JORGE SOTO ANDRADE

Les Représentations des groupes classiques finis $GS_p(4, \underline{F}_q)$ et $S_p(4, \underline{F}_q)$

Thèses d'Orsay, 1975

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1975__0032__P0_0>

N° d'ordre : 1499

THÈSES

présentées

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

29010

pour obtenir le grade de Docteur Es-Sciences

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUE

par Jorge SOTO ANDRADE

1ère Thèse : LES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES CLASSIQUES FINIS $GSp(4,\mathbb{F}_q)$ ET $Sp(4,\mathbb{F}_q)$

2ème Thèse : Théorème central limite sur les groupes de Lie semi-simples

Soutenues le 7 Octobre 1975, devant la Commission d'examen

MM.	G. POITOU	Président
	J. TITS	Rapporteur
	R. AZENCOTT	Examinateurs
	P. CARTIER	Examinateurs
	P. DELIGNE	Examinateurs
	M. RAYNAUD	Examinateurs

TABLE DES MATIERES

- - - - - - - -

INTRODUCTION

Ce travail a pour objet de construire toutes les représentations complexes irréductibles du groupe symplectique $Sp(4,\mathbb{F}_q)$, en quatre variables, sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments (de caractéristique quelconque) et du groupe des similitudes symplectiques associé $GSp(4,\mathbb{F}_q)$. Jusqu'à présent, seule la table des caractères de $Sp(4,\mathbb{F}_q)$ était connue (depuis 1968 pour q impair [16] et depuis 1972 pour q pair [6]).

Nous obtenons <u>toutes</u> les représentations complexes irréductibles de $GSp(4,\mathbb{F}_q)$ en décomposant ses représentations de Weil associées à chacun des deux espaces quadratiques non-dégénérés de dimension 4 sur $\mathbb{F}_q$. Les représentations irréductibles de $Sp(4,\mathbb{F}_q)$, dont la structure est plus compliquée, s'obtiennent alors aisément par restriction. Nous construisons d'ailleurs, de manière générale, la représentation de Weil du groupe des similitudes symplectiques en $2n$ variables $GSp(2n,\mathbb{F}_q)$, sur $\mathbb{F}_q$, associée à un espace quadratique non-dégénéré (E,Q) de dimension paire sur $\mathbb{F}_q$. Cette représentation a été introduite par A. Weil dans [18] pour le du groupe symplectique sur un corps local. Nous en donnons ici une construction élémentaire pour le cas d'un corps fini, en nous appuyant sur une présentation très simple du groupe $GSp(2n,\mathbb{F}_q)$ (valable en fait pour tout corps de coefficients). Signalons que Saito [9] a aussi étendu la construction de la représentation de Weil au cas fini, en s'appuyant sur la présentation de $Sp(2n,\mathbb{F}_q)$ donnée par une base de Chevalley pour ce groupe. La vérification de la compatibilité des opérateurs de Weil associés à ses générateurs est encore élémentaire, mais très compliquée.

Nous décrivons maintenant le contenu des différents chapitres.

Dans le chapitre I, de nature préliminaire, nous construisons toutes les représentations irréductibles de $GL(2,\mathbb{F}_q)$ et $SL(2,\mathbb{F}_q)$ (qui sont d'ailleurs connues). Nous le faisons par décomposition de la représentation de Weil de $GL(2,\mathbb{F}_q)$ associée à chacun des deux plans quadratiques non-dégénérés sur $\mathbb{F}_q$, dont la construction correspond au cas $n = 1$ ci-dessus, et par restriction ultérieure à $SL(2,\mathbb{F}_q)$. Dans la suite, nous nous servons constamment des différents modèles donnés dans ce chapitre pour ces représentations, pour décrire celles de $GSp(4,\mathbb{F}_q)$.

Dans le chapitre II, aussi de nature préliminaire, nous construisons de manière géométrique toutes les représentations de $GSp(4,\mathbb{F}_q)$ qui ne sont pas dans sa série discrète, c'est-à-dire, toutes les composantes irréductibles des représentations induites à $GSp(4,\mathbb{F}_q)$ à partir des sous-groupes paraboliques propres de $GSp(4,\mathbb{F}_q)$, suivant le schéma général de Harish-Chandra [14].

Dans le paragraphe 1 du chapitre III, nous établissons la présentation de $GSp(2n,k)$ (k corps commutatif) qui rend immédiate la construction de la représentation de Weil de $GSp(2n,\mathbb{F}_q)$, associée à un espace quadratique non-dégénéré (E,Q) de dimension paire $2r$ sur $\mathbb{F}_q$. Nous effectuons cette construction dans le paragraphe 2, en définissant les opérateurs de Weil correspondant à nos générateurs et en vérifiant ensuite, aisément, que les relations entre ces générateurs sont respectées. Dans le paragraphe 3, nous donnons quelques lemmes généraux sur la décomposition de la représentation de Weil, suivant un sous-groupe du groupe $GO(Q)$ des similitudes de Q (qui agit dans la représentation de Weil !).

Dans le chapitre IV, nous spécialisons notre construction au cas

$n = r = 2$ et (E,Q) déployé, et nous étudions les représentations de $GSp(4,\mathbb{F}_q)$ obtenues par décomposition de la représentation de Weil dans ce cas. Cette décomposition se fait à l'aide des représentations de $GL(2,\mathbb{F}_q)$, puisque le quotient de $GL(2,\mathbb{F}_q) \times GL(2,\mathbb{F}_q)$ par le sous-groupe des (t,t^{-1}), pour t scalaire, est d'indice 2 dans $GO(Q)$ dans ce cas. On obtient ainsi à peu près la moitié des représentations de $GSp(4,\mathbb{F}_q)$ (la série dite déployée), dont la famille de représentations irréductibles dans la série discrète de dimension $(q-1)^2(q^2+1)$.

Dans le chapitre V, nous considérons le cas où (E,Q) est non-déployé (toujours avec $n = r = 2$). Nous pouvons alors décomposer la représentation de Weil suivant des représentations de $GL(2,\mathbb{F}_{q^2})$, car le quotient de $GL(2,\mathbb{F}_{q^2})$ par le sous-groupe des matrices scalaires de norme 1 est d'indice 2 dans $GO(Q)$ dans ce cas. Nous étudions les représentations de $GSp(4,\mathbb{F}_q)$ ainsi obtenues (qui sont presque toujours irréductibles) et nous montrons que l'on obtient ainsi toutes les représentations qui manquaient dans la série déployée. On obtient, en particulier, de manière immédiate, des modèles pour la série discrète de dimension $(q-1)^2$ et pour les $q-1$ représentations exceptionnelles de dimension $\frac{1}{2}q(q-1)^2$ (appartenant aussi à la série discrète).

Dans le chapitre VI, nous montrons comment l'on obtient aisément toutes les représentations irréductibles de $Sp(4,\mathbb{F}_q)$ par restriction de celles de $GSp(4,\mathbb{F}_q)$, à l'aide des résultats du paragraphe 1.

L'essentiel des résultats concernant $Sp(4,\mathbb{F}_q)$ a été annoncé dans les notes [12] et [13].

NOTATIONS GENERALES

$\|E\|$	cardinal d'un ensemble fini E .
F^E , App(E,F)	ensemble de toutes les applications d'un ensemble E dans un ensemble F .
Supp f	support d'une fonction f d'un ensemble E dans un groupe additif M , c'est-à-dire l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \neq 0$.
$\mathbb{C}$	corps des nombres complexes.
$\mathbb{F}_q$	corps fini à q éléments.
A^+	groupe additif d'un anneau A .
$A^\times$	groupe multiplicatif des éléments inversibles d'un anneau A .
Car(G)	groupe des caractères d'un groupe abélien G .
car k	caractéristique d'un corps k .
ψ^t	pour $\psi \in \mathrm{Car}(k^+)$, $t \in k^+$ (k corps commutatif), désigne le caractère de k^+ défini par $\psi^t(r) = \psi(tr)$ $(r \in k^+)$.
$\mathrm{Ind}_{H\uparrow G}$	induction (de représentations), d'un sous-groupe H d'un groupe fini G , à G lui-même.
$\mathrm{Res}_{G\downarrow H}$	restriction (de représentations) d'un groupe fini G à un sous-groupe H .
$[U,V]$	nombre d'entrelacement de deux représentations U et V d'un groupe fini G , c'est-à-dire la dimension de l'espace $\mathrm{Hom}_G(U,V)$.

$R(G)$ classe de toutes les représentations (complexes) d'un groupe fini G .

$I(G)$ classe de toutes les représentations irréductibles d'un groupe fini G .

$\overline{I}(G)$ ensemble des types d'isomorphie des représentations irréductibles d'un groupe fini G .

$\mathrm{Stab}_G x$ stabilisateur dans G (G groupe fini) d'un élément x d'un ensemble dans lequel G agit.

$\mathrm{Fix}_V H$ espace des points fixes pour un groupe fini H dans un espace vectoriel V dans lequel H agit.

$\delta_{a,b}$ vaut 1 si $a = b$ et 0 si $a \neq b$, pour des éléments a et b d'un ensemble E .

δ fonction de Dirac centrée à l'origine sur un groupe abélien M , c'est-à-dire, $\delta(a) = \delta_{a,0}$ $(a \in M)$.

J'exprime toute ma reconnaissance à P. CARTIER qui a dirigé mon travail de recherches pour l'intérêt qu'il a toujours porté à mon travail, et ses précieux conseils.

Je tiens à remercier G. POITOU, président du Jury de Thèse, J. TITS rapporteur de la dite thèse et R. AZENCOTT, qui m'a proposé un intéressant sujet de seconde thèse.

La frappe a été effectuée par Mesdames Cabannes et Lièvremont, à l'I.H.E.S. et Madame Bonnardel, à l'Université de Paris-Sud. Je les remercie bien vivement pour leur travail diligent.

CHAPITRE I

Les représentations de $GL(2, \mathbb{F}_q)$ et $SL(2, \mathbb{F}_q)$.

Dans ce chapitre, nous construisons toutes les représentations complexes irréductibles de $GL(2, \mathbb{F}_q)$ par décomposition de sa représentation de Weil et nous obtenons par restriction toutes les représentations complexes irréductibles de $SL(2, \mathbb{F}_q)$. Nous donnons aussi plusieurs autres constructions de la série principale, ainsi qu'un certain nombre de propriétés des représentations de $GL(2, \mathbb{F}_q)$ et $SL(2, \mathbb{F}_q)$ qui nous seront utiles dans la suite.

Dans tout ce chapitre, nous posons $k = \mathbb{F}_q$ (corps fini à q éléments), $G_o = GL(2,k)$ et $G'_o = SL(2,k)$. Nous ne faisons pas de restriction sur la caractéristique de k.

§1. La série principale de G_o.

Nous rappelons brièvement deux constructions bien connues de la série principale de représentations de G_o .

Dans ce paragraphe et les suivants, nous notons B_o le sous-groupe de Borel de G_o formé des matrices triangulaires supérieures, et T_o le tore maximal déployé de G_o formé des matrices diagonales.

1. Construction de la série principale par induction.

DEFINITION 1.- Soient $\alpha, \beta \in Car(k^\times)$. Notons $[\alpha, \beta]$ le caractère de B_o défini par

$$[\alpha,\beta]\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \alpha(a)\,\beta(d) \qquad (a,d \in k^\times,\ \ b \in k).$$

<u>On appelle série principale (de représentations) de</u> G_o <u>la famille de types d'isomorphie des représentations irréductibles de</u> G_o <u>obtenues en décomposant les représentations induites</u>

$$(H_{\alpha,\beta}\ ,\ \pi_{\alpha,\beta}) = \operatorname{Ind}_{B_o \uparrow G_o} [\alpha\ ,\ \beta] \quad .$$

Nous avons alors

(1) $$H_{\alpha,\beta} = \{ f : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid f(bg) = [\alpha,\beta](b) f(g) \qquad \forall\, b \in B_o\ , \forall\, g \in G_o \}$$

et

(2) $$[\pi_{\alpha,\beta}(g) f](h) = f(hg) \qquad (f \in H_{\alpha,\beta}\ ,\ g,\ h \in G_o).$$

Comme

(3) $$|G_o| = (q-1)^2 q(q+1)$$

et

(4) $$|B_o| = (q-1)^2 q\ ,$$

on a

(5) $$\dim H_{\alpha,\beta} = q+1 \qquad (\alpha, \beta \in \operatorname{Car}(k\ )).$$

Le lemme suivant est bien connu, et facile à vérifier directement.

LEMME 1.- <u>Soient</u> $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \operatorname{Car}(k^\times)$. <u>Notons</u> $\mathcal{K}(\alpha,\beta;\ \alpha',\beta')$ <u>le</u> $\mathbb{C}$ - <u>espace vectoriel formé des fonctions complexes</u> K <u>sur</u> G <u>vérifiant la condition</u>

(6) $$K(b'gb) = [\alpha',\beta'](b') K(g) [\alpha,\beta](b) \qquad (b,b' \in B_o\ ,\ g \in G_o).$$

<u>Alors, en faisant correspondre à chaque</u> $K \in \mathcal{K}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ <u>l'opérateur</u> Φ_K donné par

(7) $$[\Phi_K(f)](g) = \sum_{h \in G_o} K(gh^{-1})f(h) \qquad (f \in H_{\alpha,\beta},\ g \in G_o),$$

<u>on définit un isomorphisme de</u> $\mathbb{C}$ - <u>espaces vectoriels de</u> $\mathcal{K}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ <u>sur</u> $\mathrm{Hom}_{G_o}(H_{\alpha,\beta}, H_{\alpha',\beta'})$. <u>En outre, l'application</u> $K \mapsto \Phi_K$ <u>ainsi définie (pour</u> $K \in \mathcal{K}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ <u>et pour tous les</u> $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$) <u>transforme le produit de convolution de fonctions complexes sur</u> G_o <u>dans le produit d'opérateurs</u>.

Notons $N(T_o)$ le normalisateur de T_o dans G_o et W_o le groupe de Weyl $N(T_o)/T_o$ de G_o. Alors $W_o = \{1, w_o\}$ avec $w_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T_o$. Le groupe W_o agit naturellement sur les caractères de T_o par

(8) $$(\alpha, \beta)^w(h) = (\alpha, \beta)(whw^{-1})$$

pur w W_o, $\alpha, \beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$, h T_o, où l'on pose

(9) $$(\alpha, \beta)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \alpha(a)\beta(d) \qquad (a,d \in k^\times).$$

A l'aide des résultats rappelés ci-dessus et de la décomposition de Bruhat

$$G_o = B_o \cup B_o w_o B_o$$

de G_o, on démontre aisément la

PROPOSITION 1.- <u>On a, quels que soient</u> α, β $\mathrm{Car}(k^\times)$,

$$\dim \mathrm{Hom}_{G_o}(H_{\alpha,\beta}, H_{\alpha',\beta'}) = \left|\{w \in W_o \mid (\alpha, \beta)^w = (\alpha', \beta')\}\right|.$$

COROLLAIRE.- Quels que soient $\alpha, \beta \in Car(k^\times)$, on a

i) $H_{\alpha,\beta}$ est irréductible si $\alpha \neq \beta$;

ii) $H_{\alpha,\alpha}$ est somme directe de deux représentations irréductibles non-isomorphes;

iii) $H_{\alpha',\beta'}$ n'est isomorphe à $H_{\alpha,\beta}$ que si $(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta)$ ou $(\alpha', \beta') = (\beta, \alpha)$.

La décomposition explicite de $H_{\alpha,\alpha}$ $(\alpha \in Car(k^\times))$ est la suivante

(10) $$H_{\alpha,\alpha} = H^1_\alpha + H^q_\alpha$$

où H^1_α désigne la droite dans $H_{\alpha,\alpha}$ engendré par la fonction complexe $\alpha \circ det$, et où la sous-représentation irréductible H^q_α de dimension q est donné par

(11) $$H^q_\alpha = \{ f \in H_{\alpha,\alpha} \mid \sum_{\substack{x \in G_0 \\ \det x = t}} f(x) = 0 \qquad \forall t \in k^\times \} .$$

Nous notons π^1_α (resp. π^q_α) la restriction de $\pi_{\alpha,\alpha}$ au sous-espace H^1_α (resp. H^q_α). Nous avons ainsi $(H^1_\alpha, \pi^1_\alpha) = (\mathbb{C}, \alpha \circ det)$. La représentation $(H^q_\alpha, \pi^q_\alpha)$ est appelée représentation de Steinberg de G_o associée au caractère α et notée aussi $St(\alpha)$.

Notons $(H_{\{\alpha,\beta\}}, \pi_{\{\alpha,\beta\}})$ le type d'isomorphie de $(H_{\alpha,\beta}, \pi_{\alpha,\beta})$, pou $\alpha,\beta \in Car(k^\times)$. Nous avons alors, avec les abus de langage habituels, la description suivante de la série principale de G_o.

PROPOSITION 2.- <u>La série principale de représentations de</u> G_o <u>est formée de</u>

(q-1)(q-2) <u>représentations</u> $\pi_{\{\alpha,\beta\}}$ $(\alpha,\beta \in Car(k^\times),\ \alpha \neq \beta)$ <u>de dimension</u> q+1,

q-1 <u>représentations</u> π^q_α $(\alpha \in Car(k^\times))$ <u>de dimension</u> q , <u>et</u>

q-1 <u>représentations</u> $\pi^1_\alpha = \alpha \circ det$ $(\alpha \in Car(k^\times))$ <u>de dimension</u> 1 .

2. La représentation naturelle de G_o .

Le point de vue de ce numéro est celui que nous généraliserons à $GSp(4,k)$ au chapitre II. Dans la suite, on note k^2 le plan fini $k\times k$.

DEFINITION 2.- La représentation naturelle τ de G_o est définie dans l'espace $\overline{M} = \mathbb{C}^{k^2\times k^\times}$ par

(12) $$[\tau(g)f](x,t) = f(xg, t.\det g^{-1}) \qquad (g\in G_o,\ f\in\overline{M},\ x\in k^2,\ t\in k^\times)$$

(le groupe G_o agit dans k^2 par multiplication matricielle à droite).

Nous avons tout d'abord la décomposition évidente

$$(\overline{M}, \tau) = (M^o, \tau) + (M, \tau) = \bigoplus_{\alpha\in \mathrm{Car}(k\ )} (\mathbb{C}, \alpha\circ\det) \oplus (M, \tau)$$

où

(13) $$M^o = \{f\in\overline{M} \mid \mathrm{Supp}\ f \subset \{0\}\times k^\times\} \quad ,$$

(14) $$M = \{f\in\overline{M} \mid f(0,t) = 0 \qquad \forall\, t\in k^\times\} \quad ,$$

et où l'on note encore τ la restriction de τ au sous-espace stable M^o (resp. M). D'autre part, on peut décomposer $(\overline{M}, \tau)$ suivant les caractères de $k^\times\times k^\times$ en posant, pour $\alpha,\beta\in \mathrm{Car}(k^\times)$,

(15) $$\overline{M}_{\alpha,\beta} = \{f\in\overline{M} \mid f(rx,t(rs)^{-1}) = \alpha(r)\beta(s)f(x,t) \quad \forall r,s,t\in k^\times,\ \forall x\in k^2\} \quad .$$

Nous avons alors

$$(\overline{M}, \tau) = \bigoplus_{\alpha,\beta\in \mathrm{Car}(k^\times)} (\overline{M}_{\alpha,\beta}, \tau) \quad ,$$

où l'on note encore τ la restriction de τ au sous-espace stable $\overline{M}_{\alpha,\beta}$.

Posons

(16) $$M_{\alpha,\beta} = \overline{M}_{\alpha,\beta} \cap M \qquad\qquad (\alpha,\beta\in \mathrm{Car}(k^\times)) \quad .$$

Il est clair que l'on a

$$\overline{M}_{\alpha,\beta} = M_{\alpha,\beta} \qquad\qquad \text{si} \quad \alpha \neq \beta \quad (\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)) \quad ,$$

$$(\overline{M}_{\alpha,\alpha}, \tau) = (M_{\alpha,\alpha}, \tau) \oplus (\mathbb{C}, \alpha\circ\det) \qquad\qquad (\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$$

et enfin

$$\dim M_{\alpha,\beta} = q + 1 \qquad\qquad (\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)) \quad .$$

Nous étudions directement l'entrelacement de ces représentations.

DEFINITION 3.- Pour $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$, on désigne par $\overline{R}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel formé des fonctions complexes K sur $(k^2\times k^\times)\times(k^2\times k^\times)$ (appelées noyaux dans la suite) telles que

$$(17) \qquad K(x'g,t'\det g^{-1};xg,t\det g^{-1}) = K(x',t';x,t) \quad ,$$

et que

$$(18) \quad K(r'x',t'(r's')^{-1};rx;t(rs)^{-1}) = \alpha'(r')\beta'(s')\alpha^{-1}(r)\beta^{-1}(s)K(x',t';x,t) \quad ,$$

quels que soient $r,r',t,t',s,s' \in k^\times$, $x,x' \in k^2$ et $g \in G_o$. De plus, on note $R(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ le sous-espace de $\overline{R}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ formé des noyaux K tels que

$$(19) \qquad K(0,r;y,s) = K(x,t;0,u) = 0 \qquad\qquad (r,s,t,u \in k^\times;\ x,y \in k^2) \quad .$$

PROPOSITION 3.- En associant à chaque noyau $K \in \overline{R}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ pour tous les $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$, l'opérateur Φ_K de $\overline{M}_{\alpha,\beta}$ dans $\overline{M}_{\alpha',\beta'}$ donné par

$$(20) \qquad [\Phi_K(f)](\xi) = \sum_{\eta\in k^2\times k^\times} K(\xi,\eta)f(\eta) \qquad\qquad (\xi \in k^2\times k^\times) \quad ,$$

on définit une application qui transforme la multiplication matricielle de noyaux en produit d'opérateurs et qui est un isomorphisme du $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $\overline{R}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ (resp. $R(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$) sur le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{G_o}(\overline{M}_{\alpha,\beta}, \overline{M}_{\alpha',\beta'})$ (resp. $\mathrm{Hom}_{G_o}(M_{\alpha,\beta}, M_{\alpha',\beta'})$) , quels que soient $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$.

On voit ainsi déjà que les nombres d'entrelacement $[M_{\alpha,\beta}, M_{\alpha',\beta'}]$ seront majorés par le nombre de configurations possibles de deux droites dans le plan k^2 (à savoir, deux). De manière plus précise:

PROPOSITION 4.- <u>On a, pour</u> $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in Car(k\ )$,

i) $M_{\alpha,\beta}$ <u>est irréductible si</u> $\alpha \neq \beta$;

ii) $M_{\alpha,\alpha}$ <u>est somme directe de deux représentations irréductibles non-isomorphes</u>;

iii) $M_{\alpha,\beta}$ <u>n'est isomorphe à</u> $M_{\alpha',\beta'}$ <u>que si</u> $(\alpha',\beta') = (\alpha,\beta)$ <u>ou</u> $(\alpha',\beta') = (\beta,\alpha)$.

<u>Démonstration</u>: Soient u et v deux vecteurs linéairement indépendants de k^2 . Il découle de (17), (18) et (19) que la donnée d'un noyau $K \in R(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$, pour $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in Car(k^\times)$, équivaut à la donnée de ses valeurs $K(u,1;u,1)$ et $K(u,1;v,1)$. Comme G_o est transitif sur les couples de vecteurs linéairement indépendants de k^2 , nous avons d'après (17) et (18), quels que soient $r,s \in k^\times$,

$$K(u,1;v,1) = K(ru,(rs)^{-1};sv,(rs)^{-1}) = \alpha'(r)\beta'(s)\alpha^{-1}(s)\beta^{-1}(r)K(u,1;v,1) \quad ,$$

en plus de

$$K(u,1;u,1) = K(ru,(rs)^{-1};ru,(rs)^{-1}) = \alpha'\alpha^{-1}(r)\beta'\beta^{-1}(s)K(u,1;u,1).$$

Il s'ensuit que

$$[M_{\alpha,\beta}, M_{\alpha',\beta'}] = \delta_{(\alpha',\beta'),(\alpha,\beta)} + \delta_{(\alpha',\beta'),(\beta,\alpha)} \quad ,$$

d'où les trois assertions de la proposition.

C.Q.F.D.

La description et décomposition explicite suivante de $M_{\alpha,\alpha}$ est immédiate:

PROPOSITION 5. - *Notons* L *l'ensemble de toutes les droites du plan* k^2 . *Pour tout* $x \in k^2 - \{0\}$ *notons* $\ell(x)$ *la droite de* k^2 *passant par* x . *Définissons, pour tout* $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, *la représentation*

$$\underline{L}(\alpha) = (\underline{L}, \alpha\tau) = (\mathbb{C}^L, \alpha\tau)$$

par

$$[(\alpha\tau)(g)f](\ell) = \alpha(\det g) f(\ell g) \qquad (g \in G_o,\ f \in \underline{L},\ \ell \in L) ,$$

avec

$$\ell(x)g = \ell(xg) \qquad (x \in k^2 - \{0\},\ g \in G_o) .$$

On peut identifier $\underline{L}(\alpha)$ *à* $(M_{\alpha,\alpha}, \tau)$ *en associant à chaque* $f \in \underline{L}$ *la fonction* $f'' \in M_{\alpha,\alpha}$ *telle que*

$$f''(x,1) = f(\ell(x)) \qquad (x \in k^2 - \{0\}) .$$

La décomposition de $\underline{L}(\alpha)$ *en composantes irréductibles est la suivante*

$$\underline{L}(\alpha) = \underline{L}^c(\alpha) \oplus \underline{L}^o(\alpha) = (M^1_\alpha , \tau) \oplus (M^q_\alpha , \tau) ,$$

où $\underline{L}^c(\alpha) = (\underline{L}^c, \alpha\tau)$ et $\underline{L}^o(\alpha) = (\underline{L}^o, \alpha\tau)$, *et où l'on désigne par* $\underline{L}^c$ (*resp.* $\underline{L}^o$) *le sous-espace de* $\underline{L}$ *formé des fonctions constantes* (*resp. des fonctions dont la somme sur* L *est nulle*.

Dans la suite, on posera

(21) $$\ell_a = \ell(1,a) , \qquad \ell_\infty = \ell(0,1) \qquad (a \in k^+) .$$

Nous donnons, pour terminer ce numéro, un isomorphisme explicite de $M_{\alpha,\beta}$ sur $M_{\beta,\alpha}$ $(\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$.

PROPOSITION 6. - <u>On définit un automorphisme involutif de</u> (M, τ) <u>qui envoie</u> $M_{\alpha,\beta}$ <u>sur</u> $M_{\beta,\alpha}$, <u>pour tout</u> $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times})$, <u>par</u>

$$(Sf)(r,s;t) = \frac{1}{q} \sum_{(r',s') \in k^2} e^t(rs' - sr')f(r',s';t) ,$$

<u>pour</u> $f \in M$, $r,s \in k$, $t \in k^{\times}$, <u>où</u> e <u>désigne un caractère non-trivial quelconque de</u> k^+ .

<u>Si</u> $\alpha \neq \beta$, <u>on a en fait</u>,

$$(Sf)(r,s;t) = \frac{1}{q} \beta\alpha^{-1}(t)G(e,\alpha\beta^{-1}) \sum_{\substack{(r',s') \in k^2 \\ rs' - sr' = 1}} f(r',s';t)$$

<u>pour</u> $f \in M_{\alpha,\beta}$, $r,s \in k$, $t \in k^{\times}$, <u>avec</u>

$$G(e, \alpha\beta^{-1}) = \sum_{d \in k^{\times}} e(d)(\alpha\beta^{-1})(d) \qquad \text{(cf; §2, n°2, déf.4).}$$

<u>Démonstration</u>: La première assertion résulte aussitôt des propriétés du déterminant, en tant que forme bilinéaire alternée, non-dégénérée, sur $k^2 \times k^2$ et du fait que G_o est aussi le groupe des similitudes du déterminant. En ce qui concerne la seconde assertion, nous avons, si $\alpha \neq \beta$, pour $f \in M_{\alpha,\beta}$, $(r,s) \in k^2$, $t \in k^{\times}$,

$$(Sf)(r,s;t) = \frac{1}{q} \left[\sum_{a \in k^{\times}} f(ar,as;t) + \sum_{d \in k^{\times}} e^t(d) \sum_{\substack{(r',s') \in k^2 \\ rs'-sr' = 1}} f(dr',ds';t) \right] ,$$

$$= \frac{1}{q} \sum_{d \in k} e^t(d)\alpha\beta^{-1}(d) \sum_{\substack{(r',s') \in k^2 \\ rs'-sr' = 1}} f(r';s':t) ,$$

comme voulu.

C.Q.F.D.

3. Isomorphisme entre la représentation naturelle et la série principale.

Nous montrons que la représentation naturelle de G_o redonne sa série principale.

PROPOSITION 7. - On a l'isomorphisme de représentations

$$M_{\alpha,\beta} \simeq H_{\alpha,\beta} \quad ,$$

quels que soient $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k\ )$.

Démonstration: Nous construisons un morphisme non-nul Φ de la représentation $H_{\alpha,\beta}$ dans la représentation $M_{\beta,\alpha}$, quels que soient $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times})$. Comme $H_{\alpha,\beta} = \mathrm{Ind}_{B_o \uparrow G_o} [\alpha , \beta]$, il suffit pour cela d'exhiber un vecteur dans $M_{\beta,\alpha}$ qui se transforme comme $1 \in \mathbb{C}$ sous B_o , suivant $[\alpha, \beta]$. On vérifie aisément que toute fonction $f_1 \in M_{\beta,\alpha}$ dont le support est $[\{0\} \times k^{\times}] \times k^{\times}$ a la propriété voulue. Or f_1 est clairement un générateur du $\mathbb{C}[G_o]$ - module $M_{\beta,\alpha}$ pour tout $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times})$. Le morphisme Φ défini par f_1 est donc un épimorphisme de $H_{\alpha,\beta}$ sur $M_{\beta,\alpha}$. Comme $\dim H_{\alpha,\beta} = q+1 = \dim M_{\beta,\alpha}$, quels que soient $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times})$, l'épimorphisme Φ est en fait un isomorphisme.

C.Q.F.D.

DEFINITION 4. - Dans la suite, nous dirons que la représentation $(M_{\alpha,\beta} , \tau)$ $(\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times})$, $\alpha \neq \beta)$ constitue le modèle naturel du type d'isomorphie $[H_{\alpha,\beta}] = \pi_{\alpha,\beta}$. Pour $\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times})$, nous dirons que $L^{o}(\alpha)$ (que l'on a déjà identifié à (M^q_α, τ), (cf. prop. 5, n° 2) est le modèle naturel de la représentation de Steinberg $St(\alpha)$, souvent notée aussi π^q_α dans la suite.

§ 2. La représentation de Weil de G_o .

Dans ce paragraphe, nous décrivons la représentation de Weil de $G_o = GL(2,k)$ associée à un espace quadratique (non-dégénéré) sur k . Dans le numéro 1, la lettre k désigne un corps commutatif quelconque.

1. Une présentation de $GL(2,k)$, k corps commutatif quelconque.

DEFINITION 1. - Posons

$$h(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \qquad (a \in k^\times) ,$$

$$h'(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \qquad (r \in k^\times) ,$$

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b \in k^+) ,$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

et

$$H_o = \{h(a) \mid a \in k^\times\} ,$$

$$H'_o = \{h'(r) \mid r \in k^\times\} ,$$

$$U_o = \{u(b) \mid b \in k^+\} .$$

THEOREME 1. - Le groupe $GL(2,k)$ est engendré par les générateurs $h(a)$ $(a \in k^\times)$, $h'(r)$ $(r \in k^\times)$, $u(b)$ $(b \in k^+)$ et w avec les relations

(i) $h'(r)h'(t) = h'(rt)$ $\qquad (r,t \in k^\times)$,

(ii) $h(a)h(d) = h(ad)$ $\qquad (a,d \in k^\times)$,

(iii) $u(a)u(b) = u(a+b)$ $(a,b \in k^{+})$,

(iv) $h'(t)h(a) = h(a)h'(t)$ $(a,t \in k^{\times})$,

(v) $u(b)h'(t) = h'(t)u(tb)$ $(b \in k^{+},\ t \in k^{\times})$,

(vi) $h(a)u(b) = u(a^{2}b)h(a)$ $(a \in k^{\times},\ b \in k^{+})$,

(vii) $w^{2} = h(-1)$,

(viii) $wh'(t) = h(t)h'(t)w$ $(t \in k^{\times})$,

(ix) $wh(a) = h(a^{-1})w$ $(a \in k^{\times})$,

(x) $wu(a^{-1})wu(a)wu(a^{-1}) = h(a)$ $(a \in k^{\times})$.

<u>On a en fait</u>

$$GL(2,k) = H'_{o}H_{o}U_{o} \dot{\cup} H'_{o}H_{o}U_{o}wU_{o} .$$

<u>Démonstration</u>: Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,k)$, alors nous avons

$$g = h'(ad)h(a)u(a^{-1}b) \qquad \text{si} \quad c = 0 ,$$

et

$$g = h'(\det g)h(-c^{-1}\det g)u(ca\det g^{-1})wu(c^{-1}d) \qquad \text{si} \quad c \in k^{\times} .$$

Pour montrer que les relations (i) à (x) forment un système complet de relations pour nos générateurs, notons tout d'abord que, en présence des autres relations, la relation (x) s'écrit aussi sous la forme

$$wu(a)w = h(-a^{-1})u(-a)wu(-a^{-1}) \qquad (a \in k^{\times}) .$$

Il est alors clair qu'à l'aide des relations (i) à (x) toute relation entre nos générateurs se ramène à l'une des formes normales suivantes

(N 1) $\quad h'(t)h(a)u(b) = 1 \qquad (t, a \in k^\times,\ b \in k^+$ convenables) ,

(N 2) $\quad h'(t)h(a)u(b)wu(c) = 1 \qquad (t, a \in k^\times,\ b, c \in k^+$ convenables) .

Mais la relation (N 2) est impossible dans $GL(2,k)$ et la relation (N 1) n'est possible que si $t = a = 1$ et $b = 0$, cas où elle découle de (i), (ii), et (iii).

C.Q.F.D.

REMARQUE. - La relation (ix) est en fait superflue, elle découle aussitôt des relations (vi) et (x).

2. <u>Formes quadratiques et sommes de Gauss sur le corps fini</u> $k = \mathbb{F}_q$.

Nous rappelons dans ce numéro quelques résultats bien connus sur la classification de formes quadratiques sur un corps fini k , les sommes quadratiques (de Gauss) que leur sont associées, ainsi que sur les sommes de Gauss associées à une paire $(\psi, \alpha) \in Car(k^+) \times Car(k^\times)$. Comme référence on peut citer [5], [8], [11], ou encore [10]. Signalons d'ailleurs que, dans les chapitres suivants, nous n'aurons besoin de résultats explicites que pour un espace quadratique (non-dégénéré) de dimension paire sur k , où ils son immédiats.

DEFINITION 2. - <u>On note</u> x <u>la fonction coordonnée sur</u> k <u>et</u> x, y <u>les fonctions coordonnées, canoniques, sur</u> $k^2 = k \times k$. <u>On appelle plan hyperbolique tout espace quadratique isomorphe à l'espace</u> (k^2, xy) .

<u>On note</u> K <u>l'unique extension quadratique de</u> k <u>et</u> N <u>la norme de</u> K <u>sur</u> k .

THEOREME 2. - Tout espace quadratique non-dégénéré (E, Q) sur k est somme orthogonale de plans hyperboliques et d'un espace quadratique (E_o , Q_o) réduit à 0 ou bien isomorphe à l'un des espaces suivants:

i) (k, x^2) ,

ii) $(k, t_o x^2)$ (si car $k \neq 2$, on fixe un non-carré t_o k) ,

iii) (K, N) .

Si $(E_o , Q_o) = 0$ ou $(E_o , Q_o) \simeq (k, x^2)$, on dit que (E, Q) est déployé (sur k); si $(E_o , Q_o) \simeq (k, t_o x^2)$ ou $(E_o , Q_o) \simeq (K, N)$, on dit que (E, Q) est non-déployé (sur k) .

Cela résulte de la décomposition de Witt de (E, Q), ou bien se démontre directement, par récurrence.

DEFINITION 3. - Soient $\psi \in \mathrm{Car}(k^+)$ et (E, Q) un espace quadratique sur k . On définit la somme de Gauss $S_{\psi \circ Q}$ associée à $\psi \circ Q$ par

$$S_{\psi \circ Q} = \sum_{v \in E} \psi(Q(v)) \in \mathbb{C} .$$

On écrit encore

$$S_{\psi \circ Q}(t) = S_{\psi^t \circ Q} \qquad (t \in k^\times) ,$$

$$S_Q(t) = S_{e \circ Q}(t) \qquad (t \in k^\times) ,$$

si l'on a fixé un caractère non-trivial e de k^+ ; on rappelle que l'on a posé

$$\psi^t(r) = \psi(tr) \qquad (\psi \in \mathrm{Car}(k^+),\ r,t \in k^+)\ .$$

Les propriétés suivantes de $S_{\psi\circ Q}$ se vérifient sans difficulté.

PROPOSITION 1 . - Soient (E, Q) et (E', Q') deux espaces quadratiques sur k . Alors on a, pour tout $\psi \in \mathrm{Car}(k^+)-\{1\}$,

i) $$S_{\psi\circ Q} = S_{\psi\circ Q'} \qquad \text{si } Q \simeq Q' ,$$

en particulier, $S_{\psi\circ Q}$ ne dépend pas de ψ si Q est non-dégénéré de rang pair ([1]);

ii) $$S_{\psi\circ(Q \oplus Q')} = S_{\psi\circ Q} . S_{\psi\circ Q'} \qquad \text{(somme directe orthogonale)} ;$$

iii) si (E, Q) est non-dégénéré et si $F \subset E$ est totalment isotrope, alors

$$S_{\psi\circ Q} = |F| . S_{\psi\circ Q_F}$$

où l'on note Q_F la forme quadratique sur $F^{\perp}/F$ définie par

$$Q_F(v+F) = Q(v) \qquad (v \in F^{\perp}) ;$$

iv) si (E, Q) est non-dégénéré, alors

$$|S_{\psi\circ Q}| = |E|^{1/2} .$$

PROPOSITION 2. - Dans le cas où la caractéristique de k est différente de 2, notons α_o le caractère non-trivial de $k^{\times}$ de carré trivial, c'est-à-dire

$$\alpha_o(t) = \left(\frac{t}{q}\right) = t^{\frac{q-1}{2}} \qquad (t \in k^+) .$$

On a (cf. déf. 2), pour tout $\psi \in \mathrm{Car}(k^+)-\{1\}$,

---

([1]) Rappelons que si Q est non-dégénérée, de rang pair, on a toujours

$Q \quad tQ \quad (t \quad k)$.

i) $\quad S_{\psi\circ tx^2} = q\delta(t) \qquad (t \in k^+)$

si la caractéristique de k est 2 (où l'on note δ la fonction de Dirac sur k^+ qui vaut 1 en 0 et s'annule ailleurs);

ii) $\quad S_{\psi\circ tx^2} = \alpha_o(t)G(\psi,\alpha_o) = \alpha_o(t)\sum_{r\in k^\times}\psi(r)\alpha_o(r) \qquad (t \in k^\times)$

si la caractéristique de k est différente de 2 ;

iii) $\quad S_{\psi\circ xy} = q$;

et

iv) $\quad S_{\psi\circ N} = -q$.

Démonstration: Les assertions (i) et (ii) sont immédiates; l'assertion (iii) découle aussitôt de la proposition 1, iii) appiquée à $F = k^+ \times \{0\}$, ou encore du fait que

$$\left|\{(r,s)\in k^2 \mid rs = t\}\right| = q - 1 + q\delta(t) \qquad (t\in k^+) .$$

L'assertion iv) résulte de la relation

$$\left|\{a\in K \mid N(a) = t\}\right| = q - 1 - q\delta(t) \qquad (t\in k^+) .$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. - Soit (E, Q) un espace quadratique non-dégénéré sur k . Définissons le signe $\varepsilon(Q)$ de (E, Q) égal à 1 (resp. -1) si (E, Q) est déployé (resp. non-déployé). Alors on a, pour tout $\psi\in \mathrm{Car}(k^+)-\{1\}$,

i) $\quad S_{\psi\circ Q} = \varepsilon(Q)|E|^{1/2}$ si dim E est paire,

ii) $\quad S_{\psi\circ Q} = \varepsilon(Q)q^m G(\psi,\alpha_o)$ si dim E = 2m + 1 .

On trouve aisément, pour q impair,

$$[G(\psi, \alpha_o)]^2 = \alpha_o(-1)q \qquad (\psi \in Car(k^+),\ \psi \neq 1) ,$$

mais le calcul du signe de $G(\psi, \alpha_o)$ est beaucoup plus délicat. On a le théorème classique suivant (pour une démonstration purement algébrique, cf. [10]).

THEOREME. - _Notons_ e_p _le caractère de_ $\mathbb{F}_p$ (p _premier_) _défini par_

$$e_p(n + p\mathbb{Z}) = \exp(2\pi i n p^{-1}) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

et notons Tr_p _la trace de_ $k = \mathbb{F}_q$ $(q = p^r)$ _sur_ $\mathbb{F}_p$. _Alors, pour le caractère fondamental_

$$e = e_p \circ Tr_p$$

_de_ $\mathbb{F}_q^+$, _on a_ (_si_ $p \neq 2$)

$$G(e, \alpha_o) = (-1)^{r+1}\omega(p)^r q^{1/2} ,$$

où l'on désigne par $\omega(p)$ _la racine carrée de_ $(\frac{-1}{p})$ _définie par_

$$\omega(p) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p \equiv 1 \mod 4 \\ i & \text{si} \quad p \equiv 3 \mod 4 . \end{cases}$$

REMARQUE. - Au numéro ii) du corollaire ci-dessus, on trouve alors

$$S_{\psi \circ Q} = \varepsilon(Q)\alpha_o(t)(-1)^{r+1}\omega(p)^r |E|^{1/2}$$

si $\dim E$ est impaire ($\psi = e^t$, $q = p^r$).

Rappelons que l'on pose de manière générale la

DEFINITION. - <u>On appelle somme de Gauss associée à un caractère additif</u> ψ <u>de</u> k^+ <u>et à un caractère multiplicatif</u> α <u>de</u> $k^\times$, <u>la somme</u>

$$G(\psi,\alpha) = \sum_{t\in k^\times} \psi(t)\alpha(t) .$$

On montre alors sans difficulté la

PROPOSITION 3. - <u>On a, pour</u> $\psi\in \mathrm{Car}(k^+)$, $\alpha\in \mathrm{Car}(k\ )$:

i) $$G(\psi^s,\alpha) = \alpha(s)^{-1}G(\psi,\alpha) \qquad (s\in k^\times);$$

ii) $$|G(\psi,\alpha)| = q^{1/2}$$ (<u>si</u> ψ <u>et</u> α <u>sont non-triviaux</u>).

Les sommes de Gauss sur $k_n = \mathbb{F}_{q^n}$ se ramènent à celles sur k à l'aide du

THEOREME 4 (<u>Hasse-Davenport</u>). - <u>Notons</u> N_n (<u>resp.</u> Tr_n) <u>la norme</u> (<u>resp. la trace) de</u> $k_n = \mathbb{F}_{q^n}$ <u>sur</u> $k = \mathbb{F}_q$. <u>Alors on a</u>

$$- G(\psi\circ Tr_n , \alpha\circ N_n) = [-G(\psi,\alpha)]^n$$

<u>quels que soient</u> $\psi\in \mathrm{Car}(k^+)$, $\alpha\in \mathrm{Car}(k^\times)$, <u>non-triviaux</u>.

Pour une démonstration, cf. [4] ou [10].

3. <u>Définition de la représentation de Weil</u>.

Soit (E, Q) un espace quadratique (non-dégénéré) sur k . On notera B la forme bilinéaire associée à Q , définie par

(1) $\quad B(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \qquad (x,y \quad E)$.

Dans la suite, nous notons X l'ensemble de caractères non-triviaux de k^+ . Pour tout $\psi \in X$, l'application $\psi \circ B$ est alors une mise en autodualité symétrique du groupe additif E^+ . Le groupe multiplicatif k agit transitivement sur X par

(2) $\quad \psi^t(a) = \psi(ta) \qquad (t \in k^\times,\ a \in k^\times,\ \psi \in X)$.

Nous construisons la représentation de Weil de G_o associée à (E, Q) à l'aide de la présentation de G_o donnée au numéro 1.

THEOREME 5. - <u>Soit</u> (E, Q) <u>un espace quadratique (non-dégénéré), de dimension paire</u> $2m$, <u>sur</u> k . <u>On peut définir une représentation</u> (V_Q , ρ_Q) <u>de</u> G_o , <u>appelée représentation de Weil de</u> G_o <u>associée à l'espace quadratique</u> (E, Q) , <u>en posant</u>

$$V_Q = \mathbb{C}^{E \times X}$$

<u>et en se donnant</u> $\rho_Q = \rho$ <u>sur les générateurs de</u> G_o <u>par les formules suivantes</u>

(3) $\quad [\rho(h(a))f](x,\psi) = f(xa, \psi) \qquad (a \in k^\times)$,

(4) $\quad [\rho(h'(t^{-1}))f](x,\psi) = f(x,\psi^t) \qquad (t \in k^\times)$,

(5) $\quad [\rho(u(b))f](x,\psi) = \psi(bQ(x))f(x,\psi) \qquad (b \in k^+)$,

(6) $\quad [\rho(w)f](x,\psi) = \varepsilon(Q)q^{-m} \sum_{y \in E} \psi(B(x,y))f(y,\psi)$,

<u>pour</u> $f \in V_Q$, $x \in E$, $\psi \in X$.

D'autre part, si γ *est une similitude, de multiplicateur* m , *de* (E, Q) *sur un espace quadratique* (E', Q') , *alors* γ *induit un isomorphisme* $\sigma(\gamma)$ *de* $(V_{Q'}, \rho_{Q'})$ *sur* (V_Q, ρ_Q) *défini par*

$$(7) \qquad [\sigma(\gamma)f'](x,\psi) = f'(\gamma x, \psi^{m_\gamma^{-1}}) \qquad (f' \in V_{Q'},\ x \in E,\ \psi \in X) \ ;$$

si γ' *est une similitude de source* (E', Q') , *alors on a*

$$\sigma(\gamma' \circ \gamma) = \sigma(\gamma) \circ \sigma(\gamma') \ .$$

Démonstration: On a à vérifier que les relations (i) à (viii) et (x) entre les générateurs de G_o sont respectées par la définition des opérateurs que nous venons de donner. Ceci est trivial pour les relations (i) à (iv) et immédiat pour les relations (v), (vi) et (viii). En ce qui concerne la relation (vii), nous avons, pour $f \in V$, $x \in E$ et $\psi \in X$,

$$\begin{aligned}(\rho(w)^2 f)(x,\psi) &= q^{-2m} \sum_{y,z \in E} \psi(B(x,y))\psi(B(y,z))f(z,\psi) \ , \\ &= q^{-2m} \sum_{z \in E} f(z,\psi) \sum_{y \in E} (B(x+z,y)) \ , \\ &= f(-x,\psi) \ ,\end{aligned}$$

puisque $\psi \circ B$ est une mise en autodualité symétrique du groupe abélien E^+ d'ordre $|E| = q^{2m}$.

La dernière relation s'écrit encore

$$wu(a)w = h(-a^{-1})u(-a)wu(-a^{-1}) \qquad (a \in k^\times) \ .$$

Or on a, pour $a \in k^\times$, $f \in V$, $z \in E$, $\psi \in X$,

$$\begin{aligned}[\rho(w)\rho(u(a))\rho(w)f](z,\psi) &= q^{-2m} \sum_{x,y \in E} \psi[B(z,x)+aQ(x)+B(x,y)]\, f(y,\psi) \ , \\ &= q^{-2m} \sum_{x',y \in E} \psi[a^{-1}(B(y+z,x')+Q(x'))]\, f(y, \ ) \ ,\end{aligned}$$

$$= q^{-2m} S_{\psi\circ Q}(a^{-1}) \sum_{y\in E} \psi[-a^{-1}Q(y+z)]\, f(y,\psi) \quad ;$$

d'autre part

$$[\rho(h(-a^{-1}))\rho(u(-a))\rho(w)\rho(u(-a^{-1}))f](z,\psi) \;=$$

$$= \psi[-a^{-1}Q(z)]\,\varepsilon(Q)q^{-m} \sum_{y\in E} \psi[-a^{-1}(B(z,y)+Q(y))]\, f(y,\psi) \quad ,$$

$$= \varepsilon(Q)q^{-m} \sum_{y\in E} \psi[-a^{-1}Q(y+z)]\, f(y,\psi) \quad .$$

On voit ainsi que pour que la relation (x) soit satisfaite, il faut et il suffit que l'on ait

$$S_{\psi\circ Q}(a) \;=\; \varepsilon(Q)|E|^{1/2} \qquad\qquad (a \quad k\ ) \quad .$$

Compte tenu du corollaire i) à la proposition 2 du numéro 2, nous avons démontré que la représentation ρ est bien définie et aussi le théorème, puisque ses deux dernières assertions sont claires.

C.Q.F.D.

REMARQUE 1. - Dans le cas où dim E est impaire et la caractèristique de k est différente de 2 , on arrive encore à construire une représentation de Weil associée à (E, Q) en modifiant la définition des opérateurs $\rho(h(a))$ et $\rho(w)$ de la manière suivante,

$$[\rho(h(a))f](x,\psi) \;=\; \alpha_o(a)f(xa,\psi) \qquad\qquad (a\in k^{\times})$$

(où l'on note α_o le caractère non-trivial de $k^{\times}$, de carré trivial),

$$[\rho(w)f](x,\psi) \;=\; \varepsilon(Q)|E|^{-1/2}q^{-1/2}G(\psi,\alpha_o) \sum_{y\in E} \psi(B(x,y))f(y,\psi)$$

pour $f \in V_Q$, x E, X (cf. n° 2, cor. à la prop. 2 et rem. au th. 3). La vérification se fair de même que dans la démonstration ci-dessus, le point essentiel étant en fait que le quotient

$$S_{\psi^a \circ Q} \, / \, S_{\psi \circ Q} \quad = \quad \alpha_o(a)$$

est multiplicatif en $a \in k^{\times}$ et ne dépend pas de $\psi \in \Lambda$.

Dans toute la suite cependant, nous n'aurons besoin que de la représentation de Weil associée a un espace quadratique non-dégénéré de rang pair.

REMARQUE 2. - Si l'on choisit un caractère $e \in X$, on peut réaliser la représentation de Weil (V_Q , ρ_Q) dans l'espace $\mathbb{C}^{E \times k^{\times}}$ en écrivant

$$f(x, e^t) \;=\; f(x,t) \qquad\qquad (f \in V_Q \,,\; x \in E,\; t \in k^{\times}) \,.$$

REMARQUE 3. - Il est clair que, si l'on désigne par H un espace vectoriel complexe quelconque, on peut définir une représentation de Weil (V_Q , ρ_Q) de G_o associée à un espace quadratique non-dégénéré (E, Q) de dimension paire sur k , en prenant $V_Q = H^{E \times X}$ et les mêmes formules (3) à (6) ci-dessus pour définir l'action des générateurs de G_o . Nous l'appelerons représentation de Weil de G_o associée à (E, Q) et à H .

§ 3. La représentation de Weil associée au plan déployé.

Dans ce paragraphe, nous décomposons la représentation de Weil (V_Q , ρ_Q) de G_o associée au plan déployé $(E, Q) = (k^2, xy)$ et nous montrons que l'on retrouve ainsi la série principale. Nous écrirons simplement

(V,ρ) à la place de $(V_Q\, ,\, \rho_Q)$.

1. <u>Le groupe</u> $\Gamma = GO(Q)$.

Nous décrivons tout d'abord le groupe $\Gamma = GO(Q)$. Tout couple $(r,s) \in k^{\times} \times k^{\times}$ définit une similitude directe $\gamma(r,s)$ de multiplicateur rs , de (E, Q) , par

$$(1) \qquad \gamma(r,s)(x_1\, ,\, x_2) = (rx_1, sx_2) \qquad (x_1,\ x_2 \in k)$$

Posons

$$(2) \qquad T(x_1,x_2) = (x_2,x_1) \qquad (x_1,\ x_2 \in k) .$$

Alors $T \in O(Q)$ et Γ est le produit semidirect du groupe

$$(3) \qquad \Gamma^{+} = \{\gamma(r,s) \mid r,s \in k^{\times}\} ,$$

isomorphe à $k^{\times} \times k^{\times}$, et du sous-groupe $\{1, T\}$, avec les relations

$$(4) \qquad T^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \gamma(r,\ s) \circ T = T \circ \gamma(s,r) \qquad (r,s \quad k) .$$

2. <u>Décomposition de</u> $(V_Q\, ,\, \rho_Q)$ <u>suivant</u> Γ .

On note $\tilde{\gamma}(r,s)$ $(r,\ s \in k^{\times})$ (resp. $\tilde{T}$) l'automorphisme de (V, ρ) induit par $\gamma(r,s)$ (resp. T) , c'est-à-dire

$$(5) \qquad [\tilde{\gamma}(r,s)f](x_1,x_2;\psi) = f(rx_1,sx_2;\psi^{(rs)^{-1}})$$

pour $f \in V$, $r,\ s \in k$, $\psi \in X$ et $x_1\, ,\, x_2 \in k$ (resp.

$$(6) \qquad (\tilde{T}f)(x_1,x_2;\psi) = f(x_2,x_1;\psi) \qquad (f \in V,\ \ x_1,x_2 \in k,\ \ \psi \in X)) .$$

DEFINITION 1. - Posons, pour tout couple $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$,

$$V_{\alpha,\beta} = \{ f \in V \mid \tilde{\gamma}(r,s)f = \alpha(r)\beta(s)f \qquad \forall\, r,s \in k^\times \} .$$

$V_{\alpha,\beta}$ est alors une sous-représentation de (V, ρ) et nous avons la décomposition

$$(7) \qquad V = \bigoplus_{\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)} V_{\alpha,\beta} .$$

PROPOSITION 1. - On a

$$\dim V_{\alpha,\beta} = q+1 \qquad (\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times),\ \alpha \neq \beta) ,$$

$$\dim V_{\alpha,\alpha} = q+2 \qquad (\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)) .$$

Cela est immédiat.

Considérons maintenant l'action de $\tilde{T}$ sur notre décomposition.

PROPOSITION 2. - Nous avons les propriétés suivantes:

i) L'automorphisme $\tilde{T}$ induit par restriction à $V_{\alpha,\beta}$ un isomorphisme de $V_{\alpha,\beta}$ sur $V_{\beta,\alpha}$ $(\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times))$;

ii)
$$V_{\alpha,\alpha} = V^+_{\alpha,\alpha} + V^-_{\alpha,\alpha}$$

où

$$V^{\pm}_{\alpha,\alpha} = \{ f \in V_{\alpha,\alpha} \mid \tilde{T}f = \pm f \} ,$$

avec

$$\dim V^+_{\alpha,\alpha} = q+1 \quad , \qquad \dim V^-_{\alpha,\alpha} = 1 .$$

Démonstration: Notre première assertion résulte aussitôt des relations $\gamma(r,s)\circ T = T\circ\gamma(s,r)$ $(r,s \in k^\times)$ (n° 1) et la seconde de la relation générale

$$f(x_2,x_1;\psi) = (\alpha\beta^{-1})(x_2x_1^{-1})f(x_1,x_2;\psi)$$

pour $\alpha,\beta\in \mathrm{Car}(k^\times)$, $f\in V_{\alpha,\beta}$, $x_1,x_2\in k^\times$, $\psi\in X$ et du fait que T permute les Γ^+ - orbites de $(1,0;\ )$ et $(0,1;\ )$ et fixe $(0,0;\psi)$ $(\psi\in X)$.

C.Q.F.D.

La représentation $V^+_{\alpha,\alpha}$ admet la décomposition suivante:

PROPOSITION 3. - _On a, pour tout_ $\alpha\in \mathrm{Car}(k^\times)$, _la_ G_o - _décomposition_

$$V^+_{\alpha,\alpha} = V^q_\alpha \oplus V^{1,+}_\alpha \quad ,$$

avec

$$V^q_\alpha = \{f\in V^+_{\alpha,\alpha} \mid \sum_{x_1\in k} f(x_1,0;\psi) = 0 \qquad \forall\psi\in X\} \ ,$$

$$V^{1,+}_\alpha = \{f\in V^+_{\alpha,\alpha} \mid f(x_1,x_2;\psi) = \delta(x_1)f(0,0;\psi) \qquad \forall x_1,x_2\in k,\ \psi\in X\}$$

(_où l'on note_ δ _la fonction de Dirac sur_ k^+ , _centrée à l'origine, qui vaut donc_ 1 _en_ 0 _et s'annule ailleurs_).

3. Modèles de Weil réduits.

Fixons un caractère $e\in X$. Soient $\alpha,\beta\in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha\neq\beta$. Alors la donnée de $f\in V_{\alpha,\beta}$ équivaut à la donnée d'une fonction f' sur $k\cup\{\infty\}$ définie par

(8) $$f'(t) = f(1,1;e^t) \qquad (t\in k^\times) \ ,$$

(9) $$f'(0) = f(1,0;e) \ ,$$

(10) $$f'(\infty) = f(0,1;e) \ .$$

PROPOSITION 4. - La correspondance $f \mapsto f'$ donnée ci-dessus établit un isomorphisme entre la représentation $(V_{\alpha,\beta}, \rho)$ et la représentation $(\underline{k}, \rho_{\alpha,\beta})$ définie par $\underline{k} = \mathbb{C}^{k \cup \{\infty\}}$ et par

$$\rho'_{\alpha,\beta}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r\end{pmatrix} f' = \alpha\beta(r) f' \qquad (r \in k^{\times}) ,$$

$$[\rho'_{\alpha,\beta}(h'(r))f'](t) = f'(r^{-1}t) \qquad (r,t \in k^{\times}) ,$$

$$[\rho'_{\alpha,\beta}(h'(r))f'](0) = \beta(r)f'(0) \qquad (r \in k^{\times}) ,$$

$$[\rho'_{\alpha,\beta}(h'(r))f'](\infty) = \alpha(r)f'(\infty) \qquad (r \in k^{\times}) ,$$

$$[\rho'_{\alpha,\beta}(u(s))f'](t) = e(st)f'(t) \qquad (s,t \in k^{+}) ,$$

$$[\rho'_{\alpha,\beta}(u(s))f'](\infty) = f'(\infty) \qquad (s \in k^{+}) ,$$

$$[\rho'_{\alpha,\beta}(w)f'](t) = q^{-1}\Big[\sum_{r,s \in k^{\times}} e^{t}(r+s)\alpha(r)\beta(s)f'(rst) + \alpha^{-1}(t)G(e,\alpha\beta^{-1})f'(0) + \beta^{-1}(t)G(e,\beta\alpha^{-1})f'(\infty)\Big] \qquad (t \in k^{\times}) ,$$

$$[\rho'_{\alpha,\beta}(w)f'](0) = q^{-1}\Big[\sum_{r,s \in k^{\times}} e(s)\alpha(r)\beta(s)f'(rs) + G(e,\beta\alpha^{-1})f'(\infty)\Big] ,$$

$$[\rho'_{\alpha,\beta}(w)f'](\infty) = q^{-1}\Big[\sum_{r,s \in k^{\times}} e(r)\alpha(r)\beta(s)f'(rs) + G(e,\alpha\beta^{-1})f'(0)\Big] ,$$

pour toute $f \in \underline{k}$ (cf. § 2, n° 2, déf. 4 pour les sommes de Gauss ci-dessus).

Nous appellerons cette représentation le modèle de Weil réduit du type d'isomorphie $\pi_{\alpha,\beta} = [V_{\alpha,\beta}, \rho]$.

Cela se vérifie sans difficulté d'après les formules (3) à (6) définissant la représentation de Weil.

Dans le cas $\alpha = \beta$, on pose $\tilde{k} = k \cup \{\omega, \infty\}$ et on associe à chaque $f \in V_{\alpha,\alpha}$ une fonction $f' \in \mathbb{C}^{\tilde{k}} = \underline{\tilde{k}}$, définie par les mêmes formules (8) à (10) ci-dessus et en plus

$$f'(\omega) = f(0,0,e) \quad .$$

On vérifie alors sans difficulté la

PROPOSITION 5. - La correspondance $f \mapsto f'$ définie ci-dessus établit un isomorphisme de la représentation $(V_{\alpha,\alpha}\ ,\ \rho)$ sur la représentation $(\underline{\tilde{k}},\ \rho'_\alpha)$, définie par $\underline{\tilde{k}} = \mathbb{C}^{\tilde{k}}$ et par les formules

$$\rho'_\alpha\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r\end{pmatrix} f' = \alpha^2(r) f' \qquad (r \in k^\times) \ ,$$

$$[\rho'_\alpha(h'(r))f'](t) = f'(r^{-1}t) \qquad (r,t \in k^\times) \ ,$$

$$[\rho'_\alpha(h'(r))f'](i) = \alpha(r) f'(i) \qquad (r \in k^\times,\ i = 0,\infty,\omega),$$

$$[\rho'_\alpha(u(s))f'](t) = e(st) f'(t) \qquad (s \in k^+,\ t \in k^\times) \ ,$$

$$[\rho'_\alpha(u(s))f'](i) = f'(i) \qquad (s \in k^+,\ i = \{0,\infty,\omega\}),$$

$$[\rho'_\alpha(w)f'](t) = q^{-1}\left[\sum_{r,s \in k^\times} e^t(r+s)\ (rs)f'(rst) + \alpha^{-1}(t)(f'(\omega)-f'(0)-f'(\infty))\right] ,$$

$$[\rho'_\alpha(w)f'](i) = q^{-1}\left[\sum_{r,s \in k^\times} e(s)\alpha(rs)f'(rs) + f'(\omega) + (q-1)f(i) - f(j)\right],$$

pour $(i,j) \in \{(0,\infty),\ (\infty,0)\}$,

$$\rho'_\alpha(w)f'\ (\omega) = q^{-1}(q-1)\left[\sum_{t \in k^\times} \alpha(t)f'(t) + f'(0) + f'(\infty)\right] + q^{-1}f'(\omega) \quad ,$$

pour toute $f' \in \underline{\tilde{k}}$.

Nous appellerons cette représentation le modèle de Weil réduit du type d'isomorphie $[V_{\alpha,\alpha}\ ,\ \rho] = \pi_{\alpha,\alpha}$.

Remarquons que l'on a alors la décomposition, en G_o - modules

$$\tilde{\underline{k}} = \tilde{\underline{k}}^q \oplus \tilde{\underline{k}}^{+,1} \oplus \tilde{\underline{k}}^- \tag{11}$$

où

$$\tilde{\underline{k}}^q = \{ f \in \tilde{\underline{k}} \mid f(0) = f(\infty) \quad \text{et} \quad f(\omega) = -(q-1)f(0) \} \quad , \tag{12}$$

$$\tilde{\underline{k}}^{+,1} = \{ f \in \tilde{\underline{k}} \mid f(0) = f(\infty) = f(\omega) \quad , \quad f(t) = 0 \quad \forall\, t \in k^\times \} \quad , \tag{13}$$

$$\tilde{\underline{k}}^- = \{ f \in \underline{k} \mid f(\infty) = -f(0) \quad , \quad f(\omega) = f(t) = 0 \quad \forall\, t \in k^\times \} \quad . \tag{14}$$

4. <u>Isomorphisme entre</u> (V, ρ) <u>et la représentation naturelle</u>.

Notons tout d'abord que nous pouvons aussi bien réaliser la représentation naturelle de G_o dans l'espace $\bar{M} = \mathbb{C}^{k^2 \times X}$, l'action de G_o étant alors donnée par

$$(\tau(g)f)(x,\psi) = f(xg, \psi^{\det g^{-1}}) \qquad (f \in \bar{M},\ g \in G_o\ ,\ x \in k^2,\ \psi \in X) \quad . \tag{15}$$

THEOREME 1. - <u>L'application</u> F <u>de</u> $\bar{M}$ <u>dans</u> V <u>définie par</u>

$$[F(f)](x,\psi) = \sum_{s \in k} f(x_1, s; \psi)\psi(-sx_2) \qquad (f \in \bar{M},\ x = (x_1,x_2) \in k^2,\ \psi \in X)$$

<u>est un isomorphisme de</u> $(\bar{M}, \tau)$ <u>sur</u> (V, ρ) <u>et sa restriction à</u> $M_{\alpha,\beta}$ <u>est un isomorphisme de</u> $M_{\alpha,\beta}$ <u>sur</u> $V_{\alpha,\beta}$, <u>quels que soient</u> $\alpha, \beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$.

<u>Démonstration</u>: On vérifie aisément que F est équivariante, qu'elle envoie $M_{\alpha,\beta}$ dans $V_{\alpha,\beta}$ et enfin, que son inverse est défini par

$$[F^{-1}(f')](x,\psi) = q^{-1} \sum_{s \in k} f'(x_1, s; \psi)\psi(sx_2) \qquad (f' \in V,\ x=(x_1,x_2) \in k^2,\ \psi \in X),$$

Le théorème s'ensuit.

D'après la proposition 7 du numéro 3 du paragraphe 1, nous voyons donc que la représentation de Weil associée à $Q = xy$ fournit exactement la série principale de G_o , pour laquelle nous avons ainsi déjà trois types de modèles.

§ 4. La représentation de Weil associée au plan non-déployé.

Dans ce paragraphe, nous décomposons la représentation de Weil (V_N , ρ_N) associée au plan non-déployé (K, N) , où K désigne l'unique extension quadratique de k et N la norme de K sur k (cf. § 2, n° 2, déf. 2 et th. 2). La forme bilinéaire B associée à $Q = N$ est donnée alors par

$$(1) \qquad B(x,y) = \mathrm{Tr}(xy^q) \qquad (x,y \in K) \quad .$$

Nous verrons que l'on obtient ainsi la série discrète de G_o .

Dans la suite, on désigne par U le sous-groupe de $K^\times$ formé des éléments de norme 1 . Nous écrivons simplement (V, ρ) à la place de (V_N , ρ_N) .

1. Le groupe $\Gamma = GO(N)$.

Pour tout $x \in K^\times$, posons

$$(2) \qquad \gamma_x(y) = xy \qquad (y \in K^\times)$$

et

$$(3) \qquad F(x) = x^q \quad .$$

Chaque γ_x $(x \in K^\times)$ est alors une similitude directe de N, de multiplicateur $N(x)$, et $F \in O(N)$.

PROPOSITION 1. - <u>Le groupe</u> $\Gamma = GO(N)$ <u>est le produit semi-direct du groupe</u> Γ^+ <u>formé des</u> γ_x $(x \in K^\times)$ <u>et du groupe</u> $\{1,F\}$ <u>avec les relations</u>

$$F^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad F\gamma_x = \gamma_{x^q} F \qquad (x \in K^\times) .$$

<u>Démonstration</u>: Soit $\varphi \in \Gamma$. Alors $\psi = (\gamma_{\varphi(1)})^{-1}$ vérifie $\psi(1) = 1$ et appartient à $O(N)$. Puisque $N(\psi(x)) = N(x)$ et $\psi(1) = 1$, on voit, compte tenu de la relation générale

$$Tr(z) = N(z+1) - N(z) - 1 \qquad (z \in K) ,$$

que l'on a $Tr(\psi(x)) = Tr(x)$ pour tout $x \in K^\times$. Il s'ensuit que pour chaque $x \in K$, on a, soit $\psi(x) = x$, soit $\psi(x) = x^q$. Soit $x_o \in K$ tel que $\{1,x_o\}$ soit une k - base de K. Alors $\psi = Id$ si $\psi(x_o) = x_o$ et $\psi = F$ si $\psi(x_o) = x_o^q$. On a donc $\varphi = \gamma_{\varphi(1)}$ ou $\varphi = \gamma_{\varphi(1)} F$. La proposition résulte aussitôt de là.

C.Q.F.D.

2. <u>Décomposition de</u> (V, ρ) <u>suivant</u> Γ.

Nous décomposons tout d'abord (V, ρ) suivant les caractères de $\Gamma^+ \simeq K^\times$. Rappelons que $V = \mathbb{C}^{K \times X}$, où X est l'ensemble des caractères non-triviaux de k^+.

<u>DEFINITION</u> 1. - Posons

$$(\tilde{\gamma}_x f)(y,\psi) = f(xy,\psi^{N(x)^{-1}}) \qquad (f \in V,\ x,y \in K,\ x \neq 0,\ \psi \in X)$$

et

$$(\tilde{F}f)(y,\psi) = f(y^q,\psi) \qquad (f \in V,\ y \in K,\ \psi \in X) .$$

DEFINITION 2. - Pour tout $\Lambda \in \mathrm{Car}(K\ )$, on pose

$$V_\Lambda = \{ f \in V \mid \tilde{\gamma}_x f = \Lambda(x) f \qquad \forall\ x \in K^\times \} .$$

Comme les applications $\tilde{\gamma}_x$ $(x \in K^\times)$ sont des automorphismes de (V, ρ) , les sous-espaces V_Λ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times))$ sont des sous-représentations de (V, ρ) . On a

$$V = \bigoplus_{\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)} V_\Lambda$$

et en outre

(4) $$\dim V_\Lambda = q-1 \qquad (\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times),\ \Lambda \neq \Lambda^q) ,$$

(5) $$\dim V_\Lambda = q \qquad (\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times),\ \Lambda = \Lambda^q) ,$$

puisque l'on a, pour tout $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$,

$$f(xy,\psi) = \Lambda(x) f(y,\psi^{N(x)})$$

et en particulier

(6) $$f(x,\psi) = \Lambda(x) f(1,\psi^{N(x)}) \qquad (f \in V,\ x \in K^\times,\ \psi \in X) ,$$

(7) $$f(0,\psi) = \Lambda(u) f(0,\psi) \qquad (f \in V,\ u \in U,\ \psi \in X) ,$$

et que pour un caractère Λ de $K^\times$, la condition $\Lambda = \Lambda^q$ équivaut au fait que Λ soit trivial sur U , ou encore au fait que Λ se factorise par la norme, c'est-à-dire $\Lambda = \alpha \circ N$ pour $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ convenable. Nous posons dans la suite $\rho_\Lambda = \rho|_{V_\Lambda}$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times))$.

Considérons maintenant l'action de F .

PROPOSITION 2. - *La restriction de l'involution* $\widetilde{F}$ *à* V *est un isomorphisme de* V_{Λ} *sur* V_{Λ^q} *quel que soit* $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^{\times})$. *La restriction de* $\widetilde{F}$ *à* V *est l'identité si* $\Lambda = \Lambda^q$.

Démonstration: Cela découle aussitôt des relations $\gamma_x F = F\gamma_{x^q}$ et du fait que

$$f(x^q,\psi) = \Lambda(x^{q-1})f(x,\psi) \qquad (f\in V_{\Lambda}\ ,\ x\in K^{\times},\ \psi\in X)\quad .$$

PROPOSITION 3. - *La représentation* $V_{\alpha\circ N}$ $(\alpha\in \mathrm{Car}(k^{\times}))$ *est la représentation de Steinberg* $St(\alpha)$ *associée à* α .

Démonstration: Nous réalisons la représentations de Steinberg associée à α sous la forme H_{α}^{q} (c'est-à-dire, comme sous-représentation de $H_{\alpha,\alpha} = \underset{B_o\uparrow G_o}{\mathrm{Ind}} [\alpha,\alpha]$). Pour construire un isomorphisme de H_{α}^{q} sur $V_{\alpha\circ N}$, il suffit - compte tenu des dimensions en jeu - de construire un épimorphisme de $H_{\alpha,\alpha}$ sur $V_{\alpha\circ N}$. Comme $H_{\alpha,\alpha} = \underset{B_o\uparrow G_o}{\mathrm{Ind}} [\alpha,\alpha]$, il suffit pour cela
de trouver un générateur de V_{N} (
de trouver un générateur de $V_{\alpha\circ N}$ (comme $\mathbb{C}[G_o]$ - module) qui se transforme comme $1\in\mathbb{C}$, sous l'action de B_o , dans la représentation $(\mathbb{C}, [\alpha,\alpha])$ de B_o . Or on vérifie aisément que tout vecteur $f_o\in V_{\alpha\circ N}$ tel que $\mathrm{Supp}\ f_o = \{0\}\times X$ a la propriété voulue.

C.Q.F.D.

3. <u>L'entrelacement des représentations</u> V_Λ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times))$.

Comme nous savons déjà que $V_\Lambda = \mathrm{St}(\alpha)$ pour $\Lambda = \alpha\circ N$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$ et que $\dim V_\Lambda = q-1$ pour $\Lambda \neq \Lambda^q$, il nous suffira d'étudier les espaces $\mathrm{Hom}_{G_o}(V_\Lambda , V_{\Lambda'})$ pour $\Lambda, \Lambda' \in \mathrm{Car}(K^\times)$ tels que $\Lambda \neq \Lambda^q$, $\Lambda' \neq \Lambda'^q$.

CONVENTION. - Nous identifions dans la suite $\mathrm{Car}(k^\times)$ avec son image dans $\mathrm{Car}(K^\times)$ par le monomorphisme

(8) $$\alpha \longmapsto \alpha\circ N \qquad (\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)) .$$

LEMME 1. - <u>Soit</u> Θ <u>un opérateur de</u> V_Λ <u>dans</u> $V_{\Lambda'}$ $(\Lambda,\Lambda' \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times))$, <u>qui entrelace l'action des</u> $u(b)$, $b \in k^+$ (<u>cf. § 2, n° 3</u>). <u>Alors il existe une et une seule fonction</u> $\theta \in V_{\Lambda'\Lambda^{-1}}$ <u>à support dans</u> $K^\times \times X$ <u>et telle que</u>

$$(\Theta f)(x,\psi) = \theta(x,\psi)f(x,\psi) \qquad (f \in V_\Lambda , \ x \in K, \ \psi \in X) .$$

<u>De plus, l'opérateur</u> Θ <u>est bijectif si et seulement si</u> $\mathrm{Supp}\,\theta = K^\times \times X$.

<u>Démonstration</u>: Notre opérateur Θ est à priori défini par un noyau $H : (K^\times \times X)\times(K^\times\times X) \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

(9) $$H[(z'y,\psi^{N(z')^{-1}}),(zx,\varphi^{N(z)^{-1}})] = \Lambda'(z')H[(y,\psi),(x,\varphi)]\Lambda^{-1}(z)$$

quels que soient $z,z' \in K^\times$, $x,y \in K^\times$, $\varphi,\psi \in X$. Or on voit aisément que le fait que Θ entrelace $\rho_\Lambda(u(b))$ et $\rho_{\Lambda'}(u(b))$, pour tout $b \in k^+$, équivaut à la condition suivante:

(10) $$H[(x,\varphi),(y,\psi)] = 0 \quad \text{à moins que} \quad \varphi(bN(x)) = \psi(bN(y)) \quad \text{pour tout } b \in k^+ .$$

Mais pour $(x,\varphi), (y,\psi) \in K^\times \times K^\times$, nous avons $\varphi^{N(x)} = \psi^{N(y)}$ si et seulement s'il existe $z \in K^{\times}$ tel que $(y,\psi) = (zx,\varphi^{N(z)^{-1}})$. Il en résulte aussitôt que

$$(\Theta f)(x,\varphi) = |K^{\times}| H[(x,\varphi),(x,\varphi)]\, f(x,\varphi) \qquad (f \in V_{\Lambda}\ ,\ x \in K^{\times},\ \varphi \in X)\ ,$$

d'où le lemme.

C.Q.F.D.

REMARQUE.- Dans la suite, chaque fois qu'il aura lieu de considérer une fonction f définie sur $K^{\times}$ comme une fonction définie sur K , on la supposera prolongée en une fonction sur K en posant $f(0) = 0$.

THEOREME 1. - On a, quels que soient Λ,Λ' $Car(K^{\times})$ - $Car(k^{\times})$:

i) Les représentations V_{Λ} sont déjà irréductibles pour le sous-groupe

$$P_o = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle|\ b \in k^{+}\ ,\ d \in k^{\times} \right\}$$

de G_o .

ii) Si $V_{\Lambda} \simeq V_{\Lambda'}$, alors $\Lambda' = \Lambda$ ou $\Lambda' = \Lambda^{q}$.

Démonstration: Soit Θ un opérateur d'entrelacement de V_{Λ} restreinte à P_o dans $V_{\Lambda'}$ restreinte à P_o . Comme Θ entrelace l'action des $u(b)$ $(b \in k^{+})$, on a d'après le lemme 1,

$$\Theta f = \theta . f \qquad (f \in V_{\Lambda})$$

pour une unique fonction $\theta \in V_{\Lambda'\Lambda^{-1}}$. Or, le fait que Θ entrelace l'action des $h'(r)$ $(r \in k^{\times})$ équivaut à la condition

$$\theta(x,\varphi^{r}) = (x,\varphi) \qquad (x \in K^{\times}\ ,\ \varphi \in X,\ r \in k^{\times})\ ,$$

c'est-à-dire au fait que $\theta(x,\psi)$ ne dépend pas de $\psi \in X$, pour $x \in K^{\times}$.

Il en résulte qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que

$$(x,\psi) = c\Lambda'\Lambda^{-1}(x) \qquad (x \in K^\times,\ \psi \in X) \quad .$$

En particulier pour $\Lambda' = \Lambda$, la fonction θ est constante sur $K^\times \times X$, donc $\mathrm{Hom}_{G_o}(V_\Lambda , V_\Lambda) = \mathbb{C}$, et V_Λ est irréductible pour le sous-groupe P_o de G_o .

Supposons maintenant que l'on ait $\Lambda' \neq \Lambda$ et que $\Theta : V_\Lambda \longrightarrow V_{\Lambda'}$ soit un G_o - morphisme non-nul, et donc $c \neq 0$.

Puisque

$$\Theta \circ \rho_\Lambda(h'(t)^{-1}w) = \rho_{\Lambda'}(h'(t)^{-1}w) \circ \Theta \qquad (t \in k^\times) \quad ,$$

on a, quels que soient $f \in V_\Lambda$ et $\psi \in X$,

$$\theta(1,\psi)\sum_{y \in K^\times} \psi^t(\mathrm{Tr}(y))f(y,\psi) = \sum_{y \in K^\times} \psi^t(\mathrm{Tr}(y))\theta(y,\psi)f(y,\psi) \qquad (t \in k^\times) \quad ,$$

d'où

$$(11) \qquad \sum_{y \in K^\times} \psi^t(\mathrm{Tr}(y))\Lambda(y)f(1,\psi^{N(y)}) = \sum_{y \in K^\times} \psi^t(\mathrm{Tr}(y))\Lambda'(y)f(1,\psi^{N(y)})$$

pour tout $t \in k^+$, car Λ et Λ' sont non-triviaux sur U . Comme les caractères ψ^t $(t \in k^+)$ forment une base de $\mathbb{C}^{k^+}$, pour $\psi \in X$, fixé, il résulte de (11) par combinaison linéaire que

$$\sum_{\substack{y \in K^\times \\ \mathrm{Tr}(y) = \mathrm{Tr}(x)}} \Lambda(y)f(1,\psi^{N(y)}) = \sum_{\substack{y \in K^\times \\ \mathrm{Tr}(y) = \mathrm{Tr}(x)}} \Lambda'(y)f(1,\psi^{N(y)}) \qquad (x \in K) \quad .$$

En prenant enfin, pour chaque $x \in K^\times$, une fonction $f_x \in V_\Lambda$ telle que $f(1,\psi^r) = \delta(r - N(x))$ $(r \in k^\times)$, on en tire

$$\sum_{\substack{y \in K^\times \\ Tr(y) = Tr(x) \\ N(y) = N(x)}} \Lambda(y) = \sum_{\substack{y \in K^\times \\ Tr(y) = Tr(x) \\ N(y) = N(x)}} \Lambda'(y) \qquad (x \in K^\times) \quad ,$$

c'est-à-dire $\Lambda + \Lambda^q = \Lambda' + \Lambda'^q$ et donc $\Lambda' = \Lambda^q$, d'après l'indépendance linéaire des caractères.

C.Q.F.D.

DEFINITION 3. - Nous appelons série discrète (de représentations) de G_o l'ensemble des types d'isomorphie des représentations $(V_\Lambda , \rho_\Lambda)$ pour $\Lambda \in Car(K^\times) - Car(k^\times)$.

La série discrète de G_o est donc formée de $\frac{1}{2}q(q-1)$ (types d'isomorphie de) représentations de dimension $q-1$.

Dans la suite, nous noterons d'habitude π_Λ ou $(V_\Lambda , \pi_\Lambda)$ le type d'isomorphie de la représentation $(V_\Lambda , \rho_\Lambda)$ $(\Lambda \in Car(K^\times))$.

THEOREME 2. - La série discrète et la série principale de représentations de G_o sont disjointes et elles épuisent toutes les représentations irréductibles de G_o .

Démonstration: Pour voir que les deux séries sont disjointes, il suffit de remarquer que toutes les représentations de la série principale admettent des vecteurs non-nuls invariants par le sous-groupe unipotent supérieur U_o de G_o et qu'aucune représentation de la série discrète n'en admet. Pour montrer que ces deux séries épuisent toutes les représentations irréductibles de G_o , le plus simple est de vérifier que la somme des carrés de leurs dimensions est égale à l'ordre $(q-1)^2q(q+1)$ de G_o .

C.Q.F.D.

4. Les modèles de Weil réduits pour la série discrète.

PROPOSITION 4. - Soit $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$. Alors en associant à chaque $f \in V_\Lambda$ sa restriction à $\{1\} \times X$, on établit un isomorphisme de $(V_\Lambda , \rho_\Lambda)$ sur la représentation $(\mathbb{C}^X, \rho'_\Lambda)$ définie par les formules suivantes, pour toute $f \in \mathbb{C}^X$,

$$\rho'_\Lambda\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r\end{pmatrix} f = \Lambda(r) f \qquad (r \in k^\times) ,$$

$$[\rho'_\Lambda(h'(r))f](\psi) = f(\psi^{r^{-1}}) \qquad (r \in k^\times,\ \psi \in X) ,$$

$$[\rho'_\Lambda(u(s))f](\psi) = \psi(s) f(\psi) \qquad (s \in k^+,\ \psi \in X) ,$$

$$[\rho'_\Lambda(w)f](\psi) = -q^{-1} \sum_{y \in K^\times} (\mathrm{Tr}(y))\Lambda(y) f(\psi^{N(y)}) \qquad (\psi \in X) .$$

La représentation $(\mathbb{C}^X, \rho'_\Lambda)$ est appelés le modèle de Weil réduit du type d'isomorphie π_Λ de $(V_\Lambda , \rho_\Lambda)$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times))$.

Cela est immédiat.

REMARQUE. - Si l'on choisit un caractère $e \in X$, alors, en posant $f(t) = f(e^t)$, on peut réaliser le modèle de Weil réduit dans l'espace $\underline{k}^\times = \mathbb{C}^{k^\times}$. On appellera cette réalisation le modèle de Weil réduit de π_Λ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times))$ avec choix de e .

En prenant, par example, la base de $\mathbb{C}^X$ formée des fonctions de Dirac sur X , on calcule sans difficulté les caractères des représentations V_Λ , donnés dans la table 1.

NOTATIONS. - Dans toute la suite, on note $(V_{\alpha,\beta} , \pi_{\alpha,\beta})$ $(\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times),$

$\alpha \neq \beta)$, $(V^i_\alpha, \pi^i_\alpha)$ $(i = 1, q\ ;\ \alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$, (V_Λ, π_Λ) $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times))$, les types d'isomorphie (ou des représentants non spécifiés des types d'isomorphie) des représentations irréductibles de G_o , en gardant la paramétrisation adoptée dans les paragraphes précedents. On supprimera souvent la lettre désignant l'espace, des notations. Pour $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, on posera encore $(V_{\alpha,\alpha}, \pi_{\alpha,\alpha}) = (V^q_\alpha, \pi^q_\alpha) + (V^1_\alpha, \pi^1_\alpha)$.

Dans la table 1, on note χ^i le caractère de π^i_α $(i = 1, q\ ;$ $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$ et $\chi_{\alpha,\beta}$ (resp. χ_Λ) le caractère de $\pi_{\alpha,\beta}$ (resp. π_Λ) pour $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$ (resp. $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times))$.

§ 5. Les représentations de $G'_o = SL(2,k)$.

Nous obtenons dans ce paragraphe toutes les représentations irréductibles de $SL(2,k)$, par restriction de celles de $G_o = GL(2,k)$, construites dans les paragraphes précédents.

Nous posons dans la suite,

$$G'_o = SL(2,k) \quad , \quad B'_o = B_o \cap G_o \quad , \quad T'_o = T_o \cap G_o \qquad \text{(cf. § 1).}$$

Nous gardons en outre, les notations des paragraphes précédents.

1. Préliminaires

Nous considérons dans ce numéro, de manière générale, la situation où l'on restreit des représentations (irréductibles) d'un groupe fini G à un sous-groupe H d'indice 2 dans G . On note ρ_H la restriction d'une représentation ρ de G à H .

LEMME 1. - Soient G un groupe fini et H un sous-groupe d'indice 2 . Si ρ et σ sont deux représentations quelconques de G et Φ un H - homomorphisme de ρ dans σ , on pose

(1) $$J(\Phi) = \sigma(g_o)\Phi\rho(g_o)^{-1} \quad ,$$

où $g_o \in G - H$, et

(2) $$\mathrm{Hom}_H^{\pm}(\rho,\sigma) = \mathrm{Im}(1 \pm J) \quad .$$

Alors J ne dépend pas du choix de $g_o \in G - H$ et J est une involution fonctorielle sur les H - homomorphismes de représentations de G . On a

(3) $$\mathrm{Hom}_H(\rho,\sigma) = \mathrm{Hom}_H^{+}(\rho,\sigma) + \mathrm{Hom}_H^{-}(\rho,\sigma) \quad ,$$

(4) $$\mathrm{Hom}_H^{+}(\rho,\sigma) = \mathrm{Hom}_G(\rho,\sigma) \quad .$$

Démonstration: Cela est une conséquence immédiate des relations

$$G - H = g_oH = Hg_o \quad , \qquad g_o^2 \in H \quad ,$$

dues au fait que H est d'indice 2 dans G .

C.Q.F.D.

PROPOSITION 1. - Soit H un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe fini G . Soit (V, ρ) une représentation irréductible de G . Alors si la restriction ρ_H de ρ à H n'est pas irréductible, on a

i) $$\mathrm{End}_H(\rho) = \mathbb{C}I \dotplus \mathbb{C}\Psi_o = \mathbb{C}p_+ \oplus \mathbb{C}p_- \qquad (I = \mathrm{Id}_V) \quad ,$$

<u>où</u> Ψ_o <u>est une</u> H - <u>involution de</u> V , <u>à trace nulle, telle que</u>

$$\Psi_o \rho(g) = -\rho(g)\Psi_o \qquad (g \in G - H)$$

<u>et les</u> H - <u>projecteurs orthogonaux</u> $p_{\pm}$ <u>sont définis par</u>

$$p_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \Psi_o) \quad ;$$

ii) $$(V, \rho_H) = (V^+, \rho_H) + (V^-, \rho_H)$$

<u>où</u>

$$V^{\pm} = \operatorname{Im} p_{\pm}$$

<u>avec</u>

$$(V^+, \rho_H) \quad (V^-, \rho_H) \quad ,$$

$$\dim V^{\pm} = \frac{1}{2}\dim V \quad ;$$

iii) <u>le caractère</u> χ <u>de</u> ρ <u>est porté par</u> H .

<u>Démonstration</u>: D'après le lemme 1, on a, puisque ρ est irréductible

$$\operatorname{End}_H(\rho) = \mathbb{C}I \oplus \operatorname{End}_H^-(\rho) \quad .$$

Or, quels que soient Φ, Ψ $\operatorname{End}_H^-(\rho)$, on a $J(\Phi\Psi) = \Phi\Psi$
et donc

$$\Phi\Psi \in \operatorname{End}_H^+(\rho) = \operatorname{End}_G(\rho) = \mathbb{C}I \quad .$$

Il est clair qu'il existe au moins un couple Φ, Ψ $\operatorname{Hom}_H^-(\rho)$ tel que $\Phi\Psi \neq 0$ (puisque sinon $\operatorname{Hom}_H^-(\rho)$ serait un idéal (bilatère) de carré nul de la $\mathbb{C}$ - algèbre semi-simple $\operatorname{End}_H(\rho)$, ce qui est impossible). Pour un tel couple on a donc que $\Phi\Psi$ est une homothétie non-nulle (donc Φ et Ψ sont des automorphismes de V); il en est alors de même de Ψ^2 , par exemple, et par suite $\Psi_o = \lambda\Psi$, pour un $\lambda \in \mathbb{C}$ convenable, est une involution. Si $\Phi' \in \mathrm{Hom}_H^-(\rho)$, on a $\Phi'\Psi_o = \mu I$, d'où

$$\Phi' \in \mathbb{C}\Psi_o \quad .$$

Notons enfin que tout $\mathrm{End}_H^-(\rho)$ est clairement de trace nulle, puisque

$$\mathrm{Tr}(\Phi) = \mathrm{Tr}(\rho(g_o)\Phi\rho(g_o)^{-1}) = -\mathrm{Tr}(\Phi) \qquad (g_o \in G - H) \quad .$$

Nous avons ainsi démontré i).

