CLAUDE TRICOT

Mesures et dimensions

Thèses d'Orsay, 1983

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1983__0133__P0_0>

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

par

CLAUDE TRICOT

Sujet de la Thèse : Mesures et dimensions

Soutenue le 19 décembre 83 *devant le Jury composé de* :

Jean-Pierre Kahane, Président
Jacques Peyrière
J.-L. Thouvenot
F. Ledrappier
Michel Mendès France
J. Taylor

DEDICACE

Je dédie cet ouvrage à mon
père, le professeur Claude
Tricot, dont la propre thèse
a été mon point de départ sur
les ensembles de mesure nulle,
et qui m'a constamment guidé
et encouragé dans cette voie.

AVANT-PROPOS

Une soutenance de thèse ne s'organise pas toute seule: il y a fallu le concours, attentif, d'un certain nombre de personnes, et en particulier des membres du jury. Et tout d'abord je tiens à signaler ma reconnaissance pour l'accueil, toujours chaleureux et parfait, que j'ai reçu à l'université d'Orsay, spécialement de la part des professeurs Kahane et Peyrière. Le professeur Jacques Peyrière m'a déjà apporté son soutien en de multiples occasions, soutien d'autant plus utile en ce qui me concerne que ma carrière, poursuivie jusqu'à maintenant à l'étranger, a souvent été considérée comme "inhabituelle" pour un Français. Il m'a grandement facilité mes rapports avec l'Université française, et a finalement accepté de coordonner et diriger cette thèse. Le professeur Jean-Pierre Kahane préside le jury: je le remercie pour les utiles conseils qu'il m'a donné cette année; au demeurant la dette qu'on peut avoir envers lui, dans ce domaine de recherches, est impossible à évaluer. Mais je le remercie aussi d'honorer cette soutenance de thèse de sa présence, lui qui longtemps s'est trouvé l'un des seuls en France à s'intéresser à ces questions, et à susciter là-dessus l'intérêt des jeunes chercheurs, ce qu'il sait faire si bien.

A Jussieu le professeur Jean-Paul Thouvenot a bien voulu diriger mon travail de seconde thèse; je lui fais part de mes plus vifs remerciements pour m'avoir accordé son temps à démêler pour moi certains difficiles problèmes de théorie ergodique.

Je remercie également le professeur Ledrappier, rapporteur, d'avoir accepté de réviser ce travail de thèse.

.../...

L'un des articles qui constituent le corps principal de la thèse est co-signé du professeur Michel Mendès-France: le jury m'eût paru incomplet sans lui. Ce n'est pas que, pour avoir un instant labouré le même sillon, je puisse comparer mon style au sien. Sa féconde imagination contribue à donner vie et mouvement à ce terrain de recherches: il est pour moi un exemple que je ne veux pas perdre de vue.

Puis-je enfin citer un ami, not the least? Le professeur Taylor a accepté de venir de fort loin pour assister à cette soutenance. Les différents travaux qui composent la thèse ont été presque exclusivement écrits pendant les trois années que j'ai passé à l'université de Liverpool, où il était alors directeur du département. Malgré la multiplicité de ses occupations il a toujours trouvé du temps pour contrôler, critiquer ou commenter ces recherches, avec l'intuition et la discrétion qui le caractérisent. Lui aussi est co-auteur de l'un des articles inclus, et nous en avons d'autres en préparation, qui grâce à lui m'inscrivent dans l'école anglaise de théorie géométrique de la mesure dont Besicovitch a été l'initiateur. Il faut ajouter que James Taylor était membre du jury de ma première thèse, pour le grade de docteur ès sciences, à l'université de Genève, en 1979. Sa présence est en quelque sorte inséparable de ma carrière actuelle. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Thèse de doctorat d'Etat, Université d'Orsay

Claude Tricot

Title : MEASURES AND DIMENSIONS

ABSTRACT

Our purpose is the study of such sets as : the nowhere differentiable curves, the nowhere dense compact sets, and generally those which are now called "fractals" (B. Mandelbrot), in R^n . The techniques belong to the geometric measure theory, including the use of outer measures, and non-integer valued dimensions. Our main interests are the following: the comparizon between different notions of dimension (Hausdorff dimension, Cantor-Minkowski index), the introduction of new measures and dimensions, their evaluation on some particular sets.

