou ν_a lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible.

Plus précisément si ξ appartient à $\mathbb{R}$ et si $|\xi - \sum_{j\geq 0} \varepsilon_j\lambda_j| \leq \frac{1}{2}\lambda_o$ (avec les conditions habituelles sur les ε_j). On a :

$$\hat{\nu}_{a,K}(\xi) = \hat{K}(\xi - \sum_{j\geq 0} \varepsilon_j\lambda_j)\, \hat{\mu}_a(\sum_{j\geq 0} \varepsilon_j\lambda_j)$$

et, si ξ n'a pas la propriété ci-dessus, $\hat{\nu}_{a,K}(\xi)$ est nul.

4.3.3. La suite $\left\{e^{i\lambda_j x} - \hat{\nu}_a(-\lambda_j)\right\}_{j\geq 0}$ est orthogonale dans $L^2(\nu_a)$. Il est facile de s'assurer que les résultats du chapitre I sont valables pour les mesures $\nu_{a,K}$ (K fixe).

Passons maintenant à l'étude des dimensions de Hausdorff des boréliens portant $\nu_{a,K}$.

On définit de même que précédemment, lorsque λ_{n+1}/λ_n tend vers $+\infty$:

$\xi_n = \inf\left\{j\geq 0,\ \forall k\geq j,\ n \leq \lambda_{k+1}/\lambda_k - \frac{3}{2}\right\}$.

4.3.4. PROPOSITION. On suppose que λ_{n+1}/λ_n tend vers $+\infty$. Soit α un nombre compris entre 0 et 1 tel que $||a||_\infty \leq \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$, si $\sum_{n\geq 1} \alpha^n \xi_n$ est fini alors pour toute suite $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ telle que $\sum_{n\geq 0} \left|\alpha_n \log(n+2)\right|^2$ soit fini la série

$$\sum_{n\geq 0} \alpha_n \left[\mathrm{Log}(1 + \mathrm{Re}(a_n e^{i\lambda_n x})) - \int \mathrm{Log}(1 + \mathrm{Re}(a_n e^{i\lambda_n t}))\, d\nu_{a,K}(t)\right]$$

converge pour $\nu_{a,K}$-presque tout x.

On en déduit le résultat suivant :

4.3.5. THEOREME. 1. Les hypothèses sur $\{\lambda_j\}_{j\geq 0}$ et a étant celles de la proposition précédente, tout borélien borné, E, tel que $\nu_{a,K}(E)$ soit non nul a 1 pour dimension de Hausdorff.

2. On a la même conclusion sous l'hypothèse : $\sum_{n\geq p} |a_n|/\text{Log}\,\lambda_n < \infty$ (où p est assez grand).

4.4. CONVERGENCE VERS LA LOI DE GAUSS.

On étend au cadre des produits de Riesz un résultat de R. Salem et A. Zygmund sur les séries trigonométriques lacunaires [10].

Soit $\{\lambda_j\}_{j\geq 0}$ une suite d'entiers supérieurs à 1 et tels que λ_{j+1}/λ_j soit supérieur à 5. Soit $a = \{a_j\}_{j\geq 0}$ une suite de nombres complexes dont les modules sont inférieurs à 1.

4.4.1. THEOREME. Soit $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que $A_n = \sqrt{\frac{1}{2}(|\alpha_o|^2 + |\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2)}$ et $A_n/|\alpha_n|$ tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. L'image de μ_a par la fonction $\frac{1}{A_n}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(\cos\lambda_j x - \frac{1}{2}\text{Re}\,a_j)$ converge étroitement vers la mesure $e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Preuve. Il suffit de montrer que

$F_n(t) = \int \exp\left[it\sum_{j=0}^{n}\alpha_j(\cos\lambda_j x - \frac{1}{2}\text{Re}\,a_j)/A_n\right]d\mu_a(x)$ tend vers $e^{-\frac{t^2}{2}}$ uniformément sur tout compact.