L'assertion ii) est une conséquence immédiate de i), compte tenu du fait que, puisque $\mathrm{Tr}(\Psi_o) = 0$, on a

$$\dim V^{\pm} = \mathrm{Tr}(p_{\pm}) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(I) \quad .$$

Enfin, iii) résulte aussitôt de la relation

$$-\rho(g) = \Psi_o^{-1}\rho(g)\Psi_o \qquad (g \quad G - H) \quad ,$$

en prenant les traces.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 2. - *Soit* H *un sous-groupe d'indice* 2 *d'un groupe fini* G . *Soient* ρ *et* σ *deux représentations irréductibles non-isomorphes de* G .

i) *Si* ρ_H *ou* σ_H *est irréductible, alors*

$$\mathrm{Hom}_H(\rho,\sigma) = 0 \quad ;$$

ii) *Si* ρ_H *et* σ_H *sont irréductibles et isomorphes, alors*

$$\mathrm{Hom}_H(\rho,\sigma) = \mathbb{C}\Phi_o$$

<u>pour un</u> H - <u>homomorphisme inversible</u> Φ_o <u>tel que</u>

$$\sigma(g)\Phi_o = -\Phi_o\rho(g) \qquad (g \in G - H) \quad ,$$

<u>et la somme</u> $\chi + \chi'$ <u>des caractères de</u> ρ <u>et</u> σ <u>est portée par</u> H .

<u>Démonstration</u>: Dans ce cas, le lemme 1 donne

(5) $$\mathrm{Hom}_H(\rho,\sigma) = \mathrm{Hom}_H^-(\rho,\sigma) \quad .$$

Si par exemple ρ_H est réductible (le cas où σ_H est réductible étant dual de celui-ci), alors, avec les notations de la proposition 1, i), on a

$$\Phi\Psi_o \in \mathrm{Hom}_H^+(\rho,\sigma) = \mathrm{Hom}_G(\rho,\sigma) = 0$$

pour tout $\Phi \in \mathrm{Hom}_H^-(\rho,\sigma)$, d'où i). L'assertion ii) est une conséquence immédiate de (5) et du lemme de Schur. Notre dernière assertion résulte alors du fait que

$$\sigma(g) = -\Phi_o\rho(g)\Phi_o^{-1} \qquad (g \in G - H) \quad .$$

C.Q.F.D.

En introduisant la représentation de dimension 1 de G déduite du caractère non-trivial de $G/H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on peut énoncer les résultats ci-dessus de la manière suivante:

DEFINITION 1. - <u>Notons</u> ε <u>la représentation de dimension</u> 1 <u>de</u> G <u>définie par</u>

$$\varepsilon(h) = 1 \qquad (h \in H) \quad ,$$

$$\varepsilon(g) = -1 \qquad (g \in G - H) \ .$$

PROPOSITION 3. - Soit (V, ρ) une représentation irréductible de G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i) La restriction ρ_H de ρ à H est irréductible.

ii)
$$(V, \rho_H) = (V^+, \rho_H) \oplus (V^-, \rho_H) \ ,$$

où V^+ et V^- sont deux sous-représentations irréductibles, non-isomorphes, de (V, ρ_H), de dimension commune $\frac{1}{2}\dim V$.

iii) Le caractère χ de ρ est porté par H.

iv)
$$\varepsilon\rho \simeq \rho \ .$$

De plus, si iv) est vérifiée et Ψ_o est l'un des deux isomorphismes involutifs de (V, ρ) sur $(V, \varepsilon\rho)$, alors on a ii) avec

$$V^{\pm} = \mathrm{Im}(1 \pm \Psi_o) \ .$$

Démonstration: Dans la proposition 1, on a démontré l'équivalence de i) et ii), ainsi que le fait que i) entraîne iii). Mais iii) signifie que l'on a

$$\mathrm{Tr}(\varepsilon(g)\rho(g)) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$$

pour tout $g \in G$, c'est-à-dire que l'on a iv). Supposons enfin que iv) soit vérifiée. Soit Ψ un isomorphisme de (V, ρ) sur $(V, \varepsilon\rho)$. Comme $\varepsilon^2 = 1$; on aura que $\Psi_o = \lambda\Psi$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ convenable, est un isomorphisme involutif de (V, ρ) sur $(V, \varepsilon\rho)$. Il est clair que $\Psi_o \in \mathrm{Hom}_H^-(\rho)$, d'où notre dernière assertion (cf. prop. 1), et aussi le fait que iv) entraîne i).

C.Q.F.D.

PROPOSITION 4. - <u>Soient</u> ρ <u>et</u> σ <u>deux représentations irréductibles, non-isomorphes, de</u> G . <u>Notons</u> ρ_H (<u>resp</u>. σ_H) <u>la restriction de</u> ρ (<u>resp</u>.) <u>à</u> H . <u>Alors on a</u>

$$\rho_H \simeq \sigma_H \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho \simeq \varepsilon\sigma .$$

<u>Lorsque ces conditions sont remplies</u>, ρ_H <u>et</u> σ_H <u>sont irréductibles et l'on a</u>

$$\mathrm{Hom}_H(\rho,\sigma) = \mathrm{Hom}_G(\rho,\varepsilon\sigma) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: Il est clair que $\rho \simeq \varepsilon\sigma$ entraîne $\rho_H \simeq \sigma_H$, puisque $\varepsilon = 1$ sur H . Réciproquement, supposons $\rho_H \simeq \sigma_H$. D'après la proposition 2, i), il faut alors que ρ_H et σ_H soient irréductibles et que $\chi' = -\chi$ sur $G - H$, ce qui signifie, puisque $\chi = \chi'$ sur H , que

$$\mathrm{Tr}\circ(\varepsilon\sigma) = \mathrm{Tr}\circ\rho$$

et donc $\rho \simeq \varepsilon\sigma$ comme voulu. La seconde assertion est claire d'après la proposition 2, ii).

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Toute représentation irréductible π de H apparaît dans la restriction à H d'une représentation irréductible ρ de G (il suffit en effet, de considérer les composantes irréductibles de l'induite de π à G). Les résultats qui précédent montrent alors que, ou bien π apparaît comme l'une des deux H - composantes irréductibles non-isomorphes d'une unique représentation irréductible ρ de G (à isomorphisme près), ou bien π est la restriction à H d'une représentation irréductible ρ de G et aussi de $\varepsilon\rho$ ($\not\simeq \rho$) mais d'aucune autre représentation irréductible de G (à isomorphisme près).

2. Restriction de $G''_o = Z_oG'_o$ à G'_o .

DEFINITION 2. - Notons Z_o le centre de G_o , identifié à $k^\times$. Posons

$$G''_o = Z_oG'_o \ .$$

Nous avons

(6) $$G''_o = \{ g \in G_o \mid \det g \in (k^\times)^2 \} \ ,$$

et

(7) $$G''_o \simeq (Z_o \times G'_o)/\{1,-1\} \ .$$

Si la caractéristique de k est 2 , on a donc

(8) $$G''_o = G_o = Z_o \times G'_o \ .$$

PROPOSITION 5. - En associant à chaque paire (γ,π') , où $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$ et π' est une représentation de G'_o telle que $\gamma(-1) = \pi'(-1)$, la représentation $\gamma.\pi'$ de G''_o définie par

$$(\gamma.\pi')(tg) = \gamma(t)\pi'(g) \qquad (t \in k^\times = Z_o \ , \ g \in G'_o) \ ,$$

on établit une bijection entre l'ensemble de ces paires, modulo la relation (γ,π'_1) (γ,π'_2) pour des représentations isomorphes π'_1 et π'_2 de G'_o , et l'ensemble des types d'isomorphie des représentations de G''_o . En particulier si π'' est une représentation de G''_o , toutes les représentations de G''_o ayant même restriction à G'_o (à isomorphie près) que π'' sont les $\gamma\pi''(= (\gamma.1_{G'_o})\otimes\pi'')$, pour $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$ tel que $\gamma(-1) = 1$.

Démonstration: Cela est immédiat, d'après (7).

C.Q.F.D.

3. - *Restriction de* G_o *à* G'_o .

DEFINITION 3. - *Si* G *est un groupe fini, on note* $R(G)$ (*resp.* $I(G)$) *la classe de toutes les représentations (resp. toutes les représentations irréductibles) de* G , *et l'on désigne par* $\overline{R}(G)$ (*resp.* $\overline{I}(G)$) *l'ensemble des types d'isomorphie des représentations (resp. des représentations irréductibles) de* G .

PROPOSITION 6. - *Si la caractéristique de* k *est* 2 , *alors en associant à chaque représentation de* G_o *sa restriction à* G'_o , *on définit une surjection de* $\overline{I}(G_o)$ *sur* $\overline{I}(G'_o)$, *dont la fibre au dessus de* $\pi' \in \overline{I}(G'_o)$ *est formé des* $q-1$ *produits tensoriels* $\alpha \otimes \pi'$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$.

Cela est une conséquence immédiate de (8).

Nous considérons maintenant le cas de la caractéristique différente de 2 .

PROPOSITION 7. - *Supposons* k *de caractéristique différente de* 2 . *Soit* $(V,\pi) \in I(G_o)$. *Notons* π' *sa restriction à* G'_o . *Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

i) π' *est irréductible*.

ii) $$(V,\pi') = (V^+,\pi') \oplus (V^-,\pi') \quad ,$$

où V^+ *et* V^- *sont deux sous-représentations irréductibles, non-isomor*-

phes, de (V,π') , de dimension commune $\frac{1}{2}\dim V$.

iii) Le caractère χ de π est porté par G''_o .

iv) $$\pi \simeq \alpha_o\pi \; (= (\alpha_o \circ \det)\otimes\pi) \quad ,$$

où l'on note α_o le caractère non-trivial de $k^\times$, de carré trivial.

De plus, si iv) est vérifiée et si Ψ_o est l'un des deux isomorphismes involutifs de (V,π) sur $(V,\alpha_o\pi)$, alors on a ii) pour

$$V^{\pm} = \mathrm{Im}(1 \pm \Psi_o) \quad .$$

Démonstration: Cela résulte aussitôt de la proposition 3 du numéro 1 et de la proposition 5 ci-dessus.

C.Q.F.D.

En ce qui concerne l'entrelacement des restrictions, nous avons la

PROPOSITION 8. - Soient π_1 , $\pi_2 \in I(G_o)$. Alors pour que les restrictions de π_1 et π_2 à G'_o soient isomorphes, il faut et il suffit que $\pi_2 \simeq \gamma\pi_1$ $(= (\gamma\circ\det)\otimes\pi_1)$ pour un $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$ convenable.

Démonstration: Notons que la proposition 6 contient cette assertion dans le cas de la caractéristique 2 . Supposons donc car $k \neq 2$. Comme $\gamma(=\gamma\circ\det)$ est trivial sur G'_o , il est clair que $\pi_2 \simeq \gamma\pi_1$ entraîne que la restriction π'_1 de π_1 à G'_o est isomorphe à la restriction π'_2 de π_2 à G'_o . Réciproquement, supposons $\pi'_1 \simeq \pi'_2$. Notons π''_1 (resp. π''_2) la restriction de π_1 (resp. π_2) à G''_2 . D'après la proposition 5, nous avons alors

$$\pi''_2 \simeq (\alpha.1_{G'_o}) \otimes \pi''_1$$

pour un $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ tel que $\alpha(-1) = 1$, c'est-à-dire, tel que α soit un carré dans $\mathrm{Car}(k^\times)$. On a donc, en choisissant une racine carrée β de α dans $\mathrm{Car}(k^\times)$,

$$\pi''_2 \simeq (\beta\circ\det)\otimes\pi''_1 \quad .$$

Il résulte alors de la proposition 4 du numéro 1 que, ou bien

$$\pi_2 \simeq (\beta\circ\det)\otimes\pi_1 \quad ,$$

ou bien

$$\pi_2 \simeq \varepsilon[(\beta\circ\det)\otimes\pi_1] \quad .$$

Comme ici $\varepsilon = \alpha_o \circ \det$, on en tire

$$\pi_2 \simeq \beta\pi_1 \qquad \text{ou} \qquad \pi_2 \simeq \alpha_o\beta\pi_1 \quad ,$$

ce qui achève la démonstration.

C.Q.F.D.

4. Identification des $\alpha'\pi$ $(\alpha' \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\pi \in I(G_o)$).

La proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION 9. - Désignons par (E, Q) n'importe lequel des deux espaces quadratiques, non-dégénérés, de dimension 2 sur k et par Γ' un sous-groupe commutatif de $GO(Q)$. Soit $\alpha' \in \mathrm{Car}(k^\times)$. Alors l'application $\varphi_{\alpha'}$ de $V_Q = \mathbb{C}^{E\times X}$ dans lui-même, définie par

$$[\varphi_{\alpha'}(f)](x,e^t) = \alpha'(t)f(x,e^t) \qquad (f \in V_Q\ ,\ x \in E,\ \ t \in k^\times)$$

(*où* $e \in X$, *fixé*) *est un isomorphisme de la représentation de Weil* $(V_Q\ ,\ \rho_Q)$ *sur la représentation* $(V_Q\ ,\ \alpha'\rho_Q)$, *où* $\alpha'\rho_Q = (\alpha' \circ \det) \otimes \rho_Q$, *qui transforme la composante* Γ' - *isotypique de type* ν $(\nu \in \mathrm{Car}(\Gamma'))$ *de* V_Q *dans la composante* Γ' - *isotypique de type* $(\alpha' \circ m)^{-1}$ *de* V_Q (*où l'on désigne par* m *l'homomorphisme multiplicateur de* Γ' *dans* $k^\times$).

COROLLAIRE. - *On a, pour les représentations irréductibles de* G_o (*cf.* § 4, *n°* 4, *notations*):

$$\alpha'\pi_{\alpha,\beta} \simeq \pi_{\alpha'\alpha,\alpha'\beta} \qquad (\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times),\ \alpha \neq \beta) \quad ;$$

$$\alpha'\pi^i_\alpha \simeq \pi^i_{\alpha'\alpha} \qquad (\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)) \quad ;$$

$$\alpha'\pi_\Lambda \simeq \pi_{\alpha'\Lambda} \qquad (\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)) \quad ,$$

quel que soit $\alpha' \in \mathrm{Car}(k^\times)$.

En effet, il suffit d'appliquer la proposition, successivement, à $(E,\ Q)$ égal au plan déployé sur k , $\Gamma' = k^\times \times k^\times$, $\nu = (\alpha,\beta)$ $(\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times))$, et à $(E,\ Q) = (K,\ N)$, $\Gamma' = K^\times$, $\nu = \Lambda$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times))$.

5. - *La représentation naturelle de* G'_o .

Dans ce numéro, nous explicitons la relation entre la représentation naturelle de G_o et celle de G'_o , ce qui nous fournira une description commode de l'entrelacement qui apparaît dans la série principale de G_o , lorsqu'on la restreint à G'_o .

DEFINITION 4. - *La représentation naturelle* τ' *de* G'_o *est définie dans l'espace* $\overline{M}' = \mathbb{C}^{k^2}$ *par*

$$[\tau'(g)f](x) = f(xg) \qquad (g \in G'_o \ , \ f \in \overline{M}', \ x \in k^2) \quad .$$

On pose

$$M' = \{f \in \overline{M}' \mid f(0) = 0\} \quad ,$$

$$M'_\alpha = \{f \in M' \mid f(tx) = \alpha(t)f(x) \qquad \forall\, t \in k^\times \ , \forall\, x \in k^2\}$$

pour tout $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$.

On a alors, la G'_o - décomposition

(9) $$M' = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)} M'$$

et d'autre part,

(10) $$\dim M'_\alpha = q+1 \qquad (\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)) \quad .$$

Nous renvoyons au paragraphe 1 (n° 2), pour tout ce qui concerne la représentation naturelle (M, τ) de G_o .

PROPOSITION 10. - *En associant à chaque* $f \in \overline{M}$ $(= \mathbb{C}^{k^2 \times k^\times})$ *sa restriction à* $k^2 \times \{1\}$, *on définit un* G'_o - *épimorphisme* p *de* $\overline{M}$ *sur* $\overline{M}'$ *qui, restreint à* $M_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{Car}(k))$, *définit un* G'_o - *isomorphisme de* $M_{\alpha,\beta}$ *sur* $M'_{\alpha\beta^{-1}}$.

Démonstration: Cela est immédiat, compte tenu de la relation

$$f(t(r,s);1) = \alpha\beta^{-1}(t)f(r,s;1) \qquad (f \in M_{\alpha,\beta} \ , \ r,s \in k, \ t \in k^\times)$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$.

C.Q.F.D.

6. La représentation de Weil (V'_Q , ρ'_Q) de G'_o .

Nous renvoyons au paragraphe 2, pour tout ce qui concerne la représentation de Weil de G_o . Nous gardons les notations introduites à cet endroit.

D'après les résultats du paragraphe 2, il est clair que nous pouvons aussi bien construire une représentation de Weil pour G'_o , comme suit:

THEOREME 1. - Soit (E, Q) un espace quadratique, non-dégénéré, de dimension paire $2m$, sur k . On peut définir une représentation (V'_Q , ρ'_Q) de G'_o , appelée représentation de Weil de G'_o associée à l'espace quadratique (E, Q) , en fixant $e \in \mathrm{Car}(k^+) - \{1\}$, en posant

$$V'_Q = E^{\mathbb{C}}$$

et en se donnant ρ'_Q sur les générateurs $h(a)$ $(a \in k^\times)$, $u(b)$ $(b \in k^+)$ et w de G'_o , par les formules suivantes

(11) $$[\rho'_Q(h(a))f](x) = f(xa) \qquad (a \in k^\times) ,$$

(12) $$[\rho'_Q(u(b))f](x) = e(bQ(x))f(x) \qquad (b \in k^+) ,$$

(13) $$[\rho'_Q(w)f](x) = \varepsilon(Q)q^{-m} \sum_{y \in E} e(B(x,y))f(y) ,$$

pour $f \in V'_Q$, $x \in E$.

De plus, si γ est un isomorphisme de (E, Q) sur un espace quadratique (E', Q') , alors γ induit un isomorphisme $\sigma(\gamma)$ de $(V'_{Q'}, \rho'_{Q'})$ sur (V'_Q, ρ'_Q) défini par

(14) $$[\sigma(\gamma)f'](x) = f(\gamma x) \qquad (f \in V_Q, x \in E) \quad ;$$

si γ' est un isomorphisme d'espaces quadratiques de source (E', Q') , alors on a

$$\sigma(\gamma' \circ \gamma) = \sigma(\gamma) \circ \sigma(\gamma') \quad .$$

La représentation (V'_Q, ρ'_Q) peut donc se décomposer suivant les composantes isotypiques de l'action $\gamma \longmapsto (\gamma^{-1})$ $(\gamma \in O(Q))$ du groupe orthogonal $O(Q)$ dans V_Q .

Notons que, comme la dimension de E est paire, on a $Q \simeq tQ$ pour tout $t \in k^{\times}$ et par suite le type d'isomorphie de (V_Q, ρ_Q) ne dépend pas du choix de $e \in \mathrm{Car}(k^+) - \{1\}$.

7. Restriction de (V_Q, ρ_Q) , de G_o à G'_o , pour $Q = xy$.

Considérons tout d'abord, la décomposition de la représentation de Weil (V'_Q, ρ'_Q) de G'_o associée au plan quadratique déployé $(E, Q) = (k^2, xy)$ (cf. § 2, n° 2 et § 3).

DEFINITION 5. - *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times})$, *on pose*

$$V'_{\alpha} = \{f \in V'_Q \mid f(tr, t^{-1}s) = \alpha(t)f(r,s) \qquad \forall t \in k^{\times}, \forall (r,s) \in E\}$$

et, si $\alpha = \alpha^{-1}$,

$$V'^{\pm}_{\alpha} = \{f \in V'_{\alpha} \mid f(s,r) = \pm f(r,s) \qquad \forall (r,s) \in E\} \quad .$$

On a alors les G'_o - décompositions

(15) $$V'_Q = \bigoplus_{\alpha\in \mathrm{Car}(k\ )} V'_\alpha \quad ,$$

(16) $$V'_\alpha = V'^+_\alpha \oplus V'^-_\alpha \qquad (\alpha\in \mathrm{Car}(k\ ),\ \alpha = \alpha^{-1}) \quad ,$$

et d'autre part

(17) $$\dim V'_\alpha = q+1+\delta_{\alpha,1} \qquad (\alpha\in \mathrm{Car}(k^\times)) \quad .$$

La décomposition (15) est en fait la "restriction" de la décomposition de $(V_Q\ ,\ \rho_Q)$ suivant $GO(Q)$ (§ 3, n° 2). Nous avons en effet la

PROPOSITION 11. - *En associant à chaque* $f\in V_Q$ *sa restriction à* $E\times\{e\}$, *on définit un* G'_o - *épimorphisme* p_Q *de* $(V_Q\ ,\ \rho_Q)$ *sur* $(V'_Q\ ,\ \rho'_Q)$ *qui, restreint à* $V_{\alpha,\beta}$ (*resp.* $V^\pm_{\alpha,\alpha}$) *donne un* G'_o - *isomorphisme de* $V_{\alpha,\beta}$ (*resp.* $V^\pm_{\alpha,\alpha}$) *sur* $V'_{\alpha\beta^{-1}}$ (*resp. sur* $V'^\pm_1$) *pour* $\alpha,\beta\in \mathrm{Car}(k^\times)$ (*resp.* $\alpha\in \mathrm{Car}(k^\times)$) .

En outre, l'application F' *de* $\overline{M}'$ *dans* V'_Q *définie par*

$$(F'f)(r,t) = \sum_{s\in k} f(r,s)e(-st) \qquad (f\in\overline{M}'\ ,\ (r,t)\in k^2)$$

est un G'_o - *isomorphisme de* $(\overline{M}',\ \tau')$ *sur* $(V'_Q\ ,\ \rho'_Q)$, *qui applique chaque* M'_α *isomorphiquement sur* V'_α $(\alpha\in \mathrm{Car}(k^\times))$. *De plus, on a (moyennant l'identification de* $k^\times$ *à* X *par* $t\longmapsto e^t$)

(18) $$p_Q\circ F = F'\circ p$$

(*cf*. § 3, *n*° 4).

Démonstration: La première assertion de la proposition est immédiate, compte tenu de la relation

$$f(tr,t^{-1}s;e) = (\alpha\beta^{-1})(t)f(r,s;e) \qquad (f\in V_{\alpha,\beta}\ ,\ (r,s)\in E,\ t\in k^{\times}),$$

pour $\alpha,\beta\in \mathrm{Car}(k^{\times})$. Pour prouver la seconde assertion, on remarque que la relation (18) est claire, d'après les définitions, et que le reste de l'assertion résulte aussitôt de là.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 12. - <u>Supposons que la caractéristique de</u> k <u>soit différente de</u> 2 <u>et notons, comme précédemment,</u> α_o <u>le caractère non-trivial de</u> k , <u>de carré trivial; autrement dit,</u> α_o <u>est le symbole de Legendre. Alors on a</u>

$$V'^{\pm}_{\alpha_o} = \{f\in V'_{\alpha_o}\ |\ f(0,1) = \pm f(1,0) \quad \text{et} \quad f(1,t) = 0 \quad \text{si} \quad \alpha_o(t) = \mp 1 \quad (t\in k^{\times})\}$$

<u>et donc</u>

$$\dim V'^{\pm}_{\alpha_o} = \frac{1}{2}(q+1) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: Cela résulte aussitôt des définitions et de la relation

$$f(1,t) = \alpha_o(t^{-1})f(t,1) \qquad (f\in V'_{\alpha_o}\ ,\ t\in k^{\times}) \quad .$$

C.Q.F.D.

REMARQUE. - La dimension de $V'^{\pm}_{\alpha_o}$ peut se calculer aussi par la proposition 7 du numéro 3, puisque l'on vient de prouver que V'_{α_o} est la restriction à G'_o de la représentation irréductible $V_{\alpha_o,1}$ de G_o , par exemple.

8. <u>La série principale de</u> G'_o .

Rappelons que l'on définit classiquement la serie principale de G'_o comme l'ensemble des types d'isomorphie des composantes irréductibles des représentations induites

$$(19)\qquad H' = \operatorname*{Ind}_{B'_o \uparrow G'_o} \alpha \qquad (\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)) ,$$

où, dans le membre de droite, on note encore α le caractère de B'_o donné par

$$(20)\qquad \alpha\begin{pmatrix} t & r \\ 0 & t \end{pmatrix}^{-1} = \alpha(t) \qquad (t \in k^\times,\ r \in k^+) .$$

Bien entendu, la description de la série principale de G'_o dans ces termes est très bien connue Nous signalons ici comme elle apparaît en termes de nos modèles.

Remarquons tout d'abord qu'en associant à chaque fonction sur G_o sa restriction à G'_o , on définit des G'_o - isomorphismes

$$(21)\qquad \operatorname*{Res}_{G_o \downarrow G'_o} H_{\alpha,\beta} \xrightarrow{\sim} H'_{\alpha\beta^{-1}} \qquad (\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)) ,$$

où $H_{\alpha,\beta} = \operatorname*{Ind}_{B_o \uparrow G_o} [\alpha,\beta]$ (cf. § 1, n° 1). Nous avons ainsi d'après la proposition 7 du paragraphe 1 (n° 3), la proposition 10 du numéro 5 et la proposition 11 du numéro 7, des G'_o - isomorphismes

$$(22)\qquad H'_\alpha \xrightarrow{\sim} M'_\alpha \xrightarrow{\sim} V'_\alpha \qquad (\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)) .$$

DEFINITION 6. - <u>Dans la suite, on note</u> π'_α <u>le type d'isomorphie de la représentation</u> H'_α $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$, π'^{q}_1 <u>celui de</u> M'^{q}_1 , <u>et</u> $\pi'^{\pm}_{\alpha_o}$ <u>celui de</u> $V'^{\pm}_{\alpha_o}$ (<u>On a posé ici</u>

$$M'^{q}_1 = \{f \ \ M'_1 \mid \sum_{k^2} f = 0\}) .$$

<u>On note enfin</u> 1 <u>le type de la représentation triviale de</u> G'_o .

Nous avons donc (cf. § 1, n° 3), pour $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$,

(23) $$\operatorname*{Res}_{G_o \downarrow G'_o} \pi_{\alpha,\beta} = \pi'_{\alpha\beta^{-1}} , \quad \operatorname*{Res}_{G_o \downarrow G'_o} \pi^q_\alpha = \pi'^q_1 , \quad \operatorname*{Res}_{G_o \downarrow G'_o} \pi^1_\alpha = 1 .$$

PROPOSITION 13. - <u>On a</u>

i) π'_α <u>est irréductible pour</u> $\alpha \neq \alpha^{-1}$, i.e. $\alpha \neq 1, \alpha_o$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$;

ii) π'^q_1 <u>est irréductible</u>;

iii) $\pi'^+_{\alpha_o}$ <u>et</u> $\pi'^-_{\alpha_o}$ <u>sont irréductibles</u> (<u>si</u> car $k \neq 2$) ;

iv) <u>le seul cas de coïncidence non-triviale entre les types d'isomorphie ci-dessus est</u>

$$\pi'_\alpha = \pi'_{\alpha^{-1}} \qquad (\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times),\ \alpha \neq \alpha^{-1}) .$$

<u>Démonstration</u>: On applique la proposition 7 du numéro 3 et le corollaire à la proposition 9 du numéro 4. On voit ainsi que, pour que π'_α $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times),$ $\alpha \neq 1)$ soit réductible, il faut (si car $k \neq 2$) que, par exemple, $\pi_{\alpha,1} = \alpha_o \pi_{\alpha,1}$, c'est-à-dire $\pi_{\alpha,1} = \pi_{\alpha_o\alpha,\alpha_o}$ (n° 4), d'où $\alpha = \alpha_o$. Cela montre i), qui est clair si car $k = 2$ (cf. prop. 6, n° 3). De même, ii) est clair si car $k = 2$ (cf. loc. cit.) et aussi si car $k \neq 2$, par exemple parce que $\dim \pi'^q_1$ est impaire, ou sinon comme ci-dessus. iii) résulte aussitôt de la proposition 7, ii) du numéro 3. Enfin si l'on a $\pi'_\alpha = \pi'_\beta$, on en tire (n° 3, prop. 8), par exemple, $\pi_{\beta,1} = \alpha' \pi_{\alpha,1}$, pour un $\alpha' \in \mathrm{Car}(k^\times)$, d'où (n° 4, cor. à la prop. 9) $\beta = \alpha$ ou $\beta = \alpha' = \alpha^{-1}$, comme voulu.

C.Q.F.D.

Nous avons ainsi

THEOREME 2. - <u>La série principale de</u> G'_o <u>est formé</u>

i) <u>des</u> $\frac{1}{2}(q-3)$ (<u>resp</u>. $\frac{1}{2}(q-2)$) <u>types d'isomorphie</u> π'_α $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times),\ \alpha^2 \neq 1)$

<u>de dimension</u> $q+1$, <u>si</u> k <u>est de caractéristique</u> $\neq 2$ (<u>resp</u>. $= 2$) ;

ii) <u>de la représentation de Steinberg</u> $St = \pi_1'^{q}$, <u>de dimension</u> q ;

iii) <u>des deux types</u> $\pi'^{+}_{\alpha_o}$ <u>et</u> $\pi'^{-}_{\alpha_o}$, <u>de dimension</u> $\frac{1}{2}(q+1)$, <u>si</u> k <u>est de caractéristique</u> $\neq 2$.

REMARQUE. - D'après la proposition 11 du numéro 7, il est clair que le type d'isomorphie de V'_α $(\alpha \in Car(k^\times))$ ne dépend pas du choix de e (n° 6, th. 1). Néanmoins , en calculant les caractères en $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on voit que le type d'isomorphie du $V^+_{\alpha_o}$ associé à e^{t_o} est celui du $V^-_{\alpha_o}$ associé à e et réciproquement (où l'on note t_o un non-carré quelconque de $k^\times$), si $car\ k \neq 2$.

9. <u>Restriction de</u> (V_N , ρ_N) <u>à</u> G'_o .

Considérons tout d'abord la décomposition de la représentation de Weil (V'_N , ρ'_N) associée au plan non-déployé (K, N) .

DEFINITION 7. - <u>Pour tout</u> $\omega \in Car(U)$ $(U = N^{-1}(1))$, <u>on pose</u>

$$V'_\omega = \{ f \in V'_N \mid f(ux) = \omega(u) f(x) \qquad \forall\, u \in U, \forall x \in K \}$$

<u>et, si</u> $\omega = \omega^{-1}$,

$$V'^{\pm}_\omega = \{ f \in V' \mid f(x^q) = \pm f(x) \qquad \forall\ x \in K \} .$$

On a alors les G'_o - décompositions,

$$(24) \qquad V'_N = \bigoplus_{\omega \in Car(U)} V'_\omega ,$$

$$(25) \qquad V'_\omega = V'^{+}_\omega \oplus V'^{-}_\omega \qquad\qquad (\omega \in Car(U), \omega = \omega^{-1}) ,$$

et en outre

(26) $$\dim V'_\omega = q-1+\delta_{\omega,1} \qquad (\omega \in \mathrm{Car}(U)) .$$

PROPOSITION 14. - On a

$$V_1'^+ = V_1' ,$$

et, si la caractéristique de k est différente de 2 ,

$$V'^+_{\omega_o} = \{ f \in V' \mid \mathrm{Supp}\ f \subset (K^\times)^2 \} ,$$

$$V'^-_{\omega_o} = \{ f \in V' \mid \mathrm{Supp}\ f \subset K^\times - (K^\times)^2 \} ,$$

d'où

$$\dim V'^\pm_{\omega_o} = \frac{1}{2}(q-1) ,$$

où l'on note ω_o le caractère non-trivial de U , de carré trivial.

Démonstration: Cela résulte aussitôt des relations $x^{q-1} \in U$ et

$$f(x^q) = \omega(x^{q-1})f(x) \qquad (f \in V_\omega , x \in K^\times, \omega \in \mathrm{Car}(U)) .$$

C.Q.F.D.

Rappelons que l'on a fixé un caractère non-trivial e de k^+ .

PROPOSITION 15. - En associant à chaque $f \in V_N$ sa restriction à $K \times \{e\}$, on définit un G'_o - épimorphisme p_N de (V_N , ρ_N) sur (V'_N , ρ'_N) qui induit par restriction à V_Λ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times))$ un G'_o - isomorphisme de V_Λ sur V_ω , où $\omega = \Lambda|_U$.

Démonstration: Cela résulte aussitôt des définitions et de la relation

$$f(ux,e) = \Lambda(u)f(x,e) \qquad (f \in V \ , x \in K, u \in U) \ ,$$

pour $\Lambda \in Car(K^{\times})$.

C.Q.F.D.

DEFINITION 8. - <u>Nous désignons dans la suite par</u> π'_{ω} (<u>resp</u>. $\pi'^{\pm}_{\omega_o}$) <u>le type d'isomorphie de</u> (V'_{ω}, ρ'_N) (<u>resp. de</u> $(V'^{\pm}_{\omega_o}, \rho'_N)$) , <u>pour</u> $\omega \in Car(U)$. <u>On appelle série discrète de</u> G'_o <u>l'ensemble de ces types d'isomorphie</u>, π'_1 <u>exclu</u>.

Nous avons donc (§4, n° 4, notations),

(27) $$\pi'_{\omega} = \operatorname*{Res}_{G_o \downarrow G'_o} \pi_{\Lambda} \qquad (\omega \in Car(U), \Lambda \in Car(K^{\times}), \Lambda|_U = \omega).$$

En particulier, on voit ainsi que π'_1 est la représentation de Steinberg de G'_o (§ 4, n° 2, prop. 3 et ce §, n° 8).

10. <u>La série discrète de</u> G'_o .

PROPOSITION 16. - <u>Soient</u> ω, ω' <u>deux caractères non-triviaux de</u> U . <u>On a</u>

i) π'_{ω} <u>est irréductible si</u> $\omega^2 \neq 1$;

ii) $\pi'^{+}_{\omega_o}$ <u>et</u> $\pi'^{+}_{\omega_o}$ <u>sont irréductibles, si</u> car $k \neq 2$;

iii) <u>le seul cas de coïncidence non-trivial entre ces types d'isomorphie est</u>

$$\pi'_{\omega} = \pi'_{\omega^{-1}} \qquad (\omega \in Car(U), \omega^2 \neq 1) \ .$$

<u>Démonstration</u>: Montrons i). Cela est trivial si car $k = 2$ (n° 3, prop. 6). Supposons car $k \neq 2$. Soit $\Lambda \in Car(K^{\times})$ tel que $\Lambda|_U = \omega$. Si π'_{ω} est réductible alors $\pi_{\Lambda} = \pi_{\alpha_o \Lambda}$ (n° 3, prop. 7 et n° 4, cor. à la prop. 9).

Cela signifie $\alpha_o\Lambda = \Lambda^q$, c'est-à-dire $\omega = \omega_o$, comme voulu. La proposition 7, ii) du numéro 3 montre que $\pi'^{\pm}_{\omega_o}$ et $\pi'^{-}_{\omega_o}$ sont irréductibles et non-isomorphes. Enfin, soit $\Lambda' \in \mathrm{Car}(K^{\times})$ tel que $\Lambda'_U = \omega'$ et supposons $\pi'_{\omega} = \pi'_{\omega'}$. Il en résulte que $\pi_{\Lambda'} = \alpha\pi_{\Lambda}$ pour un $\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times})$ convenable (n° 3, prop. 8) et par suite (n° 4, cor. à la prop. 9) $\Lambda' = \alpha\Lambda$ ou $\Lambda' = \alpha\Lambda^q$. On en conclut que $(\Lambda')^{q-1} = \Lambda^{q-1}$ ou $(\Lambda')^{q-1} = \Lambda^{1-q}$, c'est-à-dire $\omega' = \omega$ ou $\omega' = \omega^{-1}$, comme voulu.

C.Q.F.D.

Nous avons alors le

THEOREME 3. - <u>La série discrète de</u> G'_o <u>est formée</u>

i) <u>des</u> $\frac{1}{2}(q-1)$ (<u>resp</u>. $\frac{1}{2}q$) <u>types d'isomorphie</u> π'_{ω} $(\omega \in \mathrm{Car}(U), \omega^2 \neq 1)$ <u>de dimension</u> $q-1$, <u>si</u> car $k \neq 2$ (<u>resp. si</u> car $k = 2$) ;

ii) <u>des deux types d'isomorphie</u> $\pi'^{+}_{\omega_o}$ <u>et</u> $\pi'^{-}_{\omega_o}$ <u>de dimension</u> $\frac{1}{2}(q-1)$ <u>si</u> car $k \neq 2$.

THEOREME 4. - <u>La série principale et la série discrète de</u> G'_o <u>sont disjointes et épuisent toutes les représentations irréductibles de</u> G'_o .

<u>Démonstration</u>: Il est clair que ces deux séries sont disjointes, par exemple, parce qu'il en est ainsi pour la série principale et la série discrète de G_o et que l'application $\pi \mapsto \alpha\pi$ $(\pi \in \bar{I}(G_o), \alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$ les laisse stables (n° 3, prop. 8; n° 4, cor. à la prop. 9). La seconde assertion du théorème est aussi claire, puisque nos deux séries sont obtenues par restriction de toutes les représentations irréductibles de G_o .

C.Q.F.D.

A partir des modèles donnés dans ce paragraphe, on calcule sans difficulté les caractères de G'_o , qui sont d'ailleurs très bien connus. Nous les donnons dans les tables 2 et 2 bis. On y note χ_1 le caractère de la représentation de Steinberg $\pi_1'^q$, et χ_α (resp. χ_ω) le caractère de π'_α (resp. π'_ω) , pour $\alpha \in Car(k^\times)$ (resp. $\omega \in Car(U) - \{1\}$) .

§ 6. <u>Compléments sur les représentations de</u> G_o .

Nous démontrons dans ce paragraphe un certain nombre de propriétés des représentations de G_o dont nous nous servirons dans les chapitres IV, V et VI.

1. <u>Restriction à certains sous-groupes</u>.

DEFINITION 1. - <u>Posons</u>

$$D_1 = \{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in k^\times\} ,$$

$$T'_o = \{m(c) \mid c \in K^\times\} ,$$

<u>où l'on note</u> $m(c)$ $(c \in K^\times)$ <u>la matrice de</u> γ_c (<u>multiplication par</u> c <u>dans</u> K) <u>par rapport à une</u> k - <u>base fixée du</u> k - <u>plan</u> K .

Pour les notations H_o , H'_o , U_o , cf. § 2, n° 1, déf. 1. Rappelons enfin que l'on a

$$B_o = H_o H'_o U_o \quad , \qquad T_o = H_o H'_o .$$

DEFINITION 2. - <u>Soit</u> (V, π) <u>une représentation de</u> G_o . <u>Alors</u>:

i) <u>Pour</u> $\alpha \in Car(k^\times)$, <u>on note</u> V_α (<u>resp</u>. V'_α) <u>la composante isotypi-</u>

que de type α de la restriction de π à D_1 (resp. H'_o).

ii) Pour $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$, on note $V_{[\alpha,\beta]}$ (resp. $V_{(\alpha,\beta)}$) la composante isotypique de type $[\alpha,\beta]$ (cf. § 1, n° 1, déf. 1) (resp. de type (α,β) (cf. § 1, n° 1, (9))) de la restriction de π à B_o (resp. T_o) .

iii) Pour $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$, on note V^Λ la composante isotypique de type Λ de la restriction de π à T'_o .

iv) Pour $\psi \in \mathrm{Car}(k^+)$, on note $_\psi V$ la composante isotypique de type ψ de la restriction de π à U_o . On pose $_1V_\alpha = {_1V} \cap V_\alpha$ (resp. $_1V'_\alpha$) pour $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ (cf. i)).

v) Notons σ_α $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$ la représentation irréductible de B_o , d'espace $\mathbb{C}^X$, définie par

$$[\sigma_\alpha(\begin{smallmatrix} t & s \\ 0 & tr \end{smallmatrix})f](\psi) = \alpha(t)\psi(r^{-1}s)f(\psi^{r^{-1}})$$

pour $f \in \mathbb{C}^X$, $\psi \in X$, $r, t \in k^\times$, s k^+ . On désigne alors par $V(\sigma_\alpha)$ la composante isotypique de type σ_α de la restriction de π à B_o .

REMARQUE. - On vérifie aussitôt (en faisant la somme des carrés des dimensions correspodantes) que les représentations, irréductibles et deux-à-deux non-isomorphes, $[\alpha,\beta]$ $(\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times))$ et σ_α $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$ épuisent toutes les représentations irréductibles du groupe B_o .

Rappelons que l'on note

$\pi_{\alpha,\beta}$ $(\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times),\ \alpha \neq \beta)$, π^i_α $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times);\ i = q,1)$, π_Λ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times))$ les représentations irréductibles de G_o (cf. § 4, notations), en remplaçant la lettre π par la lettre V pour désigner l'espace correspondant, dans chaque cas.

On détermine sans difficulté les dimensions des composantes isotypiques introduites dans la définition 1, pour toutes les représentations irréductibles de G_o. En fait, les composantes isotypiques elles-mêmes sont évidentes (sauf celles suivant T'_o) si l'on prend les modèles de Weil réduits (§ 3, n° 3 et § 4, n° 4). Pour T'_o, les dimensions correspondantes se déterminent par un calcul facile de caractères. Nous donnons ces résultats dans la table 3, avec les notations ci-dessus.

2. Somme d'une représentation irréductible de G_o sur les matrices symétriques.

Nous calculons dans ce numéro certaines sommes d'opérateurs $\pi(h)$ ($h \in G_o$) dans une représentation irréductible (V, π) de G_o.

LEMME 1. - *Soit G un groupe fini. Soient ρ et ρ' deux représentations irréductibles isomorphes de G dans un même espace V. Soit $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Posons*

$$\bar{A} = \sum_{g \in G} \rho'(g) A \rho(g)^{-1} .$$

Alors, si Φ est un isomorphisme de (V, ρ') sur (V, ρ), on a

$$\bar{A} = \frac{|G|}{\dim V} \mathrm{Tr}(A\Phi) \Phi^{-1} .$$

Démonstration: Comme $\bar{A} \in \mathrm{Hom}_G(\rho, \rho')$, on a $\bar{A} = \lambda \Phi^{-1}$ pour une constante convenable $\lambda \in \mathbb{C}$. Mais alors

$$\lambda \, \mathrm{Id} = \Phi \bar{A} = \sum_{g \in G} \rho(g) \Phi A \rho(g)^{-1}$$

d'où, en prenant les traces, la valeur annoncée de λ.

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Ce lemme est surtout utile pour calculer des opérateurs $\bar{A}$, comme ci-dessus, quand tout isomorphisme de ρ' sur ρ est à trace nulle.

LEMME 2. - Posons

$$A = M_2(k) \quad , \qquad A^s = \{ a \in A \mid {}^t a = a \} \ .$$

Considérons l'action de $A^\times = G_o$ dans $A^\times \cap A^s$ donnée par

$$g.a = ga{}^t g \qquad\qquad (g \in A^\times,\ a \in A^s) \ .$$

On a alors

$$A^\times \cap A^s = \mathrm{Orb}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cup \mathrm{Orb}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2a_o \end{pmatrix}$$

où a_o désigne un non-carré fixé, si car $k \neq 2$, et

$$A^\times \cap A^s = \mathrm{Orb}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cup \mathrm{Orb}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si car $k = 2$. De plus

$$\mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = O_+(2) = O(xy) \quad , \qquad \mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2a_o \end{pmatrix} = O_-(2) = O(N)$$

(cf. § 3, n° 1 et § 4, n° 1) si car $k \neq 2$ et

$$\mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = SL(2,k) \quad , \qquad \mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in k,\ a^2+b^2 = 1 \right\}$$

si car $k = 2$. En particulier, on a

$$\left| \mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = 2(q-1) \quad , \qquad \left| \mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2a_o \end{pmatrix} \right| = 2(q+1)$$

si car $k \neq 2$ et

$$\left| \mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = (q^2-1)q \quad , \qquad \left| \mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = q$$

si car $k = 2$.

Démonstration: Cela est une conséquence immédiate de la classification des formes bilinéaires symétriques de rang 2 sur k (cf. § 3, n° 1 et § 4, n° 1, pour ce qui concerne les groupes orthogonaux associés en caractéristique différente de 2).

C.Q.F.D.

LEMME 3. - Soit π une représentation de G_o telle que π soit triviale sur les matrices scalaires. On a $\pi \simeq \hat{\pi}$, où l'on pose

$$\hat{\pi}(g) = \pi({}^t g^{-1}) \qquad (g \in G) \; .$$

Si la caractéristique de k est différente de 2 , notons α_o le caractère non-trivial de $k^\times$ de carré trivial. La représentation π est isomorphe à l'une des suivantes

$$\pi^1_{\alpha_o} \;,\; \pi^q_{\alpha_o} \;,\; \pi_{\alpha;\alpha^{-1}} \;\; (\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)) \;,\; \pi_\Lambda \;\; (\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times), \Lambda^{q+1} = 1).$$

Notons alors $\varepsilon(\pi)$ la valeur $\alpha_o(-1)$ (resp. $\alpha(-1)$; resp. moins la valeur constante de Λ sur la k - droite de K formée des éléments de trace nulle) dans les deux premiers (resp. troisième; resp. quatrième) cas. Posons

$$S(\pi) = \sum_{g \in A^\times \cap A^s} \pi(g) \; . \tag{1}$$

Alors, $S(\pi) \in \mathrm{Hom}(\hat{\pi},\pi)$ et l'on a

$$S(\pi) = (q-1)q\,\varepsilon(\pi)\pi(w) \;,$$

avec $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration: Il est clair que $S(\pi) \in \mathrm{Hom}(\hat{\pi},\pi)$. Il en est de même de $\pi(w)$ à cause de la relation $wgw^{-1} = (\det g)\,{}^t g^{-1}$ $(g \in G_o)$. Il résulte aussitôt du lemme 2 et du lemme 1 appliqué à $\rho = \pi$, $\rho' = \hat{\pi}$ et $\Phi = \pi(w)$, que l'on a, en notant χ le caractère de π ,

$$(2) \qquad S(\pi) = \frac{|G_o|}{\dim \pi}\left[\frac{1}{2}(q-1)^{-1}\chi\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(q+1)^{-1}\chi(m(c_o))\right]\pi(w)$$

si la caractéristique de k est différente de 2 , où l'on note c_o une racine carrée de a_o (cf. lemme 2) (et donc $Tr(c_o) = 0$) et où l'on désigne par $m(c_o)$ la matrice de la multiplication par c_o dans K , par rapport à la k - base $\{1, c_o\}$ de K ; et

$$(3) \qquad S(\pi) = \left[(q-1) + (\dim \pi)^{-1}(q-1)^2(q+1)\chi\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\pi(w)$$

si la caractéristique de k est 2 . Le lemme résulte alors sans difficulté de (2) et (3) à l'aide de la table 1.

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Il est clair que la somme $S(\pi)$ serait nulle si π était une représentation irréductible de G_o ne satisfaisant pas les hypothèses du lemme.

3. - <u>Vecteurs</u> $SU(2,K)$ - <u>invariants dans la série discrète de</u> $GL(2,K)$.

Rappelons que l'on note K l'unique extension quadratique de k . Pour h $M_2(K)$ notons h^* la transposé conjuguée ${}^t\bar{h}$ de h . On pose

$$U(2,K) = \{h \in GL(2,K) \mid hh^* = 1\} ,$$

$$SU(2,K) = U(2,K) \cap SL(2,K)$$

(cf. ch. V, § 1, n° 2).

PROPOSITION 1. - <u>Les sous-groupes</u> $SL(2,k)$ <u>et</u> $SU(2,K)$ <u>de</u> $GL(2,K)$ <u>n'admettent de vecteur invariant non-nul dans aucune représentation de la série discrète de</u> $GL(2,K)$.

<u>Démonstration</u>: Comme les sous-groupes $SL(2,k)$ et $SU(2,K)$ de $GL(2,K)$ sont conjugués l'un de l'autre (ch. V, § 1, n° 2, prop. 4) il suffit de démontrer la proposition pour $SL(2,k)$. On a alors à démontrer que la multiplicité de la représentation triviale de $SL(2,k)$ dans la restriction de toute représentation π de la série discrète de $GL(2,K)$ à $SL(2,k)$, est nulle. Cela revient à démontrer que la somme des valeurs du caractère de π sur $SL(2,k)$ est nulle, ce qui est clair d'après la table 1, puisque

$$\left|\mathrm{Classe}\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}\right| = q^2-1 = \dim \pi \qquad (a \in K^\times) .$$

C.Q.F.D.

TABLE 1. Les caractères de $G_o = GL(2,k)$

	Caractère	$\chi_\alpha^1 = \alpha \circ \det$	χ_α^q	$\chi_{\alpha,\beta}$	χ_Λ
Représentant	Paramétrisation	$\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$	$\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$	$\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$ $\alpha \neq \beta$ mod. $(\alpha,\beta) \sim (\beta,\alpha)$	$\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$ mod. $\Lambda \sim \Lambda^q$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$a \in k^\times$	$\alpha^2(a)$	$q\alpha^2(a)$	$(q+1)\alpha\beta(a)$	$(q-1)\Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$a \in k^\times$	$\alpha^2(a)$	0	$\alpha\beta(a)$	$-\Lambda(a)$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$	$a,d \in k^\times$ $a \neq d$ mod. $(a,d) \sim (d,a)$	$\alpha(ad)$	$\alpha(ad)$	$\alpha(a)\beta(d) + \alpha(d)\beta(a)$	0
$\begin{pmatrix} 0 & N(x) \\ -1 & \mathrm{Tr}(x) \end{pmatrix}$	$x \in K^\times - k^\times$ (mod. $x \sim x^q$)	$\alpha(N(x))$	$-\alpha(N(x))$	0	$-\Lambda(x) - \Lambda^q(x)$

TABLE 2. Les caractères de $G'_o = SL(2,k)$ en caractéristique 2

	Caractère	$\chi_o = 1$	χ_1	χ_α	χ_ω
Représentant	Paramétrisation			$\alpha \in Car(k^\times) - \{1\}$ mod. $\alpha \sim \alpha^{-1}$	$\omega \in Car(U) - \{1\}$ mod. $\omega \sim \omega^{-1}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		1	q	q+1	q-1
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		1	0	1	-1
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$	$a \in k^\times - \{1\}$ mod. $a \sim a^{-1}$	1	1	$\alpha(a) + \alpha^{-1}(a)$	0
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Tr(u) \end{pmatrix}$	$u \in U - \{1\}$ (mod. $u \sim u^{-1}$)	1	-1	0	$-\omega(u) - \omega^{-1}(u)$

TABLE 2^{bis}. Les caractères de $G'_o = SL(2,k)$ en caractéristique $\neq 2$

	Caractère	$\chi_o = 1$	χ_1	χ_α	$\chi^{\pm}_{\alpha_o}$	χ_ω	$\chi^{\pm}_{\omega_o}$
Représentant	Paramétrisation			$\alpha \in Car(k^\times) - \{1,\alpha_o\}$ mod. $\alpha \sim \alpha^{-1}$	-	$\omega \in Car(U) - \{1,\omega_o\}$ mod. $\omega \sim \omega^{-1}$	
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$a = \pm 1$	1	q	$(q+1)\alpha(a)$	$\frac{1}{2}(q+1)\alpha_o(a)$	$(q-1)\omega(a)$	$\frac{1}{2}(q-1)\omega_o(a)$
$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$	$a = \pm 1$ $b \in \{1, a_o\}$	1	0	$\alpha(a)$	$\frac{1}{2}[\alpha_o(a) + \alpha_o(b)\sigma(e)]$	$-\omega(a)$	$\frac{1}{2}[-\omega_o(a) + \alpha_o(b)\sigma(e)]$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$	$a \in k^\times - \{1,-1\}$ mod. $a \sim a^{-1}$	1	1	$\alpha(a) + \alpha^{-1}(a)$	$\alpha_o(a)$	0	0
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Tru \end{pmatrix}$	$u \in U - \{1,-1\}$ (mod. $u \sim u^{-1}$)	1	-1	0	0	$-\omega(u) - \omega^{-1}(u)$	$-\omega_o(u)$

Notations : On pose, de manière générale, $\sigma(\varphi) = \sum_{t \in k^+} \varphi(t^2)$, pour $\varphi \in Car(k^+)$ (on a alors, $\sigma(\varphi^b) = \alpha_o(b)\sigma(\varphi)$, pour $b \in k^\times$).

TABLE 3. Dimensions des composantes isotypiques de restrictions des représentations de G_o

		représentation	$\pi_{\alpha,\beta}$	π_α^q	π_α^1	π_Λ
sous-groupe	repres.	paramètres	$\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$ $\alpha \neq \beta$	$\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$	$\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$	$\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$ $\Lambda \neq \Lambda^q$
D_1	γ	$\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$	$1+\delta_{\gamma,\alpha}+\delta_{\gamma,\beta}$	$1+\delta_{\gamma,\alpha}$	$\delta_{\gamma,\alpha}$	1
T_o	(α',β')	$\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$	$\delta_{\alpha'\beta',\alpha\beta}[1+\delta_{\beta',\alpha}+\delta_{\beta',\beta}]$	$\delta_{\alpha'\beta',\alpha^2}[1+\delta_{\beta',\alpha}]$	$\delta_{\alpha',\alpha}\,\delta_{\beta',\alpha}$	$\delta_{\alpha'\beta',\Lambda^{q+1}}$
U_o	ψ	$\psi \in \mathrm{Car}(k^+)$	$1+\delta_{\psi,1}$	1	$\delta_{\psi,1}$	0
$U_o \times D_1$	$1 \otimes \gamma$	$\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$	$\delta_{\gamma+\alpha}+\delta_{\gamma,\beta}$	$\delta_{\gamma,\alpha}$	$\delta_{\gamma,\alpha}$	0
B_o	$[\alpha',\beta']$	$\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$	$\delta_{\{\alpha',\beta'\},\{\alpha,\beta\}}$	$\delta_{\alpha',\alpha}\,\delta_{\beta',\alpha}$	$\delta_{\alpha',\alpha}\,\delta_{\beta',\alpha}$	0
B_o	σ_γ	$\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$	$\delta_{\gamma,\alpha\beta}$	δ_{γ,α^2}	0	$\delta_{\gamma,\Lambda^{q+1}}$
T'_o	Φ	$\Phi \in \mathrm{Car}(K^\times), \Phi \neq \Phi^q$	$\delta_{\Phi^{q+1},\alpha\beta}$	$\delta_{\Phi^{q+1},\alpha^2}$	0	$1-\delta_{\Phi,\Lambda}-\delta_{\Phi,\Lambda^q}$

Notations : Voir §6 et §4, n°3, convention (8).

CHAPITRE II

Les représentations de G induites d'un sous-groupe parabolique propre.

Dans tout ce chapitre, on désigne par k un corps fini à q éléments, de caractéristique quelconque et par G le groupe de similitudes symplectiques $GSp(4,k)$ en quatre variables, sur k, que nous réalisons comme le groupe des similitudes d'un espace symplectique non-dégénéré $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, de dimension 4 sur k. On note m_g le multiplicateur de la similitude $g \in G$.

§ 1. Préliminaires et généralités.

1. Les sous-groupes paraboliques de G.

Dans la suite, on aura besoin de faire agir le groupe G à droite dans E. Pour cela, nous nous donnons un anti-automorphisme involutif $g \longmapsto g$ de G et nous posons

$$vg = g^*(v) \qquad (v \in E,\ g \in G) .$$

Choisissons une base $b_o = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E, telle que $\langle e_1, e_3\rangle = \langle e_2, e_4\rangle = 1$. Plutôt que de prendre $g^* = g^{-1}$ $(g \in G)$, on posera ici $g^* = {}^t g$ $(g \in G)$, où l'on note ${}^t g$ la transposée de $g \in G$, par rapport à la forme bilinéaire $(u,v) \longmapsto (u|v)$ sur E telle que $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$. Si l'on note $[g]$ (resp. $[u]$) la matrice de $g \in G$ (resp. $u \in E$) par rapport à b_o, on aura alors

$$[vg] = [v][g] \qquad (v \in E,\ g \in G) .$$

Dans tout ce chapitre G n'agira dans E que par l'action à droite $(v,g)\longmapsto vg$ $(v\in E,\ g\in G)$ que nous venons d'introduire.

On peut définir les sous-groupes paraboliques de G comme les stabilisateurs, dans G, des drapeaux totalement isotropes de E. Nous avons quatre classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques de G, correspondant aux quatre types de drapeaux totalement isotropes, à savoir

$\underline{0}$,

$\underline{0}\subset \ell$,

$\underline{0}\subset P$,

$\underline{0}\subset \ell\subset P$,

où ℓ (resp. P) désigne une droite (resp. un plan totalement isotrope) de E. Nous choisissons maintenant un représentant dans chaque classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques propres. Notons d_i la droite de E engendrée par e_i et P_{ij} le plan (totalement isotrope si $i\not\equiv j \mod 2$) de E engendré par e_i et e_j $(1\leqslant i,j\leqslant 4,\ i\neq j)$. On pose

(1) $$P_1 = \mathrm{Stab}_G(\underline{0}\subset d_1) ,$$

(2) $$P_2 = \mathrm{Stab}_G(\underline{0}\subset P_{12}) ,$$

(3) $$B = \mathrm{Stab}_G(\underline{0}\subset d_1\subset P_{12}) ;$$

on a alors $B = P_1\cap P_2$ et des décompositions de Levi

(4) $$P_1 = L_1U_1 , \quad P_2 = L_2U_2 , \quad B = L_oU_o ,$$

où le radical unipotent U_1 de P_1 est formé des $g\in P_1$ tels que g soit l'identité sur d_1 , sur $d_1^{\perp}/d_1$ et sur $E/d_1^{\perp}$; le radical unipotent U_2 de P_2 est formé des $g \in P_2$ tels que g soit l'identité sur P_{12} et sur E/P_{12} ; le radical unipotent U_o de B est formé des $g \in B$ tels que g soit l'identité sur d_1 , sur P_{12}/d_1 , sur $d_1^{\perp}/P_{12}$ et sur $E/d_1^{\perp}$; les sous-groupes de Lévi L_1 , L_2 et L_o sont choisis comme suit

(5) $$L_1 = P_1 \cap \mathrm{Stab}_G(d_3) \cap \mathrm{Stab}_G(P_{24}) \quad ,$$

(6) $$L_2 = P_2 \cap \mathrm{Stab}_G(P_{34}) \quad ,$$

(7) $$L_o = \bigcap_{i=1}^{4} \mathrm{Stab}_G(d_i) \quad .$$

Nous avons ainsi

(8) $$L_1 \simeq k^{\times} \times GL(2,k) \quad ,$$

(9) $$L_2 \simeq GL(2,k) \times k^{\times} \quad ,$$

(10) $$L_o \simeq k^{\times} \times k^{\times} \times k^{\times} \quad ,$$

De manière plus précise, on a

PROPOSITION 1. - i) <u>On définit un épimorphisme</u> φ_1 <u>de</u> P_1 <u>sur</u> $k^{\times} \times GL(2,k)$ <u>en associant à chaque</u> $g \in P_1$ <u>le couple</u> $(t_g , h_g) \in k^{\times} \times GL(2,k)$, <u>où</u> t_g <u>désigne le rapport de l'homothétie</u> $g|_{d_1}$ <u>de</u> d_1 <u>et où</u> h_g <u>désigne la matrice, par rapport à la base</u> (e_2+d_1, e_4+d_1) , <u>de l'automorphisme linéaire</u> $\bar{g} = \bar{g}_{d_1}$ <u>de</u> $d_1^{\perp}/d_1$ <u>déduit de</u> g <u>par passage aux quotients. On a</u> $\mathrm{Ker}\,\varphi_1 = U_1$ <u>et</u> φ_1 <u>induit un isomorphisme du sous-groupe de Lévi</u> L_1 <u>sur</u> $k^{\times} \times GL(2,k)$.

ii) <u>On définit un épimorphisme</u> φ_2 <u>de</u> P_2 <u>sur</u> $GL(2,k) \times k^{\times}$, <u>en faisant correspondre à chaque</u> $g \in P_2$ <u>le couple</u> (h_g , m_g)

où h_g dénote la matrice, par rapport à la base (e_1, e_2) , de l'automorphisme linéaire $g|_{P_{12}}$ du plan P_{12} (et m_g désigne le multiplicateur de g). On a $\operatorname{Ker} \varphi_2 = U_2$ et l'épimorphisme φ_2 induit, par restriction un isomorphisme du sous-groupe de Lévi L_2 de P_2 sur $GL(2,k) \times k^\times$.

iii) On définit un épimorphisme φ de B sur $k^\times \times k^\times \times k^\times$, en associant à chaque $g \in B$ le couple (b_g , m_g) , où b_g désigne la diagonale de la matrice de $g|_{P_{12}}$ par rapport à la base (e_1, e_2) de P_{12} . On a $\operatorname{Ker} \varphi = U_o$ et φ induit par restriction un isomorphisme du sous-groupe de Lévi L_o de B sur $k^\times \times k^\times \times k^\times$.

Le démonstration de cette proposition est immédiate.

2. La classification des représentations de G .

Soit P un sous-groupe parabolique quelconque de G , U son radical unipotent et $\varphi : P \longrightarrow L$ le conoyau de l'injection canonique de U dans P . On note $\overline{I}_P(G)$ (resp. $°\overline{I}_P(G)$) l'ensemble des types d'isomorphie des composantes irréductibles des représentations induites de la forme $\operatorname{Ind}_{P \uparrow G} \sigma \circ \varphi$ où σ parcourt l'ensemble des représentations irréductibles (resp. σ appartient à la série discrète) de L . Notons simplement $\overline{I}(G)$ (resp. $°\overline{I}(G)$) l'ensemble de types d'isomorphie des représentations irréductibles (resp. de la série discrète) de G . On a alors, d'après la classification générale de [14] (P. C-19), la décomposition

$$\overline{I}(G) = °\overline{I}_B(G) \cup °\overline{I}_{P_1}(G) \cup °\overline{I}_{P_2}(G) \cup °\overline{I}(G) \tag{11}$$

(réunion disjointe) ou encore

$$\overline{I}(G) = \overline{I}_{P_2}(G) \cup °\overline{I}_{P_1}(G) \cup °\overline{I}(G) \tag{12}$$

(réunion disjointe), puisque la série principale et la série discrète épuisent toutes les représentations irréductibles de G_o .

Dans la suite de ce chapitre, nous construirons explicitement $\overline{I}_{P_2}(G)$ et $°\overline{I}_{P_1}(G)$.

De manière générale, nous appelerons $°\overline{I}_P(G)$ la série de représentations (irréductibles) de G , associée à P . La série de représentations de G associée à B , s'appelle classiquement la série principale de G .

3. <u>Interprétation en termes de</u> G - <u>fibrations principales</u>.

Soient P un sous-groupe parabolique de G et $\varphi : P \longrightarrow L$ le conoyau de son radical unipotent U .

Considérons la fibration principale discrète $\xi_P = (G, pr, P\backslash G, P)$ associée à P , d'espace total G , de base $P\backslash G$, de projection pr donnée par

$$pr(g) = Pg \qquad\qquad (g \in G)$$

et dont l'action, à gauche, du groupe structural P , est donnée par

$$p.g = pg \qquad\qquad (p \in P,\ g \in G) \quad .$$

Le groupe G agit à droite sur ξ_P par

$$g'.g = g'g \qquad\qquad (g', g \in G) \quad ,$$

$$(Pg').g = Pg'g \qquad\qquad (g', g \in G) \quad .$$

Soit (H, σ) une représentation de L . Considérons la représentation $(H, \sigma\circ\varphi)$ de P comme P - fibré vectoriel discret, à gauche, sur un point. Nous avons alors, par définition si l'on veut,

$$(13) \qquad \operatorname*{Ind}_{P\uparrow G} \sigma\circ\varphi = \mathrm{Hom}_P(\xi_P\ ,\ (H, \sigma\circ\varphi)) \quad ,$$

où l'espace de droite est muni de l'action naturelle τ de G déduite de celle de G dans ξ_P , c'est-à-dire

$$(14) \qquad [\tau(g)f](g') = f(g'g)$$

quels que soient $g,g' \in G$ et le morphisme P - équivariant f de ξ_P dans H . Autrement dit, on a

$$(15) \qquad \operatorname*{Ind}_{P\uparrow G} \sigma\circ\varphi = \mathrm{Hom}\ (\xi_P\ ,\ H) \quad ;$$

en particulier, l'espace de la représentation induite peut s'interpréter comme le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel de tous les morphismes compatibles à φ de la fibration principale ξ_P , de groupe structural P , dans le L - fibré vectoriel complexe H .

Or considérons la G - fibration principale $\varphi(\xi_P)$, de groupe structural L , déduite de ξ_P , par l'épimorphisme φ (cf. [3]). On a un G - isomorphisme canonique

$$(16) \qquad \mathrm{Hom}_\varphi(\xi_P\ ,\ H) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_L(\varphi(\xi), H) \quad ,$$

d'où l'isomorphisme de $\mathbb{C}[G]$ - modules

$$(17) \qquad \operatorname*{Ind}_{P\uparrow G} \sigma\circ\varphi \simeq \mathrm{Hom}_L(\varphi(\xi_P), H) \quad .$$

Dans les paragraphes suivants, nous construirons, de manière naturelle, deux G - fibrations principales de groupes structuraux isomorphes à L_1 et L_2 qui seront des réalisations de $\varphi_1(\xi_{P_1})$ et $\varphi_2(\xi_{P_2})$ respectivement; c'est ainsi que nous construirons $°\overline{I}_{P_1}(G)$ et $\overline{I}_{P_2}(G)$.

Pour être complets, nous rappelons ci-dessous la réalisation standard de la fibration principale désuite d'une autre par changement de groupe structural (cf. [3]).

PROPOSITION 2. - *Soit* M *un groupe et soit* $\xi = (\underline{E},pr,\underline{B},N)$ *une* M - *fibration principale discrète (à droite), de groupe structural* N *(agissant à gauche). Soit* φ *un homomorphisme de* N *dans un groupe* R .

La M - *fibration principale* $\varphi(\xi)$, *déduite de* ξ *par* φ , *munie du* M - *morphisme canonique* ν *de* ξ *dans* $\varphi(\xi)$, *peut être réalisée de la manière suivante. On prend la base de* $\varphi(\xi)$ *égale à* $\underline{B}$, *son espace total égal à l'ensemble quotient* $\underline{E}\times^{N}R$ *de* $\underline{E}\times R$ *par la relation d'équivalence définie par l'action*

$$(x,r)\longmapsto (nx,r\varphi(n)^{-1}) \qquad (x\in\underline{E},\ r\in R,\ n\in N)$$

de N , *et la projection* pr *est donnée par*

$$pr[x,r] = pr(x) \qquad (x\in\underline{E},\ r\in R)\ ,$$

où $[x,r]$ *désigne la classe de* (x,r) *dans* $\underline{E}\times^{N}R$. *On définit l'action, à gauche, de* R *dans* $\underline{E}\times^{N}R$ *par*

$$s[x,r] = [x,sr] \qquad (x\in\underline{E},\ r,s\in R)$$

et celle, à droite, de M , *par*

$$[x,r]m = [xm,r] \qquad (x\in\underline{E},\ m\in M,\ r\in R)\ .$$

Enfin, on pose $\nu = \mathrm{Id}$ *sur* $\underline{B}$ *et*

$$\nu(x) = [x,1] \qquad (x \in \underline{E}) \quad .$$

Démonstration: On montre sans peine que le modèle donné ci-dessus pour $(\varphi(\xi),\nu)$ vérifie la propriètè universelle dont $(\varphi(\xi),\nu)$ est, par définition la (seule) solution (à un isomorphisme unique près), à savoir:

Pour toute M - fibration principale η , de groupe structural R et tout M - morphisme F de ξ dans η , compatible avec φ , il existe un et un seul M - morphisme $\overline{F}$ de $\varphi(\xi)$ dans η tel que $\overline{F}\circ\nu = F$.

C.Q.F.D.

§ 2. Série de représentations de G associée à P_2 .

1. Définitions et préliminaires.

Notons $\mathbb{P}$ l'ensemble de tous les plans totalement isotropes de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. Notons $\mathbb{B}$ l'ensemble de toutes les bases des plans totalement isotropes de E .

Si $b \in \mathbb{B}$, on notera $P(b)$ le plan de E engendré par b . Si $P \in \mathbb{P}$, on désignera par $\mathbb{B}(P)$ l'ensemble de toutes les bases de P . On notera toujours b_1 (resp. b_2) le premier (resp. second) vecteur de la base $b \in \mathbb{B}$.

Rappelons que nous nous sommes donnés une action à droite $(v,g) \mapsto vg$ $(v \in E,\ g \in G)$ de G dans E (cf. § 1, n° 1). Le groupe G agit alors de manière naturelle dans $\mathbb{B}$ et dans $\mathbb{P}$ par

$$bg = (b_1g, b_2g) \qquad (b \in \mathbb{B},\ g \in G) \quad ,$$

$$Pg = \{ vg \mid v \in P \} \qquad (P \in \mathbb{P},\ g \in G) \ .$$

Ces actions sont transitives.

Le groupe $GL(2,k)$, que nous noterons G_o dans la suite, agit , à gauche, dans $\mathbb{B}(P)$, pour tout $P \in \mathbb{P}$, par

$$(1) \qquad hb = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \left(b \in \mathbb{B},\ h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G_o\right) \ .$$

Cette action est, évidemment, libre et transitive.

DEFINITION 1. - <u>On appele</u> G - <u>fibration principale canonique au-dessus de</u> $\mathbb{P}$ <u>et l'on note</u> $\xi_{\mathbb{P}}$, <u>la</u> G - <u>fibration principale</u> $(\mathbb{B}\times k^{\times}, pr, \mathbb{P}, G_o \times k^{\times})$ <u>d'espace total</u> $\mathbb{B}\times k^{\times}$, <u>base</u> $\mathbb{P}$ <u>et projection</u> pr <u>donnée par</u>

$$(2) \qquad pr(b,t) = P(b) \qquad (b \in \mathbb{B}\ ,\ t \in k^{\times}) \ ,$$

<u>dont l'action du groupe structural</u> $G_o \times k^{\times}$ <u>est définie par</u>

$$(3) \qquad (h,s).(b,t) = (hb, s^{-1}t) \qquad (h \in G_o\ ,\ s,t \in k\ ,\ b \in \mathbb{B})$$

<u>et celle de</u> G <u>par</u>

$$(4) \qquad (b,t).g = (bg,\ tm_g^{-1}) \qquad (b \in \mathbb{B}\ ,\ t \in k^{\times},\ g \in G)$$

<u>et</u>

$$P.g = Pg \qquad (P \in \mathbb{P}\ ,\ g \in G) \ .$$

DEFINITION 2. - <u>Soient</u> $\gamma \in Car(k\ )$ <u>et</u> (H,π) <u>une représentation de</u> G_o . <u>On appelle représentation naturelle de</u> G <u>associée à</u> (π,γ) <u>et à</u> $\xi_{\mathbb{P}}$ <u>et l'on note</u> $(M(\pi,\gamma),\tau)$ <u>le</u> $\mathbb{C}[G]$ - <u>module</u>

$$\mathrm{Hom}_{G_o \times k^\times}(\xi_{\mathbb{P}}\ ,\ (H,\ \pi\otimes\gamma))$$

REMARQUES. -

i) En d'autres termes, l'espace $M(\pi,\gamma)$ est formé de toutes les fonctions f de $\mathbb{B}\times k^\times$ dans H telles que

(5) $$f(hb,s^{-1}t) = \gamma(s)\pi(h)[f(b,t)] \qquad (h\in G_o\ ,\ s,t\in k^\times,\ b\in \mathbb{B})$$

et l'action τ de G dans $M(\pi,\gamma)$ est l'action naturelle donnée par

(6) $$[\tau(g)f](b,t) = f(bg,tm_g^{-1}) \qquad (g\in G,\ f\in M(\pi,\gamma),\ b\in \mathbb{B}\ ,\ t\in k^\times)\ .$$

ii) On a

(7) $$\dim M(\pi,\gamma) = (q+1)(q^2+1)\dim \pi\ .$$

En effet, on a $\dim M(\pi,\gamma) = |\mathbb{P}|\dim \pi$, et d'autre part, comme l'on a clairement

$$|\mathbb{B}| = (q^4-1)(q^3-q)\quad ,$$

et que

$$|\mathbb{B}| = |G_o||\mathbb{P}|\quad ,$$

il s'ensuit que

(8) $$|\mathbb{P}| = (q+1)(q^2+1)\quad .$$

Nous allons identifier maintenant nos représentations $M(\pi,\gamma)$ en tant que représentations induites.

PROPOSITION 1. - <u>La</u> G - <u>fibration principale</u> $\xi_{\mathbb{P}}$, <u>munie du</u> G - <u>épimorphisme</u> ν <u>de</u> ξ_{P_2} <u>sur</u> $\xi_{\mathbb{P}}$ <u>défini par</u>

$$\nu(P_2 g) = P_{12} g \quad ,$$

$$\nu(g) \quad = (b_{12} g,\ m_g^{-1}) \qquad\qquad (g \in G) \quad ,$$

<u>où l'on a posé</u> $b_{12} = (e_1, e_2)$ <u>et</u> $P_{12} = P(b_{12})$ (<u>cf</u>. (2), § 1, <u>n</u>° 1), <u>est la</u> G - <u>fibration principale</u> $\varphi_2(\xi_{P_2})$ <u>déduite de</u> ξ_{P_2} <u>par l'épimorphisme</u> φ_2 <u>de</u> P_2 <u>sur</u> $G_o \times k^\times$.

<u>Démonstration</u>: Vérifions que $(\xi_{\mathbb{P}}, \nu)$ satisfait la propriété universelle caractérisant $\varphi_2(\xi_{P_2})$. Soit $\eta = (E', pr, B', G_o \times k^\times)$ une G - fibration principale (à droite) de groupe structural $G_o \times k^\times$. Soit F un G - morphisme de ξ_{P_2} dans η , compatible avec φ_2 . Il est clair qu'il existe au plus un G - morphisme $\overline{F}$ de $\xi_{\mathbb{P}}$ dans η tel que $\overline{F} \circ \nu = F$, puisque l'on doit alors avoir

$$\overline{F}(b_{12} g,\ m_g^{-1}) = F(g) \qquad\qquad (g \in G) \quad . \tag{9}$$

Définissons $\overline{F}$ par (9) . Le morphisme $\overline{F}$ est bien défini puisque si $(b_{12} g',\ m_{g'}^{-1}) = (b_{12} g,\ m_g^{-1})$, pour $g' \in G$, alors $g' = ug$, avec $b_{12} u = b_{12}$ et $m_u = 1$, c'est-à-dire $u \in \operatorname{Ker} \varphi_2$. Par suite

$$F(g') = F(ug) = \varphi(u).F(g) = F(g) \quad .$$

Il est clair, d'autre part, que $\overline{F}$, défini par (9), est G - équivariant. Montrons qu'il est $G_o \times k^\times$ - équivariant. Soient $(h,s) \in G_o \times k^\times$ et $(b,t) \in \mathbb{B} \times k^\times$. Or, il existe $p \in P_2$, $g \in G$ tels que $\varphi(p) = (h,s)$ et $(b,t) = (b_{12} g,\ m_g^{-1})$, et par conséquent

$$\overline{F}((h,s)(b,t)) = \overline{F}(h b_{12} g,\ s^{-1} m_g^{-1}) = \overline{F}(b_{12} p g,\ m_{pg}^{-1})$$

$$= F(pg) = \varphi_2(p).F(g) = (h,s).\overline{F}(b,t)$$

ce qui achève la démonstration.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. - <u>On a</u>

$$(M(\pi,\gamma),\tau) \simeq \operatorname*{Ind}_{P_2 \uparrow G}(H, (\pi\otimes\gamma)\circ\varphi_2) \quad ,$$

<u>quels que soient</u> $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$ <u>et la représentation</u> (H,π) <u>de</u> G_o .

Cela est une conséquence immédiate de la proposition 1 ci-dessus et de l'isomorphisme (17) (§ 1, n° 3) .

2. <u>L'entrelacement des représentations</u> $M(\pi,\gamma)$.

Dans la suite de ce paragraphe, (H,π) et (H',π') désignent des représentations irréductibles de G_o et γ, γ' des caractères de $k^\times$. Pour étudier les espaces $\mathrm{Hom}_G(M(\pi,\gamma),M(\pi',\gamma'))$, nous nous servons du lemme 1 ci-dessous dont la démonstration est immédiate.

DEFINITION 3. - <u>On désigne par</u> $\mathcal{K}(\pi',\gamma';\pi,\gamma)$ <u>le</u> $\mathbb{C}$ - <u>espace vectoriel formé des applications</u> K <u>de</u> $(\mathbb{B}\times k^\times)\times(\mathbb{B}\times k^\times)$ <u>dans</u> $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H,H')$ (<u>appelées noyaux dans la suite) telles que</u>

$$K(b'g,\ t'm_g^{-1};\ bg,\ tm_g^{-1}) = K(b',t';b,t) \tag{10}$$

<u>et que</u>

$$K(h'b',\ s'^{-1}t';\ hb,\ s^{-1}t) = \gamma'(s')\gamma^{-1}(s)\pi'(h')\circ K(b',t';b,t)\circ\pi^{-1}(h) \tag{11}$$

<u>quels que soient</u> $b,b' \in \mathbb{B}$, $t,t',s,s' \in k$, $g \in G$ <u>et</u> $h,h' \in G_o$.

LEMME 1. - <u>En associant à chaque noyau</u> $K \in \mathcal{K}(\pi',\gamma';\pi,\gamma)$ <u>l'opérateur</u> Φ_K <u>de</u> $M(\pi,\gamma)$ <u>dans</u> $M(\pi',\gamma')$ <u>donné par</u>

$$[\Phi_K(f)](\xi) = \sum_{\eta \in \mathbb{B}\times k^{\times}} K(\xi,\eta)(f(\eta)) \qquad (\xi \in \mathbb{B}\times k^{\times}) \quad ,$$

<u>on définit une application qui transforme la multiplication matricielle de noyaux en produit d'opérateurs et qui est un isomorphisme du</u> $\mathbb{C}$ - <u>espace vectoriel</u> $\mathcal{H}(\pi',\gamma';\pi,\gamma)$ <u>sur le</u> $\mathbb{C}$ - <u>espace vectoriel</u> $\mathrm{Hom}_G(M(\pi,\gamma), M(\pi',\gamma'))$.

Il découle des relations (10) et (11) que la donnée de $K \in \mathcal{H}(\pi',\gamma';\pi,\gamma)$ équivaut à la donnée des opérateurs $K(b',1;\, b,1)$ pour

i) un couple $(b,b') \in \mathbb{B}\times\mathbb{B}$ tel que $P(b) = P(b')$,

ii) un couple $(b,b') \in \mathbb{B}\times\mathbb{B}$ tel que $\dim P(b) \cap P(b') = 1$,

iii) un couple $(b,b') \in \mathbb{B}\times\mathbb{B}$ tel que $P(b) \cap P(b') = \underline{0}$.

Posons

$$b_{ij} = (e_i\ ,\ e_j) \qquad (1 \leq i,j \leq 4,\ i \neq j) \quad ,$$

$$P_{ij} = P(b_{ij}) \qquad (1 \leq i,j \leq 4,\ i \neq j) \text{ (cf. §2,n°1).}$$

Nous pouvons alors choisir, dans i), $(b',b) = (b_{12},b_{12})$; dans ii), $(b',b) = (b_{14},b_{34})$; dans iii), $(b',b) = (b_{12},b_{34})$.

Rappelons, d'autre part, avant d'énoncer la proposition 2 ci-dessous, que, si (V,ρ) est une représentation de G_o , on note ${}_{\psi}V$ la composante isotypique de type $\psi \in \mathrm{Car}(k^+)$, de la restriction de ρ au sous-groupe unipotent supérieur U de G_o , et que l'on note ${}_{\psi}V_{\alpha}$ la composante isotypique de type $\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times})$ de la restriction de ρ au sous-groupe D_2 , agissant dans l'espace ${}_{\psi}V$. On note D_1 (resp. D_2) le sous-groupe de G_o formé des matrices diagonales h telles que $h_{22} = 1$ (resp. $h_{11} = 1$) (cf. ch. I, §6, n°1).

PROPOSITION 2. - <u>La donnée de</u> $K \in \mathcal{H}(\pi',\gamma';\pi,\gamma)$ <u>équivaut à la donnée des</u>

<u>trois opérateurs</u>

i) $\qquad \varphi_o = K(b_{12},1;b_{12},1) \in \mathrm{Hom}[(H, \pi \otimes \gamma),\ (H', \pi' \otimes \gamma')] \simeq \delta_{\gamma,\gamma'}\,\delta_{\pi,\pi'}\mathbb{C}$,

ii) $\qquad \varphi_1 = K(b_{14},1;b_{34},1) \in \mathrm{Hom}_{D_2}[{}_1H_{\gamma'\gamma^{-1}}\ ,\ {}_1H'_{\gamma\gamma'^{-1}}] \hookrightarrow \mathbb{C}$,

iii) $\qquad \varphi_2 = K(b_{12},1;b_{12},1) \in \mathrm{Hom}[(H, \check{\pi} \otimes \alpha_\pi \gamma),\ (H', \pi' \otimes \gamma')] \simeq \delta_{\gamma',\alpha_\pi\gamma}\,\delta_{\pi',\check{\pi}}\mathbb{C}$

<u>où</u> α_π <u>dénote la restriction de</u> π <u>au centre</u> $Z_o \simeq k^\times$ <u>de</u> G_o <u>et où l'on a posé</u>

$$\check{\pi}(h) = ({}^{t}h^{-1}) \qquad\qquad (h \in G_o) \quad .$$

<u>De manière plus précise, on a</u>

1) $\qquad K(b',t';b,t) = \gamma(tt'^{-1})\pi'(b'/b)\circ\varphi_o \qquad (b,b' \in \mathbb{B},\ P(b)=P(b'),\ t,t' \in k^\times)$,

<u>où l'on note</u> b'/b <u>le seul</u> $h \in G_o$ <u>tel que</u> $b' = hb$;

2) $\qquad K(b',t';b,t) = \gamma'(t')^{-1}\gamma(t)(\gamma'\gamma^{-1})(\langle(h'b')_1\ ,\ (hb)_1\rangle)\pi'^{-1}(h')\circ\varphi_1\circ\pi(h)$

<u>pour</u> $b,b' \in \mathbb{B}$ <u>telles que</u> $\dim(P(b) \cap P(b')) = 1$, $t,t' \in k^\times$ <u>et quels que soient</u> $h,h' \in G_o$ <u>tels que</u> $(h'b')_2 = (hb)_2$;

3) $\qquad K(b',t';b,t) = \gamma'(t')^{-1}\gamma(t)\pi'(\langle b',b\rangle)\circ\varphi_2$

<u>pour</u> $b',b \in \mathbb{B}$ <u>telles que</u> $P(b) \cap P(b') = \underline{0}$ <u>et</u> $t,t' \in k^\times$, <u>avec</u>

$$\langle b',b\rangle = \begin{pmatrix} \langle b_1', b_1\rangle & \langle b_1', b_2\rangle \\ \langle b_2', b_1\rangle & \langle b_2', b_2\rangle \end{pmatrix} \qquad\qquad (b,b' \in \mathbb{B}) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: La relation 1) résulte aussitôt de (10) et (11). Pour établir la relation (2), il faut remarquer en plus que $(c',1;c,1) = (b'g,r;b,r)$, pour $b',b,c',c \in \mathbb{B}$ tels que $P(b) \cap P(b') = \underline{0} = P(c) \cap P(c')$, et $r \in k^\times$,

si et seulement si $\langle b',b\rangle = \langle c',c\rangle$, et que d'autre part

$$\langle h'b',hb\rangle = h'\langle b',b\rangle {}^t h \qquad (b',b \in \mathbb{B}\ ,\ h',h \in G_o) \ .$$

La relation 3) s'ensuit aussitôt de (10) et (11) et du fait que $\dim(P(b) \cap P(b')) = 1$ $(b,b' \in \mathbb{B})$ entraîne qu'il existe $h,h' \in G_o$ tels que $(hb)_2 = (h'b')_2$, et qu'alors

$$K(b',1;b,1) = \pi'(h')^{-1} \circ K(h'b',1;\ hb,1) \circ \pi(h)^{-1}$$

$$= \pi'(h')^{-1} \circ K(b_{14},r;\ b_{34},r)$$

avec $r = \langle (h'b')_1\ ,\ (hb)_1\rangle$, par (10).

L'assertion concernant l'opérateur φ_o découle aussitôt du fait que, pour tout $h \in G_o$, $r \in k^\times$, on a

$$(hb_{12},\ t) = (b_{12}g,\ m_g^{-1})$$

pour $g \in G$ convenable. L'assertion concernant φ_2 s'ensuit du fait que, pour que

$$(h'b_{12},t;\ hb_{34},t) = (b_{12}g,m_g^{-1};\ b_{34}g,m_g^{-1}) \ ,$$

pour un $g \in G$ convenable, il faut et il suffit que

$$\langle h'b_{12},\ hb_{34}\rangle = t^{-1}\langle b_{12},\ b_{34}\rangle \ ,$$

c'est-à-dire $h'{}^t h = t^{-1} \in Z_o = Z(G_o)$. De manière analogue, pour que $(h'b_{14},t;\ hb_{34},t) = (b_{14},1;\ b_{34},1)g$, il faut et il suffit que

$$(h'b_{14})_2 = h(b_{34})_2 \ ,$$

$$\langle h'b_{14},\ hb_{34}\rangle = t^{-1}\langle b_{14},\ b_{34}\rangle \ \left(= t^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \right) \ .$$

On trouve alors que l'opérateur φ_1 doit satisfaire la condition

$$\gamma'\gamma^{-1}(a')\pi'\begin{pmatrix}a' & b'\\ 0 & d'\end{pmatrix}\circ\varphi_1 = \varphi_1\circ\gamma\gamma'^{-1}(a)\pi\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} \qquad (a,a',d\in k^{\times},\ b,b'\in k^{+}) \ .$$

Notre assertion sur φ_1 s'ensuit. Notons enfin que (cf. ch. I, §6, n°1, table 3) les composantes isotypiques ${}_1H_{\gamma'\gamma^{-1}}$ et ${}_1H_{\gamma\gamma'^{-1}}$ sont de dimension au plus 1 .

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Si $\alpha_{\pi} = 1$, alors l'opérateur $\pi\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ est un isomorphisme involutif de (H,π) sur $(H,\check{\pi})$.

La proposition 2 montre que le nombre d'entrelacement de $M(\pi,\gamma)$ est toujours $\leqslant 3$. De manière beaucoup plus précise:

COROLLAIRE 1. - *Soient* $\gamma,\gamma'\in \mathrm{Car}(k^{\times})$ *et* (H,π) , (H,π') *des représentations irréductibles de* G_o . *On a*

i) *Si* π *appartient à la série discrète de* G_o , *disons* $\pi = \pi_{\Lambda}$ $(\Lambda\in \mathrm{Car}(K^{\times}) - \mathrm{Car}(k^{\times}))$, *alors, pour tout* $\gamma\in\mathrm{Car}(k^{\times})$, *la représentation* $M(\pi,\gamma)$ *est irréductible si* $\Lambda^q \neq \Lambda^{-1}$, *et elle est somme directe de deux composantes irréductibles non-isomorphes si* $\Lambda^q = \Lambda^{-1}$.

ii) *Si* $\pi = \pi_{\alpha,\beta}$ $(\alpha,\beta\in\mathrm{Car}(k^{\times}),\ \alpha\neq\beta)$ *alors, pour tout* $\gamma\in\mathrm{Car}(k^{\times})$, *la représentation* $M(\pi,\gamma)$ *est irréductible si* $\beta\neq\alpha^{-1}$ *et si* $1\notin\{\alpha,\beta\}$, *et elle est somme directe de deux composantes irréductibles si* $\beta = \alpha^{-1}$ *ou si* $1\in\{\alpha,\beta\}$.

iii) *Si* $\pi = \pi_{\alpha}^{q}$ *ou* $\pi = \pi_{\alpha}^{1}$ $(\alpha\in\mathrm{Car}(k^{\times}))$, *alors pour tout* $\gamma\in\mathrm{Car}(k^{\times})$ *la représentation* $M(\pi,\gamma)$ *est irréductible si* $\alpha^2\neq 1$; *elle est somme directe de deux (resp. trois) composantes irréductibles non-isomorphes si* $\alpha^2 = 1$ *mais* $\alpha\neq 1$ *(resp. si* $\alpha = 1$) .