A new family of outer measures ϕ-p , called "packing measures", is defined; several applications show that they can be considered as the dual of the classical Hausdorff measures ϕ-m ; they provide a dimension Dim , always greater than or equal to the Hausdorff dimension dim . The comparizon between ϕ-m and ϕ-p , or between dim and Dim , is a sort of test of regularity; the main applications are: the dimension of the cartesian product of two sets in R^n , and the measure of a Brownian path. Concerning the Cantor-Minkowski index, we prove the equivalence of different formulations of this index in R , and show how to generalize the Besicovitch-Taylor definition to R^n . As to the particular examples, we have taken a special interest in: the Brownian motion path in R^3 , the curves called "spirals" in R^2 , the residual set of the apollonian packing by disks of a curvilinear triangle.

Cette thèse se présente sous la forme d'une collection d'articles dont la liste se trouve ci-dessous. On y fera référence, dans le texte, par des chiffres entre parenthèses. Les chiffres entre crochets se rapportent à la bibliographie.

(1) "Two definitions of fractional dimension", Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 91 (1982), 57-74.

(2) "Douze définitions de la densité logarithmique", C. R. Acad. Sc. Paris 293 (1981), 549-552.

(3) "Metric properties of the compact subsets of measure zero in the plane", soumis à Mathematika.

(4) "A new proof for the residual set dimension of the apollonian packing", soumis à Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

(5) "Dimensions de spirales", avec Y. Dupain et M. Mendès-France, Bull. Soc. math. France III (1983) N°2, 1-9.

(6) "Packing measures, and their evaluation for the path of Brownian motion", avec S. J. Taylor, soumis à Bull. Amer. Math. Soc.

(7) "Etude dimensionnelle d'un compact par le pavage du complémentaire", complément à cette thèse.

MESURES ET DIMENSIONS

Dans le sens où nous la prenons cette théorie remonte, en ce qui concerne les mesures, à Carathéodory et Hausdorff, en ce qui concerne les dimensions à Hausdorff et Bouligand. Son objet principal est l'analyse, dans un espace métrique, des ensembles "rares" (de mesure de Lebesgue nulle), ou fractionnés à l'infini, ou des courbes nulle part différentiables, enfin de cette classe d'ensembles non assimilables à des schémas de la géométrie classique que Mandelbrot appelle des "fractals" [12] . Il suffit de lire l'historique de l'ouvrage cité pour s'apercevoir que la notion même de fractal préexiste à celle de "dimension fractionnaire" : Hausdorff a inventé sa dimension pour les fractals. Ceci a eu lieu bien avant tout essai de définition correcte de la classe d'ensembles concernée. Maintenant on cherche à définir les fractals par la dimension de Hausdorff.

Il n'est pas question de présenter ici l'essentiel des idées qui ont excité l'intérêt des chercheurs sur ce sujet depuis le début du siècle ; j'en ai fait un choix restreint qui définit bien le domaine dans lequel se place cette étude. Et je voudrais surtout souligner deux courants d'idées principaux, relevant en quelque sorte de deux philosophies différentes.

Mesures et dimension de Hausdorff

Cette première méthode se présente à l'origine comme une généralisation d'une notion de mesure. Si ϕ est une fonction définie et croissante dans un voisinage positif de l'origine, de limite 0 en 0 , on considère pour tout $r > 0$ les recouvrements $\mathfrak{R}$ de E par des boules ouvertes (par exemple) de diamètre $\leq r$. On calcule

$$\inf_{|\mathfrak{R}| \leq r} \sum_{B \in \mathfrak{R}} \phi(\text{diam } B)$$

où la borne inférieure est prise sur tous ces recouvrements. La valeur obtenue croît quand r tend vers 0 , et sa limite est $\phi\text{-}m(E)$: mesure de Hausdorff selon ϕ .