Puisque $\exp z = (1+z)\exp(\frac{z^2}{2} + o(|z|^2))$ il suffit d'étudier la limite de

$$G_n(t) = \int\prod_{j=0}^{n}\left[(1 + \frac{it}{A_n}\alpha_j\cos\lambda_j x)\exp(-\frac{it\,\text{Re}\,a_j}{2A_n})\right]\exp(\frac{-t^2}{2A_n^2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^2\cos^2\lambda_j x)\,d\mu_a(x)$$

or

$$\frac{1}{A_n^2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^2\cos^2\lambda_j x = 1 + \frac{1}{2A_n^2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^2\cos 2\lambda_j x\ .$$

Comme les fonctions $\{\cos 2\lambda_j x\}_{j\geq 0}$ sont orthogonales dans $L^2(\mu_a)$, (en effet

λ_{j+1}/λ_j est supérieur à 5), le même argument que dans [10] montre que $G_n(t)$ a même limite que

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \int \prod_{j=0}^{n} \left[(1 + \frac{it}{A_n} \alpha_j \cos \lambda_j x) \exp(- \frac{it \operatorname{Re} a_j}{2A_n})\right] d\mu_a(x).$$

Il suffit d'observer que

$$P_{a,n}(x) \prod_{j=0}^{n} (1 + \frac{it}{A_n} \alpha_j \cos \lambda_j x) =$$

$$\prod_{j=0}^{n} \left[1 + \frac{it \operatorname{Re} a_j}{2A_n} + \beta_j \cos(\lambda_j x - \varphi_j) + \gamma_j \cos(2\lambda_j x - \psi_j)\right]$$

où β_j, γ_j, φ_j, ψ_j sont des nombres convenables, pour voir que

$$\prod_{j=0}^{n} (1 + \frac{it}{A_n} \alpha_j \cos \lambda_j x) \, d\mu_a(x) = \prod_{j=0}^{n} (1 + \frac{it \operatorname{Re} a_j}{2A_n})$$

et l'on conclut facilement.

4.5. g-MESURES.

Les g-mesures que M. Keane a introduites généralisent en un sens les produits de Riesz. Rappelons les faits suivants.

Soit a un entier supérieur à 2. On note la transformation $x \longrightarrow ax$ du tore $\mathbb{T}$ dans lui-même. Soit g une fonction strictement positive, définie sur le tore, appartenant à une classe de Lipchitz Λ_α $(0 < \alpha < 1)$ et telle que, pour tout x de $\mathbb{T}$, on ait

$$\sum_{z \in T^{-1}\{x\}} g(z) = 1.$$

On sait que dans ces conditions les mesures $\prod_{0 \leq k < n} \left[a g(T^k x)\right] \frac{dx}{2\pi}$ convergent vaguement vers une mesure de probabilité μ. De plus, la transformation T est ergodique par rapport à μ. On peut trouver la démonstration de ces faits dans le travail de B. Petit intitulé g-mesures et schémas de Bernoulli et publié à l'Université de Rennes.

Nous avons le théorème suivant.

THEOREME. 1) Il existe un borélien portant μ dont la dimension de Hausdorff est $-(\mathrm{Log}\ a)^{-1} \int \log g \, d\mu$.

2) Tout borélien E tel que $\mu(E)$ soit non nul a une dimension de Hausdorff supérieure à $-(\log a)^{-1} \int \log g \, d\mu$.

Démonstration. Posons $P_n(x) = \prod_{0 \le k < n} [a g(T^k x)]$. Le théorème ergodique de Birkhoff montre que $\frac{1}{n} \log P_n(x)$ converge vers $\log a + \int \log g \, d\mu$ pour μ-presque tout x.

D'autre part, on voit facilement que l'on a

$$\int_{2\pi k a^{-n}}^{2\pi(k+1)a^{-n}} [P_n(x)]^{-1} \, d\mu(x) = a^{-n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, a^n - 1.$$

Utilisant le fait que g est lipchitzienne on montre facilement que, pour μ-presque tout x, $[\log \mu(I_n(x))]/(-n \log a)$ tend vers $-(\log a)^{-1} \int \log g \, d\mu$, où $I_n(x)$ désigne l'intervalle $[2\pi\, k\, a^{-n}, 2\pi(k+1)\, a^{-n}[$ contenant x. On conclut comme dans le cas des produits de Riesz.

Références

[1] P. BILLINGSLEY Ergodic theory and information. Wiley 1965.

[2] G. BROWN, W. MORAN On orthogonality of Riesz product. (à paraître).

[3] E. HEWITT and H. S. ZUCKERMAN Singular measures with absolutely continuous squares. Proc. Camb. Phil. Soc. 62 (1966), 399-420. Corrigendum ibid. 63 (1967), 367-368.