En effet, pour que $\pi \simeq \check{\pi}$, il suffit que la restriction de π à Z_o soit triviale (cf. rem. à la prop. 2). Mais si $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^{\times}) - \mathrm{Car}(k^{\times})$ alors, pour que la restriction de π_{Λ} à Z_o soit triviale, il faut et il suffit que $\Lambda^q = \Lambda^{-1}$. L'assertion i) s'ensuit puisque ${}_1H = \underline{0}$ pour tout (H,π) appartenant à la série discrète de G_o . Pour démontrer ii), notons que, si $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times})$, $\alpha \neq \beta$, alors pour que $\pi_{\alpha,\beta}$ soit triviale sur Z_o il faut et il suffit que $\beta = \alpha^{-1}$, et que, d'autre part, ${}_1H_1 = \underline{0}$ à moins que $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$, cas où $\dim {}_1H_1 = 1$. L'assertion iii) s'ensuit aussitôt du fait que π_{α}^{q} (resp. π_{α}^{1}) est isomorphe à $\check{\pi}_{\alpha}^{q}$ (resp. $\check{\pi}_{\alpha}^{1}$) et triviale sur Z_o , si et seulement si $\alpha = \alpha^{-1}$, et que l'on a $\dim {}_1H_1 = \delta_{1,\alpha}$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$.

Convenons d'appeler triviaux les morphismes de $M(\pi,\gamma)$ dans $M(\pi',\gamma')$ induits par un morphisme de π dans π' . Nous avons alors comme conséquence immédiate de la proposition 2 (et du corollaire 1) le

COROLLAIRE 2. - <u>Les seul cas d'entrelacement non-triviaux entre les représentations</u> $M(\pi,\gamma)$ <u>sont les suivants (pour tout</u> $\gamma \in \mathrm{Car}(k^{\times})$):

i) $M(\pi_{\Lambda}, \gamma) \simeq M(\pi_{\Lambda^{-1}}, \lambda\gamma)$ $\quad (\Lambda \in \mathrm{Car}(K^{\times}) - \mathrm{Car}(k^{\times}),\ \lambda = \Lambda|_{k^{\times}})$,

ii) $M(\pi_{\alpha,\beta}, \gamma) \simeq M(\pi_{\alpha^{-1},\beta^{-1}}, \alpha\beta\gamma)$ $\quad (\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^{\times}),\ \alpha \neq \beta)$,

iii) $M(\pi_{\alpha,\beta}, \gamma) \simeq M(\pi_{\alpha^{-1},\beta}, \alpha\gamma)$ $\quad (\alpha,\gamma \in \mathrm{Car}(k^{\times}),\ \alpha \neq \beta \neq \alpha^{-1})$,

iv) $M(\pi_{\alpha,\alpha^{-1}}, \gamma) \simeq M(\pi^{q}_{\alpha^{-1}}, \alpha\gamma) + M(\pi^{1}_{\alpha^{-1}}, \alpha\gamma)$ $\quad (\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times}),\ \alpha^2 \neq 1)$,

v) $M(\pi^{i}_{\alpha}, \gamma) \simeq M(\pi^{i}_{\alpha^{-1}}, \alpha^2\gamma)$ $\quad (i = 1, q\ ;\ \alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times}),\ \alpha^2 \neq 1)$,

vi) $[M(\pi^{i}_{\alpha_o}, \gamma), M(\pi^{i}_{\alpha_o}, \alpha_o\gamma)] = 1$ $\quad$ (i = 1,q; <u>si</u> car $k \neq 2$) ,

vii) $\left[M(\pi_\alpha^q , \gamma) , M(\pi_\alpha^1 , \alpha\gamma)\right] = 1$ $(\alpha \in Car(k^\times), \alpha^2 = 1)$

<u>et ceux qui se déduisent des précédents par composition avec des isomorphismes triviaux</u>.

Dans les numéros suivants de ce paragraphe, nous obtiendrons la décomposition explicite des représentations $M(\pi,\gamma)$ réductibles pour π appartenant à la série discrète de G_o. Le cas où π appartient à la série principale de G_o sera traité au prochain paragraphe.

3. <u>Décomposition des représentations</u> $M(\pi_\Lambda , \gamma)$ <u>réductibles</u>.

Nous étudions maintenant de plus près le cas où la représentation $M(\pi_\Lambda , \gamma)$ est réductible, c'est-à-dire le cas où $\Lambda^q = \Lambda^{-1}$ $(\Lambda \in Car(K^\times)$, $\Lambda \neq \Lambda^q)$.

Remarquons tout d'abord que la condition $\Lambda^q = \Lambda^{-1}$ entraîne que Λ est trivial sur $k^\times$ et donc constant sur chaque droite $\{ tz \mid t \in k^\times \}$ $(z \in K^\times)$ de $K^\times$, en particulier sur la droite D_o de $K^\times$ formée des éléments de trace nulle. Comme d'autre part, l'ensemble des éléments de $K^\times$ dont le carré appartient à $k^\times$ est égal à $D_o \cup k^\times$ (les droites D_o et $k^\times$ coïncident seulement si car $k = 2$) , on voit que la valeur de Λ sur D_o , que nous noterons $\varepsilon(\Lambda)$ dans la suite, est égale à $\underline{+}1$.

PROPOSITION 3. - <u>L'algèbre commutante</u> $A(\Lambda,\gamma) = End_G(M(\pi_\Lambda , \gamma))$, <u>pour</u> $\Lambda \in Car(K^\times) - Car(k^\times)$, $\Lambda^q = \Lambda^{-1}$, <u>admet comme</u> $\mathbb{C}$ - <u>base l'opérateur identité</u> I <u>et l'opérateur</u> Ψ <u>défini par</u>

$$(12) \qquad [\Psi(f)](b,t) = \frac{\varepsilon(\Lambda)\gamma^{-1}(t)}{(q-1)|G_o|} \sum_{\substack{b' \in \mathbb{B} \\ P(b') \cap P(b) = \underline{0}}} \pi_\Lambda(\langle b,b' \rangle w) f(b',1)$$

<u>pour</u> $f \in M(\pi_\Lambda, \gamma)$, $b \in \mathbb{B}$, $t \in k^\times$, <u>avec</u> $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. <u>On a</u>

(13) $$\Psi^2 = q^3 I - q(q-1)\Psi \ .$$

<u>Démonstration</u>: Il est immédiat, d'après la proposition 2, que I et Ψ forment une $\mathbb{C}$ - base de $A(\Lambda,\gamma)$. Soit $K \in \mathcal{H}(\Lambda,\gamma)$ le noyau définissant Ψ .

On a, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ convenables,

$$\Psi^2 = \lambda I + \mu \Psi \ ;$$

les nombres complexes λ et μ sont déterminés par les relations

(14) $$(K * K)(b_{12},1;b_{12},1) = \lambda(q-1)^{-1}|G_o|^{-1}\mathrm{Id}_H$$

et

(15) $$(K * K)(b_{12},1;b_{34},1) = \mu(q-1)^{-1}|G_o|^{-1}\varepsilon(\Lambda)\pi_\Lambda(w) \ .$$

Comme $K(b,t;b',t') = 0$ à moins que $P(b) \cap P(b') = \underline{0}$, et

$$K(b,t;b',t') = (q-1)^{-1}|G_o|^{-1}\varepsilon(\Lambda)\gamma(t't^{-1})\pi_\Lambda(\langle b,b'\rangle w) \qquad (b,b' \in \mathbb{B},\ t,t' \in k^\times)$$

si $P(b) \cap P(b') = \underline{0}$, on trouve aussitôt, en posant $A = M_2(k)$, et en notant A^s le sous-espace de A formé des matrices symétriques,

$$\begin{aligned}(K * K)(b_{12},1;b_{12},1) &= (q-1)^{-1}|G_o|^{-2}|A^s| \sum_{b \in G_o} \pi_\Lambda(-{}^t b w b w) \\ &= q^3(q-1)^{-1}|G_o|^{-1}\pi_\Lambda(1) \ ,\end{aligned}$$

puisque la condition

$$b' \in \mathbb{B} \qquad \text{et} \qquad P(b') \cap P(b_{12}) = \underline{0} \qquad\qquad (b' \in E \times E)$$

signifie que b' , considéré comme élément de $A \times A$ ($= M_{2,4}(k)$) , à l'aide de la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$, s'écrit sous la forme $b' = (hs,h)$ avec $h\in A^{\times}$ ($= G_o$) et $s\in A^s$. De manière analogue, en se servant du fait que pour que $b'\in \mathbb{B}$ vérifie les conditions

$$P(b')\cap P(b_{12}) = \underline{0} = P(b')\cap P(b_{34}) \quad ,$$

il faut et il suffit que $b' = (hs,h)$ avec $h\in A^{\times}$ et $s\in A^s\cap A^{\times}$, on trouve aisément

$$(K * K)(b_{12},1;b_{34},1) = (q-1)^{-1}|G_o|^{-1}\sum_{s\in G_o^s}\pi_\Lambda(s) \quad ,$$

où l'on a posé $G_o^s = A^{\times}\cap A^s$. Or, d'après le lemme 3 du numéro 2 du paragraphe 6 du chapitre I, on a

$$\sum_{s\in G_o}\pi_\Lambda(s) = -q(q-1)\varepsilon(\Lambda)\pi_\Lambda(w) \quad ,$$

ce qui achève la démonstration.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. - <u>On a, pour tout</u> $\gamma\in \mathrm{Car}(k^{\times})$ <u>et tout</u> $\Lambda\in \mathrm{Car}(K^{\times}) - \mathrm{Car}(k^{\times})$ <u>tel que</u> $\Lambda^q = \Lambda^{-1}$,

$$A(\Lambda,\gamma) = \mathbb{C}P_q \oplus \mathbb{C}P_1 \qquad \text{(composé direct)} \quad ,$$

<u>avec</u>

$$P_q = \frac{q}{q+1}I + \frac{1}{q(q+1)}\Psi \quad ,$$

$$P_1 = \frac{1}{q+1}I - \frac{1}{q(q+1)}\Psi \quad .$$

COROLLAIRE 2. - <u>Pour tout</u> $\gamma\in \mathrm{Car}(k^{\times})$ <u>et tout</u> $\Lambda\in \mathrm{Car}(K^{\times}) - \mathrm{Car}(k^{\times})$ <u>tel que</u> $\Lambda^q = \Lambda^{-1}$, <u>on a la décomposition en composantes irréductibles non-isomorphes</u>

$$M(\pi_\Lambda , \gamma) = M(\pi_\Lambda , \gamma)^q \oplus M(\pi_\Lambda , \gamma)^1$$

où

$$M(\pi_\Lambda , \gamma)^i = \operatorname{Im} P_i \qquad (i = 1,q) \quad .$$

La sous-représentation $M(\pi_\Lambda , \gamma)^q$ (resp. $M(\pi_\Lambda , \gamma)^1$) est de dimension $q(q-1)(q^2+1)$ (resp. $(q-1)(q^2+1)$) et elle est formée des $f \in M(\pi_\Lambda , \gamma)$ telles que $\Psi f = qf$ (resp. $\Psi f = -q^2 f$) .

Le calcul de dimension résulte de $\operatorname{Tr}(\Psi) = 0$.

4. - Description de la série de représentations de G associée à P_2 .

Nous décrivons ci-dessous l'ensemble des types d'isomorphie des composantes irréductibles des représentations $M(\pi_\Lambda , \gamma)$ que nous appelons, en suivant la classification de HARISH-CHANDRA (cf. [13]), la série de représentations (irréductibles) de G associée au sous-groupe parabolique P_2 .

THEOREME 1. - Supposons car $k \neq 2$ (resp. car $k = 2$) .

La série de représentations de G associée au sous-groupe P_2 est formée

i) des $\frac{1}{4}(q-1)^3$ (resp. $\frac{1}{4}q(q-2)(q-1)$) types d'isomorphie des représentations $M(\pi_\Lambda , \gamma)$, de dimension q^4-1 , pour $\gamma \in \operatorname{Car}(k^\times)$ et $\Lambda \in \operatorname{Car}(K^\times) - [\operatorname{Car}(k^\times) \cup \operatorname{Car}(U)]$ (c'est-à-dire $|\{\Lambda, \Lambda^q, \Lambda^{-1}, \Lambda^{-q}\}| = 4$) ;

ii) des $\frac{1}{2}(q-1)^2$ (resp. $\frac{1}{2}(q-1)q$) types d'isomorphie des représentations $M(\pi_\Lambda , \gamma)^q$ de dimension $q(q-1)(q^2+1)$, pour $\gamma \in \operatorname{Car}(k^\times)$ et $\Lambda \in [\operatorname{Car}(K^\times) - \operatorname{Car}(k^\times)] \cap \operatorname{Car}(U)$.

iii) et des $\frac{1}{2}(q-1)^2$ (resp. $\frac{1}{2}(q-1)q$) types d'isomorphie des représentations $M(\pi_\Lambda , \gamma)^1$, de dimension $(q-1)(q^2+1)$, pour $\gamma \in \operatorname{Car}(k\ )$ et $\Lambda \in [\operatorname{Car}(K^\times) - \operatorname{Car}(k^\times)] \cap \operatorname{Car}(U)$.

De manière plus précise, on a, pour les représentations de la famille i)

$$M(\pi_{\Lambda}, \gamma) \simeq M(\pi_{\Lambda'}, \gamma) \iff \{\Lambda, \Lambda^q, \Lambda^{-1}, \Lambda^{-q}\} = \{\Lambda', \Lambda'^q, \Lambda'^{-1}, \Lambda'^{-q}\}$$

et pour les représentations des familles ii) et iii),

$$M(\pi_{\Lambda}, \gamma)^i \simeq M(\pi_{\Lambda'}, \gamma)^i \iff \{\Lambda, \Lambda^q\} = \{\Lambda', \Lambda'^q\} \qquad (i = 1,q) .$$

Cela est clair (cf. §2, n°2, cor.1,i) et cor.2,i) à la prop. 2, n°3, cor. 2 à la prop. 3).

§ 3. La série principale de G .

Dans ce paragraphe, nous obtenons la série principale de G en considérant les représentations $M(\pi,\gamma)$ où π appartient à la série principale de G_o et en achevant la décomposition des cas réductibles (cf. § 2, n° 2, prop. 2 et ses deux corollaires).

1. Décomposition de $M(\pi_{\alpha,1}, \gamma)$.

Dans la suite, on pose ${}_*E = E - \{0\}$ et l'on note $\ell(v)$ la droite engendrée par $v \in {}_*E$.

PROPOSITION 1. - L'algèbre commutante $A(\alpha,1;\gamma) = \mathrm{End}_G(M(\pi_{\alpha,1}, \gamma))$ ($\alpha,\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha \neq 1$) admet une $\mathbb{C}$ - base formée de l'opérateur identité I et de l'opérateur Φ dont le noyau associé K_1 est défini par les conditions $\varphi_o = \varphi_2 = 0$ et $\varphi_1 = (q-1)^{-1}|G_o|^{-1}P_\infty$ (cf. § 2, n° 2, prop. 2) où P_∞ est le projecteur de $H = H_{\alpha,1}$ sur $\mathbb{C}f_\infty = {}_1H_1$ donné par

$$[P_\infty(u)](x;t) = u(0,1;t)f_\infty \qquad (u\in H,\ x\in k\times k,\ t\in k^\times) \quad ,$$

avec $f_\infty(r,s;t) = \delta_r\alpha(s) \quad (r,s\in k^+,\ t\in k^\times)$ (cf. ch. I, § 1, n° 2). On a

(1) $$\Phi^2 = qI + (q-1)\Phi \quad .$$

Démonstration: On a $\Phi\circ\Phi = \lambda I + \mu\Phi$, où $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ sont déterminés par les relations

i) $(K_1 * K_1)(b_{12},1;b_{12},1) = \lambda(q-1)^{-1}|G_o|^{-1}\mathrm{Id}_H$,

ii) $(K_1 * K_1)(b_{14},1;b_{34},1) = \mu(q-1)^{-1}|G_o|^{-1}P_\infty$.

Or, d'après la définition de K_1 et la prop. 2 du § 2, n° 2, on trouve aisément

$$(K_1 * K_1)(b_{12},1;b_{12},1) = q^{-1}(q-1)^{-3}|G_o|^{-1}\sum_{\substack{u\in P_{12}\\ u\neq 0}} n(P_{14},u)\sum_{\substack{h\in G_o\\ (hb_{12})_2 = u}} \pi(h)^{-1}P_\infty\pi(h)$$

où l'on a posé $\pi = \pi_{1,\alpha_o}$ et où

$$n(P_{12},u) = \left|\{P\in\mathbb{P} \mid P\cap P_{12} = \ell(u)\}\right| \quad ;$$

comme $n(P_{12},u) = q$ et $\mathrm{Trace}\ P_\infty = \dim {}_1H_1 = 1$, donc

$$\sum_{h\in G_o}\pi(h)^{-1}P_\infty\pi(h) = |G_o|(\dim\pi)^{-1}P_\infty = q(q-1)^2P_\infty$$

la valeur annoncée de λ s'ensuit. De manière analogue, on trouve

$$(K_1 * K_1)(b_{14},1;b_{34},1) = (q-1)^{-1}|G_o|^{-1}\sum_{\substack{b'\in\mathbb{B}\\ (b')_2 = e_4}} K_1(b_{14},1;b',1)K_1(b',1;b_{34},1) \ .$$

La contribution de l'ensemble J des $b'\in\mathbb{B}$ telles que $P(b')\cap P_{14}$ et $P(b')\cap P_{34}$ soient deux droites distinctes, à la somme du membre de droite étant nulle, puisque

$$\sum_{b'\in J} K_1(b_{14},1;b',1)K_1(b',1;b_{34},1) =$$

$$= |G_o| \sum_{\substack{b\in \mathbb{B} \\ b\in {}_*P_{14}\times {}_*P_{34}}} K_1(b_{14},1;b,1)K_1(b,1;b_{34},1) \quad ,$$

que

$$K_1(b_{14},1;b,1)K_1(b,1;b_{34},1) = \pi(h)^{-1}P_\infty\pi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}P_\infty\pi(h')$$

(où $h,h'\in G_o$ sont tels que $(hb_{14})_2 = b_2$ et $(h'b_{34})_2 = b_1$) , et que

$$P\,\pi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}P_\infty = 0 \quad .$$

On a, par conséquent,

$$(K_1 * K_1)(b_{14},1;b_{34},1) = (q-1)^{-1}|G_o|^{-1}\left|\{P\in\mathbb{P} \quad P\cap P_{14} = P\cap P_{34} = \ell(e_4)\}\right| P_\infty^2$$

$$= (q-1).(q-1)^{-1}|G_o|^{-1}P_\infty \quad ,$$

d'où $\mu = q-1$, comme annoncé.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. - <u>Quels que soient</u> $\alpha,\gamma\in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha\neq 1$, <u>on a</u>

$$A(\alpha,1;\gamma) = \mathbb{C}P^q \oplus \mathbb{C}P^1 \qquad \text{(\underline{composé direct})}$$

<u>avec les idempotents primitifs</u>

(2) $$P^q = \frac{q}{q+1}I - \frac{1}{q+1}\Phi \quad ,$$

(3) $$P^1 = \frac{1}{q+1}I + \frac{1}{q+1}\Phi \quad .$$

Cela découle du corollaire 1, ii) à la proposition 2 du § 2, n° 2 et de la proposition 1 ci-dessus par un calcul facile, qui est laissé au lecteur.

COROLLAIRE 2. - La représentation $M(\pi_{\alpha,1}, \gamma)$ $(\alpha,\gamma \in \mathrm{Car}(k^{\times}),\ \alpha \neq 1)$ se décompose en deux composantes irréductibles non-isomorphes,

$$M(\pi_{\alpha,1}, \gamma) = M(\pi_{\alpha,1}, \gamma)^{q} + M(\pi_{\alpha,1}, \gamma)^{1} ,$$

avec

$$M(\pi_{\alpha,1}, \gamma)^{i} = \mathrm{Im}\, P^{i} \qquad (i = 1,q;\ \text{cf. cor. 1}).$$

La sous-représentation $M(\pi_{\alpha,1}, \gamma)^{q}$ (resp. $M(\pi_{\alpha,1}, \gamma)^{1}$) est de dimension $q(q+1)(q^2+1)$ (resp. $(q+1)(q^2+1)$) .

Cela est clair d'après le corollaire 1 (compte tenu du fait que Trace $\Phi = 0$, pour le calcul des dimensions).

2. Décomposition de $M(\pi^{i}_{\alpha_o}, \gamma)$ $(i = 1,q)$.

D'après la proposition 2 du numéro 2 du paragraphe 2, l'algèbre commutante $\mathrm{End}(M(\pi^{i}_{\alpha_o}, \gamma))$ admet une $\mathbb{C}$ - base formée de l'opérateur identité et de l'opérateur Φ_2 dont le noyau K_2 est défini par les conditions $\varphi_o = \varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = (q-1)^{-1}|G_o|\alpha_o(-1)\pi^{i}_{\alpha_o}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Posons dans la suite $\pi^{i}_{\alpha_o} = \pi$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = w$.

LEMME 1. - On a

$$\Phi_2 \circ \Phi_2 = q^3 I + q(q-1)\Phi_2 \quad . \tag{4}$$

Démonstration: Par le même calcul que dans la démonstration de la proposition 3 (§ 2, n° 3), à ceci près que l'on a π à la place de π_{Λ} et $\alpha_o(-1)$ à la place de $\varepsilon(\Lambda)$, on trouve, dans ce cas,

$$\Phi_2 \circ \Phi_2 = q^3 I + \Big[\sum_{h \in G_o^s} \pi(h).\alpha_o(-1)\pi(w)^{-1}\Big]\, \Phi_2$$

mais d'après le lemme 3 du chapitre I, § 6, n° 2, on a, en notant G_o^s le sous-ensemble des matrices symétriques de G_o ,

$$\sum_{h \in G_o^s} \pi(h) = q(q-1)\alpha_o(-1)\pi(w)$$

pour $\pi = \pi^i_{\alpha_o}$ $(i = 1,q)$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 2. - <u>Soient</u> $i = 1,q$, $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$ <u>et</u> car $k \neq 2$. <u>Alors la représentation</u> $M(\pi^i_{\alpha_o}, \gamma)$ <u>se décompose comme suit</u>

$$M(\pi^i_{\alpha_o}, \gamma) = M(\pi^i_{\alpha_o}, \gamma)^q \oplus M(\pi^i_{\alpha_o}, \gamma)^1 ,$$

<u>en somme de deux représentations irréductibles non-isomorphes, où</u>

$$M(\pi^i_{\alpha_o}, \gamma)^j = \mathrm{Im}\, P^j \qquad (j = 1,q)$$

<u>avec</u>

(5) $$P^q = \frac{q}{q+1} I - \frac{1}{q(q+1)} \Phi_2 ,$$

(6) $$P^1 = \frac{1}{q+1} I + \frac{1}{q(q+1)} \Phi_2 .$$

<u>On a</u>

$$\dim M(\pi^i_{\alpha_o}, \gamma)^j = ij(q^2+1) \qquad (j = 1,q) .$$

Cela résulte du lemme 2 par un calcul facile.

Il est important de remarquer que les familles $\{M(\pi^q_{\alpha_o}, \gamma)^1\}_\gamma$ et $\{M(\pi^1_{\alpha_o}, \gamma)^q\}_\gamma$ (où γ parcourt $\mathrm{Car}(k^\times)$) coïncident, bien que

$M(\pi^q_{\alpha_o}, \gamma)$ et $M(\pi^1_{\alpha_o}, \gamma)$ ne s'entrelacent pour aucun $\gamma \in Car(k^\times)$ (cf. § 2, n° 2, cor. 2 à la prop. 2). On a, en effet, la

PROPOSITION 3. - Pour tout $\gamma \in Car(k^\times)$, on a

$$M(\pi^q_{\alpha_o}, \gamma)^1 \simeq M(\pi^1_{\alpha_o}, \alpha_o\gamma)^q .$$

Démonstration: Cela est une conséquence immédiate du corollaire 2, vi) à la proposition 2 du numéro 2 du paragraphe 2. En fait, un isomorphisme explicite de $M(\pi^1_{\alpha_o}, \alpha_o\gamma)^q$ sur $M(\pi^q_{\alpha_o}, \gamma)^1$ est donné par le morphisme de $M(\pi^1_{\alpha_o}, \alpha_o\gamma)$ dans $M(\pi^q_{\alpha_o}, \gamma)$, dont le noyau est défini par $\varphi_o = \varphi_2 = 0$ et par

$$[\varphi_1(\lambda)](1,r;t) = \alpha_o(t)\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{C} = H^1_{\alpha_o}, \ r \in k^+, \ t \in k^\times) ,$$

$$[\varphi_1(\lambda)](0,1;t) = -\alpha_o(t)q\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, \ t \in k^\times)$$

(cf. § 2, n° 2, prop. 2 et ch. I, § 1, n° 2).

C.Q.F.D.

3. Variantes de la construction de la série principale.

Si (H,π) appartient à la série principale de G_o , alors (H,π) est réalisable dans la représentation naturelle de G_o , c'est-à-dire $(H,\pi) = (M'_{\alpha,\beta}, \tau_{\alpha,\beta})$ $(\alpha,\beta \in Car(k\ ))$ (cf. ch. I, § 1, n° 2). En explicitant cette réalisation, on obtient aisément un isomorphisme entre $M(\pi,\gamma)$ et une représentation naturelle de G associée à une fibration principale canonique, où la base n'est plus $\mathbb{P}$, sinon l'ensemble $\mathbb{D}$ de tous les drapeaux totalement isotropes maximaux de E . Pour $\pi = \tau_{1,1}$, on trouvera simplement la représentation naturelle de G associée au G - ensemble $\mathbb{D}$. C'est dans la décomposition de ce cas, le plus délicat, traitée au numéro suivant, que l'on se servira, avec fruit, de la construction exposée ici.

Dans la suite, nous garderons les notations du paragraphe 1 du chapitre I concernant les représentations $(M_{\alpha,\beta}, \tau_{\alpha,\beta})$ $(\alpha,\beta\in \mathrm{Car}(k^{\times}))$; nous posons en plus ${}_{*}k^2 = k^2 - 0$.

La proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION 4. - <u>Soient</u> $\alpha,\beta,\gamma \in \mathrm{Car}(k^{\times})$, <u>le cas</u> $\alpha = \beta$ <u>n'étant pas exclu</u>. <u>Notons</u> $M'(\alpha,\beta;\gamma)$ <u>le</u> $\mathbb{C}$ - <u>espace vectoriel des fonctions complexes</u> f <u>sur</u> $(k^2 \times k)\times(\mathbb{B}\times k^{\times})$ <u>telles que</u>

$$(7)\qquad f(r_1 xh, r(r_1 r_2)^{-1}\det h^{-1}; h^{-1}b, ts^{-1}) = \alpha(r_1)\beta(r_2)\gamma(s)f(x,r;b,t)$$

<u>quels que soient</u> $r,r_1,r_2,t,s\in k^{\times}$, $h\in G_o$, $x\in k^2$ <u>et</u> $b\in\mathbb{B}$. <u>On pose</u>

$$(8)\qquad [\tau'(g)f](x,r;b,t) = f(x,r;bg,tm_g^{-1})$$

<u>pour</u> $g\in G$, $f\in M'(\alpha,\beta;\gamma)$, $x\in k^2$, $r,t\in k^{\times}$ <u>et</u> $b\in\mathbb{B}$.

<u>On définit un isomorphisme de</u> $(M(\tau_{\alpha,\beta}, \gamma), \tau)$ <u>sur</u> $(M'(\alpha,\beta;\gamma), \tau')$, <u>en faisant correspondre à chaque</u> $f\in M(\tau_{\alpha,\beta}, \gamma)$ <u>la fonction complexe</u> $\tilde{f}\in M'(\alpha,\beta;\gamma)$ <u>définie par</u>

$$(9)\qquad \tilde{f}(x,r;b,t) = [f(b,t)](x,r)$$

<u>quels que soient</u> $x\in k^2$, $r,t\in k^{\times}$, $b\in\mathbb{B}$.

REMARQUE. - Tout $x = (x_1,x_2)\in k^2$ et tout $b = (b_1,b_2)\in\mathbb{B}$ définissent, de manière naturelle, un vecteur de $P(b)$, à savoir $xb = x_1b_1 + x_2b_2$. L'application $x\longmapsto xb$, pour b fixé, est un isomorphisme du plan k^2 sur le plan $P(b)$. On a en plus, $(xh)b = x(hb)$, pour tout $h \in G_o$.

DEFINITION 1. - <u>On pose</u>

$$\overline{\mathbf{D}} = \{(v,b) \mid {}_{*}E \times \mathbf{B} \quad v \in P(b)\} \quad .$$

<u>On notera</u> $\overline{D}(\alpha,\beta;\gamma)$ <u>l'espace de toutes les fonctions complexes</u> f <u>sur</u> $\overline{\mathbf{D}} \times k^{\times} \times k^{\times}$ <u>telles que</u>

(10) $$f(r_1 v, hb; r(r_1 r_2)^{-1}; ts^{-1}) = \alpha(r_1)\beta(r_2 \det h)\gamma(s) f(v,b;r,t) \quad ,$$

<u>quels que soient</u> $r_1, r_2, r, s, t \in k^{\times}$ <u>et</u> $(v,b) \in \overline{\mathbf{D}}$ <u>et on désignera par</u> τ <u>l'action naturelle de</u> G <u>dans</u> $\overline{D}(\alpha,\beta;\gamma)$, <u>définie par</u>

(11) $$[\tau(g)f](v,b;r,t) = f(vg,bg;r,tm_g^{-1})$$

<u>pour</u> $g \in G$, $f \in \overline{D}(\alpha,\beta;\gamma)$, $(v,b) \in \overline{\mathbf{D}}$, $r,t \in k^{\times}$.

REMARQUE. - Notons $\mathbf{D}$ l'ensemble de tous les drapeaux totalement isotropes maximaux de E . Considérons la G - fibration principale

$$\xi_{\mathbf{D}} = (\mathbf{D} \times k^{\times} \times k^{\times}, pr, \mathbf{D}, N)$$

de groupe structural $N = k^{\times} \times G_o \times k^{\times} \times k^{\times}$, où

$$pr(v,b;r,t) = (\ell(v), P(b)) \qquad ((v,b) \in \overline{\mathbf{D}} \ , \ r,t \in k^{\times})$$

(en notant $\ell(v)$ la droite engendrée par $v \in {}_{*}E$) , où le groupe structural agit par

$$(r_1, h, r_2, s)(v,b;r,t) = (r_1 v, hb; r(r_1 r_2)^{-1}, ts^{-1}) \quad ,$$

pour $r_1, r_2, s, t \in k^{\times}$, $h \in G_o$, $(v,b) \in \overline{\mathbf{D}}$, et où G agit par

$$(v,b;r,t).g = (vg,bg;r,tm_g^{-1})$$

pour $(v,b) \in \overline{\mathbb{D}}$, $r,t \in k^{\times}$, $g \in G$.

Alors, en considérant la représentation $(\mathbb{C}, \alpha \otimes \beta \otimes (\beta \circ \det) \otimes \gamma)$ de N comme un N - fibré vectoriel gauche sur un point, et en identifiant, comme il est d'usage, un morphisme de fibrations principales avec sa restriction à l'espace total de la fibration principale source, on a

$$(\overline{D}(\alpha,\beta;\gamma), \tau) = \mathrm{Hom}_N(\xi_{\mathbb{D}} \ , (\mathbb{C}, \alpha \otimes \beta \otimes (\beta \circ \det) \otimes \gamma))$$

en tant que G - modules.

PROPOSITION 5. - <u>En associant à chaque</u> $f \in \overline{D}(\alpha,\beta;\gamma)$ <u>la fonction</u> $f' \in M'(\alpha,\beta;\gamma)$ <u>définie par</u>

$$f'(x,r;b,t) = f(xb,b;r,t) \qquad (x \in k^2, \ b \in \mathbb{B}, \ r,t \in k^{\times}) \ ,$$

<u>on définit un isomorphisme de</u> $(\overline{D}(\alpha,\beta;\gamma), \tau)$ <u>sur</u> $(M'(\alpha,\beta;\gamma), \tau')$ (<u>cf. rem. à la prop</u>. 4).

Cela est clair.

4. <u>Description géométrique de</u> $M(\pi_1^q \oplus \pi_1^1 \ , \gamma)$.

Nous savons déjà (§ 2, n° 2, cor. 1 et 2 à la prop. 2) que $M(\pi_1^i \ , \gamma)$ est somme directe de trois composantes irréductibles, non-isomorphes deux-à-deux, pour tout $\gamma \in \mathrm{Car}(k^{\times})$ et $i = 1,q$, et que l'une des trois composantes de $M(\pi_1^q \ , \gamma)$ est isomorphe à l'une des trois composantes de $M(\pi_1^1 \ ,\gamma)$, quel que soit $\gamma \in \mathrm{Car}(k^{\times})$. Pour obtenir explicitement ces composantes, le plus simple et le plus transparent géométriquement, c'est d'adopter le point de vue des drapeaux (n° 3, prop. 5).

Nous introduisons et rappelons tout d'abord quelques notations.

DEFINITION 2. - Nous désignons par $\mathbb{L}$ l'ensemble des droites de E , par $\mathbb{P}$ l'ensemble des plans totalement isotropes de E , et par $\mathbb{D}$ l'ensemble des drapeaux totalement isotropes maximaux de E , c'est-à-dire

$$\mathbb{D} = \{(\ell,P) \in \mathbb{L}\times\mathbb{P} \mid \ell \subset P\} \ .$$

Pour $v \in {}_{*}E = E - \{0\}$, on note $\ell(v)$ la droite engendrée par v ; pour $b \in \mathbb{B}$, on note $P(b)$ le plan engendré par b .

On note enfin ℓg (resp. Pg) l'image par $g \in G$ de $\ell \in \mathbb{L}$ (resp. $P \in \mathbb{P}$) par l'action à droite donnée de G dans E .

Nous avons $M(\pi_1^q , \gamma) \oplus M(\pi_1^1 , \gamma) = M(\pi_{1,1} , \gamma)$, pour tout $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$. Or, à l'aide de la proposition 5 du numéro 3, appliquée au cas $\alpha = \beta = 1$, on obtient aussitôt la

PROPOSITION 6. - <u>La représentation</u> $(M(\pi_{1,1} , \gamma), \tau)$ <u>est isomorphe à la représentation</u> $(\underline{D}, \gamma\tau)$, <u>où</u> $\underline{D} = \mathbb{C}^{\mathbb{D}}$, <u>et où</u> $\gamma\tau$ <u>désigne le produit tensoriel de la représentation de dimension un</u> $\gamma = \gamma\circ m$ <u>de</u> G <u>avec la représentation naturelle</u> τ <u>de</u> G <u>dans</u> $\underline{D}$, <u>c'est-à-dire</u>

$$[(\gamma\tau)(g)f](\ell,P) = \gamma(m_g)f(\ell g,Pg) \qquad (g \in G,\ f \in \underline{D},\ (\ell,P) \in \mathbb{D}) \ .$$

<u>On obtient un isomorphisme de</u> $(M(\pi_{1,1} , \gamma), \tau)$ <u>sur</u> $(\underline{D}, \gamma\tau)$ <u>en faisant correspondre à chaque</u> $f \in M(\pi_{1,1} , \gamma)$ <u>la fonction complexe</u> $\underline{f} \in \underline{D}$ <u>définie par</u>

$$\underline{f}(\ell,P) = [f(b,1)](x,1) \qquad ((\ell,P) \in \mathbb{D}) \ ,$$

où b est une base quelconque de P, et $x \in {}_{*}k^2$ est tel que $\ell(xb) = \ell$.

Nous sommes donc amenés à étudier de plus près la représentation $(\underline{D}, \gamma\tau)$.

5. Structure de $\underline{D}$.

DEFINITION 3. - Posons

$$\underline{L} = \mathbb{C}^{\mathbb{L}} ,$$

$$\underline{P} = \mathbb{C}^{\mathbb{P}} ,$$

et notons encore $\gamma\tau$ $(\gamma \in \mathrm{Car}(k))$ l'action de G dans $\underline{L}$ (resp. $\underline{P}$) définie par

$$[\gamma\tau(g)f'](\ell) = \gamma(m_g)f'(\ell g) \qquad (g \in G,\ f' \in \underline{L},\ \ell \in \mathbb{L}) ,$$

(resp. $$[\gamma\tau(g)f''](P) = \gamma(m_g)f''(Pg) \qquad (g \in G,\ f'' \in \underline{P},\ P \in \mathbb{P})) .$$

On définit alors (pour tout $\gamma \in \mathrm{Car}(k^{\times})$) un épimorphisme F' (resp. F'') de $(\underline{D}, \gamma\tau)$ sur $(\underline{L}, \gamma\tau)$ (resp. $(\underline{P}, \gamma\tau)$) par

(12) $$(F'f)(\ell) = \sum_{P \supset \ell} f(\ell, P) \qquad (f \in \underline{D},\ \ell \in \mathbb{L}) .$$

(resp.

(13) $$(F''f)(P) = \sum_{\ell \subset P} f(\ell, P) \qquad (f \in \underline{D},\ P \in \mathbb{P})) .$$

Enfin nous notons S (resp. S' ; resp. S'') l'opérateur (G - invariant) qui, à chaque $f \in \underline{D}$ (resp. $\underline{L}$; resp. $\underline{P}$) associe sa somme sur $\mathbb{D}$ (resp. $\mathbb{L}$; resp. $\mathbb{P}$) et nous posons

$$\underline{D}^{\circ} = \mathrm{Ker}\, S , \quad \underline{L}^{\circ} = \mathrm{Ker}\, S' , \quad \underline{P}^{\circ} = \mathrm{Ker}\, S'' .$$

Notons $(\underline{L} \times_{\mathbb{C}} \underline{P}, \gamma\tau)$ le produit fibré de $(\underline{L}, \gamma\tau)$ et $(\underline{P}, \gamma\tau)$ au-dessus des constantes (c'est-à-dire suivant les morphismes S' et S'' , dont le but est la représentation triviale $1\!\!1_G$ de G) . Nous le considérons comme un $\mathbb{C}[G]$ - module, via $\gamma\tau$.

LEMME 2. - <u>Le $\mathbb{C}[G]$ - module $\underline{L} \times_{\mathbb{C}} \underline{P}$ est monogène. On peut en prendre comme générateur n'importe quel élément de la forme</u> $(\hat{\ell},\hat{P})$ <u>où</u> $(\ell,P) \in \mathbb{D}$ <u>et</u> $\hat{\ell}(\ell') = \delta_{\ell,\ell'}$ $(\ell' \in \mathbb{L})$, $\hat{P}(P') = \delta_{P,P'}$ $(P' \in \mathbb{P})$.

<u>Démonstration</u>: Remarquons tout d'abord que tout élément (f',f'') de $\underline{L} \times_{\mathbb{C}} \underline{P}$ se décompose dans $\underline{L} \times_{\mathbb{C}} \underline{P}$ sous la forme

(14) $$(f',f'') = \lambda(1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{P}}) + (f'_o,0) + (0,f''_o) \quad ,$$

avec

(15) $$\lambda = |\mathbb{L}|^{-1} S'f' \quad (= |\mathbb{P}|^{-1} S''f'' \quad) \quad ,$$

(16) $$f'_o = f' - |\mathbb{L}|^{-1}(S'f')1_{\mathbb{L}} \in \underline{L}^{\circ} \quad ,$$

(17) $$f''_o = f'' - |\mathbb{P}|^{-1}(S''f'')1_{\mathbb{P}} \in \underline{P}^{\circ} \quad ,$$

où l'on note $1_{\mathbb{L}}$ (resp. $1_{\mathbb{P}}$) la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{L}$ (resp. $\mathbb{P}$) .

Soit $(\ell,P) \in \mathbb{D}$. Il est clair que $\mathbb{C}[G](\hat{\ell},\hat{P}) \supset \mathbb{C}(1_{\mathbb{L}}, 1_{\mathbb{P}})$. Montrons que $\mathbb{C}[G](\hat{?},\hat{P}) \supset \underline{L}^{\circ} \times \underline{0}$. Pour cela il suffit de montrer que $\mathbb{C}[G](\hat{\ell},\hat{P}) \supset (\hat{\ell}_1 - \hat{\ell}_2, 0)$, quels que soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{L}$. Or s'il existe $P_1 \in \mathbb{P}$ tel que $\ell_1, \ell_2 \subset P_1$, alors $(\ell_1 g, P_1 g) = (\ell,P)$ pour un $g \in G$ convenable, tel que $m_g = 1$, d'où $g\hat{\ell} = \hat{\ell}_1$ et $g\hat{P} = \hat{P}_1$. Mais il existe aussi un $g' \in G$, $m_{g'} = 1$, tel que $P_1 g' = P_1$ et $\ell_2 g' = \ell_1$. Alors

$g'g(\hat{\ell},\hat{P}) - g(\hat{\ell},\hat{P}) = (\hat{\ell}_2-\hat{\ell}_1,0)$. S'il n'existe pas de $P_1 \in \mathbb{P}$ tel que $\ell_1,\ell_2 \subset P_1$, c'est-à-dire si les droites ℓ_1 et ℓ_2 ne sont pas orthogonales, il existe néanmoins $\ell_3 \in \mathbb{L}$ telle que $\ell_1 \perp \ell_3$ et $\ell_2 \perp \ell_3$ (puisque $\dim \ell_1^\perp = 3 = \dim \ell_2^\perp$, et que $\dim E = 4$) , et l'on a alors, d'après ce que l'on vient de voir, $(\hat{\ell}_1-\hat{\ell}_2,0)$, $(\hat{\ell}_2-\hat{\ell}_3,0) \in \mathbb{C}[G](\hat{\ell},\hat{P})$, d'où $(\hat{\ell}_1-\hat{\ell}_3,0) \in \mathbb{C}[G](\hat{\ell},P)$ comme voulu.

On montre que $\mathbb{C}[G](\hat{\ell},\hat{P}) \supset \underline{0} \times \underline{P}^\circ$ de manière tout à fait analogue, en tenant compte du fait que si $P \cap P' = \underline{0}$, pour $P,P' \in \mathbb{P}$, alors il existe toujours $P'' \in \mathbb{P}$ tel que $P \cap P'' \neq \underline{0}$ et $P'' \cap P' \neq \underline{0}$ (puisque nécessairement $\ell^\perp \cap P' \neq \underline{0}$, pour toute $\ell \in \mathbb{L}$). Nous voyons ainsi que $(\hat{\ell},\hat{P})$ est bien un générateur de $\underline{L} \times_{\mathbb{C}} \underline{P}$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 7. - Posons

$$\underline{D}^{\circ\circ} = \operatorname{Ker} F' \cap \operatorname{Ker} F'' .$$

C'est un G - sous-espace de $\underline{D}$. On a la suite exacte G - équivariante

$$0 \longrightarrow \underline{D}^{\circ\circ} \xrightarrow{\ i\ } \underline{D} \xrightarrow{(F',F'')} \underline{L} \times_{\mathbb{C}} \underline{P} \longrightarrow 0 \quad ,$$

où i désigne l'injection canonique de $\underline{D}^{\circ\circ}$ dans $\underline{D}$ et où (F',F'') désigne le G - morphisme de $\underline{D}$ dans $\underline{L} \times_{\mathbb{C}} \underline{P}$ défini par les G - morphismes $F' : \underline{D} \longrightarrow \underline{L}$ et $F'' : \underline{D} \longrightarrow \underline{P}$.

Démonstration: Notons tout d'abord que, comme $S' \circ F' = S'' \circ F''$ ($= S$) , les morphismes G - équivariants F' et F'' définissent bien un morphisme G - équivariant, noté (F',F'') , de $\underline{D}$ dans $\underline{L} \times_{\mathbb{C}} \underline{P}$, donné évidemment par

$$(F',F'')(f) = (F'f,F''f) \qquad (f \in \underline{D}) .$$

Il est clair que $\underline{D}^{\circ\circ} = \mathrm{Ker}(F',F'')$ et il ne reste en fait qu'à démontrer que le G - morphisme (F',F'') est surjectif. Or le $\mathbb{C}[G]$ - module $\underline{D}$ est monogène et admet comme générateur, par exemple, la fonction $\hat{d}_o$, où $d_o = (\ell_o , P_o) \in \mathbb{D}$ et $\hat{d}_o(d) = \delta_{d_o,d}$ $(d \in \mathbb{D})$. Comme l'image de $\hat{d}_o$ par (F',F'') est $(\hat{\ell}_o,\hat{P}_o)$, qui d'après le lemme 2 est un générateur de $\underline{L} \times_{\mathbb{C}} \underline{P}$, nous voyons que (F',F'') est bien surjectif.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. - <u>On a</u>

$$\dim_{\mathbb{C}} \underline{D}^{\circ\circ} = q^4 \quad .$$

En effet, nous avons, d'après la proposition 10,

$$\dim \underline{D}^{\circ\circ} = \dim \underline{D} - \dim \underline{L} \times_{\mathbb{C}} \underline{P} \quad ,$$

c'est-à-dire

$$\dim \underline{D}^{\circ\circ} = (q+1)^2(q^2+1) - [2(q+1)(q^2+1) - 1] = q^4 \quad .$$

COROLLAIRE 2. - <u>On a un isomorphisme de</u> G - <u>modules</u>

$$\underline{D} \simeq \underline{D}^{\circ\circ} \oplus \underline{L}^{\circ} \oplus \underline{P}^{\circ} \oplus \mathbb{C}_{\gamma} \quad ,$$

<u>où</u> $\mathbb{C}_{\gamma}$ <u>désigne la représentation</u> $(\mathbb{C}, \gamma\circ m)$ <u>de</u> G .

Cela découle aussitôt du fait que

$$\underline{L} \times_{\mathbb{C}} \underline{P} \simeq \underline{L}^{\circ} \oplus \mathbb{C}_{\gamma} \oplus \underline{P}^{\circ} \qquad \text{(en tant que } G \text{ - modules)} \quad .$$

6. Décomposition de $(\underline{L}^\circ, \gamma\tau)$ et $(\underline{P}^\circ, \gamma\tau)$.

Nous étudions maintenant les représentations $(\underline{L}^\circ, \gamma\tau)$ et $(\underline{P}^\circ, \gamma\tau)$, dont la dimension commune est, rappelons-le, q^3+q^2+q . Nous savons dejà (cf. cor. 1 à la prop. 2 du n° 2 du § 2 et cor. 2 ci-dessus) que la longueur de $\underline{L}^\circ$ plus celle de $\underline{P}^\circ$ est au plus 4 .

DEFINITION 4. - *On note* F_1 *le* G - *morphisme de* $\underline{P}^\circ$ *dans* $\underline{L}^\circ$ *défini par*

$$(18) \qquad (F_1 f'')(\ell) = \sum_{P \supset \ell} f''(P) \qquad (f'' \in \underline{P}^\circ,\ \ell \in \mathbb{L}) \ ,$$

et l'on note F_2 *le* G - *morphisme de* $\underline{L}^\circ$ *dans* $\underline{P}^\circ$ *défini par*

$$(19) \qquad (F_2 f')(P) = \sum_{\ell \subset P} f'(\ell) \qquad (f' \in \underline{L}^\circ,\ P \in \mathbb{P}) \ .$$

PROPOSITION 8. - *On a*

i) $$(F_1F_2f')(\ell) = (q+1)f'(\ell) + \sum_{\substack{\ell' \perp \ell \\ \ell' \neq \ell}} f'(\ell') \qquad (f' \in \underline{L}^\circ,\ \ell \in \mathbb{L}) \ ,$$

ii) $$(F_2F_1f'')(P) = (q+1)f''(P) + \sum_{\substack{P' \cap P \neq \underline{0} \\ P' \neq P}} f''(P') \qquad (f'' \in \underline{P}^\circ,\ P \in \mathbb{P}) \ ;$$

et en outre

iii) $$F_2F_1F_2 = 2qF_2 \ ,$$

iv) $$F_1F_2F_1 = 2qF_1 \ .$$

Démonstration: Les égalités i) et ii) sont immédiates, compte tenu du fait qu'il existe dans E $q+1$ plans totalement isotropes contenant une droite donnée (ainsi que $q+1$ droites dans chaque plan) et que, pour que $\ell \perp \ell'$ $(\ell, \ell' \in \mathbb{L})$ il faut et il suffit qu'il existe $P \in \mathbb{P}$ contenant ℓ et ℓ' .

On a alors, pour $f' \in \underline{L}°$, $P \in \mathbb{P}$,

$$(F_2F_1F_2f')(P) = (q+1)\sum_{\ell \subset P} f'(\ell) + \sum_{\ell \subset P} \sum_{\substack{\ell' \perp \ell \\ \ell' \neq \ell}} f'(\ell')$$

$$= (q+1)\sum_{\ell \subset P} f'(\ell) + q\sum_{\ell' \subset P} f'(\ell') + \sum_{\ell' \not\subset P} f'(\ell') \quad ,$$

puisque si $\ell' \not\subset P$ alors $(\ell')^{\perp} \cap P$ est une droite, quel que soit $\ell' \in \mathbb{L}$; comme la somme de f' sur $\mathbb{L}$ est nulle, il s'ensuit que

$$(F_2F_1F_2f')(P) = 2q(F_2f')(P)$$

comme annoncé. La démonstration de iv) est tout à fait analogue et s'appuie aussi sur le fait que $\ell^{\perp} \cap P'$ est une droite si $\ell \not\subset P'$ $(\ell \in \mathbb{L}\, ,\ P' \in \mathbb{P})$, reformulé comme suit:

$$\ell \not\subset P' \Longrightarrow (\exists\, P \in \mathbb{P}\, ,\ P \supset \ell \ \text{ et } \ P \cap P' \neq \underline{0}) \qquad (\ell \in \mathbb{L}\, ,\ P' \in \mathbb{P}) \ .$$

C.Q.F.D.

THEOREME 1. -

i) <u>L'opérateur</u> $\frac{1}{2q} F_1F_2$ <u>est un</u> G - <u>projecteur de</u> $\underline{L}°$ <u>et l'on a la décomposition</u>

$$\underline{L}° = {}^{+}\underline{L}° \oplus {}^{-}\underline{L}°$$

<u>de la représentation</u> $\underline{L}°$ <u>en deux composantes irréductibles non-isomorphes, où</u>

$${}^{+}\underline{L}° = \operatorname{Im} F_1F_2 = \operatorname{Im} F_1 \quad ,$$

$${}^{-}\underline{L}° = \operatorname{Ker} F_1F_2 = \operatorname{Ker} F_2 \quad ,$$

<u>et</u>

$$\dim {}^{+}\underline{L}° = \tfrac{1}{2}q(q+1)^2 \quad ,$$

$$\dim {}^{-}\underline{L}° = \tfrac{1}{2}q(q^2+1) \quad .$$

ii) <u>L'opérateur</u> $\frac{1}{2q}F_2F_1$ <u>est un</u> G - <u>projecteur de</u> $\underline{P}°$ <u>et l'on a la décomposition</u>

$$\underline{P}° = {}^{+}\underline{P}° \oplus {}^{-}\underline{P}°$$

<u>de la représentation</u> $\underline{P}°$ <u>en deux composantes irréductibles non-isomorphes, où</u>

$${}^{+}\underline{P}° = \mathrm{Im}\ F_2F_1 = \mathrm{Im}\ F_2 \quad ,$$

$${}^{-}\underline{P}° = \mathrm{Ker}\ F_2F_1 = \mathrm{Ker}\ F_1$$

<u>et</u>

$$\dim {}^{+}\underline{P}° = \frac{1}{2}q(q+1)^2 \quad ,$$

$$\dim {}^{-}\underline{P}° = \frac{1}{2}q(q^2+1) \quad .$$

iii) <u>La restriction</u> F_2^+ <u>de</u> F_2 <u>à</u> ${}^{+}\underline{L}°$ <u>est un</u> G - <u>isomorphisme de</u> ${}^{+}\underline{L}°$ <u>sur</u> ${}^{+}\underline{P}°$, <u>la restriction</u> F_1^+ <u>de</u> F_1 <u>à</u> ${}^{+}\underline{P}°$ <u>est un</u> G - <u>isomorphisme de</u> ${}^{+}\underline{P}°$ <u>sur</u> ${}^{+}\underline{L}°$ <u>et l'on a</u>

$$F_1^+F_2^+ = 2q\mathrm{Id}_{{}^{+}\underline{L}°} \quad , \qquad F_2^+F_1^+ = 2q\mathrm{Id}_{{}^{+}\underline{P}°} \quad .$$

iv) <u>Les représentations irréductibles</u> ${}^{-}\underline{L}°$ <u>et</u> ${}^{-}\underline{P}°$ <u>ne sont pas isomorphes</u>.

<u>Démonstration</u>: L'opérateur G - équivariant $\frac{1}{2q}F_1F_2$ (resp. $\frac{1}{2q}F_2F_1$) est un projecteur d'après le numéro iii) (resp. iv)) de la proposition 8 . Le numéro iii) (resp. iv)) de cette proposition entraîne aussitôt que $\mathrm{Ker}\ F_2 = \mathrm{Ker}\ F_1F_2$ (resp. $\mathrm{Ker}\ F_1 = \mathrm{Ker}\ F_2F_1$) et que $\frac{1}{2q}F_2F_1$ est l'identité sur $\mathrm{Im}\ F_2$ (resp. $\frac{1}{2q}F_1F_2$ est l'identité sur $\mathrm{Im}\ F_1$) d'où $\mathrm{Im}\ F_2F_1 = \mathrm{Im}\ F_2$ (resp. $\mathrm{Im}\ F_1F_2 = \mathrm{Im}\ F_1$) .

Pour calculer les dimensions des composantes en jeu, il suffit de calculer $\dim {}^{+}\underline{L}°$ et $\dim {}^{+}\underline{P}°$, puisque $\dim \underline{L}° = \dim \underline{P}° = q(q^2+q+1)$. Or on a $\dim {}^{+}\underline{L}° = \frac{1}{2q}\mathrm{Tr}\ F_1F_2 = \frac{1}{2q}\mathrm{Tr}\ F_2F_1 = \dim {}^{+}\underline{P}°$; en considérant la base de

$\underline{L}°$ formée des fonctions $\hat{\ell} - \hat{\ell}_o$ $(\ell \in \mathbb{L} - \{\ell_o\}$, ℓ_o fixé) , où $\hat{\ell}_1(\ell) = \delta_{\ell_1,\ell}$ $(\ell_1, \ell \in \mathbb{L})$, on trouve aussitôt, d'après le numéro i) de la proposition 8, que

$$\mathrm{Tr}\, F_1F_2 = (q+1)\dim \underline{L}° - |\{\ell \in \mathbb{L} \quad \ell \perp \ell_o \ , \ell \neq \ell_o\}|$$

$$= (q+1)(q^3+q^2+q) - (q^2+q) = q^2(q+1)^2 \quad ,$$

d'où $\dim {}^+\underline{L}° = \dim {}^+\underline{P}° = \frac{1}{2}q(q+1)^2$ comme annoncé.

L'assertion iii) découle aussitôt de la proposition 8, iii) et iv), et de ce qui précède. Enfin, pour voir que ${}^{\pm}\underline{L}°$ et ${}^{\pm}\underline{P}°$ sont irréductibles, que ${}^+\underline{L}° \not\simeq {}^-\underline{L}°$, ${}^+\underline{P}° \not\simeq {}^-\underline{P}°$ et ${}^-\underline{L}° \not\simeq {}^-\underline{P}°$, il suffit de remarquer que l'on a, d'après la proposition 6 du numéro 4,

$$\underline{P}° \oplus \mathbb{C}_\gamma \simeq \underline{P} \simeq M(\pi_1^1 , \gamma)$$

d'où, d'après le corollaire 2 à la proposition 7,

$$\underline{D}°° \oplus \underline{L}° \simeq M(\pi_1^q , \gamma) \quad ,$$

et d'autre part, que l'on sait déjà (§ 2, n° 2, cor. 2 à la prop. 2) que le nombre d'entrelacement des représentations $M(\pi_1^r , \gamma)$ $(r = 1,q)$ est 3 , et que le nombre d'entrelacement $[M(\pi_1^1 , \gamma) , M(\pi_1^q , \gamma)]$ est égal à 1 .

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. - <u>La décomposition de la représentation</u> $(\underline{D}, \gamma\tau)$ <u>en composantes irréductibles est la suivante</u>

$$\underline{D} = \underline{D}°° \oplus {}^+\underline{L}° \oplus {}^-\underline{L}° \oplus {}^+\underline{P}° \oplus {}^-\underline{P}° \oplus \mathbb{C}_\gamma \quad ,$$

<u>où le seul cas d'isomorphie entre des composantes irréductibles distinctes est</u> ${}^+\underline{L} \simeq {}^+\underline{P}°$.

En plus, on a alors

$$(M(\pi_1^q, \gamma), \tau) \simeq (\underline{D}^{\circ\circ}, \gamma\tau) \oplus ({}^+\underline{L}^{\circ}, \gamma\tau) \oplus ({}^-\underline{L}^{\circ}, \gamma\tau) \quad ,$$

$$(M(\pi_1^1, \gamma), \tau) \simeq ({}^+\underline{P}^{\circ}, \gamma\tau) \oplus ({}^-\underline{P}^{\circ}, \gamma\tau) \oplus (\mathbb{C}, \gamma\circ\det) \quad .$$

7. Description de la série principale de G .

Résumons les résultats de ce paragraphe.

THEOREME 2. - La série principale des représentations de G est formée de 13 séries de types d'isomorphie, disjointes deux à deux, à savoir :

i) les $\frac{1}{8}(q-1)(q-3)^2$ (resp. $\frac{1}{8}(q-1)(q-2)(q-4)$) types d'isomorphie des représentations $M(\pi_{\alpha,\beta}, \gamma)$, de dimension $(q+1)^2(q^2+1)$, pour $\gamma \in Car(k^\times)$ et $\alpha,\beta \in Car(k^\times)$ tels que $|\{1,\alpha,\beta,\alpha\beta\}| = 4$, si car $k \neq 2$ (resp. car $k = 2$) ;

ii) les $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ types d'isomorphie des représentations $M(\pi_{\alpha,1}, \gamma)^1$, de dimension $q(q+1)(q^2+1)$, pour $\alpha,\gamma \in Car(k^\times)$, $\alpha \neq 1$;

iii) les $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ types d'isomorphie des représentations $M(\pi_{\alpha,1}, \gamma)^1$, de dimension $(q+1)(q^2+1)$, pour $\alpha,\gamma \in Car(k^\times)$, $\alpha \neq 1$;

iv) les $\frac{1}{2}(q-1)(q-3)$ (resp. $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$) types d'isomorphie des représentations $M(\pi_\alpha^q, \gamma)$, de dimension $q(q+1)(q^2+1)$, pour $\alpha,\gamma \in Car(k^\times)$, $\alpha^2 \neq 1$, si car $k \neq 2$ (resp. car $k = 2$) ;

v) les $\frac{1}{2}(q-1)(q-3)$ (resp. $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$) types d'isomorphie des représentations $M(\pi_\alpha^1, \gamma)$, de dimension $(q+1)(q^2+1)$, pour $\alpha,\gamma \in Car(k^\times)$, $\alpha^2 \neq 1$, si car $k \neq 2$ (resp. car $k = 2$) ;

vi) les $\frac{1}{2}(q-1)$ types d'isomorphie des représentations $M(\pi_{\alpha_o}^q, \gamma)^q$, de dimension $q^2(q^2+1)$, pour $\gamma \in Car(k^\times)$, si car $k \neq 2$;

vii) les $\frac{1}{2}(q-1)$ types d'isomorphie des représentations $M(\pi_{\alpha_o}^1, \gamma)^q$, de *dimension* $q(q^2+1)$, *pour* $\gamma \in \mathrm{Car}(k\ )$, *si* car $k \neq 2$;

viii) *les* $\frac{1}{2}(q-1)$ *types d'isomorphie des représentations* $M(\pi^1_{\alpha_o}, \gamma)^1$, *de dimension* q^2+1 , *pour* $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$, *si* car $k \neq 2$;

ix) *les* $q-1$ *(types d'isomorphie des) représentations de Steinberg* $(\underline{D}^{\circ\circ}, \gamma\tau)$, *de dimension* q^4 , *pour* $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$;

x) *les* $q-1$ *(types d'isomorphie des) représentations* $({}^{+}\underline{P}^\circ, \gamma\tau)$, *de dimension* $\frac{1}{2}q(q+1)^2$, *pour* $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$;

xi) *les* $q-1$ *(types d'isomorphie des) représentations* $({}^{-}\underline{P}^\circ, \gamma\tau)$, *de dimension* $\frac{1}{2}q(q^2+1)$, *pour* $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$;

xii) *les* $q-1$ *(types d'isomorphie des) représentations* $({}^{-}\underline{L}^\circ, \gamma\tau)$, *de dimension* $\frac{1}{2}q(q^2+1)$, *pour* $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$;

xiii) *les* $q-1$ *(types d'isomorphie des) représentations* $\mathbb{C}_\gamma = (\mathbb{C}, \gamma \circ m)$, *de dimension* 1 , *pour* $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$.

Démonstration: Cela découle aussitôt des corollaires 1 et 2 à la proposition 2 du numéro 2 du paragraphe 2, du corollaire 2 à la proposition 1 (n° 1), des propositions 2 et 3 (n° 2), du corollaire à la proposition 7 (n° 5) et du corollaire au théorème 1 (n° 6), le décompte des nombres des types d'isomorphie dans chaque série se faisant sans difficulté.

C.Q.F.D.

8. *Dimensions des espaces des vecteurs fixes pour* U_2 *dans* $\underline{D}$.

Dans la pratique, pour distinguer les représentations $({}^{-}\underline{L}^\circ, \gamma\tau)$ et $({}^{-}\underline{P}^\circ, \gamma\tau)$ $(\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times))$, on se sert souvent de la proposition ci-dessous

Rappelons que pour une représentation (V, ρ) d'un groupe quelconque G , on pose, pour $H \subset G$,

$$\mathrm{Fix}_{(V,\rho)}H = \mathrm{Fix}_V H = \{v \in V \mid hv = v \quad \forall\, h \in H\} ,$$

et que l'on note U_2 le radical unipotent de P_2 (cf. § 1, n° 1).

Par un calcul facile, on établit la

PROPOSITION 9. - <u>On a, pour tout</u> $\gamma \in \mathrm{Car}(k^{\times})$,

i) $\dim \mathrm{Fix}_{(\underline{D},\ \gamma\tau)} U_2 = 2(q+1)$;

ii) $\dim \mathrm{Fix}_{(\underline{L},\ \gamma\tau)} U_2 = 2(q+1)$;

iii) $\dim \mathrm{Fix}_{(\underline{P},\ \gamma\tau)} U_2 = q+3$;

iv) $\dim \mathrm{Fix}_{(\underline{D}^{\circ\circ},\ \gamma\tau)} U_2 = q$;

v) $\dim \mathrm{Fix}_{({}^{+}\underline{L}^{\circ},\ \gamma\tau)} U_2 = q+1$;

vi) $\dim \mathrm{Fix}_{({}^{-}\underline{L}^{\circ},\ \gamma\tau)} U_2 = q$;

vii) $\dim \mathrm{Fix}_{({}^{-}\underline{P}^{\circ},\ \gamma\tau)} U_2 = 1$.

§ 4. <u>La série de représentations de</u> G <u>associée à</u> P_1 .

Dans ce paragraphe, nous gardons les notations du paragraphe 1.

1. <u>Définitions et préliminaires</u>.

Pour $v \in {}_{*}E = E - \{0\}$, on note $\ell(v)$ la droite de E engendrée par v . On désigne par $\mathbb{B}(V)$ l'ensemble des bases d'un espace vectoriel quelconque V .

Au paragraphe 1, on a défini le sous-groupe parabolique P_1 , de

G , comme le stabilisateur, dans G , de la droite $\ell_1 = ke_1$ de E . Or, sur l'ensemble $\mathbb{L}$ de toutes les droites de E , nous avons la fibration suivante

DEFINITION 1. - On appelle G - fibration principale canonique au-dessus de $\mathbb{L}$, et l'on note $\xi_{\mathbb{L}}$, la G - fibration principale $(\bar{D}_1, pr, \mathbb{L}, k^\times \times G_o)$, d'espace total $\bar{D}_1$, de base $\mathbb{L}$, de projection pr , et de groupe structural $k^\times \times G_o$, définie comme suit :

i) l'espace total $\bar{D}_1$ est l'ensemble des couples $(v,\bar{b})$, où $v \in {}_*E$ et $\bar{b}$ est une base du plan $P_\ell = \ell(v)^\perp/\ell(v)$;

ii) on pose $pr(v,\bar{b}) = \ell(v)$ $\qquad ((v,\bar{b}) \in \bar{D}_1)$;

iii) l'action, à gauche, du groupe structural $k^\times \times G_o$ dans $\bar{D}_1$ est donnée par

$$(t,h).(v,\bar{b}) = (tv, h\bar{b}) \qquad (t \in k^\times,\ h \in G_o,\ (v,\bar{b}) \in \bar{D}_1) \ ;$$

iv) l'action, à droite, de G dans $\xi_{\mathbb{L}}$, est l'action naturelle donnée par

$$(v,\bar{b}).g = (vg, \overline{bg}) \qquad ((v,\bar{b}) \in \bar{D}_1 ,\ g \in G)$$

où l'on note simplement $\bar{g}$ l'isomorphisme $\bar{g}_\ell$ de $P_{\ell(v)}$ sur $P_{\ell(vg)}$ déduit de g par passage aux quotients, et $\overline{bg}$ la transformée de la base $\bar{b}$ de $P_{\ell(v)}$ par cet isomorphisme.

DEFINITION 2. - Soit $\alpha \in Car(k^\times)$ et (H,π) une représentation de G_o . Alors la représentation $(H, \alpha \otimes \pi)$ de $k^\times \times G_o$ est aussi, de manière naturelle, un $k^\times \times G_o$ - fibré vectoriel sur un point. On appelle représentation naturelle de G associée à $\xi_{\mathbb{L}}$ et à $\alpha \otimes \pi$, et l'on note $(V(\alpha,\pi), \tau)$, le $\mathbb{C}[G]$ - module

$$\mathrm{Hom}_{k^\times \times G_o}(\xi_{\mathbb{L}}, H) \ .$$

REMARQUES. -

i) Autrement di l'espace $V(\alpha,\pi)$ est formé de toutes les fonctions f de $\overline{D}_1$ dans H telles que

(1) $$f(tv,h\overline{b}) = \alpha(t)\pi(h)\, f(v,\overline{b}) \qquad ((v,\overline{b})\in\overline{D}_1\ ,\ t\in k^{\times}\ ,\ h\in G_o)$$

et l'action τ de G dans $V(\alpha,\pi)$ est l'action naturelle donnée par

(2) $$[\tau(g)f](v,\overline{b}) = f(vg,\overline{bg}) \qquad ((v,\overline{b})\in\overline{D}_1\ ,\ f\in V(\alpha,\pi),\ g\in G)\ .$$

ii) On a

(3) $$\dim V(\alpha,\pi) = (q+1)(q^2+1)\dim\pi$$

puisque $\dim V(\alpha,\pi) = |\mathbb{L}|\dim\pi$ et que $|\mathbb{L}| = (q-1)^{-1}(q^4-1)$ $(|k| = q)$.

Nous identifions maintenant nos représentations $V(\alpha,\pi)$ en tant que représentations induites. D'après le numéro 3 du paragraphe 1, on note ξ_{P_1} la G - fibration principale $(G,pr,P_1\backslash G,P_1)$ associée au sous-groupe P_1 de G . Nous avons alors la

PROPOSITION 1. - _La_ G - _fibration principale_ $\xi_{\mathbb{L}}$, _munie de la surjection canonique_ $\nu : \xi_{P_1}\longrightarrow\xi_{\mathbb{L}}$, _définie par_

(4) $$\nu(g) = (e_1g,\overline{b}_{24}\overline{g}) \qquad (g\in G)\ ,$$

(_où_ $\overline{b}_{24}$ _désigne la base de_ P_{ℓ_1} _de premier (resp. second) vecteur égal à_ $e_2+\ell_1$ (_resp._ $e_4+\ell_1$)) , _est la_ G - _fibration principale_ $\varphi_1(\xi_{P_1})$ _déduite de_ ξ_{P_1} _par l'épimorphisme_ φ_1 .

Démonstration: Il est clair que ν est surjective. Nous vérifions que $(\xi_{\mathbb{L}}\ ,\ \nu)$ satisfait bien la propriété universelle définissant $\varphi_1(\xi_{P_1})$ (cf. § 1, n° 3, dém. de la prop. 2). Soit η une G - fibration principale de groupe structural $k^{\times}\times G_o$ et θ un morphisme G - équivariant de ξ_{P_1} dans η, compatible avec φ_1. On définit alors un $k^{\times}\times G_o$ - morphisme $\overline{\theta}$ de $\xi_{\mathbb{L}}$ dans η, tel que $\overline{\theta}\circ\nu = \theta$, en posant

$$\overline{\theta}(e_1g,\ \overline{b}_{24}\overline{g}) = \theta(g) \qquad\qquad (g\in G)\ .$$

Le morphisme $\overline{\theta}$ est bien défini puisque si $e_1g = e_1g'$ et $\overline{b}_{24}\overline{g} = \overline{b}_{24}\overline{g}'$, pour $g'\in G$, alors $g' = pg$, où $p\in P_1 = \mathrm{Stab}(\ell_1)$, et en plus $t_p = 1$, $h_p = 1$ (cf. § 1, n° 1, prop. 1, i)), c'est-à-dire $\varphi_1(p) = 1$. Il s'ensuit que

$$\overline{\theta}(e_1g',\ \overline{b}_{24}\overline{g}') = \theta(pg) = \varphi_1(p)\theta(g) = \overline{\theta}(e_1g,\ \overline{b}_{24}\overline{g})$$

comme voulu. Il est clair que $\overline{\theta}$ est G - équivariant. Pour voir qu'il est bien un $k^{\times}\times G_o$ - morphisme, il suffit de remarquer que, si $(t,h)\in k^{\times}\times G_o$ alors il existe $p\in P_1$ tel que $\varphi_1(p) = (t,h)$ et que l'on a, par conséquent,

$$\overline{\theta}((t,h).(e_1g,\ \overline{b}_{24}\overline{g})) = \overline{\theta}(e_1pg,\ \overline{b}_{24}\overline{pg}) = \theta(pg) = \varphi_1(p)\theta(g)$$
$$= (t,h).\overline{\theta}(e_1g,\ \overline{b}_{24}\overline{g})\ .$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. - <u>On a</u>

$$(V(\alpha,\pi),\ \tau) \qquad \mathop{\mathrm{Ind}}_{P_1\uparrow G}\,[(\alpha\otimes\pi)\circ\varphi_1]\ .$$

En effet, cela est une conséquence immédiate de l'isomorphisme (17) du numéro 3 du paragraphe 1 et de la proposition 1 ci-dessus.

2. L'entrelacement des représentations $V(\alpha,\pi)$.

Notons $R(G_o)$ l'ensemble des représentations de G_o .

DEFINITION 3. - Soient $\alpha,\alpha' \in Car(k^\times)$ et (H,π), $(H,\pi') \in R(G_o)$. On note $\mathcal{H}(\alpha',\pi';\alpha,\pi)$ le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel formé de toutes les applications $K : \bar{D}_1 \times \bar{D}_1 \longrightarrow Hom_{\mathbb{C}}(H,H')$ (appelées noyaux dans la suite) telles que

$$(5) \qquad K((v',\bar{b}')g;\ (v,\bar{b})g) = K(v',\bar{b}';\ v,\bar{b}) \quad ,$$

$$(6) \qquad K(t'v',h'b';\ tv,hb) = \alpha'(t')\pi'(h')\circ K(v',b';\ v,b)\circ\alpha^{-1}(t)\pi^{-1}(h) \quad ,$$

quels que soient (v',b'), $(v,b) \in \bar{D}_1$, $t',t \in k^\times$, $h',h \in G_o$, $g \in G$.

Si $\alpha'' \in Car(k^\times)$ et $(H'',\pi'') \in R(G_o)$, on définit le produit matriciel $K' * K$ d'un noyau $K \in \mathcal{H}(\alpha',\pi';\alpha,\pi)$ et d'un noyau $K' \in \mathcal{H}(\alpha'',\pi'';\alpha',\pi')$ par

$$(7) \qquad (K' * K)(x,z) = \sum_{y \in \bar{D}_1} K'(x,y)\circ K(y,z) \qquad (x,z \in \bar{D}_1) \ .$$

La vérification du résultat suivant est immédiate.

LEMME 1. - L'application qui à chaque noyau $K \in \mathcal{H}(\alpha',\pi';\alpha,\pi)$ $(\alpha,\alpha' \in Car(k^\times)$, $\pi,\pi' \in R(G_o))$, fait correspondre l'opérateur $\Phi_K \in Hom_G(V(\alpha,\pi),\ V(\alpha',\pi'))$, donné par

$$(\Phi_K f)(x) = \sum_{y \in \bar{D}_1} K(x,y)[f(y)] \qquad (f \in V(\alpha,\pi),\ x \in \bar{D}_1)$$

définit un isomorphisme de $\mathbb{C}$ - espaces vectoriels de chaque espace $\mathcal{H}(\alpha',\pi';\alpha,\pi)$ sur l'espace correspondant $Hom_G(V(\alpha,\pi),\ V(\alpha',\pi'))$ et transforme, en plus, la multiplication matricielle de noyaux en la composition d'opérateurs.

Comme nous avons déjà obtenu la série principale de G, dans la suite nous n'avons qu'à nous intéresser à l'entrelacement des représentations $V(\alpha,\pi)$, pour $\alpha \in \mathrm{Car}(k)$ et π appartenant à la série discrète de G_o.

Nous avons besoin de deux lemmes de géométrie symplectique dans E.

LEMME 2. - Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux droites non-orthogonales de E. Soient $v_1 \in \ell_1$, $v_2 \in \ell_2$ tels que $\langle v_1,v_2\rangle = 1$.

i) On a la suite exacte scindée

$$\begin{tikzcd} \underline{0} \arrow[r] & \ell_1^{\perp} \cap \ell_2^{\perp} \arrow[r, shift right, "j"'] & E \arrow[l, shift right, "p"'] \arrow[r, shift right, "p'"'] & \ell_1 \oplus \ell_2 \arrow[l, shift right, "j'"'] \arrow[r] & \underline{0} \end{tikzcd}$$

où j et j' sont les injections canoniques, et où l'on a posé

$$p'(v) = \langle v,v_2\rangle v_1 + \langle v_1,v\rangle v_2 \qquad (v \in E),$$

$$p(v) = v - p'(v) \qquad (v \in E);$$

ii) Notons j_1 (resp. j_2) l'injection canonique de $\ell_1^{\perp} \cap \ell_2^{\perp}$ dans ℓ_1 (resp. ℓ_2) et p_1 (resp. p_2) la projection canonique de $\ell_1^{\perp}$ (resp. $\ell_2^{\perp}$) sur $\ell_1^{\perp}/\ell_1$ (resp. $\ell_2^{\perp}/\ell_2$). Alors l'application $p_1 \circ j_1$ (resp. $p_2 \circ j_2$) est un isomorphisme de $\ell_1^{\perp} \cap \ell_2^{\perp}$ sur $\ell_1^{\perp}/\ell_1$ (resp. $\ell_2^{\perp}/\ell_2$), dont l'inverse σ_{ℓ_1,ℓ_2} (resp. σ_{ℓ_2,ℓ_1}) est donné par

$$\sigma_{\ell_1,\ell_2}(v) = v - \langle v,v_2\rangle v_1 \qquad (v \in \ell_1^{\perp})$$

(resp. $$\sigma_{\ell_2,\ell_1}(v) = v - \langle v_1,v\rangle v_2 \qquad (v \in \ell_2^{\perp})).$$

Démonstration: Les deux assertions du lemme sont de vérification immédiate.

REMARQUE. - Quand nous aurons à considérer la valeur d'un noyau K sur un point $((v',\bar{b}'), (v,\bar{b}))$ de $\bar{D}_1 \times \bar{D}_1$, $v \not\sim v'$, nous nous servirons du lemme 2 ii) pour écrire

$$\bar{b}' = \begin{pmatrix} u_1'+\ell(v') \\ u_2'+\ell(v') \end{pmatrix} , \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} u_1+\ell(v) \\ u_2+\ell(v) \end{pmatrix} ,$$

où $u_i' = \sigma_{\ell(v'),\ell(v)}(\bar{b}_i')$, $u_i = \sigma_{\ell(v),\ell(v')}(\bar{b}_i)$ $(i = 1,2)$. Alors (u_1',u_2') et (u_1,u_2) sont deux bases du plan $\ell(v)^{\perp} \cap \ell(v')^{\perp}$. On notera $\bar{b}'/\bar{b}$ (ou encore $(\bar{b}'/b)_{\ell(v),\ \ell(v')}$, s'il y a de risques de confusion) la seule matrice dans G_o telle que

$$\bar{b}'/\bar{b}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} .$$

LEMME 3. - <u>Soient</u> ℓ_1 <u>et</u> ℓ_2 <u>deux droites orthogonales, mais distinctes, de</u> E. <u>Alors on a</u>

$$\ell_1^{\perp} + \ell_2^{\perp} = E , \qquad \ell_1^{\perp} \cap \ell_2^{\perp} = \ell_1 \oplus \ell_2 ,$$

<u>et si</u> ${}_1\bar{b} \in \mathbb{B}(P_{\ell_1})$, ${}_2\bar{b} \in \mathbb{B}(P_{\ell_2})$, <u>avec</u> ${}_1\bar{b}_2$, ${}_2\bar{b}_2 \subset \ell_1 \oplus \ell_2$, <u>alors</u>

$$E = \ell_1 \oplus \ell_2 \oplus \ell(u) \oplus \ell(v)$$

<u>quels que soient</u> $u \in {}_1\bar{b}_1$, $v \in {}_2\bar{b}_1$.

<u>Démonstration</u>: Comme la forme $\langle\ ,\ \rangle$ est non-dégénérée, on a codim $\ell_1^{\perp}$ = codim $\ell_2^{\perp} = 1$, c'est-à-dire dim $\ell_1^{\perp}$ = dim $\ell_2^{\perp} = 3$, et par conséquent $\ell_1^{\perp} \cap \ell_2^{\perp} = \ell_1 \oplus \ell_2$ puisque $\ell_1^{\perp} \cap \ell_2^{\perp} \supset \ell_1 \oplus \ell_2$ et que $\ell_1^{\perp} \neq \ell_2^{\perp}$. Il s'ensuit que $\dim(\ell_1^{\perp} + \ell_2^{\perp}) = 4$, donc $\ell_1^{\perp} + \ell_2^{\perp} = E$. La dernière assertion du lemme découle aussitôt de deux premières.

C.Q.F.D.

DEFINITION 4. - <u>Soit</u> $\bar{b} \in \mathbb{B}(P_{\ell})$ $(\ell \in \mathbb{L})$ <u>et soient</u> $v_1 \in \bar{b}_1$, $v_2 \in \bar{b}_2$. <u>On</u>

pose

$$\langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \quad .$$

Cette définition est légitime, puisque la valeur $\langle v_1, v_2 \rangle$ ne dépend évidemment pas des représentants v_1 , v_2 choisis. En outre, on a alors (cf. rem. au lemme 2), si $\bar{b}' \in \mathbb{B}(P_{\ell'})$ $(\ell' \in \mathbb{L})$,

$$\det(\bar{b}'/\bar{b}).\langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle = \langle \bar{b}'_1, \bar{b}'_2 \rangle$$

quelle que soit $\bar{b}' \in \mathbb{B}(P_{\ell'})$ pour $\ell' \in \mathbb{L}$, $\ell' \perp \ell$ (si $\ell' = \ell$, la significations de $\bar{b}'/\bar{b}$ est claire).

Dans la suite, si $(v, \bar{b}) \in \bar{D}_1$, quand on aura besoin de choisir des représentants u_1, u_2 des vecteurs quotients $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$ qui forment $\bar{b} \in \mathbb{B}(P_{\ell(v)})$, on écrira, s'il n'y a pas de risque de confusion, $(v, \binom{\bar{u}_1}{\bar{u}_2})$ à la place de $(v, \binom{u_1 + \ell(v)}{u_2 + \ell(v)})$.

Posons en outre

$$d_i = \ell(e_i) \qquad (1 \leqslant i \leqslant 4) \quad . \tag{8}$$

PROPOSITION 2. - <u>Soient</u> $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Car}(k^{\times})$ <u>et</u> (H, π), (H', π') <u>des représentations irréductibles de</u> G_o , <u>dont</u> π' <u>est dans la série discrète</u>.

<u>La donnée d'un noyau</u> $K \in \mathcal{H}(\alpha', \pi'; \alpha, \pi)$ <u>équivaut à la donnée des deux opérateurs</u>

i) $\varphi_K = K(e_1, \bar{b}_{24}; e_1, \bar{b}_{24}) \in \mathrm{Hom}(\alpha \otimes \pi, \alpha' \otimes \pi') \simeq \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{\pi,\pi'} \mathbb{C}$,

<u>où</u> $\bar{b}_{24} = \binom{e_2 + d_1}{e_4 + d_1}$, <u>et</u>

ii) $\psi_K = K(e_1, \binom{e_2+d_1}{e_4+d_1}; e_3, \binom{e_2+d_3}{e_4+d_3}) \in \mathrm{Hom}(\alpha^{-1}\otimes\alpha\pi, \alpha'\otimes\pi') \simeq \delta_{\alpha',\alpha^{-1}}\delta_{\pi',\alpha\pi}\mathbb{C}$.

<u>De manière plus précise, on a, pour</u> $(v',b'), (v,b)\in \bar{D}_1$,

1) $K(v',\bar{b}';v,\bar{b}) = 0$ <u>si</u> $v'\perp v$ <u>et</u> $\ell(v') \neq \ell(v)$;

2) $K(v',\bar{b}';v,\bar{b}) = \alpha'(v'/v)\pi'(\bar{b}'/\bar{b})\circ\varphi_K$ <u>si</u> $\ell(v') = \ell(v)$,

<u>où l'on note</u> v'/v <u>le seul</u> $t\in k^\times$ <u>tel que</u> $v' = tv$ <u>et l'on désigne par</u> $\bar{b}'/\bar{b}$ <u>le seul</u> $h\in G_o$ <u>tel que</u> $\bar{b}' = h\bar{b}$; <u>et enfin</u>

3) $K(v',\bar{b}';v,\bar{b}) = \alpha'(\langle v',v\rangle\langle \bar{b}_1,\bar{b}_2\rangle^{-1})\pi'(\bar{b}'/\bar{b})\circ\psi_K$ <u>si</u> $\langle v',v\rangle \neq 0$,

<u>(cf. rem. au lemme 2 et déf. 4</u>).

<u>Démonstration</u>: Montrons tout d'abord 1). Soient $(v',\bar{b}')$, $(v,\bar{b})\in\bar{D}_1$ tels que $v'\perp v$ mais $\ell(v') \neq \ell(v)$. On voit aussitôt, à l'aide du lemme 3, qu'il existe des matrices $h,h'\in G_o$ telles que

$$(h'\bar{b}')_2 = v + \ell(v') \quad , \qquad (h\bar{b})_2 = v' + \ell(v) \quad ,$$

et telles qu'il existe des représentants $u\in(h\bar{b})_1$, $u'\in(h'\bar{b}')_1$ tels que

$$E = \ell(v)\oplus\ell(v')\oplus\ell(u)\oplus\ell(u')$$

et que

$$\langle u,u'\rangle = 0 \quad , \quad \langle v,u'\rangle = \langle v',u\rangle \quad .$$

Mais on a alors, pour un $g\in G$ convenable (de multiplicateur $\langle v,u'\rangle$),

$$(v',\bar{b}') = (e_1, \binom{e_4+d_1}{e_2+d_1})g \quad , \qquad (v,\bar{b}) = (e_2, \binom{e_3+d_2}{e_1+d_2})g \quad ,$$

et donc $K(v',\bar{b}';v,\bar{b}) = \pi'^{-1}(h')\circ\theta\circ\pi(h)$

en posant

$$\theta = K(e_1, \binom{e_4+d_1}{e_2+d_1}; e_2, \binom{e_3+d_2}{e_1+d_2}) .$$

Or, on a aussi

$$(e_1, \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\binom{e_4+d_1}{e_2+d_1}) = (e_1, \binom{e_4+d_1}{e_2+d_1})g' ,$$

pour un $g' \in G$ convenable (de multiplicateur 1). Il s'ensuit que

$$\pi'\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \theta = \theta \qquad (t \in k^+) ,$$

c'est-à-dire, que l'image de θ est contenue dans le sous-espace de H' formé par les vecteurs laissés fixes par le sous-groupe unipotent supérieur de G_o , via π' . Comme π' appartient à la série discrète de G_o , cet espace est nul, et donc $\theta = 0$, d'où 1).

La relation 2) découle aussitôt de (5) et (6). La relation 3) est une conséquence immédiate de (5), (6) et du lemme 2.

Pour montrer que φ_K appartient à $\mathrm{Hom}(\alpha \otimes \pi, \alpha' \otimes \pi')$, il suffit d'appliquer (5) à φ_K et à tout $g \in P_1$ tel que $t_g = 1$ (cf. § 1, n° 1, prop. 1, i)) et se servir de (6). Le fait que ψ_K appartient à $\mathrm{Hom}(\alpha^{-1} \otimes \alpha\bar{\pi}, \alpha' \otimes \pi')$ découle analoguement de (5) appliqué à ψ_K pour tout $g \in P_1 \cap \mathrm{Stab}(d_3)$ et de (6). Comme il est, d'autre part, clair que la donnée de φ_K et de ψ_K définit bien un noyau $\in \mathcal{H}(\alpha', \pi'; \alpha, \pi)$, de la manière indiquée dans la proposition, la démonstration est achevée.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. - <u>Soit</u> $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ <u>et</u> π <u>une représentation appartenant à la série discrète de</u> G_o , <u>disons</u> $\pi = \pi_\Lambda$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$; <u>cf. ch</u>. I,

§ 4, n° 3, déf. 3 et notations). Alors

i) La représentation $V(\alpha,\pi_\Lambda)$ est irréductible si $\alpha^2 \neq 1$ ou (dans le cas car $k \neq 2$) si $\alpha = \alpha_o$ mais $\Lambda^q \neq \alpha_o \Lambda$.

ii) La représentation $V(\alpha,\pi_\Lambda)$ est réductible si $\alpha = 1$ (pour tout $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$) et si $\alpha = \alpha_o$ et $\Lambda^q = \alpha_o \Lambda \ (= \Lambda_o \Lambda)$ (si car $k \neq 2$); elle est alors somme directe de deux représentations irréductibles non-isomorphes.

En effet, cela résulte aussitôt de la proposition 2, puisque $\alpha\pi_\Lambda \ [= (\alpha\circ\det)\pi_\Lambda]$ est toujours isomorphe à $\pi_{\alpha\Lambda} \ (= \pi_{(\alpha\circ N)\Lambda})$.

COROLLAIRE 2. - Si $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Car}(k^\times)$ et π et π' sont des représentations irréductibles de G_o , dont π appartient à la série principale et π' appartient à la série discrète, alors il n'y a pas d'entrelacement entre les représentations $V(\alpha,\pi)$ et $V(\alpha',\pi')$.

COROLLAIRE 3. - Les seuls cas d'entrelacement non-trivial entre les différentes représentations $V(\alpha,\pi)$ (c'est-à-dire ne provenant pas d'un morphisme $\alpha\otimes\pi \dashrightarrow \alpha'\otimes\pi'$) , pour $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ et π appartenant à la série discrète de G_o , sont les isomorphismes

$$V(\alpha,\pi) \xrightarrow{\sim} V(\alpha^{-1},\alpha\pi)$$

et ceux qui s'en déduisent, par composition avec un opérateur d'entrelacement trivial (ou par combinaison linéaire avec l'identité dans le cas réductible).

Ces deux corollaires résultent aussitôt de la proposition 2.

REMARQUE. - Réalisons, comme il est naturel, les représentations $\alpha\otimes\pi$ et

$\alpha^{-1}\otimes\alpha\pi$ dans un même espace H. Si ψ est un isomorphisme de $\alpha^{-1}\otimes\alpha\pi$ sur $\alpha\otimes\pi$, alors $\psi\circ\psi$ en est un de $\alpha^{-1}\otimes\alpha\pi$ sur $\alpha^{-1}\otimes\alpha\pi$, d'où $\psi\circ\psi=\lambda\,\mathrm{Id}_H$ pour un $\lambda\in\mathbb{C}^\times$, convenable. On voit donc que l'isomorphisme ψ_K de la proposition est une involution, à un scalaire près.