Cette notion se relie étroitement aux propriétés des mesures singulières portées par E . Citons deux résultats importants. Supposons que E se trouve dans $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, et que $B_r(x)$ est la boule de centre x , de rayon r . Il y a un "théorème de densité" dû à Rogers et Taylor [15] qu'on peut présenter ainsi:

Soit μ une mesure finie, positive, σ-additive telle que $\mu(E)>0$. On peut trouver deux constantes λ_1 et λ_2 telles que

$$\lambda_1 \mu(E) \inf_{x \in E} \left(\liminf_{r \to 0} \frac{\phi(r)}{\mu(B_r(x))} \right) \leq \phi\text{-}m(E)$$

$$\phi\text{-}m(E) \leq \lambda_2 |\mu| \sup_{x \in E} \left(\liminf_{r \to 0} \frac{\phi(r)}{\mu(B_r(x))} \right)$$

(avec les précautions ordinaires: $0.(+\infty)=0$, $\rho/0=+\infty$ si $\rho>0$).

Puis, il y a le lemme de Frostman: si E est compact, ϕ tel que $\phi(2t)/\phi(t)$ est borné, et $\phi\text{-}m(E) > 0$, il existe une mesure μ de poids fini portée par E telle que

$$\forall x \in E , \forall r < 1 , \quad \frac{\phi(r)}{\mu(B_r(x))} \geq 1 .$$

Ces théorèmes ont des implications multiples. Le premier en particulier donne lieu au "théorème de Billingsley" [3] concernant la dimension. En effet, si $\ell = id_{\mathbb{R}}$, la famille particulière des mesures $\ell^a\text{-}m$, $a > 0$, possède pour chaque E un exposant critique qui est la dimension de Hausdorff $\dim(E)$: si $b > \dim(E)$, $\ell^b\text{-}m(E) = 0$, et si $b < \dim(E)$, $\ell^b\text{-}m(E) = +\infty$. Il est donc naturel qu'un résultat permettant le calcul de $\phi\text{-}m$, tel que le théorème de densité, puisse fournir un résultat pour le calcul de $\dim(E)$. Enonçons-le de la manière suivante:

Soit μ une mesure finie, positive, telle que $\mu(E) > 0$:

$$\inf_{x \in E} \left(\liminf_{r \to 0} \frac{\log \mu(B_r(x))}{\log r} \right) \leq \dim(E) \leq \sup_{x \in E} \left(\liminf_{r \to 0} \frac{\log \mu(B_r(x))}{\log r} \right)$$

De même le lemme de Frostman permet une définition de $\dim(E)$ où n'entrent en jeu que des mesures singulières, à condition que E soit analytique [11] , (1) :

$$\dim(E) = \sup \left\{ \inf_{x \in E} \left(\liminf_{r \to 0} \frac{\log \mu(B_r(x))}{\log r} \right) \right\}$$

où le sup est étendu à toutes les mesures μ telles que dans le théorème de Billingsley.

Nous auront lieu de retrouver ces faits principaux dans la suite, à titre de comparaison. Voyons maintenant la seconde méthode.

Les définitions constructives de Borel et de Bouligand

Celles-ci ne font pas appel à la notion de mesure. Peut-être est-ce la raison pour laquelle elles ont été considérées comme moins importantes par les théoriciens. Cependant ce sont certainement celles qui se prêtent le mieux aux problèmes pratiques. Le premier à découvrir cet indice semble avoir été G. Bouligand [7] , [8] en 1928, mais il a été ensuite redécouvert plusieurs fois sous d'autres formes par Borel, Besicovitch & Taylor, Kolmogorov & Tihomirov,... : voir (2) pour un très bref historique. Il s'agit toujours d'un exposant critique Δ associé à des suites ou à des fonctions dépendant de E , telles que: le nombre minimum de boules de rayon r recouvrant E , le volume $|E(r)|_p$ de l'ensemble des points de $\mathbb{R}^p$ à distance $\leq r$ de E , le nombre $\omega(2^n,E)$ de cubes dyadiques rencontrant E , etc... Par exemple

$$\Delta(E) = \inf \left\{ \alpha : r^{\alpha-p}|E(r)|_p \to 0 \right\} = \limsup_{r \to 0} \left(p - \frac{\log |E(r)|_p}{\log r} \right)$$

$$= \inf \left\{ \alpha : \omega(2^n,E)\ 2^{-n\alpha} \to 0 \right\} = \limsup_{n \to \infty} \left(\frac{\log \omega(2^n,E)}{n \log 2} \right)$$