[4] M. KAC, R. SALEM, A. ZYGMUND A gap theorem. Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), 235-243.

[5] J.-P. KAHANE et R. SALEM Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann, Paris 1963.

[6] Y. MEYER et B. WEISS Les produits de Riesz sont des schémas de Bernoulli. Journées ergodiques, Rennes 1973.

[7] J. NEVEU Calcul des probabilités. Masson 1964.

[8] O. PADE Sur le spectre d'une classe de produits de Riesz. C. R. Acad. Sc. Paris, 276 (1973), 1453-1455.

[9] J. PEYRIERE Sur les produits de Riesz. C. R. Acad. Sc. Paris, 276 (1973), 1417-1419.

[10] R. SALEM and A. ZYGMUND On lacunary trigonometric series I. Proc. Nat. Acad. Sc. 33 (1947), 333-338.

[11] A. ZYGMUND Trigonometric series. I and II. Cambridge 1959.

Nous étudions des mesures aléatoires introduites par B. Mandelbrot (3). On se donne un entier c supérieur à 2 et une variable aléatoire positive W d'espérance 1.

Etant donnés n entiers, $j_1, j_2, \ldots, j_n$, compris entre 0 et $c-1$ on appelle $I_{j_1,\ldots,j_n}$ l'intervalle $\left[\sum_{k=1}^{n} j_k c^{-k}, \sum_{k=1}^{n} j_k c^{-k} + c^{-n}\right[$, on dira qu'il appartient à la nième génération.

Soient $W_{j_1,\ldots,j_n}$ des variables aléatoires indépendantes équidistribuées avec W. On définit ainsi des fonctions aléatoires sur $[0,1[$:

$$X_n = \sum_{0 \le j_1,\ldots,j_n \le c-1} W_{j_1,\ldots,j_n} 1_{I_{j_1,\ldots,j_n}}$$

$$P_n = \prod_{1 \le k \le n} X_k .$$

J.-P. Kahane (2) a montré que, si pour un nombre réel h strictement supérieur à 1 on a $E(W^h) < c^{h-1}$ alors presque sûrement les mesures $P_n(x)dx$ convergent vaguement vers une mesure μ et si l'on pose $Y = \|\mu\|$, on a $E(Y) = 1$ et $E(Y^h) < +\infty$.

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant :

THEOREME. On suppose qu'il existe un nombre h strictement supérieur à 1 tel que : $E(W^h) < c^{h-1}$. Alors

1) presque sûrement il existe un borélien, portant μ, dont la dimension de Hausdorff est $1 - \dfrac{E(W \operatorname{Log} W)}{\operatorname{Log} c}$.

2) presque sûrement tout borélien F tel que $\mu(F)$ soit non nul a une dimension de Hausdorff supérieure à $1 - \dfrac{E(W \operatorname{Log} W)}{\operatorname{Log} c}$.

Introduisons quelques notations. Soit μ_n la mesure définie par le produit infini $\prod_{j>n} X_j$ (la restriction de μ_n à chaque intervalle de la $n^{\text{ième}}$ génération est définie comme μ). Soit $Y_{j_1,\dots,j_n} = c^n \mu(I_{n\,j_1,\dots,j_n})$, il est clair que les variables aléatoires $\{Y_{j_1,\dots,j_n}\}$ sont équidistribuées avec Y et indépendantes des variables $X_1(x), X_2(x)$, $\dots, X_n(x)$. Posons : $Z_n = \sum_{0\leq j_1,\dots,j_n<c} Y_{j_1,\dots,j_n} 1_{I_{j_1,\dots,j_n}}$.

Si u est une fonction définie sur $[0,1[$, constante sur les intervalles de la $n^{\text{ième}}$ génération on a :

$$\int u\, d\mu = \int_0^1 u(x)\, P_n(x)\, Z_n(x)\, dx$$

et, en fait, cette dernière intégrale est une somme finie.

Etant donné x dans $[0,1[$ appelons $I_n(x)$ l'intervalle de la $n^{\text{ième}}$ génération qui contient x.

Avant de démontrer le théorème établissons deux lemmes.