3. Structure de l'algèbre commutante de $V(\alpha,\pi_\Lambda)$ (cas réductible).

Dans tout ce numéro, α désigne un caractère de $k^\times$ tel que $\alpha^2=1$, et Λ désigne un caractère de $K^\times$, tel que $\Lambda\neq\Lambda^q$ et $\alpha\Lambda\in\{\Lambda,\Lambda^q\}$.

PROPOSITION 3. - *L'algèbre commutante* $A(\alpha,\Lambda)=\mathrm{End}(V(\alpha,\pi_\Lambda))$ *admet comme* $\mathbb{C}$ - *base l'opérateur identité* I *et l'opérateur* Ψ *défini par*

$$(9)\qquad (\Psi f)(v,\bar b)=\frac{1}{(q-1)|G_o|}\sum_{\substack{\langle v',v\rangle\neq 0\\ \bar b'\in\mathbb{B}(P_{\ell(v')})}}\alpha(\langle v,v'\rangle\langle\bar b_1',\bar b'\rangle^{-1})\pi_\Lambda(\bar b/\bar b')\circ\psi[f(v',\bar b')]$$

$((v,\bar b)\in\bar D_1)$, *où l'on choisit* ψ *égal à l'un des deux isomorphismes involutifs de* $(H,\alpha^{-1}\otimes\alpha\pi_\Lambda)$ *sur* $(H,\alpha\otimes\pi_\Lambda)$ (*cf. n°* 2, *rem. au cor*. 3 *à la prop*. 2). *On a*

$$(10)\qquad \Psi^2=\alpha(-1)q^3I+c(\alpha,\Lambda,\psi)\Psi$$

où

$$(11)\qquad c(\alpha,\Lambda,\psi)=\delta_{\alpha,1}\mathrm{Trace}(\psi)+(q^2-1)\mathrm{Trace}[\psi\circ\pi_\Lambda\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}]\ .$$

Démonstration: Notons K_o le noyau définissant I et notons K_1 celui définissant Ψ. Avec les notations de la proposition 2 du numéro 2, on a alors

$$\varphi_{K_o}=(q-1)^{-1}|G_o|^{-1}\mathrm{Id}_H\ ,\qquad \psi_{K_o}=0\ ;$$

$$\varphi_{K_1} = 0 \quad , \qquad \psi_{K_1} = (q-1)^{-1}|G_o|^{-1} \quad ;$$

il est ainsi clair que I et Ψ forment une $\mathbb{C}$ - base de $A(\alpha,\Lambda)$. On calcule sans difficulté, en se servant de la remarque au lemme 2 (n° 2) et de la relation $\psi^2 = Id_H$, que

$$(K_2 * K_2)(e_1,\bar{b}_{24};e_1,\bar{b}_{24}) = |E - \ell_1^{\perp}|(q-1)^{-1}|G_o|^{-1}Id_H$$

d'où le fait que le coefficient de I dans Ψ^2 est q^3 . Calculons maintenant le coefficient de Ψ dans Ψ^2 . D'après la proposition 2,3) et la remarque au lemme 2, du numéro 2, en posant ${}_1\bar{b}_{24} = (e_2+d_1,\ e_4+d_1)$ et ${}_3\bar{b}_{24} = (e_2+d_3,\ e_4+d_3)$, on a, compte tenu du fait que $\alpha = \alpha^{-1}$,

$$(K_2 * K_2)(e_1,{}_1\bar{b}_{24};\ e_3,{}_3\bar{b}_{24}) =$$
$$= \frac{(q-1)^{-2}}{|G_o|^2} \sum_{\substack{v \not\in e_1,e_3 \\ \bar{b}\in\mathbb{B}(P_{\ell(v)})}} \alpha(\langle e_1,v\rangle\langle v,e_3\rangle)\psi\pi_\Lambda[(\bar{b}/{}_1\bar{b}_{24})^{-1}(\bar{b}/{}_3\bar{b}_{24})]\psi \ .$$

Posons $h_b = (\bar{b}/{}_1\bar{b}_{24})^{-1}(\bar{b}/{}_3\bar{b}_{24})$, pour $b\in\mathbb{B}(P_{\ell(v)})$, $v\in {}_*E$, $v\not\in e_1,e_3$. Alors h_b est la seule matrice $h_{\ell(v)}$ de G_o (de déterminant nécessairement égal à 1) telle que

$$h_{\ell(v)}\begin{pmatrix}\sigma_{d_3},\ (v)(e_2)+\ell(v)\\ \sigma_{d_3},\ (v)(e_4)+\ell(v)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_{d_1},\ (v)(e_2)+\ell(v)\\ \sigma_{d_1},\ (v)(e_4)+\ell(v)\end{pmatrix} \ .$$

On voit ainsi d'ailleurs que h_b ne dépend que de la droite $\ell(v)$; comme il en est de même de $\alpha(\langle e_1,v\rangle\langle v,e_3\rangle)$, car $\alpha^2 = 1$, en choisissant, pour chaque droite $\ell\in\mathbb{L}$, $\ell\not\in d_1,d_2$, un représentant u_ℓ tel que $\langle u_\ell\ ,\ e_3\rangle = 1$, et en tenant compte du fait que $\psi\pi_\Lambda(h) = \pi_\Lambda(h)\psi$ si $h\in G_o$ est de déterminant 1 , on obtient

$$(K_2 * K_2)(e_1,{}_1\bar{b}_{24};\ e_3,{}_3\bar{b}_{24}) = \frac{(q-1)^{-1}}{|G_o|} \sum_{\ell\neq\ell_1,\ell_3} \alpha(\langle e_1,u\rangle)\pi_\Lambda(h_\ell) \ .$$

Ecrivons $u_\ell = e_1+se_2+te_3+re_4$ $(r,s\in k\ ,\ t\in k^\times)$. Alors $\langle e_1,u_\ell\rangle = t$ et l'on trouve aisément (cf. n° 2, lemme 2),

$$\sigma_{d_3,\ell}(e_2) = e_2+re_3\ ,\qquad \sigma_{d_3,\ell}(e_4) = e_4-se_3\ ,$$

$$\sigma_{d_1,\ell}(e_2) = e_2-rt^{-1}e_1\ ,\qquad \sigma_{d_1,\ell}(e_4) = e_4+st^{-1}e_3\ .$$

d'où $h_\ell = h_{r,s,t}$ avec

$$h_{r,s,t} = \begin{pmatrix} 1+rst^{-1} & r^2t^{-1} \\ -s^2t^{-1} & 1-rst^{-1}\end{pmatrix} \tag{12}$$

et par conséquent

$$(K_2 * K_2)(e_1,{}_1\bar b_{24};\ e_3,{}_3\bar b_{24}) = \frac{(q-1)^{-1}}{|G_o|}\sum_{\substack{r,s\in k^+\\ t\in k^\times}}\alpha(t)\pi_\Lambda(h_{r,s,t})\ ,$$

$$= \frac{(q-1)^{-1}}{|G_o|}\left[\sum_{t\in k^\times}\alpha(t)Id_H + \sum_{\substack{t\in k^\times\\ (r,t)\in {}_*k^2}}\alpha(t)\pi_\Lambda(h_{r,s,t})\right]\ .$$

Or, pour tout $t\in k^\times$, $(r,s)\in {}_*k^2$, la matrice $h_{r,s,t}$ est conjuguée à la matrice $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ de G_o . De manière plus précise, on a

$$h_{r,s,t} = g\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}g^{-1}$$

pour tout $g\in G_o$ de la forme $g = \begin{pmatrix}r&b\\-s&d\end{pmatrix}$ avec $dr+bs = t$ $(b,d\in k^+)$. Il s'ensuit que

$$\sum_{\substack{t\in k^\times\\ (r,s)\in {}_*k^2}}\alpha(t)\pi_\Lambda(h_{r,s,t}) = \frac{1}{q}\sum_{g\in G_o}(\alpha\circ\det)(g)\pi_\Lambda(g)\pi_\Lambda\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\pi_\Lambda^{-1}(g)\ .$$

Notons $S_{\alpha,\Lambda}$ la somme ci-dessus. Comme $\psi\in\mathrm{Isom}\ (H,\alpha\pi_\Lambda),(H,\pi_\Lambda)$, il s'ensuit $S_{\alpha,\Lambda} = \frac{1}{q}c'(\alpha,\Lambda,\psi)\psi^{-1}$ où, d'après le lemme 1 du numéro 2 du paragraphe 6 du chapitre I,

$$c'(\alpha,\Lambda,\psi) = (\dim\pi_\Lambda)^{-1}|G_o|\,\mathrm{Trace}(\psi\pi_\Lambda\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix})\ .$$

Il en résulte que le coefficient de Ψ dans Ψ^2 a bien la valeur annoncée.

C.Q.F.D.

4. Décomposition de $V(1,\pi_\Lambda)$ $(\Lambda \in Car(K^\times) - Car(k^\times))$.

Nous gardons dans ce numéro les notations de la proposition 3 du numéro précédent, à ceci près que nous posons maintenant $\alpha = 1$. On a alors la

PROPOSITION 4. - Dans l'algèbre commutante $A(1,\Lambda)$, on a

(13) $$\Psi^2 = q^3 I - q(q-1)\Psi \ .$$

Démonstration: Nous prenons $\psi = Id_H$ dans la proposition 3 du numéro 3, alors

$$c(1,\Lambda,Id_H) = (q-1) - (q^2-1)\Lambda(1) = -q(q-1) \ .$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. - La représentation $V(1,\pi_\Lambda)$ se décompose en deux composantes irréductibles non-isomorphes, sous la forme

$$V(1,\pi_\Lambda) = V(1,\pi_\Lambda)^q \oplus V(1,\pi_\Lambda)^1$$

avec

$$V(1,\pi_\Lambda)^i = \mathrm{Im}\, P_i \qquad (i = 1,q) \ ,$$

où les projecteurs P_1 et P_q sont donnés par

(14) $$P_q = \frac{q}{q+1} I + \frac{1}{q(q+1)}\Psi \ ,$$

(15) $$P_1 = \frac{1}{q+1} I - \frac{1}{q(q+1)}\Psi$$

(cf. n° 3, prop. 3 avec $\psi = \mathrm{Id}_H$ pour la définition de Ψ) .

On a

(16) $$\dim V(1,\pi_\Lambda)^i = i(q-1)(q^2+1) \qquad (i = 1,q) \quad .$$

En effet, on obtient P_q et P_1 par un calcul facile à partir de (13). Les dimensions données résultent du fait que, évidemment, Trace $\Psi = 0$.

5. Décomposition de $V(\alpha_o,\pi_\Lambda)$ $(\Lambda\in\mathrm{Car}(K^\times)$, $\Lambda^q = \alpha_o\Lambda$).

Supposons maintenant car $k \neq 2$. Rappelons que l'on note α_o le caractère non-trivial de $k^\times$ dont le carré est 1 . Nous gardons les notations de la proposition 3 du numéro 3, à ceci près que nous posons maintenant $\alpha = \alpha_o$. On désigne alors par Λ un caractère de $K^\times$ tel que $\Lambda^q = \alpha_o\Lambda$ (ce qui revient à dire que la restriction de Λ au cercle unité U de K est le caractère non-trivial ω_o de U , de carré trivial; on peut encore écrire $\Lambda^{q-1} = \omega_o$ avec nos conventions d'identification).

Précisons le choix de l'involution ψ .

PROPOSITION 5. - *Réalisons la représentation* (H,π_Λ) *par la méthode de Weil, avec choix d'un caractère additif* e *de* k^+ (*cf. ch.* I, § 3, *n*° 2), *à savoir le caractère fondamental* e *de* k^+ (*cf. ch.* I, § 2, *n*° 2, *th.* 3). *On définit alors un isomorphisme involutif* $\psi = \psi_e$ *de* $(H, \alpha_o\otimes\alpha_o\pi_\Lambda)$ *sur* $(H, \alpha_o\otimes\pi_\Lambda)$ *en posant*

(17) $$(\psi_e f)(x,e^t) = \Lambda_o(x)\alpha_o(t)f(x,e^t) \qquad (f\in H=V_\Lambda\ ,\ x\in K^\times,\ t\in k^\times)$$

(*où* Λ_o *désigne le caractère non-trivial de* $K^\times$ *de carré trivial*).

Démonstration: Cela est clair, d'après le définition de (V_Λ, π_Λ) (ch. I, § 4, n° 2) compte tenu du fait que $\Lambda_o = \alpha_o \circ N$.

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Si à la place de e on choisit un autre caractère $e' = e^r$, on trouve aussitôt que $\psi_{e'} = \alpha_o(r)\psi_e$.

Nous calculons maintenant la trace de l'opérateur $\psi_e \circ \pi_\Lambda\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ dans H .

LEMME 4. - On a

$$\mathrm{Trace}(\psi_e \circ \pi_\Lambda\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}) = \sum_{t \in k^\times} \alpha_o(t)e(t) \quad .$$

Démonstration: Considérons la base $\{f_t\}_{t \in k^\times}$ de $H = V_\Lambda$ définie par

$$f_t(x,r) = \Lambda(x)\delta_{t,rN(x)} \qquad (r,t \in k^\times,\ x \in K^\times) \quad .$$

On a, d'après la définition de la représentation de Weil avec choix d'un caractère (ch. I, § 4, n° 4, rem.)

$$\pi_\Lambda\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} f_t = e(t)f_t \qquad (t \in k^\times) \quad ,$$

d'où

$$[\psi_e \circ \pi_\Lambda\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}]\, f_t = \alpha_o(t)e(t)f_t \quad .$$

Le lemme s'ensuit.

C.Q.F.D.

Rappelons que la somme de Gauss $G(e,\alpha_o) = \sum_{t \in k^\times} \alpha_o(t)e(t)$ est une racine carrée de $\alpha_o(-1)q$. Pour la détermination du signe, cf. ch. I, § 2, n ° 2, th. 3. Notons Ψ_e l'opérateur Ψ défini par $\psi = \psi_e$, d'après la proposition 3 du numéro 3. On a alors la

PROPOSITION 6. - Dans l'algèbre commutante $A(\alpha_o,\Lambda)$, on a

$$\Psi_e^2 = \alpha_o(-1)q^3 I + (q^2-1)G(\alpha_o,e)\Psi_e \quad . \tag{18}$$

COROLLAIRE. - La représentation $V(\alpha_o,\pi_\Lambda)$ $(\Lambda\in Car(\check{K}),\ \Lambda^{q-1} = \alpha_o)$ se décompose en deux composantes irréductibles non-isomorphes

$$V(\alpha_o,\pi_\Lambda) = V(\alpha_o,\pi_\Lambda)^{q^2} \oplus V(\alpha_o,\pi_\Lambda)^1 \quad ,$$

avec

$$V(\alpha_o,\pi_\Lambda)^i = \operatorname{Im} P_i \qquad (i = 1,q^2) \ ,$$

où les projecteurs P_1 et P_{q^2} sont donnés par

$$P_1 = \frac{1}{q^2+1}\left[I + G(\alpha_o,e)^{-1}\Psi_e\right] \quad , \tag{19}$$

$$P_{q^2} = \frac{1}{q^2+1}\left[q^2 I - G(\alpha_o,e)^{-1}\Psi_e\right] \quad . \tag{20}$$

On a

$$\dim V(\alpha_o,\pi_\Lambda)^i = i(q^2-1) \qquad (i = 1,q^2) \quad .$$

Démonstration: Cela est une conséquence immédiate de la proposition 6, compte tenu de la relation $G(\alpha_o,e)^2 = \alpha_o(-1)q$.

REMARQUE. - Il est clair sur les formules (19) et (20), que P_1 et P_{q^2} ne dépendent pas du choix de e , puisque il en est ainsi du multiple $G(\alpha_o,e)^{-1}\Psi_e$ de l'opérateur Ψ_e .

6. Description de la série de représentations de G associée à P_1 .

THEOREME 1. - La série de types d'isomorphie des représentations irréductibles de G associé au sous-groupe parabolique P_1 est formée des six (resp. trois) séries disjointes suivantes, si car $k \neq 2$ (resp. car $k = 2$) ,

i) les $\frac{1}{4}(q-3)q(q-1)$ (resp. $\frac{1}{4}(q-2)q(q-1)$) types d'isomorphie des représentations $V(\alpha,\pi_\Lambda)$, de dimension q^4-1 , pour $\alpha \in \mathrm{Car}(k)$, $\alpha^2 \neq 1$, $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$, si car $k \neq 2$ (resp. car $k = 2$) .

ii) les $\frac{1}{4}(q-1)^2$ types d'isomorphie des représentations $V(\alpha_o,\pi_\Lambda)$, de dimension q^4-1 , pour $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$, $\Lambda^{q-1} \neq 1, \alpha_o$ si car $k \neq 2$.

iii) les $\frac{1}{2}q(q-1)$ types d'isomorphie des représentations $V(1,\pi_\Lambda)^q$, de dimension $q(q-1)(q^2-1)$, pour $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$.

iv) les $\frac{1}{2}q(q-1)$ types d'isomorphie des représentations $V(1,\pi_\Lambda)^1$, de dimension $(q-1)(q^2-1)$, pour $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$.

v) les $\frac{1}{2}(q-1)$ types d'isomorphie des représentations $V(\alpha_o,\pi_\Lambda)^{q^2}$, de dimension $q^2(q^2-1)$, pour $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$ tel que $\Lambda^{q-1} = \alpha_o$, si car $k \neq 2$.

vi) les $\frac{1}{2}(q-1)$ types d'isomorphie des représentations $V(\alpha_o,\pi_\Lambda)^1$, de dimension q^2-1 , pour $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$ tel que $\Lambda^{q-1} = \alpha_o$, si car $k \neq 2$.

Démonstration: Cela résulte aussitôt des corollaires 1 et 3 à la proposition 2 (n° 2), du corollaire à la proposition 4 (n° 4) et du corollaire à la proposition 6 (n° 5) .

C.Q.F.D.

7. Le non-entrelacement des séries associées à P_1 , P_2 et B .

On sait (cf. [14] p. C-10) que la série de représentations irréductibles de G associée à P_1 , celle associée à P_2 et la série principale sont disjointes. Ce fait général est vérifié fort aisément par notre méthode.

En effet, on a déjà vu (§ 2, n° 2, cor. 2 à la prop. 2) que la série associée à P_2 et la série principale sont disjointes. On a aussi vu (§ 4, n° 2, cor. 2 à la prop. 2) que la série associée à P_1 et la série principale sont disjointes. Nous montrons ci-dessous, en particulier, qu'il en est de même pour les séries associées à P_1 et P_2

Le résultat suivant est immédiat.

LEMME 5. - *Soient* α,γ $\mathrm{Car}(k\ )$ *et* (H,π), (H',π') *deux représentations de* G_o . *Notons* $\mathcal{H}(\pi',\gamma;\alpha,\pi)$ *le* $\mathbb{C}$ - *espace vectoriel formé des applications* K *de* $(\mathbb{B}\times k^{\times})\times\overline{D}_1$ *dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H,H')$ *telles que*

$$K(b'g,tm_g^{-1};\ vg,\overline{b}g) = K(b',t;\ v,\overline{b}) \tag{21}$$

quels que soient $b'\in\mathbb{B}$, $t\in k^{\times}$, $(v,\overline{b})\in\overline{D}_1$ *et* $g\in G$, *et*

$$K(h'b',rt;\ sv,h\overline{b}) = \gamma(r)\pi'(h')\circ K(b',t;\ v,\overline{b})\circ\alpha^{-1}(s)\pi(h) \tag{22}$$

quels que soient $h',h\in G_o$, $r,s,t\in k$, $b'\in\mathbb{B}$, $(v,\overline{b})\in\overline{D}_1$.

Alors, en associant à chaque noyau $K\in\mathcal{H}(\pi',\gamma;\alpha,\pi)$ *l'opérateur* $\Phi_K\in\mathrm{Hom}_G[V(\alpha,\pi),M(\pi',\gamma)]$ *défini par*

$$(\Phi_K f)(x) = \sum_{y\in\overline{D}_1} K(x,y)(f(y)) \qquad (f\in V(\alpha,\pi),\ x\in\mathbb{B}\times k^{\times}) ,$$

on établit un isomorphisme du $\mathbb{C}$ - *espace vectoriel* $\mathcal{H}(\pi',\gamma;\alpha,\pi)$ *sur le* $\mathbb{C}$ - *espace vectoriel* $\mathrm{Hom}_G[V(\alpha,\pi),\ M(\pi',\gamma)]$.

PROPOSITION 7 - *Les représentations* $M(\pi',\gamma)$ *et* $V(\alpha,\pi)$ *de* G *ne s'entrelacent pas, quels que soient* $\alpha,\gamma\in\mathrm{Car}(k^{\times})$ *et les représentations irréductibles* π *et* π' *de* G_o , *pourvu que l'une au moins soit dans la série dis-*

crète de G_o .

Démonstration: Nous montrons que $\mathcal{H}(\pi',\gamma;\alpha,\pi) = 0$. Il résulte aussitôt des relations (21) et (22) que pour montrer que $K \in \mathcal{H}(\pi',\gamma;\alpha,\pi)$ est nul, il suffit de montrer que les opérateurs

$$\varphi = K(\binom{e_2}{e_1},1;\ e_1,\binom{e_2+d_1}{e_4+d_1}) \quad ,$$

$$\psi = K(\binom{e_3}{e_2},1;\ e_1,\binom{e_2+d_1}{e_4+d_1}) \quad ,$$

par exemple, sont nuls. Or, pour tout $t \in k^+$, il existe $g \in G$, de multiplicateur 1 , tel que $e_2g = e_2+te_1$, $e_1g = e_1$, $e_4g = e_4$ (resp. $e_3g = e_3+te_2$, $e_2g = e_2$, $e_4g = te_1+e_4$) . Il s'ensuit alors de (21) et (22) que l'on a

$$\pi'\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\circ\varphi = \varphi \qquad (t \in k^+) \quad , \tag{23}$$

$$\pi'\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\circ\psi = \psi \qquad (t \in k^+) \quad . \tag{24}$$

De même, pour tout $t \in k^+$, il existe $g \in G$, de multiplicateur 1 , tel que $e_ig = e_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ et $e_4g = te_2+e_4$, d'où, par (21) et (22),

$$\varphi\circ\pi\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \varphi \qquad (t \in k^+) \quad , \tag{25}$$

$$\psi\circ\pi\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \psi \qquad (t \in k^+) \quad . \tag{26}$$

Comme les représentations de la série discrète de G_o sont exactement celles qui n'admettent pas de vecteur invariant par les $\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $(t \in k^+)$, les relations (23) à (26) montrent que si π ou π' sont dans la série discrète alors $\varphi = \psi = 0$.

C.Q.F.D.

CHAPITRE III

<u>La représentation de Weil de</u> $G = GSp(2n,k)$.

Dans ce chapitre, nous construisons la représentation de Weil de $GSp(2n,k)$ et nous faisons quelques remarques générales sur sa décomposition que nous achèverons, pour $n = 2$, dans le chapitre IV (resp. V) pour le cas déployé (resp. non-déployé).

Dans tout ce chapitre, sauf mention expresse du contraire, comme au paragraphe 1, on désigne par k le corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléménts, sans restriction sur sa caractéristique. On note G le groupe des similitudes symplectiques $GSp(2n,k)$ en $2n$ variables sur k , et G' le groupe symplectique en $2n$ variables sur k .

§ 1. Une présentation de $GSp(2n,k)$.

Dans ce paragraphe, k désigne un corps (commutatif) quelconque.

Nous nous proposons de généraliser à $GSp(2n,k)$ la présentation que nous avons donnée de $GL(2,k) = GSp(2,k)$ dans le chapitre I.

1.- Préliminaires et notations.

Dans toute la suite, nous désignons par G le groupe $GSp(2n,k)$ des similitudes symplectiques en dimension $2n$. Notons A la k-algèbre $M_n(k)$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans k , notons a^* la matrice transposée de $a \in A$ et A^s le sous-espace de A formé des $a \in A$ telles que $a^* = a$. Notons enfin $A^\times$ le groupe des éléments inversibles de A . Nous réalisons G comme le groupe de similitudes de la forme bilinéaire alternée (non-dégénérée) type, notée $\mathfrak{I}$, dans $E = k^n \oplus k^n$, donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(k)$ par rapport à la base canonique de E . Un k-automorphisme g de E appartient alors à G si et seulement si l'on a

$$(1) \qquad \mathfrak{I}(gx,gy) = \mu(g)\,\mathfrak{I}(x,y) \qquad (x,y \in E)$$

pour un scalaire $\mu(g) \in k^\times$ convenable, appelé le <u>multiplicateur</u> de g . Il s'ensuit que le groupe G peut être décrit comme le groupe de toutes les matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(A)$ telles que

$$(2) \qquad a^*c = c^*a \quad , \; b^*d = d^*b \quad ,$$

$$(3) \qquad a^*d - c^*b \in k^\times \quad .$$

Il est clair que les trois conditions ci-dessus entraînent que g est inversible dans $M_2(A)$ et que $a^*d-c^*b = \mu(g)$. Dans ce paragraphe et les suivants, nous nous servirons de cette dernière description de G .

Nous noterons G' le groupe symplectique $Sp(2n,k)$ à $2n$ variables, qui est le noyau de l'homomorphisme μ de G sur $k^{\times}$.

Remarquons que si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ (resp. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G'$) , il en est de même de sa transposée $\begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$; ceci montre que l'on a, en plus des relations (2) et (3) , les suivantes

(4) $\qquad ab^* = ba^* \quad , \; cd^* = dc^*$

(5) $\qquad ad^* - bc^* \in k^{\times}$.

2.- Les générateurs de G.

Nous montrons dans ce numéro que G est engendré par des générateurs analogues à ceux de $GL(2,k)$ (cf. chapitre I, § 2 , n°1)

DEFINITION 1.- *Posons*

$$\underline{h}'(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \qquad (r \in k^{\times}) ,$$

$$\underline{h}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^*)^{-1} \end{pmatrix} \qquad (a \in A^{\times}) ,$$

$$\underline{u}(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b \in A^{s}) ,$$

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Toutes les matrices définies ci-dessus appartiennent clairement à G . Nous allons voir qu'elles engendrent G . Nous aurons besoin pour cela de 2 lemmes de géométrie orthogonale. (Pour les propriétés élémentaires des formes bilinéaires symétriques en toute caractéristique, nous renvoyons à [2]) .

LEMME 1.- *Soit* V *un k-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire* B *symétrique et non-dégénérée. Soit* W *un sous-espace de* V . *Alors il existe un endomorphisme* s , *symétrique (par rapport à* B), *de* V *tel que*

i) *la restriction de* s *à* W *est un isomorphisme de* W *sur* $s(W)$;

ii) $\operatorname{Im} s = s(W)$;

iii) $s(W) \cap W^{\perp} = 0$,

<u>(où l'on note</u> $W^{\perp}$ <u>l'orthogonal de</u> W <u>par rapport à</u> B) .

<u>Démonstration</u> :

Soient T un supplémentaire de W dans l'espace V , et C une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur W . Prolongeons C en une forme bilinéaire symétrique C_1 sur V par

$$C_1(w_1+t_1,w_2+t_2) = C(w_1,w_2) \qquad w_i \in W \ , \ t_i \in T \ .$$

Comme B est symétrique et non-dégénérée, il existe un endomorphisme s de V , symétrique (par rapport à B) , tel que

$$C_1(v_1,v_2) = B(sv_1,v_2) \quad \text{pour } v_1,v_2 \text{ dans } V \ .$$

Il est immédiat que le noyau de s est égal à T , c'est-à-dire

$$V = W \oplus \operatorname{Ker} s \quad ,$$

et les propriétés (i) et (ii) résultent de là. Enfin, soit $w \in W$ tel que $s(w) \in W^{\perp}$, autrement dit, tel que

$$B(sw,w') = C_1(w,w') = C(w,w') \qquad ,$$

soit nul pour tout $w' \in W$. Comme C est non-dégénérée, ceci entraîne $w = 0$, d'où $s(W) \cap W^{\perp} = 0$.

C.Q.F.D.

LEMME 2.- <u>Soit</u> V <u>un k-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée</u> B . <u>Notons</u> h^* <u>la transposée de</u> $h \in \mathrm{End}_k V$ <u>par rapport à</u> B . <u>Soient</u> $a,b \in \mathrm{End}_k V$ <u>tels que</u> $a^*b = b^*a$. <u>Alors, pour qu'il existe</u> $s \in \mathrm{End}_k V$, s <u>symétrique, telle que</u> $a+sb$ <u>soit inversible, il faut et il suffit que</u> $\mathrm{Ker}\, a \cap \mathrm{Ker}\, b = 0$.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que la condition est nécessaire. Montrons la suffisance. Supposons $\mathrm{Ker}\, a \cap \mathrm{Ker}\, b = 0$. Posons alors $V = \mathrm{Ker}\, a \oplus \mathrm{Ker}\, b \oplus W$. On a

$$a : \mathrm{Ker}\, b \oplus W \xrightarrow{\sim} a(\mathrm{Ker}\, b) \oplus a(W)$$

et

$$b : \mathrm{Ker}\, a \oplus W \xrightarrow{\sim} b(\mathrm{Ker}\, a) \oplus b(W) \quad .$$

Posons $\dim \mathrm{Ker}\, a = m$, $\dim \mathrm{Ker}\, b = n$, $\dim W = r$. On a alors $\dim V = m+n+r$. Or l'hypothèse $a^*b = b^*a$ signifie $B(ax,by) = B(bx,ay)$ pour tous les $x,y \in V$. Il s'ensuit en particulier que $\mathrm{Im}\, a \subset (b\, \mathrm{Ker}\, a)^{\perp}$; mais, comme $\dim (b\, \mathrm{Ker}\, a)^{\perp} = n+r = \dim \mathrm{Im}\, a$, on a $\mathrm{Im}\, a = (b\, \mathrm{Ker}\, a)^{\perp}$.

D'après le lemme 1, il existe alors un endomorphisme symétrique s de V, tel que

$$s : b\, \mathrm{Ker}\, a \xrightarrow{\sim} s(b\, \mathrm{Ker}\, a) = \mathrm{Im}\, s \quad \text{et} \quad s(b\, \mathrm{Ker}\, a) \cap \mathrm{Im}\, a = 0 \ .$$

Nous avons donc $V = \mathrm{Im}\, a \oplus \mathrm{Im}\, s$.

Montrons maintenant que $a+sb$ est un automorphisme de V . Il suffit de prouver que son noyau N est réduit à 0 . Or, soit $x \in N$, d'où $ax = -sbx$. Comme on a $\mathrm{Im}\, a \cap \mathrm{Im}\, s = 0$, on a donc

$ax = sbx = 0$, d'où $x \in \text{Ker } a$. Comme la restriction de s à $b \text{ Ker } a$ est injective, on a donc $bx = 0$, d'où

$$x \in \text{Ker } a \cap \text{Ker } b \quad ,$$

et finalement $x = 0$.

C.Q.F.D.

LEMME 3.- <u>Soient</u> $a, c \in A$ <u>tels que</u> $a^*c = c^*a$. <u>Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes</u> :

i) $Aa + Ac = A$;

ii) $\text{Ker } a \cap \text{Ker } c = 0$;

iii) <u>il existe</u> $s \in A^s$ <u>tel que</u> $a + sc \in A^\times$.

C'est une conséquence immédiate du lemme 3 appliqué à $V = k^n$ et à la forme bilinéaire B donnée par la matrice unité par rapport à la base canonique de k^n .

PROPOSITION 1.- <u>Les éléments</u> $\underline{h}(a)$ $(a \in A^\times)$, $\underline{u}(b)$ $(b \in A^s)$ <u>et</u> $\underline{w}$ <u>engendrent</u> G' . <u>De manière plus précise, pour</u> $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G'$, <u>nous avons</u> :

i) <u>si</u> $c = 0$,

(6) $$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{*-1} \end{pmatrix} = \underline{h}(a)\, \underline{u}(a^{-1} b) \ ;$$

ii) <u>si</u> $c \in A^\times$,

(7) $$g = \underline{h}((-c^*)^{-1})\, \underline{u}(c^*a)\, \underline{wu}(c^{-1}d) \ ;$$

iii) <u>dans le cas général</u>

(8) $$g = \underline{u}(-s)\, \underline{h}(-z)\, \underline{wu}(-z^*c)\, \underline{wu}(z^{-1}(b+sd)) \quad ,$$

<u>où</u> s <u>désigne un élément de</u> A^s <u>tel que</u> $a+sc \in A^\times$ <u>et où l'on a posé</u> $z = a+sc$.

Démonstration : Les assertions i) et ii) sont immédiates et iii) découle aussitôt de ii) appliquée à l'élément $\underline{w}^{-1}\underline{u}(s)g$.

REMARQUE.- Si $g \in G$, alors $\underline{h}'(\mu(g)^{-1})g \in G'$ et nous obtenons ainsi, d'après la proposition 1 , une expression explicite de g en termes des éléments $\underline{h}'(t)$ $(t \in k^{\times})$, $\underline{h}(a)$ $(a \in A^{\times})$, $\underline{u}(b)$ $(b \in A^{s})$ et $\underline{w}$.

3.- Les relations entre les générateurs de G .

PROPOSITION 2.- Nous avons les relations universelles suivantes entre les générateurs $\underline{h}'(t)$ $(t \in k^{\times})$, $\underline{h}(a)$ $(a \in A^{\times})$, $\underline{u}(b)$ $(b \in A^{s})$ et $\underline{w}$ de G ,

(i) $\underline{h}'(r)\underline{h}'(t) = \underline{h}'(rt)$ $(r,t \in k^{\times})$,

(ii) $\underline{h}(a)\underline{h}(d) = \underline{h}(ad)$ $(a,d \in A^{\times})$,

(iii) $\underline{u}(a)\underline{u}(b) = \underline{u}(a+b)$ $(a,b \in A^{s})$,

(iv) $\underline{h}'(t)\underline{h}(a) = \underline{h}(a)\underline{h}'(t)$ $(a \in A^{\times}, t \in k^{\times})$,

(v) $\underline{h}'(t)\underline{u}(tb) = \underline{u}(b)\underline{h}'(t)$ $(b \in A^{s}, t \in k^{\times})$,

(vi) $\underline{h}(a)\underline{u}(b) = \underline{u}(aba^*)\underline{h}(a)$ $(a \in A^{\times}, b \in A^{s})$,

(vii) $\underline{w}^2 = \underline{h}(-1)$,

(viii) $\underline{w}\underline{h}'(t) = \underline{h}'(t)\underline{h}(t)\underline{w}$ $(t \in k^{\times})$,

(ix) $\underline{w}\underline{h}(a) = \underline{h}(a^{*-1})\underline{w}$ $(a \in A^{\times})$,

(x) $\underline{w}\underline{u}(a^{-1})\underline{w}\underline{u}(a)\underline{w}\underline{u}(a^{-1}) = \underline{h}(a)$ $(a \in A^{\times} \cap A^{s})$.

La vérification de ces relations est un calcul facile.

DEFINITION 2.- Posons

$$\underline{H} = \{\underline{h}(a) \mid a \in A^{\times}\} ,$$

$$\underline{U} = \{\underline{u}(b) \mid b \in A^{s}\} ,$$

$$\underline{H}' = \{\underline{h}'(t) \mid t \in k^{\times}\} .$$

Nous obtenons aisément une première présentation de G .

PROPOSITION 3.- Le groupe G est engendré par les éléments $\underline{h}'(t)$ $(t \in k^{\times})$, $\underline{h}(a)$ $(a \in A^{\times})$, $\underline{u}(b)$ $(b \in A^{s})$ et $\underline{w}$. Plus précisement on a

$$G = \underline{H}'\underline{H}\underline{U}\underline{w}\underline{U}\underline{w}\underline{U} = (\underline{H}'\underline{H}\underline{U}\underline{w}\underline{U})^{2}.$$

Un système complet de relations entre ces générateurs est formé par les relations i) à ix) de la proposition 2 et la relation suivante

$(*)$ $\quad \underline{w}\underline{u}(a)\underline{w}\underline{u}(b)\underline{w} = \underline{u}(-s)\underline{h}(-z)\underline{w}\underline{u}(z*(ab-1))\underline{w}\underline{u}(z^{-1}(sa-1))$

pour tous les $a,b \in A^{s}$ et $s \in A^{s}$ tels que $z = b+s(1-ab) \in A^{\times}$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que la relation $(*)$, que l'on obtient aisément à partir de la relation (8), permet - avec les relations (i) à (ix) - de ramener toute relation entre les générateurs en question à une relation du type

(9) $\qquad (t)\underline{h}(a)\underline{u}(b)\underline{w}\underline{u}(c)\underline{w}\underline{u}(d) = 1$

avec $t \in k^{\times}$, $a \in A^{\times}$, $b,c,d \in A^{s}$, ou

(10) $\qquad \underline{h}'(t)\underline{h}(a)\underline{u}(b)\underline{w}\underline{u}(c) = 1$

pour $t \in k^{\times}$, $a \in A^{\times}$, $b,c \in A^{s}$, ou

(11) $\qquad \underline{h}'(t)\underline{h}(a)\underline{u}(b) = 1$

pour $t \in k^{\times}$, $a \in A^{\times}$, $b \in A^{s}$. Mais ces relations sont impossibles à moins que $t = 1$, (9) est impossible à moins que $c = 0$ et se ramène donc, à l'aide des relations (i) à (ix), à (11), et (10) est impossible car $w \notin \underline{H}\underline{U}$. Enfin, (11) entraîne (en plus de $t = 1$) $a = 1$ et $b = 0$ et découle donc de (i), (ii) et (iii).

REMARQUE.- La relation universelle (x) découle de la relation (*) appliquée à $a \in A^{\times} \cap A^{s}$, $b = a^{-1}$ et $s = 0$. Nous allons montrer dans la suite, qu'en fait la relation (*) découle de la relation (x) (et des relations universelles (i) à (ix)). Pour cela nous aurons besoin de quelques propriétés non triviales de l'anneau A dans le cas où le corps de base k est fini.

4.- Etude de $|A^{\times} \cap A^{s}| \cdot |A^{s}|^{-1}$ pour $k = \mathbb{F}_q$.

Rappelons que l'on note $|E|$ le cardinal d'un ensemble fini E et que l'on a posé $A = M_n(k)$. Dans ce numéro nous supposons $k = \mathbb{F}_q$.

LEMME 4.- Supposons k de caractéristique 2. Posons

$$O(n,q) = \{a \in A^{\times} \mid aa^* = 1\} \quad .$$

Alors

i) $$|O(n,q)| = q(q^2-1)\ldots q^{2m-1}(q^{2m}-1) = \prod_{\nu=1}^{m} q^{2\nu-1}(q^{2\nu}-1)$$

si $n = 2m+1$, $m \geq 0$;

ii) $$|O(n,q)| = q(q^2-1)\ldots q^{2m-3}(q^{2m-2}-1)\, q^{2m-1}$$

si $n = 2m$, $m \geq 1$.

Démonstration :

Le cardinal de $O(n,q)$ est le nombre de bases orthonormales de k^n pour la forme bilinéaire dont la matrice par rapport à la base canonique de k^n est la matrice unité. On démontre facilement, par récurrence que ce dernier nombre a la valeur annoncée.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 4.- On a

i) $|A^s| = q^{\frac{1}{2}n(n+1)}$

ii) $|A^X \cap A^s| = (q-1)q^2(q^3-1)q^4\dots(q^n-1)$ si n est impair

$|A^X \cap A^s| = (q-1)q^2(q^3-1)q^4\dots q^n$ si n est pair

iii) $\dfrac{|A^X \cap A^s|}{|A^s|} = (1-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{q^3})\dots(1-\frac{1}{q^n})$ si n est impair

$\dfrac{|A^X \cap A^s|}{|A^s|} = (1-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{q^3})\dots(1-\frac{1}{q^{n-1}})$ si n est pair

Démonstration :

La formule i) est immédiate et iii) découle aussitôt de i) et ii). Prouvons ii). Nous distinguons les cas q impair et q pair.

a) q impair .- On calcule $|A^X \cap A^s|$ à l'aide du fait que A^X agit sur $A^X \cap A^s|$
par $x \mapsto axa^*$ $(x \in A^X \cap A^s,\ a \in A^X)$. On sait bien (cf. [2] ou [9]) qu'il y a deux orbites dans $A^X \cap A^s$ suivant cette action et qu'en dimension paire, les stabilisateurs associés (à conjugaison près) à ces orbites sont les groupes orthogonaux $O_1(n,q)$ et $O_{-1}(n,q)$; en dimension impaire, les deux stabilisateurs sont isomorphes au groupe orthogonal $O(n,q)$. En se rappelant (cf [5], [1] ou [7]) que l'on a

$$|O_\varepsilon(2m,q)| = 2q(q^2-1)\dots q^{2m-3}(q^{2m-2}-1)(q^{2m-1}-\varepsilon q^{m-1}) \quad (\varepsilon = \pm 1, m \geq 1)$$

et

$$|O(2m+1,q)| = 2q(q^2-1)\dots q^{2m-1}(q^{2m}-1) = 2\prod_{\nu=1}^{m} q^{2\nu-1}(q^{2\nu}-1) \quad (m \geq 0),$$

on obtient aussitôt la valeur donnée pour $|A^X \cap A^s|$.

b) q pair.- Dans ce cas, si $x \in A^{\times} \cap A^{s}$ alors, ou bien x est alternée, ou bien il existe $u \in A^{\times}$ tel que $u^{*}xu = 1$. On voit donc que si n est impair, l'action de $A^{\times}$ dans $A^{\times} \cap A^{s}$ a une seule orbite et si n est pair, il y a deux orbites, dont les stabilisateurs sont isomorphes à $O(n,q)$ et $Sp(n,q)$. En se servant du lemme 4 et du fait que

$$|Sp(2m,q)| = q(q^{2}-1)\ldots q^{2m-1}(q^{2m}-1)$$

(cf. [5], [1] ou [7]), on obtient aussitôt le résultat annoncé.

C.Q.F.D.

DEFINITION 3.- Posons

$$\alpha_{2m+1}(q) = (1 - \frac{1}{q})\,(1 - \frac{1}{q^{3}})\ldots(1 - \frac{1}{q^{2m+1}}) \quad .$$

et

$$\alpha(q) = \prod_{\nu=0}^{\infty}(1 - \frac{1}{q^{2\nu+1}}) \quad .$$

Il est clair que la limite $\alpha(q)$ existe et qu'elle est strictement positive. Nous allons la minorer.

LEMME 5.- Pour $0 \leq x < \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, on a

$$(1-x)(1-x^{3})\ldots(1-x^{2m+1}) \geq 1-x-x^{3}-\ldots-x^{2m+1} > 0 \ .$$

Démonstration : Quels que soient $r \geq 1$ et $x \in [0,\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)[$, on a

$$(1-x-x^{3}-\ldots x^{2r-1})\,(1-x^{2r+1}) \geq 1-x-x^{3}-\ldots-x^{2r+1} \quad ,$$

d'où

$$(1-x)(1-x^{3}).(1-x-x^{3})(1-x^{5})\ldots(1-x-\ldots-x^{2m-1})(1-x^{2m+1}) \geq$$

$$\geq (1-x-x^{3}).(1-x-x^{3}-x^{5})\ldots(1-x-x^{3}-\ldots-x^{2m+1}).$$

C.Q.F.D.

PROPOSITION 5.- *On a, pour tout entier* $m \geq 0$,

$$\alpha_{2m+1}(q) > \alpha(q) \geq 1 - \frac{q}{q^2-1} .$$

Ceci découle aussitôt du lemme 5 .

COROLLAIRE.- *On a*

$$|A^X \cap A^s| \;/\; |A^s| > 1 - \frac{q}{q^2-1} ,$$

et en particulier,

i) $|A^X \cap A^s| \;/\; |A^s| > \frac{2}{3}$ *si* $q > 3$,

ii) $\frac{2}{3} \geq |A^X \cap A^s| \;/\; |A^s| > \frac{5}{8}$ *si* $q = 3$,

(*la valeur* $\frac{2}{3}$ *n'étant atteinte que pour* $n \leq 2$) ,

iii) $\frac{1}{2} \geq |A^X \cap A^s| \;/\; |A^s| > \frac{1}{3}$ *si* $q = 2$,

(*la valeur* $\frac{1}{2}$ *n'étant atteinte que pour* $n \leq 2$) .

PROPOSITION 6.- *Quels que soient* $a,b \in A^s$, *on a*

$$|(A^X \cap A^s + a) \cap (A^X \cap A^s + b)| > \left(1 - \frac{2q}{q^2-1}\right)|A^s| .$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la relation

$$2|A^X \cap A^s| - |(A^X \cap A^s + a) \cap (A^X \cap A^s + b)| = |(A^X \cap A^s + a) \cup (A^X \cap A^s + b)| \leq |A^s|$$

et du corollaire ci-dessus.

C.Q.F.D.

5.- Réduction aux relations universelles ($k \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$) .

Dans ce numéro, k désigne à nouveau un corps (commutatif) quelconque, mais autre que $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$.

Le lemme suivant donne la propriété essentielle de l'anneau $A = M_n(k)$ qui permet de ramener toute relation entre les générateurs de G aux relations universelles de la proposition 2 .

LEMME 6.- Quels que soient $a,b \in A^s$, il existe $u \in A^\times \cap A^s$ tel que $a + u \in A^\times$ et que $b-u^{-1} \in A^\times$.

Démonstration :

Considérons tout d'abord le cas où k est infini. Soit V_a (resp. V_b) l'ensemble des valeurs propres de a (resp. b) . Choisissons $t \in k^\times$ de manière que $-t \notin V_a$ et $t^{-1} \notin V_b$. Il suffit alors de prendre u égale à l'homothétie de rapport t pour avoir $a + u$, $b - u^{-1} \in A^\times$.

Considérons maintenant le cas où k est fini. Supposons que le lemme soit faux. Il existerait alors $a,b \in A^s$ tel que l'ensemble

$$[(A^\times \cap A^s) \cap (A^\times \cap A^s + b)]^{-1} \cap (A^\times \cap A^s -a)$$

soit vide et il s'ensuivrait que

$$|(A^\times \cap A^s) \cap (A^\times \cap A^s + b)| + |A^\times \cap A^s| \leq |A^s| \quad .$$

Par suite, d'après le corollaire à la proposition 5 et d'après la proposition 6, on aurait, avec $|k| = q$,

$$q^2 - 1 < 3q \quad ,$$

ce qui est impossible pour $q \geq 4$.

C.Q.F.D.

Dans la démonstration du théorème 1 ci-dessous, nous ne nous servirons que de la variante plus faible suivante du lemme 6 .

LEMME 6 bis - <u>Quels que soient</u> $a,b \in A^s$, $a,b \notin A^\times$, <u>il existe</u> $u \in A^\times \cap A^s$ <u>tel que</u> $a+u \in A^\times$ <u>et</u> $b-u^{-1} \in A^\times$.

THEOREME 1.- <u>Le groupe</u> $G = GSp(2n,k)$ <u>est engendré par les éléments</u>

$$\underline{h}(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{pmatrix} \qquad (a \in A^\times) \quad ,$$

$$\underline{h}'(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \qquad (r \in k^\times) \quad ,$$

$$\underline{u}(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b \in A^s) \quad ,$$

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

<u>avec les relations</u>

(i) $\underline{h}'(r)\underline{h}'(t) = \underline{h}'(rt) \qquad (r,t \in k^\times)$,

(ii) $\underline{h}(a)\underline{h}(d) = \underline{h}(ad) \qquad (a,d \in A^\times)$,

(iii) $\underline{u}(a)\underline{u}(b) = \underline{u}(a+b) \qquad (a,b \in A^s)$,

(iv) $\underline{h}'(t)\underline{h}(a) = \underline{h}(a)\underline{h}'(t) \qquad (t \in k^\times,\ a \in A^\times)$,

(v) $\underline{h}'(t)\underline{u}(tb) = \underline{u}(b)\underline{h}'(t) \qquad (t \in k^\times,\ b \in A^s)$,

(vi) $\underline{h}(a)\underline{u}(b) = \underline{u}(aba^*)\underline{h}(a) \qquad (a \in A^\times,\ b \in A^s)$,

(vii) $\underline{w}^2 = \underline{h}(-1)$,

(viii) $\underline{w}\underline{h}'(t) = \underline{h}'(t)\underline{h}(t)\underline{w} \qquad (t \in k^\times)$,

(ix) $\underline{w}\underline{h}(a) = \underline{h}(a^{*-1})\underline{w} \qquad (a \in A^\times)$,

(x) $\underline{w}\underline{u}(a^{-1})\underline{w}\underline{u}(a)\underline{w}\underline{u}(a^{-1}) = \underline{h}(a) \qquad (a \in A^\times \cap A^s)$.

On a en fait $G = \underline{(H'HUwU)}^2$.

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 3(n°3), tout ce qui reste à démontrer est que toute relation du type (*) dans l'énoncé de cette proposition découle des relations universelles (i) à (x) ci-dessus.

Posons $G_o = \underline{H}'\underline{HUwU}$ (cf. Prop.3). Nous avons alors $1 \notin G_o$, $1 \in G_o^2$, $G_o^{-1} = G_o$ et en outre, toutes les relations (i) à (x) ci-dessus s'écrivent sous la forme $h_1h_2=h_o$ pour $h_o,h_1,h_2 \in G_o$ convenables. Toute relation du type (*) est de la forme $h_1h_2h_3h_4 = h_o$ ($h_1,h_2,h_3,h_4 \in G_o$ convenables). Nous allons montrer de proche en proche que toute relation de la forme

I) $h_1h_2 = h_o$ ($h_1,h_2,h_o \in G_o$ convenables)

II) $h_1h_2h_3 = h_o$ ($h_1,h_2,h_3,h_o \in G_o$ convenables)

III) $h_1h_2h_3h_4 = h_o$ ($h_1,h_2,h_3,h_4,h_o \in G_o$ convenables)

découle des relations (i) à (x).

<u>Relations de type I</u> : Les relations (i) à (ix) permettent de ramener I à la forme

(12) $\underline{wu}(b)\underline{w} = \underline{h}'(t)\underline{h}(a)\underline{u}(c)\underline{wu}(d)$ $(t \in k^{\times},\ a \in A^{\times},\ b,c,d \in A^{s}$, convenables);

ensuite, un calcul facile montre que (12) entraîne

$$t = 1,\ b = -a^{*-1},\ c = a^{-1} \quad \text{et} \quad d = a ,$$

d'où le fait que (12) s'écrit comme une relation de type (x), à savoir

$$\underline{wu}(-a^{-1})\underline{w} = \underline{h}(a)\ \underline{u}(a^{-1})\underline{wu}(a) \qquad (a \in A^{\times} \cap A^{s}) .$$

<u>Relations de type II</u> : Les relations (i) à (ix) permettent de ramener toute relation de type II à la forme

(13) $\underline{w}\underline{u}(b)\underline{w}g_o = \underline{u}(a)\underline{w}$ $(a,b \in A^s\ ,\ g_o \in G_o$, convenables).

Notons que si a ou b est inversible, nous pouvons éliminer un w dans (13) à l'aide de (x) et nous nous trouvons alors dans le cas de type I . Supposons donc $a,b \notin A^x$. Le lemme 6 bis montre alors qu'il existe $x \in A^x \cap A^s$ tel que $a + x \in A^x$ et $b - x^{-1} \in A^x$. Multiplions les deux membres de (13) à gauche par $u(x)$; or on a , d'après (x) ,

$$\underline{u}(a + x)\ \underline{w} = \underline{w}g' \quad ,$$

pour $g' \in G_o$ convenable, et

$$\underline{u}(x)\underline{w} = \underline{w}\underline{u}(-x^{-1})\ \underline{w}\underline{h}(x)\ \underline{u}(-x^{-1}) = \underline{w}g'' \quad .$$

Par conséquent

$$\underline{u}(x)\ \underline{w}\underline{u}(b)\ \underline{w}g_o = \underline{w}\underline{u}(-x^{-1})\ \underline{h}(x^{-1})\ \underline{w}\underline{u}(b-x^{-1})\ \underline{w}g_o = \underline{w}g'''g_o$$

avec $g''' \in G_o$, d'après la relation (x) . Il s'ensuit que (13) équivaut à

(14) $g'''g_o = g'$.

On voit donc bien que toute relation de type II découle d'une relation de type I à l'aide des relations universelles (i) à (x) , et découle donc de ces dernières.

<u>Relations de type III</u> : Une telle relation s'écrit, à l'aide des relations (i) à (x) ,

(15) $$\underline{\underline{w}}\underline{u}(a)\underline{\underline{w}}\ g_1g_2 = \underline{u}(c)\underline{\underline{w}} \qquad (a,b,c \in A^s,\ g_1,g_2 \in G_o,\ \text{convenables}).$$

Si a ou c est inversible, on se ramène aussitôt, à l'aide de la relation (x) et des autres relations universelles (i) à (ix), au cas d'une relation de type II déjà traité. Supposons donc a et c non-inversibles. Il existe alors $x \in A^\times \cap A^s$ tel que $c + x$ et $a\text{-}x^{-1}$ soient inversibles (cf. Lemme 6 bis). En multipliant à gauche les deux membres de (15) par $u(x)$, on a

$$\underline{u}(x+c)\underline{\underline{w}} = \underline{\underline{w}}g' \quad ,$$

pour $g' \in G_o$ convenable, et

$$\underline{u}(x)\ \underline{\underline{w}}\underline{u}(a)\ \underline{\underline{w}} = \underline{\underline{w}}\underline{u}(-x^{-1})\ \underline{h}(x^{-1})\ \underline{\underline{w}}\underline{u}(a-x^{-1})\ \underline{\underline{w}} = \underline{\underline{w}}g''$$

pour $g'' \in G_o$ convenable, toujours à l'aide des relations (i) à (x).

Nous voyons ainsi que (15) équivaut, modulo les relations (i) à (x), à

$$g''\ g_1g_2 = g' \quad ,$$

qui est une relation de type II. Ceci montre donc en particulier que les relations de type (*) découlent des relations universelles (i) à (x).

C.Q.F.D.

REMARQUE.- Si nous prenons pour A un anneau involutif quelconque, à la place de l'anneau $M_n(k)$, nous pouvons encore définir un groupe, noté $GSp(A)$, comme le groupe de toutes les matrices inversibles de $M_2(A)$ vérifiant les conditions (2) et (3) du numéro 1 . (En remplaçant partout, bien entendu, k par le centre $Z(A)$ de A). Définissons les éléments $\underline{h}(a)$ $(a \in A^{\times})$, $\underline{h}'(t)$ $(t \in Z(A)^{\times})$, $\underline{u}(b)$ $(b \in A^{s})$ et $\underline{w}$ de même que dans la définition 1 (n°2). La présentation de $G = GSp(2n,k)$ donnée dans le théorème 1 est encore valable pour $GSp(A)$, pourvu que l'anneau A vérifie les deux conditions suivantes :

(E) <u>Si</u> $a, c \in A$ <u>et</u> $a^*c = c^*a$, $Aa + Ac = A$, <u>alors il existe</u> $s \in A^{s}$ <u>tel que</u> $a + sc \in A^{\times}$.

(U) <u>Quels que soient</u> $a, b \in A^{s} - A^{\times}$ <u>il existe</u> $u \in A^{\times} \cap A^{s}$ <u>tel que</u> $a+u \in A^{\times}$ <u>et</u> $b - u^{-1} \in A^{\times}$.

Les résultats ci-dessus contiennent ainsi en particulier le cas $A = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.

6.- <u>Le cas de</u> $G = GSp(4,k)$ <u>pour</u> $k = \mathbb{F}_2$ et $k = \mathbb{F}_3$.

Nous montrons ci-dessous que le théorème 1 est encore valable pour $GSp(4,\mathbb{F}_2)$ et $GSp(4,\mathbb{F}_3)$ en démontrant le lemme 6 bis dans ces cas.

a) <u>Cas</u> $k = \mathbb{F}_2$.- Le lemme 6 est alors faux (prendre $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et b quelconque ou $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$), mais le lemme 6 bis est encore valable. Ceci se vérifie aisément en déterminant explicitement les ensembles $(A^{\times} \cap A^{s} + a) \cap (A^{\times} \cap A^{s})$ $(a \in A)$.

b) <u>Cas</u> $k = \mathbb{F}_3$.- Remarquons que nous avons le raffinement suivant de la proposition 6 pour $b = 0$, $a \in A^{s} - A^{\times}$, LEMME 7.- <u>Pour tout</u> $a \in A^s$, $a \notin A^\times$, <u>on a</u> (si k est de caractéristique $\neq 2$)

$$|(A^\times \cap A^s + a) \cap A^\times \cap A^s| \geq \left(2\frac{|A^\times \cap A^s|}{|A^s|} - 1 + \frac{1}{q^n}\right)|A^s| \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Comme le cardinal qu'il s'agit de minorer ne dépend que de la classe de a modulo l'action $x \mapsto uxu^*$ $(u \in A^\times)$ de $A^\times$ dans $A^\times \cap A^s$, nous pouvons supposer que a est diagonale de rang $\leq n-1$. Notons A^s_{n-1} le sous-espace de A^s formé des matrices à n-ième colonne (et n-ième ligne) nulle. Nous avons alors

$$(A^\times \cap A^s) \cup (A^\times \cap A^s + a) \subset A^s - A^s_{n-1}$$

d'où

$$2|A^\times \cap A^s| - |(A^\times \cap A^s + a) \cap A^\times \cap A^s| \leq \left(1 - \frac{1}{q^n}\right)|A^s| \quad .$$

C.Q.F.D.

<u>Démonstration du lemme 6 bis pour</u> $A = M_2(\mathbb{F}_3)$:

Si le lemme était faux, on aurait, pour $a,b \in A^s - A^\times$ convenables,

$$[(A^\times \cap A^s) \cap (A^\times \cap A^s + b)]^{-1} \cap (A^\times \cap A^s - a) = \emptyset \quad ,$$

d'où

$$|A^\times \cap A^s \cap (A^\times \cap A^s + b)| + |A^\times \cap A^s| \leq |A^s| \quad ,$$

ce qui entrainerait, d'après le lemme 7 (pour $q = 3$) ,

$$1 \geq \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right) \quad .$$

C.Q.F.D.

§ 2. Construction de la représentation de Weil.

Dans ce paragrapne, à l'exception de numéro 1, la lettre k désigne le corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments, et la lettre A désigne l'algèbre involutive $M_n(k)$.

1. Rappel sur les modules quadratiques sur un anneau involutif.

Nous rappelons ci-dessous la définition d'un module quadratique sur un anneau involutif A quelconque, due à Tits ([17]) dans le cas général ε - hermitien.

DEFINITION 1. - Soit A un anneau involutif, dont l'involution est notée $a \longmapsto a^*$ $(a \in A)$. Notons A° le sous-groupe de A^+ formé des anti-traces $a - a^*$ $(a \in A)$, posons $\bar{A} = A/A^\circ$ et désignons par pr la projection canonique de A sur $\bar{A}$. Posons enfin $a \equiv b$ si $pr(a) = pr(b)$, pour $a,b \in A$.

On appelle A - module quadratique (à droite) la donnée $(M,\bar{\mathbb{Q}},\mathbb{B})$ d'un A - module à droite M , d'une application $\bar{\mathbb{Q}} : M \longrightarrow \bar{A}$ et d'une application sesquilinéaire à gauche hermitienne $\mathbb{B} : M \times M \longrightarrow A$ telles que

i) $$\bar{\mathbb{Q}}(xa) = a^*\bar{\mathbb{Q}}(x)a \qquad (x \in M,\ a \in A) ,$$

ii) $$\bar{\mathbb{Q}}(x+y) = \bar{\mathbb{Q}}(x) + \bar{\mathbb{Q}}(y) + \bar{\mathbb{B}}(x,y) \qquad (x,y \in M)$$

avec $\bar{\mathbb{B}} = pr \circ B$. On dira que $\bar{\mathbb{Q}}$ est une A - forme quadratique sur M . Si la forme sesquilinéaire $\mathbb{B}$ est non-dégénérée, on dira que $\mathbb{Q}$ et $(M,\bar{\mathbb{Q}},\mathbb{B})$ sont non-dégénérés.

REMARQUES. - 1) Comme l'on a $a^*A^\circ a \subset A^\circ$ pour tout $a \in A$, le produit $a^*\overline{b}a \in \overline{A}$ est bien défini, quels que soient $a \in A$, $b \in \overline{A}$ et la condition i) ci-dessus a donc bien un sens.

2) Le fait que $\mathbb{B}$ soit sesquilinéaire à gauche et hermitienne signifie, bien entendu, que $\mathbb{B}$ est bi-additive et que l'on a en plus

i) $\mathbb{B}(xa,y) = a^*\mathbb{B}(x,y) \qquad (x,y \in M,\ a \in A)$,

ii) $\mathbb{B}(x,ya) = \mathbb{B}(x,y)a \qquad (x,y \in M,\ a \in A)$,

iii) $\mathbb{B}(y,x) = (\mathbb{B}(x,y))^* \qquad (x,y \in M)$.

3) Dans le cas considéré dans la suite de ce paragrapne, l'anneau involutif A est en fait une k - algèbre involutive sur un corps k . L'application $\overline{\mathbb{Q}}$ (resp. $\mathbb{B}$) est alors automatiquement une forme k - quadratique (resp. une forme k - bilinéaire) à valeurs dans le k - espace vectoriel $\overline{\mathbf{A}}$ (resp. A) .

2. <u>Le</u> A - <u>module quadratique</u> $(M,\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{B})$ <u>associé à</u> (E,Q) .

Rappelons que dorénavant on désigne par k le corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments, de caractéristique quelconque, et que l'on note A l'algèbre involutive $M_n(k)$.

Soit E un espace vectoriel sur k , muni d'une forme quadratique non-dégénérée Q de forme bilinéaire associée B . Posons $E_o = k^n$ et considérons le k - espace vectoriel $M = \mathrm{Hom}_k(E_o,E)$, que nous réalisons dans la suite sous la forme

$$M = E^n = E \oplus \ldots \oplus E \qquad \text{(somme directe à } n \text{ composantes).}$$

L'espace M est de manière naturelle un A - module à droite puisque $A = M_n(k)$ s'identifie à $\mathrm{End}_k(E_o)$, et en fait le produit xa de $x = (x_1, \dots, x_n) \in M$ et de $a = (a_{ij}) \in A$ est simplement le produit matriciel du vecteur ligne x et de la matrice a .

DEFINITION 2. - Notons $\mathbb{Q}$ la forme k - quadratique sur M à valeurs dans A , définie par

(1) $$\mathbb{Q}(x)_{ii} = Q(x_i) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) ,$$

(2) $$\mathbb{Q}(x)_{ij} = B(x_i , x_j) \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n) ,$$

(3) $$\mathbb{Q}(x)_{ji} = 0 \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n)$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in M$. On définit la forme k - bilinéaire $\mathbb{B}$ sur M , à valeurs dans A , par

(4) $$\mathbb{B}(x,y)_{ij} = B(x_i , y_j) \qquad (1 \leqslant i,j \leqslant n)$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans M . Enfin, on pose

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathrm{pr} \circ \mathbb{Q} ,$$

où, d'après la définition 1 du numéro 1, on note pr la projection canonique de A sur $\overline{A} = A/A^\circ$.

Remarquons que, dans notre cas, le sous-groupe A° est formé des matrices alternées et que la trace de A sur k se factorise donc par $\overline{A}$.

PROPOSITION 1. - On a les propriétés suivantes :

i) Si $a,b \in A$, pour que $a \equiv b$, il faut et il suffit que

$$\mathrm{Tr}(ac) = \mathrm{Tr}(bc) \qquad (c \in A^s) ,$$

où l'on note $Tr(d)$ la trace de la matrice $d \in A$ et A^s le sous-espace formé des matrices symétriques de A .

ii) $$\mathbb{B}(xa,y) = a^* \mathbb{B}(x,y) \qquad (x,y \in M,\ a \in A)\ .$$

iii) $$\mathbb{B}(x,ya) = \mathbb{B}(x,y)a \qquad (x,y \in M,\ a \in A)\ .$$

iv) $$\mathbb{B}(y,x) = (\mathbb{B}(x,y))^* \qquad (x,y \in M)\ .$$

v) $$\mathbb{Q}(xa) \equiv a^* \mathbb{Q}(x)a \qquad (x \in M,\ a \in A)\ .$$

vi) $$\mathbb{Q}(x+y) \equiv \mathbb{Q}(x) + \mathbb{Q}(y) + \mathbb{B}(x,y) \qquad (x,y \in M)\ .$$

vii) $$Tr(b\mathbb{Q}(xa)) = Tr(aba\ \mathbb{Q}(x)) \qquad (x \in M,\ a \in A,\ b \in A^s)\ .$$

viii) La forme k - bilinéaire $Tr \circ \mathbb{B}$, à valeurs dans k , est non-dégénérée.

Démonstration: Cela se vérifie sans difficulté; en particulier vii) est une conséquence immédiate de i) et v).

En d'autres termes, $(M,\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{B})$ est un A - module quadratique non-dégénéré sur l'anneau involutif $A = M_n(k)$, au sens de la définition 1 du numéro 1. En fait, nous avons la

PROPOSITION 2. - La correspondance qui à chaque k - espace quadratique non-dégénéré (E,Q) associe le A - module quadratique $(M,\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{B})$ défini comme ci-dessus et à chaque similitude γ d'un k - espace quadratique (E,Q) dans un autre (E',Q') , associe son extension canonique à M , notée encore γ , donnée par

$$\gamma(x) = (\gamma x_1, \dots ,\gamma x_n) \qquad (x = (x_1, \dots ,x_n) \in M)\ ,$$

<u>est une équivalence de la catégorie des</u> k - <u>espaces quadratiques non-dégénérés avec la catégorie des</u> A - <u>modules quadratiques non-dégénérés (avec les similitudes comme homomorphismes</u>).

<u>Démonstration</u>: La proposition est claire (et bien connue) si l'on ne considère que les k - espaces vectoriels et les A - modules sous-jacents (ainsi que leurs homomorphismes). On se ramène donc à prouver que toute A - forme quadratique $\overline{\mathbb{R}}$, non-dégénérée, sur un A - module M comme ci-dessus, provient d'une k - forme quadratique non-dégénérée Q sur E . Or il est tout d'abord clair que $\overline{\mathbb{R}} = \mathrm{pr} \circ \mathbb{R}$ avec $\mathbb{R} : M \longrightarrow A$ telle que

$$\mathbb{R}(x)_{ii} = Q^i(x_i) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \quad ,$$

$$\mathbb{R}(x)_{ij} = B^{ij}(x_i, x_j) \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n) \quad ,$$

$$\mathbb{R}(x)_{ji} = 0 \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n) \quad .$$

Mais à l'aide de la relation v) ci-dessus, pour $\mathbb{R}$, et pour des matrices $a \in A$ convenables, on conclut aussitôt que $Q^i = Q^1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et que B^{ij} est la forme bilinéaire B^1 associée à Q^1 pour $1 \leqslant i,j \leqslant n$, d'où $\overline{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{Q}}^1$. Cela achève la démonstration, car si $\mathbb{B}$ est une A - forme sesquilinéaire (à gauche) vérifiant

$$\overline{\mathbb{Q}}^1(x+y) = \overline{\mathbb{Q}}^1(x) + \overline{\mathbb{Q}}^1(y) + (\mathrm{pr}\ \mathbb{B})(x,y) \qquad (x,y \in M) \quad ,$$

alors nécessairement $\mathbb{B} = \mathbb{B}^1$, c'est-à-dire

$$\mathbb{B}(x,y)_{ij} = B^1(x_i, x_j) \qquad (x,y \in M = E^n;\ 1 \leqslant i\ ,\ j \leqslant n) \quad ,$$

en vertu, par exemple, de la condition ii) de la remarque 2 à la définition 1 (n° 1).

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Comme pour un A - module quadratique $(M,\bar{\mathbb{Q}},\mathbb{B})$ sur notre anneau involutif $A = M_n(k)$, la forme (sesquilinéaire à gauche) hermitienne $\mathbb{B}$, à valeurs dans A , est déterminée de manière unique par $\bar{\mathbb{Q}}$, on désignera souvent un tel A - module quadratique simplement par $(M,\bar{\mathbb{Q}})$.

EXEMPLE. - Comme exemple naturel de A - module quadratique, on peut citer le A - module à droite $M' = A \times A$ muni de la A - forme quadratique

$$\mathbb{Q}'(a,b) = a^* b + A^\circ \qquad (a,b \in A)$$

et de la A - forme hermitienne $\mathbb{B}$

$$\mathbb{B}((a,b),\ (c,d)) = a^* d + b^* c \qquad (a,b,c,d \in A) .$$

Nous le rencontrerons encore au chapitre IV.

3. Calcul de sommes de Gauss associées à un A - module quadratique.

Nous renvoyons au chapitre I (§ 2, n° 2) pour le cas des k - espaces quadratiques.

DEFINITION 3. - *On note* $\underline{X}$ *l'ensemble des caractères non-triviaux* θ *de* A^+ *tels que* $\theta(ab) = \theta(ba)$ *quels que soient* $a,b \in A^+$. *On pose*

$$\theta^t(a) = \theta(ta) \qquad (t \in k\ ,\ a \in A^+,\ \theta \in \underline{X}) . \tag{5}$$

Pour $\psi \in X = \mathrm{Car}(k^+) - \{1\}$, *on note* $\underline{\psi}$ *le caractère* $\psi \circ \mathrm{Trace}$.

Remarquons que tout $\theta \in \underline{X}$ se factorise par la trace de A sur k , c'est-à-dire, le monomorphisme $\psi \longmapsto \underline{\psi}$ $(\psi \in \mathrm{Car}(k^+))$ est une bijection de X sur $\underline{X}$ (puisque $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{ab-ba \mid a,b \in A\}$) et $k^\times$ agit donc transitivement sur $\underline{X}$ par (5). Il en résulte aussi que tout $\theta \in \underline{X}$ se factorise par $\bar{A} = A/A^\circ$; nous écrirons alors simplement

$$\theta(\bar{a}) = \theta(a) \qquad (a \in A) \tag{6}$$

avec $\bar{a} = pr(a) = a + A^\circ$.

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> $(M,\bar{\mathbb{Q}})$ <u>un</u> A - <u>module quadratique non-dégénéré, de</u> k - <u>dimension</u> $2rn$. <u>La somme de Gauss</u> $S_{\bar{\mathbb{Q}}}$ <u>associée à</u> $\bar{\mathbb{Q}}$ (<u>et à</u> $\theta \in \underline{X}$) <u>définie par</u>

$$S_{\bar{\mathbb{Q}}}(a) = \sum_{x \in M} \theta(a\bar{\mathbb{Q}}(x)) \qquad (a \in A^s) \tag{7}$$

<u>ne dépend pas du choix de</u> θ <u>dans</u> $\underline{X}$, <u>et elle est constante sur</u> $A^\times \cap A^s$ <u>de valeur</u>

$$\varepsilon(\mathrm{Tr}\circ\bar{\mathbb{Q}})|M|^{1/2} \quad .$$

<u>Démonstration</u>: Posons $S = S_{\bar{\mathbb{Q}}}$. Le fait que S ne dépend pas du choix de $\theta \in \underline{X}$ découle aussitôt de l'équivalence, pour tout $t \in k^\times$, des k - formes quadratiques $\mathrm{Tr}\circ\bar{\mathbb{Q}}$ et $t(\mathrm{Tr}\circ\bar{\mathbb{Q}})$ sur le k - espace vectoriel M de dimension paire $2rn$, et du fait que tout $\theta \in \underline{X}$ est de la forme $e^t\circ\mathrm{Tr}$, pour $t \in k^\times$ convenable (où l'on note e un caractère non-trivial fixé de k^+).

Pour montrer que S est constante sur $A^\times \cap A^s$, remarquons tout d'abord que la condition i) de la définition 1 du numéro 1 entraîne

$$S(a) = S(cac^*) \qquad (a \in A^\times \cap A^s,\ c \in A^\times) \quad ;$$

la somme S est donc constante sue les A - orbites dans $A^\times \cap A^s$. Notons ensuite que, d'après ce que nous venons de voir

$$S(1) = \sum_{x \in M} e(\mathrm{Tr}\circ\overline{\mathbb{Q}}(x)) \quad ;$$

mais comme $(M,\overline{\mathbb{Q}})$ provient d'un espace quadratique non-dégénéré (E,Q) sur k , on a

$$\mathrm{Tr}\circ\overline{\mathbb{Q}} = Q^{\perp n} = Q\perp \ldots \perp Q \qquad \text{(somme orthogonale à } n \text{ composantes)},$$

d'où

$$S(1) = S_{e\circ Q^{\perp n}} = [S_{e\circ Q}]^n = \varepsilon(Q)^n(|E|^{1/2})^n = \varepsilon(\mathrm{Tr}\circ\overline{\mathbb{Q}})|M|^{1/2}$$

(cf. ch. I, § 2, n° 2, cor. i) à la prop. 2). Pour achever la démonstration, nous distinguons maintenant trois cas.

i) <u>Si</u> k <u>est de caractéristique</u> 2 <u>et</u> n <u>est impair</u>: Alors $A^{\times} \cap A^s$ a une seule A - orbite et la démonstration est terminée.

ii) <u>Si</u> k <u>est de caractéristique</u> 2 <u>et</u> $n = 2m$: Alors $A^{\times} \cap A^s$ a deux A - orbites, celle de 1 et celle de $a_o = \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ 1_m & 0 \end{pmatrix}$. On a, pour $x = (x_1,\ldots,x_{2m}) \in M$,

$$\mathrm{Tr}(a_o\overline{\mathbb{Q}}(x)) = \sum_{i=1}^{m} B(x_i,x_{i+m}) \quad ,$$

d'où

$$S(a_o) = \Big[\sum_{u,v\in E} e(B(u,v))\Big]^m = |E|^m = \varepsilon(\mathrm{Tr}\circ\overline{\mathbb{Q}})|M|^{1/2} \quad ,$$

comme voulu.

ii) <u>Si</u> k <u>est de caractéristique</u> $\neq 2$: Dans ce cas, $A^{\times} \cap A^s$ a aussi deux orbites, à savoir celle de 1 , et celle de la matrice diagonale a_o dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 sauf le dernier qui est un non-carré $t_o \in k^{\times}$. Alors

$$S(a_o) = [S_Q(1)]^{n-1}S_Q(t_o) = [S_Q(1)]^n = S(1)$$

puisque, la dimension de E étant paire (égale à $2r$, par hypothèse), on a $Q \simeq t_o Q$.

C.Q.F.D.

4. Définition de la représentation de Weil.

THEOREME 1. - Soit $(M,\overline{\mathbb{Q}})$ un A - module quadratique non-dégénéré, de k - dimension paire $2rn$. On peut définir une représentation $(W,\rho) = (W_{\overline{\mathbb{Q}}}, \rho_{\overline{\mathbb{Q}}})$ de $G = GSp(2n;k)$, appelée représentation de Weil de G associée à $(M,\overline{\mathbb{Q}})$, en posant $W = \mathbb{C}^{M \times X}$ (où $X = \mathrm{Car}(k^+) - \{1\}$) et en se donnant ρ sur les générateurs de G (cf. n° 2) par les formules suivantes

$$[\rho(\underline{h}(a))f](x,\psi) = f(xa,\psi) \qquad (a \in A^{\times}) , \tag{8}$$

$$[\rho(\underline{h}'(t^{-1}))f](x,\psi) = f(x,\psi^t) \qquad (t \in k^{\times}) , \tag{9}$$

$$[\rho(\underline{u}(b))f](x,\psi) = \underline{\psi}(b\overline{\mathbb{Q}}(x))f(x,\psi) \qquad (b \in A^s) , \tag{10}$$

$$[\rho(w)f](x,\psi) = \varepsilon(\mathrm{Tr}\circ\overline{\mathbb{Q}})|M|^{-1/2} \sum_{y \in M} \underline{\psi}(\overline{\mathbb{B}}(x,y))f(y,\psi) , \tag{11}$$

pour $f \in W$, $x \in M$, $\psi \in X$ (et $\underline{\psi} = \psi \circ \mathrm{Tr}$) .

En outre, si à chaque similitude γ d'un A - module quadratique $(M',\overline{\mathbb{Q}}')$ sur $(M,\overline{\mathbb{Q}})$, on associe l'isomorphisme $\tilde{\gamma}$ de la représentation de Weil (W,ρ) associée à $(M,\overline{\mathbb{Q}})$ sur la représentation de Weil (W',ρ') associée à $(M',\overline{\mathbb{Q}}')$, donné par

$$(\tilde{\gamma}f)(x',\psi) = f(\gamma x',\psi^{m_\gamma^{-1}}) \qquad (f \in W,\ x' \in M',\ \psi \in X) ,$$

(où $m_\gamma \in k^{\times}$ désigne le multiplicateur de γ) , alors la correspondance ainsi définie est fonctorielle.

<u>Démonstration</u>: D'après le théorème 1 du paragraphe 1, n° 5, nous n'avons qu'à vérifier que les opérateurs que l'on vient de définir satisfont aux relations universelles (i) à (x) (cf. th. 1). Cela est clair pour les relations (i) à (v) et pour la relation (viii). La relation (vi) pour nos opérateurs résulte aussitôt de la condition i) de la définition 1 (n° 1); la relation (ix) découle aussitôt des propriétés i) et ii) de $\mathbb{B}$ ennoncées dans la remarque 2 à la définition 1. La relation (vii) est aussi claire, puisque l'application $\underline{\psi}\circ\overline{\mathbb{B}}$ est, pour tout $\psi \in X$, une mise en autodualité symétrique du groupe abélien fini M^+.

Montrons maintenant que la relation (x) est satisfaite. Notons tout d'abord qu'en présence des relations (i) à (ix), la relation (x) équivaut à la relation suivante

$$\underline{wu}(a)\underline{w} = \underline{h}(-a^{-1})\underline{u}(-a)\underline{wu}(-a^{-1}) \qquad (a \in A^{\times} \cap A^{s}) .$$

Or on a, pour $a \in A^{\times} \cap A^{s}$, $f \in W$, $z \in M$, $\psi \in X$,

$$\begin{aligned}\left[\rho(\underline{w})\rho(\underline{u}(a))\rho(\underline{w})f\right](z,\psi) &= \frac{1}{|M|}\sum_{x,y\in M}\underline{\psi}\left[\overline{\mathbb{B}}(z+x)+a\overline{\mathbb{Q}}(x)+\overline{\mathbb{B}}(x,y)\ f(y,\psi)\right] ,\\ &= \frac{1}{|M|}\sum_{x',y\in M}\underline{\psi}\left[a^{-1}(\overline{\mathbb{B}}(y+z,x')+\overline{\mathbb{Q}}(x'))\right] f(y,\psi) ,\\ &= \frac{1}{|M|}S_{\overline{\mathbb{Q}}}(a^{-1})\sum_{y\in M}\underline{\psi}\left[-a^{-1}\overline{\mathbb{Q}}(y+z)\right] f(y,\psi) ,\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\left[\rho(\underline{h}(-a^{-1}))\rho(\underline{u}(-a))\rho(\underline{w})\rho(\underline{u}(-a^{-1}))f\right](z,\psi) =$$

$$= \underline{\psi}\left[-a^{-1}\overline{\mathbb{Q}}(z)\right]\frac{\varepsilon(\mathrm{Tr}\ \overline{\mathbb{Q}})}{|M|^{1/2}}\sum_{y\in M}\underline{\psi}\left[-a^{-1}(\overline{\mathbb{B}}(z,y)+\overline{\mathbb{Q}}(y)\right] f(y,\psi) ,$$

$$= \frac{\varepsilon(\mathrm{Tr}\ \overline{\mathbb{Q}})}{|M|^{1/2}}\sum_{y\in M}\underline{\psi}\left[-a^{-1}\overline{\mathbb{Q}}(y+z)\right] f(y,\psi) .$$

Nous voyons donc que pour que la relation (x) soit satisfaite, il faut et il suffit que

$$S_{\overline{\mathbb{Q}}}(a) = \varepsilon(\mathrm{Tr}\circ\overline{\mathbb{Q}})|M|^{1/2} \quad ;$$

comme nous avons prouvé cette égalité dans la proposition 3 (n° 3), cela achève de démontrer que la représentation ρ est bien définie. Enfin, la seconde assertion du théorème est immédiate.

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Le théorème ci-dessus reste évidemment vrai si l'on remplace $\mathbb{C}$ par un espace vectoriel complexe quelconque V dans la définition de l'espace W de la représentation de Weil. La représentation ainsi obtenue sera appelée représentation de Weil de G associée à $(M,\overline{\mathbb{Q}})$ et à V.

§ 3. Décomposition de la représentation de Weil.

Le théorème 1 ci-dessus (§ 2, n° 4) montre que le groupe $GO(\overline{\mathbb{Q}})$, des similitudes du A - module quadratique $(M,\overline{\mathbb{Q}})$, opère dans la représentation de Weil (W,ρ) de G associée au A - module quadratique $(M,\overline{\mathbb{Q}})$. Dans la suite de ce numéro, nous posons

$$\Gamma = GO(\overline{\mathbb{Q}})$$

et nous désignons par Γ' un sous-groupe quelconque de Γ.

Nous notons (E,Q) le k - espace quadratique non-dégénéré dont provient $(M,\overline{\mathbb{Q}})$ par le procédé du numéro 2 du paragraphe 2. Le groupe Γ s'identifie ainsi à $GO(Q)$ (cf. loc. cit. prop. 2).

1. Les représentations $(W[\pi], \rho)$.

DEFINITION 1. - *Si* $\gamma \in \Gamma$, *on pose*

$$\gamma.\xi = (\gamma.x, \psi^{m_\gamma^{-1}}) = (\gamma x_1, \ldots, \gamma x_n; \psi^{m_\gamma^{-1}})$$

pour $\xi = (x,\psi) = (x_1,\ldots,x_n;\psi) \in M \times X$, *où l'on note* m_γ *le multiplicateur de* γ . *Posons en outre* $\tilde{M} = M \times X$.

Si (V, π) *est une représentation de* $\Gamma' \subset \Gamma$, *on note* $(W[\pi], \rho)$ *la représentation de* G *dont l'espace* $W[\pi]$ *est formé des fonctions* f *de* $\tilde{M}$ *dans* V *telles que*

$$f(\gamma.\xi) = \pi(\gamma)[f(\xi)] \qquad (\gamma \in \Gamma',\ \xi \in \tilde{M})$$

et l'action ρ *est l'action de la représentation de Weil de* G , *dans* $W = V^{\tilde{M}}$, *associée à* $(M, \bar{\mathbb{Q}})$ *et à* V (*cf. rem. au th*. 1, § 2, *n*° 4), *restreinte à* $W[\pi]$ (*qui est stable pour* ρ) .

Nous avons ainsi une première décomposition de la représentation de Weil, suivant les composantes isotypiques de l'action de Γ' dans W , décrite dans la proposition ci-dessous dont la démonstration est un exercice facile.

PROPOSITION 1. - *Notons* I' *l'ensemble des types d'isomorphie des représentations irréductibles de* Γ' . *Désignons par* V_π *l'espace de* $\pi \in I'$. *Nous avons alors les décompositions suivantes (où* $\pi^\vee$ *est la contragrédiente de* π)

$$W \simeq \bigoplus_{\pi \in I'} (W[\pi] \otimes V_{\pi^\vee}) \qquad \text{(\textit{en tant que} } G \times \Gamma' \text{ - \textit{modules}),}$$

$$W \simeq \bigoplus_{\pi \in I'} (\dim \pi) W[\pi] \qquad \text{(\textit{en tant que} } G \text{ - \textit{modules}) ,}$$

où l'action de $G \times \Gamma'$ _dans_ W _est déduite de la représentation de Weil_ ρ _pour_ G _et de la représentation_ σ _de_ Γ' _donnée par_

$$(\sigma(\gamma)f)(\xi) = f(\gamma^{-1}.\xi) \qquad (f \in W,\ \xi \in \widetilde{M}) \ .$$

Nous introduisons quelques notions qui seront utiles dans la suite.

DEFINITION 2. - _Soit_ (V,π) _une représentation de_ Γ' . _On pose, pour tout_ $\xi \in \widetilde{M} = M \times X$, _et tout sous-espace_ W' _de_ $W[\pi]$

$$W'(\xi) = \{f(\xi) \mid f \in W'\} \ ,$$

$$\mathrm{Supp}\ W' = \{\xi \in \widetilde{M} \mid W'(\xi) \neq \underline{0}\} \ .$$

On dira que W' _est un sous-espace plein de_ $W[\pi]$ _si l'on a_

$$W' = \{f \in W[\pi] \mid f(\xi) \in W'(\xi) \quad \forall \xi \in \widetilde{M}\} \ .$$

On a alors en particulier, pour $\xi = (x,\psi) \in \widetilde{M}$,

$$(1) \qquad W[\pi](\xi) = \mathrm{Fix}_V(\mathrm{Stab}_{\Gamma'}\,\xi) = \mathrm{Fix}_V(O(Q) \cap \mathrm{Stab}_{\Gamma'}\,x) \ ;$$

s'il n'y a pas de risque de confusion, nous écrirons dans la suite simplement,

$$(2) \qquad \mathrm{Stab}_{\Gamma'}\,\xi = \Gamma'_\xi = \Gamma'_x \ ,$$

$$(3) \qquad W[\pi](\xi) = V_x = \mathrm{Fix}_V \Gamma'_x \qquad (\xi = (x,\psi) \in M) \ .$$

DEFINITION 3. - _Soient_ (V,π) _et_ (V',π') _deux représentations de_ Γ' . _On note_ $\underline{\underline{N}}(\pi',\pi)$ _l'espace vectoriel complexe formé de toutes les applications_ N _de_ $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$ _dans_ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,V')$ _telles que_

$$(4) \qquad N(\gamma'.\xi',\gamma.\xi) = \pi'(\gamma')N(\xi',\xi)\pi(\gamma)^{-1} \qquad (\gamma,\gamma' \in \Gamma',\ \xi,\xi' \in \widetilde{M}) \ .$$

<u>Les éléments de</u> $\underline{\underline{N}}(\pi',\pi)$ <u>sont appelés noyaux</u> (π',π) - <u>équivariants, ou noyaux tout court, s'il n'y a pas de confusion à craindre</u>.

Si (V'',π'') est encore une représentation de Γ', on a un produit matriciel évident de noyaux

$$\underline{\underline{N}}(\pi'',\pi')\times\underline{\underline{N}}(\pi',\pi)\longrightarrow\underline{\underline{N}}(\pi'',\pi) \quad ,$$

donné par

$$(N_2N_1)(\xi'',\xi) = \sum_{\xi'\in\tilde{M}} N_2(\xi'',\xi')\circ N_1(\xi',\xi) \quad .$$

La démonstration de la proposition suivante est alors un exercice facile.

PROPOSITION 2. - <u>Notons</u> $R(\Gamma')$ <u>la classe de toutes les représentations de</u> Γ'. <u>Alors, en associant à chaque noyau</u> $N\in\underline{\underline{N}}(\pi',\pi)$ $(\pi,\pi'\in R(\Gamma'))$ <u>l'opérateur</u> $\mathbb{C}$ - <u>linéaire</u> Φ_N <u>de</u> $W[\pi]$ <u>dans</u> $W[\pi']$, <u>défini par</u>

$$(\Phi_N f)(\xi) = \sum_{\eta\in\tilde{M}} N(\xi,\eta)(f(\eta)) \qquad (\xi\in\tilde{M},\ f\in W[\pi]) \quad , \tag{5}$$

<u>on établit un isomorphisme de la catégorie linéaire</u> $\underline{\underline{N}}$ <u>dont la classe d'objets est</u> $R(\Gamma')$ <u>et dont l'espace vectoriel des flèches de source</u> π <u>et but</u> π' $(\pi,\pi'\in R(\Gamma'))$ <u>est</u> $\underline{\underline{N}}(\pi',\pi)$, <u>sur la catégorie linéaire</u> $\underline{\underline{W}}$ <u>avec la même classe d'objets et dont l'espace vectoriel des flèches de source</u> π <u>et but</u> π' <u>est</u> $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W[\pi],W[\pi'])$.