(la lim sup n'est pas spécifiée dans [8] , où Δ est appelé "ordre de Cantor-Minkowski"). En ce qui concerne les compacts de mesure nulle sur la droite, une autre idée est de considérer le complémentaire de E dans un intervalle borné donné: ce sera une réunion d'intervalles ouverts de longueurs c_n , supposée en ordre décroissant. Alors

$$\Delta(E) = \inf \left\{ \alpha : n^{\frac{1}{\alpha}-1} \sum_n^{\infty} c_i \to 0 \right\} = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log n}{\log n - \log \sum_n^{\infty} c_i}$$

(E. Borel [6] , 1948 ; Δ est appelé "raréfaction logarithmique"). Par cette dernière définition Borel revenait à des idées antérieures aux travaux de Bouligand, et même de Hausdorff: "...Pour ces diverses raisons la notion d'ensemble de mesure nulle est primordiale; mais c'est en même temps une notion si générale qu'on ne peut espérer approfondir réellement cette question qu'en étudiant de près cette notion générale, c'est-à-dire en ne confondant pas entre eux tous les ensembles de mesure nulle. La classification basée sur la décroissance des intervalles d'exclusion me paraît être un premier pas dans cette étude qui s'impose aux analystes" [4] (1913).

A ce qu'il paraît ce n'est que tout récemment qu'on s'est aperçu que les définitions de Borel et Bouligand coïncidaient dans $\mathbb{R}$. Pour plus de clarté j'anticipe sur la présentation de mes propres travaux, et indique que toutes ces définitions historiques (ainsi que d'autres plus récentes) coïncident quand E est de mesure nulle: c'est le même Δ qui est défini. Celles formulées dans $\mathbb{R}^p$, $p > 1$, coïncident également. A la suite de l'ouvrage [17] , à l'auteur duquel je suis personnellement redevable de mon premier départ et de cet intérêt porté aux indices de raréfaction, j'appelle $\Delta(E)$ la "densité logarithmique" de E , pour les raisons suivantes: logarithmique va de soi, et indique en même temps une généralisation possible dans une échelle de fonctions plus vaste (la dimension de Hausdorff aussi pourrait être dite logarithmique, à la suite de formules telles que le théorème de Billingsley). Densité, vient du fait que si F est dense dans E , $\Delta(F) = \Delta(E)$; et ce mot évite le mot "dimension", qui choque ici l'intuition du fait que Δ peut prendre des valeurs non nulles sur des ensembles discrets ($\Delta(\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$). Quelle que soit sa dénomination la caractéristique essentielle de Δ est d'être définie de façon "constructive", et c'est la raison pour laquelle les praticiens l'emploient (souvent sans le savoir, comme M. Jourdain faisait de la prose), considérant par exemple que le rapport $\frac{\log \omega(2^n,E)}{n \log 2}$ est une approximation de dim(E) (mais quel sens peut-on donner à dim(E) lui-même si E n'est connu que par des approximations numériques?). Cet aspect non constructif de dim(E) , Borel le relève en 1935 (époque où dim était la "dimension de Besicovitch") dans une comparaison avec une autre de ses méthodes d'analyse: "Je dois tout d'abord faire observer que la méthode de M. Besicovitch présente avec la mienne une différence analogue entre ma définition de mesure des ensembles et celle de M. Lebesgue". Les démarches, différentes, conduisent naturellement à des indices distincts. L'inégalité

$$\dim(E) \leq \Delta(E) ,$$

toujours vraie, est en général une inégalité stricte, et l'égalité se produit sur des ensembles à construction très régulière, en accord avec une remarque de [8] , que l'on peut maintenant traduire ainsi:

Si, pour tout $x \in E$, les rapports $\frac{\log \mu(B_r(x))}{\log r}$ tendent uniformément vers une constante a , alors $a = \Delta(E) = \dim(E)$ (comparer avec le théorème de Billingsley). L'égalité a lieu, par exemple, pour les courbes rectifiables, pour la courbe de Von Koch ($\Delta(E) = \log 4 / \log 3$), ou pour l'ensemble triadique de Cantor ($\Delta(E) = \log 2 / \log 3$).