LEMME 1. Presque sûrement pour μ - presque tout x, $\frac{1}{n}\log \mu_n(I_n(x))$ tend vers $-\log c$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit en effet un nombre réel α appartenant à l'intervalle $]-1\,,\,h-1]$. On a :

$$\int Z_n^\alpha\, d\mu = \int_0^1 P_n(x)(Z_n(x))^{1+\alpha}\, dx$$

d'où

$$E\left(\int Z_n^\alpha\, d\mu\right) = \int_0^1 E(P_n(x))\, E\left[(Z_n(x))^{1+\alpha}\right] dx = E(Y^{1+\alpha})$$

par suite $E\left(\int \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} Z_n^\alpha\, d\mu\right) = \frac{\pi^2}{6} E(Y^{1+\alpha}) < +\infty$. Ceci montre que presque sûrement μ-presque partout $\frac{1}{n}\log Z_n$ tend vers 0, ce qui prouve le lemme.

LEMME 2. Presque sûrement μ-presque partout $\frac{1}{n}$ Log P_n tend vers $E(W \log W)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit Ω l'espace probabilisé sur lequel les variables $W_{j_1,\ldots,j_n}$ sont définies. Munissons $\Omega \times [0,1[$ de la probabilité : $P(A) = E(\int 1_A \, d\mu)$. Calculons $E(\text{Log } X_{n+1} | X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Soit φ une fonction boréilienne bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\int \varphi(X_1,\ldots,X_n) \text{Log } X_{n+1} d\mu = \int_0^1 \varphi(X_1(x),\ldots,X_n(x)) \text{Log } X_{n+1}(x) P_{n+1}(x)\, Z_{n+1}(x)\, dx$$

d'où

$$\int \varphi(X_1,\ldots,X_n) \text{Log } X_{n+1} dP = \int_0^1 E\left[\varphi(X_1(x), \ldots, X_n(x)) \text{ Log } X_{n+1}(x) P_{n+1}(x) Z_{n+1}(x)\right] dx$$

$$= E(W \text{ Log } W) \int_0^1 E\left[\varphi(X_1(x), \ldots, X_n(x)) P_n \ (x)\right] dx$$

$$= E(W \text{ Log } W) \int \varphi(X_1,\ldots,X_n) dP.$$

Ceci montre que $E(\text{Log } X_{n+1} | X_1, \ldots, X_n) = E(W \text{ Log } W)$.

D'autre part :

$$\int (\text{Log } X_n)^2 dP = E(\int_0^1 (\text{Log } X_n(x))^2 P_n \ (x) Z_n \ (x) dx = E(W(\text{Log } W)^2) < +\infty.$$

Le théorème de convergence des martingales de carrés sommables montre que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left[\text{Log } X_n - E(W \text{ Log } W)\right]$ converge P-presque partout ; on en déduit facilement le lemme.

Les lemmes 1 et 2 montrent que

$$\frac{\log \mu(I_n(x))}{- n \text{ Log } c} = \frac{\text{Log } P_n(x) + \text{Log } \mu_n(I_n(x))}{- n \text{ Log } c} \quad \text{tend vers} \quad 1 - \frac{E(W \text{ Log } W)}{\text{Log } c}$$

presque sûrement pour μ-presque tout x. On conclut au moyen d'un théorème de Billingsley ((1), p. 136-145).

(1) P. BILLINGSLEY Ergodic theory and information. Wiley 1965.

(2) J.-P. KAHANE

(3) B. MANDELBROT Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire. I et II. C. R.

Indications bibliographiques.

A la fin de chaque chapitre se trouve la bibliographie correspondante.

Le chapitre I paraîtra vraisemblablement dans la Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées, il a déjà fait l'objet d'une note : C.R. Acad. Sc. Paris, 273 (1971), p.674-677.

Le chapitre II paraîtra dans Mathematica Scandinavica, ses deux premières parties ont paru sous forme de note : C.R. Acad. Sc. Paris, 271 (1970), p.992-994.

Le chapitre III est paru dans le tome XXVII (1974) des Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa.

Le chapitre IV paraîtra aux Annales de l'Institut Fourier, tome 25, fasc. 2 (1975), il a déjà fait l'objet d'une note : C.R. Acad. Sc. Paris, 276 (1973), p.1417-1419.

Le chapitre V a été publié sous forme de note : C.R. Acad. Sc. Paris, 278 (1974), p.567-569.