REMARQUE. - La condition (4) appliquée à $\gamma'\in \mathrm{Stab}_{\Gamma'}(\xi') = \Gamma'_{\xi'}$ et $\gamma\in\mathrm{Stab}_{\Gamma'}(\xi) = \Gamma'_{\xi}$ montre que $N(\xi',\xi)$ s'annule sur les composantes Γ'_{ξ} - isotypiques de V de type non-trivial et que son image est contenue dans $W[\pi'](\xi')$ (cf. (1)); autrement dit, on a alors de manière canonique, quels que soient $\xi,\ \xi'\in\tilde{M}$,

(6) $$N(\xi',\xi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W[\pi](\xi),\ W[\pi'](\xi')) \quad .$$

DEFINITION 4. - Gardons les notations de la proposition 2. Si $\Phi = \Phi_N$, on pose

$$\mathrm{Supp}\ \Phi = \mathrm{Supp}\ N \quad .$$

DEFINITION 5. - Pour $\xi = (x,\psi) \in \widetilde{M}$, on pose

$$\widetilde{\mathbb{Q}}(\xi) = \underline{\psi}^{\overline{\mathbb{Q}}(x)} = \underline{\psi}^{\mathbb{Q}(x)} \in \mathrm{Car}(A^+) \qquad (\text{avec } \overline{\mathbb{Q}} = \mathrm{pr}\circ\mathbb{Q},\ \underline{\psi} = \psi\circ\mathrm{Tr}) \quad .$$

Si l'on veut avoir $\widetilde{\mathbb{Q}}$ à valeurs dans A^+ (ou $\bar{A}$) lui-même, on fait choix d'un caractère non-trivial e_o de k^+ , on pose

(7) $$e = e_o \circ \mathrm{Tr}$$

et

(8) $$\widetilde{\mathbb{Q}}(x,e^t) = t\mathbb{Q}(x) \qquad (x \in M,\ t \in k^\times) \quad .$$

LEMME 1. - Soient (V,π) et (V',π') deux représentations de Γ' . Soit $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W[\pi],\ W[\pi'])$, défini par un noyau N . Si Φ commute aux opérateurs $\rho(\underline{u}(b))$ $(b \in A^s)$, alors

$$\mathrm{Supp}\ N \subset \{(\xi,\eta) \in \widetilde{M}\times\widetilde{M} \mid \widetilde{\mathbb{Q}}(\xi) = \widetilde{\mathbb{Q}}(\eta)\} \quad .$$

Démonstration: En effet, l'hypothèse sur Φ entraîne aussitôt

$$\underline{\psi}(b\mathbb{Q}(x)) = \underline{\varphi}(b\mathbb{Q}(y)) \qquad (b \in A^s)$$

pour tout $(x,\psi;y,\varphi) \in \mathrm{Supp}\ N$. En écrivant $\varphi = \psi^t$ pour $t \in k^\times$ convenable, il s'ensuit

$$\mathbb{Q}(x) \equiv t\mathbb{Q}(y) \qquad (\text{cf. n° 1, déf. 1}) \quad ,$$

mais pour $a,c \in \mathrm{Im}\ \mathbb{Q}$, la relation $a \equiv c$ équivaut à $a = c$ (cf. n° 2, déf. 2), d'où l'assertion du lemme.

C.Q.F.D.

Dans la suite, on pose, pour i = 1,2 ,

$$\mathrm{pr}_i(\xi_1,\xi_2) = \xi_i \qquad ((\xi_1,\xi_2)\in \widetilde{M}\times\widetilde{M}) .$$

LEMME 2. - <u>Soient</u> (V',π') <u>et</u> (V'',π'') <u>deux représentations de</u> Γ' . <u>Soit</u> W' (<u>resp</u>. W'') <u>un sous-espace plein de</u> $W[\pi']$ (<u>resp</u>. $W[\pi'']$), <u>stable par les opérateurs</u> $\rho(\underline{u}(b))$ $(b\in A^S)$, <u>admettant un supplémentaire plein</u> W'_1 (<u>resp</u>. W''_1) , <u>aussi stable par les opérateurs</u> $\rho(\underline{u}(b))$ $(b\in A^S)$. <u>Supposons que pour tout</u> $\xi\in\mathrm{Supp}\, W'$, $\eta\in\mathrm{Supp}\, W''$, <u>la condition</u> $\widetilde{Q}(\xi) = \widetilde{Q}(\eta)$ <u>entraîne que</u> ξ <u>et</u> η <u>sont congrus modulo</u> Γ' . <u>Alors, si</u> Φ <u>est un opérateur de</u> W' <u>dans</u> W'' <u>commutant aux opérateurs</u> $\rho(\underline{u}(b))$ $(b\in A^S)$, <u>il existe une (et une seule) fonction</u> φ <u>de</u> $\widetilde{M}$ <u>dans</u> $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V',V'')$ <u>telle que</u> $\varphi(\xi)\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W'(\xi),W''(\xi))\subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V',V'')$ <u>et</u>

i) $$\mathrm{Supp}\,\varphi = \mathrm{pr}_1(\mathrm{Supp}\,\Phi)\cap \mathrm{pr}_2(\mathrm{Supp}\,\Phi) ,$$

ii) $$\varphi(\gamma.\xi) = \pi'(\gamma\gamma_0)\varphi(\xi)\pi^{-1}(\gamma) \qquad (\gamma\in\Gamma'',\ \gamma_0\in\Gamma''_\xi,\ \xi\in\widetilde{M}) ,$$

iii) $$(\Phi f)(\xi) = [\varphi(\xi)]\,(f(\xi)) \qquad (f\in W',\ \xi\in\widetilde{M}) .$$

<u>Démonstration</u>: Prolongeons Φ à $W[\pi']$ tout entier, en posant $\Phi = 0$ sur W'_1 . Pour $f\in W'$, $\xi\in(\mathrm{Supp}\, W')\cap(\mathrm{Supp}\, W'')$ on a, en vertu de notre hypothèse et du lemme 1,

$$(\Phi f)(\xi) = |\Gamma'|^{-1}\sum_{\gamma\in\Gamma'} N(\xi,\gamma.\xi)f(\gamma.\xi)$$
$$= |\mathrm{Orb}\,\xi|\, N(\xi,\xi)f(\xi) ,$$

où l'on note N le noyau définissant Φ . Le lemme s'ensuit avec

$$\varphi(\xi) = |\mathrm{Orb}\ \xi|\, N(\xi,\xi) \qquad (\xi \in \tilde{M}) \ .$$

C.Q.F.D.

2. Les diagrammes S^{π} .

DEFINITION 6. - Soit (V,π) une représentation de Γ' . Pour $x,y \in M$, on pose

$$S^{\pi}(x,y;c,r) = \sum_{\substack{\gamma' \in \Gamma',\ m_{\gamma'} = r \\ \mathbb{B}(x,\gamma'.y) = c}} \pi(\gamma') \qquad (c \in A,\ r \in k^{\times}) \ ,$$

$$S^{\pi}(x,y;\gamma) = S^{\pi}(x,y;\mathbb{B}(x,\gamma.y),m_{\gamma}) \ ,$$

$$\Gamma'_x = O(Q) \cap \mathrm{Stab}_{\Gamma'}\, x = \Gamma'_{(x,e)} \qquad (e \in X) \ ,$$

$$V_x = \mathrm{Fix}_V\, \Gamma'_x \ .$$

On note S^{π} le diagramme d'espaces vectoriels dont les sommets sont les V_x $(x \in M)$ et dont les flèches, de source V_y et de but V_x $(y,x \in M)$ sont les opérateurs $S^{\pi}(x,y;\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma')$. On pose enfin

$$S_x = S^{\pi}_x = \sum_{\gamma \in \Gamma'_x} \pi(\gamma) \ ,$$

$$P_x = P^{\pi}_x = |\Gamma'_x|^{-1} S_x \ .$$

LEMME 3. - Soit (V,π) une représentation de Γ' . Si $x,y \in M$ ($= E^n$) et $\gamma \in \Gamma'$ sont tels que le système de $n+s$ vecteurs $(1 \leq s \leq n)$ $(x,\gamma.y^{(s)}) = (x_1,\dots,x_n,\gamma.y_1,\dots,\gamma.y_s)$ de E soit libre, et $y_{s+1} = \dots = y_n = 0$, alors

$$S^{\pi}(x,y;\gamma) = \sum_{\gamma' \in R(\gamma)} \pi(\gamma') \ ,$$

où

$$R(\gamma) = [O(Q)_x \gamma O(Q)_{y^{(s)}}] \cap \Gamma' \quad .$$

Démonstration: La somme $S^{\pi}(x,y;\gamma)$ porte, en fait, sur les $\gamma' \in \Gamma'$ tels que (cf. § 2, n° 2, déf. 2) on ait $m_{\gamma'} = m_{\gamma}$ et

$$\mathbb{B}(x, \gamma'.y) = \mathbb{B}(x, \gamma.y) \quad , \qquad \mathbb{B}(\gamma'.y, \gamma'.y) = \mathbb{B}(\gamma.y, \gamma.y) \quad .$$

Or le théorème de Witt montre, puisque le système $(x, \gamma.y^{(s)})$ est supposé libre, qu'il existe alors $\gamma_1 \in O(Q)$ tel que

$$(\gamma_1.x, \gamma_1\gamma.y^{(s)}) = (x, \gamma'.y^{(s)})$$

et par suite, que (puisque $m_{\gamma'} = m_{\gamma}$)

$$\gamma' \in O(Q)_x \gamma O(Q)_{y^{(s)}} \quad ,$$

d'où le lemme.

C.Q.F.D.

REMARQUES. -

1) Si H, H' sont deux sous-espaces de dimension n de E (où $\dim E = 2r \geqslant 2n$) , on peut toujours plonger les espaces quadratiques $(H,Q|_H)$, $(H',Q|_{H'})$ de manière transversale dans (E,Q) sauf si $|k| \leqslant 3$, $r = 1 = n$, et $(H,Q|_H) \simeq (H',Q|_{H'})$. Cela résulte par récurrence du th. 2 du ch. 1, § 2, n° 2.

2) Notons que l'on a, de manière générale,

$$(9) \qquad S^{\pi}(\gamma_1.xa, \gamma_2.yb;\gamma) = \pi(\gamma_1)S^{\pi}(x,y;\gamma_1^{-1}\gamma\gamma_2)\pi(\gamma_2)^{-1} \quad ,$$

quels que soient $x,y \in M$, $a,b \in A^{\times}$, $\gamma_1,\gamma_2,\gamma \in \Gamma'$.

DEFINITION 7. - Pour $x = (x_1,\dots,x_n) \in M = E^n$, on appelle rang de x et l'on note $\operatorname{rang} x$ le rang du système $x_1,\dots,x_n$ de n vecteurs de E . On pose encore

$$\operatorname{rang}(x,\psi) = \operatorname{rang} x \qquad (x \in M,\ \psi \in X) ,$$

$$\operatorname{rang} \operatorname{Orb}_{\Gamma'} \xi = \operatorname{rang} \xi \qquad (\xi \in \widetilde{M})$$

Si $\operatorname{rang}(x,\psi) < n$, on dit que x et (x,ψ) sont dégénérés; de même pour $\operatorname{Orb}_{\Gamma'}(x,\psi)$. Une réunion de Γ' - orbites est dite non-dégénérée si elle ne contient pas d'orbite dégénérée.

Le lemme et la proposition suivante montrent l'intérêt du diagramme $\underline{S}^{\pi}$.

LEMME 4. - Soient (V',π') et (V'',π'') deux représentations de Γ' . Soit $W[\pi'] = W' \oplus W'_1$ (resp. $W[\pi''] = W'' \oplus W''_1$) une décomposition de $W[\pi']$ (resp. $W[\pi'']$) en somme directe de deux sous-espaces pleins et G - stables. Supposons vérifiées les deux conditions suivantes :

a) $\operatorname{Supp} W'$ et $\operatorname{Supp} W''$ sont non-dégénérés;

b) pour tout $\xi \in \operatorname{Supp} W'$, $\eta \in \operatorname{Supp} W''$, la condition $\widetilde{Q}(\xi) = \widetilde{Q}(\eta)$ entraîne que ξ et η sont congrus modulo Γ' .

Si Φ est un opérateur G - équivariant de W' dans W'' , alors il est de la forme

$$(\Phi f)(\xi) = [\varphi(\xi)](f(\xi)) \qquad (f \in W',\ \xi \in \widetilde{M})$$

pour une (et une seule) fonction $\varphi = \varphi_{\Phi}$ de $\widetilde{M}$ dans $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V',V'')$ telle que $\operatorname{Supp} \varphi = pr_1(\operatorname{Supp} \Phi) \cap pr_2(\operatorname{Supp} \Phi)$ et

i) $\varphi(\xi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W',W'')$ $(\subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W[\pi'],W[\pi'']))$ $(\xi \in \widetilde{M})$,

ii) $\varphi(\gamma.\xi) = \pi'(\gamma\gamma_o)\varphi(\xi)\pi(\gamma)^{-1}$ $(\gamma \in \Gamma',\ \gamma_o \in \Gamma'_{\xi},\ \xi \in \widetilde{M})$,

iii) $\varphi(xa,\psi) = \varphi(x,\psi')$ $(x \in M,\ a \in A^{\times},\ \psi,\psi' \in X)$,

iv) $\varphi(x)S^{\pi'}(x,y;\gamma) = S^{\pi''}(x,y;\gamma)\varphi(y)$ $(x,y \in M,\ \gamma \in \Gamma')$,

<u>en écrivant</u> $\varphi(z,\psi) = \varphi(z)$ <u>pour</u> $(z,\psi) \in \widetilde{M}$, <u>d'après</u> iii).

<u>En particulier, si</u> $\Gamma' = \Gamma$, <u>on a</u>

v) $\varphi(x)\pi'(\gamma)P_y^{\pi'} = P_x^{\pi''}\pi''(\gamma)\varphi(y)$

<u>pour tous les</u> $x,y \in M$, $\gamma \in \Gamma'$ <u>tels que le système de</u> $2n$ <u>vecteurs</u> $(x,\gamma.y)$ <u>soit libre dans</u> E (<u>cf. lemme</u> 3).

<u>Démonstration</u>: D'après le lemme 2, il existe $\varphi : \widetilde{M} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V',V'')$ avec le support voulu et telle que i) et ii). La relation iii) est une conséquence immédiate du fait que Φ commute aux opérateurs $\rho(\underline{h}(a))\rho(\underline{w})$ pour tout $a \in A^{\times}$, nous avons, quels que soient $f \in W'$, $(x,\psi) \in \widetilde{M}$, et $a \in A^{\times}$,

$$(10) \qquad \varphi(x,\psi) \sum_{z \in M} \underline{\psi}(\mathbb{B}(xa,z))f(z,\psi) = \sum_{z \in M} \underline{\psi}(\mathbb{B}(xa,z))\,(z,\psi)f(z,\psi) \quad .$$

Or, si $a \in A - A^{\times}$, alors, d'après a), $xa \notin \mathrm{Supp}\ W' \cup \mathrm{Supp}\ W''$, et par suite nous avons encore (10), réduite à l'identité $0 = 0$. Comme $\underline{\psi}(\mathbb{B}(xa,z)) = \underline{\psi}(a^{*}\mathbb{B}(x,z))$ pour $\psi \in X$, $a \in A$, $x,z \in M$, et que les caractères $\underline{\psi}^a$ pour $a \in A$ ($\psi \in X$ fixé) forment une $\mathbb{C}$ - base de $\mathbb{C}^A$, on en conclut que

$$(11) \qquad \varphi(x,\psi) \sum_{\substack{z \in M \\ \mathbb{B}(x,z) = c}} f(z,\psi) = \sum_{\substack{z \in M \\ \mathbb{B}(x,z) = c}} \varphi(z,\psi)f(z,\psi)$$

pour tout $x \in M$, $\psi \in X$, $f \in W'$. Il suffit alors d'appliquer (11) à la fonction $f = f_{y,\psi;v}$ ($(y,\psi) \in \tilde{M}$, $v \in W'(y,\psi) = W'(y)$) telle que $\mathrm{Supp}\, f = \mathrm{Orb}_{\Gamma'}(y,\psi)$ et que $f(y,\psi) = v$, et à $c = \mathbb{B}(x,\gamma.y)$ ($\gamma \in \Gamma'$) , pour obtenir iv) dont v) est une conséquence immédiate, d'après le lemme 3.

C.Q.F.D.

REMARQUE. - Si $\Gamma' = \Gamma$ alors l'hypothèse b) dans le lemme ci-dessus est une conséquence de l'hypothèse a), en vertu du théorème de Witt (cf. [2] ou [5]).

3. Tronquages.

DEFINITION 8. - Pour tout $a \in \mathrm{Im}\, \mathbb{Q}$, on définit un opérateur T_a du $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $W[\pi]$, appelé opérateur de tronquage au dehors de la sphère de rayon a , par

$$T_a(f)(x,e^t) = \delta_{t\mathbb{Q}(x),a} f(x,e^t) \qquad (f \in W[\pi],\ x \in E^2,\ t \in k^\times)$$

($e \in X$, fixé) .

LEMME 5. - Pour tout $a \in \mathrm{Im}\, \mathbb{Q}$ l'opérateur T_a est combinaison linéaire des opérateurs de Weil $\underline{U}_b = \rho(\underline{u}(b))$, ($b \in A^s$) .

Démonstration: On a, pour $b \in A^s$, $f \in W[\pi]$,

$$(\underline{U}_b f)(x,e^t) = \underline{e}^b(t\mathbb{Q}(x))f(x,e^t) \qquad (x \in M,\ t \in k^\times) .$$

Or, les caractères $\underline{e}^b$ ($b \in A^s$) forment une base de l'espace de toutes les fonctions complexes φ , symétriques (c'est-à-dire telles que $\varphi(a^*) = \varphi(a)$ ($a \in A$)) sur A . D'autre part, d'après la définition 2 du numéro 2 du paragraphe 2, on voit aussitôt que $\mathrm{Im}\, \mathbb{Q}$ ne contient jamais simultanément une matrice $c \in A$ et sa transposée c^* , si $c \neq c^*$. On en conclut que toute fonction complexe sur $\operatorname{Im} \mathbb{Q}$ se prolonge en une fonction symétrique sur A. Soit $a \in \operatorname{Im} \mathbb{Q}$; si nous prenons $\lambda_b \in \mathbb{C}$ $(b \in A^s)$ tels que la restriction de $\sum_b \lambda_b \underline{e}^b$ à $\operatorname{Im} \mathbb{Q}$ soit la fonction de Dirac δ_a, égale à 1 en a et 0 sur $\operatorname{Im} \mathbb{Q} - \{a\}$, nous obtenons

$$T_a = \sum_b \lambda_b \underline{U}_b \quad .$$

C.Q.F.D

4. <u>Le cas où Γ' est d'indice 2 dans Γ</u>.

Nous considérons ici le cas, que nous rencontrerons dans les cnapitres suivants, où Γ est le produit semi-direct $\Gamma'.\{1,T\}$ du sous-groupe (distingué) Γ' et du sous-groupe $\{1,T\}$ où T est une involution. La situation est décrite dans la proposition suivante, dont la démonstration est une vérification facile.

PROPOSITION 3. - <u>Soit (V,π) une représentation irréductible de Γ'. Notons $(\tilde{V},\tilde{\pi})$ l'induite de (V,π) à Γ ; autrement dit, on a</u>

$$\tilde{V} = V \oplus V \quad ,$$

$$\tilde{\pi}(\gamma') = \pi(\gamma') \oplus \pi^T(\gamma') \qquad (\text{avec } \pi^T(\gamma') = \pi(T\gamma'T),\ \gamma' \in \Gamma') \ ,$$

$$\tilde{\pi}(T)(v,v') = (v',v) \qquad (v,v' \in V) \ .$$

<u>On définit alors un isomorphisme Φ de $(W[\pi],\rho)$ sur $(W[\tilde{\pi}],\rho)$, en posant</u>

$$(\Phi f)(\xi) = (f(\xi), f(T\xi)) \qquad (f \in W[\pi],\ \xi \in \tilde{M}) \ .$$

<u>Lorsque $\tilde{\pi}$ est réductible (c'est-à-dire lorsque $\pi \simeq \pi^T$), on a</u>

$$W[\tilde{\pi}] = W[\tilde{\pi}^+] + W[\tilde{\pi}^-] = (W^+[\pi]) \oplus (W^-[\pi]) \quad ,$$

où l'on note $(\tilde{V},\tilde{\pi}) = (\tilde{V}^+, \tilde{\pi}^+) \oplus (\tilde{V}^-, \tilde{\pi}^-)$ la décomposition en composantes irréductibles de $\tilde{\pi}$, donnée par $\tilde{\pi}^{\pm} = \tilde{\pi}\big|_{\tilde{V}^{\pm}}$,

$$\tilde{V}^{\pm} = \{(v, \pm\varphi(v)) \mid v \in V\}$$

(φ étant un isomorphisme involutif fixé de (V,π) sur (V, π^T)) , et d'autre part

$$W^{\pm}[\pi] = \{ f \in W[\pi] \mid f(T.\xi) = \pm\varphi(f(\xi)) \qquad \forall\, \xi \in \tilde{M} \} \ .$$

CHAPITRE IV

Décomposition de la représentation de Weil en rang 4 (cas déployé).

Dans tout ce chapitre, on garde, sauf mention expresse du contraire, les notations et conventions du chapitre III, appliquées au cas $n = 2$, $r = 2$ et (E,Q) déployé. On désigne en outre par K l'unique extension quadratique de k, et par N (resp. Tr) la norme (resp. la trace) de K sur k. On pose $G_o = GL(2,k) = A^{\times}$.

Dans la suite, on n'emploiera pas la notation $M = E^2$ (resp. $\widetilde{M} = E^2 \times X$) du chapitre III, mais simplement les notations E^2 et $\widetilde{E} = E^2 \times X$.

§ 1. Structure Γ - équivariante de $\widetilde{E} = E^2 \times X$.

Dans ce paragraphe, nous donnons une réalisation convenable de $\Gamma = GO(Q)$ et nous décrivons les Γ - orbites dans $\widetilde{E}$.

1. Réalisation de (E,Q) et de $\Gamma = GO(Q)$.

Nous choisissons le modèle suivant de (E,Q).

DEFINITION 1. - On pose

$$E = A \ (= M_2(k)) \ ,$$

$$Q(a) = \det a \qquad (a \in E) \ .$$

Il est alors clair que (E,Q) est un k - espace quadratique non-dégénéré de rang 4. La forme bilinéaire B associée à Q est donnée par

(1) $$B(a,b) = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} \qquad (a,b \in E) .$$

Rappelons que l'on a posé

$$G_o = GL(2,k) = A^{\times} .$$

PROPOSITION 1. - _Chaque_ $h = (h_1,h_2) \in G_o \times G_o$ _définit une similitude_ φ_h _de_ Q, _de multiplicateur_ $\det(h_1h_2)$, _donnée par_

$$\varphi_h(a) = h_1 a h_2^{*} \qquad (a \in E) .$$

Notons φ _l'homomorphisme_ $h \longmapsto \varphi_h$ _de_ $G_o \times G_o$ _dans_ Γ. _On a alors_

i) $$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{(t,t^{-1}) \mid t \in k^{\times}\} ;$$

ii) _le groupe_ Γ _est le produit semi-direct de l'image_ Γ^+ _de_ φ _et du sous-groupe_ $\{1,T\}$, _où_ T _désigne la transposition dans_ E, _avec la relation_

(2) $$T \circ \varphi_{(h_1,h_2)} \circ T = \varphi_{(h_2,h_1)} \qquad (h_1,h_2 \in G_o) .$$

Démonstration: L'assertion i) ainsi que la relation (2) sont immédiates. Il ne reste à montrer que

$$\mathrm{Im}\,\varphi . \{1,T\} = \Gamma .$$

Or, comme $T \notin \mathrm{Im}\,\varphi$, on a, d'après i),

$$|\mathrm{Im}\,\varphi . \{1,T\}| = 2|k^{\times}|^{-1}|G_o|^2 = 2(q-1)^3q^2(q+1)^2 ,$$

mais d'autre part, on a

$$|O(Q)| = n_H(4)n_H(2) \quad ,$$

où l'on note $n_H(2s)$ le nombre des paires hyperboliques dans un espace quadratique non-dégénéré, déployé, de dimension $2s$ sur k ; on trouve alors aussitôt

$$|O(Q)| = (q^2-1)(q+1)q^2.2(q-1) \quad ,$$

d'où

$$|\Gamma| = (q-1)\,|O(Q)| = 2(q-1)^3q^2(q+1)^2$$

et par suite, $\mathrm{Im}\,\varphi.\{1,T\} = \Gamma$.

C.Q.F.D.

DEFINITION 2. - Dans la suite de ce chapitre, on pose

$$G_o \times G_o = H \quad ,$$

$$m_h = m(\varphi_h) = \det(h_1h_2) \qquad (h = (h_1,h_2) \in H) \ .$$

2. Les H - orbites dans $\widetilde{E} = E^2 \times X$.

Nous considérons maintenant l'extension naturelle à E^2 et à $\widetilde{E}$ de l'action de $H = G_o \times G_o$ dans E comme groupe de similitudes de Q définie au numéro 1 (prop. 1).

DEFINITION 3. - Pour $h = (h_1,h_2) \in H$, on pose (cf. déf. 2)

$$h.a = h_1ah_2^* \qquad (a \in E) \quad ,$$

$$h.x = (h.x_1,h.x_2) \qquad (x = (x_1,x_2) \in E^2) \quad ,$$

$$h.\xi = (h.x,\psi^{m_h^{-1}}) \qquad (\xi = (x,\psi) \in \widetilde{E})$$

On détermine sans difficulté les H - orbites dans E, dont nous donnons un système complet de représentants dans la table 1. Les notations employées dans cette table, que l'on gardera dans tout ce chapitre, sont données dans les définitions suivantes.

DEFINITION 4. - <u>Pour</u> $a \in G_o$, <u>on note</u> $\langle a \rangle$ <u>la classe de conjugaison de</u> a <u>dans</u> G_o <u>et l'on note</u> $C(a)$ <u>le centralisateur de</u> a <u>dans</u> G_o. <u>On pose en plus</u>

$$y_t = \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix} \qquad (t \in k^\times) ,$$

$$y_c = \begin{pmatrix} Tr(c) & N(c) \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (c \in K^\times - k^\times) ,$$

$$\underline{d}(r,s) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \qquad (r,s \in k^+) ,$$

$$\underline{a}(r,s) = \begin{pmatrix} 0 & s \\ r & 0 \end{pmatrix} \qquad (r,s \in k^+) .$$

DEFINITION 5. - <u>Si</u> L <u>est un sous-groupe de</u> G_o, <u>on le plonge dans</u> H <u>par</u>

$$D(L) = \{(a, a^{*-1}) \mid a \in L\} .$$

<u>On pose en outre</u>

$$T_o = \{\begin{pmatrix} r & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix} \mid r,s \in k^\times\} ,$$

$$U_o = \{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s \in k^+\} ,$$

$$H_1 = \{h \in H \mid m_h = 1\} .$$

Remarquons que le groupe $G_o \times k^\times$ agit dans $\widetilde{E}$ par

(3) $$(x,\psi)(a^*,t) = (xa, \psi^{t^{-1}}) \qquad ((x,\psi) \in \widetilde{E},\ a \in G_o,\ t \in k^\times),$$

où l'on désigne, comme dans le chapitre III (§ 2, n° 1), par xa le produit matriciel du vecteur à deux composantes, $x = (x_1,x_2) \in E^2$ et de la matrice $a \in G_o = GL(2,k)$. Cette action commute à l'action de H que nous avons considérée; nous donnons la liste d'orbites de l'action produit dans la table 2. Notons encore que cette action produit respecte le rang, au sens de la définition suivante (cf. ch. III, § 3, n° 2, déf. 6).

DEFINITION 6. - _On appelle rang d'un couple_ $x = (x_1,x_2) \in E^2$, _et l'on note_ rang x , _le rang du système formé des deux vecteurs_ x_1 _et_ x_2 _dans_ E . _On pose_

$$\operatorname{rang}(x,\psi) = \operatorname{rang} x \qquad\qquad ((x,\psi) \in \widetilde{E})$$

et l'on appelle rang d'une orbite (_suivant_ H , $G_o \times k^\times$ _ou_ $H \times (G_o \times k^\times)$ _le rang commun de ses éléments. On dit enfin qu'un élément de_ $\widetilde{E}$, _ou une orbite, est dégénéré si son rang est plus petit ou égal à_ 1 .

Dans les tables 1 et 2, nous avons enuméré les représentants par rang décroissant et séparé par des traits gras les fibres du rang.

Dans la table 3, nous donnons les valeurs de Φ (cf. ch. III, § 2, n° 2, déf. 2) sur les E^2 - composantes des représentants de la table 1.

3. - _L'action de la transposition_ T .

L'extension naturelle de T à $\widetilde{E}$, notée encore T , est donnée par

$$(4) \qquad T(x;\psi) = (Tx;\psi) = (Tx_1,Tx_2;\psi) = (x_1^*,x_2^*;\psi)$$

pour $x = (x_1,x_2) \in E^2$, $\psi \in X$. Son action sur les représentants de la table 1 est donnée par la

PROPOSITION 2. - On a, avec $w_1 = \underline{a}(1,1)$,

i) $T(1,y_t;\psi) = (w_1, w_1^{*-1}).(1,y_t;\psi)$ $(t \in k^\times,\ \psi \in X)$,

ii) $T(1,y_c;\psi) = (\underline{d}(1,-N(c)),\ \underline{d}(1,N(c)^{-1})).(1,y_c;\psi)$ $(c \in K^\times - k^\times, \psi \in X)$,

iii) $T(1,\underline{a}(0,1);\psi) = (w_1, w_1^{*-1}).(1,\underline{a}(0,1);\psi)$ $(\psi \in X)$,

iv) $T(\underline{a}(0,1),1;\psi) = (w_1, w_1^{*-1}).(\underline{a}(0,1),1;\psi)$ $(\psi \in X)$,

v) $T(\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(0,1);e) = (\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(1,0);e)$,

vi) T fixe tout autre représentant de la table 1.

Cela est immédiat.

§ 2. Les représentations $W[\pi_1,\pi_2]$.

Nous gardons, dans ce paragraphe, les notations du paragraphe 1, auxquelles nous nous referrons constamment.

1. Définition des représentations $W[\pi_1,\pi_2]$.

D'après la proposition 1 du numéro 1 du paragraphe précédent et la proposition 1 du paragraphe 3 (n° 1) du chapitre III, on est amené à poser la définition suivante (cf. déf. 1, loc. cit.):

DEFINITION 1. - Soient (V_1, π_1) et (V_2, π_2) deux représentations de G_o telles que $\pi_1(t) \otimes \pi_2(t) = Id_{V_1 \otimes V_2}$ pour toute matrice scalaire t de G_o ; on dira alors que π_1 et π_2 coïncident sur les matrices scalaires. On note dans ce cas $(W[\pi_1 \otimes \pi_2], \rho)$ la représentation de $G = GSp(4,k)$ dont l'es-

<u>pace</u> $W[\pi_1 \otimes \pi_2]$ <u>est formé de toutes les fonctions</u> f <u>de</u> $\widetilde{E} = E^2 \times X$ <u>dans</u> $V_1 \otimes V_2$ <u>telles que</u>

$$f(h_1 a h_2^*,\ h_1 b h_2^*;\ \psi^{\det(h_1 h_2)^{-1}}) = [\pi_1(h_1) \otimes \pi_2(h_2)] f(a,b;\psi) \tag{1}$$

<u>quels que soient</u> $(h_1, h_2) \in H = G_o \times G_o$, $(a,b) \in E^2$, $\psi \in X$, <u>et dont l'action</u> ρ <u>est donnée par les formules</u> (7) <u>à</u> (10) <u>du théorème</u> 1 <u>du numéro</u> 4 <u>du paragraphe</u> 2 <u>du chapitre</u> III, <u>appliquées au cas</u> $n = 2$, <u>à l'espace quadratique</u> $(E,Q) = (M_2(k), \det)$ <u>de rang</u> $2r = 4$, <u>et à</u> $V = V_1 \otimes V_2$ <u>à la place de</u> $\mathbb{C}$ (<u>cf. rem. au th</u>. 1, <u>loc. cit</u>.).

Notons (V^*, π^*) l'anti-représentation duale d'une représentation (V, π) d'un groupe fini L . Notons encore T la transposition $a \longmapsto a^*$ dans $G_o = GL(2,k)$. Pour toute représentation π de G_o , posons

$$\hat{\pi} = (\pi \circ T)^* \quad . \tag{2}$$

Alors

$$(V^*, \hat{\pi}) \simeq (V, \pi) \quad .$$

Cela est immédiat, en considérant les traces des deux représentations et en remarquant que tout élément de G_o est conjugué à son transposé.

En remplaçant maintenant (V_2, π_2) par $(V_2^*, \hat{\pi})$ dans (1), et en se servant de l'isomorphisme bien connu

$$(V_1 \otimes V_2^*,\ \pi_1 \otimes \hat{\pi}_2) \xrightarrow{\ \sim\ } (\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2, V_1),\ [\pi_1, \pi_2 \circ T]) \tag{3}$$

(avec

$$[\pi_1(h_1),\ (\pi_2 \circ T)(h_2)] = \pi_1(h_1) \circ \varphi \circ (\pi_2 \circ T)(h_2)$$

pour $h_1, h_2 \in G_o$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2^*, V_1)$) , on obtient la définition équivalente (c'est-à-dire, fournissant une G - représentation isomorphe) suivante

DEFINITION 1 bis. - _Soient_ (V_1, π_1) _et_ (V_2, π_2) _deux représentations de_ G_o _telles que_ $[\pi_1(t), \pi_2(t)^{-1}] : \varphi \longmapsto \pi_1(t) \circ \varphi \circ \pi_2(t)^{-1}$ $(\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2, V_1))$ _soit l'identité pour tout_ $t \in G$ _scalaire_; _on dira alors que_ π_1 _et_ π_2 _coïncident sur les scalaires. On note_ $(W[\pi_1, \pi_2], \rho)$ _la représentation de_ G _dont l'espace_ $W[\pi_1, \pi_2]$ _est formé de toutes les fonctions_ f _de_ $\widetilde{E} = E^2 \times X$ _dans_ $[V_2, V_1] = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2, V_1)$ _telles que_

$$f(h_1, h_2).\xi) = \pi_1(h_1) \circ f(\xi) \circ \pi_2(h_2^*) \qquad (h_1, h_2 \in G_o, \ \xi \in \widetilde{E}) , \tag{4}$$

c'est-à-dire

$$f(h_1 a h_2, h_1 b h_2; \psi^{\det(h_1 h_2)^{-1}}) = \pi_1(h_1) \circ f(a, b; \psi) \circ \pi_2(h_2) , \tag{5}$$

quels que soient $h_1, h_2 \in G_o$, $a, b \in E$, $\psi \in X$, _et dont l'action_ ρ _est donnée par les formules_ (7) _à_ (10) _du paragraphe_ 3 (_n_° 3, _th_. 1) _du chapitre_ III, _appliquées au cas_ $n = 2$, _à l'espace quadratique_ $(E,Q) = (M_2(k), \det)$ _de rang_ $2r = 4$ _et à_ $V = [V_2, V_1]$ (_cf. rem. au th_. 1, _loc. cit_.).

Nous aurons le plus souvent à employer la définition 1 bis. Dans les cas qui nous intéresserons d'ailleurs, π_1 et π_2 agiront comme des homothéties sur le centre Z_o de G_o . Dans ce cas, le fait que π_1 et π_2 coïncident sur les (matrices) scalaires signifie que les rapports des homothéties $\pi_1(t)$ et $\pi_2(t)$ coïncident, pour tout $t \in Z_o$.

2. _L'action de la transposition_ T .

Rappelons que l'on a posé

$$T(a,b;\psi) = (Ta,Tb;\psi) = (a^*,b^*;\psi) \qquad ((a,b;\psi) \in \widetilde{E}) .$$

On note aussi T la transposition dans $G_o = A^\times$.

PROPOSITION 3. - Pour toute paire d'espaces vectoriels V', V'' , notons S l'isomorphisme canonique de $V' \otimes V''$ sur $V'' \otimes V'$ donné par

(6) $$S(v' \otimes v'') = v'' \otimes v' \qquad (v' \in V', v'' \in V''),$$

et posons, pour toute $f \in (V' \otimes V'')^{\widetilde{E}}$,

(7) $$\widetilde{T}(f) = S \circ f \circ T .$$

Alors, si (V_1, π_1) et (V_2, π_2) sont deux représentations de G_o qui coïncident sur les matrices scalaires, on a

$$\widetilde{T} : (W[\pi_1,\pi_2], \rho) \xrightarrow{\sim} (W[\pi_2,\pi_1], \rho)$$

et

$$(\widetilde{T})^2 = \mathrm{Id} .$$

Démonstration: Cela résulte aussitôt des relations $T^2 = \mathrm{Id}$ et

$$T \circ \varphi(h_1,h_2) = \varphi(h_2,h_1) \circ T \qquad (h_1,h_2 \in G_o)$$

(cf. § 1, n° 1, prop. 1 et § 2, n° 1, déf. 1) .

C.Q.F.D.

DEFINITION 2. - Soit (V_1, π_1) une représentation de G_o . On note $(W^+[\pi_1 \otimes \pi_1], \ )$ (resp. $(W^-[\pi_1,\pi_1], \ )$) la sous-représentation de $(W[\pi_1,\pi_1], \ )$ dont l'espace $W^+[\pi_1,\pi_1]$ (resp. $W^-[\pi_1,\pi_1]$) est l'espace propre correspondant à la valeur propre $+1$ (resp. -1) de l'involution $\widetilde{T}$ de $(W[\pi_1,\pi_1], \rho)$.

Considérons maintenant la définition 1 bis. Identifions canoniquement tout espace vectoriel V à son bidual $(V^*)^*$. Nous avons alors la

PROPOSITION 3 bis. - Soient (V', π') , (V'', π'') deux représentations de G_o qui coïncident sur les scalaires. Posons, pour toute $f \in [V_2,V_1] =$
$= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2,V_1)$,

(8) $$\widetilde{T}_1 f = (f\circ T)^* \quad (\in [V_1^*,V_2^*]) \ .$$

Alors, on a

$$\widetilde{T}_1 : (W[\pi_1,\pi_2], \rho) \xrightarrow{\sim} (W[\hat{\pi}_2,\hat{\pi}_1], \rho)$$

et

$$(\widetilde{T}_1)^2 = \mathrm{Id} \ .$$

Soit σ un isomorphisme involutif de $(V^*, \hat{\pi})$ sur (V,π) , où l'on désigne par (V,π) une représentation de G_o . On pose

(9) $$(\widetilde{T}_\sigma f)(\xi) = \sigma\circ[(f\circ T)(\xi)]^* \qquad (\xi \in \widetilde{E}) \ .$$

Alors $\widetilde{T}_\sigma$ est un automorphisme involutif de $(W[\pi,\pi], \rho)$.

Cela est immédiat.

REMARQUE. - Si (V,π) est irréductible, alors σ est unique au signe près. Par suite, $\widetilde{T}_\sigma$ ne dépend pas du choix de σ ; on pose donc

(10) $$\widetilde{T} = \widetilde{T}_\sigma \quad .$$

DEFINITION 2 bis. - Soit (V,π) une représentation de G_o. On note $(W^+[\pi,\pi],\rho)$ (resp. $(W^-[\pi,\pi],\rho)$) la sous-représentation de $(W[\pi,\pi],\rho)$ dont l'espace est l'espace propre correspondant à la valeur propre $+1$ (resp. -1) de l'involution $\widetilde{T}_\sigma$ (pour un isomorphisme involutif σ fixé, de $(V^*,\hat{\pi})$ sur (V,π)).

Bien entendu, nous avons alors

$$(W^{\pm}[\pi,\pi],\rho) \simeq (W^{\pm}[\pi\otimes\pi],\rho) \quad .$$

3. Description des espaces $W[\pi_1,\pi_2]$.

Nous nous proposons de décrire les espaces (cf. ch. III, § 3, n° 1, déf. 2)

(11) $$W[\pi_1,\pi_2](\xi) = \{f(\xi) \mid f \in W[\pi_1,\pi_2]\}$$

pour $((V_1,\pi_1),(V_2,\pi_2))$ parcourant l'ensemble des types d'isomorphie des paires de représentations de G_o qui coïncident sur les matrices scalaires et pour ξ parcourant l'ensemble de H - représentants dans $\widetilde{E}$ donné dans la table 1.

On a

$$W[\pi_1,\pi_2](\xi) = \mathrm{Fix}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2,V_1)}(\mathrm{Stab}_H\xi) \qquad (\xi \in \widetilde{E}) ,$$

c'est-à-dire

(12) $$W[\pi_1,\pi_2](\xi) = \{\varphi : V_2 \longrightarrow V_1 \mid \pi_1(h_1)\circ\varphi = \varphi\circ\pi_2(h_2^{*-1}) \ \forall (h_1,h_2) \in \mathrm{Stab}_H\xi\} .$$

En particulier, si $\mathrm{Stab}_H \xi$ est de la forme $D(L)$ pour un sous-groupe L convenable de H (cf. § 1, n° 2, déf. 5 et table 1), on aura

(13) $$W[\pi_1,\pi_2] = \mathrm{Hom}_L[(V_2,\pi_2), (V_1,\pi_2)] \quad .$$

Dans la suite, nous emploierons les notations des représentations de G_o introduites dans le chapitre I (§ 4, n° 4, notations).

PROPOSITION 4. - Soient $\Lambda, \Phi \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$, tels que $\Lambda|_{k^\times} = \Phi|_{k^\times}$. On écrit alors $\Lambda = \omega_1 \Phi$ ($\omega_1 \in \mathrm{Car}(U)$) . Considérons les représentations $(V_\Lambda , \pi_\Lambda)$, (V_Φ , π_Φ) de la série discrète de G_o .

Alors on a:

i) Si $\pi_\Lambda \neq \pi_\Phi$ le support de $W[\pi_\Lambda ,\pi_\Phi]$ est réduit aux H - orbites non-dégénérées sur lesquelles $\tilde{\Phi}$ ne s'annule pas. Si $\Lambda = \Phi$ alors le support contient en plus les H - orbites de $(1,t;\psi)$ $(t \in k^\times, \psi \in X)$.

ii) $W[\pi_\Lambda , \pi_\Phi](1, y_c;e)$ est formé, pour tout $c \in K^\times - k^\times$, des applications φ de V_Φ dans V_Λ qui envoient chaque droite propre $V_\Phi^{\omega\Phi}$ pour $C(y_c)$ (cf. ch. I, § 6, n° 1, déf. 2, table 3 et ce chapitre, § 1, n° 2, déf. 4) $(\omega \in \mathrm{Car}(U) - \{1,\Phi^{q-1}\})$ dans $V_\Lambda^{\omega\Phi}$. En particulier (cf. loc. cit.)

$$\dim W[\pi_\Lambda , \pi_\Phi](1,y_c;e) = q - 3 + 2(\delta_{\Lambda,\Phi} + \delta_{\Lambda^q,\Phi}) \quad .$$

iii) $W[\pi_\Lambda , \pi_\Phi](1,\underline{a}(0,1);e)$ est formé des $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\Phi , V_\Lambda)$ pour lesquelles il existe $v \in \mathbb{C}^{k^\times}$ telle que

$$(\varphi v')(t) = v_\varphi(t)v'(t) \qquad (t \in k^\times , v' \in V_\Phi) \quad .$$

iv) $W[\pi_\Lambda , \pi_\Phi](\underline{d}(1,0), \underline{d}(0,1);e)$ est formé des $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\Phi , V_\Lambda)$ pour lesquelles il existe $u : \mathrm{Car}(k^\times) \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\varphi(\alpha) = u(\alpha)\alpha \qquad (\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)) \quad .$$

<u>Démonstration</u>: L'assertion i) résulte aussitôt de (13) et du fait que les stabilisateurs dans H de la table 1, qui ne sont pas de la forme $D(L)$ pour $L \subset G_o$, contiennent tous, soit $U_o \times \{1\}$, soit $\{1\} \times U_o$, et que les représentations de la série discrète de G_o n'admettent de vecteur non-nul fixé par U_o . Les assertions ii) à iv) résultent de (8) et des résultats du numéro 1 du paragraphe 6 du chapitre I.

C.Q.F.D.

D'après la proposition 3 du numéro 2, outre le cas où π_1 et π_2 appartiennent à la serie principale, il suffit de considérer le cas ci-dessous, où, rappelons-le, on pose $\pi_{\alpha,\alpha} = \pi_\alpha^1 + \pi_\alpha^q$ $(\alpha \in Car(k^\times))$.

PROPOSITION 5. - <u>Soient</u> $(V_1, \pi_1) = (V_\Lambda, \pi_\Lambda)$ <u>et</u> $(V_2, \pi_2) = (V_{\alpha,\beta}, \pi_{\alpha,\beta})$ <u>où</u> $\Lambda \in Car(K^\times) - Car(k^\times)$, $\alpha, \beta \in Car(k^\times)$, $\Lambda\Lambda^q = \alpha\beta$ (<u>i.e</u>. $\Lambda\Lambda^q = (\alpha \circ N)(\beta \circ N)$ <u>dans</u> $Car(K^\times)$) . <u>Nous réalisons ces représentations par leurs modèles de Weil réduits (cf. ch</u>. I, § 3, <u>n</u>° 3 <u>et</u> § 4, <u>n</u>° 4).

i) <u>Le support de</u> $W[\pi_1,\pi_2]$ <u>est la réunion de toutes les</u> H - <u>orbites non-dégénérées sauf celle de</u> $(\underline{d}(1,0), \underline{a}(0,1); e)$.

ii) $W[\pi_1,\pi_2](1,y_c;e) = \{\varphi : V_2 \longrightarrow V_1 \mid \varphi(V_2^\Phi) \subset \varphi(V_1^\Phi) \quad \forall \Phi \in Car(K^\times), \Phi^{q+1} = \alpha\beta\}$ <u>pour tout</u> $c \in K^\times - k^\times$ (<u>cf. ch</u>. I, § 6, <u>n</u>° 1).

iii) $W[\pi_1,\pi_2](1, \underline{a}(0,1); e)$ <u>est formé des applications</u> $\varphi : V_2 \longrightarrow V_1$ <u>telles qu'il existe</u> $\lambda_\varphi : k \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C}$ <u>avec</u> $\mathrm{Supp}\, \lambda_\varphi \subset k^\times$ <u>et</u>

$$(\varphi v)(t) = \lambda_\varphi(t) v(t) \qquad (v \in V_2 \ , \ t \in k^\times) \ .$$

iv) $W[\pi_1,\pi_2](\underline{d}(1,0), \underline{d}(0,1); e)$ <u>est formé des applications</u> φ <u>de</u> V_2 <u>dans</u> V_1 <u>telles que</u>

$$\varphi(V_2)'_\gamma) \subset (V_1)'_\gamma \qquad (\gamma \in Car(k^\times))$$

(<u>cf</u>. <u>ch</u>. I, § 6, <u>n</u>° 1).

v) $W[\pi_1,\pi_2](\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(1,0);\ e) =$

$$= \{\varphi : V_2 \longrightarrow V_1 \mid \operatorname{Supp}\varphi \subset \{v \in V_2 \mid \operatorname{Supp} v_2 \subset \{0,\infty\}\}\} \quad .$$

Démonstration: Cela est une conséquence immédiate de la table 1, de (8) et de la table 3 (cf ch. I, § 6, n° 1) du chapitre I.

C.Q F.D.

Comme l'on a, de manière générale

(14) $W[\pi_1 \oplus \pi_1',\ \pi_2 \oplus \pi_2'] = W[\pi_1,\pi_2] \oplus W[\pi_1,\pi_2'] \oplus W[\pi_1',\pi_2] \oplus W[\pi_1',\pi_2']$

pour des représentations $\pi_1, \pi_1', \pi_2, \pi_2'$ de G_o telles que π_1 et π_2 ainsi que π_1' et π_2' aient une même restriction aux matrices scalaires, la description de $W[\pi_\Lambda\ ,\ \pi_\alpha^1]$ et de $W[\pi_\Lambda\ ,\ \pi_\alpha^q]$ ($\Lambda \in \operatorname{Car}(K^\times) - \operatorname{Car}(k^\times)$, $\alpha \in \operatorname{Car}(k^\times)$) se lit aussi dans la proposition ci-dessus. Nous appliquons cette même remarque dans la suite.

La proposition suivante résulte aussitôt des définitions (cf. table 1 et (8)).

PROPOSITION 6. - Soient $(V_1, \pi_1) = (V_{\alpha,\beta}\ ,\ \pi_{\alpha,\beta})$, $(V_2, \pi_2) = (V_{\alpha',\beta'}\ ,\ \pi_{\alpha',\beta'})$ $(\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \operatorname{Car}(k^\times)$, $\alpha\beta = \alpha'\beta'$. On a alors

i) $W[\pi_1,\pi_2](1,y_c;e)$ est formé, quel que soit $c \in K^\times - k^\times$, des applications φ de V_2 dans V_1 telles que

$$\varphi(V_2^\Lambda) \subset V_1^\Lambda \qquad \text{(cf. ch. I, § 6, n° 1)}$$

pour tout $\Lambda \in \operatorname{Car}(K^\times)$ tel que $\Lambda^{q+1} = \alpha'\beta'$ ($= \alpha\beta$) .

ii) $W[\pi_1,\pi_2](1,\ \underline{a}(0,1);\ e)$ est formé des applications φ de V_2 dans V_1 telles que

$$\varphi(V_2^{\psi}) \subset V_1^{\psi} \qquad (\psi \in \mathrm{Car}(k^+))$$

(cf. ch. I, § 6, n° 1) .

iii) $W[\pi_1,\pi_2](\underline{d}(1,0), \underline{d}(0,1); e)$ est formé des applications φ de V_2 dans V_1 telles que

$$\varphi((V_2)'_{\gamma}) \subset (V_1)'_{\gamma} \qquad (\gamma \in \mathrm{Car}(k^{\times})) \quad .$$

iv) $W[\pi_1,\pi_2](\underline{d}(1,0), \underline{a}(1,0); e) = \{\varphi : V_2 \to V_1 \mid \mathrm{Ker}\,\varphi \supset \bigoplus_{1 \neq \psi \in \mathrm{Car}(k^+)} {}_{\psi}(V_2)\}$

(cf. loc. cit.).

v) $W[\pi_1,\pi_2](\underline{d}(1,0), \underline{a}(0,1); e) = \{\varphi : V_2 \to V_1 \mid \mathrm{Im}\,\varphi \subset {}_1(V_1)\}$ (cf. loc. cit.).

vi) $W[\pi_1,\pi_2](\underline{d}(1,0), 0; e) =$

$$= \{\varphi : V_2 \to V_1 \mid \mathrm{Ker}\,\varphi \supset \bigoplus_{1 \neq \psi \in \mathrm{Car}(k^+)} {}_{\psi}(V_2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,\varphi \subset {}_{\psi}(V_2)\}$$

(cf. loc. cit.).

vii) $W[\pi_1,\pi_2](0,0;e) = \delta_{\alpha,\beta}\,\delta_{\alpha',\beta'} V_o$,

où V_o est le sous-espace de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2,V_1)$ formé des applications φ telles que $\mathrm{Ker}\,\varphi \supset \pi_{\alpha}^{q}$ et $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \pi_{\alpha'}^{1}$.

Nous donnons les dimensions des espaces $W[\pi_1,\pi_2](\xi)$ dans la table 4.

4. Description des espaces propres $W^{\pm}[\pi,\pi]$.

LEMME 1. - Avec les notations de la définition 4 du paragraphe 1 (n° 2), on a

i) $$T(1,y_c;\psi) = (h_c,h_c^{-1}).(1,y_c;\psi) \qquad (c \in K^{\times} - k^{\times},\ \psi \in X) \quad ,$$

avec

$$h_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -N(c) \end{pmatrix} \quad ;$$

ii) $T(\underline{d}(r,s),\ \underline{a}(r',s');\ \psi) = (1,w').(\underline{d}(r,s),\ \underline{a}(r',s');\ \psi)$

$(r,s,r',s' \in k)$ avec

$$w' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{a}(1,1) \quad .$$

Cela est immédiat.

PROPOSITION 7. - Si $\xi \in \widetilde{E}$ n'appartient ni à la H - orbite de $(\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(1,0);\ e)$ ni à celle de $(\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(0,1);\ e)$, alors

$$T\xi = (h_\xi\ ,\ h_\xi^{-1}).\xi \quad ,$$

pour un $h_\xi \in G_o$, symétrique, convenable.

Démonstration: Cela résulte aussitôt du lemme ci-dessus et de la table 2, car l'action de $\Gamma = H.\{1,T\}$ dans $\widetilde{E}$ commute à celle de $G_o \times k^\times$.

C.Q.F.D.

LEMME 2. - Soit $\xi \in \widetilde{E}$ congru à son transposé modulo H . Soit (V,π) une représentation de G_o . Alors, pour tout $f \in W[\pi,\pi]$, on a

$$(\widetilde{T}_\sigma f)(\xi) = \widetilde{T}_{\sigma,\xi}(f(\xi))$$

pour l'involution $\widetilde{T}_{\sigma,\xi}$ de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}V$, laissant stable $W[\pi,\pi](\xi)$, définie par

(15) $$\widetilde{T}_{\sigma,\xi}(\varphi) = \pi(h_\xi)^{-1}\circ\sigma\circ\varphi^*\circ\pi(h_\xi) \qquad (\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}V) \quad ,$$

où h_ξ désigne un élément symétrique de H tel que

$$T(\xi) = (h_\xi\ ,\ h_\xi^{-1}).\xi \qquad \text{(cf. prop. 7),}$$

σ est un isomorphisme involutif de $(V^*,\hat{\pi})$ sur (V,π) (et où φ^* désigne l'application duale de φ).

Démonstration: Cela résulte aussitôt de (9) (n° 2, prop. 3 bis).

C.Q.F.D.

PROPOSITION 8. - Soit (V,π) une représentation de G_o . Soit $\xi \in \widetilde{E}$ congru à son transposé modulo H . Supposons en plus que $\mathrm{Stab}_H \xi = D(L)$, pour un sous-groupe $L \subset G_o$ convenable (cf. table 1). Alors l'involution $\widetilde{T}_{\sigma,\xi}$ de $W[\pi,\pi](\xi) = \mathrm{End}_L V$ est l'identité sur le centre $Z(\mathrm{End}_L V)$.

Démonstration: D'après le lemme 2 et la forme de L (table 1), on a

$$\widetilde{T}_{\sigma,\xi}(\pi(h_o)) = \pi(h_\xi^{-1} h_o^* h_\xi) \qquad (h_o \in L) .$$

Il en résulte que $\widetilde{T}_{\sigma,\xi}$ fixe les projecteurs L - isotypiques, suivant π , de V . Comme ceux-ci engendrent linéairement $Z(\mathrm{End}_L V)$, la proposition est démontrée.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. - Soit (V,π) une représentation de G_o et $\xi \in \widetilde{E}$ congru (mod. H) à son transposé. Si $\mathrm{Stab}_H \xi = D(L)$, pour un sous-groupe $L \subset G_o$ convenable, et si la restriction de π à L est sans multiplicités, alors

$$W[\pi,\pi](\xi) = W^+[\pi,\pi](\xi) .$$

En effet, l'hypothèse sur la restriction de π à L signifie que

$$Z(\mathrm{End}_L V) = \mathrm{End}_L V .$$

PROPOSITION 9. - Soit $\Lambda \in Car(K^{\times}) - Car(k^{\times})$. Alors

$$W^{+}[\pi_{\Lambda}, \pi_{\Lambda}] = W[\pi_{\Lambda}, \pi_{\Lambda}] \quad .$$

Démonstration: Cela résulte aussitôt de la proposition 7, de la table 1, et du corollaire à la proposition 8 ci-dessus, car on sait (ch. I, § 6, n° 1, table 3) que les restrictions de π_{Λ} aux sous-groupes U_o , T_o et T'_o (conjugué à $C(y_c)$, $c \in K^{\times} - k^{\times}$) sont sans multiplicités.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 10. - Soient $\alpha, \beta \in Car(k^{\times})$, $\alpha \neq \beta$. Posons $(V, \pi) = (V_{\alpha,\beta}, \pi_{\alpha,\beta})$ et réalisons cette représentation par son modèle naturel (ch. I, § 1, n° 2 et déf. 4). Fixons (cf. ch. I, § 6, n° 1)

a) $\quad {}_{\psi}v \in {}_{\psi}V \qquad\qquad (\psi \in Car(k^{+}) - \{1\})$;

b) $\quad {}_{1}v_{o} \in {}_{1}V$ (resp. ${}_{1}v_{\infty} \in {}_{1}V$) tel que $Supp({}_{1}v_{o}) = (k^{\times} \times \underline{0}) \times k^{\times}$ (resp. $Supp({}_{1}v_{\infty}) = (\underline{0} \times k^{\times}) \times k^{\times})$;

c) $\quad v_{\gamma} \in V'_{\gamma}$ tel que $Supp(v_{\gamma}) \cap [((k^{\times} \times \underline{0}) \times k^{\times}) \cup ((\underline{0} \times k^{\times}) \times k^{\times})] = \emptyset$ $(\gamma \in Car(k^{\times}))$;

d) $\quad v_{\gamma,o} \in V'_{\gamma}$ (resp. $v_{\gamma,\infty} \in V'_{\gamma}$) tel que $Supp(v_{\gamma,o}) = (k^{\times} \times \underline{0}) \times k^{\times}$ (resp. $Supp(v_{\gamma,\infty}) = (\underline{0} \times k^{\times}) \times k^{\times}$) $(\gamma \in Car(k^{\times}))$.

Posons encore

$$\tilde{v}(r,s;t) = v(s,r;t) \qquad (v \in V,\ r,s \in k,\ t \in k^{\times}) \quad .$$

Alors on a (pour $e \in X = Car(k^{+}) - \{1\}$)

i) $\quad W^{-}[\pi \otimes \pi](1, \underline{a}(0,1); e)$ est engendré (sur $\mathbb{C}$) par ${}_{1}v_{o} \otimes {}_{1}\tilde{v}_{\infty} - {}_{1}v_{\infty} \otimes {}_{1}\tilde{v}_{o}$.

ii) $\quad W^{+}[\pi \otimes \pi](1, \underline{a}(0,1); e)$ admet comme base les ${}_{\psi}v \otimes {}_{\psi}\tilde{v}$ $(\psi \in X)$ et ${}_{1}v_{o} \otimes {}_{1}\tilde{v}_{\infty} + {}_{1}v_{\infty} \otimes {}_{1}\tilde{v}_{o}$.

iii) $\quad W^{-}[\pi \otimes \pi](\underline{d}(1,0), \underline{d}(0,1); e)$ admet comme base $v_{\alpha} \otimes v_{\alpha,\infty} - v_{\alpha,\infty} \otimes v_{\alpha}$

et $v_\beta \otimes v_{\beta,o} - v_{\beta,o} \otimes v_\beta$.

iv) $W^+[\pi \otimes \pi](\underline{d}(1,0), \underline{d}(0,1); e)$ admet comme base les vecteurs $v_\gamma \otimes v_\gamma$ ($\gamma \in Car(k^\times)$) $v_{\alpha,\infty} \otimes v_{\alpha,\infty}$, $v_{\beta,o} \otimes v_{\beta,o}$, $v_\alpha \otimes v_{\alpha,\infty} + v_{\alpha,\infty} \otimes v_\alpha$ et $v_\beta \otimes v_{\beta,o} + v_{\beta,o} \otimes v_\beta$.

v) $$f(\underline{d}(1,0), \underline{a}(0,1); e) = \pm S f(\underline{d}(1,0), \underline{a}(1,0); e)$$

pour $f \in W^\pm[\pi \otimes \pi]$.

vi) $$W[\pi \otimes \pi](\xi) = W^+[\pi \otimes \pi](\xi)$$

pour les représentants ξ de la table 2 autres que les précédents.

Démonstration: Cela est une conséquence facile de la proposition 6 et de la proposition 8 et son corollaire.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 11. - Soit $\alpha \in Car(k^\times)$ et $(V,\pi) = (V^q_\alpha, \pi^q_\alpha)$ la représentation de Steinberg de G_o associée à α , réalisée par son modèle naturel (ch. I, § 1, n° 2). Fixons $v_\gamma \in V'_\gamma$ ($\gamma \in Car(k^\times)$) et $v_{\gamma,o}$ (resp. $v_{\gamma,\infty}$) dans V'_γ tel que $Supp(v_{\gamma,o}) = (k \times \underline{0}) \times k^\times$ (resp. $Supp(v_{\gamma,\infty}) = (\underline{0} \times k) \times k^\times$) ($\gamma \in Car(k^\times)$) . Posons enfin $(\overline{V}, \overline{\pi}) = (V \otimes V, \pi \otimes \pi)$. Alors

i) $W^+[\overline{\pi}](\underline{d}(1,0), \underline{d}(0,1); e)$ admet comme base les vecteurs $v_\gamma \otimes v_\gamma$ ($\gamma \in Car(k^\times)$) , $(v_{\alpha,o} - v_{\alpha,\infty}) \otimes (v_{\alpha,o} - v_{\alpha,\infty})$ et $v_\alpha \otimes (v_{\alpha,o} - v_{\alpha,\infty}) + (v_{\alpha,o} - v_{\alpha,\infty}) \otimes v_\alpha$;

ii) $W^-[\overline{\pi}](\underline{d}(1,0), \underline{d}(0,1); e)$ est engendré par $v_\alpha \otimes (v_{\alpha,o} - v_{\alpha,\infty}) - (v_{\alpha,o} - v_{\alpha,\infty}) \otimes v_\alpha$;

iii) $$f(\underline{d}(1,0), \underline{a}(0,1); e) = \pm S f(\underline{d}(1,0), \underline{a}(1,0); e)$$

pour toute $f \in W^\pm[\overline{\pi}]$;

iv) $$W[\bar{\pi}](\xi) = W^{+}[\bar{\pi}](\xi)$$

pour tout représentant ξ *de la table 2 autre que les précédents*.

Démonstration: Cela résulte aussitôt de la proposition 6 et de la proposition 8 et son corollaire.

C.Q.F.D.

La proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION 12. - *Soit* $\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times})$. *Posons* $(V,\pi) = (\mathbb{C}, \pi_{\alpha}^{1} \otimes \pi_{\alpha}^{1})$. *Alors*

i) $W^{+}[\pi]$ *est formé des* $f \in W[\pi]$ *telles que*

$$f(\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(0,1);\ e) = f(\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(1,0);\ e) \quad ;$$

ii) $W^{-}[\pi]$ *est formé des* $f \in W[\pi]$ *telles que*

a) $$\mathrm{Supp}\ f = \mathrm{Orb}_{H}(\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(1,0);\ e) \cup \mathrm{Orb}_{H}(\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(0,1);\ e) \quad ,$$

b) $$f(\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(0,1);\ e) = -f(\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(1,0);\ e) \quad .$$

Nous donnons les dimensions des espaces $W^{\pm}(\xi)$ dans la table 4, où nous résumons ii b) en posant

$$\dim W^{-}[\pi](\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(0,1);\ e) = \dim W^{-}[\pi](\underline{d}(1,0),\ \underline{a}(0,1);\ e) = \frac{1}{2} \quad .$$

§ 3. Réalisation naturelle de la représentation de Weil.

Nous montrons ici que la représentation de Weil associée à l'espace quadratique déployé (E,Q) est isomorphe à une représentation naturelle de G

via une autre réalisation du module quadratique $(E^2,\overline{\mathbb{Q}},\mathbb{B})$ associé à $\mathbb{Q}$.

1. Le A - module quadratique $(M',\overline{\mathbb{Q}}',\mathbb{B}')$.

Rappelons que l'on a noté A° le sous-groupe additif des anti-traces $a - a^*$ $(a \in A)$ de A .

DEFINITION 1. - *Posons*

$$M' = A \times A = A^2 \quad ,$$

$$x.a = (x_1 a, x_2 a) \qquad (x = (x_1,x_2) \in M',\ a \in A) \quad .$$

On définit une A - *forme quadratique* $\mathbb{Q}'$ *sur* M' *par*

$$\mathbb{Q}'(x) = x_1^* x_2 \qquad (x = (x_1,x_2) \in M') \quad .$$

On pose

$$\overline{\mathbb{Q}}' = \mathrm{pr} \circ \mathbb{Q}' \quad ,$$

où l'on note pr *la projection canonique de* A *sur* $\overline{A} = A/A^\circ$, *et l'on désigne par* $\mathbb{B}'$ *la* A - *forme hermitienne associée à* $\overline{\mathbb{Q}}'$, *donnée par*

$$\mathbb{B}'(x,y) = x_1^* y_2 + x_2^* y_1 \quad ,$$

quels que soient $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$ *dans* M' . *On pose enfin*

$$\overline{\mathbb{B}}' = \mathrm{pr} \circ \mathbb{B}' \quad ,$$

$$Q' = \mathrm{Tr} \circ \mathbb{Q}' \ (= \mathrm{Tr} \circ \overline{\mathbb{Q}}' \ ) \quad ,$$

$$B' = \mathrm{Tr} \circ \mathbb{B}' \ (= \mathrm{Tr} \circ \overline{\mathbb{B}}' \ ) \quad .$$

Le triple $(M',\overline{\mathbb{Q}}',\mathbb{B}')$ ainsi défini est alors un A - module quadratique, au sens de la définition 1 du numéro 1 du paragraphe 2 du chapitre III. Souvent dans la suite, on le notera simplement $(M',\bar{\mathbb{Q}}')$.

Dans ce chapitre, nous avons considéré le A - module quadratique $(M,\bar{\mathbb{Q}},\mathbb{B})$, défini par (cf. § 1, n° 1, déf. 1 et ch. III, § 2, n° 2)

$$M = E^2 = A \times A \quad ,$$

$$xa = (x_1,x_2)a = (x_1a_{11} + x_2a_{21},\ x_1a_{12} + x_2a_{22}) \quad ,$$

quels que soient $x = (x_1,x_2) \in M$, $a \in A$,

$$Q(a) = \det a \qquad (a \in A) \quad ,$$

$$\mathbb{Q}(x) = \begin{pmatrix} Q(x_1) & B(x_1,x_2) \\ 0 & Q(x_2) \end{pmatrix} \qquad (x \in M)$$

(où B désigne la k - forme bilinéaire associée à Q (cf. § 1, n° 1, (1))),

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathrm{pr}\circ\mathbb{Q} \quad ,$$

$$\mathbb{B}(x,y) = \begin{pmatrix} B(x_1,y_1) & B(x_1,y_2) \\ B(x_2,y_1) & B(x_2,y_2) \end{pmatrix} \qquad (x,\ y \in M) \quad .$$

Or, nous avons la

PROPOSITION 1. - <u>L'application</u> φ <u>de</u> M' <u>sur</u> M , <u>définie par</u>

$$\varphi(a',b') = \left(\begin{pmatrix} a'_{11} & b'_{21} \\ -a'_{21} & b'_{11} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} a'_{12} & b'_{22} \\ -a'_{22} & b'_{12} \end{pmatrix}\right) \qquad ((a',b') \in M') \quad ,$$

<u>est un isomorphisme du</u> A - <u>module quadratique</u> $(M',\bar{\mathbb{Q}}',\mathbb{B}')$ <u>sur le</u> A - <u>module quadratique</u> $(M,\bar{\mathbb{Q}},\mathbb{B})$, <u>d'inverse</u>

$$\varphi^{-1}(a,b) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \\ -a_{21} & -b_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{22} & b_{22} \\ a_{12} & b_{12} \end{pmatrix}\right) \qquad ((a,b) \in M)$$

Cela est immédiat.

A l'aide de cet isomorphisme, on décrit aisément le groupe des A - similitudes orthogonales $\bar{\Gamma} = GO_A(\bar{Q}')$ (canoniquement isomorphe à $\Gamma' = GO_k(Q')$) :

PROPOSITION 2. - <u>Posons</u>

$$(a,b)x = (ax_1, bx_2) \qquad (a,b \in A,\ x = (x_1,x_2) \in M') ,$$

$$\hat{a} = \underline{d}(1,-1)a\underline{d}(1,-1) \qquad (a \in A) ,$$

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

<u>Chaque paire</u> $(a,b) \in A^\times \times A^\times$ <u>définit une</u> A - <u>similitude orthogonale</u> $\gamma'_{(a,b)}$, <u>de multiplicateur</u> $\det(ab) = m_{(a,b)}$ <u>par</u>

$$\gamma'_{(a,b)}(x_1,x_2) = (\hat{a}, w^{-1}a)[(x_1, wx_2)b^*] \qquad ((x_1,x_2) \in M') ,$$

<u>et le groupe</u> $\bar{\Gamma}' = GO_A(\bar{Q}')$ <u>est le produit semi-direct de l'image</u> Γ^+ <u>de l'homomorphisme</u> $\gamma' : (a,b) \longrightarrow \gamma'_{(a,b)}$ $(a,b \in A^\times)$ <u>et du sous-groupe</u> $\{1, T'\}$, <u>où l'involution</u> T' <u>est donnée par</u>

$$T'(x) = (\underline{d}(1,0)x_1 - \underline{d}(0,1)x_2,\ \underline{d}(1,0)x_2 - \underline{d}(0,1)x_1) \qquad (x \in M') ,$$

<u>avec la relation</u>

$$\gamma'_{(a,b)} \circ T' = T' \circ \gamma'_{(b,a)} \qquad (a,b \in A^\times) .$$

<u>Démonstration</u>: Cela résulte aussitôt de la proposition 1, compte tenu de la relation bien connue

(1) $$(\det a)w = a^* w a \qquad (a \in A^\times) .$$

C.Q.F.D.

DEFINITION 2. - <u>Si</u> V <u>est un espace vectoriel complexe, on pose</u>

$$(\tilde{\gamma}'_{(a,b)}f)(x, \ ) = f(\gamma'_{(a,b)}x, \psi^{\det(ab)^{-1}}) \qquad (a,b \in G_o,\ x \in M',\ \psi \in X) ,$$

$$\tilde{T}'f = f\circ(T' \times \mathrm{Id}) ,$$

<u>pour toute</u> $f \in V^{M' \times X}$ $(X = \mathrm{Car}(k^+) - \{1\})$.

<u>Si</u> (V_1, π_1) <u>et</u> (V_2, π_2) <u>sont deux représentations de</u> G_o , <u>qui coïncident sur les matrices scalaires, on notera</u> $(W'[\pi_1,\pi_2], \rho')$ <u>la représentation de</u> G <u>d'espace</u>

$$W'[\pi_1, \pi_2] = \{f : M' \times X \longrightarrow [V_2,V_1] \mid \tilde{\gamma}'_{(a,b)}f = [\pi_1(a) \otimes \pi_2(b)]\circ f \quad \forall\, a,b \in G_o\}$$

<u>et dont l'action</u> ρ <u>est l'action de Weil associée à</u> $(M',\bar{\Phi}')$ <u>dans</u> $[V_2,V_1]^{M' \times X}$ <u>(cf. ch. III, § 2, n° 3, th. 1) (on pose ici</u> $[V_2,V_1] = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2,V_1)$) .

La proposition suivante est alors une conséquence immédiate de la proposition 1.

PROPOSITION 3. - <u>Soient</u> (V_1, π_1) <u>et</u> (V_2, π_2) <u>deux représentations de</u> G_o <u>qui coïncident sur les matrices scalaires. Alors l'application</u> $\varphi^* : f \longrightarrow f\circ(\varphi \times \mathrm{Id})$ <u>de</u> $[V_2,V_1]^{M \times X}$ <u>sur</u> $[V_2,V_1]^{M' \times X}$ <u>définit, par restriction à</u> $W[\pi_1,\pi_2]$ <u>un isomorphisme de la représentation</u> $(W[\pi_1, \pi_2], \rho)$

sur $(W'[\pi_1, \pi_2], \rho')$.

Démonstration: Cela résulte aussitôt du fait que

$$\gamma_{(a,b)} \circ \varphi = \varphi \circ \gamma'_{(a,b)}$$

avec

$$\gamma_{(a,b)}(c,d) = (a,b).(c,d) = (acb^*, adb^*) \quad ,$$

quels que soient $a,b \in G_o$, $c,d \in A$ (cf. § 1, n° 1, prop. 1 et § 2, n° 1, déf. 1).

C.Q.F.D.

2. La représentation binaturelle de G .

Soient $a,b \in A = M_2(k)$. Ecrivons, comme d'habitude,

$$a = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2} \quad , \qquad b = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2} \quad .$$

Posons

(2) $$(a\ b)_i = (a_{i1}, a_{i2}, b_{i1}, b_{i2}) \quad .$$

Alors l'application

(3) $$(a,b) \longmapsto \begin{pmatrix} (a\ b)_1 \\ (a\ b)_2 \end{pmatrix}$$

de $A \times A$ sur $k^4 \times k^4 = M_{2,4}(k)$ est un isomorphisme du $M_2(A)$ - module à droite A^2 (muni du produit matriciel par (2×2) - blocs) sur le $M_4(k)$ $(= M_2(A))$ module à droite $k^4 \times k^4$ (muni du produit matriciel).

Nous identifierons souvent ces deux A - modules à droite, dans la suite, mais nous écrirons, par des raisons de commodité typographique, les éléments de $k^4 \times k^4 = M_{2,4}(k)$ sous la forme (x,y) $(x,y \in k^4)$, et donc

(4) $$(a,b) = ((a\ b)_1\ ,\ (a\ b)_2)\ .$$

DEFINITION 3. - <u>On appelle représentation binaturelle de</u> G <u>la représentation</u> (Bin, τ) <u>de</u> G $(\subset M_2(A))$ <u>définie par</u>

$$\mathrm{Bin} = \mathrm{App}(A^2 \times X, \mathbb{C}) \qquad (X = \mathrm{Car}(k^+) - \{1\}) ,$$

$$[\tau(g)f](a,b;\psi) = f((a,b)g, \psi^{m_g^{-1}}) \qquad ((a,b) \in A^2, \psi \in X, g \in G) .$$

Pour décomposer cette représentation, on remarque que l'on a deux actions de $G_o = A^\times = GL(2,k)$ qui commutent entre elles et à τ dans Bin L'une est évidente, de nature géométrique, et l'autre l'est un peu moins, étant donnée par une représentation de Weil.

DEFINITION 4. - <u>On pose</u>

$$\sigma^1_d(a,b;\psi) = (da,db;\psi^{\det d^{-1}}) \qquad ((a,b) \in A^2, \psi \in X, d \in G_o) ,$$

$$\tilde{\sigma}^1_d f = f \circ \sigma^1_d \qquad (f \in \mathrm{Bin}, d \in G_o) .$$

Il est clair que $\tilde{\sigma}^1$ commute à τ .

DEFINITION 5. - <u>Rappelons que l'on a posé (ch. III, § 1, n° 1)</u>

$$J(a,b) = \mathrm{Tr}(a^* w b) \qquad ((a,b) \in A^2 = (k^4)^2) .$$

<u>A cette forme bilinéaire alternée, considérée comme forme</u> k - <u>quadratique sur le</u> k - <u>espace vectoriel</u> $A^2 = k^8$ <u>est associée une représentation de Weil de</u> G_o <u>(ch. I, § 2, n° 4) dans</u> Bin , <u>que nous notons</u> ρ_J . <u>On pose alors</u>

$$\tilde{\sigma}^2_d f = \rho_J(d^*)(f) \qquad (d \in G_o,\ f \in \mathrm{Bin})$$

<u>et</u>

$$\tilde{\sigma}_{c,d} = (\tilde{\sigma}^1_c)\circ(\tilde{\sigma}^2_d) \qquad (c,d \in G_o)\ .$$

Nous aurons donc (ch. I, § 2, n° 3) pour $f \in \mathrm{Bin}$, $(a,b;\psi) \in A^2 \times X$,

(5) $\quad (\tilde{\sigma}^2_{\underline{h}'(t)} f)(a,b;\psi) = f(a,b;\psi^{t^{-1}}) \qquad (t \in k^\times)$,

(6) $\quad (\tilde{\sigma}^2_{\underline{h}(t)} f)(a,b;\psi) = f(ta,tb;\psi) \qquad (t \in k^\times)$,

(7) $\quad (\tilde{\sigma}^2_{\underline{u}(s)^*} f)(a,b;\psi) = (\psi\circ\mathrm{Tr})(sa^*wb)f(a,b;\psi) \qquad (s \in k^+)$,

(8) $\quad (\tilde{\sigma}^2_{w^*} f)(a,b;\psi) = q^{-4} \sum_{(c,d)\in A^2} (\psi\circ\mathrm{Tr})(a^*wd + c^*wb)f(c,d;\ )$

Notons que, d'après (1), l'application $(x_1,x_2) \longmapsto (dx_1,dx_2)$ ($(x_1,x_2) \in A^2$, $d \in G_o$) est une similitude orthogonale de multiplicateur $\det d$, de J . Il est donc clair que $\tilde{\sigma}^1$ et $\tilde{\sigma}^2$ commutent. Remarquons en outre que $\tilde{\sigma}^1$ et $\tilde{\sigma}^2$ coïncident sur les matrices scalaires. Notons enfin que, comme G est le groupe de similitudes de la forme bilinéaire alternée J , il est clair que $\tilde{\sigma}^2$ et τ commutent.

DEFINITION 6. - <u>Soient</u> (V_1,π_1) <u>et</u> (V_2,π_2) <u>deux représentations de</u> G_o , <u>qui coïncident sur les matrices scalaires. On appelle alors représentation binaturelle de</u> G <u>associée à</u> (π_1,π_2) <u>et l'on note</u> $(\mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2],\tau)$ <u>la représentation de</u> G <u>dont l'espace</u> $\mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2]$ <u>est formé des</u> $f: A^2 \times X \longrightarrow [V_2,V_1] = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2,V_1)$ <u>telles que</u>

$$(\tilde{\sigma}_{c,d} f)(\xi) = \pi_1(c)\circ f(\xi)\circ\pi_2(d^*) \qquad (c,d \in G_o,\ \xi \in A^2 \times X)$$

<u>et l'action</u> τ <u>est donnée par</u>

$$[\tau(g)f](a,b;\psi) = f((a,b)g, \psi^{m^{-1}g})$$

<u>pour</u> $f \in \mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2]$, $(a,b;\psi) \in A^2 \times X$.

Nous avons alors que, pour $f: A^2 \times X \longrightarrow [V_2,V_1]$ la condition $f \in \mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2]$ signifie

(9) $$f(ca,cb;\ \psi^{\det c^{-1}}) = \pi_1(c)\circ f(a,b;\psi) \quad ,$$

(10) $$[\rho_J(d)f](a,b;\psi) = f(a,b;\psi)\circ\pi_2(d) \quad ,$$

pour tout $(a,b;\psi) \in A^2 \times X$, $c,d \in G_o$.

PROPOSITION 4. - <u>Posons</u>

$$\mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2](\xi) = \{f(\xi) \mid f \in \mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2]\} \qquad (\xi \in A^2 \times X) \quad .$$

<u>On a alors, pour</u> $(a,b;\psi) \in A^2 \times X$,

i) $\mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2](a,b;\psi)$ <u>est formé des</u> $\varphi \in [V_2,V_1]$ <u>qui s'annulent sur toutes les composantes</u> U_o - <u>isotypiques de</u> V_1 <u>de type distinct de</u> $\psi^{J(a,b)}$;

ii) si $x_1 = (a\ b)_1$ et $x_2 = (a\ b)_2$ <u>sont linéairement dépendants, disons</u>

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

<u>pour</u> $h \in G_o$ <u>et</u> $y_1 \in k^4$ <u>convenables, alors</u>

$$\mathrm{Im}\ \varphi = \mathrm{Fix}_{V_1}(hU_oh^{-1}) \qquad (\varphi \in \mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2](a,b;\psi)) \quad ;$$

iii) $$\mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2](0,0;\psi) = \underline{0}$$

<u>à moins que</u> $\pi_1 = \pi_\alpha^1$ <u>et</u> $\pi_2 = \pi_\alpha^1$ <u>ou</u> π_α^q $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$.

Cela découle aussitôt de la définition.

REMARQUE. - La proposition 4 montre que l'on peut identifier $\mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2](\xi)$ à V_1 , pour tout $\xi \in A^2 \times X$, de manière compatible avec σ^1 , comme suit.

Fixons un caractère non-trivial e de k^+ . Pour $t \in k^\times$, choisissons un générateur $v_t = v_t(\pi_2)$ de la composante U_o - isotypique ${}_{e^t}V_2 = I(t)$ (de dimension 1) de type e^t , de V_2 . Si π_2 est dans la série principale (sinon $I(1) = \underline{0}$) , la composante U_o - isotypique de type trivial $I(1)$ de V_2 est de dimension 2 si $\dim \pi_2 = q+1$, et de dimension 1 si $\dim \pi_2 = 1$ ou q . Dans le premier cas, notons v_o le vecteur du modèle de Weil de π_2 défini par

$$v_o(1,0;1) = 1 \quad , \quad v_o(r,s;1) = 0 \quad \text{si} \quad s \neq 0 \quad (r,s \in k^+) \quad ,$$

dans le second, posons $v_o = 1 \in \mathbb{C}$ si $\dim \pi_2 = 1$ et définissons $v_o \in V_2$ par

$$v_o(0,0;1) = 1 \quad , \quad v(r,s;1) = 0 \quad \text{si} \quad (r,s) \in k^2 - \{0\} \quad .$$

Nous avons alors la

PROPOSITION 5. - _L'application_ Ev _de_ $\mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2]$ _dans_ $\mathrm{App}(A^2 \times k^\times , V_1)$ _définie par_

$$(\mathrm{Ev}\ f)(a,b;t) = [f(a,b;e^t)](v_{tJ(a,b)})$$

pour $f \in \mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2]$, $(a,b) \in A^2$, $t \in k^\times$, _est un_ G - _monomorphisme de_ $\mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2]$ _dans le sous-espace_ $N(\pi_1)$ _de_ $\mathrm{App}(A^2 \times k^\times , V_1)$ _formé des_ $f' \in \mathrm{App}(A^2 \times k^\times , V_1)$ _telles que_

$$\tilde{\sigma}^1_a f' = \pi_1(a) \circ f' \qquad (a \in G_o) \quad ,$$

muni de l'action naturelle τ de G donnée par

$$(\tau(g)f')(a,b;t) = f'((a,b)g, tm_g^{-1})$$

$(f' \in N(\pi_1)$, $a,b \in A$, $t \in k^{\times}$, $g \in G)$.

Démonstration: Cela est immédiat, si l'on remarque que dans le cas où $\dim I(1) = 2$, la condition (10), pour $d = w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $(a,b;e^t) \in A^2 \times X$ tel que $J(a,b) = 0$, appliquée au vecteur v_o , montre (prop. 4 i)) que, pour $f \in \mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2]$, le $\mathbb{C}$ - morphisme $f(a,b;\psi)$ de V_2 dans V_1 est déjà entièrement déterminé par la donnée des vecteurs $f(a',b';e^{t'})(v_{t'J(a',b')})$ pour $(a',b';e^{t'}) \in A^2 \times X$.

C.Q.F.D.

3. Isomorphisme entre la représentation de Weil et la représentation binaturelle.

THEOREME 1. - Soit V un espace vectoriel complexe. L'application Φ de $V^{M' \times X}$ dans $V^{A^2 \times X}$ définie par

$$(11) \qquad (\Phi f)(a,b;\psi) = q^{-2} \sum_{b' \in A} f(a,b';\psi)\underline{\psi}(b'b^*)$$

pour $f \in V^{M' \times X}$, $(a,b;\psi) \in A^2 \times X$ (avec $\underline{\psi} = \psi \circ \mathrm{Tr}$) est un isomorphisme de la représentation de Weil (W', ρ') associée au module quadratique $(M', \bar{\Phi}', B')$ et à V , sur la représentation binaturelle (Bin, τ) associée à V . En outre, on a

$$(12) \qquad \Phi \circ \tilde{\gamma}_{(a,b)} = \tilde{\gamma}_{(a,b)} \circ \Phi \qquad (a,b \in G_o,\ \hat{a} = \underline{d}(0,1)a\underline{d}(0,-1)),$$

$$(13) \qquad \Phi \circ \tilde{T}' = \tilde{R} \circ \Phi ,$$

avec

$$(14)\qquad (\tilde{R}f)(x,y;\psi) = q^{-2} \sum_{z\in k^4} f(x,z;\psi)\ (J(y,z)) \qquad (x,y\in k^4,\ \psi\in X)\ ,$$

pour toute $f \in V^{A^2} \times X$.

Démonstration: Cela résulte aussitôt des définitions, quitte à remarquer que l'inverse de Φ est donnée par

$$(15)\qquad (\Phi^{-1}f)(c,d;\psi) = q^{-2} \sum_{d'\in A} f(c,d';\psi)\underline{\psi}(-d'd^*)$$

pour $f \in V^{A^2} \times X$, $c,d \in A$, $\psi \in X$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1. - Soient (V_1,π_1) et (V_2,π_2) deux représentations de G_o qui coïncident sur les matrices scalaires. Notons $^\circ\pi_1$ la conjuguée de π_1 par $\pi_1(\underline{d}(1,-1))$. L'application Φ définie au théorème ci-dessus est alors (pour $V = [V_2,V_1]$) un isomorphisme de la représentation $(W'[\pi_1,\pi_2], \rho')$ sur la représentation $(\mathrm{Bin}[^\circ\pi_1,\pi_2], \tau)$.

COROLLAIRE 2. - Gardons les notations et les hypothèses du corollaire 1. L'application $\Psi = \Phi\circ\varphi^*$ (cf n° 1, prop. 1) est un isomorphisme de la représentation $(W[\pi_1,\pi_2], \rho)$ sur la représentation $(\mathrm{Bin}[^\circ\pi_1,\pi_2], \tau)$.

La proposition suivante permet d'expliciter des bases de $\mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2]$. Sa démonstration est immédiate.

PROPOSITION 6. - Soit $\xi' = (a',b';\psi') \in M' \times X$ et $\varphi' \in W'[\pi_1,\pi_2](\xi')$. Notons $f_{\xi',\varphi'}$ la fonction de $W'[\pi_1,\pi_2]$ définie par

$$f_{\xi',\varphi'}(\xi') = \varphi' \ ,$$

$$\mathrm{Supp}\ f_{\xi',\varphi'} = \mathrm{Orb}_{G_o \times G_o}(\xi') \quad .$$

<u>Alors l'image</u> $\tilde{f}_{\xi',\varphi'}$ <u>de</u> f <u>par l'isomorphisme</u> Φ <u>est donnée par</u>

$$(16) \quad \tilde{f}_{\xi',\varphi'}(a,b;\psi) = q^{-2}\delta_{\psi,\varphi'} \sum_{\substack{h \in G_o \times G_o,\ m_h = 1 \\ \gamma'_h(a',b') = (a,b'')}} (\psi \circ \mathrm{Tr})(b''b^*)\pi_1(h_1)\circ\varphi'\circ\pi_2(h_2^*)$$

$(a,b \in M',\ \psi \in X)$.

§ 4. <u>Identification des</u> $(W[\pi_1,\pi_2], \rho)$.

1. <u>Identification des</u> $W[\pi_1,\pi_2]$ <u>pour</u> π_1 <u>ou</u> π_2 <u>dans la série principale</u>.

Nous identifions les représentations $(W[\pi_1,\pi_2], \rho)$, pour π_2 dans la série principale de G , en termes des modèles donnés au paragraphe 2 du chapitre II pour la série principale de G et pour la série de représentations de G associée au sous-groupe parabolique P_2 . Nous renvoyons à ce chapitre (loc. cit.) pour les notations et les résultats concernant ces modèles.

Cette identification se fait sans problème, en composant l'isomorphisme Ψ (cf. cor. 2 au th. 1) de $(W[\pi_1,\pi_2], \rho)$ sur $(\mathrm{Bin}[°\pi_1,\pi_2], \tau)$, le monomorphisme Ev (cf. prop. 5 ci-dessus) de $(\mathrm{Bin}[\pi_1,\pi_2], \tau)$ dans $(N(\pi_1), \tau)$ et l'application de restriction R_o , qui à toute fonction de source $E^2 \times k^\times$ associe sa restriction à $E_o^2 \times k^\times$, où E_o^2 désigne l'ensemble des paires de vecteurs orthogonaux (pour J) de E . Pour départager les cas d'isomorphie possibles, il suffit de comparer les dimensions des espaces en jeu (cf. table 4 pour les dimensions des espaces $W[\pi_1,\pi_2]$, $W^{\pm}[\pi_1,\pi_2]$) et eventuellement la dimension de leurs sous-espaces de points fixes Fix $\underline{U}$ pour le sous-groupe $\underline{U} = \{\underline{u}(b) \mid b \in A^s\}$ de G .(Notons que dim Fix $\underline{U}$ pour $W[\pi_1,\pi_2]$ n'est autre que le nombre de H - orbites isotropes (c'est-à-dire sur lesquelles $\widetilde{\mathfrak{Q}} = 0$) contenues dans Supp $W[\pi_1,\pi_2]$, nombre qui se lit dans la table 4).

Nous donnons la liste d'isomorphismes dans la table 5.

2. Le cas où $\pi_1 = \pi_2$ est dans la série discrète.

Rappelons que l'on a fixé un caractère non-trivial e de k^+ .