<u>Thèse soutenue à Genève</u> (Claude Tricot 1979)

Pour références, voir [18] et [19] . Son but principal était d'augmenter l'ensemble de définitions et de résultats permettant de faire le lien entre les deux méthodologies distinctes que je viens de décrire sommairement. Les questions auxquelles il fallait répondre étaient du type suivant: " Si Δ prend, localement, la même valeur en tout point de E , cette valeur est- elle égale à $\dim(E)$? Existe-t-il d'autres dimensions intermédiaires entre dim et Δ? Qu'est-ce exactement que régularité d'un ensemble? etc...". La réponse à la première question est négative, mais construire un contre-exemple devient à ce niveau-là assez compliqué, non pas tant pour des raisons purement géométriques, que pour des raisons de vocabulaire, et de la quantité de mots nécessaires à la définition. Il a été possible d'éliminer une partie du problème grâce à l'utilisation de graphes dyadiques, permettant de visualiser l'ensemble E considéré au moyen d'un arbre. Ce procédé s'est révélé utile en d'autres occasions. La deuxième question est une de celles que j'ai davantage poursuivies par la suite, avec, peut-être, l'arrière-pensée de rendre arbitraire le choix de la dimension de Hausdorff en présentant d'autres dimensions tout aussi valables à certains points de vue. Tout d'abord, un essai d'une théorie complète des indices de raréfaction: un indice

α doit posséder deux propriétés essentielles,

Monotonicité: $E_1 \subset E_2 \rightarrow \alpha(E_1) \leq \alpha(E_2)$,

Invariance : $\alpha o h = \alpha$, pour tout homéomorphisme h : $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}^p$, $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ z\to x}} \dfrac{\log \operatorname{dist}(h(y), h(z))}{\log \operatorname{dist}(y,z)} = 1$.

Ceci donne l'idée de considérer la théorie de la raréfaction comme un raffinement de la Topologie classique, laquelle voit tous les objets comme équivalents à un homéomorphisme près. Ici les objets sont équivalents par rapport à un groupe plus restreint d'homéomorphismes, comprenant en particulier les difféomorphismes. L'indice α est dit "σ-stable" si $\alpha(\bigcup\limits_n E_n) = \sup\limits_n \alpha(E_n)$, propriété que possède dim , mais non Δ . De même que toute pré-mesure peut fournir une mesure extérieure sous-additive [14] , de même tout α peut engendrer un indice σ-stable, en posant:

$$\hat{\alpha}(E) = \inf \left\{ \sup \alpha(E_n) : E_n \uparrow E \right\} .$$

Par ce procédé Δ fournit $\hat{\Delta}$, et δ (le symétrique de Δ : $\delta(E) = \liminf \log \omega(2^n,E) / n \log 2$) fournit $\hat{\delta}$,ce qui nous donne déjà trois indices σ-stables au comportement assez semblable, et ordonnés de la façon suivante:

$$\dim \leq \hat{\delta} \leq \hat{\Delta} .$$

La considération du théorème de Billingsley conduit à se poser la question suivante: existe-il un indice, symétrique en quelque sorte de $\dim(E)$, qui prenne la valeur a lorsque, pour tout x dans E , $\limsup\limits_{r \to 0} \dfrac{\log \mu(B_r(x))}{\log r} = a$? Dans cette thèse sont déjà esquissées les "mesures et dimensions de packing", mais le manque de résultats et le contexte encore trop restreint ne permettront pas encore de donner une réponse définitive à la question. Nous la retrouverons plus tard.