DEFINITION 1. - Soit $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$. Pour tout $r \in k^\times$, notons $v_r = v_r^\Lambda$ le vecteur de V_Λ (réalisé par le modèle de Weil réduit) tel que

$$v_r(t) = \delta_{r,t} \qquad (t \in k^\times) \quad .$$

On définit alors l'application Ev de $\mathrm{Bin}[\pi_\Lambda , \pi_\Lambda]$ dans l'espace $\mathrm{App}(\mathbb{B}_1 \times k^\times , V_\Lambda)$ (où $\mathbb{B}_1$ désigne l'ensemble de toutes les bases des plans non-totalement isotropes de $E = k^4$ muni de J) par

$$[\mathrm{Ev}(f)](x,t) = [f(x_1,x_2;e^t)](v_{tJ(x_1,x_2)}) \qquad \left(x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{B}_1 \ , \ t \in k^\times\right)$$

pour tout $f \in \mathrm{Bin}[\pi_\Lambda , \pi_\Lambda]$.

Il est alors clair, d'après la proposition 4 du paragraphe 3 (n° 2), que Ev est un monomorphisme G - équivariant de $(\mathrm{Bin}[\pi_\Lambda , \pi_\Lambda], \tau)$ dans le sous-espace $N'(\pi_\Lambda)$ de $\mathrm{App}(\mathbb{B}_1 \times k^\times , V_\Lambda)$ formé des $f' \in \mathrm{App}(\mathbb{B}_1 \times k^\times , V_\Lambda)$ telles que

$$f'(x,t) = f'(x,1) \qquad (x \in \mathbb{B}_1 \ , \ t \in k^\times) \quad ,$$

et (en posant alors $f'(x) = f'(x,1)$, pour $x \in \mathbb{B}_1$) que

$$f'(ax) = \pi_\Lambda(a)f'(x) \qquad (x \in \mathbb{B}_1 \text{ , } a \in G_o) \text{ .}$$

L'espace $N'(\pi_\Lambda)$ est, bien entendu, muni de l'action naturelle, notée encore τ , de G , donnée par

$$(\tau(g)f')(x) = f'(x) = f'\begin{pmatrix} x_1 g \\ x_2 g \end{pmatrix} \qquad (g \in G, \ x \in \mathbb{B}_1) \text{ .}$$

Définissons maintenant une application S de $N'(\pi_\Lambda)$ dans la représentation $V(1,\pi_\Lambda)$ construite au chapitre II (§ 2, n° 1 et n° 4) par

$$(Sf')(v,\bar{b}) = \sum_{x_i \in \bar{b}_i} f'(x) \qquad ((v,\bar{b}) \in \bar{D}_1)$$

(cf. loc. cit.)

PROPOSITION 1. - <u>L'application</u> $S \circ Ev \circ \Psi$ <u>est un isomorphisme de</u> $(W[\pi_\Lambda , \pi_\Lambda], \rho)$ <u>sur</u> $(V(1, \pi_\Lambda)^q, \tau)$ <u>(cf. ch. II, § 2, n° 4, cor. à la prop. 4) pour tout</u> $\Lambda \in Car(K^\times) - Car(k^\times)$.

<u>Démonstration</u>: Il est clair que l'application S , définie ci-dessus, est G - équivariante. D'autre part, $S \circ Ev$ est non-nulle (on vérifie sans peine, à l'aide de la formule (16) du numéro 3 du paragraphe précédent, que, par exemple, $S(Ev\ f_{\xi,v}) \neq 0$ pour $\xi = (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e)$ et $v \in V$) . Or, il est immédiat que $\Psi f'' = qf''$ pour toute $f'' \in \operatorname{Im} S$ (pour l'opérateur Ψ défini dans ch. II, § 2, n° 3, prop. 3 (avec $\alpha = 1$, $\psi = Id_H$, $H = V_\Lambda$)) , c'est-à-dire

$$\operatorname{Im} S \subset \operatorname{Ker} P_1 = V(1, \pi_\Lambda)^q$$

(cf. ch. II, § 2, n° 4, cor. à la prop. 4), d'où le fait que S est un

G - isomorphisme de $N'(\pi_\Lambda)$ sur $V(1,\pi_\Lambda)^q$, et donc que le G - morphisme non-nul $S\circ Ev\circ\Psi$ est un G - isomorphisme de $W[\pi_\Lambda , \pi_\Lambda]$ sur $V(1,\pi_\Lambda)^q$.

C.Q.F.D.

3. Le cas où π_1 et π_2 sont dans la série discrète de G_o et $\pi_1 \not\simeq \pi_2$.

PROPOSITION 2. - Les composantes irréductibles de $W[\pi_1,\pi_2]$ sont dans la série discrète de G , pour tous les π_1 et π_2 , non isomorphes, appartenant à la série discrète de G_o .

Démonstration: Il résulte aussitôt de la table 4 que $W[\pi_1,\pi_2]$, dans ce cas, n'admet de vecteur non-nul fixé par le sous-groupe $\underline{U}$ de G formé des $\underline{u}(b)$ $(b \in A^s)$ ni, non plus, de vecteur non-nul fixé par le sous-groupe des $\underline{u}\begin{pmatrix} r & s \\ s & 0 \end{pmatrix}$ $(r,s \in k^+)$ qui soit en même temps fixé par le sous-groupe des $\underline{h}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(b \in k^+)$. Notre assertion s'ensuit (ch. II, n° 1 et n° 2).

C.Q.F.D.

Nous démontrons maintenant qu'en fait nos représentations sont irréductibles.

DEFINITION 2. - Soient (V_1,π_1) et (V_2,π_2) deux représentations irréductibles de la série discrète de G_o (coïncidant sur les scalaires). Posons $H = G_o \times G_o$ et

$$(V,\pi) = (V_1 \otimes V_2 , \pi_1 \otimes \pi_2) ,$$

$$(\tilde{V}, \tilde{\pi}) = \operatorname{Ind}_{H\uparrow\Gamma} (V,\pi) \qquad (\Gamma = GO(Q))$$

(cf. ch. III, § 3, n° 4).

On a alors

$$\widetilde{V} = V \oplus V \quad ,$$

$$\widetilde{\pi}(a,b) = \pi(a,b) \oplus \pi(b,a) \qquad ((a,b) \in H) \quad ,$$

$$[\widetilde{\pi}(\widetilde{T})](v,v') = (v',v) \qquad (v,v' \in V) \quad .$$

Nous gardons ces notations dans la suite de ce numéro. Nous supposons en outre, comme ci-dessus, que π_1 et π_2 sont non-isomorphes. Comme le sous-groupe H de Γ est d'indice 2 (et donc distingué) dans Γ , il est alors clair que la représentation $(\widetilde{V}, \widetilde{\pi})$ de Γ est irréductible.

LEMME 1. - <u>Soient</u> $x = (\underline{a}(0,1), \underline{a}(-1,0))$, $y = (\underline{d}(1,0), \underline{d}(0,1))$. <u>Alors tout opérateur de la forme</u> $S_x\widetilde{\pi}(\gamma)S_y$ $(\gamma \in \Gamma)$ <u>est combinaison linéaire à coefficients universels (c'est-à-dire, ne dépendant pas de</u> π_1 <u>et</u> π_2 <u>dans la série discrète de</u> G_o) <u>d'opérateurs</u> $S(x,y;\gamma)$, <u>pour</u> $\gamma \in \Gamma$ <u>tel que les plans</u> $P(x)$ <u>et</u> $P(\gamma.y)$ <u>de</u> E , <u>soient à intersection nulle. En particulier, ces derniers opérateurs engendrent linéairement tout</u> $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\widetilde{V}_y , \widetilde{V}_x) = S_x\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\widetilde{V})S_y$ (cf. ch. III, § 3, n° 2, déf. 6).

<u>Démonstration</u>: Pour $\gamma = h$ (resp. $\gamma = \widetilde{T}h$) , on a, avec $h = (h_1,h_2) \in H$, $h_r = (h_r^{ij}) \in G_o$ $(1 \le i,j,r \le 2)$, que $P(x)$ $P(\gamma.y) = \underline{0}$ si et seulement si

$$h_1^{11}h_2^{11}h_1^{22}h_2^{22} \neq h_1^{12}h_2^{12}h_1^{21}h_2^{21} \quad . \tag{1}$$

Dans ce cas, on a alors, avec $n_{x,y}(\gamma) = \{(\gamma',\gamma'') \in \Gamma_x \times \Gamma_y \mid \gamma'\gamma\gamma'' = \gamma\}$,

$$S(x,y;\gamma) = n_{x,y}(\gamma)^{-1}S_x\widetilde{\pi}(\gamma)S_y \qquad \text{(cf. loc. cit. lemme 3).}$$

Or, on montre sans difficulté, à l'aide de la relation

$$\mathrm{Id}_{V_i} = - \sum_{g_o \in U_o' - \{1\}} \pi_i(g_o) \qquad (i = 1,2) \quad ,$$

valable pour tout sous-groupe U_o' de G_o conjugué du radical unipotent supérieur U_o de G_o , que si $\gamma' \in \Gamma$ ($\gamma' = h'$ ou $\gamma' = \widetilde{T}h'$, $h' \in H$) ne satisfait pas (1) alors

$$S_x \widetilde{\pi}(\gamma') S_y = - \sum_{h_o \in H_o' - \{1\}} S_x \widetilde{\pi}(\gamma h_o) S_y$$

avec $H_o' = \{1\} \times U_o'$ ou $U_o' \times \{1\}$ pour un U_o' convenable comme ci-dessus. Ainsi donc les éléments γh_o ($h_o \in H_o' - \{1\}$) satisfont (1), avec $h = h'h_o$ Cela établit notre première assertion. Notre seconde assertion est une conséquence immédiate de l'irréductibilité de $\widetilde{\pi}$.

C.Q.F.D.

LEMME 2. - <u>Soient</u> $x = (\underline{d}(1,0), \underline{d}(0,1))$ <u>et</u> $y = (1,y_c)$ <u>(cf. § 1, n° 1, déf. 4) ou</u> $y = (1, \underline{a}(0,1))$. <u>Alors les combinaisons linéaires des opérateurs</u> $S^{\widetilde{\pi}}(x,y;\gamma)$, <u>pour</u> $\gamma \in \Gamma$ <u>tel que les plans</u> $P(x)$ <u>et</u> $P(\gamma . y)$ <u>de</u> E <u>aient une intersection nulle, séparent les points de</u> $\widetilde{V}_y = \mathrm{Fix}_{\widetilde{V}}(\mathrm{Stab}_{\Gamma} y)$.

<u>Démonstration</u>: Considérons tout d'abord le cas où $y = (1, \underline{a}(0,1))$. Remplaçons y par $y' = (\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$, congru à y modulo Γ (afin d'avoir $P(x) \cap P(y') = \underline{0}$) . On vérifie alors aussitôt que, pour $\gamma = h = (h_1,h_2) \in G_o \times G_o$ tel que $h_1^{21} = h_2^{21} = 0$ (i. e. $h \in B_o \times B_o$) , on a $P(x) \cap P(h.y') = \underline{0}$ et par suite (ch. III, § 3, n° 2),

$$(2) \qquad S(x,y';h) = n_{x,y'}(\gamma)^{-1} S_x \widetilde{\pi}(h) S_{y'} \quad .$$

Dans le cas où $y = (1,y_c)$ ($c \in K^{\times} - k^{\times}$) , comme tous les $(1,y_{c'})$ ($c' \in K^{\times} - k^{\times}$) sont congrus modulo Γ , il suffit de démontrer le lemme pour un $c_o \in K^\times - k^\times$ que l'on peut supposer de trace non-nulle. Remplaçons encore x par $x' = (\underline{a}(0,1), \underline{a}(-1,0))$, congru à x modulo . On trouve alors que, pour $h = (h_1,h_2) \in G_o \times G_o$ tel que $h_1^{12} = h_2^{12} = 0$ et $h_1^{22}h_2^{21} \neq 1 + h_2^{22}h_1^{21}N(c_o)$, on a $P(x') \cap P(h.y) \neq \underline{0}$, et par suite

$$S(x',y;h) = n_{x',y}(\gamma)^{-1}S_{x'}\widetilde{\pi}(h)S_y \quad .$$

A l'aide de la relation

$$\sum_{r \in k^\times} \pi_i(u(r)) = - Id_{V_i} \qquad (i = 1,2) \quad ,$$

on trouve alors tous les opérateurs $S(x',y;h)$ pour $h \in B'_o \times B'_o$ (où B'_o désigne le sous-groupe de Borel triangulaire inférieur de G_o) comme combinaisons linéaires d'opérateurs $S(x',y;h')$, pour $h' \in G_o \times G_o$ tel que $P(x') \cap P(h'.y) = \underline{0}$. Par suite, si l'on a

$$S(x,y';h)v = 0 \quad (\text{resp. } S(x',y;h)v = 0)$$

pour tout $h \in B_o \times B_o$ (resp. $h \in B'_o \times B'_o$) pour un $v \in \widetilde{V}_{y'}$ (resp. $v \in \widetilde{V}_y$) , cela signifie que S_x (resp. $S_{x'}$) est nul sur la sous-représentation de $B_o \times B_o$ (resp. $B'_o \times B'_o$) engendrée par v , ce qui est impossible à moins que $v = 0$.

C.Q.F.D.

THEOREME 2. - La représentation $W[\pi_1,\pi_2]$ est irréductible, quelles que soient les représentations irréductibles π_1 et π_2 , non-isomorphes, dans la série discrète de G_o

Démonstration: Nous montrons l'irréductibilité de $\widetilde{W} = W[\widetilde{\pi}]$ (cf. déf. 2 et ch. III; § 3, n° 4) . D'après le lemme 4 du ch. III, § 3, n° 2, on a, puisque

Supp $\widetilde{W}$ = Supp $W[\pi_1,\pi_2]$ est non-dégénéré (table 4) que, si Φ entrelace $\widetilde{W}$,

$$(\Phi f)(\xi) = \varphi(\xi)(f(\xi)) \qquad (f \in \widetilde{W},\ \xi \in \mathrm{Supp}\ \widetilde{W}) \ ,$$

pour une fonction φ de $\widetilde{M}$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\widetilde{V})$ satisfaisant les conditions i) à v) du dit lemme. Pour démontrer que Φ est une homothétie, il suffit donc de prouver que $\varphi(x)$ est une homothétie pour

$$x = x^1 = (\underline{d}(1,0),\ \underline{d}(0,1)) \ , \quad x = x^2 = (1, y_c) \quad (c \in K^\times - k^\times) \ ,$$

$$x = x^3 = (1,\ \underline{a}(0,1)) \ ,$$

et que les trois rapports correspondants coïncident. Or, il résulte du lemme 1 que $\varphi(x^1)$ est une homothétie. Le lemme 2 entraîne alors qu'il en est de même de $\varphi(x^2)$ et $\varphi(x^3)$ et que leurs rapports coïncident.

C.Q.F.D.

THEOREME 3. - <u>Soient</u> $(V_i\ ,\pi_i)$, $(V_i'\ ,\pi_i')$ $(i = 1,2)$ <u>des représentations de la série discrète de</u> G_o <u>telles que</u> π_1 <u>et</u> π_2 (<u>resp</u>. π_1' <u>et</u> π_2') <u>soient non-isomorphes. Alors, pour que les représentations</u> $W[\pi_1,\pi_2]$ <u>et</u> $W[\pi_1',\pi_2']$ <u>soient isomorphes, il faut et il suffit que</u> $\pi_i' \simeq \pi_i$ $(i = 1,2)$ <u>ou que</u> $\pi_1' \simeq \pi_2$ <u>et</u> $\pi_2' \simeq \pi_1$.

<u>Démonstration</u>: Nous démontrons que (cf. déf. 1, § 3, et ch. III, § 3, n° 4) pour que $W[\widetilde{\pi}] \simeq W[\widetilde{\pi}']$, il faut et il suffit que $\widetilde{\pi}' \simeq \widetilde{\pi}$. Le théorème s'ensuivra (loc. cit.) puisque $\widetilde{\pi}' \simeq \widetilde{\pi}$ signifie $\pi_1' \otimes \pi_2' \simeq \pi_1 \otimes \pi_2$ ou $\pi_1' \otimes \pi_2' \simeq \pi_2 \otimes \pi_1$, c'est-à-dire $\pi_i' \simeq \pi_i$ $(i = 1,2)$ ou $\pi_1' \simeq \pi_2$ et $\pi_2' \simeq \pi_1$. Soit donc Φ un G - isomorphisme de $W[\widetilde{\pi}] = \widetilde{W}$ sur $W[\widetilde{\pi}'] = \widetilde{W}'$. On a alors (ch. III, § 3, n° 2, lemme 4)

$$(\Phi f)(\xi) = [\varphi(\xi)](f(\xi)) \qquad (f \in \widetilde{W},\ \xi \in \widetilde{M})$$

pour une fonction convenable φ de $\widetilde{M}$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\widetilde{V},\widetilde{V}')$ vérifiant les conditions i) à v) du dit lemme. Soit $\xi = (x,e)$, $x = (\underline{d}(1,0),\ \underline{d}(0,1))$. La condition ii) du lemme montre que l'application $\bar{\varphi}$ de $\widetilde{V}$ dans $\widetilde{V}'$ définie par

$$\bar{\varphi} = \underset{\eta \in O(\xi)}{\ } \varphi(\eta)$$

(où l'on note $O(\xi)$ la Γ - orbite de ξ dans $\widetilde{M}$) est trivialement un Γ - morphisme de $(\widetilde{V},\ \widetilde{\pi})$ dans $(\widetilde{V}',\ \widetilde{\pi}')$. Je dis que $\bar{\varphi}$ est non-nul. En effet, d'après le lemme 1 et les conditions iv) et v), on a, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\varphi(\xi)\widetilde{\pi}(\gamma)P_{\xi}^{\widetilde{\pi}} = P_{\xi}^{\widetilde{\pi}'}\widetilde{\pi}'(\gamma)\varphi(\xi) \quad ,$$

et par suite (en vertu de la condition ii)),

$$\bar{\varphi}P_{\xi}^{\widetilde{\pi}} = |\Gamma_{\xi}|^{-1}\Big[\sum_{\gamma\in\Gamma}\widetilde{\pi}'(\gamma)P_{\xi}^{\widetilde{\pi}'}\widetilde{\pi}'(\gamma)^{-1}\Big]\varphi(\xi) \quad ,$$

mais $\varphi(\xi)$ est un isomorphisme et la somme entre crochets est un Γ - endomorphisme de $\widetilde{V}'$ de trace égale à $|\Gamma|\dim \widetilde{V}'_{\xi} = |\Gamma|(q-1)$. L'application $\bar{\varphi}$ est donc bien un morphisme non-nul, et par conséquent un isomorphisme, de $\widetilde{\pi}$ sur $\widetilde{\pi}'$, d'où le théorème.

C.Q.F.D.

DEFINITION 3. - *Notons* H'' *le sous-groupe de* G *formé des éléments* $h''(a,b)$ ($a,b \in G_o$ *tels que* $\det a = \det b$) *définis par*

$$\underline{h}''(a,b) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} \\ a_{12} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} \end{pmatrix} \qquad (a = (a_{ij}),\ b = (b_{ij}),\ 1 \le i,j \le 2) \quad .$$

Notons T'_o *un représentant de la classe de conjugaison des tores anisotropes* (*isomorphes à* $K^{\times}$) *de* G_o *et posons alors*

$$T_1 = \{\underline{h}''(a,b) \mid a,b \in T'_o \quad , \quad \det a = \det b\} \ .$$

DEFINITION 4. - <u>On appelle série discrète de</u> G <u>associée au tore</u> T_1 , <u>la série des (types d'isomorphie des) représentations</u> $(W[\pi_1,\pi_2], \ )$ <u>pour</u> π_1 , π_2 <u>dans la série discrète de</u> G_o , <u>coïncidant sur les scalaires et non isomorphes</u>.

<u>Si</u> $\pi_1 = \pi_\Lambda$, $\pi_2 = \pi_\Phi$ $(\Lambda,\Phi \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$, $\Lambda\Lambda^q = \Phi\Phi^q$, $\{\Lambda,\Lambda^q\} \cap \{\Phi,\Phi^q\} = \emptyset$) , <u>on posera</u>

$$W\begin{bmatrix} \Lambda & \Phi \\ \Phi^q & \Lambda^q \end{bmatrix} = W[\pi_1,\pi_2] \ .$$

Nous avons ainsi que le type d'isomorphie de $W\begin{bmatrix} \Lambda & \Phi \\ \Phi^q & \Lambda^q \end{bmatrix}$ ne dépend que de la classe du diagramme $\begin{bmatrix} \Lambda & \Phi \\ \Phi^q & \Lambda^q \end{bmatrix}$ modulo le groupe des symétries du carré. Par suite, on a le

THEOREME 4. - <u>La série discrète de</u> G <u>associée à</u> T_1 <u>est formée des</u> $\frac{1}{8}q(q-1)(q-3)$ (<u>resp</u>. $\frac{1}{8}q(q-1)(q-2)$) <u>types d'isomorphie des représentations</u> $W\begin{bmatrix} \Lambda & \Phi \\ \Phi^q & \Lambda^q \end{bmatrix}$ <u>ci-dessus, de dimension</u> $(q-1)^2(q^2+1)$ (<u>cf. table 5</u>), <u>si</u> $\mathrm{car}\ k \neq 2$ (<u>resp. si</u> $\mathrm{car}\ k = 2$) .

TABLE 1. Les H-orbites dans $\tilde{E} = E^2 \times X$

Représentant	Paramètres	Nombre d'orbites	Stabilisateur	Cardinal de l'orbite
$(1,y_t;\psi)$	$t \in k^\times$, $\psi \in X$	$(q-1)^2$	$D(k^\times.U_o)$	$(q-1)q(q^2-1)^2$
$(1,y_c;\psi)$	$c \in K^\times - k^\times$, mod. $c \sim c^q$; $\psi \in X$	$\frac{1}{2}q(q-1)^2$	$D(C(y_c))$	$(q^2-1)q^2(q-1)^2$
$(1,\underline{d}(r,t);\psi)$	$r,t \in k^\times, r \neq t$, mod. $(r,t) \sim (t,r)$; $\psi \in X$	$\frac{1}{2}(q-1)^2(q-2)$	$D(T_o)$	$q^2(q^2-1)^2$
$(1,\underline{d}(r,0);\psi)$	$r \in k^\times$, $\psi \in X$	$(q-1)^2$	$D(T_o)$	$q^2(q^2-1)^2$
$(\underline{d}(r,0),1;\psi)$	$r \in k^\times$, $\psi \in X$	$(q-1)^2$	$D(T_o)$	$q^2(q^2-1)^2$
$(1,\underline{a}(0,1);\psi)$	$\psi \in X$	$q-1$	$D(k^\times.U_o)$	$(q-1)q(q^2-1)^2$
$(\underline{a}(0,1),1;\psi)$	$\psi \in X$	$q-1$	$D(k^\times.U_o)$	$(q-1)q(q^2-1)^2$
$(\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1);\psi)$	$\psi \in X$	$q-1$	$D(T_o)$	$q^2(q^2-1)^2$
$(\underline{d}(1,0),\underline{a}(0,1);e)$		1	$D(k^\times)(U_o \times \{1\})$	$(q-1)q(q^2-1)^2$
$(\underline{d}(1,0),\underline{a}(1,0);e)$		1	$D(k^\times)(\{1\} \times U_o)$	$(q-1)q(q^2-1)^2$
$(\underline{d}(1,0),\underline{d}(s,0);e)$	$s \in k^+$	q	$D(T_o)(U_o \times U_o)$	$(q^2-1)^2$
$(0,\underline{d}(1,0);e)$		1	$D(T_o)(U_o \times U_o)$	$(q^2-1)^2$
$(1,s;\psi)$	$s \in k^+$, $\psi \in X$	$q(q-1)$	$D(G_o)$	$(q-1)q(q^2-1)$
$(0,1;\psi)$	$\psi \in X$	$q-1$	$D(G_o)$	$(q-1)q(q^2-1)$
$(0,0;e)$		1	H_1	$q-1$

Notations (cf. §1, n°2, défs.4 et 5) : En outre, on note e un caractère non-trivial fixé de k^+ .

TABLE 2. <u>Les</u> $(H, G_o \times k^\times)$-<u>orbites dans</u> $\tilde{E}$

Représentant ξ modulo $(H, G_o \times k^\times)$	Stabilisateur de ξ dans H	Nombre de H-représentants congrus à ξ modulo $G_o \times k^\times$
$(1, y_c; e)$	$D(C(y_c))$	$\frac{1}{2}q(q-1)^2$
$(\underline{d}(1,0), \underline{d}(0,1); e)$	$D(T_o)$	$\frac{1}{2}q(q^2-1)$
$(1, \underline{a}(0,1); e)$	$D(k^\times . U_o)$	q^2-1
$(\underline{d}(1,0), \underline{a}(1,0); e)$	$D(k^\times)(\{1\} \times U_o)$	1
$(\underline{d}(1,0), \underline{a}(0,1); e)$	$D(k^\times)(U_o \times \{1\})$	1
$(\underline{d}(1,0), 0; e)$	$D(T_o)(U_o \times U_o)$	$q+1$
$(1, 0; e)$	$D(G_o)$	q^2-1
$(0, 0; e)$	H_1	1

<u>Notations</u> : Voir §1, n°2, défs.4 et 5 et (3). On fixe $e \in X$ et l'on prend $c \in K^\times - k^\times$, modulo $k^\times$ et modulo la relation $c \equiv c^q$.

TABLE 3. Les valeurs de $\mathbb{Q}$

Représentant ξ	Paramètres	$\mathbb{Q}(\xi)$
$(1,y_t)$	$t \in k^\times$	$\begin{pmatrix}1 & 2t\\ 0 & t^2\end{pmatrix}$
$(1,y_c)$	$c \in K^\times - k^\times$, mod. $c \sim c^q$	$\begin{pmatrix}1 & Trc\\ 0 & Nc\end{pmatrix}$
$(1,\underline{d}(r,t))$	$r,t \in k^\times$, $r \neq t$, mod. $(r,t) \sim (t,r)$	$\begin{pmatrix}1 & r+t\\ 0 & rt\end{pmatrix}$
$(1,\underline{d}(r,0))$	$r \in k^\times$	$\begin{pmatrix}1 & r\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
$(\underline{d}(r,0),1)$	$r \in k^\times$	$\begin{pmatrix}0 & r\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$(1,\underline{a}(0,1))$		$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
$(\underline{a}(0,1),1)$		$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$(\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1))$		$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
$(\underline{d}(1,0),\underline{a}(0,1))$		0
$(\underline{d}(1,0),\underline{a}(1,0))$		0
$(\underline{d}(1,0),\underline{d}(s,0))$	$s \in k^+$	0
$(0,\underline{d}(1,0))$		0
$(1,s)$	$s \in k^+$	$\begin{pmatrix}1 & 2s\\ 0 & s^2\end{pmatrix}$
$(0,1)$		$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$(0,0)$		0

<u>Notations</u> : cf. ch.IV §1, n°2, déf.4.

TABLE 4. Dimensions des espaces $W[\pi_1,\pi_2](\xi)$ et $W^-[\pi_1,\pi_2](\xi)$

π_1	π_α^1	π_α^q	π_α^q	$\pi_{\alpha,\beta}$	$\pi_{\alpha,\beta}$	$\pi_{\alpha,\beta}$	π_Λ	π_Λ	π_Λ	π_Λ
π_2	π_β^1	π_β^1	π_β^q	$\pi_{\alpha'}^1$	$\pi_{\alpha'}^q$	$\pi_{\alpha',\beta'}$	π_α^1	π_α^q	$\pi_{\alpha,\beta}$	π_Φ
paramètres	$\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$			$\alpha,\beta,\alpha' \in \mathrm{Car}(k^\times)$		$\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$	$\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$			$\Lambda,\Phi \in \mathrm{Car}(K^\times)$
ξ	$\alpha^2 = \beta^2$			$\alpha \neq \beta$ $\alpha\beta = \alpha'$		$\alpha \neq \beta$, $\alpha' \neq \beta'$ $\alpha\beta = \alpha'\beta'$	$\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ $\Lambda\Lambda^q = \alpha^2$		$\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$ $\alpha \neq \beta$, $\Lambda\Lambda^q = \alpha\beta$	$\Lambda \neq \Lambda^q$, $\Phi \neq \Phi^q$ $\Lambda\Lambda^q = \Phi\Phi^q$
$(1,y_c;e)$	$\delta_{\alpha,\beta}$	$1-\delta_{\alpha,\beta}$	$q-1+\delta_{\alpha,\beta}$	1	q	q+1	1	q−2	q−1	$q-3+2\delta_{\Lambda,\Phi}$
$(1,\underline{a}(0,1);e)$	1	1	q	2	q+1	q+3 1	0	q−1	q−1	q−1
$(\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1);e)$	$\delta_{\alpha,\beta}$	$1+\delta_{\alpha,\beta}$	$q+1+\delta_{\alpha,\beta}$ 1	1	q+2	$q+3+2\delta_{\alpha,\alpha'}$ 2	1	q	q+1	q−1
$(\underline{d}(1,0),\underline{a}(1,0);e)$	1 $(\frac{1}{2})$	q	q $(\frac{1}{2})$	q+1	q+1	2(q+1) $(\frac{1}{2})$	q−1	q−1	2(q−1)	0
$(\underline{d}(1,0),\underline{a}(0,1);e)$	1 $(\frac{1}{2})$	1	q $(\frac{1}{2})$	2	2q	2(q+1) $(\frac{1}{2})$	0	0	0	0
$(\underline{d}(1,0),0;e)$	$\delta_{\alpha,\beta}$	$\delta_{\alpha,\beta}$	$\delta_{\alpha,\beta}$	0	0	$2\delta_{\alpha,\alpha'}$	0	0	0	0
$(1,0;e)$	$\delta_{\alpha,\beta}$	0	$\delta_{\alpha,\beta}$	0	0	$\delta_{\alpha,\alpha'}$	0	0	0	$\delta_{\Lambda,\Phi}$
$(0,0;e)$	$\delta_{\alpha,\beta}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Notations : Le paramètre c appartient à $K^\times - k^\times$. Pour la notation $(\frac{1}{2})$ voir §2, n°4, props.10, 11 et 12. On écrit la dimension de $W^-[\pi_1,\pi_2](\xi)$, lorsqu'elle n'est pas nulle, dans la demi-case inférieure correspondante.

TABLE 5. <u>Dimensions des représentations</u> $W^{(\pm)}[\pi_1,\pi_2]$

<u>Paramètres</u> : $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha' \neq \beta'$; $\Lambda, \Phi \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$.

Représentation	Dimension	
$W[\pi_{\alpha',\beta'},\pi_{\alpha,\beta}]$	$(q+1)^2(q^2+1)$	$(\alpha'\beta' = \alpha\beta\ ,\ \{\alpha',\beta'\} \cap \{\alpha,\beta\} = \emptyset)$
$W^+[\pi_{\alpha,\beta},\pi_{\alpha,\beta}]$	$(q+1)^2(q^2+1)$	
$W^-[\pi_{\alpha,\beta},\pi_{\alpha,\beta}]$	$(q+1)(q^2+1)$	
$W[\pi_{\alpha,\beta},\pi^i_{\alpha'}]$	$i(q+1)(q^2+1)$	$(i \in \{1,q\}\ ,\ \alpha'^2 = \alpha\beta)$
$W[\pi^i_\alpha,\pi^j_{\alpha*}]$	$ij(q^2+1)$	$(i,j \in \{1,q\})$ (1)
$W^+[\pi^q_\alpha,\pi^q_\alpha]$	$q^4+\frac{1}{2}q(q+1)^2$	
$W^-[\pi^q_\alpha,\pi^q_\alpha]$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$	
$W[\pi^q_\alpha,\pi^1_\alpha]$	$(q+1)(q^2+1)$	
$W^+[\pi^1_\alpha,\pi^1_\alpha]$	$(q+1)(q^2+1)$	
$W^-[\pi^1_\alpha,\pi^1_\alpha]$	1	
$W[\pi_\Lambda,\pi_{\alpha,\beta}]$	q^4-1	$(\Lambda^{q+1} = \alpha\beta)$
$W[\pi_\Lambda,\pi^i_\alpha]$	$i(q-1)(q^2+1)$	$(\Lambda^{q+1} = \alpha^2)$
$W[\pi_\Lambda,\pi_\Lambda]$	$q(q-1)(q^2+1)$	
$W[\pi_\Lambda,\pi_\Phi]$	$(q-1)^2(q^2+1)$	$(\Lambda^{q+1} = \Phi^{q+1}\ ,\ \Phi \neq \Lambda,\Lambda^q)$

(1) Ce cas ne se présente pas en caractéristique 2.

TABLE 6. Identification des représentations $W[\pi_1,\pi_2]$

A. π_1 et π_2 dans la série principale de G_o : série principale de G.

Paramètres : $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha' \neq \beta'$.

$W[\pi_{\alpha',\beta'},\pi_{\alpha,\beta}] \simeq M(\pi_{\alpha'\beta^{-1},\beta'\beta^{-1}},\beta)$ $\quad(\alpha'\beta' = \alpha\beta\ ,\ \{\alpha',\beta'\}\cap\{\alpha,\beta\} = \emptyset)$

$W^+[\pi_{\alpha,\beta},\pi_{\alpha,\beta}] \simeq M(\pi_{\alpha\beta^{-1},1},\beta)$

$W^-[\pi_{\alpha,\beta},\pi_{\alpha,\beta}] \simeq M(\pi_{\alpha\beta^{-1},1},\beta)^1$

$W[\pi^i_{\alpha'},\pi_{\alpha,\beta}] \simeq M(\pi^i_{\alpha'\beta^{-1}},\beta)$ $\quad(i \in \{1,q\}\ ,\ \alpha'^2 = \alpha\beta)$

$W[\pi^i_{\alpha},\pi^j_{\alpha_o\alpha}] \simeq M(\pi^i_{\alpha_o},\alpha)^j$ $\quad(i,j \in \{1,q\})$ $\quad(^1)$

$W^+[\pi^q_\alpha,\pi^q_\alpha] \simeq (\underline{D}^{o,o},\alpha\tau) \oplus (^+\underline{L}^o,\alpha\tau)$

$W^-[\pi^q_\alpha,\pi^q_\alpha] \simeq (^-\underline{L}^o,\alpha\tau)$

$W[\pi^q_\alpha,\pi^1_\alpha] \simeq (\underline{L},\alpha\tau)$

$W^+[\pi^1_\alpha,\pi^1_\alpha] \simeq (\underline{P},\alpha\tau)$

$W^-[\pi^1_\alpha,\pi^1_\alpha] \simeq (\mathbb{C},\alpha \circ m)$

B. π_1 (resp. π_2) dans la série discrète (resp. principale) de G_o : série de G associée à P_2.

Paramètres : $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha \neq \beta$.

$W[\pi_\Lambda,\pi_{\alpha,\beta}] \simeq M(\pi_{\beta^{-1}\Lambda},\beta)$ $\quad(\Lambda\Lambda^q = \alpha\beta)$

$W[\pi_\Lambda,\pi^i_\beta] \simeq M(\pi_{\beta^{-1}\Lambda},\beta)^i$ $\quad(i\in\{1,q\};\ \Lambda\Lambda^q = \beta^2)$

C. $\pi_1 = \pi_2$ est dans la série discrète de G_o.

$W[\pi_\Lambda,\pi_\Lambda] \simeq V(1,\pi_\Lambda)^q$ $\quad(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times))$

(cette représentation est dans la série associée au sous-groupe parabolique P_1).

D. π_1 et π_2 dans la série discrète de G_o, $\pi_1 \not\simeq \pi_2$.

Paramètres : $\Lambda,\Phi \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$, $\Lambda\Lambda^q = \Phi\Phi^q$, $\{\Lambda,\Lambda^q\}\cap\{\Phi,\Phi^q\} = \emptyset$.

$W[\pi_\Lambda,\pi_\Phi] \simeq \mathrm{Bin}[\pi_\Lambda,\pi_\Phi]$

(ces représentations forment la série discrète de G associée au tore $T_1 \simeq K \times k^\times$).

(1) Ce cas ne se présente pas en caractéristique 2.

CHAPITRE V

Décomposition de la représentation de Weil en rang 4 (cas non-déployé)

Dans tout ce chapitre, on garde sauf mention expresse du contraire les notations du chapitre III. On désigne par K l'unique extension quadratique de k et par $\underset{\sim}{K}$, l'unique extension quadratique de K. On pose $H = GL(2,K)$.

§1. Les Γ-orbites dans $\tilde{E} = E^2 \times X$.

Nous donnons dans ce paragraphe une réalisation convenable de l'unique k-espace quadratique (E,Q) non-dégénéré, non-déployé, sur k. Nous décrivons ensuite la structure des Γ-orbites dans l'espace $\tilde{E} = E^2 \times X$ (noté $\tilde{M} = M \times X$ au chapitre III).

1.- Réalisation de (E,Q) et $\Gamma = GO(Q)$.

PROPOSITION 1.- *Notons x^* la matrice transposée conjuguée ${}^t\bar{x}$ de $x \in M_2(K)$ et posons*

$$M_2^h(K) = \{x \in M_2(K) \mid x^* = x\} \quad . \tag{1}$$

Désignons par $\det$ *l'application déterminant du k-espace vectoriel $M_2^h(K)$ sur k.*

Alors $(M_2^h(K), \det)$ est un espace quadratique non-dégénéré, non-déployé, de dimension 4 sur k.

<u>Démonstration</u> : Si $x \in M_2^h(K)$ alors

$$x = \begin{pmatrix} r & a \\ a^q & s \end{pmatrix}$$

pour $r, s \in k \subset K$, $a \in K$ convenables. Il s'ensuit que l'on a

(2) $$(M_2^h(K), \det) \simeq (k^2 \oplus K, x_1 x_2 - N),$$

d'où notre assertion.

C.Q.F.D.

DEFINITION 1.- <u>Dans toute la suite de ce chapitre nous prendrons</u> $(E,Q) = (M_2^h(K), \det)$.

DEFINITION 2.- <u>Nous désignons par</u> Γ <u>le groupe de similitudes orthogonales</u> $GO(Q)$ <u>de</u> (E,Q). <u>On note</u> m_γ <u>le multiplicateur de la similitude</u> $\gamma \in \Gamma$.

Sur E, la transposition et la conjugaison $F : x \mapsto \bar{x}$ coïncident. Nous avons ainsi

(3) $$F(x) = {}^t x \qquad (x \in E),$$

et $F^2 = Id_E$, $F \in \Gamma$, $m_F = 1$.

Rappelons que l'on note U le noyau de la norme N de $K^\times$ sur $k^\times$.

PROPOSITION 2.- <u>Pour chaque</u> $h \in GL(2,K)$, <u>on définit une similitude</u> φ_h <u>de</u> Q, <u>de multiplicateur</u> $N(\det h)$, <u>par</u>

(4) $$\varphi_h(x) = h.x = hxh^* \qquad (x \in E).$$

<u>Notons</u> φ <u>l'homomorphisme</u> $h \mapsto \varphi_h$ <u>de</u> $GL(2,K)$ <u>dans</u> Γ.

<u>On a alors</u>

i) $\operatorname{Ker} \varphi = \{u.1 \in GL(2,K) \mid u \in U\}$;

ii) <u>le groupe</u> Γ <u>est le produit semi-direct de l'image</u> Γ^+ <u>de</u> φ <u>et du groupe</u> $\{1,F\}$, <u>avec la relation</u>

(5) $$F \circ \varphi_h \circ F = \varphi_{\bar{h}} \qquad (h \in GL(2,K))$$

(où $\bar{h}$ désigne la matrice conjuguée de $h \in GL(2,K)$).

<u>Démonstration</u> : Il est clair que le multiplicateur de φ_h est $N(\det h)$ puisque $\det(h^*) = (\det h)^q$ $(h \in GL(2,K))$. Montrons i). Si l'on a $\varphi_h = Id$, pour $h \in GL(2,K)$, alors en particulier $hh^* = 1$, d'où $hx = xh$ pour tout $x \in M_2(K)$. Il en résulte que h est scalaire, $h = a1$, pour $a \in K^\times$, convenable. Mais la relation $h^* = h^{-1}$ entraîne aussitôt $a^q = a^{-1}$, c'est-à-dire $a \in U$, comme voulu.

Montrons (ii). La relation (5) est immédiate. Il ne reste à montrer que le produit semi-direct $\mathrm{Im}\,\varphi.\{1,F\}$ est Γ tout entier. Or, comme $F \notin \mathrm{Im}\,\varphi$, on a, d'après i),

(6) $$|\mathrm{Im}\,\varphi.\{1,F\}| = 2\ |U|^{-1}|GL(2,K)| = 2(q-1)(q^4-1)q^2 .$$

D'autre part, on a

$$|O(Q)| = n_H.|O(N)|$$

où l'on note n_H le nombre des paires hyperboliques dans (E,Q) ; on trouve aussitôt $n_H = (q-1)(q^2+1)q^2$ et donc

(7) $$|\Gamma| = (q-1)|O(Q)| = 2(q-1)(q^2-1)(q^2+1)q^2$$

(ch.I, §4, n°1 prop.1), ce qui achève la démonstration.

C.Q.F.D.

DEFINITION 3.- <u>Dans la suite de ce chapitre on pose</u>

$$H = GL(2,K)$$

<u>et</u> $$m_h = N(\det h) \qquad (h \in H).$$

2.- <u>Le groupe</u> $U(2,K)$.

Les résultats de ce numéro sont préliminaires à la description des H-orbites dans $\tilde{E} = E^2 \times X$ au numéro 5.

DEFINITION 4.- On pose

$$U(2,K) = \{h \in H \mid h^* h = 1\} ,$$
$$SU(2,K) = \{h \in SL(2,K) \mid h^* h = 1\} ,$$
$$E^{(i)} = \{x \in E \mid \text{rang } x = i \} \qquad (i = 1,2).$$

PROPOSITION 3.- On a la suite exacte

$$1 \longrightarrow SU(2,K) \xrightarrow{i} U(2,K) \xrightarrow{\det} U \longrightarrow 1 \tag{8}$$

où i désigne l'inclusion canonique. De plus, tout $h \in U_2(K)$ peut s'écrire sous la forme

$$h = \begin{pmatrix} ua & ub \\ -b^q & a^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^q & a^q \end{pmatrix}$$

où $u = \det h \in U$ et $a,b \in K^+$ (déterminés alors de manière unique par h) vérifient la relation

$$N(a) + N(b) = 1 .$$

Démonstration : La suite exacte (8) est immédiate. D'autre part si $h \in U_2(K)$, alors $\begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h \in SU(2,K)$; or il résulte aussitôt de la condition $g^* = g^{-1}$, pour $g \in SL(2,K)$ que g s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b^q & a^q \end{pmatrix}$ avec $a,b \in K^+$, $N(a) + N(b) = 1$.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE.- On a

$$|SU(2,K)| = (q-1)q(q+1)$$
$$|U(2,K)| = (q-1)q(q+1)^2 .$$

PROPOSITION 4.- Considérons le plongement canonique de $GL(2,k)$ dans H . Alors les sous-groupes $SL(2,k)$ et $SU(2,K)$ de H sont conjugués dans H . En fait, pour $h \in H$ la relation

$$SU(2,K) = h\, SL(2,k) h^{-1} \tag{9}$$

équivaut à la condition

$$h^* h = aw \tag{10}$$

avec $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $a \in K^{\times}$ (nécessairement de trace nulle).

Démonstration : Remarquons que pour $h_o \in SL(2,K)$ on a $h_o \in SL(2,k)$ si et seulement si

$$h_o^* w h_o = w .$$

Il est alors clair que, pour $h_o \in SL(2,k)$, $h_1 \in SU(2,K)$ et $h \in H$ tel que $h^*h = aw$ $(a \in K^{\times})$, on a

$$(hh_oh^{-1})^*(hh_oh^{-1}) = 1 ,$$

et

$$(h^{-1}h_1h)^*w(h^{-1}h_1h) = w ,$$

c'est-à-dire, $hh_oh^{-1} \in SU(2,K)$ et $h^{-1}h_1h \in SL(2,k)$.

D'autre part, (9) pour $h \in H$ entraîne

$$h_o^*(h^*h)h_o = h^*h$$

pour tout $h_o \in SL(2,k)$; il en résulte aussitôt $h^*h = aw$ pour un $a \in K^{\times}$, convenable.

C.Q.F.D.

REMARQUE.- En toute caractéristique, une solution $h \in GL(2,K)$ de (10) est donnée par

$$h = \begin{pmatrix} v & b \\ 1 & vb \end{pmatrix}$$

où $v, b \in K^{\times}$ sont tels que $N(v) = -1$, $v \neq 1$ et $Tr(b) = 0$. Alors $a = Tr(v)b$, dans (10).

3.- Les classes de $U(2,K)$-conjugaison dans $E^{(2)}$.

Rappelons que l'on a posé $E^{(2)} = \{x \in E \mid \text{rang } x = 2\}$ (cf. n°2, déf.4). On a

(11) $$|E^{(2)}| = (q-1)q(q^2+1) .$$

Nous donnons la liste des classes de $U(2,K)$-conjugaison dans $E^{(2)}$ dans la table A ci-dessous.

Fixons un élément a_o de $K^\times$ tel que $N(a_o) = -1$. Les propriétés suivantes se démontrent sans difficulté.

LEMME 1.- On a

(12) $$s\begin{pmatrix}2 & a_o^q\\ a_o & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ a_o & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s & s\\ 0 & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ a_o & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

quel que soit $s \in k^\times$, et

(13) $$\begin{pmatrix}\mathrm{Tr}\,c & a_o^q c^q\\ a_o c & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -a_o^q\\ a_o & c^{1-q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & 0\\ 0 & c^q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -a_o^q\\ a_o & c^{1-q}\end{pmatrix}^{-1}$$

quel que soit $c \in K^\times - k^\times$.

PROPOSITION 5.- Considérons l'action de $U(2,K)$ dans $E^{(2)}$ par conjugaison et posons

(14) $$K^o = \{a \in K \mid \mathrm{Tr}\, a = 0\}.$$

On a

(15) $$\mathrm{Stab}_{U(2,K)}\, s\begin{pmatrix}2 & a_o^q\\ a_o & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ a_o & 0\end{pmatrix}\left\{u\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\, u \in U,\ b \in K^o\right\}\begin{pmatrix}1 & 1\\ a_o & 0\end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \left\{u\begin{pmatrix}1+b & a_o^q b\\ a_o b & 1-b\end{pmatrix}\middle|\, u \in U,\ b \in K^o\right\}$$

quel que soit $s \in k^\times$, et

(16) $$\mathrm{Stab}_{U(2,K)}\begin{pmatrix}\mathrm{Tr}\,c & a_o^q c^q\\ a_o c & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -a_o^q\\ a_o & c^{1-q}\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-q}\end{pmatrix}\middle|\, a \in K^\times\right\}\begin{pmatrix}1 & -a_o^q\\ a_o & c^{1-q}\end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \left\{\frac{a^{-q}}{c-c^q}\begin{pmatrix}N(a)c - c^q & a_o^q c^q (N(a)-1)\\ a_o c(N(a)-1) & -N(a)c^q + c\end{pmatrix}\right\}_{a \in K^\times},$$

quel que soit $c \in K^\times - k^\times$.

Il est d'autre part clair que

(17) $$\mathrm{Stab}_{U(2,K)}\begin{pmatrix}s & 0\\ 0 & t\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & v\end{pmatrix} \middle|\, u,v \in U\right\} \qquad (s,t \in k^\times,\ s \neq t).$$

TABLE A. Classes de $U(2,K)$-conjugaison dans $E^{(2)}$.

Représentant	Paramètres	Nombre de classes	Cardinal de la classe
$t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$t \in k^{\times}$	$q-1$	1
$s\begin{pmatrix} 2 & a_o^q \\ a_o & 0 \end{pmatrix}$	$s \in k^{\times}$	$q-1$	q^2-1
$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$	$s,t \in k^{\times}$ $s \neq t$ mod. $(s,t) \sim (t,s)$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$	$q(q-1)$
$\begin{pmatrix} \mathrm{Tr}\,c & a_o^q c^q \\ a_o c & 0 \end{pmatrix}$	$c \in K^{\times} - k^{\times}$ mod. $c \sim c^q$	$\frac{1}{2}q(q-1)$	$q(q+1)$

Notations : On note a_o un élément fixé de $K^{\times}$ de norme -1 .

4.- Orbites suivant $U(2,K)$ et $U'(1,K)$ dans $E^{(1)}$.

Rappelons que l'on a posé (cf. n°2, déf.4)

$$E^{(1)} = \{x \in E = M_2^h(K) \mid \operatorname{rang} x = 1\} .$$

De manière explicite, on vérifie aisément que l'on a

(18) $$E^{(1)} = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid s \in k^\times\} \cup \{s\begin{pmatrix} 1 & b \\ b^q & N(b) \end{pmatrix} \mid s \in k^\times ,\ b \in K\} ,$$

d'où

(19) $$|E^{(1)}| = (q-1)(q^2+1) .$$

Si $x,y \in M_2(K)$, $\operatorname{rang} x = \operatorname{rang} y = 1$, alors pour que x et y soient conjuguées par $H = GL(2,K)$, il faut et il suffit que $\operatorname{Tr} x = \operatorname{Tr} y$. Il en résulte que l'on a un système de représentants des classes de H-conjugaison dans $E^{(1)}$ en prenant la famille formée des matrices suivantes :

(20) $$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (s \in k^\times),$$

(21) $$\begin{pmatrix} 1 & a_o^q \\ a_o & -1 \end{pmatrix}$$

(où l'on note a_o un élément fixé de $K^\times$ de norme -1).

PROPOSITION 6.- On a

i) $$\operatorname{Stab}_{U(2,K)}\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \mid u,v \in U\} \qquad (s \in k^\times),$$

ii) $$\operatorname{Stab}_{U(2,K)}\begin{pmatrix} 1 & a_o^q \\ a_o & -1 \end{pmatrix} = \left\{u\begin{pmatrix} 1+b & a_o^q b \\ a_o b & 1-b \end{pmatrix} \middle| u \in U ,\ b \in K^o\right\}$$

(cf. n°3, (14)).

Démonstration : La relation i) est immédiate et ii) résulte aussitôt du fait que

$$\operatorname{Stab}_{U(2,K)}\begin{pmatrix} 1 & a_o^q \\ a_o & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Stab}_{U(2,K)}\begin{pmatrix} 2 & a_o^q \\ a_o & 0 \end{pmatrix}$$

et de la proposition 5, (15) (n°3).

C.Q.F.D.

La proposition 6 montre, compte tenu des cardinaux en jeu, que la famille des matrices (20) et (21) est encore un système de représentants des classes de $U(2,K)$-conjugaison dans $E^{(1)}$. Nous résumons ces résultats dans la table B ci-dessous.

TABLE B. Classes de $U(2,K)$-conjugaison dans $E^{(1)}$.

Représentant	Paramètres	Nombre de classes	Cardinal de la classe
$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$s \in k^{\times}$	$q-1$	$q(q-1)$
$\begin{pmatrix} 1 & a_0^q \\ a_0 & -1 \end{pmatrix}$		1	q^2-1

DEFINITION 5.- Posons

$$U'(1,K) = \{a \in H \mid a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}a^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} .$$

On a alors

(22) $$U'(1,K) = \{\begin{pmatrix} u & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid u \in U,\ d \in K^{\times},\ b \in K^{+}\} .$$

Nous considérons maintenant l'action $x \mapsto axa^*$ ($x \in E^{(1)}$, $a \in U'(1,K)$) de $U'(1,K)$ dans $E^{(1)}$. On voit aussitôt que l'on a

$$\mathrm{Orb}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \mid t \in k^{\times}\} \cup \{s\begin{pmatrix} 1 & b \\ b^q & N(b) \end{pmatrix} \mid s \in k^{\times},\ b \in K^{\times}\}$$

et

$$\mathrm{Stab}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \mid u,v \in U\} .$$

Il en résulte la table C ci-dessous :

TABLE C. Orbites de $U'(1,K)$ dans $E^{(1)}$.

Représentant	Paramètres	Nombre d'orbites	Cardinal de l'orbite
$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$s \in k^{\times}$	$q-1$	1
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		1	$(q-1)q^2$

5.- Les H-orbites dans $\tilde{E} = E^2 \times X$.

Rappelons que l'on a posé $H = GL(2,K)$ et aussi $X = \mathrm{Car}(k^\times) - \{1\}$.

Nous considérons maintenant l'extension naturelle à $E^2 = E \times E$ et à $E^2 \times X$ de l'action de H dans E comme groupe de similitudes du déterminant définie au numéro 1 par (4).

DEFINITION 6.- Posons

$$\tilde{E} = E^2 \times X ,$$

et

$$h.y = (h.y_1 , h.y_2) = (hy_1h^* , hy_2h^*) \qquad (h \in H , y = (y_1,y_2) \in E^2),$$

$$h.(y,\psi) = (h.y , \psi^{m_h^{-1}}) \qquad (h \in H , (y,\psi) \in \tilde{E}),$$

(avec $m_h = N(\det h)$).

Nous fixons les notations que nous employerons, pour les représentants des H-orbites dans $\tilde{E}$ et leurs stabilisateurs, dans la suite de ce chapitre.

DEFINITION 7.- Fixons un élément $a_o \in K^\times$ de norme -1 . On pose alors

$$x_a = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}\,a & a_o^q a^q \\ a_o a & 0 \end{pmatrix} \qquad (a \in K^\times),$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_o & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$h_c = \begin{pmatrix} 1 & -a_o^q \\ a_o & c^{1-q} \end{pmatrix} \qquad (c \in K^\times - k^\times),$$

$$\underline{d}(s,t) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \qquad (s,t \in K^+).$$

DEFINITION 8.- Rappelons que l'on a noté K^o le noyau de la trace Tr de K sur k et U le noyau de la norme N de $K^\times$ sur $k^\times$. On pose

$$H_o = \{u\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid u \in U\,,\ b \in K^o\}\ ,$$

$$H_1 = \{\begin{pmatrix}u & 0\\ 0 & v\end{pmatrix} \mid u,v \in U\}\ ,$$

$$H_2 = \{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-q}\end{pmatrix} \mid a \in K^{\times}\}\ ,$$

$$H_3 = \{\begin{pmatrix}u & b\\ 0 & v\end{pmatrix} \mid u,v \in U\,,\ b \in K^{+}\}\ ,$$

$$UL(2,K) = \{h \in H \mid \det h \in U\}\ .$$

La table 1 décrivant les H-orbites dans $\widetilde{E}$ ainsi que leurs stabilisateurs résulte aussitôt des tables A à C , des propositions 5 et 6, et du fait que pour toute forme bilinéaire hermitienne B de rang r sur K , il existe une base convenable de l'espace de B , par rapport à laquelle la matrice de B est diagonale, avec (puisque la norme N de K sur k est surjective) ses r premiers coefficients égaux à 1 et les restants nuls.

Dans cette table nous avons regroupé les H-représentants qui sont congrus modulo $G_o \times k^{\times}$ $(G_o = GL(2,k))$ par l'action

(23) $\quad (x,\psi)(a,t) = (xa, \psi^{t^{-1}}) \qquad (a \in G_o\,,\ x \in E^2,\ \psi \in X\,,\ t \in k^{\times})$

où xa , rappelons-le, désigne le produit matriciel de $x = (x_1, x_2) \in E^2$ et $a \in G_o$. Les actions de G_o et H commutent et nous avons ainsi en fait une action $(x,\psi) \mapsto (h.xa\,,\ \psi^{m_h^{-1}t^{-1}})$ $(x \in E^2\,,\ \psi \in X\,,\ h \in H\,,\ a \in G_o)$ de $H \times {}^oG_o$ dans $\widetilde{E}$ (où ${}^oG_o$ désigne le groupe opposé de G_o).

Nous rappelons, pour clore ce paragraphe, quelques notions qui seront très utiles dans la suite.

DEFINITION 9.- <u>On appelle rang d'un élément</u> $(x,\psi) \in \widetilde{E}$ <u>le rang du couple de vecteurs</u> $x = (x_1, x_2)$ <u>de</u> E . <u>On appelle rang d'une H-orbite dans</u> $\widetilde{E}$ <u>le rang commun de ses éléments</u>. <u>On dit qu'une H-orbite est dégénérée</u> (resp. non-dégénérée) <u>si son rang est</u> ≤ 1 (resp. égal à 2).

Nous avons ainsi dans la table 1, huit types d'orbites non-dégénérées, quatre orbites de rang 1 et une orbite de rang 0.

DEFINITION 10.- Rappelons que l'on a posé (de manière générale au ch.III, §2, n°1)

$$\mathfrak{Q}(x) = \begin{pmatrix} Q(x_1) & B(x_1,x_2) \\ 0 & Q(x_2) \end{pmatrix} \qquad (x = (x_1,x_2) \in E^2).$$

Fixons une fois pour toutes un caractère non-trivial e_o de k^+ et posons

$$e = e_o \circ \mathrm{Tr} \in \mathrm{Car}(K^+) \ .$$

On note alors $\tilde{\mathfrak{Q}}$ le prolongement de $\mathfrak{Q}$ à $\tilde{E}$, constant sur les H-orbites, défini par

$$\tilde{\mathfrak{Q}}(x,e^t) = t\ \mathfrak{Q}(x) \qquad ((x,e^t) \in \tilde{E}).$$

Nous donnons dans la table 2 les valeurs de $\mathfrak{Q}$ sur les E^2-composantes des représentants de la table 1. La proposition suivante en découle aussitôt :

PROPOSITION 7.- Soit L une réunion de H-orbites non-dégénérées dans $\tilde{E}$. Alors les fibres de $\tilde{\mathfrak{Q}}$ dans L se réduisent à des H-orbites.

§2. Description des représentations $W[\pi]$.

Nous gardons dans ce paragraphe et les suivants , sauf mention expresse du contraire, les notations du paragraphe 1, notamment celles introduites au numéro 5.

1.- Définition des représentations $W[\pi]$.

D'après la proposition 2 du paragraphe 1 (n°1) et la proposition 1 du paragraphe 3 (n°1) du chapitre III, nous sommes amenés à poser la définition suivante (avec donc $\Gamma' = GL(2,K)/U$).

DEFINITION 1.- Soit (V,π) une représentation de $H = GL(2,K)$ triviale sur les matrices scalaires à rapport dans U. On note $(W[\pi],\rho)$ la représentation de G dont l'espace $W[\pi]$ est formé de toutes les fonctions f de $\tilde{E} = E \times E \times X$ dans V telles que

$$(1) \qquad f(hxh^*, hyh^*, \psi^{N(\det h)^{-1}}) = \pi(h)[f(x,y,\psi)]$$

quels que soient $h \in H$, $(x,y,\psi) \in \tilde{E}$ et dont l'action ρ est donnée par les formules (7) à (10) du numéro 3 du paragraphe 2 du chapitre III, appliquées au cas $n = 2$ et au A-module quadratique $(M,\bar{\mathbb{Q}})$ de k-dimension $2rn = 8$ associé à $(E,Q) = (M_2^h(K),\det)$ (cf. ch.III, §2, n°1).

Notons que dans notre cas

$$\varepsilon(\mathrm{Tr} \circ \bar{\mathbb{Q}}) = (-1)^2 = 1 \ .$$

PROPOSITION 1.- Notons I_U l'ensemble des représentations irréductibles de H qui sont triviales sur les matrices scalaires à rapport dans U. On a alors un isomorphisme de G-modules

$$W_Q \simeq \bigoplus_{\pi \in I_U} (\dim \pi) W[\pi]$$

(ch.III, §3, n°1, prop.1).

Nous nous servirons des notations suivantes dans la classification finale des représentations de G.

DEFINITION 2.- Désignons les représentations irréductibles de $GL(2,K)$ (cf. ch.II, §4, fin du n°4) par $(V_{\Theta,\Xi}, \pi_{\Theta,\Xi})$ (où $\Theta,\Xi \in \mathrm{Car}(K^\times)$, ou bien $\Theta,\Xi \in \mathrm{Car}(K^\times)$ avec $\Xi = \Theta^{q^2}$), $(V^{q^2}_{\Lambda,\Lambda}, \pi^{q^2}_{\Lambda,\Lambda})$ et $(\mathbb{C},\pi^1_{\Lambda,\Lambda})$ ($\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$). Le fait d'être triviale sur les matrices scalaires à rapport dans U équivaut pour ces représentations à la condition

$\Theta\Xi = \Theta^q\Xi^q$ <u>ou</u> $\Lambda^2 = \Lambda^{2q}$, <u>selon le cas</u>.

Soient Θ , Ξ deux caractères distincts de $\underset{\sim}{K}^\times$ tels que, ou bien $\Theta^{q^2} = \Theta$ et $\Xi^{q^2} = \Xi$ (c'est-à-dire $\Theta , \Xi \in \mathrm{Car}(K^\times)$) ou bien $\Xi = \Theta^{q^2}$. Supposons en plus $\Theta\Xi = \Theta^q\Xi^q$. Nous posons alors

(2) $$W\begin{bmatrix} \Theta & \Theta^q \\ \Xi^q & \Xi \end{bmatrix} = W[\pi_{\Theta,\Xi}] .$$

Pour $r = 1, q^2$ et $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$ tel que $\Lambda^2 = \Lambda^{2q}$, nous posons

(3) $$W\begin{bmatrix} \Lambda & \Lambda^q \\ \Lambda^q & \Lambda \end{bmatrix}^r = W[\pi^r_{\Lambda,\Lambda}] .$$

REMARQUE.- Les isomorphismes $\pi_{\Theta,\Xi} \xrightarrow{\sim} \pi_{\Xi,\Theta}$ induisent, trivialement, des isomorphismes

$$W\begin{bmatrix} \Theta & \Theta^q \\ \Xi^q & \Xi \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} W\begin{bmatrix} \Xi & \Xi^q \\ \Theta^q & \Theta \end{bmatrix} .$$

2.- <u>L'action de la conjugaison</u> F .

Il sera commode dans la suite de désigner par F la conjugaison $a \mapsto a^q$ dans K , ainsi que son prolongement naturel à $\underset{\sim}{\mathbb{K}}$ (resp. $K \times K$; resp. $M_2(K)$) défini par $F(z) = z^q$ ($z \in \underset{\sim}{\mathbb{K}}$) (resp. $F(a,b) = (F(a),F(b))$ pour $a,b \in K$; resp. $F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(a) & F(b) \\ F(c) & F(d) \end{pmatrix}$ ($a,b,c,d \in K$)). Nous avons donc $x^* = F({}^t x) = {}^t F(x)$ pour $x \in M_2(K)$.

Rappelons (cf. §1, n°1, déf.1) que nous avons, par définition de F

$$F(x) = {}^t x \qquad (x \in E) .$$

Notons encore F le prolongement naturel de F à $\tilde{E}$ défini par

$$F(x,y,\psi) = (F(x),F(y),\psi) \qquad ((x,y,\psi) \in \tilde{E}).$$

DEFINITION 3.- <u>Soit</u> (V,π) <u>une représentation irréductible de</u> H , <u>triviale sur les matrices scalaires à rapport dans</u> U . <u>On pose</u>

$$\tilde{F}(f) = f \circ F \qquad (f \in V^{\tilde{E}}).$$

PROPOSITION 2.- L'application $\widetilde{F}$ est un automorphisme involutif du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V^{\widetilde{E}}$ qui est un isomorphisme de la représentation $(W[\pi],\rho)$ sur la représentation $(W[\pi\circ F],\rho)$.

Cela est immédiat.

Nous décrivons maintenant les représentations π telles que $\pi\circ F \simeq \pi$. Notons d'ailleurs que cette condition entraîne que π est triviale sur les matrices scalaires à rapport dans U .

PROPOSITION 3.- Soit π une représentation irréductible de H . Alors on a $\pi\circ F \simeq \pi$ seulement dans les trois cas suivants :

i) $\pi = \pi_{\Lambda,\Phi}$ avec $\Lambda = \Lambda^q$; $\Phi = \Phi^q$ $(\Lambda,\Phi \in \mathrm{Car}(K^\times))$,

ii) $\pi = \pi_{\Lambda,\Lambda^q}$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times),\ \Lambda \neq \Lambda^q)$,

iii) $\pi = \pi^r_\Lambda$ avec $\Lambda = \Lambda^q$ $(r = 1, q^2$; $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times))$.

De plus, on a toujours $\pi \neq \pi\circ F$ à moins que $\pi = \pi^1_{\Lambda,\Lambda}$ $(\Lambda = \Lambda^q$, $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times))$.

Cela est un exercice facile.

Considérons une représentation irréductible (V,π) de H telle que $\pi\circ F \simeq \pi$. Comme $F^2 = \mathrm{Id}$ (sur H), le carré de tout isomorphisme de (V,π) sur $(V,\pi\circ F)$ est une homothétie de V . Il en résulte qu'il existe deux isomorphismes involutifs de π sur $\pi\circ F$ (ne différant que par un signe) ; nous allons en choisir un, noté Δ dans la suite, dans chacun des cas i) à iii) que nous réaliserons par leur modèle naturel (cf. ch.I, §1, n°3, déf.4).

PROPOSITION 4.- L'automorphisme involutif F^* du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M = \mathbb{C}^{K^2 \times K^\times}$ (avec $K^2 = K\times K$) défini par

(4) $$(F^*v)(a,b;c) = v(F(a),F(b);F(c)) \qquad (v \in M\ ,\ (a,b;c) \in K^2 \times K^\times)$$

est un isomorphisme de la représentation naturelle (M,τ) de H (cf. ch.I, §1, n°2) sur sa conjuguée $(M,\tau\circ F)$ qui envoie la sous-

<u>représentation</u> $(M_{\Lambda,\Phi}, \tau)$ <u>sur</u> $(M_{\Lambda^q,\Phi^q}, \tau\circ F)$.

Cela est immédiat.

Rappelons (cf. ch.I, §1, n°2, prop.6) que l'on a un automorphisme involutif S de la représentation naturelle (M,τ) de H, défini par

$$(5) \qquad (Sv)(a,b;c) = q^{-2} \sum_{(a',b')\in K^2} e^c(ab'-a'b)v(a',b';c)$$

pour $v\in M$, $(a,b;c)\in K^2\times K^\times$, où $e = e_o\circ\mathrm{Tr}$ (cf. §1, n°5, déf.10), qui envoie $(M_{\Lambda,\Phi}, \tau)$ sur $(M_{\Phi,\Lambda}, \tau)$.

Nous distinguons maintenant quatre cas.

<u>Définition de</u> Δ <u>pour</u> $\pi = \pi_{\Lambda,\Phi}$ $(\Lambda,\Phi\in \mathrm{Car}(K^\times),\ \Lambda = \Lambda^q,\ \Phi = \Phi^q)$.

Nous prenons $(V,\pi) = (M_{\Lambda,\Phi}, \tau)$. Comme le sous-espace $M_{\Lambda,\Phi}$ de M est alors stable par F^* (prop. 4), nous pouvons prendre

$$(6) \qquad \Delta = F^*$$

(en notant encore F^* la restriction de F^* à $M_{\Lambda,\Phi}$). Notons que l'on obtient ainsi un isomorphisme involutif de π sur $\pi\circ F$ aussi pour $\Lambda = \Phi$.

<u>Définition de</u> Δ <u>pour</u> $\pi = \pi_{\Lambda,\Lambda^q}$ $(\Lambda\in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times))$.

Nous prenons $(V,\pi) = (M_{\Lambda,\Lambda^q}, \tau)$. Dans ce cas nous posons

$$(7) \qquad \Delta = S\circ F^*$$

(où l'on note encore F^* (resp. S) la restriction de F^* (resp. S) à M_{Λ,Λ^q} (resp. $M_{\Lambda^q,\Lambda}$).

<u>Définition de</u> Δ <u>pour</u> $\pi = \pi_\Lambda^{q^2}$ $(\Lambda\in \mathrm{Car}(K^\times),\ \Lambda = \Lambda^q)$.

Dans ce cas nous réalisons (V,π) comme $(\underline{L}^o, \Lambda\tau)$ où $\underline{L}^o$ désigne l'espace des fonctions complexes à somme nulle sur l'ensemble $\underset{\sim}{\mathbb{L}}$ des droites du plan K^2, $\Lambda\tau = (\Lambda\circ\det)\otimes\tau$ et τ désigne l'action naturelle de H dans $\underline{L}^o$ (cf. ch.I, §1, n°2, prop.5). On a l'isomorphisme involutif F^* de $(\underline{L}^o, \Lambda\tau)$ sur $(\underline{L}^o, \Lambda(\tau\circ F))$ donné par

$$(F^*v)(\ell) = v(F(\ell)) \qquad (\ell\in \underset{\sim}{\mathbb{L}},\ v\in \underline{L}^o).$$

On prend alors

(8) $$\Delta = F^* .$$

<u>Définition de</u> Δ <u>pour</u> $\pi = \pi_\Lambda^1 = \Lambda \circ \det$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times),\ \Lambda = \Lambda^q)$.

Dans ce cas on pose simplement

(9) $$\Delta = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} .$$

Remarquons que les choix de Δ pour $\pi = \pi_{\Lambda,\Lambda}$ et pour $\pi_\Lambda^{q^2}$, π_Λ^1 se correspondent.

DEFINITION 4.- <u>Soit</u> π <u>une représentation de</u> H , <u>irréductible ou de la forme</u> $\pi = \pi_{\Lambda,\Lambda}$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times))$, <u>telle que</u> $\pi \simeq \pi \circ F$. <u>On définit une involution</u> $\widetilde{F}$ <u>de la représentation</u> $(W[\pi],\rho)$ <u>par</u>

$$\widetilde{F}(f) = \Delta \circ f \circ F \qquad (f \in W[\pi]).$$

On notera $W^+[\pi]$ (resp. $W^-[\pi]$) le sous-espace propre, G-stable, de $W[\pi]$ correspondant à la valeur propre $+1$ (resp. -1) de l'involution $\widetilde{F}$. On étendra les notations (2) et (3) à $W^{\pm}[\pi]$ en remplaçant partout W par $W^{\pm}$ dans (2) et (3).

3.- <u>Description des espaces</u> $W[\pi]$.

DEFINITION 5.- <u>Soit</u> (V,π) <u>une représentation irréductible de</u> $H = GL(2,K)$, <u>triviale sur les matrices scalaires à rapport dans</u> $U = N^{-1}(1)$. <u>On pose pour</u> $\xi \in \widetilde{E} = E^2 \times X$,

$$W[\pi](\xi) = \{ f(\xi) \mid f \in W(\pi) \}$$

<u>et</u>

$$\mathrm{Supp}\ W[\pi] = \{ \xi \in \widetilde{E} \mid W(\pi)(\xi) \neq \underline{0} \} = \bigcup_{f \in W(\pi)} \mathrm{Supp}\ f .$$

<u>On dira que</u> Supp $W[\pi]$ <u>est non-dégénéré s'il ne contient que des</u> H-<u>orbites non-dégénérées</u> (cf. §1, n°5, déf.9).

On a alors

$$W[\pi](\xi) = \mathrm{Fix}_V(\mathrm{Stab}_H \xi) \qquad (\xi \in \tilde{E})$$

où l'on note $\mathrm{Fix}_V(L)$ le sous-espace de V formé des vecteurs fixés par l'action d'un sous-groupe L de H.

Nous nous proposons de décrire les espaces $W[\pi](\xi)$ pour les différents représentants $\xi \in \tilde{E}$ de la table 1 (§1, n°5), en tenant compte du fait que ces espaces ne dépendent que du stabilisateur du représentant ξ correspondant, autrement dit ils ne dépendent que de la G_o-orbite de ξ.

Dans la suite nous posons

$$X_2 = \mathrm{Car}(K^+) - \{1\} .$$

PROPOSITION 5.- <u>Soit</u> $\Theta \in \mathrm{Car}(\underset{\sim}{K}^\times) - \mathrm{Car}(K^\times)$, $\Theta_{|U} = 1$. <u>Considérons la représentation</u> (V_Θ, π_Θ) <u>de la série discrète de</u> H, <u>associée à</u> Θ (cf. ch.I, §4, n°2 et 4).

i) <u>Le support de</u> $W[\pi_\Theta]$ <u>est non-dégénéré</u>.

<u>Réalisons</u> π_Θ <u>par le modèle de Weil réduit</u>. <u>On a alors</u> $V_\Theta = V = \mathbb{C}^{X_2}$ <u>et</u> (cf. §1, n°5, défs. 7 et 8)

ii) $W[\pi_\Theta](1, x_s, \psi) = \pi_\Theta(h_1)V_o \qquad (s \in k^\times,\ \psi \in X)$,

<u>où</u>

$$\begin{aligned} V_o &= \{v \in V \mid \mathrm{Supp}\ v \subset \{\eta \in X_2 \mid \mathrm{Ker}\ \eta \supset K^o\}\} \\ &= \{v \in V \mid \mathrm{Supp}\ v \subset \{e^t \mid t \in k^\times\}\} , \end{aligned}$$

<u>si</u> $e = e_o \circ \mathrm{Tr}$ ($e_o \in X$, fixé).

iii) $W[\pi_\Theta](1, x_c, \psi) = \pi_\Theta(h_c)V_\alpha^{pr} \qquad (c \in K^\times - k^\times,\ \psi \in X)$,

<u>où</u>

$$V_\alpha^{pr} = \{v \in V \mid v(\eta^t) = \alpha^{-1}(t)v(\eta),\ \forall \eta \in X_2,\ \forall t \in k^\times\}$$

<u>et</u> $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ <u>est donné par la relation</u>

$$\Theta(a) = \alpha(Na) \qquad (a \in K^\times).$$

iv) $W[\pi_\Theta](\underline{d}(1,0), \underline{d}(0,1), \psi) = \{v \in V \mid v(\eta u) = v(\eta),\ \forall \eta \in X_2,\ \forall u \in U\}$

pour tout $\psi \in X$.

Démonstration : Prouvons i). Il est clair que $W[\pi_\Theta](\xi)=0$ pour $\xi=(\underline{d}(1,0),0;e)$ et $\xi=(0,0,e)$ puisqu'il n'existe pas de vecteur non-nul invariant pour le sous-groupe unipotent supérieur de H dans V (cf. §1, n°5, table 1 et ch.I, §6, n°1). Pour achever la démonstration de i) il suffit de montrer qu'il n'existe pas de vecteur non-nul dans V fixé par $SL(2,k)$ (§1, n°2, prop.4 et §1, n°5, table 1), ce qui a été fait au chapitre I (§6, n°3).

Les assertions ii), iii) et iv) résultent aussitôt de la caractérisation des stabilisateurs correspondants donnée dans la table 4.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 6.- Soient $\Lambda,\Phi\in Car(K^\times)$, $\Lambda\neq\Phi$, $\Lambda^q\Phi^q=\Lambda\Phi$. Considérons la représentation $(V_{\Lambda,\Phi},\pi_{\Lambda,\Phi})$ de la série principale de H réalisée par son modèle naturel (ch.I, §1, n°3). On a alors

i) $$W[\pi_{\Lambda,\Phi}](1,x_s,\psi)=\pi_{\Lambda,\Phi}(h_1)V^{tr}_{\Lambda,\Phi} \qquad (s\in k^\times,\ \psi\in X)$$

où

$$V^{tr}_{\Lambda,\Phi}=\{v\in V_{\Lambda,\Phi}\,|\,v(1,a;1)=v(1,b;1)\ \text{ si }\ Tra=Trb\ ,\ a,b\in K\}\ .$$

ii) $$W[\pi_{\Lambda,\Phi}](1,x_c,\psi)=\pi_{\Lambda,\Phi}(h_c)V^{pr}_{\Lambda,\Phi}\ ,$$

où $V^{pr}_{\Lambda,\Phi}$ est le sous-espace de $V_{\Lambda,\Phi}$ formé des fonctions $v\in V_{\Lambda,\Phi}$ telles que

a) $v(1,N(c)d;1)=\Lambda\Phi^{-q}(c)v(1,d;1)$ $\qquad (c,d\in K^\times)$,

b) $v(1,0;1)=\delta_{\Phi,\Lambda^q}v(1,0;1)$,

c) $v(0,1;1)=\delta_{\Phi,\Lambda^q}v(0,1;1)$.

iii) $W[\pi_{\Lambda,\Phi}](\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1),\psi)$ est formé, pour tout $\psi\in X$, des fonctions $v\in V_{\Lambda,\Phi}$ telles que

a) $v(1,uc;1)=\Lambda(u)v(1,c;1)$ $\qquad (u\in U,\ c\in K^\times)$,

b) $v(1,0;1)=\delta_{\Lambda,\Lambda^q}v(1,0;1)$,

c) $v(0,1;1)=\delta_{\Lambda,\Lambda^q}v(0,1;1)$.

iv) $W[\pi_{\Lambda,\Phi}](1,0,\psi)$ <u>est formé, pour tout</u> $\psi \in X$, <u>des fonctions</u> $v \in V_{\Lambda,\Phi}$ <u>satisfaisant aux conditions</u>

a) $v(0,1;1) = v(1,0;1) = \delta_{\Lambda,\Lambda^q} v(1,0;1)$,

b) $v(1,c;1) = \Lambda\Phi^{-1}(a)\delta_{\Lambda,\Lambda^q} v(1,0;1)$ $(a,c \in K^\times, N(a) = 1+N(c) \neq 0)$,

c) $v(1,uc;1) = \Lambda(u)\delta_{\Phi,\Lambda^q} v(1,c;1)$ $(u \in U, c \in K^\times, N(c) = -1)$.

v) $W[\pi_{\Lambda,\Phi}](\underline{d}(1,0),0,e) = \delta_{\Lambda,\Lambda^q}\{v \in V_{\Lambda,\Phi} | v(1,c;1) = v(1,0;1), \forall c \in K\}$.

vi) $W[\pi_{\Lambda,\Phi}](0,0,e) = \underline{0}$.

<u>Démonstration</u> : Toutes les assertions de la proposition résultent aussitôt de la table 4 (§1, n°5) et, dans le cas de iv), de la proposition 3 du §1 (n°2).

C.Q.F.D.

PROPOSITION 7 .- <u>Soit</u> $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$, $\Lambda^{2q} = \Lambda^2$. <u>Réalisons la représentation de Steinberg</u> $(V_\Lambda, \pi_\Lambda^{q^2})$ <u>de</u> H , <u>associée à</u> Λ , <u>dans son modèle naturel</u> (cf. ch.I, §1, n°3). <u>On a alors</u> :

i) $W[\pi_\Lambda^{q^2}](1,x_s,\psi) = \pi_\Lambda^{q^2}(h_1)V^{tr}$ $(s \in k^\times, \psi \in X)$

<u>où</u>

$$V^{tr} = \{v \in V_\Lambda | v(\ell_a) = v(\ell_b) \text{ si } Tra = Trb ; a,b \in K^+\} .$$

ii) $W[\pi_\Lambda^{q^2}](1,x_c,\psi) = \pi_\Lambda^{q^2}(h_c)V_\Lambda^{pr}$ $(c \in K^\times - k^\times, \psi \in X)$

<u>où</u>

$$V_\Lambda^{pr} = \{v \in V_\Lambda | v(\ell_{tc}) = \alpha_0(t)v(\ell_c), \forall t \in k^\times, \forall c \in K^\times \text{ et } v(\ell_0) = v(\ell_\infty) = 0\}$$

<u>si</u> $\Lambda^q \neq \Lambda$, <u>et</u>

$$V_\Lambda^{pr} = \{v \in V_\Lambda | v(\ell_{tc}) = v(\ell_c), \quad \forall t \in k^\times, \forall c \in K^\times\}$$

<u>si</u> $\Lambda^q = \Lambda$.

iii) $W[\pi_\Lambda^{q^2}](\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1),\psi) =$

$= \{v \in V_\Lambda | v(\ell_{ua}) = \Lambda(u)v(\ell_a), \forall a \in K^\times, \forall u \in U \text{ et } v(\ell_0) = v(\ell_\infty) = 0\}$

<u>si</u> $\Lambda \neq \Lambda^q$;

$W[\pi_\Lambda^{q^2}](\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1,\psi) = \{v \in V_\Lambda | v(\ell_{ua}) = v(\ell_a), \forall a \in K^\times, \forall u \in U\}$

<u>si</u> $\Lambda = \Lambda^q$, <u>quel que soit</u> $\psi \in X$.

iv) $W[\pi_\Lambda^{q^2}](1,0,\psi) = \delta_{\Lambda,\Lambda^q} V_\Lambda^{-1}$ $\qquad (\psi \in X)$

<u>où</u> V_Λ^{-1} <u>est formé des</u> $v \in V_\Lambda$ <u>tels que</u> v <u>soit constante sur</u> $C_o = \{\ell_a \mid a \in K^\times,\ 1+N(a) = 0\}$ <u>et sur</u> $\mathbb{L}(K^2) - C_o$.

v) $W[\pi_\Lambda^{q^2}](\underline{d}(1,0),0,e) = \delta_{\Lambda,\Lambda^q}\{v \in V_\Lambda \mid v(\ell_a) = v(\ell_o),\ a \in K^+\}$.

vi) $W[\pi_\Lambda^{q^2}](0,0,e) = \underline{0}$.

<u>Démonstration</u> : Cela est encore une conséquence facile de la table 1 (§1, n°5).

C.Q.F.D.

PROPOSITION 8.- <u>Soit</u> $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$ <u>tel que</u> $\Lambda^{2q} = \Lambda^2$. <u>Alors on a</u>

i) $W[\pi_\Lambda^1](\xi) = \delta_{\Lambda,\Lambda^q}\mathbb{C}$

<u>si</u> ξ <u>n'est congru à aucun</u> $(1,x_s,\psi)$ <u>modulo</u> H $(s \in k^\times,\ \psi \in X)$.

ii) $W[\pi_\Lambda^1](1,x_s,\psi) = \mathbb{C}$ $\qquad (s \in k^\times,\ \psi \in X)$.

<u>Démonstration</u> : Cela résulte aussitôt de la table 1.

C.Q.F.D.

Comme corollaire aux propositions 5 à 8 ci-dessus, nous obtenons les dimensions des différents espaces $W[\pi](\xi)$, que nous donnons dans la table 3.

4.- <u>Préliminaires à la description des espaces propres</u> $W^{\pm}[\pi]$.

DEFINITION 6.- <u>Si</u> π <u>est une représentation de</u> H <u>telle que</u> $\pi \circ F \simeq \pi$, <u>on pose</u>

$$W^{\pm}[\pi](\xi) = \{f(\xi) \mid f \in W^{\pm}[\pi]\} ,$$

$$\mathrm{Supp}\ W^{\pm}[\pi] = \{\xi \in \tilde{E} \mid W^{\pm}[\pi](\xi) \neq \underline{0}\} .$$

LEMME 1.- <u>Rappelons que l'on a posé</u>

$$x_c = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}c & a_o^q c^q \\ a_o c & 0 \end{pmatrix} \qquad (c \in K^\times),$$

où a_o désigne un élément de norme -1 de $K^\times$, fixé une fois pour toutes. On a

$$F(x_c) = {}^t x_c = h'_c x_c h'^*_c \quad \underline{\text{et}} \quad h'_c h'^*_c = 1$$

pour

$$h'_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a_o c)^{q-1} \end{pmatrix} \qquad (c \in K^\times).$$

C'est clair.

LEMME 2.- Tout $\xi \in \tilde{E}$ est congru, modulo H, à son conjugué $F(\xi)$. En particulier, on a

$$F(1,x_c,\psi) = h'_c(1,x_c,\psi) \qquad (c \in K^\times, \psi \in X)$$

pour

$$h'_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a_o c)^{q-1} \end{pmatrix} \qquad (c \in K^\times)$$

(cf. table 1).

Démonstration : Rappelons que l'on a

$$F(h'.\xi) = F(h').F(\xi) \qquad (h' \in H, \xi \in \tilde{E}).$$

Supposons que l'on ait $F(\xi) = h.\xi$ pour un $\xi \in \tilde{E}$ et un $h \in H$ convenables. Alors on aura

$$F(h'.\xi) = F(h')h.\xi = [F(h')h(h')^{-1}].(h'.\xi) \qquad (h' \in H).$$

Il s'ensuit qu'il suffit de démontrer le lemme pour un système de représentants de $\tilde{E}$ suivant H. Mais cela est immédiat d'après la table 1, puisque les seuls représentants non-invariants par F sont les $(1,x_c,\psi)$ $(c \in K^\times, \psi \in X)$, les $(1,x_1-1,\psi)$ et les $(x_1-1,1,\psi)$ $(\psi \in X)$, et que leur cas est réglé par le lemme 1.

C.Q.F.D.

LEMME 3.- Soit (V,π) une représentation de H, irréductible ou de la forme $\pi = \pi_{\Lambda,\Lambda}$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times))$, telle que (V,π) soit isomorphe à $(V,\pi\circ F)$. Soit $\xi \in \tilde{E}$. Posons

$$W[\pi](\xi) = \pi(h_\xi)V'$$

<u>où</u> $h_\xi \in H$ <u>et</u> $V' \subset V$. <u>Soit</u> $h'_\xi \in H$ <u>tel que</u> $F(\xi) = h'_\xi . \xi$ <u>et définissons</u> $\hat{h}_\xi \in H$ <u>par la relation</u>

$$h'_\xi h_\xi = F(h_\xi)\hat{h}_\xi \ .$$

<u>On a alors</u>

(10) $$\overset{\pm}{W}[\pi](\xi) = \pi(h_\xi)\{v \in V' \mid \pi(\hat{h}_\xi)(v) = \pm\Delta(v)\}$$

(cf. n°2, déf.4).

<u>Démonstration</u> : Posons, pour alléger les notations, $h'_\xi = h'$, $h_\xi = h$ et $\hat{h}_\xi = \hat{h}$. Par définition (loc. cit.), on a, pour $f \in W[\pi]$

$$(\tilde{F}f)(\xi) = \Delta[f(F(\xi))] = [\Delta \circ \pi(h')]f(\xi) \ .$$

Posons $f(\xi) = \pi(h)(v)$, avec $v \in V'$. Alors

$$(\tilde{F}f)(\xi) = [\Delta \circ \pi(F(h)\hat{h})](v) = (\pi(h) \circ \Delta \circ \pi(\hat{h}))(v)$$

et la condition $(\tilde{F}f)(\xi) = \pm f(\xi)$ équivaut à la condition

$$\Delta(\pi(\hat{h})v) = \pm v \ ,$$

d'où notre assertion, car $\Delta = \Delta^{-1}$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 9.- <u>Gardons les notations du lemme</u> 3. <u>Soit</u> $\xi \in \tilde{E}$ <u>l'un des représentants de la table</u> 1 (§1, n°5). <u>Alors on a</u>

i) $\overset{\pm}{W}[\pi](\xi) = \{v \in W[\pi](\xi) \mid \Delta(v) = \pm v\}$

<u>si</u> ξ <u>est invariant par</u> F ;

ii) $\overset{\pm}{W}[\pi](\xi) = \pi(h_\xi)\{v \in V' \mid \Delta(v) = \pm v\}$

<u>si</u> $\xi = (1, x_s, \psi)$ $(s \in k^\times, \psi \in X)$, <u>avec</u> $h_\xi = h_1$ (cf. §1, déf.7 <u>et ce</u> §, prop.6 <u>à</u> 8 <u>pour la description de</u> V' <u>dans ce cas</u>).

iii) $\overset{\pm}{W}[\pi](\xi) = \pi(h_\xi)\{v \in V' \mid \pi\begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ a_0 & 0 \end{pmatrix}(v) = \pm\Delta(v)\}$

<u>si</u> $\xi = (1, x_c, \psi)$ $(c \in K^\times - k^\times, \psi \in X)$, <u>avec</u> $h_\xi = h_c$ (<u>cf. loc. cit. pour la description de</u> V' <u>dans ce cas</u>).

<u>En particulier, le sous-espace</u> $\overset{+}{W^-}[\pi]$ <u>est plein</u> (cf. ch.III, §3, n°1, déf.2).

<u>Démonstration</u> : Le fait que $\overset{+}{W^-}[\pi]$ est plein est une conséquence immédiate du lemme 3. Si ξ est invariant par F, on peut prendre dans le lemme 3, $h'_\xi = 1$; en posant en outre $h_\xi = 1$, on a $\hat{h}_\xi = 1$ et i) en résulte aussitôt. Si $\xi = (1, x_s, \psi)$ $(s \in k^\times, \psi \in X)$, on peut prendre $h'_\xi = h'_s$ (cf. lemme 2) ; alors avec le choix indiqué de h_ξ, on obtient $\hat{h}_s = 1$, d'où ii), en vertu du lemme 3. Enfin si $\xi = (1, x_c, \psi)$ $(c \in K^\times - k^\times$, $\psi \in X)$, on peut prendre $h'_\xi = h'_c$ (cf. lemme 2) ; alors avec le choix indiqué de h_ξ, on trouve $\hat{h}_c = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ a_0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où iii), d'après le lemme 3.

C.Q.F.D.

REMARQUE.- D'après la proposition 9, il suffira dans la suite, pour connaître $\overset{+}{W^-}[\pi]$, de calculer $\overset{+}{W^-}[\pi](\xi)$ pour ξ égal à chacun des représentants suivants :

(11)	$(1, 0, e)$	
(12)	$(\underline{d}(1,0), \underline{d}(0,1), e)$,	
(13)	$(1, x_c, e)$,	$(c = 1$, $c \in K^\times - k^\times)$
(14)	$(\underline{d}(1,0), 0, e)$	
(15)	$(0, 0, e)$	

(cf. §1, n°5, table 1).

Nous considérons maintenant les différents choix de π tels que $\pi \simeq \pi \circ F$ (cf. n°2, prop.3). Nous commençons par le cas le plus simple, celui de $\pi = \pi^1_\Lambda = \Lambda \circ \det$.

5.- <u>Le cas</u> $\pi = \pi^1_\Lambda$.

PROPOSITION 10.- <u>On a</u>

$$W^+[\pi^1_\Lambda] = W[\pi^1_\Lambda] \ , \ W^-[\pi^1_\Lambda] = \underline{0}$$

<u>pour tout</u> $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^{\times})$ <u>tel que</u> $\Lambda = \Lambda^{q}$.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que dans ce cas Δ est l'identité. D'après le lemme 2, si $\xi \in \tilde{E}$ alors $F(\xi) = h.\xi$ pour un $h \in H$ convenable (avec, évidemment, $N(\det h) = 1$). Par conséquent, on a

$$(\tilde{F}f)(\xi) = f(h.\xi) = \Lambda(\det h) f(\xi) = f(\xi) \qquad (f \in W[\pi_{\Lambda}^{1}]),$$

car $\Lambda = \Lambda^{q}$.

C.Q.F.D.

6.- <u>Le cas</u> $\pi = \pi_{\Lambda,\Phi}$ $(\Lambda = \Lambda^{q}, \Phi = \Phi^{q})$.

Nous considérons ensuite le cas $\pi = \pi_{\Lambda,\Phi}$, où $\Lambda = \Lambda^{q}$ et $\Phi = \Phi^{q}$ $(\Lambda, \Phi \in \mathrm{Car}(K^{\times}), \Lambda \neq \Phi)$. Nous réalisons la représentation $(V_{\Lambda,\Phi}, \pi_{\Lambda,\Phi})$ dans la représentation naturelle de H (cf. ch.I, §1, n°3, déf.4). Rappelons que dans ce cas $\Delta = F^{*}$ (cf. n°2, (6)).

PROPOSITION 11.- <u>On a</u>

$$W^{+}[\pi_{\Lambda,\Phi}] = W[\pi_{\Lambda,\Phi}] \ , \ W^{-}[\pi_{\Lambda,\Phi}] = \underline{0}$$

<u>quels que soient</u> $\Lambda, \Phi \in \mathrm{Car}(K^{\times})$ <u>tels que</u> $\Lambda = \Lambda^{q}$ <u>et</u> $\Phi = \Phi^{q}$, $\Lambda \neq \Phi$.

<u>Démonstration</u> : D'après la remarque à la proposition 9 , pour prouver notre assertion nous n'avons qu'à démontrer que, par exemple,

$$W^{+}[\pi_{\Lambda,\Phi}](\xi) = W[\pi_{\Lambda,\Phi}](\xi) \tag{16}$$

pour les représentants ξ du type (11) à (15).

Pour $\xi = (0,0,e)$, (16) est trivial (cf. table 1). En vertu de la proposition 6, iv), iii) et v), on a $F^{*}(v) = v$ pour tout $v \in W[\pi_{\Lambda,\Phi}](\xi)$ pour ξ égal à $(1,0,e)$, $(\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1),e)$ et $(\underline{d}(1,0),0,e)$ d'où (16) dans ces trois cas (prop. 9 i)). D'après le numéro i) de la proposition 6, on a aussi $F^{*}(v) = v$ pour tout $v \in V'$ dans le numéro ii) de la proposition 9 , d'où (16) pour $\xi = (1,x_{1},e)$. Considérons enfin le cas $\xi = (1,x_{c},e)$ $(c \in K^{\times} - k^{\times})$. D'après le numéro

ii) de la proposition 6, l'espace V' dans le numéro iii) de la proposition 9 est formé des $v \in V_{\Lambda,\Phi}$ telles que $v(1,0;1) = 0 = v(0,1;1)$ et que (puisque $\Phi = \Phi^q$)

$$v(ab, a^{-q}b'; d) = v(b,b';d) \qquad (b,b' \in K,\ a,d \in K^{\times}).$$

On a donc

$$F^* v(a,b;d) = v(a^q, b^q; d^q) = v(b,a;d) \qquad (v \in V',\ a,b \in K,\ d \in K^{\times}).$$

Comme d'autre part

$$\begin{aligned}[\pi_{\Lambda,\Phi}\begin{pmatrix}0 & -a_o\\ a_o & 0\end{pmatrix} v](a,b;d) &= v(a_o(b,-a), da_o^{-2}) \\ &= v(b, -N(a_o)a, d) \qquad (v \in V',\ a,b \in K,\ d \in K^{\times}),\end{aligned}$$

le numéro iii) de la proposition 9 montre que l'on a bien (16) dans ce cas.

C.Q.F.D.

7.- Le cas $\pi = \pi_{\Lambda}^{q^2}$ $(\Lambda = \Lambda^q)$.

Nous prenons maintenant $\pi = \pi_{\Lambda}^{q^2}$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^{\times}),\ \Lambda = \Lambda^q)$. Nous réalisons cette représentation comme le produit tensoriel de $\Lambda \circ \det$ avec la représentation naturelle de $H = GL(2,K)$ dans l'espace $\underline{L}^o$ des fonctions complexes à somme nulle sur l'ensemble $\underline{L}$ des droites du plan fini K^2 (cf. ch.I, §1, n°2). Rappelons que dans ce cas, on a pris $\Delta = F^*$ (cf. n°2, (8)).

PROPOSITION 12.- Soit $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^{\times})$, $\Lambda = \Lambda^q$.

i) On a

$$W^+[\pi_{\Lambda}^{q^2}](\xi) = W[\pi_{\Lambda}^{q^2}](\xi)$$

pour tout $\xi \in E \times E \times X$ non-congru, mod. H, à un représentant de la forme $(1, x_c, \psi)$ $(c \in K^{\times} - k^{\times},\ \psi \in X)$.

ii) Par contre, pour tout $c \in K^{\times} - k^{\times}$, $\psi \in X$, on a

$$W^+[\pi_{\Lambda}^{q^2}](1, x_c, \psi) = \pi_{\Lambda}^{q^2}(h_c)\{v \in \underline{L}^o \mid v(\ell_{\infty}) = v(\ell_o)\},$$

$$W^-[\pi_\Lambda^{q^2}](1,x_c,\psi) = \pi_\Lambda^{q^2}(h_c)\{v \in \underline{L}^o \mid v(\ell_a) = 0 \ \forall a \in K^\times \text{ et } v(\ell_\infty) = -v(\ell_o)\} \ .$$

Démonstration : D'après la proposition 7 iv), iii), v) et vi) on a $F^*(v) = v$ pour tout $v \in W[\pi_\Lambda^{q^2}](\xi)$ pour ξ égal à $(1,0,e)$, $(\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1),e)$, $(\underline{d}(1,0),0,e)$ et $(0,0,e)$. Notre première assertion, pour ces représentants, résulte alors aussitôt du numéro i) de la proposition 9 . Pour $\xi = (1,x_1,e)$, le numéro i) de la proposition 7 entraîne que l'on a aussi $F^*(v) = v$, quel que soit $v \in V'$, dans le numéro ii) de la proposition 9 , d'où i) dans ce cas. Considérons enfin le cas $\xi = (1,x_c,e)$ $(c \in K^\times - k^\times)$. D'après la proposition 7 ii) nous avons, pour tout $v \in V'$ dans la proposition 9 iii), en posant $w' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$[\pi_\Lambda^{q^2}(a_o w')(v)](\ell_o) = \Lambda(a_o^2)v(\ell_\infty) = v(\ell_\infty) = (F^*v)(\ell_\infty) \qquad (\Lambda^q = \Lambda),$$

$$[\pi_\Lambda^{q^2}(a_o w')(v)](\ell_\infty) = v(\ell_o) = (F^*v)(\ell_o),$$

$$\begin{aligned}[\pi_\Lambda^{q^2}(a_o w')(v)](\ell_a) &= v(\ell_{-a^{-1}}) = v(\ell_{N(a)a^{-1}}) = v(\ell_{a^q}) \\ &= [F^*(v)](\ell_a) \qquad (a \in K^\times).\end{aligned}$$

L'assertion ii) en résulte aussitôt (prop. 9 iii)).

C.Q.F.D.

8.- Le cas $\pi = \pi_{\Lambda,\Lambda^q}$.

Nous considérons maintenant le cas le plus délicat, à savoir $\pi = \pi_{\Lambda,\Lambda^q}$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times))$. Nous réalisons toujours π_{Λ,Λ^q} dans la représentation naturelle de H . Rappelons que dans ce cas, on a posé $\Delta = S \circ F^*$ (cf. n°2, (7)).

PROPOSITION 13.- Soit $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$, $\Lambda \neq \Lambda^q$. On a

$$W^+[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi) = W[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi)$$

pour tous les $\xi \in \tilde{E}$ non-congrus, modulo H , à un représentant de la forme $(1,x_c,\psi)$ $(c \in K^\times , \psi \in X)$.

<u>Démonstration</u> : Nous nous servirons de la remarque à la proposition 9. Si $\xi \in \tilde{E}$ est invariant par F, il résulte de la proposition 9 i) et la définition de Δ (n°2, (7)) que si $v \in W[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi)$ alors $v \in W^+[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi)$ si et seulement si

(17) $$(F^* \circ S)(v) = v \ .$$

Pour $\xi = (0,0,e)$ et $\xi = (\underline{d}(1,0),0,e)$, on a $W[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi) = \underline{0}$ (prop.6 v) et vi)) et donc l'assertion i) de notre proposition est triviale. Supposons maintenant ξ égal à $(1,0,e)$ ou à $(\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1),e)$. Soit $t \in k^\times$ et $v_t \in W[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi)$ portée par $(\bigcup_{N(c)=t} \ell_c) \times k^\times$ (si $\xi = (1,0,e)$, alors $v_t = 0$ à moins que $t = -1$). Soit c un élément de norme t de $K^\times$. Nous avons, par un calcul facile (cf. ch.I, § 1 n° 2, prop. 6), puisque $\Lambda \neq \Lambda^q$,

$$\begin{aligned}
(Sv_t)(1,c;1) &= \Lambda(-1)q^{-1} \sum_{\substack{a\in K^\times,\, u\in U \\ ac(1-u)=1}} v_t(a,auc;1) \\
&= \Lambda(-1)\Lambda^{q-1}(c)\ q^{-1} \Big[\sum_{u\in U-\{1\}} \Lambda^{q-1}(1-u)\Lambda(u)\Big] v_t(1,c;1) \\
&= \Lambda^{q-1}(c)v_t(1,c;1) \\
&= v_t(1,c^q;1) = (F^* v_t)(1,c;1) \ .
\end{aligned}$$

Cela montre que $(F^* \circ S)(v) = v$ pour tout $v \in W[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](1,0,e)$ et que l'on a $\mathrm{Trace}(F^* \circ S) = q-1$ (= $\dim[W[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1),e)]$). Comme $W^+[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi)$ est le sous-espace propre de $\Delta = F^* \circ S$ correspondant à la valeur propre 1, notre assertion s'ensuit, pour les deux choix indiqués de ξ.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 14.- <u>Soit</u> $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$, $\Lambda \neq \Lambda^q$. <u>Si</u> $\xi \in \tilde{E}$ <u>a le même stabilisateur que</u> $(1,x_1,e)$, <u>alors on a</u>

i) $W^+[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi) = \pi_{\Lambda,\Lambda^q}(h_1)\{v \in V^{tr}_{\Lambda,\Lambda^q} \mid v(0,1;1) = \Lambda(-1) \sum_{r\in k} v_o(r)\}$,

ii) $W^{-}[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi) =$

$$= \pi_{\Lambda,\Lambda^q}(h_1)\{v \in V^{tr}_{\Lambda,\Lambda^q} \mid v_o = \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } v(0,1;1) = -\Lambda(-1)q\lambda\}$$

où, rappelons-le (cf. prop.6 i)), on a posé $v_o(\mathrm{Tr}b) = v(1,b;1)$ pour tout $v \in V^{tr}_{\Lambda,\Lambda^q}$, $b \in K$.

Démonstration : Soit $v \in V^{tr}_{\Lambda,\Lambda^q}$ et $b \in K$. On a

$$(Sv)(1,b;1) = \frac{\Lambda(-1)}{q} \sum_{a\in K} v(a,ab-1;1)$$
$$= \frac{\Lambda(-1)}{q} \left[v(0,1;1) + \sum_{c\in K^\times} \Lambda^{q-1}(c)v(1,b-c;1)\right].$$

Soit $C \subset K^\times$ un système de représentants des k-droites dans $K^\times$; notons c_o le représentant de la droite K^o formé des éléments de trace nulle. On a alors

$$\sum_{c\in K^\times} \Lambda^{q-1}(c)v(1,b-c;1) = \sum_{c\in C} \Lambda^{q-1}(c) \sum_{t\in k} v(1,b-tc;1)$$
$$= q\Lambda^{q-1}(c_o)v(1,b;1) + \Big[\sum_{\substack{c\in C\\ c\neq c_o}} \Lambda^{q-1}(c)\Big] \sum_{r\in k} v_o(r),$$
$$= \Lambda(-1)\Big[qv_o(\mathrm{Tr}b) - \sum_{r\in k} v_o(r)\Big],$$

d'où

$$(18) \qquad (Sv)(1,b;1) = v_o(\mathrm{Tr}b) + \Lambda(-1)q^{-1}v(0,1;1) - q^{-1} \sum_{r\in k} v_o(r).$$

De manière analogue, on a

$$(Sv)(0,1;1) = \Lambda(-1)q^{-1} \sum_{c\in K} v(1,c;1),$$

c'est-à-dire

$$(19) \qquad (Sv)(0,1;1) = \Lambda(-1) \sum_{r\in k} v_o(r).$$

La proposition résulte aussitôt de (18) et (19).

C.Q.F.D.

Nous fixons quelques notations avant de considérer le dernier cas.

DEFINITION 7.- Notons $\underset{\sim}{L}$ l'ensemble des k-droites (passant par l'origine) de $K^\times$. A chaque $v \in V^{pr}_{\Lambda,\Lambda^q}$ ($\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$, $\Lambda \neq \Lambda^q$; cf. prop.6 ii)), on associe deux fonctions v_1 et v_2 de $\underset{\sim}{\mathbb{L}}$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$v_1(\ell) = v(c,1;1) \qquad (c \in \ell \in \underset{\sim}{\mathbb{L}})$$
$$v_2(\ell) = v(1,c;1) \qquad (c \in \ell \in \underset{\sim}{\mathbb{L}})$$

Nous factorisons aussi par $\underset{\sim}{\mathbb{L}}$ tout caractère Φ de $K^{\times}$ trivial sur $k^{\times}$, en posant

$$\Phi(\ell) = \Phi(c) \qquad (c \in \ell \in \underset{\sim}{\mathbb{L}}).$$

Nous notons enfin $\ell(c)$ la k-droite de $K^{\times}$ passant par $c \in K^{\times}$.

PROPOSITION 15.- Soit $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^{\times})$, $\Lambda \neq \Lambda^q$. Si $\xi \in \tilde{E}$ a le même stabilisateur, dans H, que $(1,x_c,e)$ (où $c \in K^{\times}-k^{\times}$), alors on a

i) $W^+[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi)$ est l'image par $\pi(h_c)$ (cf. prop.6 ii)) du sous-espace de $V^{pr}_{\Lambda,\Lambda^q}$ formé des fonctions $v \in V^{pr}_{\Lambda,\Lambda^q}$ telles que

$$v(1,0;1) = \sum_{\underset{\sim}{\mathbb{L}}} v_2 \quad \text{et} \quad v(0,1;1) = \sum_{\underset{\sim}{\mathbb{L}}} v_1 \ ;$$

en particulier

$$\dim W^+[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi) = q+1 \ .$$

ii) $W^-[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi)$ est l'image par $\pi_{\Lambda,\Lambda^q}(h_c)$ du sous-espace de $V^{pr}_{\Lambda,\Lambda^q}$ formé des fonctions $v \in V^{pr}_{\Lambda,\Lambda^q}$ telles que :

a) $v(1,0;1) = -\frac{q-1}{q+1} \sum_{\underset{\sim}{\mathbb{L}}} v_2$,

b) $v(0,1;1) = -\frac{q-1}{q+1} \sum_{\underset{\sim}{\mathbb{L}}} v_1$,

c) $v_2 = \lambda_v + \mu_v \Lambda^{1-q}$

où $\lambda_v, \mu_v \in \mathbb{C}$.

En particulier

$$\dim W^-[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](\xi) = 2 \ .$$

Démonstration : Nous calculons $\Delta v = (F^* \circ S)v$ pour $v \in V^{pr}_{\Lambda,\Lambda^q}$. On a, pour $c \in K^{\times}$ (cf. ch.I, §1, n°2, prop.6)

$$(Sv)(1,c;1) = \Lambda(-1)q^{-1} \sum_{a\in K} v(a,ac-1;1)$$
$$= \Lambda(-1)q^{-1}[v(0,1;1) + \sum_{d\in K^\times} \Lambda^{q-1}(d)v(1,c-d;1)] .$$

Notons A_c la somme dans le membre de droite. On a alors

$$A_c = \Lambda^{q-1}(c)v(1,0;1) + (q-2)\Lambda^{q-1}(c)v_2(\ell(c)) + \sum_{\substack{\ell\in \underset{w}{L} \\ \ell\neq\ell(c)}} \Lambda^{q-1}(\ell) \sum_{\substack{\ell'\in \underset{w}{L} \\ \ell'\neq\ell,\ell(c)}} v_2(\ell')$$
$$= \Lambda^{q-1}(c)v(1,0;1) + qv_1(\ell(c)^q) - \Lambda^{q-1}(c) \sum_{\ell\in \underset{w}{L}} v_2(\ell) - \sum_{\ell\in \underset{w}{L}} v_1(\ell^q)$$

d'où

$$(Sv)(1,c,1) = \Lambda(-1)[v(c^q,1,1) + q^{-1}(v(0,1;1) - \sum_{\ell\in \underset{w}{L}} v_1(\ell))$$
$$+ \Lambda^{q-1}(c)q^{-1}(v(1,0;1) - \sum_{\ell\in \underset{w}{L}} v_2(\ell))] .$$

D'autre part, toujours pour $c\in K^\times$, on a en posant $w' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$[\pi(a_o w')v](1,c;1) = v(a_o(c,-1);a_o^{-2}) = \Lambda(-1)v(c,1;1) \qquad (N(a_o) = -1).$$

Comme $\Delta = F^* \circ S$, nous trouvons ainsi que la condition

$$[\pi(a_o w')(v)](1,c;1) = \pm(\Delta v)(1,c;1) \qquad (c\in K^\times)$$

équivaut à la condition

$$(20) \quad \pm v_1(\ell) = v_1(\ell) + q^{-1}[v(0,1;1) - \sum_{\underset{w}{L}} v_1] + \Lambda^{1-q}(\ell)q^{-1}[v(1,0;1) - \sum_{\underset{w}{L}} v_2]$$

pour tout $\ell\in \underset{w}{L}$.

De manière analogue, on a, pour $v\in V^{pr}_{\Lambda,\Lambda^q}$,

$$(Sv)(1,0;1) = \Lambda(-1)q^{-1} \sum_{a\in K} v(a,-1;1)$$
$$= \Lambda(-1)q^{-1}[v(0,1;1) + (q-1) \sum_{\ell\in \underset{w}{L}} v_1(\ell)]$$

et

$$(Sv)(0,1;1) = \Lambda(-1)q^{-1}[v(1,0;1) + (q-1) \sum_{\ell\in \underset{w}{L}} v_2(\ell)] .$$

Comme

$$[\pi(a_o w')v](1,0;1) = \Lambda(-1)v(0,1;1) ,$$
$$[\pi(a_o w')v](0,1;1) = \Lambda(-1)v(1,0,1) ,$$

nous voyons que, pour $v\in V^{pr}_{\Lambda,\Lambda^q}$, la condition

$$[\pi(a_o w')(v)](x) = \pm(\Delta v)(x)$$

pour $x=(1,0;1)$ (resp. $x=(0,1;1)$) équivaut à la condition

(21) $$\pm q v(0,1;1) = v(0,1;1) + (q-1) \sum_{\underset{\sim}{L}} v_1$$

(resp.

(22) $$\pm q v(1,0;1) = v(1,0;1) + (q-1) \sum_{\underset{\sim}{L}} v_2 \ ).$$

L'assertion i) est alors immédiate et l'assertion ii) découle aussitôt du fait que (si l'on choisit partout le signe $-$) (20) est équivalente, en présence de (21) et (22) à l'équation suivante

(23) $$v_1 = m(v_1) + \Lambda^{1-q}.m(v_2)$$

où l'on note $m(v_i)$ la moyenne, sur $\underset{\sim}{L}$, de v_i $(i=1,2)$, équation qui équivaut à son tour à

$$v_2 = m(v_2) + \Lambda^{1-q}.m(v_1).$$

C.Q.F.D.

Nous avons indiqué les dimensions des espaces $W^-[\pi](\xi)$, dans les cas non-triviaux, dans la table 1 (sous-colonnes à en-tête $\Lambda = \Lambda^q$ et $\Phi = \Lambda^q$).

9.- <u>Les dimensions des espaces</u> $W[\pi]$ <u>et</u> $W^{\pm}[\pi]$.

A l'aide des résultats des numéros précédents nous pouvons déterminer aisément les dimensions des espaces $W[\pi]$, $W^{\pm}[\pi]$, pour toutes les représentations irréductibles π de H triviales sur U .

LEMME 4.- <u>Soit</u> π <u>une représentation de</u> H <u>triviale sur</u> U . <u>Posons</u>

$$n(\xi) = \dim W[\pi](\xi) \qquad (\xi \in \tilde{E}),$$
$$n^{\pm}(\xi) = \dim W^{\pm}[\pi](\xi) \qquad (\xi \in \tilde{E}).$$

<u>Alors on a</u>

$$\dim W(\pi) = (q^2-1)n(1,0,e) + (q^2-1)n(1,x_1,e) + \tfrac{1}{2}q(q^2-1)n(\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1),e) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}q(q-1)^2 n(1,x_c,e) + (q+1)n(\underline{d}(1,0),0,e) + n(0,0,e) \ ,$$

<u>où</u> c <u>désigne un élément quelconque de</u> $K^\times - k^\times$ (formule analogue pour $W^-[\pi]$).

Démonstration : Il suffit de compter pour chaque H-représentant apparaissant dans la formule du lemme, combien de H-représentants il y a dans la table 1 qui ont même stabilisateur, à conjugaison près.

C.Q.F.D.

La table 4 qui donne les dimensions des différents espaces $W[\pi]$, $W^{\pm}[\pi]$ résulte aussitôt du lemme 4 et de la table 1.

§3. L'entrelacement des représentations $W[\pi]$ ($\pi \not\simeq \pi\circ F$).

1.- Préliminaires.

Dans ce paragraphe, nous désignons par (V,π) une représentation irréductible de H, triviale sur les matrices scalaires à rapport dans $U(= N^{-1}(1) \subset K^{\times})$. Nous considérons l'induite $(\tilde{V},\tilde{\pi})$ de (V,π) à $\Gamma = GO(Q)$ (cf. ch.III, §3, n°4, prop.3, avec $\Gamma' = H$, $T = F$). Nous avons dans notre cas (§1, n°1, prop.2)

$$\pi^F = \pi\circ F$$

en notant encore F l'extension de l'automorphisme de Frobenius $c \mapsto c^q$ de K à $H = GL(2,K)$. Nous écrirons d'ailleurs aussi $F(h) = \bar{h}$ $(h \in H)$.

Nous donnons tout d'abord quelques résultats plus précis, dans notre cas de rang 4 et d'indice de Witt 1, concernant les opérateurs $S^{\tilde{\pi}}(x,y;\gamma)$ $(x,y \in M, \gamma \in \Gamma)$ introduits de manière générale au chapitre III (§3, n°2, déf.6). Dans la suite nous écrivons simplement S à la place de $S^{\tilde{\pi}}$.

LEMME 1.- Pour $x,y \in M = E^2$, $\gamma \in \Gamma$, on pose

$$n_{x,y}(\gamma) = |\{(\gamma',\gamma'') \in \Gamma_x \times \Gamma_y \mid \gamma'\gamma\gamma'' = \gamma\}| \ ;$$

on note $E(x)$ le sous-espace de E engendré par le couple de vecteurs $x \in M$.

Alors on a

$$(*) \qquad S(x,y;\gamma) = n_{x,y}(\gamma)^{-1} s_x \tilde{\pi}(\gamma) s_y \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

si $\Gamma' = \Gamma$ et si l'une des hypothèses suivantes est satisfaite :

i) le sous-espace quadratique $(E(x),Q)$ de (E,Q) est un plan non-dégénéré déployé et $y \in M$ est quelconque ;

ii) $(E(x),Q)$ est un plan non-dégénéré, non-déployé ou une droite non-singulière et $(E(y),Q)$ est une droite singulière.

Démonstration : Supposons vérifiée la condition i). Soit $\gamma \in \Gamma$. Si $E(x) \cap E(\gamma.y) = \underline{0}$ la relation $(*)$ est claire (ch.III, § 3, n° 2, lemme 3 et rem. 2 au lemme 3). Supposons $\dim(E(x) \cap E(\gamma.y)) = 1$. Si $\dim(E(x) \cap E(\gamma.y)) = 1$, on peut supposer $\gamma.y_1 \in E(x)$ (ch.III, §3, n°2, rem.2 au lemme 3) et donc $E(x) \cap E(\gamma.y_2) = \underline{0}$ si $E(x) \not\supset E(\gamma.y)$. En vertu du théorème de Witt la somme $S(x,y;\gamma)$ porte alors sur les $\gamma' \in \Gamma$ de la forme $\gamma' = \gamma_o \gamma \gamma_2$ pour $\gamma_o \in \mathrm{Stab}_{O(Q)} x$, $\gamma_2 \in \mathrm{Stab}_{O(Q)} y_2$, tels que

$$B(x_i, \gamma'.y_1) = B(x_i, \gamma.y_1) \qquad ((x_1,x_2)=x);$$

mais cette dernière relation entraîne

$$\gamma'.y_1 = \gamma_o \gamma.y_1 + v$$

avec $v \in E(x)^{\perp}$. Il s'ensuit que $Q(v) = 0$ (puisque $\gamma.y_1 \in E(x)$ et que l'on doit avoir $Q(\gamma'.y_1) = Q(\gamma.y_1)$) et donc $v = 0$, car $(E(x)^{\perp},Q)$ est un plan non-dégénéré, non-déployé. On en conclut que γ_2 fixe aussi y_1 , d'où la relation $(*)$ dans ce cas. Considérons enfin le cas $E(\gamma.y) \subset E(x)$. La somme $S(x,y;\gamma)$ porte alors sur les $\gamma' \in \Gamma$ tels que $m_{\gamma'} = m_{\gamma}$ et que

$$\gamma'.y_i = \gamma.y_i + v_i \qquad (i = 1,2)$$

pour $v_i \in E(x)^{\perp}$. On doit alors avoir de plus $Q(v_i) = 0$ à cause de la relation $Q(\gamma'.y_i) = Q(\gamma.y_i)$, et donc $v_i = 0$ $(i = 1,2)$, ce qui démontre

$(*)$ dans ce cas.

Si ii) est vérifiée, alors, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $E(x) \cap E(\gamma.y) = \underline{0}$ et la relation $(*)$ est donc immédiate (ch.III, §3, n°2, lemme 3).

C.Q.F.D.

LEMME 2.- Gardons les notations du lemme 1 et posons $\Gamma' = H$. Alors on a encore $(*)$ pour $x = (x_1 - 1, 1)$, $y = (0, \underline{d}(1,0))$ (cf. table 1) et $h \in H$ tel que $h_{11} h_{21} = 0$.

Cela est immédiat.

2.- L'entrelacement des représentations $W[\pi]$ $(\pi \not\simeq \pi\circ F)$.

THEOREME 1.- Soit π une représentation irréductible de H (triviale sur les matrices scalaires à rapport dans U) telle que $\pi \not\simeq \pi\circ F$. Alors

i) la représentation $(W[\pi], \rho)$ de G est irréductible;

ii) la représentation $(W[\pi], \rho)$ ne s'entrelace avec $(W[\pi'], \rho)$ pour une autre représentation irréductible π' de H, telle que $\pi' \neq \pi'\circ F$, que si $\pi' \simeq \pi$ ou $\pi' \simeq \pi\circ F$, cas où ces représentations sont (trivialement) isomorphes.

Démonstration : Les hypothèses $\pi \not\simeq \pi\circ F$ et $\pi' \not\simeq \pi'\circ F$ signifient que $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ sont irréductibles. Nous démontrons le théorème pour $W[\tilde{\pi}]$ et $W[\tilde{\pi}']$ (ch.III, §3, n°4, prop.3). Prouvons i). En vertu du lemme 4 du numéro 2 du paragraphe 3 du chapitre III, il suffit de prouver que si φ est une fonction de $\tilde{M}$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\tilde{V})$ vérifiant les conditions i) à iv) de ce lemme, alors $\varphi(x)$ est une homothétie (de $\tilde{V}_x$), pour x parcourant un système de $H \times G_0$-représentants de M. Mais cela est immédiat d'après le lemme et sa remarque (cf. table 3) pour $\pi \neq \pi_\Lambda^1$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$, $\Lambda^2 = \Lambda^{2q}$, $\Lambda \neq \Lambda^q)$. Si $\pi = \pi_\Lambda^1$ cela est cependant trivial puisque $\mathrm{Supp}\, W[\tilde{\pi}_\Lambda^1]$ $(= \mathrm{Supp}\, W[\pi_\Lambda^1])$ est réduit à une seule $\Gamma \times (G_0 \times k^\times)$-orbite, celle de $\xi = (1, \underline{a}(0,1), e)$ et que $\dim \tilde{V}_\xi = 1$.

Pour prouver ii), compte tenu de i), il suffit (ch.III, § , n° , lemme) de prouver que si φ est une fonction de $\widetilde{M}$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\widetilde{V},\widetilde{V}')$ vérifiant les conditions i) à iv) dudit lemme et telle que $\varphi(x)$ soit un isomorphisme (de $\widetilde{V}_x$ sur $\widetilde{V}'_x$) pour tout $x \in M$, alors $(\widetilde{V},\widetilde{\pi}) \simeq (\widetilde{V}',\widetilde{\pi}')$ (c'est-à-dire $\pi' \simeq \pi$ ou $\pi' \simeq \pi \circ F$). Mais d'après la condition iv), en vertu du lemme i) on a, pour $x = (\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1))$

$$(1) \qquad \varphi(x)\widetilde{\pi}(\gamma)P_x^{\widetilde{\pi}} = P_x^{\widetilde{\pi}'}\widetilde{\pi}'(\gamma)\varphi(x) \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

Mais il résulte de (1) que le Γ-morphisme $\bar{\varphi}$ de $\widetilde{V}$ dans $\widetilde{V}'$ défini par

$$\bar{\varphi} = \sum_{\eta \in O(\xi)} \varphi(\eta)$$

avec $\xi = (x,e)$ et $O(\xi) = \mathrm{Orb}_{\Gamma}(\xi)$, est non-nul si $\dim \pi' > 1$, puisque

$$\bar{\varphi}P_\xi^{\widetilde{\pi}} = |\Gamma_\xi|^{-1}\Big[\sum_{\gamma \in \Gamma} \widetilde{\pi}'(\gamma)P_\xi^{\widetilde{\pi}'}\widetilde{\pi}'(\gamma)^{-1}\Big]\varphi(\xi)$$

et que la somme entre crochets est un endomorphisme de $\widetilde{V}'$ de trace égale à $|\Gamma| \dim \widetilde{V}'_\xi = |\Gamma|(q-1)$. En vertu de l'irréductibilité de $\widetilde{\pi}$ et $\widetilde{\pi}'$ cela achève la démonstration de ii) pour $\dim \pi' > 1$.

Si $\dim \pi' = 1$, alors $W[\pi] \simeq W[\pi']$ entraîne (table 3) $\dim \pi = 1$. On a donc $\pi = \pi^1_\Lambda$, $\pi = \pi^1_{\Lambda'}$, pour $\Lambda, \Lambda' \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$, $\Lambda^2 = \Lambda^{2q}$, $\Lambda'^2 = \Lambda'^{2q}$). Mais dans ce cas la condition v) du lemme 4 du ch.III, §3 n°2, appliquée à $x = (\underline{d}(1,0),\underline{a}(1,1))$, $y = (\underline{d}(0,1),\underline{a}(\bar{c},c))$ (pour un $c \in K^\times - k^\times$) et $\gamma = \underline{d}(a,1) \in H$ $(a \in K^\times)$ entraîne aussitôt

$$\Lambda(a) = \Lambda'(a) \qquad (a \in K^\times),$$

d'où ii) dans ce cas.

C.Q.F.D.

3.- <u>L'entrelacement des représentations</u> $W^-[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}]$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$.

THEOREME 2.- i) <u>Les représentations</u> $W^-[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}]$ <u>sont irréductibles pour tout</u> $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$.

ii) <u>On a</u>

$$W^{-}[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}] \neq W^{-}[\pi^{q^2}_{\beta\circ N}]$$

si $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$.

Démonstration : Ecrivons $\pi_{\alpha} = \pi^{q^2}_{\alpha\circ N}$, pour tout $\alpha \in \mathrm{Car}(k^{\times})$. Notons V l'espace commun des représentations π_{α} réalisées par leur modèle naturel (ch.I, §1, n°3). Nous démontrons le théorème pour les représentations $W[\tilde{\pi}^{-}_{\alpha}]$ (cf. ch.III, §3, n°4, prop.3).

Soit Φ un opérateur d'entrelacement de $W[\tilde{\pi}^{-}_{\alpha}]$ dans $W[\tilde{\pi}^{-}_{\beta}]$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$. Comme la sous-représentation $W[\tilde{\pi}^{-}_{\alpha},]$ de $W[\tilde{\pi}_{\alpha},]$ est pleine et que $\mathrm{Supp}\ W[\tilde{\pi}^{-}_{\alpha},]$ $(= \mathrm{Supp}\ W^{-}[\pi_{\alpha},])$ est non-dégénéré, pour tout $\alpha' \in \mathrm{Car}(k^{\times})$, on a (ch.III, §3, n°2, lemme 4)

$$(\Phi f)(\xi) = [\varphi(\xi)](f(\xi)) \qquad (f \in W[\tilde{\pi}^{-}_{\alpha}],\ \xi \in \tilde{M})$$

pour une fonction φ de $\tilde{M}$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\tilde{V})$ telle que
$\mathrm{Supp}\ \varphi = \mathrm{pr}_1(\mathrm{Supp}\ \Phi) \cap \mathrm{pr}_2(\mathrm{Supp}\ \Phi)$ et que

a) $\varphi(\xi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W[\tilde{\pi}^{-}_{\alpha}](\xi), W[\tilde{\pi}^{-}_{\beta}](\xi))$ $\qquad (\xi \in \tilde{M})$

b) $\varphi(\gamma.\xi) = \tilde{\pi}^{-}_{\beta}(\gamma\gamma_o)\varphi(\xi)\tilde{\pi}^{-}_{\alpha}(\gamma\gamma_o)^{-1}$ $\qquad (\gamma \in \Gamma,\ \gamma_o \in \Gamma_{\xi},\ \xi \in \tilde{M})$

c) $\varphi(xa, \psi') = \varphi(x, \psi)$ $\qquad (x \in M,\ a \in A^{\times},\ \psi, \psi' \in X)$

d) $\varphi(x)\ S^{\tilde{\pi}_{\alpha}}(x,y;\gamma) = S^{\tilde{\pi}_{\beta}}(x,y;\gamma)\varphi(y)$ $\qquad (x,y \in M,\ \gamma \in \Gamma)$.

Comme $\mathrm{Supp}\ W[\tilde{\pi}^{-}_{\alpha},]$ est réduit à une seule $\Gamma \times (A^{\times} \times k^{\times})$-orbite et que $\dim W^{-}[\pi_{\alpha},](\xi) = 1$ pour $\xi \in \mathrm{Supp}\ W^{-}[\pi_{\alpha},]$, quel que soit $\alpha' \in \mathrm{Car}(k^{\times})$ (cf. table 3), l'assertion i) est alors immédiate. Pour démontrer ii), il suffit d'appliquer d) à (cf. table 3 et §1, n°5, déf.7)

$$x = (1, x_c)\ ,\ y = (\underline{a}(1,1), \underline{a}(c^q, c))\ ,\ \gamma = \underline{d}(a,1) \in H$$

pour un $c \in K^{\times} - k^{\times}$, tel que $\mathrm{Tr}c \neq 0$, et tout $a \in K^{\times}$. Comme $x \equiv y$ modulo Γ et que $E(x) \cap E(\gamma.y) = \underline{0}$, on en tire d'après le lemme 3 du ch.III, §3, n°2, que

$$\Lambda(a) = \Lambda'(a) \qquad (a \in K^{\times})$$

si $\varphi(x) \neq 0$, c'est-à-dire si $\Phi \neq 0$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 1.- <u>La représentation</u> $W^-[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}]$ <u>est dans la série discrète de</u> G <u>pour tout</u> $\alpha \in Car(k^\times)$.

<u>Démonstration</u> : L'assertion résulte du fait que $W^-[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}]$ n'admet même pas de vecteurs invariants non-nuls par le sous-groupe U_1 de G formé des $\underline{u}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(r \in k^+)$, ce qui est clair puisque

$$\rho(\underline{u}\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})f(1,x_c;\psi) = \psi(r)f(1,x_c;\psi)$$

quels que soient $r \in k^+$, $c \in K^\times - k^\times$, $\psi \in X$ et $f \in W^-[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}]$, et que

$$\mathrm{Supp}\ W^-[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}] = \bigcup_{\substack{\psi \in X \\ c \in K^\times - k^\times}} \mathrm{Orb}_H(1,x_c;\psi) .$$

C.Q.F.D.

REMARQUE.- Il est déjà clair, à cause de leur dimension commune $\frac{1}{2}q(q-1)^2$, que la restriction de la représentation $W^-[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}]$ $(\alpha \in Car(k^\times))$ à $Sp(4,k)$ a comme caractère le caractère θ_{10} de la table de SRINIVASAN [16] .

§4. <u>Identification des</u> $W[\pi]$ <u>n'appartenant pas à la série discrète</u>.

1.- <u>Identification des représentations</u> $W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$ $(\Lambda \neq \Lambda^q \neq \Phi)$.

Rappelons que Λ et Φ désignent deux caractères distincts de $K^\times$ tels que $\Lambda\Phi = \Lambda^q\Phi^q$. On sait déjà (cf. §2, n°2, prop.3) que si $\Lambda \neq \Lambda^q$ (donc aussi $\Phi \neq \Phi^q$) et si $\Phi \neq \Lambda^q$ alors $\pi_{\Lambda,\Phi} \not\simeq \pi_{\Lambda,\Phi}\circ F$ (et réciproquement), d'où l'irréductibilité de $W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$ (§3, n°2, th.1). Nous montrons maintenant que les représentations $W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$ forment la série de représentations de G associée au sous-groupe parabolique P_1 (cf. ch.II, §4). Nous affecterons nos représentations d'un indice supérieur égal à leur dimension s'il y a risque d'ambiguïté.

Nous considérons dans ce numéro le cas où $\Lambda \neq \Lambda^q$, $\Phi \neq \Phi^q$ et $\{\Lambda,\Lambda^q\} \cap \{\Phi,\Phi^q\} = \emptyset$.

PROPOSITION 1.- Pour $\Lambda,\Phi \in \mathrm{Car}(K^\times)$ tels que $\Lambda\Phi = \Lambda^q\Phi^q$ et $\Lambda^q \neq \Lambda \neq \Phi \neq \Lambda^q$ on a (cf. ch.II, n°4)

$$(W[\pi^{q^2+1}_{\Lambda,\Phi}],\rho) \simeq (V(\Lambda\Phi^{-q},\pi^{q-1}_{\Phi}),\tau)$$

(où l'on écrit, suivant nos conventions, $\Lambda\Phi^{-q}$ à la place de $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ tel que $\Lambda\Phi^{-q} = \alpha\circ N$).

Démonstration : Comme $V(\Lambda\Phi^{-q},\pi^{q-1}_{\Phi}) = \mathrm{Ind}_{P_1\uparrow G}\,[(\alpha\otimes\pi^{q-1}_{\Phi})\circ\varphi_1]$ et que cette représentation est irréductible, dans le cas où nous nous sommes placés, il suffit d'exhiber un P_1-morphisme non-nul de $\alpha\otimes\pi^{q-1}_{\Phi}$ dans $W[\pi^{q^2+1}_{\Lambda,\Phi}]$; ce que nous faisons maintenant.

Posons $x^o = (x_1-1,1)$ (cf. table 1) et notons v_∞ le vecteur dans $\pi_{\Lambda,\Phi}(h_1)^{-1}.\ W[\pi_{\Lambda,\Phi}](x^o) \subset V_{\Lambda,\Phi}$ (cf. §2, n°3, prop.7 ; on prend le modèle naturel de $\pi^{q^2+1}_{\Lambda,\Phi}$) défini par les conditions

$$\mathrm{Supp}\ v_\infty = (\underline{0}\times K)\times K^\times\ ,\quad v_\infty(0,1;1) = 1\ . \tag{1}$$

Considérons le modèle de Weil réduit de $(V^{q-1}_{\Phi},\pi^{q-1}_{\Phi})$ (cf. ch.I, §4, n°4) ; on a alors $V^{q-1}_{\Phi} = \mathbb{C}^X$. A toute $f \in V^{q-1}_{\Phi}$ associons $f' \in W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$ définie par

$$\mathrm{pr}_1(\mathrm{Supp}\ f') \subset \mathrm{Orb}_H(x_o) \tag{2}$$

$$f'(x^o,\psi) = f(\psi)\pi_{\Lambda,\Phi}(h_1)v_\infty \qquad\qquad (h_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ a_o & 0\end{pmatrix}) \tag{3}$$

où $a_o \in K^\times$, $N(a_o) = -1$, fixé.

Il est immédiat que l'on a

$$\rho(g)f' = f' \qquad\qquad (f \in V^{q-1}_{\Phi})$$

pour tout g appartenant au radical unipotent $U_1 = \mathrm{Ker}\ \varphi_1$ de P_1 . Soit $g \in P_1$. Si $g = \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{*-1}\end{pmatrix}$ avec $a = \begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $(t \in k^\times)$, alors $\varphi_1(g) = (t,1)$ et il résulte de la relation

(4) $$(x_1-1,1)\begin{pmatrix} t & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \left[h_1\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a^{-q}\end{pmatrix}h_1^{-1}\right].(x_1-1,1)$$

(avec a et b dans K tels que $t = N(a) = Tr(a^q b)+1$), que l'on a

$$\rho(g)f' = \Lambda\Phi^{-q}(a)f' = \alpha(t)f' \qquad (f \in V_\Phi^{q-1}).$$

Si $g = \underline{u}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & r\end{pmatrix}$ $(r \in k^+)$, alors $\varphi_1(g) = (1,\begin{pmatrix} 1 & r\\ 0 & 1\end{pmatrix})$ et on trouve aussitôt

$$[\rho(g)f'](x^o,\psi) = \psi(r)f'(x^o,\psi) \qquad (f \in V_\Phi^{q-1}, \psi \in X).$$

Si $g = \underline{h}'(t)$ $(t \in k^\times)$, alors $\varphi_1(g) = (1,\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & t\end{pmatrix})$ et, par définition

$$[\rho(g)f'](x^o,\psi) = f'(x^o,\psi^t) \qquad (\psi \in X).$$

Si $g = \underline{h}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}\underline{h}'(t^2)$ $(t \in k^\times)$, alors $\varphi_1(g) = (1,t) \in k^\times \times GL(2,k)$ et l'on a

$$\rho(g)f' = \Lambda^{-1}\Phi^q(c)\pi_{\Lambda,\Phi}\begin{pmatrix} c & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}f' = \Phi(t)f' \qquad (f \in V_\Phi^{q-1}, c \in K^\times, N(c) = t).$$

Pour terminer, il ne reste alors qu'à démontrer que l'action d'un $g \in P_1$ tel que $\varphi_1(g) = (1,w_o)$ (avec $w_o = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \in GL(2,k)$) sur les f' $(f \in V_\Phi^{q-1})$ est celle donnée par la formule décrivant l'action de w dans le modèle de Weil réduit de π_Φ^{q-1}.

Or, pour $\underline{w}_2 = \underline{u}(1)\underline{w}^{-1}\underline{u}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\underline{w}\,\underline{u}\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, nous avons $\varphi_1(\underline{w}_2) = (1,w_o)$ et l'on calcule sans difficulté (ch.III, §2, n°3), en posant $H_o = Stab_H(x^o)$, et $\pi_{\Lambda,\Phi}^{q^2+1} = \pi$,

$$[\rho(\underline{w}_2)f'](x,\psi) = -q^{-2}|H_o|^{-1}\sum_{\substack{m_h=1\\ h.x_1^o=x_1}} \psi(B(x_2,h.x_2^o))f(\psi)\pi(h)\pi(h_1)v_\infty$$

pour $f \in V_\Phi^{q-1}$, $x \in E^2$, $t \in k^\times$. On voit donc que $[\rho(\underline{w}_2)f'](x,\psi) = 0$ sauf peut-être si $x = (\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix})$ ou $x = (\begin{pmatrix} s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},1)$ $(s \in k^\times)$ ou $x = x^o$.
Dans les deux premiers cas, on trouve, avec $x_1 = s\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $(s \in k^\times)$,

$$[\rho(\underline{w}_2)f'](x,\psi) = -q^{-2}|H_o|^{-1}\sum_{\substack{u\in U\\ b\in K^+\\ d\in K^\times, N(d)=s^{-1}}} \psi^{ts}(b^q-u^q)\Phi(a_s^2ud)f(\psi)\pi(h_1)v_\infty = 0$$

où l'on note a_s un élément fixé de $K^\times$ tel que $N(a_s) = s$ (on prend

$a_1 = 1$). Enfin, on a

$$[\rho(\underline{w}_2)f'](x^o,\psi) = -q^{-2}|H_o|^{-1}(q+1) \sum_{\substack{b\in K^+\\ N(d)=1}} \psi(\mathrm{Trd})\Phi(d)f(\psi)\pi\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & d\end{pmatrix}\pi(h_1)v_\infty$$

$$= -q^{-1}\Big[\sum_{N(d)=1} \psi(\mathrm{Trd})\Phi(d)\Big]f(\psi)\pi(h_1)v_\infty$$

d'où

$$[\rho(\underline{w}_2)f'](x,\psi) = -q^{-1}\Big[\sum_{\substack{d\in K^\times\\ N(d)=1}} \psi(\mathrm{Trd})\Phi(d)\Big]f'(x,\psi) \qquad (x\in E^2, \psi\in X)$$

comme voulu.

C.Q.F.D.

REMARQUE.- Si on cherche $f_o \in W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$ invariante par le radical unipotent U_1 de P_1, on trouve aussitôt

$$f_o = f'_1 + f'_2$$

avec $f_1, f_2 \in V_\Phi^{q-1} = \mathbb{C}^X$, $\mathrm{Supp}\, f'_i = \mathrm{Orb}_H(x^o) \times \mathrm{Supp}\, f_i$ $(i=1,2)$ $f'_i \in W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$ et

$$f'_1(x^o,\psi) = f_1(\psi)\pi(h_1)v_\infty$$

$$f'_2(x^o,\psi) = f_2(\psi)\pi(h_1)v_o$$

où $v_o \in V_{\Lambda,\Phi}$ est défini par les conditions

$$v_o(0,1;1) = 0 \;,\; v(1,b;1) = 1 \qquad (b\in K^+).$$

On vérifie de même que ci-dessus que l'application $f_2 \mapsto f'_2$ de $\mathbb{C}^X$ dans $W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$ est un P_1-isomorphisme de $(\mathbb{C}^X, \alpha^{-1}\otimes\pi_\Lambda^{q-1})$ dans $W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$. Dans le cas dégénéré que nous considérons dans le prochain numéro, nous aurons $\alpha = \alpha^{-1}$ et $\pi_\Phi^{q-1} = \pi_\Lambda^{q-1}$ et nous obtiendrons ainsi deux H-monomorphismes linéairement indépendants de $\alpha\otimes\pi_\Lambda^{q-1}$ dans $W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$.

2.- <u>Identification des représentations</u> $W^{\pm}[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}]$ $(\Lambda \neq \Lambda^q)$.

PROPOSITION 2.- <u>Soit</u> $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$ <u>tel que</u> $\Lambda \neq \Lambda^q$. <u>On a</u>

$$(W^+[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}],\rho) \simeq (V(1,\pi_\Lambda^{q-1}),\tau),$$
$$(W^-[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}],\rho) \simeq (V(1,\pi_\Lambda^{q-1})^1,\tau).$$

<u>Démonstration</u> : Considérons le modèle de Weil réduit de π_Λ^{q-1}. On a alors $V_\Lambda^{q-1} = \mathbb{C}^X$. Nous définissons trois P_1-monomorphismes linéairement indépendants j_o, j_∞ et j_{-1} de $(V_\Lambda^{q-1}, 1\otimes\pi_\Lambda^{q-1})$ dans $W[\pi^{q^2+1}_{\Lambda,\Lambda^q}]$ comme suit.

Soit $v_\infty \in V_{\Lambda,\Lambda^q}$ défini par les conditions

$$\operatorname{Supp} v_\infty = (\underline{O}\times K)\times K^X \ , \ v_\infty(0,1;1) = 1 \ .$$

Désignons par v_o le vecteur dans V_{Λ,Λ^q} tel que

$$v_o(0,1;1) = 0 \ , \ v_o(1,b;1) = 1 \qquad (b\in K^+).$$

Soit $v_{-1} \in V_{\Lambda,\Lambda^q}$ défini par les conditions

$$v_{-1}(a,b;c) = 0 \qquad \text{si } N(a)+N(b) \neq 0 \quad (a,b\in K\ ,\ c\in K^X)$$

$$v_{-1}(1,ua_o;1) = \Lambda(u) \qquad (u\in U)$$

où $a_o \in K^X$ est fixé, tel que $N(a_o) = -1$.

Soit $f\in\mathbb{C}^X$. On définit $j_i(f)$ $(i = 0,\infty,-1)$ par

$$\operatorname{Supp} j_i(f) = \operatorname{Orb}_H(x_1-1,1)\times \operatorname{Supp} f \qquad (i=0,\infty)$$

$$\operatorname{Supp} j_{-1}(f) = \operatorname{Orb}_H(0,1)\times\operatorname{Supp} f$$

et

$$[j_i(f)](x_1-1,1,\psi) = f(\psi)\pi(h_1)v_i \qquad (i=0,\infty)$$

$$[j_{-1}(f)](0,1,\psi) = f(\psi)v_{-1} \ .$$

Il est immédiat que $\rho(g)j_i(f) = j_i(f)$ $(i = 0,\infty,-1\ ;\ f\in\mathbb{C}^X)$ pour tout $g\in U_1$. On vérifie sans difficulté, comme dans la démonstration de la proposition 1 que j_1 et j_2 sont des P_1-morphismes. Il est trivial que j_{-1} entrelace les opérateurs $(1\otimes\pi_\Lambda^{q-1})(\varphi_1(g))$ et $\rho(g)$ pour $g\in P_1$ tel que $\varphi_1(g) = (t,h)$ pour $t\in k^X$ et $h = \begin{pmatrix}1&s\\0&1\end{pmatrix}$ $(s\in K^+)$,

$h = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ $(r \in k^\times)$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ $(t \in k^\times)$. En ce qui concerne l'action de $w_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $(1,w_o) = \varphi_1(\underline{u}(1)\underline{w}^{-1}\underline{u}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\underline{w}\ \underline{u}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}))$, d'où, par un calcul facile, on obtient, pour tout $x \in E^2$, $\psi \in X$, $f \in \mathbb{C}^X$, avec $\pi_{\Lambda,\Lambda^q} = \pi$,

$$[\rho(\underline{w}_2)j_{-1}f](x,\psi) = -q^{-2}|U(2,K)|^{-1}\delta_{x_1,o} \sum_{\substack{h\in H \\ m_h=1}} \psi(B(x_2,hh^*))f(\psi)\pi(h)v_{-1} \ ;$$

par suite $[\rho(\underline{w}_2)f](x,\psi) = 0$ si $x \notin \mathrm{Orb}_H(0,1)$. Enfin posons $\lambda = \{[\rho(\underline{w}_2)j_{-1}f](0,1,\psi)\}(1,a_o,1)$; alors

$$\lambda = -\frac{q^{-2}}{|U(2,K)|} \Sigma\ \psi(N(a)+N(b)+N(c)+N(d))\Lambda^{1-q}(a+a_oc)\Lambda^q(ad-bc)\Lambda(u)f(\psi)$$

où la sommation s'étend à tous les $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$ tels que $a+a_oc \neq 0$, $b+a_od = ua_o(a+a_oc)$ et $N(ad-bc) = 1$. Il en résulte aussitôt, puisque $\dim\ W[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}](0,1,\psi) = 1$, que

$$[\rho(\underline{w}_2)j_{-1}f](0,1,\psi) = -q^{-1} \sum_{\substack{a_1\in K^\times \\ N(a_1)=1}} \psi(\mathrm{Tr}a_1)\Lambda(a_1)(j_{-1}f)(0,1,\psi)$$

quels que soient $\psi \in X$ et $f \in \mathbb{C}^X$, comme voulu.

Les deux isomorphismes de la proposition résultent alors du fait que la représentation $V(1,\pi_\Lambda^{q-1})$ est somme directe des deux représentations irréductibles $V(1,\pi_\Lambda^{q-1})^q$ et $V(1,\pi_\Lambda^{q-1})^1$, de dimensions $q(q-1)(q^2+1)$ et $(q-1)(q^2+1)$ respectivement, et que $\dim W^+[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}] = q^4-1$ et $\dim W^-[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}] = (q-1)(q^2+1)$, puisque l'existence de j_o, j_∞ et j_{-1} montre que $\dim \mathrm{Hom}_G(V(1,\pi_\Lambda^{q-1}),W[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}]) \geq 3$.

C.Q.F.D.

3.- <u>Identification des représentations</u> $W[\pi_\Lambda^{q^2}]$ <u>et</u> $W[\pi_\Lambda^1]$ <u>pour</u> $\Lambda^q = \Lambda^*$.

Rappelons que, si $\mathrm{car}\ k \neq 2$, on note Λ_o (resp. α_o) le caractère non-trivial de $K^\times$ (resp. $k^\times$) dont le carré est trivial. On pose, pour $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$, $\Lambda^* = \Lambda_o\Lambda$.

PROPOSITION 3.- Supposons la caractéristique de k différente de 2. Soit $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$ tel que $\Lambda^q = \Lambda^*$. On a alors

$$(W[\pi_\Lambda^{q^2}],\rho) \simeq (V(\alpha_o,\Lambda)^{q^2},\tau),$$

$$(W[\pi_\Lambda^1],\rho) \simeq (V(\alpha_o,\Lambda)^1,\tau).$$

Démonstration : Pour $i = 1, q^2$, on définit un monomorphisme P_1-équivariant j_i de $(\mathbb{C}^X, (\alpha_o \otimes \pi_\Lambda^{q-1})\circ\varphi_1)$ dans $W[\pi_\Lambda^i]$ en posant

$$[j_{q^2}(f)](x_1-1,1,\psi) = f(\psi)\pi(h_1)(q^2v_\infty - v_o)$$

$$[j_1(f)](x_1-1,1,\psi) = f(\psi)\pi(h_1)(v_\infty + v_o)$$

$$\mathrm{Supp}\ j_i(f) = \mathrm{Orb}_H(x_1-1,1)\times \mathrm{Supp}\ f \qquad (i = 1,q^2),$$

pour tout $f \in \mathbb{C}^X$, $\psi \in X$ avec $v_\infty, v_o \in V_{\Lambda,\Lambda}^{q^2+1}$ donnés par

$$v_\infty(0,1;1) = 1\ ,\ \mathrm{Supp}\ v_\infty = (\underline{0}\times K)\times K^\times$$

$$v_o(0,1;1) = 0\ ,\ v_o(1,b;1) = v_o(1,0;1)\ .$$

La vérification se fait sans difficulté, de même que dans la démonstration de la proposition 2 (cf. aussi rem. à la prop.1). Comme nous avons déjà établi l'irréductibilité des représentations $W[\pi_\Lambda^i]$ pour $\Lambda^q \neq \Lambda$ (th.1, §3, n°2) et puisque $V(\alpha_o,\Lambda) = \mathrm{Ind}_{P_1\uparrow G}(\alpha_o\otimes\pi_\Lambda^{q-1})\circ\varphi_1$, la proposition en est une conséquence immédiate.

C.Q.F.D.

4.- Identification de $W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$ et $W[\pi_\Lambda^i]$ pour $\Lambda = \Lambda^q$, $\Phi = \Phi^q$ et $i \in \{1,q^2\}$.

LEMME 1.- Soit (V,π) une représentation irréductible de H. Soit W' un sous-espace plein et G-stable de $W[\pi]$. Soit $f \in W'$, à support réduit à une H-orbite, disons $\mathrm{Orb}_H(x_o,e)$, dans $\tilde{E}$, qui est de rang minimal parmi les Γ'-orbites contenues dans $\mathrm{Supp}\ W'$. Alors la fonction

$$(x,e^t) \mapsto S(x,x_o;t^{-1}c,t^{-1}r).f(x_o,\psi) \qquad (x\in\tilde{E},\ t\in k^\times)$$

<u>appartient au sous-G-module</u> $\rho(\mathbb{C}[G])f$ <u>de</u> W' <u>engendré par</u> f , <u>pour tous les</u> $c \in A$, $r \in k^\times$, $\psi \in X$.

<u>Démonstration</u> : Etendons la définition des opérateurs de Weil $\underline{H}_a$ $(a \in A^\times)$ en posant, pour tout $a \in A^+$

$$(\underline{H}_a f')(x,\psi) = f'(xa,\psi) \qquad (f' \in W[\pi], (x,\psi) \in \widetilde{E}).$$

En général $\underline{H}_a \notin \rho(C[G])$ pour $a \notin A^\times$; néanmoins on a

$$\underline{H}_a \underline{W} f \in \rho(C[G])f \qquad (a \in A^+). \tag{5}$$

En effet, si rang $x_o = 2$ alors Supp $W[\pi]$ est réunion d'orbites non-dégénérées ; comme rang$(x_o a) < 2$ si $a \in A\text{-}A^\times$, on en déduit $\underline{H}_a\underline{W}f = 0$. Si rang $x_o = 1$ et $a \in A\text{-}A^\times$ alors ou bien $x_o a^* = x_o a'^*$ pour $a' \in A^\times$ convenable ou bien $x_o a^* = 0$. Dans le premier cas on a

$$\underline{H}_a\underline{W}f = \underline{H}_{a'}\underline{W}f \in \rho(C[G])f \ .$$

Dans le second cas on a, quel que soit $(x,\psi) \in \widetilde{E}$

$$(\underline{H}_a Wf)(x,e^t) = q^{-4}|\mathrm{Stab}_H(x_o,e)|^{-1} \sum_{\substack{h \in H \\ m_h = t^{-1}}} \underline{e}^t(B(x,h.x_o a^*))\pi(h)f(x_o,\psi)$$

$$= q^{-4}|\mathrm{Stab}(x_o,e)|^{-1} \Big[\sum_{\substack{h \in H \\ m_h = t^{-1}}} \pi(h)\Big] f(x_o,\psi) \ ;$$

mais la somme de droite est nulle à moins que $\pi = \pi^1_{\alpha \circ N}$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$, cas où $x_o = \underline{0}$ (puisque rang x_o doit être minimal) et par suite, à une constante non-nulle près,

$$\underline{H}_a\underline{W}f = \underline{W}f \ .$$

Soient $c \in A$, $r \in k^\times$. Ecrivons

$$\delta_{r^{-1}c} = \sum_{a \in A^+} \lambda_a \underline{e}^a \ ;$$

on trouve alors, quels que soient $x \in E^2$, $t \in k^\times$, à une constante non-nulle près

$$\Big(\sum_{a \in A^+} \lambda_a \underline{H}'_r \underline{H}_a \underline{W} f\Big)(x,e^t) = S(x,x_o;t^{-1}c,t^{-1}r)f(x_o,\psi)$$

d'où le lemme.

C.Q.F.D.

LEMME 2.- <u>Soient</u> $\Lambda, \Phi \in \mathrm{Car}(K^{\times})$ <u>tels que</u> $\Lambda = \Lambda^{q}$ <u>et</u> $\Phi = \Phi^{q}$. <u>Soit</u> $x_o = (0, \underline{d}(1,0)) \in E^2$. <u>Alors le</u> G-<u>module</u> $W^{+}[\pi^{q^2+1}_{\Lambda,\Phi}]$ <u>admet comme générateur la fonction</u> f_∞ <u>à support</u> $\mathrm{Orb}_H(x_o, e)$ <u>telle que</u>

(6) $$f_\infty(0, \underline{d}(1,0), e) = v_\infty$$

<u>où</u> $v_\infty \in V_{\Lambda,\Phi}$ <u>est défini par les conditions</u>

(7) $$\mathrm{Supp}\ v_\infty = (\underline{0} \times K) \times K^{\times} \ , \quad v_\infty(0,1;1) = 1 \ .$$

<u>Démonstration</u> : Posons $\pi^{q^2+1}_{\Lambda,\Phi} = \pi$. Rappelons que l'on note, de manière générale, $f_{\xi,v}$ $(\xi \in \widetilde{E}$, $v \in W[\pi](\xi))$ la fonction dans $W[\pi]$ à support $\mathrm{Orb}_H(\xi)$ telle que $f_{\xi,v}(\xi) = v$.

Notons W' le sous-G-module de $W[\pi]$ engendré par f_∞ . Il est immédiat, d'après la définition de l'action des générateurs $\underline{h}(a)$ $(a \in A^{\times})$ et $\underline{h}'(t)$ $(t \in k^{\times})$ (cf. ch.III, §2, n°3) que l'on a

$$f_{(x,e),v_\infty} \in W'$$

pour $x = x_o$, $x = (\underline{d}(1,0), s\underline{d}(1,0))$ $(s \in k^{+})$ et, en fait, que pour montrer que $W' = W[\pi]$, il suffit d'établir que $f_{(x,e),v} \in W'$ pour x parcourant un système de représentants des $H \times G_o$-orbites dans E^2 et $v \in W^{+}[\pi](x)$.

Posons

$$W'[\xi] = \{ f'(\xi) \mid f' \in W' \} \qquad (\xi \in \widetilde{E}).$$

D'après le lemme 1 on a

$$S(x,y;h) v_\infty \in W'[x,e]$$

pour tout $x \in E^2$ et $y \in \mathrm{Orb}_{G_o}(x_o)$. Les lemmes 1 et 2 du paragraphe 3 montrent alors que pour tout $x \in E^2 - \{\underline{0}\}$ on a $W'[x,e] = W^{+}[\pi](x,e)$ (pour $x = 0$, c'est immédiat) puisque les transformés de v_∞ par les opérateurs $\pi(h)$ $(h \in H$, $h_{11}h_{21} \neq 0)$ engendrent déjà tout $V_{\Lambda,\Phi}$

comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Il résulte alors du lemme 1 que $f_{x,e,v} \in W'$ pour tout H-représentant de la forme (x,e) de $\tilde{E}$ (cf. table 1) autre que $(1,x_t,e),(1,t,e)$ $(t \in k^\times)$, $(1,x_1-1,e),(1,0,e)$, $(x_1-1,1,e)$ et $(0,1,e)$. Pour achever la démonstration il ne reste qu'à prouver que W' sépare, par exemple $(0,1,e)$ et $(x_1-1,1,e)$. De manière plus précise posons $y_1 = (0,1)$, $y_2 = (x_1-1,1)$, $V_i = W^+[\pi](y_i,e)$ $(i=1,2)$ et

$$V_{12} = \{(v_1,v_2) \in V_1 \oplus V_2 \mid \exists f \in W' \text{ telle que } f(y_i,e) = v_i\ ,\ i=1,2\}\ .$$

On a à démontrer

$$V_{12} = V_1 \oplus V_2\ . \tag{8}$$

On sait déjà que $p_i(V_{12}) = V_i$, où l'on pose $p_i(v_1,v_2) = v_i$ $(v_i \in V_i$, $i=1,2)$. Pour montrer (8) il suffit donc de voir que

$$\dim\,(V_{12} \cap \operatorname{Ker} p_2) = \dim V_1 \quad (= 1 + \delta_{\Lambda,\Phi}). \tag{9}$$

D'après le lemme 1 on a, pour tout $v \in W^+[\pi](x_o,e)$,

$$(S(y_1,x_o;c,1)v\ ,\ S(y_2,x_o;c,1)v) \in V_{12} \tag{10}$$

en particulier pour $c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Or on trouve aussitôt

$$S(y_2,x_o;c,1)v = \sum_{h \in R} \pi(h)v$$

où R désigne l'ensemble des $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$ tels que

i) $N(aa_o - c) = 0$,

ii) $N(a) + N(c) = 1$,

iii) $N(ad-bc) = 1$.

Il résulte de i) et ii) que $R = \emptyset$, d'où $S(y_2,x_o;c,1) = 0$. Par contre, on trouve

$$S(y_1,x_o;c,1) = q^2 \sum_{h \in U(2,K)} \pi(h)v\ ; \tag{11}$$

comme on vérifie sans difficulté que la somme de π sur $U(2,K)$ est injective sur $W^+[\pi](x_o,e)$ (compte tenu des relations $\Lambda = \Lambda^q$ et

$\Phi = \Phi^q$), nous avons ainsi prouvé (9) et achevé donc la démonstration.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 4.- *Soient* $\Lambda, \Phi \in \mathrm{Car}(K^\times)$ *tels que* $\Lambda = \Lambda^q$ *et* $\Phi = \Phi^q$. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$ *tels que* $\Lambda = \alpha\circ N$ *et* $\Phi = \beta\circ N$. *Alors le* G-*module* $M(\pi^{q+1}_{1,\alpha^{-1}\beta}, \alpha)$ *se projette sur le* G-*module* $W^+[\pi^{q^2+1}_{\Lambda,\Phi}]$.

Démonstration : Nous exhibons un B-morphisme non-nul de $(V^{q+1}_{1,\alpha^{-1}\beta}, \pi^{q+1}_{1,\alpha^{-1}\beta}\otimes\alpha)$ dans $W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$. Comme à son tour

$$V^{q+1}_{1,\alpha^{-1}\beta} = \mathrm{Ind}_{B_o\uparrow G_o}(\mathbb{C}, (1\otimes\alpha^{-1}\beta)\circ p_o)$$

(où $G_o = GL(2,k)$, B_o est le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures et $p_o\begin{pmatrix} r & s\\ 0 & t\end{pmatrix} = (r,t)$ $(r,t \in k^\times,\ s\in k^+)$), il suffit pour cela que nous exhibions une fonction non-nulle $f_o \in W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$ telle que

(12) $\quad \rho(g)f_o = f_o \qquad (g\in U_o = \text{radical unipotent de } B)$,

(13) $\quad \rho(g)f_o = \alpha^{-1}\beta(s)f_o \qquad (g\in B,\ \varphi_o(g) = (\begin{pmatrix} r & 0\\ 0 & s\end{pmatrix},1),\ r,s\in k^\times)$,

(14) $\quad \rho(g)f_o = \alpha(t)f_o \qquad (g\in B,\ \varphi_o(g) = (1,t)\in G_o\times k^\times)$.

Notons, comme précédemment dans ce paragraphe, v_∞ le vecteur dans $V_{\Lambda,\Phi}$ tel que $v_\infty(0,1;1) = 1$ et $\mathrm{Supp}\ v_\infty = (\underline{0}\times K)\times K^\times$. On vérifie alors aisément que la fonction $f_\infty \in W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$ définie par les conditions

$$f_\infty(0, \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, e) = v_\infty$$

$$\mathrm{Supp}\ f_\infty = \mathrm{Orb}_H(0, \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix})\times X$$

vérifie (12),(13)et (14). Il en résulte qu'il existe un G-morphisme $\tilde{\Phi}$ de $M(\pi^{q+1}_{1,\alpha^{-1}\beta},\alpha)$ dans $W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$ dont l'image contient f_∞. D'après le lemme 2, $\tilde{\Phi}$ est alors un épimorphisme.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1.- *Quels que soient* α,β *dans* $\mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha\neq\beta$, *on a*

$$(W[\pi^{q^2+1}_{\alpha\circ N,\beta\circ N}],\rho) \simeq (M(\pi^{q+1}_{1,\alpha^{-1}\beta},\alpha)^q,\tau)$$

(cf. ch.II, §3, n°1).

En effet, on a

$$W^+[\pi_{\alpha\circ N,\beta\circ N}] = W[\pi_{\alpha\circ N,\beta\circ N}]$$

et

$$\dim W[\pi_{\alpha\circ N,\beta\circ N}] = q(q+1)(q^2+1).$$

Comme $M(\pi^{q+1}_{1,\alpha^{-1}\beta},\alpha)^q$ est la composante irréductible de dimension $q(q+1)(q^2+1)$ de $M(\pi^{q+1}_{1,\alpha^{-1}\beta},\alpha)$, le corollaire est alors immédiat, d'après la prop.4 .

COROLLAIRE 2.- <u>Pour tout</u> $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, <u>on a</u>

$$(W^+[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}],\rho) \simeq (\mathrm{St}(\alpha)\oplus {}^-\underline{P}^o(\alpha),\tau)$$

(cf. ch.II, §3, n°5 et 6).

En effet, d'après la proposition 4, $W^+[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}]$, qui est de dimension $q^4+\frac{1}{2}q(q^2+1)$, est isomorphe à une composante de $M(\pi^{q+1}_{1,1},\alpha)$. Cette composante ne peut être que $\mathrm{St}(\alpha)\oplus {}^-\underline{L}^o(\alpha)$ ou $\mathrm{St}(\alpha)\oplus {}^-\underline{P}^o(\alpha)$ (ch.II, §3, n°5 et 6). Or, la dimension du sous-espace $\mathrm{Fix}_{\underline{U}}[W^+[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}]]$ formé des fonctions dans $W[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}]$ fixées par le sous-groupe $\underline{U}=\{\underline{u}(b)\,|\,b\in A^s\}$ de G est égale au nombre de H-orbites dans $\tilde{E}$ contenues dans $\tilde{\mathbb{Q}}^{-1}(\underline{O})$, c'est-à-dire $q+1$. La démonstration est alors achevée en vertu de la proposition 12 du paragraphe 3 (n°8) du chapitre II.

C.Q.F.D.

5.- <u>Identification de</u> $W[\pi^1_\Lambda]$ $(\Lambda=\Lambda^q)$.

LEMME 3.- <u>Pour tout</u> $\Lambda\in \mathrm{Car}(K^\times)$ <u>tel que</u> $\Lambda=\Lambda^q$, <u>le</u> G-<u>module</u> $W[\pi^1_\Lambda]$ <u>est monogène et admet comme générateur toute fonction</u> $f_o\in W[\pi^1_\Lambda]$ <u>à support réduit à</u> $\{O\}\times X$.

<u>Démonstration</u> : Soit W_o le sous-G-module de $W[\pi^1_\Lambda]$ engendré par f_o. On a

$$\rho(w)f_o(x,\psi) = q^{-4}f_o(0,\psi) \neq 0 \qquad (x \in E^2,\ \psi \in X).$$

Le lemme 1 montre alors que l'on a

$$f_\xi \in W_o$$

pour tout $\xi \in \tilde{E}$ non-congru mod. $G_o \times H$ à $(1,0,\psi)$, $(1,x_1,\psi)$ $(\psi \in X)$, $(\underline{d}(1,0),0,e)$ ou $(0,0,e)$, où, rappelons-le, la fonction f_ξ est caractérisée par les conditions $\mathrm{Supp}\, f_\xi = \mathrm{Orb}_H(\xi)$ et $f(\xi) = 1$. Compte tenu de l'action des opérateurs de Weil $\rho(\underline{h}'(t))$ $(t \in k^\times)$ et $\rho(\underline{h}(a))$ $(a \in A^\times)$ (et du fait que $f_{(0,0,e)} \in W_o$), pour achever la démonstration, il ne reste qu'à établir que W_o sépare les points $(0,\underline{d}(1,0),e)$ et $(\underline{d}(1,0),e)$ et aussi les points $(1,0,e)$ et $(1,x_1,e)$.

Posons $y_1 = (\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1))$ et $f_1 = f_{(x_1,e)}$. Supposons que W_o ne sépare pas $z_1 = (\underline{d}(1,0),0)$ et $z_2 = (0,\underline{d}(1,0))$. Alors, en vertu de l'action des opérateurs $\underline{H}_a = \rho(\underline{h}(a))$ $(a \in A^\times)$, W_o ne séparerait aucune paire de points de la G_o-orbite de z_1 et z_2. Posons $(\underline{H}_a f)(x,\psi) = f(xa,\psi)$ $(f \in W[\pi_\Lambda^1], (x,\psi) \in \tilde{E})$ pour tout $a \in A$. On aurait alors en particulier (avec $\underline{W} = \rho(w)$)

$$(\underline{H}_a\underline{W}f_1)(z_1,e) = (\underline{H}_a\underline{W}f_1)(z_2,e)$$

quel que soit $a \in A$, singulier ou non. On en tire, par combinaison linéaire, puisque $\pi(h) = 1$ si $m_h = 1$ $(h \in H)$,

$$n_c(z_1) = n_c(z_2) \qquad (c \in A) \tag{15}$$

avec

$$n_c(x) = |\{h \in H \mid \mathbf{B}(x,h.y_1) = c \text{ et } m_h = 1\}| \qquad (x \in E^2).$$

Mais, pour $c = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, (15) devient

$$q^2(q+1)^2 = 0\ ,$$

d'où le fait que W_o sépare z_1 et z_2. On voit de même que si W_o ne séparait pas $z_1' = (1,0,e)$ et $z_2' = (1,x_1-1,e)$, on aurait

$$n_c(z_1') = n_c(z_2') \qquad (c \in A)$$

ce qui, pour $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donne aussitôt

$$|\{h \in H | N(h_{11}) + N(h_{21}) = 1 , N(h_{12}) + N(h_{22}) = 0 , m_h = 1\}| = 0 ,$$

contradiction qui achève la démonstration du lemme.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 5.- On a, pour tout $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$,

$$(W[\pi^1_{\alpha\circ N}], \rho) \simeq (\underline{P}^o, \alpha\tau) \qquad \text{(cf. ch.II, §3).}$$

Démonstration : D'après le lemme 3, $(W[\pi^1_{\alpha\circ N}], \rho)$ est isomorphe à une composante de $(M(\pi^{q+1}_{1,1}, \alpha), \tau)$. Comme $\dim W[\pi^1_\Lambda] = q^3+q^2+q$ cette composante ne peut être que $(\underline{L}^o, \alpha\tau)$ ou $(\underline{P}^o, \alpha\tau)$. Pour trancher la question il suffit de calculer la dimension de $\mathrm{Fix}_{\underline{U}}\, W[\pi^1_{\alpha\circ N}]$. Mais cette dimension est égale au nombre de H-orbites de $\tilde{E}$ contenues dans $\tilde{\Phi}^{-1}(\underline{0})$, donc égale à $q+2$. On a par suite (ch.II, §3, n°8) l'isomorphisme voulu.

C.Q.F.D.

Nous avons ainsi achevé l'identification de toutes les représentations fournies par la représentation de Weil en rang 4 (cas non-déployé) qui ne sont pas dans la série discrète de G . Nous résumons nos résultats dans la table 5.

§5. La classification des représentations de G .

Dans ce paragraphe, nous donnons la classification de toutes les représentations de G et nous adoptons la paramétrisation suggérée par la décomposition de la représentation de Weil, pour ces représentations.

1.- La série discrète de G associée au tore de Coxeter T_2 .

Notons T_2 un représentant de la classe de conjugaison des tores de Coxeter, isomorphes à $\underset{w}{K}^\times/U$ de G . Nous appelons série discrète de

G associée au tore T_2, l'ensemble des types d'isomorphie des représentations $(W[\pi_\Theta],\rho)$ $(\Theta \in \mathrm{Car}(\underset{w}{K}^\times) - \mathrm{Car}(K^\times)$, $\Theta^{q^2+1} = \Theta^{q^3+q})$.

D'après le théorème 1 du numéro 2 du paragraphe 3, nous savons déjà que ces représentations sont irréductibles et que l'on a

$$(W[\pi_{\Theta_1}],\rho) \simeq (W[\pi_{\Theta_2}],\rho)$$

pour $\Theta, \Theta' \in \mathrm{Car}(\underset{w}{K}^\times) - \mathrm{Car}(K^\times)$, tels que $\Theta_1^{q^2+1} = \Theta_1^{q^3+q}$ et $\Theta_2^{q^2+1} = \Theta_2^{q^3+q}$, si et seulement si Θ_1 et Θ_2 sont congrus modulo l'action naturelle du groupe de Galois $\mathrm{Gal}_{\underset{w}{K}/k}$ dans $\mathrm{Car}(\underset{w}{K}^\times)$. Nous avons ainsi le

THEOREME 1.- <u>La série discrète de</u> G <u>associée à</u> T_2 <u>est formée des</u> $\frac{1}{4}q(q-1)^2$ <u>types d'isomorphie des représentations</u> (<u>irréductibles</u>) $W[\pi_\Theta]$, <u>de dimension</u> $(q^2-1)^2$, <u>pour</u> $\Theta \in \mathrm{Car}(\underset{w}{K}^\times) - \mathrm{Car}(K^\times)$ <u>tel que</u> $\Theta^{q^2+1} = \Theta^{q^3+q}$ (<u>c'est-à-dire tel que</u> π_Θ <u>soit trivial sur</u> $U = N^{-1}(1) \subset K^\times$).

Notons que d'après la table 3, il est clair que $W[\pi_\Theta]$ n'admet pas de vecteur fixe non-nul ni pour le sous-groupe formé des $\underline{u}(b)$ $(b \in A^s)$ ni pour le sous-groupe formé des $\underline{h}\begin{pmatrix}1 & r\\ 0 & 1\end{pmatrix}\underline{u}(b)$ $(r \in k^+, b \in A^s)$ de G, d'où le fait que $W[\pi_\Theta]$ appartient à la série discrète de G au sens du chapitre II (§1, n°2).

2.- <u>Théorème de complétude</u>.

THEOREME 2.- <u>Les séries discrètes de</u> G <u>associées aux tores</u> T_1 <u>et</u> T_2, <u>et la série de représentations</u> $W^-[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}]$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$ <u>sont disjointes et épuisent la série discrète de</u> G.

<u>De plus</u>, <u>en décomposant les représentations de Weil de</u> G <u>associées aux deux espaces quadratiques non-dégénérés de dimension</u> 4 <u>sur</u> k, <u>on obtient toutes les représentations irréductibles de</u> G.

<u>Démonstration</u> : Le fait que les trois séries sont disjointes résulte de leurs dimensions (cf. table 4 et ch.IV, table 5). Pour prouver qu'elles

épuisent la série discrète de G, on utilise le critère classique, à savoir, on vérifie que la somme des carrés des dimensions des types d'isomorphie qui les constituent plus la somme des carrés des types d'isomorphie qui forment la série principale, la série associée au sous-groupe parabolique P_1 et la série associée au sous-groupe parabolique P_2, donnent l'ordre $(q-1)(q^2-1)(q^4-1)q^4$ de G (pour la description des différentes séries cf. ch.II, §2, n°4, §3, n°7, §4, n°6 ; ch.IV, §4, n°3 et ce ch. §3, n°3).

La seconde assertion est alors claire, parce que nous avons déjà identifié la série principale et les séries associées à P_1 et P_2 parmi les composantes des deux représentations de Weil (cf. ch.IV, table 6 et ce ch. table 5).

C.Q.F.D.

3.- <u>Paramétrisation de toutes les représentations de</u> G .

Nous choisissons une paramétrisation uniforme pour les représentations de G de la manière suivante.

Rappelons que l'on identifie $\mathrm{Car}(k^\times)$ à son image dans $\mathrm{Car}(K^\times)$ par le monomorphisme $\alpha \mapsto \alpha\circ N$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$; de même, on identifie $\mathrm{Car}(k^\times)$ (resp. $\mathrm{Car}(K^\times)$) à son image dans $\mathrm{Car}(\underset{\sim}{K}^\times)$ par le monomorphisme $\alpha \mapsto \alpha\circ N\circ \underset{\sim}{N}$ (resp. $\Lambda \mapsto \Lambda\circ\underset{\sim}{N}$) pour $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ (resp. $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$).

DEFINITION 1.- <u>Désignons par</u> $\underline{C}$ <u>l'ensemble de tous les carrés</u> C , <u>symétriques à leur conjugué</u>, <u>de la forme</u>

$$C = \begin{bmatrix} \mu, & \mu' \\ \nu' & \nu \end{bmatrix}$$

<u>où</u> $\mu,\mu',\nu,\nu' \in \mathrm{Car}(\underset{\sim}{K}^\times)$ <u>tels que</u> $\mu\nu = \mu'\nu' \in \mathrm{Car}(k^\times)$.

Les types d'isomorphie des représentations irréductibles de G seront alors désignés par des symboles de la forme

$$R^{(\pm)}C^{(i)(j)}_{(\ell)}$$

où $C \in \underline{\underline{C}}$ et où un indice entre parenthèses désigne un indice qui peut apparaître ou pas ; on aura $i \in \{1,q,q^2\}$, $j \in \{1,q\}$, ℓ entier, $0 \leqslant \ell \leqslant 4$.

Dans la table 6, à la fin de ce chapitre, nous définissons de manière précise ces symboles, en donnant pour chaque type d'isomorphie de représentation irréductible de G le symbole correspondant, un ou plusieurs modèles pour le type d'isomorphie (les plus commodes) et sa dimension.

Nous avons ainsi que les symboles représentant un même type d'isomorphie se déduisent les uns des autres par une symétrie du carré correspondant ou du couple (i,j) d'indices supérieurs.

TABLE 1. <u>Les H-orbites dans</u> $\tilde{E}$

Représentant	Paramètres	Nombre d'orbites	Stabilisateur	Cardinal de l'orbite
$(1,x_c,\psi)$	$c\in K^\times-k^\times$, mod. $c\sim c^q$; $\psi\in X$	$\frac{1}{2}q(q-1)^2$	$h_cH_2h_c^{-1}$	$(q^2-1)q^2(q^2+1)$
$(1,x_s,\psi)$	$s\in k^\times$, $\psi\in X$	$(q-1)^2$	$h_1H_oh_1^{-1}$	$(q-1)q(q^4-1)$
$(1,x_1-1,\psi)$	$\psi\in X$	$q-1$	$h_1H_oh_1^{-1}$	$(q-1)q(q^4-1)$
$(x_1-1,1,\psi)$	$\psi\in X$	$q-1$	$h_1H_oh_1^{-1}$	$(q-1)q(q^4-1)$
$(1,\underline{d}(s,t),\psi)$	$s,t\in k^\times$, $s\neq t$, mod. $(s,t)\sim(t,s)$; $\psi\in X$	$\frac{1}{2}(q-1)^2(q-2)$	H_1	$(q-1)^2q^2(q^2+1)$
$(1,\underline{d}(s,0),\psi)$	$s\in k^\times$, $\psi\in X$	$(q-1)^2$	H_1	$(q-1)^2q^2(q^2+1)$
$(\underline{d}(s,0),1,\psi)$	$s\in k^\times$, $\psi\in X$	$(q-1)^2$	H_1	$(q-1)^2q^2(q^2+1)$
$(\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1),\psi)$	$\psi\in X$	$q-1$	H_1	$(q-1)^2q^2(q^2+1)$
$(1,r,\psi)$	$r\in k^+$, $\psi\in X$	$(q-1)q$	$U(2,K)$	$(q-1)q(q^2+1)$
$(0,1,\psi)$	$\psi\in X$	$(q-1)$	$U(2,K)$	$(q-1)q(q^2+1)$
$(\underline{d}(1,0),\underline{d}(r,0),e)$	$r\in k^+$	q	H_3	$(q-1)^2(q^2+1)$
$(0,\underline{d}(1,0),e)$		1	H_3	$(q-1)^2(q^2+1)$
$(0,0,e)$		1	$UL(2,K)$	$q-1$

<u>Notations</u> : (cf. §1, n°5, défs. 7 et 8). On note, en outre, e un caractère non-trivial fixé de K^+ qui se factorise par la trace.

TABLE 2. Les valeurs de $\mathbb{Q}$

Représentant x	Paramètres	$\mathbb{Q}(x)$
$(1,x_a)$	$a \in K^\times$	$\begin{pmatrix}1 & \mathrm{Tr}a\\ 0 & \mathrm{N}a\end{pmatrix}$
$(1,x_1-1)$		$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
$(x_1-1,1)$		$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$(1,\underline{d}(s,t))$	$s,t \in k^\times$	$\begin{pmatrix}1 & s+t\\ 0 & st\end{pmatrix}$
$(1,\underline{d}(s,0))$	$s \in k^\times$	$\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
$(\underline{d}(s,0),1)$	$s \in k^\times$	$\begin{pmatrix}0 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$(\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1))$		$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
$(1,t)$	$t \in k^\times$	$\begin{pmatrix}1 & 2t\\ 0 & t^2\end{pmatrix}$
$(1,0)$		$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
$(0,1)$		$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$(\underline{d}(1,0),\underline{d}(r,0))$	$r \in k^+$	0
$(0,\underline{d}(1,0))$		0
$(0,0)$		0

Notations : cf. §1, n°5, défs. 7 et 8.

TABLE 3. <u>Les dimensions des espaces</u> $W[\pi](\xi)$ <u>et</u> $W^{-}[\pi](\xi)$

ξ représentant \ π		π_Λ^1	$\pi_\Lambda^{q^2}$		$\pi_{\Lambda,\Phi}$		π_Θ
	paramètres	$\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$ $\Lambda^2 = \Lambda^{2q}$	$\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$		$\Lambda,\Phi \in \mathrm{Car}(K^\times)$, $\Lambda \neq \Phi$		$\Theta \in \mathrm{Car}(\underset{\sim}{K}^\times)-\mathrm{Car}(K^\times)$ $\Theta\|_U = 1$
			$\Lambda^2 = \Lambda^{2q}$	$\Lambda = \Lambda^q$	$\Lambda^q\Phi^q = \Lambda\Phi$	$\Phi = \Lambda^q$	
$(1,x_c,\psi)$	$c \in K^\times - k^\times$ $\psi \in X$	$\delta_{\Lambda,\Lambda^q}$	$q+1+\delta_{\Lambda,\Lambda^q}$	1	$q+1+2\delta_{\Phi,\Lambda^q}$	2	$q+1$
$(1,x_s,\psi)$	$s \in k^\times$ $\psi \in X$	1	q	0	$q+1$	1	$q-1$
$(\underline{d}(1,0),\underline{d}(0,1),\psi)$	$\psi \in X$	$\delta_{\Lambda,\Lambda^q}$	$q-1+\delta_{\Lambda,\Lambda^q}$	0	$q-1+2\delta_{\Lambda,\Lambda^q}$	0	$q-1$
$(1,0,\psi)$	$\psi \in X$	$\delta_{\Lambda,\Lambda^q}$	$\delta_{\Lambda,\Lambda^q}$	0	$\delta_{\Lambda,\Lambda^q}+\delta_{\Phi,\Lambda^q}$	0	0
$(\underline{d}(1,0),0,e)$		$\delta_{\Lambda,\Lambda^q}$	$\delta_{\Lambda,\Lambda^q}$	0	$2\delta_{\Lambda,\Lambda^q}$	0	0
$(0,0,e)$		$\delta_{\Lambda,\Lambda^q}$	0	0	0	0	0

<u>Notations</u> : On garde celles de la table 4 (§1, n°5). Pour $\pi = \pi_\Lambda^{q^2}$ (resp. $\pi = \pi_{\Lambda,\Phi}$) nous indiquons la dimension de $W^{-}[\pi](\xi)$, lorsque $\Lambda = \Lambda^q$ (resp. $\Phi = \Lambda^q$), dans la sous-colonne de droite.

TABLE 4. Les dimensions des espaces $W[\pi]$, $W^{\pm}[\pi]$

représentation	dimension	paramètres
$W[\pi_{\Lambda,\Phi}]$	q^4-1	$\Lambda\Phi = \Lambda^q\Phi^q$, $\Lambda^q \neq \Lambda \neq \Phi \neq \Lambda^q$
$W[\pi_{\Lambda,\Phi}] = W^+[\pi_{\Lambda,\Phi}]$	$q(q+1)(q^2+1)$	$\Lambda^q = \Lambda \neq \Phi = \Phi^q$
$W^+[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}]$	q^4-1	$\Lambda^q \neq \Lambda$
$W^-[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}]$	$(q-1)(q^2+1)$	$\Lambda^q \neq \Lambda$
$W[\pi_\Lambda^{q^2}]$	$q^2(q^2-1)$	$\Lambda^q = \Lambda^*$ (1)
$W^+[\pi_\Lambda^{q^2}]$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)+q^4$	$\Lambda^q = \Lambda$
$W^-[\pi_\Lambda^{q^2}]$	$\frac{1}{2}q(q-1)^2$	$\Lambda^q = \Lambda$
$W[\pi_\Lambda^1]$	q^2-1	$\Lambda^q = \Lambda^*$ (1)
$W[\pi_\Lambda^1] = W^+[\pi_\Lambda^1]$	q^3+q^2+q	$\Lambda^q = \Lambda$
$W[\pi_\Theta]$	$(q^2-1)^2$	$\Theta_{\mid U} = 1$, $\Theta \neq \Theta^{q^2}$

Notations : On désigne par Λ et Φ des caractères de $K^\times$ et par Θ un caractère de $\underset{\sim}{K}^\times$. Si la caractéristique de k n'est pas 2, on note Λ_o le caractère non-trivial de $K^\times$ de carré trivial et l'on pose $\Lambda^* = \Lambda_o\Lambda$ $(\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times))$.

(1) Ce cas ne se présente pas en caractéristique 2.

TABLE 5. Identification des représentations $W[\pi]$

Paramètres : $\Lambda,\Phi \in \mathrm{Car}(K^\times)$, $\Lambda \neq \Phi$, $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha \neq \beta$,
$\Theta \in \mathrm{Car}(\underset{\sim}{K}^\times) - \mathrm{Car}(K^\times)$, $\Theta^{(q-1)(q^2+1)} = 1$.

$W[\pi^{q^2+1}_{\Lambda,\Phi}] \simeq V(\Lambda\Phi^{-q},\pi^{q-1}_{\Phi})$ $\quad(\Lambda\Phi = \Lambda^q\Phi^q$ et $\Lambda^q \neq \Lambda \neq \Phi \neq \Lambda^q)$

$W^+[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}] \simeq V(1,\pi^{q-1}_{\Lambda}) = V(1,\pi^{q-1}_{\Lambda})^q \oplus V(1,\pi^{q-1}_{\Lambda})^1$ $\quad(\Lambda \neq \Lambda^q)$

$W^-[\pi_{\Lambda,\Lambda^q}] \simeq V(1,\pi^{q-1}_{\Lambda})^1$ $\quad(\Lambda \neq \Lambda^q)$

$W[\pi^{q^2}_{\Lambda}] \simeq V(\alpha_o,\Lambda)^{q^2}$ $\quad(\Lambda^q = \Lambda^*)$

$W[\pi^{1}_{\Lambda}] \simeq V(\alpha_o,\Lambda)^{1}$ $\quad(\Lambda^q = \Lambda^*)$

$W[\pi^{q^2+1}_{\alpha\circ N,\beta\circ N}] \simeq M(\pi^{q+1}_{1,\alpha^{-1}\beta},\alpha)^q$

$W^+[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}] \simeq (\underline{D}^{0,0},\alpha\tau) \oplus ({}^-\underline{P}^{0},\alpha\tau)$

$W[\pi^{1}_{\alpha\circ N}] \simeq (\underline{P}^{0},\alpha\tau)$

$W^-[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}]$: représentation exceptionnelle associée à α

$W[\pi^{q^2-1}_{\Theta}]$: série discrète associée au tore de Coxeter T_2

TABLE 6. Les représentations de G

Paramètres : $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathrm{Car}(k^{\times})$, $\alpha \neq \beta$;
$\Lambda, \Phi \in \mathrm{Car}(K^{\times})$, $\Lambda \neq \Phi$;
$\Theta \in \mathrm{Car}(\underset{\sim}{K}^{\times}) - \mathrm{Car}(K^{\times})$;

Type d'isomorphie	Modèles	Dimension	Paramètres
$R\begin{bmatrix}\alpha' & \alpha \\ \beta & \beta'\end{bmatrix}$	$W[\pi_{\alpha',\beta'},\pi_{\alpha,\beta}] \simeq M(\pi_{\alpha'\beta^{-1},\beta'\beta^{-1}},\beta)$	$(q+1)^2(q^2+1)$	$\alpha'\beta' = \alpha\beta$ $\{\alpha',\beta'\} \cap \{\alpha,\beta\} = \emptyset$
$R\begin{bmatrix}\alpha & \alpha \\ \beta & \beta\end{bmatrix}^q$	$M(\pi_{\alpha\beta^{-1},1},\beta)^q \simeq W^+[\pi_{\alpha,\beta},\pi_{\alpha,\beta}]^q$	$q(q+1)(q^2+1)$	
$R\begin{bmatrix}\alpha & \alpha \\ \beta & \beta\end{bmatrix}^1$	$M(\pi_{\alpha\beta^{-1},1},\beta)^1 \simeq W^-[\pi_{\alpha,\beta},\pi_{\alpha,\beta}]$	$(q+1)(q^2+1)$	
$R\begin{bmatrix}\alpha & \alpha' \\ \alpha' & \beta\end{bmatrix}^i$	$W[\pi^i_{\alpha'},\pi_{\alpha,\beta}] \simeq M(\pi^i_{\alpha'\beta^{-1}},\beta)$	$i(q+1)(q^2+1)$	$i \in \{1,q\}$ $\alpha'^2 = \alpha\beta$
$R\begin{bmatrix}\alpha & \alpha^* \\ \alpha^* & \alpha\end{bmatrix}^{i,j}$	$W[\pi^i_{\alpha},\pi^j_{\alpha^*}] \simeq M(\pi^i_{\alpha_o},\alpha)^j$	$ij(q^2+1)$	$i,j \in \{1,q\}$
$R\begin{bmatrix}\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha\end{bmatrix}_4$	$(\underline{D}^{o,o},\alpha\tau) = \mathrm{St}(\alpha)$	q^4	
$R\begin{bmatrix}\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha\end{bmatrix}_3$	$({}^{+}\underline{L}^{o},\alpha\tau) \simeq ({}^{+}\underline{P}^{o},\alpha\tau)$	$\frac{1}{2}q(q+1)^2$	
$R\begin{bmatrix}\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha\end{bmatrix}_2$	$({}^{-}\underline{P}^{o},\alpha\tau)$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$	

TABLE 6. Les représentations de G (suite)

Type d'isomorphie	Modèles	Dimension	Paramètres
$R\begin{bmatrix}\alpha & \alpha\\ \alpha & \alpha\end{bmatrix}_1$	$({}^{-}\underline{L}^{o}, \alpha\tau)$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$	
$R\begin{bmatrix}\alpha & \alpha\\ \alpha & \alpha\end{bmatrix}_0$	$(\mathbb{C}, \alpha\circ m)$	1	
$R\begin{bmatrix}\alpha & \Lambda\\ \Lambda^q & \beta\end{bmatrix}$	$W[\pi_\Lambda^{q-1}, \pi_{\alpha,\beta}] \simeq M(\pi_{\beta^{-1}\Lambda}, \beta)$	q^4-1	$\Lambda \neq \Lambda^q$ $\Lambda\Lambda^q = \alpha\beta$
$R\begin{bmatrix}\alpha & \Lambda\\ \Lambda^q & \alpha\end{bmatrix}^i$	$W[\pi_\Lambda^{q-1}, \pi_\alpha^i]$	$i(q-1)(q^2+1)$	$\Lambda \neq \Lambda^q$, $\Lambda\Lambda^q = \alpha^2$ $i \in \{1,q\}$
$R\begin{bmatrix}\Lambda & \Lambda^q\\ \Phi^q & \Phi\end{bmatrix}$	$W[\pi^{q^2+1}_{\Lambda,\Phi}] \simeq V(\Lambda\Phi^{-q}, \pi_\Phi^{q-1})$	q^4-1	$\Lambda\Phi = \Lambda^q\Phi^q$ $\Lambda^q \neq \Lambda \neq \Phi \neq \Lambda^q$
$R\begin{bmatrix}\Lambda & \Lambda^q\\ \Lambda & \Lambda^q\end{bmatrix}^i$	$V(1, \pi_\Lambda^{q-1})^i$	$i(q-1)(q^2+1)$	$\Lambda \neq \Lambda^q$ $i \in \{1,q\}$
$R\begin{bmatrix}\Lambda & \Lambda^*\\ \Lambda^* & \Lambda\end{bmatrix}^i$	$W[\pi_\Lambda^i]$	$i(q^2-1)$	$i \in \{1,q^2\}$
$R\begin{bmatrix}\Lambda & \Phi\\ \Phi^q & \Lambda^q\end{bmatrix}$	$W[\pi_\Lambda^{q-1}, \pi_\Phi^{q-1}] \simeq \mathrm{Bin}[\pi_\Lambda^{q-1}, \pi_\Phi^{q-1}]$	$(q-1)^2(q^2+1)$	$\Lambda\Lambda^q = \Phi\Phi^q$ $\Phi \neq \Lambda^q$
$R\begin{bmatrix}\Theta & \Theta^q\\ \Theta^{q^3} & \Theta^{q^2}\end{bmatrix}$	$W[\pi_\Theta^{q^2-1}]$	$(q^2-1)^2$	$\Theta\Theta^{q^2} = \Theta^q\Theta^{q^3}$
$R\begin{bmatrix}\alpha & \alpha\\ \alpha & \alpha\end{bmatrix}_5$	$W^-[\pi^{q^2}_{\alpha\circ N}]$	$\frac{1}{2}q(q-1)^2$	

TABLE 6. <u>Les représentations de</u> G (suite)

<u>Notations</u> : On note α_o (resp. Λ_o) le caractère non-trivial de $k^\times$ (resp. $K^\times$) de carré trivial. On pose $\alpha^* = \alpha_o\alpha$, $\Lambda^* = \Lambda_o\Lambda$, pour $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$. S'il y a risque d'ambiguïté, on affecte la lettre désignant une représentation d'un indice supérieur égal à sa dimension.

CHAPITRE VI

Les représentations de $G' = Sp(4,k)$.

Dans ce chapitre, nous obtenons toutes les représentations irréductibles de $G' = Sp(4,k)$, par restriction de celles de $G = GSp(4,k)$ que nous avons construites dans les chapitres IV et V. Nous décrivons aussi les constructions directes, pour G' , des séries associées à ses sous-groupes paraboliques maximaux, ainsi que de la représentation de Weil.

Nous gardons, sauf mention expresse du contraire,les notations des chapitres précédents. Nous posons en plus (cf. ch.III, §1)

$$B' = B \cap G' ,$$

$$P'_i = P_i \cap G' \qquad (i = 1,2).$$

§1. Préliminaires.

1.- Restriction de $G'' = ZG'$ à G' .

DEFINITION 1.- On note Z le centre de G , formé des matrices scalaires. On pose

$$G'' = ZG' .$$

Nous avons alors

(1) $$G'' = \{g \in G \mid m_g \in (k^\times)^2\} ,$$

(2) $$G'' = (Z \times G')/(Z \cap G') = (Z \times G')/\{1,-1\} .$$

Si la caractéristique de k est 2 , on a donc

(3) $$G = G'' = Z \times G' .$$

La proposition suivante est une conséquence immédiate de (2).

PROPOSITION 1.- En associant à chaque paire (α, ρ'), où ρ' est une représentation de G' et α un caractère de $k^\times$ tel que $\alpha(-1) = \rho'(-1)$, la représentation $\alpha.\rho'$ de G'' définie par

$$(\alpha.\rho')(tg) = \alpha(t)\rho'(g) \qquad (t \in Z , g \in G'),$$

on établit une bijection entre l'ensemble de ces paires modulo isomorphie et l'ensemble des types d'isomorphie des représentations de G''. En particulier, si ρ'' est une représentation de G'', l'ensemble des types d'isomorphie des représentations de G'' ayant même restriction à G' que ρ'' est l'ensemble des $\alpha\rho''$ $(= (\alpha.1_{G'}) \otimes \rho'')$, pour $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ tel que $\alpha(-1) = 1$ (c'est-à-dire, tel que α soit un carré dans $\mathrm{Car}(k^\times)$).

2. Restriction de G à G' .

Rappelons que l'on note $I(L)$ (resp. $\bar{I}(L)$) la classe des représentations irréductibles (resp. l'ensemble des types d'isomorphie des représentations irréductibles) d'un groupe fini L .

PROPOSITION 2.- *Si k est de caractéristique 2 , alors en associant à chaque représentation de G sa restriction à G', on définit une surjection de $\bar{I}(G)$ sur $\bar{I}(G')$, dont la fibre au-dessus de $\rho' \in \bar{I}(G')$ est formée des $q-1$ produits tensoriels* $\alpha.\rho' = \alpha \otimes \rho'$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$.

Cela est une conséquence immédiate de (3).

PROPOSITION 3.- *Supposons k de caractéristique $\neq 2$. Soit* $(V,\rho) \in I(G)$. *Notons* (V,ρ') *sa restriction à* G'. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) ρ' *est réductible*.

ii) $(V,\rho') = (V_+,\rho') \oplus (V_-,\rho')$,

où V_+ et V_- sont deux sous-représentations irréductibles, non-isomorphes entres elles, de (V,ρ'), de dimension commune $\frac{1}{2}\dim V$.

iii) *Le caractère χ de ρ est porté par* G''.

iv) $\rho \simeq \alpha_o\rho$ $(= (\alpha_o \circ m) \otimes \rho)$,

où l'on note α_o le caractère non-trivial de $k^\times$, de carré trivial et m l'épimorphisme multiplicateur de G sur $k^\times$.

De plus, si iv) *est vérifiée et si Ψ_o est l'un des deux isomorphismes involutifs de (V,ρ) sur $(V,\alpha_o\rho)$, alors on a* ii) *pour*

$$V^{\pm} = \mathrm{Im}(1 \pm \Psi_o) \ .$$

Démonstration : Cela résulte aussitôt du ch.I, §5, n°1, prop.3 et de la proposition 1 ci-dessus.

C.Q.F.D.

En ce qui concerne l'entrelacement des restrictions à G', nous avons la

PROPOSITION 4.- <u>Soient</u> $\rho_1, \rho_2 \in I(G)$. <u>Alors pour que les restrictions de</u> ρ_1 <u>et</u> ρ_2 <u>à</u> G' <u>soient isomorphes, il faut et il suffit que</u>

$$\rho_2 \simeq \alpha\rho_1 \quad (= (\alpha\circ m)\otimes\rho_1)$$

<u>pour un</u> $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ <u>convenable</u>.

<u>Démonstration</u> : Si k est de caractéristique 2 , notre assertion est démontrée par la proposition 2 ci-dessus. Supposons donc $\mathrm{car}\, k \neq 2$. Comme α $(= \alpha\circ m)$ est trivial sur G', il est clair que $\rho_2 \simeq \alpha\rho_1$ entraîne que la restriction ρ_1' de ρ_1 à G' est isomorphe à la restriction ρ_2' de ρ_2 à G'. Réciproquement, supposons $\rho_1' \simeq \rho_2'$. Notons ρ_1'' (resp. ρ_2'') la restriction de ρ_1 (resp. ρ_2) à G''. D'après la proposition 1, on a alors

$$\rho_2'' \simeq (\alpha . 1_{G'})\otimes\rho_1''$$

pour un carré $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$. Si $\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$ est une racine carrée de α , on a donc

$$\rho_2'' \simeq (\beta\circ m)\otimes\rho_1''$$

et par suite (ch.I, §5, n°1, prop.4)

$$\rho_2 \simeq (\beta\circ m)\otimes\rho_1 \quad \text{ou} \quad \rho_2 \simeq \varepsilon[(\beta\circ m)\otimes\rho_1] \ .$$

Comme dans notre cas $\varepsilon = \alpha_o \circ m$, on en tire

$$\rho_2 \simeq \beta\rho_1 \qquad \text{ou} \quad \rho_2 \simeq \alpha_o\beta\rho_1 \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

C.Q.F.D.

3.- <u>Identification des</u> $\alpha\rho$ $(\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)\ ;\ \rho \in I(G))$.

Nous reprenons dans ce numéro les notations des chapitres II et III.

Les deux propositions suivantes sont immédiates.

PROPOSITION 5.- <u>Soit</u> (V,π) <u>une représentation de</u> G_o <u>et</u> $\alpha,\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$. <u>Alors l'application</u> φ_α <u>de</u> $V^{B\times k^\times}$ <u>dans lui-même donnée par</u>

$$[\varphi_\alpha(f)](b,t) = \alpha(t)f(b,t) \qquad (f\in V^{B\times k^\times},\ b\in B,\ t\in K^\times),$$

<u>définit, par restriction, un isomorphisme de la représentation</u> $(M(\pi,\alpha\gamma),\tau)$ <u>sur la représentation</u> $(M(\pi,\gamma),\alpha\tau)$.

PROPOSITION 6.- <u>Soit</u> (H,π) <u>une représentation de</u> G_o <u>et</u> $\alpha,\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$. <u>Posons</u> (cf. ch.II, §4, n°2, déf.4)

$$[\psi_\alpha(f)](v,\bar{b}) = \alpha(<\bar{b}_1,\bar{b}_2>)f(v,\bar{b}) \qquad (f\in H^{\bar{D}_1},\ (v,\bar{b})\in\bar{D}_1).$$

<u>Alors l'application</u> $\psi_{\alpha^{-1}}$ <u>est un isomorphisme de la représentation</u> $(V(\gamma,\alpha\pi),\tau)$ <u>sur la représentation</u> $(V(\gamma,\pi),\alpha\tau)$ (où $\alpha\pi = (\alpha\circ\det)\otimes\pi$).

Pour la représentation de Weil, on a (cf. ch.III, §2, n°3).

PROPOSITION 7.- <u>Soit</u> (W,ρ) <u>la représentation de Weil de</u> G <u>associée à un</u> A-<u>module quadratique</u> $(M,\bar{\mathbb{Q}})$ <u>et à l'espace</u> V <u>d'une représentation</u> π <u>d'un sous-groupe</u> Γ' <u>de</u> $\Gamma = GO(\bar{\mathbb{Q}})$. <u>Faisons choix d'un caractère</u> $e\in X = \mathrm{Car}(k^+) - \{1\}$ <u>et posons, pour</u> $\alpha\in\mathrm{Car}(k^\times)$,

$$[\eta_\alpha(f)](x,e^t) = \alpha(t)f(x,e^t) \qquad (f\in V^{M\times X},\ x\in M,\ t\in k^\times).$$

<u>Alors l'application</u> η_α <u>est un isomorphisme de la représentation</u> $(W[\alpha\pi],\rho)$ <u>sur la représentation</u> $(W[\pi],\alpha\rho)$ (où l'on pose, bien entendu, $\alpha\pi = (\alpha\circ m)\otimes\pi$).

Cela résulte aussitôt des définitions (cf. ch.III, §3, n°1, déf.1).

REMARQUE.- Si l'on veut éviter de faire choix d'un caractère non-trivial e de k^+, on peut poser

$$[\eta_\alpha(f)](x,\psi) = G(\psi,\alpha^{-1})f(x,\psi) \qquad (f\in V^{M\times X},\ (x,\psi)\in M\times X),$$

où l'on note $G(\psi,\alpha^{-1})$ la somme de Gauss associée à ψ et à α^{-1} (cf. ch.I, §2, n°2, déf.4).

COROLLAIRE.- <u>On a</u>

$$\text{i)}\quad (W[\pi_1,\pi_2],\alpha\rho) \simeq (W[\alpha\pi_1,\alpha\pi_2],\rho)$$

<u>pour</u> $\alpha\in \mathrm{Car}(k^{\times})$, <u>quels que soient les représentations</u> π_1 <u>et</u> π_2 <u>de</u> G_o, <u>coïncidant sur les scalaires</u> ;

$$\text{ii)}\quad (W[\pi],\alpha\rho) \simeq (W[\alpha\pi],\rho)$$

<u>pour</u> $\alpha\in \mathrm{Car}(k^{\times})$, <u>quelle que soit la représentation</u> π de $GL(2,K)$, <u>triviale sur les matrices scalaires à rapport dans</u> U (où, bien entendu, $\alpha\pi = (\alpha\circ N\circ\det)\otimes\pi$) ;

$$\text{iii)}\quad \alpha R^{(\pm)}\begin{bmatrix}\mu & \mu'\\ \nu' & \nu\end{bmatrix}^{(i)(j)}_{(\ell)} = R^{(\pm)}\begin{bmatrix}\alpha\mu & \alpha\mu'\\ \alpha\nu' & \alpha\nu\end{bmatrix}^{(i)(j)}_{(\ell)}$$

<u>quels que soient</u> $\alpha\in \mathrm{Car}(k^{\times})$, $\mu,\mu',\nu,\nu'\in \mathrm{Car}(\underset{\sim}{K}^{\times})$ <u>tels que</u> $\mu\nu = \mu'\nu'\in \mathrm{Car}(k^{\times})$, $i\in\{1,q,q^2\}$, $j\in\{1,q\}$, $0\leqslant \ell < 4$ (cf. ch.V, §5, n°3).

En effet, pour obtenir i) (resp. ii)), il suffit d'appliquer la proposition 7 au module quadratique associé à l'espace quadratique (E,Q) de rang 4, déployé (resp. non-déployé), sur k et à $\Gamma' = (G_o\times G_o)/k^{\times}$ (resp. $\Gamma' = GL(2,K)/U$). La troisième assertion résulte de i) et ii), puisque les composantes irréductibles des représentations de G apparaissant dans i) et ii) épuisent toutes les représentations irréductibles de G (cf. ch.V, §5).

§2. <u>Restriction à</u> G' <u>de la série associée à</u> $\xi_{\mathbb{P}}$.

Nous renvoyons au chapitre II (§1, n°1) pour les notations concernant les sous-groupes paraboliques de G, et au paragraphe 2 du même chapitre pour tout ce qui concerne la série de représentations de G associée à P_2.

Rappelons que l'on a posé $P_2' = P_2\cap G'$.

1.- La série de représentations de G' associée à $\xi'_{\mathbb{P}}$.

DEFINITION 1.- On appelle G'-fibration principale canonique au-dessus de $\mathbb{P}$ et l'on note $\xi'_{\mathbb{P}}$, la G'-fibration principale $(\mathbb{B},pr,\mathbb{P},G_o)$ d'espace total $\mathbb{B}$, base $\mathbb{P}$ et projection pr donné par

$$pr(b) = P(b) \qquad (b\in\mathbb{B}),$$

dont l'action du groupe structural G_o est définie par

$$h.b = hb \qquad (h\in G_o\,,\ b\in\mathbb{B})$$

et celle de G' par

$$b.g = bg \qquad (b\in\mathbb{B}\ ,\ g\in G'),$$

et

$$P.g = Pg \qquad (P\in\mathbb{P}\ ,\ g\in G')$$

(cf. ch.II, §2, n°1).

DEFINITION 2.- Soit (V,π) une représentation de G_o . On appelle représentation naturelle de G' associée à π et à $\xi'_{\mathbb{P}}$, et l'on note $(M'(\pi),\tau)$ le $\mathbb{C}[G']$-module

$$\mathrm{Hom}_{G_o}(\xi'_{\mathbb{P}},(V,\pi)) .$$

Autrement dit, l'espace $M'(\pi)$ est formé de toutes les fonctions f de $\mathbb{B}$ dans V telles que

(1) $$f(hb) = \pi(h)[f(b)] \qquad (h\in G_o\,,\ b\in\mathbb{P}),$$

et l'action τ de G' dans $M'(\pi)$ est l'action naturelle donnée par

(2) $$[\tau(g)f](b) = f(bg) \qquad (f\in M'(\pi)\ ,\ g\in G',\ b\in\mathbb{B}).$$

On a (cf. loc. cit.)

(3) $$\dim M'(\pi) = (q+1)(q^2+1)\dim\pi .$$

Bien entendu, on a de même que pour G (cf. ch.II, §2, n°1, prop.1 et son cor.)

(4) $$(M'(\pi),\tau) \simeq \mathrm{Ind}_{P'_2\uparrow G'}(V,\pi\circ\varphi'_2)$$

(où l'on note φ_2' la restriction de φ_2 à P_2').

Enfin, la proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION 1.- Soient $\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times)$ et π une représentation de G_0. Alors en associant à chaque $f \in M(\pi,\gamma)$ sa restriction à $B \times \{1\}$, on définit un G'-isomorphisme p de $M(\pi,\gamma)$ sur $M'(\pi)$.

2.- La série principale de G'.

Nous considérons dans ce numéro, le cas où π appartient à la série principale de G_0. Les représentations $M'(\pi)$ fournissent alors la série principale de G' ; leur entrelacement résulte aussitôt de celui des $M(\pi,\gamma)$ $(\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times))$ (cf. ch.II, §3).

PROPOSITION 2.- Soient $\alpha,\beta,\alpha',\beta' \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha \neq \beta$, $\alpha' \neq \beta'$. Alors

i) la représentation $M'(\pi_{\alpha,\beta})$ est irréductible si $\alpha \neq \alpha^{-1}$, $\beta \neq \beta^{-1}$ et $\beta \neq \alpha^{-1}$;

ii) si la caractéristique de k est différente de 2 et si $\alpha = \alpha_0$ et $\beta \neq \beta^{-1}$, alors on a la G'-décomposition

$$M'(\pi_{\alpha_0,\beta}) = M'_+(\pi_{\alpha_0,\beta}) \oplus M'_-(\pi_{\alpha_0,\beta}),$$

où les sous-représentations $M'_\pm(\pi_{\alpha_0,\beta})$ sont irréductibles, non-isomorphes, de dimension commune $\frac{1}{2}(q+1)^2(q^2+1)$, et données par

$$M'_\pm(\pi_{\alpha_0,\beta}) = p(\mathrm{Im}(1 \pm \Psi_0)) \qquad \text{(cf. §1, n°3)}$$

avec $\Psi_0 = \mu_{\alpha_0} \circ \Phi_0$, où Φ_0 désigne l'un des deux isomorphismes involutifs de $M(\pi_{\alpha_0,\beta},1)$ sur $M(\pi_{\alpha_0,\beta},\alpha_0)$ (cf. ch.II, §2, n°2, prop.2 et cor.2 à la prop.2) ;

iii) l'entrelacement entre les représentations irréductibles ci-dessus est donné par les isomorphismes

$$M'(\pi_{\alpha',\beta'}) \simeq M'(\pi_{\alpha,\beta}) \quad \{\alpha,\beta,\alpha^{-1},\beta^{-1}\} = \{\alpha',\beta',\alpha'^{-1},\beta'^{-1}\}$$

$$M'_\pm(\pi_{\alpha_0,\beta}) \simeq M'_\pm(\pi_{\alpha_0,\beta^{-1}}) .$$

Démonstration : Cela résulte aussitôt des propositions 2 à 4 du numéro 2 du paragraphe 1, du numéro 3 (prop. 5) ci-dessus, et du corollaire 2 à la proposition 2 du numéro 2 du paragraphe 2 du chapitre II.

C.Q.F.D.

Les propositions suivantes sont aussi des conséquences immédiates des résultats cités dans la démonstration ci-dessus.

PROPOSITION 3.- Soit $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha \neq 1$. Soit $i \in \{1,q\}$,

i) la représentation $M'(\pi_{\alpha,1})^i = p(M(\pi_{\alpha,1},1)^i)$ est irréductible si $\alpha^2 \neq 1$;

ii) si k est de caractéristique $\neq 2$, on a la G'-décomposition

$$M'(\pi_{\alpha_o,1})^i = M'_+(\pi_{\alpha_o,1})^i \oplus M'_-(\pi_{\alpha_o,1})^i$$

en deux sous-représentations irréductibles, non-isomorphes, de dimension commune $\frac{1}{2}i(q+1)(q^2+1)$, données par

$$M'_\pm(\pi_{\alpha_o},1)^i = [p\circ(1\pm\Psi_o)](M(\pi_{\alpha_o,1},1)^i)$$

avec $\Psi_o = \mu_{\alpha_o}\circ\Phi_o$, où Φ_o désigne l'un des deux isomorphismes involutifs de $M(\pi_{\alpha_o,1},1)$ sur $M(\pi_{\alpha_o,1},\alpha_o)$ (cf. ch.II, §2, n°2, prop.2 et cor.2 à la prop.2),

iii) l'entrelacement entre les représentations irréductibles ci-dessus est donné par les isomorphismes

$$M'(\pi_{\alpha,1})^i \simeq M'(\pi_{\alpha^{-1},1})^i .$$

PROPOSITION 4.- Soit $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha \neq \alpha^{-1}$. Soit $i \in \{1,q\}$. Alors

i) la représentation $M'(\pi^i_\alpha)$ est irréductible ;

ii) le seul cas d'isomorphie non-trivial entre ces représentations est

$$M'(\pi^i_\alpha) \simeq M'(\pi^i_{\alpha^{-1}}) .$$

PROPOSITION 5.- Pour $i,j \in \{1,q\}$, on a, si k est de caractéristique $\neq 2$,

i) les représentations $M'(\pi^i_{\alpha_o},1)^j = p(M(\pi^i_{\alpha_o},1)^j)$ sont irréductibles pour $i \neq j$;

ii) pour $i = j$, elles se décomposent comme suit

$$M'(\pi^i_{\alpha_o})^i = M'_+(\pi^i_{\alpha_o})^i \oplus M'_-(\pi^i_{\alpha_o})^i$$

en somme de deux sous-représentations irréductibles, non-isomorphes, de dimension commune $\frac{1}{2}\, i^2(q^2+1)$, données par

$$M'_{\pm}(\pi^i_{\alpha_o})^i = [p \circ (1 \pm \Psi_o)](M(\pi^i_{\alpha_o},1)^i)$$

avec $\Psi_o = \mu_{\alpha_o} \circ \Phi_o$, où Φ_o désigne l'un des deux isomorphismes involutifs de $M(\pi^i_{\alpha_o},1)^i$ sur $M(\pi^i_{\alpha_o},\alpha_o)^i$ (cf. ch.II, §2, n°2, prop.2 et cor.2 à la prop.2 et §3, n°2)

ii) le seul cas d'isomorphie non-trivial entre les représentations irréductibles ci-dessus est

$$M'(\pi^q_{\alpha_o})^1 \simeq M'(\pi^1_{\alpha_o})^q \qquad \text{(cf. ch.II, §3, n°2, prop.6).}$$

Nous considérons enfin la décomposition de $(M'(\pi^q_1 \oplus \pi^1_1),\tau)$ c'est-à-dire (ch.II, §3, n°4, déf.5 et prop.9) de la représentation $(\underline{D},\tau)$ restreinte à G' (que nous notons encore $(\underline{D},\tau)$).

PROPOSITION 6.- On a

$$\mathrm{End}_G(\underline{D},\tau) = \mathrm{End}_{G'}(\underline{D},\tau) .$$

Démonstration : Cela est clair parce que nous avons affaire à l'induite du caractère unité de B à G et à l'induite du caractère unité de B' à G' et que G et G' ont même groupe de Weyl (d'ordre 8).

C.Q.F.D.

Nous pouvons maintenant donner une description de la série principale de G' :

THEOREME 1.- *La série principale de* G' *est formée*

i) *des* $\frac{1}{8}(q-3)(q-5)$ (resp. $\frac{1}{8}(q-2)(q-4)$) *types d'isomorphie des représentations* $M'(\pi_{\alpha,\beta})$, *de dimension* $(q+1)^2(q^2+1)$, *pour* $\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$ *tels que* $|\{\alpha,\beta,\alpha^{-1},\beta^{-1}\}| = 4$, *si* car $k \neq 2$ (resp. si car $k = 2$) ;

ii) *des* $\frac{1}{2}(q-3)$ *types d'isomorphie des représentations* $M'_{\pm}(\pi_{\alpha_o,\beta})$ *de dimension* $\frac{1}{2}(q+1)^2(q^2+1)$, *pour* $\beta \in \mathrm{Car}(k^\times)$ *tel que* $\beta \neq \beta^{-1}$, *si* car $k \neq 2$;

iii) *des* $\frac{1}{2}(q-3)$ (resp. $\frac{1}{2}(q-2)$) *types d'isomorphie des représentations* $M'(\pi_{\alpha,1})^i$, *de dimension* $i(q+1)(q^2+1)$, *pour* $i \in \{1,q\}$, $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ *tel que* $\alpha \neq \alpha^{-1}$ *si* car $k \neq 2$ (resp. car $k = 2$) ;

iv) *des* 4 *représentations* $M'_{\pm}(\pi_{\alpha_o,1})^i$ ($i \in \{1,q\}$), *de dimension* $\frac{1}{2}i(q+1)(q^2+1)$, *si* car $k \neq 2$;

v) *des* $\frac{1}{2}(q-3)$ (resp. $\frac{1}{2}(q-2)$) *types d'isomorphie des représentations* $M'(\pi_\alpha^i)$, *de dimension* $i(q+1)(q^2+1)$, *pour* $i = 1,q$ *et* $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha \neq \alpha^{-1}$, *si* car $k \neq 2$ (resp. car $k = 2$) ;

vi) *des* 4 *représentations* $M'_{\pm}(\pi^i_{\alpha_o})^i$ $(i = 1,q)$, *de dimension* $\frac{1}{2}\, i^2(q^2+1)$ *et de la représentation* $M'(\pi^1_{\alpha_o})^q$ $(\simeq M'(\pi^q_{\alpha_o})^1)$ *de dimension* $q(q^2+1)$, *si* car $k \neq 2$;

vii) *de la représentation de Steinberg* $St = \underline{D}^{0,0}$, *de dimension* q^4 ;

viii) *de deux représentations* ${}^{-}\underline{P}^{o}$ *et* ${}^{-}\underline{L}^{o}$, *de dimension* $\frac{1}{2}q(q^2+1)$;

ix) *de la représentation* ${}^{+}\underline{L}^{o}$ $(\simeq {}^{+}\underline{P}^{o})$ *de dimension* $\frac{1}{2}q(q+1)^2$;

x) *de la représentation unité* 1.

Démonstration : Cela résulte aussitôt des propositions ci-dessus, et du théorème 3 du ch.II, §3, n°7.

C.Q.F.D.

3.- <u>La série de représentations de</u> G' <u>associée à</u> P'_2 .

Nous renvoyons au chapitre II (n^{os} 3 et 4) pour ce qui concerne la série de représentations de G associée à P_2 .

Nous considérons dans ce numéro le cas où π dans $M'(\pi)$ appartient à la série discrète de G_o . Les représentations $M'(\pi)$ fournissent alors (n°1, (4)), par décomposition en composantes irréductibles si besoin est, la série de représentations de G' associé au sous-groupe parabolique P'_2 . L'entrelacement des représentations $M'(\pi)$ résulte aussitôt de celui des $M(\pi,\gamma)$ $(\gamma \in \mathrm{Car}(k^\times))$ (ch.II, §2, n°2, cor. 1 et 2 à la prop.2 et n^{os} 3 et 4), d'après les résultats du paragraphe 1. Nous le détaillons ci-dessous.

PROPOSITION 7.- <u>Soit</u> $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$. <u>Alors</u>

i) <u>la représentation</u> $M'(\pi_\Lambda)$ <u>est irréductible pour</u> $\Lambda^{q+1} \neq 1$;

ii) <u>les représentations</u> $M'(\pi_\Lambda)^i = p(M(\pi_\Lambda,1)^i)$ $(i=1,q)$ <u>sont irréductibles</u>, <u>dans le cas</u> $\Lambda^{q+1} = 1$;

iii) <u>pour que</u> $M'(\pi_\Lambda) \simeq M'(\pi_\Phi)$ (resp. $M'(\pi_\Lambda)^i \simeq M'(\pi_\Phi)^i$, <u>pour</u> $i \in \{1,q\}$), <u>il faut et il suffit que</u>

$$\{\Lambda,\Lambda^q,\Lambda^{-1},\Lambda^{-q}\} = \{\Phi,\Phi^q,\Phi^{-1},\Phi^{-q}\} .$$

<u>Démonstration</u> : Les assertions i) et ii) sont des conséquences immédiates des propositions 2 et 3 du paragraphe 1 (n°2), de la proposition 5 du même paragraphe (n°3) et du ch.II, §2, n°2, cor.2 i) à la prop.2 (notons que le cas $\Lambda = \Lambda^{-1}$ est exclu, puisque $\Lambda \notin \mathrm{Car}(k^\times)$). L'assertion iii) résulte aussitôt des propositions 2 et 4 du paragraphe 1 (n°2), de la proposition 5 du même paragraphe et du ch.II (loc. cit.).

C.Q.F.D.

Nous avons donc la description suivante de la série de G' associée à P'_2 .

THEOREME 2.- Supposons k de caractéristique différente de 2 (resp. k de caractéristique 2). Alors la série de représentations de G' associée au sous-groupe parabolique P_2' est formée

i) des $\frac{1}{4}(q-1)^2$ (resp. $\frac{1}{4}q(q-2)$) types d'isomorphie des représentations $M'(\pi_\Lambda)$, de dimension q^4-1, pour $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - [\mathrm{Car}(k^\times) \cup \mathrm{Car}(U)]$ (c'est-à-dire, pour $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$ tel que $|\{\Lambda, \Lambda^q, \Lambda^{-1}, \Lambda^{-q}\}| = 4$) ;

ii) des $\frac{1}{2}(q-1)$ (des $\frac{1}{2}q$) types d'isomorphie des représentations $M'(\pi_\Lambda)^i$, de dimension $i(q-1)(q^2+1)$, pour $\Lambda \in \mathrm{Car}(U) - \mathrm{Car}(k^\times)$, $i \in \{1, q\}$.

Cela est une conséquence immédiate de la proposition ci-dessus.

En ce qui concerne les notations du théorème, rappelons que l'on identifie $\mathrm{Car}(U)$ à son image dans $\mathrm{Car}(K^\times)$ par le monomorphisme $\omega \mapsto \omega \circ \mathfrak{u}$, où $\mathfrak{u}(a) = a^{1-q}$, pour tout $a \in K^\times$. Alors la condition $\Lambda^{q+1} = 1$ signifie exactement $\Lambda \in \mathrm{Car}(U)$, pour $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$.

§3. Restriction à G' de la série associée à $\xi_{\underline{L}}$.

Nous reprenons dans ce paragraphe les notations du paragraphe 4 du chapitre II. Rappelons que l'on a posé $P_1' = P_1 \cap G'$.

1.- La série de représentations de G' associée à $\xi_{\underline{L}}'$.

DEFINITION 1.- On appelle G'-fibration principale canonique au-dessus de $\underline{L}$ et l'on note $\xi_{\underline{L}}'$, la G'-fibration principale $(\bar{D}_1', \mathrm{pr}, \underline{L}, k^\times \times G_0')$ d'espace total $\bar{D}_1'$, de base $\underline{L}$, de projection pr, et de groupe structural $k^\times \times G_0'$, définie comme suit :

i) l'espace total $\bar{D}_1'$ est l'ensemble des couples $(v, \bar{b})$, où $v \in {}_*E = E - \{0\}$ et $\bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix}$ est une base du plan $P_\ell = \ell(v)^\perp/\ell(v)$

telle que $<\bar{b}> = <\bar{b}_1,\bar{b}_2> = 1$;

ii) on pose

$$pr(v,\bar{b}) = \ell(v) \qquad ((v,\bar{b}) \in \bar{D}'_1) ;$$

iii) l'action, à gauche, du groupe structural $k^\times \times G'_o$ dans $\bar{D}'_1$ est donnée par

$$(t,h).(v,\bar{b}) = (tv,h\bar{b}) \qquad (t \in k^\times,\ h \in G'_o,\ (v,\bar{b}) \in \bar{D}'_1) ;$$

iv) l'action à droite, de G' dans $\xi'_{\underset{w}{L}}$, est l'action naturelle donnée par

$$(v,\bar{b})g = (vg,\bar{b}\bar{g}) \qquad ((v,\bar{b}) \in \bar{D}'_1\ ,\ g \in G')$$

où l'on note simplement $\bar{g}$ l'isomorphisme $\bar{g}_\ell$ de $P_{\ell(v)}$ sur $P_{\ell(vg)}$ déduit de g par passage aux quotients, et $\bar{b}\bar{g}$ la transformée de la base $\bar{b}$ de $P_{\ell(v)}$ par cet isomorphisme.

DEFINITION 2.- Soit $\alpha \in Car(k^\times)$ et (H',π') une représentation de G'_o. On appelle représentation naturelle de G' associée à $\xi'_{\underset{w}{L}}$ et à $\alpha \otimes \pi$, et l'on note $(V'(\alpha,\pi'),\tau)$, le $\mathbb{C}[G']$-module

$$\mathrm{Hom}_{k^\times \times G'_o}(\xi'_{\underset{w}{L}},H') .$$

Autrement dit, l'espace $V'(\alpha,\pi')$ est formé de toutes les fonctions f de $\bar{D}'_1$ dans H' telles que

$$(1) \qquad f(tv,h\bar{b}) = \alpha(t)\pi'(h)[f(v,\bar{b})] \qquad ((v,\bar{b}) \in \bar{D}'_1\ ,\ t \in k^\times,\ h \in G'_o)$$

et l'action τ de G' dans $V'(\alpha,\pi')$ est l'action naturelle donnée par

$$(2) \qquad [\tau(g)f](v,\bar{b}) = f(vg,\bar{b}\bar{g}) \qquad ((v,\bar{b}) \in \bar{D}'_1\ ,\ f \in V'(\alpha,\pi')\ ,\ g \in G').$$

On a (cf. ch.II, §4)

$$\dim V'(\alpha,\pi') = (q+1)(q^2+1)\dim \pi .$$

Bien entendu, on a, de même que pour G (cf. loc. cit., cor. à la prop. 1)

$$(3) \qquad (V'(\alpha,\pi'),\tau) \simeq \operatorname{Ind}_{P_1'\uparrow G'} [(\alpha\otimes\pi')\circ\varphi_1']$$

(où l'on note φ_1' la restriction de φ_1 à P_1').

Enfin, la proposition suivante est immédiate.

PROPOSITION 1.- Soient $\alpha\in \operatorname{Car}(k^\times)$ et π une représentation de G_o. Notons π' la restriction de π à G_o'. Alors, en associant à chaque fonction $f\in V(\alpha,\pi)$ sa restriction à $\bar{D}_1'$, on définit un G'-isomorphisme p de $V(\alpha,\pi)$ sur $V'(\alpha,\pi')$.

2.- La série de représentations de G' associée à P_1'.

Nous considérons maintenant le cas où π' dans $V'(\alpha,\pi')$ est dans la série discrète de G_o'. Rappelons que la série de représentations de G' associée à P_1' est l'ensemble des types d'isomorphie des composantes irréductibles des représentations $V'(\alpha,\pi')$ ($\alpha\in \operatorname{Car}(k^\times)$, π' dans la série discrète de G_o').

Pour ce qui concerne la série discrète de G_o', nous renvoyons au ch.I, §5, n°9.

PROPOSITION 2.- Soit $\alpha\in \operatorname{Car}(k^\times)$ et $\omega\in \operatorname{Car}(U)-\{1\}$. Alors

i) la représentation $V'(\alpha,\pi_\omega')$ est irréductible si $\alpha^2\neq 1$ et si $\omega^2\neq 1$;

ii) lorsque car $k\neq 2$, la représentation $V'(\alpha,\pi'^{\pm}_{\omega_o})$ est irréductible, si $\alpha^2\neq 1$;

iii) la représentation $V'(1,\pi_\omega')^i = p(V(1,\pi_\Lambda)^i)$ (où $\Lambda\in \operatorname{Car}(K^\times)-\operatorname{Car}(k^\times)$ est tel que $1_{|U}=\omega$) est irréductible pour $i\in\{1,q\}$, si $\omega^2\neq 1$;

iv) lorsque car $k\neq 2$, la représentation $V'(1,\pi'^{\pm}_{\omega_o})$ a deux composantes irréductibles, non-isomorphes

$$V'(1,\pi'^{\pm}_{\omega_o}) = V'(1,\pi'^{\pm}_{\omega_o})^q \oplus V'(1,\pi'^{\pm}_{\omega_o})^1 ,$$

<u>à savoir</u>

$$V'(1,\pi'^{\pm}_{\omega_o})^i = V'(1,\pi'^{\pm}_{\omega_o}) \cap p(V(1,\pi_{\Lambda_o})^i) \qquad (i\in\{1,q\};\ \text{cf. prop.1}),$$

<u>où l'on note</u> Λ_o <u>le caractère non-trivial de</u> $K^\times$ <u>de carré trivial</u> ;

v) <u>lorsque</u> car $k \neq 2$, <u>on a la décomposition</u>

$$V'(\alpha_o,\pi'_\omega) = V'_+(\alpha_o,\pi'_\omega) \oplus V'_-(\alpha_o,\pi'_\omega)$$

<u>en deux composantes irréductibles</u>, <u>non-isomorphes</u>, <u>données par</u>

$$V'_\pm(\alpha_o,\pi'_\omega) = [p\circ(1\pm\Psi_o)](V(\alpha_o,\pi_\Lambda))$$

<u>où</u> $\Lambda\in \mathrm{Car}(K^\times)$ <u>est tel que</u> $\Lambda_{|U} = \omega$ <u>et</u> Ψ_o <u>est l'un des deux isomorphismes involutifs de</u> $V(\alpha_o,\pi_\Lambda)$ <u>sur</u> $V(\alpha_o,\alpha_o\pi_\Lambda)$, <u>suivi de</u> ψ_{α_o} (cf. ch.II, §4, n°2, prop.2, cor.2 à la prop.2, et §1, n°3, prop.6 ci-dessus), <u>pour</u> $\omega \neq \omega_o$;

vi) <u>lorsque</u> car $k \neq 2$, <u>on a la décomposition</u>

$$V'(\alpha_o,\pi'^{\pm}_{\omega_o}) = V'(\alpha_o,\pi'^{\pm}_{\omega_o})^1 \oplus V'(\alpha_o,\pi'^{\pm}_{\omega_o})^{q^2}$$

<u>en deux composantes irréductibles</u>, <u>non-isomorphes</u>, <u>données par</u>

$$V'(\alpha_o,\pi'^{\pm}_{\omega_o})^i = V'(\alpha_o,\pi'^{\pm}_{\omega_o}) \cap p(V(\alpha_o,\pi_{\Lambda_o})^i) \qquad (i\in\{1,q^2\}).$$

<u>Démonstration</u> : Cela résulte aussitôt de la proposition 1 ci-dessus, des propositions 2 et 3 du numéro 2 du paragraphe 1 , de la proposition 6 du numéro 3 du même paragraphe et du fait que la condition $\alpha_o\pi_\Lambda \simeq \pi_\Lambda$ $(\Lambda\in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times))$ signifie $\Lambda_{|U} = \omega_o$ et donc

$$\operatorname*{Res}_{G_o \downarrow G'_o} \pi_\Lambda = \pi'^{+}_{\omega_o} \oplus \pi'^{-}_{\omega_o}$$

(en plus, bien entendu, des résultats des numéros 3, 4 et 5 du paragraphe 4 du chapitre II).

C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.- _Gardons les notations de la proposition_ 2 _ci-dessus. Alors tous les isomorphismes entre des représentations irréductibles, parmi celles ci-dessus, correspondant à des paramètres_ $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$ _et_ $\omega \in \mathrm{Car}(U) - \{1\}$ _différents, s'obtiennent en échangeant_ α _et_ α^{-1}, ω _et_ ω^{-1} (_pour_ $\alpha \neq \alpha^{-1}$, $\omega \neq \omega^{-1}$).

Démonstration : Cela résulte aussitôt de la proposition 4 du numéro 2 du paragraphe 1, de la proposition 1 ci-dessus, du corollaire 3 à la proposition 2 du paragraphe 4 du chapitre II et du fait que $\pi'_\omega \sim \pi'_{\omega'}$ signifie $\omega' = \omega$ ou $\omega' = \omega^{-1}$ $(\omega, \omega' \in \mathrm{Car}(U))$.

C.Q.F.D.

Nous pouvons maintenant décrire la série associée à P'_1.

THEOREME 1.- _La série de représentations de_ G' _associée à_ P'_1 _est formée_

i) _des_ $\frac{1}{4}(q-3)(q-1)$ (resp. $\frac{1}{4}(q-2)q$) _types d'isomorphie des représentations_ $V'(\alpha, \pi'_\omega)$, _de dimension_ q^4-1, _pour_ $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha^2 \neq 1$, $\omega \in \mathrm{Car}(U)$, $\omega^2 \neq 1$, _lorsque_ car $k \neq 2$ (resp. car $k = 2$) ;

ii) _des_ $\frac{1}{2}(q-3)$ _types d'isomorphie des représentations_ $V'(\alpha, \pi'^{\pm}_{\omega_0})$, _de dimension_ $\frac{1}{2}(q^4-1)$, _pour_ $\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times)$, $\alpha^2 \neq 1$, _lorsque_ car $k \neq 2$;

iii) _des_ $\frac{1}{2}(q-1)$ _types d'isomorphie des représentations_ $V'_{\pm}(\alpha_0, \pi'_\omega)$, _de dimension_ $\frac{1}{2}(q^4-1)$, _pour_ $\omega \in \mathrm{Car}(U)$, $\omega^2 \neq 1$, _lorsque_ car $k \neq 2$;

iv) _des_ $\frac{1}{2}(q-1)$ (resp. $\frac{1}{2}q$) _types d'isomorphie des représentations_ $V'(1, \pi'_\omega)^i$, _de dimension_ $i(q-1)(q^2+1)$, _pour_ $i \in \{1, q\}$ _et_ $\omega \in \mathrm{Car}(U)$, $\omega^2 \neq 1$, _lorsque_ car $k \neq 2$ (resp. car $k = 2$) ;

v) _des quatre représentations_ $V'(1, \pi'^{\pm}_{\omega_0})^i$, _de dimension_ $\frac{1}{2}i(q-1)(q^2+1)$, _pour_ $i \in \{1, q\}$, _lorsque_ car $k \neq 2$;

vi) _des quatre représentations_ $V'(\alpha_0, \pi'^{\pm}_{\omega_0})^i$, _de dimension_ $\frac{1}{2}i(q^2-1)$, _pour_ $i \in \{1, q^2\}$, _lorsque_ car $k \neq 2$.

Démonstration : Cela résulte aussitôt des propositions 2 et 3 ci-dessus, ainsi que des résultats du ch.II, §4, n°6, th.1 .

C.Q.F.D.

§4. Restriction à G' de la représentation de Weil de G .

Nous montrons comment on peut définir directement une représentation de Weil pour G', qui s'obtient aussi "par restriction" à partir de celle que nous avons construite pour G . Ensuite nous décrivons la série discrète de G', obtenue en restreignant à G' la série discrète de G réalisée au moyen de la représentation de Weil. On a donc ainsi aussi une construction directe de la série discrète de G'.

Dans la suite de ce paragraphe, nous gardons les notations des ch.3, 4, 5.

1.- La représentation de Weil de G'.

Il est clair que l'on peut définir une représentation de Weil de G' associée à un A-module quadratique $(M,\bar{\mathbb{Q}})$, et à un espace vectoriel V , en supprimant simplement l'ensemble auxiliaire de paramètres X , et en choisissant un caractère $e \in X$, dans le théorème 1 du ch.III, §2, n°3. De manière plus précise :

THEOREME 1.- Soit $(M,\bar{\mathbb{Q}})$ un A-module quadratique non-dégénéré, de dimension paire $2rn$ sur k et V un espace vectoriel quelconque. On fixe un caractère non-trivial e de k^+ . On peut définir une représentation $(W',\rho') = (W'_{\mathbb{Q}},\rho'_{\mathbb{Q}})$, appelée représentation de Weil associée à $(M,\bar{\mathbb{Q}})$ et à V , en posant $W' = V^M$ et en se donnant ρ sur les générateurs $\underline{h}(a)$ $(a \in A^{\times})$, $\underline{u}(b)$ $(b \in A^{s})$ et w de G' (cf. ch.III, §1, n°2) par les formules suivantes (avec $\underline{e} = e \circ Tr$)

$$(1) \qquad [\rho'(\underline{h}(a))f](x) = f(xa) \qquad (a \in A^{\times})$$

(2) $[\rho'(\underline{u}(b))f](x) = \underline{e}(b\bar{Q}(x))f(x)$ $(b \in A^s)$

(3) $[\rho'(w)f](x) = \varepsilon(\mathrm{Tr}\circ\bar{Q})|M|^{-1/2} \sum_{y\in M} \underline{e}(\bar{B}(x,y))f(y)$

pour $f \in W'$, $x \in M$.

En outre, si à chaque isomorphisme γ d'un A-module quadratique $(M_1,\bar{Q}_1)$ sur $(M,\bar{Q})$, on associe l'isomorphisme $\tilde{\gamma}$ de la représentation de Weil (W',ρ') associée à $(M,\bar{Q})$ sur la représentation de Weil (W'_1,ρ'_1) associée à $(M_1,\bar{Q}_1)$, donné par

(4) $\tilde{\gamma}(f) = f\circ\gamma$ $(f \in W)$,

alors la correspondance ainsi définie est fonctorielle.

Cette représentation de Weil peut donc se décomposer suivant les représentations du groupe orthogonal $O(\bar{Q}) = O(Q)$, (où l'on note (E,Q) le k-espace quadratique dont provient $(M,\bar{Q})$). En gardant les notations du théorème, on pose la

DEFINITION 1.- Soient Γ'_1 un sous-groupe de $O(Q)$ et (V,π') une représentation de Γ'_1. On note $(W'[\pi'],\rho')$ la sous-représentation de (W',ρ') dont l'espace $W'[\pi']$ est formé des fonctions f de M dans V telles que

(5) $f(\gamma.x) = \pi'(\gamma)[f(x)]$ $(\gamma \in \Gamma'_1,\ x \in M)$.

La proposition 1 du paragraphe 3 (n°1) du chapitre III se transpose alors mutatis mutandis. Nous avons en outre

PROPOSITION 1.- Soit $(M,\bar{Q})$ un A-module quadratique, non-dégénéré, de dimension paire $2rn$ sur k. Soit Γ_1 un sous-groupe de $\Gamma = GO(\bar{Q})$ tel que $GO(Q) = \Gamma.O(Q)$ et (V,π) une représentation de Γ_1. Posons $\Gamma'_1 = \Gamma_1 \cap O(Q)$ et notons (V,π') la restriction de (V,π) à Γ'_1. Alors en associant à chaque fonction f de $M\times X$ dans V sa restriction à $M\times\{e\}$, on définit un G'-isomorphisme de $(W[\pi],\rho)$ sur $(W'[\pi'],\rho')$.

Cela est immédiat.

2.- <u>Remarques sur la paramétrisation des restrictions à</u> G' .

Rappelons (ch.V, §5, n°3, déf.1) que l'on a noté $\underline{\underline{C}}$ l'ensemble de tous les carrés C , symétriques à leur conjugué, de la forme

(6) $$C = \begin{bmatrix} \mu & \mu' \\ \nu' & \nu \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mu\nu = \mu'\nu' \qquad (\mu,\mu',\nu,\nu' \in \mathrm{Car}(\underset{\approx}{K}^{\times})).$$

Nous nous sommes servis de ces carrés pour paramétrer les représentations de G . Cette paramétrisation en termes des carrés $C \in \underline{\underline{C}}$ se transpose aussitôt aux modèles $W[\pi]$ $(\pi \in GO(\mathbb{Q}))$. Nous considérons ici le cas où Q est de rang 4, traité aux chapitres IV et V. Nous avons déjà défini ces notations dans le cas non-déployé (ch.V, §2, n°1, déf.2). De manière précise, dans le cas déployé on pose, si $\pi^{(i)}_{\Lambda,\Phi}$, $\pi^{(j)}_{\Lambda',\Phi'}$ sont des représentations irréductibles de G_o , coïncidant sur les scalaires,

(7) $$W\begin{bmatrix} \Lambda & \Lambda' \\ \Phi' & \Phi \end{bmatrix}^{(i),(j)} = W\left[\pi^{(i)}_{\Lambda,\Phi} , \pi^{(j)}_{\Lambda',\Phi'}\right] .$$

Ici $\Lambda,\Phi,\Lambda',\Phi'$ désignent des caractères convenables de $K^{\times}$, tels que $\Lambda\Phi = \Lambda'\Phi'$; on convient d'écrire

(8) $$\pi^{i}_{\Lambda} = \pi^{i}_{\Lambda,\Lambda} \qquad (\Lambda \in \mathrm{Car}(k^{\times}))$$

(9) $$\pi_{\Lambda} = \pi_{\Lambda,\Lambda^q} \qquad (\Lambda \in \mathrm{Car}(K^{\times}) - \mathrm{Car}(k^{\times})).$$

Nous considérons maintenant une paramétrisation pour les représentations de G', naturellement déduite de celle-ci.

DEFINITION 2.- <u>Notons</u> $\underline{\underline{D}}$ <u>le groupe</u> $\mathrm{Car}(\underset{\approx}{K}^{\times}) \times \mathrm{Car}(\underset{\approx}{K}^{\times})$. <u>Notons</u> r <u>l'homomorphisme du groupe</u> $\underline{\underline{C}}$ <u>de tous les carrés à coefficients dans</u> $\mathrm{Car}(\underset{\approx}{K}^{\times})$, <u>vérifiant</u> (6), <u>dans</u> $\underline{\underline{D}}$, <u>défini par</u>

$$r\begin{bmatrix} \mu & \mu' \\ \nu' & \nu \end{bmatrix} = [\mu\nu'^{-1} , \mu'\mu^{-1}] \qquad \left(\begin{bmatrix} \mu & \mu' \\ \nu' & \nu \end{bmatrix} \in \underline{\underline{C}}\right).$$

Il est clair que le noyau de r est formé des carrés $\mu = \begin{bmatrix} \mu & \mu \\ \mu & \mu \end{bmatrix}$ tels que $\mu^2 \in \mathrm{Car}(k^\times)$. Comme on a $\mu \in \mathrm{Car}(k^\times)$ si C et μC sont dans $\underline{\underline{C}}$, nous voyons que r définit une injection de l'ensemble quotient $\underline{\underline{C}}/\mathrm{Car}(k^\times)$ dans $\underline{\underline{D}}$. Compte tenu de la proposition 4 du paragraphe 1 (n°2) et du corollaire à la proposition 7 du même paragraphe (n°3), on est donc amené à poser la

DEFINITION 3.- On pose

$$W^{(\pm)}[r(C)]^{(i),(j)} = \operatorname*{Res}_{G\downarrow G'} W^{(\pm)}[C]^{(i),(j)}$$

pour $C \in \underline{\underline{C}}$, $i \in \{1,q,q^2\}$, $j \in \{1,q\}$ et

$$R^{(\pm)}[r(C)]^{(i),(j)}_{(\ell)} = \operatorname*{Res}_{G\downarrow G'} W^{(\pm)}[C]^{(i),(j)}_{(\ell)}$$

pour $C \in \underline{\underline{C}}$, $i \in \{1,q,q^2\}$, $j \in \{1,q\}$, ℓ entier, $0 \leqslant \ell \leqslant 5$.

3.- La série principale de G'.

Nous signalons dans ce numéro que les décompositions des représentations de la série principale de G restreintes à G' deviennent évidentes dans les modèles de Weil.

Rappelons que l'on note $\tilde{T}$ l'isomorphisme involutif de $W[\pi_1,\pi_2]$ (resp. $W[\pi_1 \otimes \pi_2]$) sur $W[\pi_2,\pi_1]$ (resp. $W[\pi_2 \otimes \pi_1]$), déduit de l'action de la transposition T dans $\tilde{E} = E^2 \times X$ (cf. ch.IV, §2, n°2, prop.3) dans le cas déployé, en rang 4.

PROPOSITION 2.- Si k est de caractéristique différente de 2, on a la réalisation suivante de la décomposition de la proposition 2 ii) du paragraphe 2 (n°2)

$$W[\alpha\beta^{*-1},\alpha_0] = W_+[\alpha\beta^{*-1},\alpha_0] \oplus W_-[\alpha\beta^{*-1},\alpha_0] \qquad (\alpha,\beta \in \mathrm{Car}(k^\times), \beta \neq \alpha,\alpha^*)$$

avec

$$W_\pm[\alpha\beta^{*-1},\alpha_0] = \mathrm{Im}(1 \pm \Psi_1) \qquad (\text{où } \alpha^* = \alpha_0\alpha)$$

où

$$\Psi_1 = \eta_{\alpha_o} \circ \tilde{T} : \left(W\begin{bmatrix}\alpha & \alpha^* \\ \beta^* & \beta\end{bmatrix}, \rho\right) \xrightarrow{\sim} \left(W\begin{bmatrix}\alpha & \alpha^* \\ \beta^* & \beta\end{bmatrix}, \alpha_o\rho\right)$$

(cf. §1, n°3, prop.7).

Démonstration : Cela est immédiat, en vertu de la proposition 3 du numéro 2 du paragraphe 1 et la table 6 du chapitre IV.

C.Q.F.D.

De même, on a aussitôt les deux propositions suivantes.

PROPOSITION 3.- Si k est de caractéristique différente de 2, alors la décomposition ii) de la proposition 3 du paragraphe 2 (n°2) se réalise de la manière suivante (cf. déf.3 ci-dessus)

$$W[\alpha_o, 1]^i \simeq W_+[\alpha_o, 1]^i \oplus W_-[\alpha_o, 1]^i \qquad (i \in \{1, q\})$$

avec

$$W_{\pm}[\alpha_o, 1] = \mathrm{Im}(1 \pm \Psi_1)$$

où

$$\Psi_1 = \eta_{\alpha_o} \circ \tilde{T} : \left(W\begin{bmatrix}1 & 1 \\ \alpha_o & \alpha_o\end{bmatrix}^i, \rho\right) \xrightarrow{\sim} \left(W\begin{bmatrix}1 & 1 \\ \alpha_o & \alpha_o\end{bmatrix}^i, \alpha_o\rho)\right) \qquad (i \in \{1, q\}),$$

en désignant par $W\begin{bmatrix}1 & 1 \\ \alpha_o & \alpha_o\end{bmatrix}^q$ l'image de $M(\pi_{\alpha_o, 1}, \alpha_o)^q$ dans $W^+\begin{bmatrix}1 & 1 \\ \alpha_o & \alpha_o\end{bmatrix}$ par l'isomorphisme indiqué au numéro 1 du paragraphe 4 du chapitre IV (cf. table 6) et en posant

$$W\begin{bmatrix}1 & 1 \\ \alpha_o & \alpha_o\end{bmatrix}^1 = W^-\begin{bmatrix}1 & 1 \\ \alpha_o & \alpha_o\end{bmatrix}.$$

PROPOSITION 4.- Supposons car $k \neq 2$. Alors (cf. prop.5 ii), §2, n°2), on a

$$M'_{\pm}(\pi^i_{\alpha_o})^i \simeq W_{\pm}[\alpha_o, \alpha_o]^i = \mathrm{Im}(1 \pm \Psi_1) \qquad (i \in \{1, q\})$$

où

$$\Psi_1 = \eta_{\alpha_o} \circ \tilde{T} : \left(W\begin{bmatrix}1 & \alpha_o \\ \alpha_o & 1\end{bmatrix}^{i,i}, \rho\right) \xrightarrow{\sim} \left(W\begin{bmatrix}1 & \alpha_o \\ \alpha_o & 1\end{bmatrix}^{-i,i}, \alpha_o\rho\right) \; (i \in \{1, q\}).$$

4.- La série de représentations de G' associée à P'_1 .

Dans ce cas aussi, les scindages qui se produisent par restriction à G' sont immédiats. Nous donnons ci-dessous ceux qui ne l'étaient pas déjà.

Considérons tout d'abord la représentation de la série associée à P'_1 qui apparaît dans la restriction à G' de la série déployée de G (c'est-à-dire, donnée par décomposition de la représentation de Weil en rang 4, déployé).

PROPOSITION 5.- On a (si car $k \neq 2$) (cf. prop.2 iv), §3, n°2)

$$V'(1,\pi'^{\pm}_{\omega_o})^q \simeq W_{\pm}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Lambda_o & \Lambda_o \end{bmatrix} = \mathrm{Im}(1 \pm \Psi_1)$$

avec

$$\Psi_1 = \eta_{\alpha_o} \circ \tilde{T} : \left(W\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Lambda_o & \Lambda_o \end{bmatrix}, \rho\right) \xrightarrow{\sim} \left(W\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Lambda_o & \Lambda_o \end{bmatrix}, \alpha_o \rho\right)$$

(où l'on note ω_o (resp. Λ_o) le caractère non-trivial de U (resp. $K^\times$), de carré trivial ; en fait avec nos conventions d'identification $\alpha_o = \omega_o = \Lambda_o$).

Démonstration : Cela résulte aussitôt du §1, n°2, prop.3 et du ch.IV, table 6.

C.Q.F.D.

Rappelons que, dans le cas non-déployé, on note $\tilde{F}$ l'isomorphisme involutif de $W[\pi]$ sur $W[\pi \circ F]$ déduit de l'action du Frobenius F dans $\tilde{E} = E^2 \times X$ (cf. ch.V, §2, n°2). Rappelons aussi que l'on pose $\Lambda^* = \Lambda_o \Lambda$, pour $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times)$.

PROPOSITION 6.- On a (si car $k \neq 2$), pour $\omega \in \mathrm{Car}(U) - \{1\}$

$$V'_{\pm}(\alpha_o, \pi'_\omega) \simeq W_{\pm}[\alpha_o, \Lambda^{1-q}]$$

où $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$ est tel que $\Lambda_{|U} = \omega$ (donc $\Lambda^{1-q} = \omega \circ \mathfrak{u}$, pour $\mathfrak{u}(a) = a^{1-q}$, $a \in K^\times$, et par suite $\Lambda^{1-q} = \omega$, suivant nos conventions) et où

$$W_{\pm}[\alpha_o,\Lambda^{1-q}] = \mathrm{Im}(1 \pm \Psi_2)$$

avec

$$\Psi_2 = \eta_{\alpha_o} \circ S_2 \circ \tilde{F} : \left(W\begin{bmatrix}\Lambda & \Lambda^q\\ \Lambda^* & \Lambda^{*q}\end{bmatrix},\rho\right) \xrightarrow{\sim} \left(W\begin{bmatrix}\Lambda & \Lambda^q\\ \Lambda^* & \Lambda^{*q}\end{bmatrix},\alpha_o\rho\right)$$

en désignant par S l'isomorphisme involutif de $\pi_{\Lambda,\Phi}$ sur $\pi_{\Phi,\Lambda}$ qui dans le modèle de Weil est déduit de la transposition $(a,b;c) \mapsto (b,a;c)$ $(a,b \in K\ ,\ c \in K^{\times})$.

Démonstration : Cela résulte aussitôt du ch.V, §4, n°1, prop.1 et du §1, n°2, prop.3 ci-dessus.

C.Q.F.D.

On vérifie de même la proposition suivante, qui correspond au dernier cas où la décomposition dans le modèle de Weil est plus évidente que dans le modèle naturel.

PROPOSITION 7.- On a (si $\mathrm{car}\ k \neq 2$)

$$V'(\alpha_o,\pi'^{\pm}_{\omega_o})^i \simeq W_{\pm}[\Lambda_o,\Lambda_o]^i = \mathrm{Im}(1 \pm \Psi_2) \qquad (i \in \{1,q^2\})$$

où

$$\Psi_2 = \eta_{\alpha_o} \circ \tilde{F} : \left(W\begin{bmatrix}\Lambda & \Lambda^q\\ \Lambda^q & \Lambda\end{bmatrix},\rho\right) \xrightarrow{\sim} \left(W\begin{bmatrix}\Lambda & \Lambda^q\\ \Lambda^q & \Lambda\end{bmatrix},\alpha_o\rho\right)$$

pour un $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^{\times}) - \mathrm{Car}(k^{\times})$ tel que $\Lambda^{q-1} = \Lambda_o$.

5.- La série discrète associée au tore $T'_1 = T_1 \cap G'$.

Nous renvoyons au chapitre IV (§4, n°3) pour ce qui concerne la série discrète de G associée au tore T_1 et les notations employées ci-dessous.

Notons que si $\Lambda,\Phi \in \mathrm{Car}(K^{\times})$ sont tels que $\Lambda\Lambda^q = \Phi\Phi^q$ alors $\Lambda\Phi^{-q}$, $\Lambda\Phi^{-1} \in \mathrm{Car}(U)$, d'après nos conventions. Les restrictions à G' de cette série s'écrivent donc $W[\omega_1,\omega_2]$ (cf. déf.3, n°2).

PROPOSITION 8.- Soient $\omega_1, \omega_2, \omega'_1, \omega'_2 \in \mathrm{Car}(U) - \{1\}$ tels que $\omega_2 \neq \omega_1$, ω_1^{-1} et $\omega'_2 \neq \omega'_1$, $\omega_1'^{-1}$. Alors (cf. n°2, déf.3)

i) la représentation $W[\omega_1, \omega_2]$ est irréductible à moins que car $k \neq 2$ et ω_1 ou ω_2 soit égal à ω_o ;

ii) dans ce cas, disons $\omega_1 = \omega_o$, on a

$$W[\omega_o, \omega_2] = W_+[\omega_o, \omega_2] \oplus W_-[\omega_o, \omega_2]$$

où les composantes irréductibles, non isomorphes $W_{\pm}[\omega_o, \omega_2]$ sont données par

$$W_{\pm}[\omega_o, \omega_2] = \mathrm{Im}(1 \pm \Psi_2)$$

avec

$$\Psi_2 = \eta_{\alpha_o} \circ \tilde{F} \circ F_2 : \left(W\begin{bmatrix} \Lambda & \Lambda^{*q} \\ \Lambda^* & \Lambda^q \end{bmatrix}, \rho\right) \xrightarrow{\sim} \left(W\begin{bmatrix} \Lambda^* & \Lambda^q \\ \Lambda & \Lambda^{*q} \end{bmatrix}, \alpha_o \rho\right),$$

où l'on note F_2 l'isomorphisme involutif de $(V_\Lambda, \pi_\Lambda) \otimes (V_{\Lambda^{*q}}, \pi_{\Lambda^{*q}})$ sur $(V_{\Lambda^q}, \pi_{\Lambda^q}) \otimes (V_{\Lambda^*}, \pi_{\Lambda^*})$ défini par

$$(F_2\varphi)(a_1, \psi_1; a_2, \psi_2) = \varphi(a_1^q, \psi_1; a_2^q, \psi_2)$$

pour $a_1, a_2 \in K$, $\psi_1, \psi_2 \in X$, $\varphi \in V_\Lambda \otimes V_{\Lambda^{*q}}$; enfin $\Lambda \in \mathrm{Car}(K^\times) - \mathrm{Car}(k^\times)$ est tel que $\Lambda^{q-1} = \omega_2$;

iii) pour que $W_{(\pm)}[\omega_1, \omega_2] \simeq W_{(\pm)}[\omega'_1, \omega'_2]$ il faut et il suffit que

$$\{\omega_1, \omega_2, \omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}\} = \{\omega'_1, \omega'_2, \omega_1'^{-1}, \omega_2'^{-1}\} .$$

Démonstration : Cela résulte aussitôt de l'irréductibilité et non-entrelacement de la série discrète de G associée à T_1, des propositions 2, 3 et 4 du numéro 2 du paragraphe 1 et des remarques du numéro 2 ci-dessus.

C.Q.F.D.

Définissons la série discrète de G' associée à T'_1 comme l'ensemble des types d'isomorphie des composantes irréductibles des restrictions à G' des représentations de la série discrète de G

associée au tore T_1. Nous avons alors, d'après la proposition ci-dessus.

THEOREME 2.- <u>La série discrète de</u> G' <u>associée au tore</u> T'_1 <u>est formée</u>

i) <u>des</u> $\frac{1}{8}(q-1)(q-3)$ (resp. $\frac{1}{8}q(q-2)$) <u>types d'isomorphie des représentations</u> $W[\omega_1,\omega_2]$, <u>de dimension</u> $(q-1)^2(q^2+1)$, <u>pour</u> $\omega_1,\omega_2 \in Car(U)-\{1\}$, $\omega_1^2 \neq 1$, $\omega_2^2 \neq 1$, $\omega_2 \neq \omega_1$, ω_1^{-1} ;

ii) <u>et, lorsque</u> car $k \neq 2$, <u>des</u> $\frac{1}{2}(q-1)$ <u>types d'isomorphie des représentations</u> $W_{\pm}[\omega_o,\omega]$, <u>de dimension</u> $\frac{1}{2}(q-1)^2(q^2+1)$, <u>pour</u> $\omega \in Car(U)-\{1,\omega_o\}$.

6.- <u>La série discrète de</u> G' <u>associée au tore de Coxeter</u> T'_2.

Nous renvoyons au chapitre V (§5, n°1) pour la description de la série discrète de G associée au tore de Coxeter T_2 de G. Nous gardons ses notations.

On définit la série discrète de G' associée à T'_2 comme l'ensemble des types d'isomorphie des composantes irréductibles des restrictions à G' des représentations de la série discrète de G associée à T_2.

Notons que pour $\theta \in Car(\underset{\sim}{K}^\times)$, θ^{1-q} s'identifie, d'après nos conventions à un caractère Ω de $\underset{\sim}{U}$ $(= \underset{\sim}{N}^{-1}(1))$. D'autre part on a aussi $\theta = \Omega' \circ \underline{u}$ (avec $\underline{u}(z) = z^{1-q}$; $z \in \underset{\sim}{K}$) pour un (et un seul) caractère Ω' du groupe $\underset{\sim}{U}'$ des $z \in \underset{\sim}{K}^\times$ tels que $\underset{\sim}{N}(z) \in k^\times$, il en résulte que Ω est la restriction de Ω' à $\underset{\sim}{U}$.

PROPOSITION 9.- <u>Soient</u> $\theta,\theta_1 \in Car(\underset{\sim}{K}^\times)$ <u>tels que leurs orbites suivant</u> $Gal_{\underset{\sim}{K}/k}$ <u>soient non-dégénérées</u> (i.e., <u>à</u> 4 <u>éléments</u>). <u>Alors la représentation</u> $W[\Omega,\Omega^q]$ <u>est irréductible</u> (<u>avec</u> $\Omega = \theta^{1-q}$) <u>et pour que</u> $W[\Omega,\Omega^q]$ <u>soit isomorphe à</u> $W[\Omega_1,\Omega_1^q]$ (<u>avec</u> $\Omega_1 = \theta_1^{1-q}$) <u>il faut et il suffit que</u> Ω <u>et</u> Ω_1 <u>soient congrus modulo</u> $Gal_{\underset{\sim}{K}/k}$.

Démonstration : Cela résulte aussitôt du ch.V, §5, n°1, des propositions 2, 3 et 4 du numéro 2 et du corollaire à la proposition 7 du même numéro.

C.Q.F.D.

7.- La représentation exceptionnelle de G'.

PROPOSITION 10.- La représentation

$$R[1,1]_5 = \operatorname*{Res}_{G\downarrow G'} W^{-\begin{bmatrix}\alpha & \alpha\\ \alpha & \alpha\end{bmatrix}q^2} \qquad (\alpha \in \mathrm{Car}(k^\times))$$

est irréductible (et ne dépend pas de α).

Démonstration : Cela est clair, puisque l'on sait déjà que les représentations $W^{-\begin{bmatrix}\alpha & \alpha\\ \alpha & \alpha\end{bmatrix}q^2}$ sont deux à deux non-isomorphes (ch.V, §3, n°3). Il suffit en effet d'appliquer les propositions 2 et 3 du numéro 2 du paragraphe 1.

C.Q.F.D.

THEOREME 3.- La série discrète de G' associée à T'_1 , celle associée à T'_2 et la représentation $R[1,1]_5$ épuisent la série discrète de G'.

En outre, les deux représentations de Weil de G' en rang 4 fournissent par décomposition toutes les représentations irréductibles de ce groupe.

Démonstration : Cela est clair, parce que les représentations irréductibles dont il est question ont été obtenues par restriction d'un système complet de représentations irréductibles de G . La seconde assertion est aussi immédiate puisque chaque représentation de Weil de G' s'obtient par restriction d'une de G et que nous avons déjà démontré l'assertion pour G .

C.Q.F.D.

Nous donnons la liste complète des représentations irréductibles de G' dans la table 1.

TABLE 1. Les représentations de $G' = Sp(4,k)$

PARAMETRES : $\alpha,\beta \in Car(k^{\times})$; $\Lambda \in Car(K^{\times})$; $\omega,\omega' \in Car(U)$, $\Omega \in Car(\underset{\sim}{U})$

Type d'isomorphie	Modèles	Dimension	Nombre de types dans la famille	Paramètres
SERIE PRINCIPALE $R[\alpha,\beta]$	$M'(\pi_{\alpha,\beta})$	$(q+1)^2(q^2+1)$	$\frac{1}{8}(q-3)(q-5)$ $\frac{1}{8}(q-2)(q-4)$	$\lvert\{\alpha,\beta,\alpha^{-1},\beta^{-1}\}\rvert = 4$
$R_{\pm}[\alpha_o,\beta]$	$M'_{\pm}(\pi_{\alpha_o,\beta}) \simeq W_{\pm}[\alpha_o,\beta]$	$\frac{1}{2}(q+1)^2(q^2+1)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\beta^2 \neq 1$
$R[1,\beta]^i$	$M'(\pi_{1,\beta})^i$	$i(q+1)(q^2+1)$	$\frac{1}{2}(q-3)$ $\frac{1}{2}(q-2)$	$i\in\{1,q\}$ $\beta^2 \neq 1$
$R_{\pm}[\alpha_o,1]^i$	$M'_{\pm}(\pi_{\alpha_o,1})^i$	$\frac{1}{2}i(q+1)(q^2+1)$	4	$i\in\{1,q\}$
$R[\alpha,\alpha]^i$	$M'(\pi^i_{\alpha})$	$i(q+1)(q^2+1)$	$\frac{1}{2}(q-3)$ $\frac{1}{2}(q-2)$	$i\in\{1,q\}$ $\alpha^2 \neq 1$
$R_{\pm}[\alpha_o,\alpha_o]^{i,i}$	$M'_{\pm}(\pi^i_{\alpha_o})^i$	$\frac{1}{2}i^2(q^2+1)$	4	$i\in\{1,q\}$
$R[\alpha_o,\alpha_o]^{q,1}$	$M'(\pi^q_{\alpha_o})^1 \simeq W[\alpha_o,\alpha_o]^{q,1}$	$q(q^2+1)$	1	
$R[1,1]_4$	$St = \underline{D}^{o,o}$	q^4	1	
$R[1,1]_3$	${}^{+}\underline{L}^{o} \simeq {}^{+}\underline{P}^{o}$	$\frac{1}{2}q(q+1)^2$	1	
$R[1,1]_2$	${}^{-}\underline{P}^{o}$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$	1	
$R[1,1]_1$	${}^{-}\underline{L}^{o}$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$	1	
$R[1,1]_o$	$(\mathbb{C},1)$	1	1	

TABLE 1, suite. Les représentations de $G' = Sp(4,k)$

Type d'isomorphie	Modèles	Dimension	Nombre de types dans la famille	Paramètres
SERIE ASSOC. A P'_2 $R[\Lambda,\Lambda^q]$	$M'(\pi_\Lambda)$	q^4-1	$\frac{1}{4}(q-1)^2$ $\frac{1}{4}q(q-2)$	$\Lambda \notin Car(k^\times) \cup Car(U)$
$R[\Lambda,\Lambda^q]^i$	$M'(\pi_\Lambda)^i$	$i(q-1)(q^2+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\Lambda \in Car(U) - Car(k^\times)$ $i \in \{1,q\}$
SERIE ASSOC. A P'_1				
$R[\alpha,\omega]$	$V'(\alpha,\pi'_\omega)$	q^4-1	$\frac{1}{4}(q-3)(q-1)$ $\frac{1}{4}(q-2)q$	$\alpha^2 \neq 1$ $\omega^2 \neq 1$
$R_\pm[\alpha,\omega_o]$	$V'(\alpha,\pi'^{\pm}_{\omega_o})$	$\frac{1}{2}(q^4-1)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\alpha^2 \neq 1$
$R_\pm[\alpha_o,\omega]$	$V'_\pm(\alpha_o,\pi'_\omega)$	$\frac{1}{2}(q^4-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\omega^2 \neq 1$
$R[1,\omega]^i$	$V'(1,\pi'_\omega)^i$	$i(q-1)(q^2+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$ $\frac{1}{2}q$	$i \in \{1,q\}$ $\omega^2 \neq 1$
$R_\pm[1,\omega_o]^i$	$V'(1,\pi'^{\pm}_{\omega_o})^i$	$\frac{1}{2}i(q-1)(q^2+1)$	4	$i \in \{1,q\}$
$R_\pm[\alpha_o,\omega_o]^i$	$V'(\alpha_o,\pi'^{\pm}_o)^i$	$\frac{1}{2}i(q^2-1)$	4	$i \in \{1,q^2\}$
SERIE DISCRETE ASSOCIEE A T'_1 $R[\omega,\omega']$	$W[\omega,\omega']$	$(q-1)^2(q^2+1)$	$\frac{1}{8}(q-1)(q-3)$ $\frac{1}{8}q(q-2)$	$\lvert\{\omega,\omega^{-1},\omega',\omega'^{-1}\}\rvert = 4$
$R_\pm[\omega_o,\omega]$	$W_\pm[\omega_o,\omega]$	$\frac{1}{2}(q-1)^2(q^2+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\omega^2 \neq 1$

TABLE 1, suite. Les représentations de $G' = Sp(4,k)$

Type d'isomorphie	Modèles	Dimension	Nombre de types dans la famille	Paramètres
SERIE DISCRETE ASSOCIEE A T'_2				
$R[\Omega,\Omega^q]$	$W[\Omega,\Omega^q]$	$(q^2-1)^2$	$\frac{1}{4}(q^2-1)$ $\frac{1}{4}q^2$	$\lvert\{\Omega,\Omega^q,\Omega^{-1},\Omega^{-q}\}\rvert = 4$ (i.e. $\Omega^2 \neq 1$)
LA REPRESENTATION EXCEPTIONNELLE				
$R[1,1]_5$	$W^-[1,1]^{q^2}$	$\frac{1}{2}q(q-1)^2$	1	

Notations : On écrit le nombre de types d'isomorphie dans chaque famille dans la demi-case supérieure (resp. inférieure) correspondante, pour car $k \neq 2$ (resp. car $k = 2$).

TABLE 2

Correspondance avec les notations de

B. Shrinivasan [16]

A. Série principale.

$R[\alpha,\beta]$	$\chi_3(k,\ell)$	$R[1,1]_o$	θ_o
$R_+[\alpha_o,\beta]$	$\xi_{41}(k)$	$R[1,1]_1$	θ_{12}
$R_-[\alpha_o,\beta]$	$\xi_{42}(k)$	$R[1,1]_2$	θ_{11}
$R[\alpha,1]^1$	$\xi_3(k)$	$R[1,1]_3$	θ_9
$R[\alpha,1]^q$	$\xi_3'(k)$	$R[1,1]_4$	θ_{13}
$R[\alpha,\alpha]^1$	$\chi_8(k)$	$R_+[\alpha_o,\alpha_o]^{1,1}$	θ_3
$R[\alpha,\alpha]^q$	$\chi_9(k)$	$R_-[\alpha_o,\alpha_o]^{1,1}$	θ_4
$R_+[\alpha_o,1]^1$	Φ_5	$R_+[\alpha_o,\alpha_o]^{q,q}$	θ_1
$R_-[\alpha_o,1]^1$	Φ_6	$R_-[\alpha_o,\alpha_o]^{q,q}$	θ_2
$R_+[\alpha_o,1]^q$	Φ_7	$R[\alpha_o,\alpha_o]^{q,1}$	Φ_9
$R_-[\alpha_o,1]^q$	Φ_8		

B. Série associée à P_1' .

$R[\alpha,\omega]$	$-\chi_5(k,\ell)$	$R_+[1,\omega_o]^1$	$-\Phi_1$
$R_+[\alpha,\omega_o]$	$-\xi_{41}'(k)$	$R_-[1,\omega_o]^1$	$-\Phi_2$
$R_-[\alpha,\omega_o]$	$-\xi_{42}'(k)$	$R_+[1,\omega_o]^q$	$-\Phi_3$
$R_+[\alpha_o,\omega]$	$-\xi_{21}(\ell)$	$R_-[1,\omega_o]^q$	$-\Phi_4$
$R_-[\alpha_o,\omega]$	$-\xi_{22}(\ell)$	$R_+[\alpha_o,\omega_o]^1$	$-\theta_7$
$R[1,\omega]^1$	$-\xi_1(k)$	$R_-[\alpha_o,\omega_o]^1$	$-\theta_8$
$R[1,\omega]^q$	$-\xi_1'(k)$	$R_+[\alpha_o,\omega_o]^q$	$-\theta_5$
		$R_-[\alpha_o,\omega_o]^q$	$-\theta_6$

TABLE 2, suite

Correspondance avec les notations de

B. Shrinivasan [16]

C. Série associée à P'_2 .

$R[\Lambda,\Lambda^q]$	$-\chi_2(j)$
$R[\Lambda,\Lambda^q]^1$	$-\chi_6(k)$
$R[\Lambda,\Lambda^q]^q$	$\chi_7(k)$

D. Série discrète.

$R[\omega,\omega']$	$\chi_4(k,\ell)$
$R_+[\omega_o,\omega]$	$\xi'_{21}(k)$
$R_-[\omega_o,\omega]$	$\xi'_{22}(k)$
$R[\Omega,\Omega^q]$	$\chi_1(j)$
$R[1,1]_5$	θ_{10}

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN, E., Algèbre Géométrique, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[2] BOURBAKI, N., Algèbre, Chapitre 9: Formes sesquilinéaires et formes quadratiques, Hermann, Paris, 1959.

[3] BOURBAKI, N., Variétés différentielles et analytiques, Fascicule de résultats, Paragraphes 1 à 7, Hermann, Paris, 1967.

[4] DELSARTE, J., Séminaire Bourbaki, Mars 1951, exposé 39, W. A. Benjamin, New York, 1965.

[5] DIEUDONNE, J., La géométrie des groupes classiques, seconde édition, Springer Verlag, Berlin, 1963.

[6] ENOMOTO, H., The characters of the finite symplectic group $Sp(4,q)$, $q = 2^f$, Osaka J. Math., 9, 1972, p. 75 - 94.

[7] HUPPERT, B., Endliche Gruppen, Springer Verlag, Berlin, 1967.

[8] LANG, S., Algebraic Number Theory, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass., 1970.

[9] SAITO, M., Représentations unitaires des groupes symplectiques, J. Math. Soc. Japan, 24, 1972, p. 232 - 251.

[10] Séminaire CARTIER de théorie des groupes (1972/1973), IHES, Bures-sur-Yvette, 1975.

[11] SERRE, J. P., Cours d'arithmétique, P.U.F., Paris, 1970.

[12] SOTO ANDRADE, J., Représentation de Weil de $GSp(4,\mathbb{F}_q)$ associée à un

espace quadratique de dimension 4 sur $\mathbb{F}_q$, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, p. 227 - 230.

[13] SOTO ANDRADE, J., La représentation de Weil de $GSp(4,\mathbb{F}_q)$ et les représentations de $Sp(4,\mathbb{F}_q)$, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 278, 1974, p. 321 - 324.

[14] SPRINGER, T.A., Cusp forms for finite groups, Seminar on Algebraic Groups and related Finite Groups, Lecture Notes in Maths., n° 131, Springer Verlag, Berlin, 1970.

[15] SPRINGER, T.A., Characters of special groups, Seminar on Algebraic Groups and related Finite Groups, Lecture Notes in Maths., n° 131, Springer Verlag, Berlin, 1970.

[16] SRINIVASAN, Bh., The characters of the finite symplectic group $Sp(4,q)$, Trans. A.M.S., 131, 1968, p. 488 - 525.

[17] TITS, J., Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford, Invent. Math., 5, 1968, p. 19 - 41.

[18] WEIL, A., Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math., 111, 1964, p. 143 - 211.

Jorge SOTO ANDRADE
Dep. Matematicas
Faculdad de Ciencias
Universidad de Chili
Casilla 653
SANTIAGC (Chili)