Enfin la notion de régularité d'un ensemble se trouve précisée grâce à un "coefficient d'irrégularité" r dont la définition est basée sur les mesures singulières portées par E . E est dit "régulier" si $r(E) = 0$. Comme on a toujours

$$\Delta - \dim \leq r ,$$

les indices déjà connus coïncident sur les ensembles réguliers.

Ce coefficient permet d'introduire la notion d'"indice régulier" : α est régulier si

$$\alpha = \dim + \mathcal{O}(r) ,$$

ce qui est le cas de δ , Δ , $\hat{\delta}$, $\hat{\Delta}$, et permet d'éliminer les indices sans signification (tel celui identique à 0).

Ces considérations ne sont pas un résumé complet de la thèse de Genève: c'est, à la suite des quelques faits historiques présentés au début, un extrait de tout ce qui pouvait servir à déterminer les fondations de la thèse présente, et à en justifier les motivations.

Les grandes lignes de la thèse d'Orsay

Ces méthodes d'approche de la notion de raréfaction dont nous avons parlé, l'une incluse dans la théorie de la mesure et introduisant la dimension de Hausdorff, l'autre de concept plus géométrique, introduisant la densité logarithmique, on les retrouve toutes deux dans la présente thèse, qui se divise donc assez naturellement en deux parties. La première, correspondant aux titres (1) et (6), est une étude plus poussée des indices de raréfaction σ-stables (c'est-à-dire, suivant notre acception du terme, des dimensions), définit de façon complète les mesures et dimension de packing, et en donne les propriétés et des exemples typiques; des précisions supplémentaires sont données par ce moyen sur la trajectoire du mouvement Brownien. L'autre, correspondant aux titres (2), (3), (4), (5) et (7), concerne Δ plus spécialement: en calculer la valeur sur des ensembles donnés (en l'occurence: les spirales du plan, et l'ensemble résiduel du packing apollonien), et surtout en élargir le spectre de toutes les définitions possibles dans $\mathbf{R}^p$,pour différentes valeurs de p . Donnons quelques précisions:

Mesures et dimension de packing: définitions

On peut en effet considérer d'autres mesures extérieures que celles de Hausdorff. Celles-ci utilisent pour leur définition des recouvrements de E par des ouverts dont le diamètre tend vers 0 .

On peut prendre plutôt des "packings" de E (supposé borné), c'est-à-dire des familles d'ensembles disjoints à distance nulle de E , et dont le diamètre tend vers 0 . Les recouvrements devaient être aussi "économiques" que possible; ici les packings devront être au contraire aussi "serrés" que possible. Par ce procédé on obtient directement non une mesure extérieure, mais une pré-mesure, définie par

$$\lim_{r\to 0} \Big(\sup_{|\mathcal{J}|\leq r} \sum_{B\in\mathcal{J}} \phi(\operatorname{diam} B) \Big) ,$$

où la borne supérieure est prise sur tous les packings $\mathcal{J}$ de E par ensembles B de diamètre $\leq r$. Les résultats différeront selon les conditions imposées aux ensembles B . Par exemple, on appelle ϕ-Q , ϕ-P^* , ϕ-P les pré-mesures, définies par la formule précédente, correspondant respectivement à des packings par boules ouvertes (comme en (1)), par cubes dyadiques, ou par boules ouvertes centrées en E (6). Notre but est d'obtenir finalement des mesures extérieures: or toute pré-mesure F peut engendrer une mesure extérieure $\tilde{F}$ par le procédé classique [14]

$$\tilde{F}(E) = \inf \Big\{ \sum_n F(E_n) \ : \ E \subset \bigcup_n E_n \, , \ E_n \ \text{disjoints} \Big\} .$$

On va noter ϕ-q , ϕ-p^* , ϕ-p celles tirées de ϕ-Q , ϕ-P^* , ϕ-P respectivement, par cette formule. Ici diverses considérations s'imposent.

Tout d'abord les définitions de ces mesures extérieures peuvent paraître plus compliquées que celle de ϕ-m : mais nous verrons que les théorèmes de calcul ne le sont pas, ce qui est essentiel.

Ensuite elles ne sont pas équivalentes: pour tout ϕ on peut trouver deux constantes λ_1 et λ_2 telles que

$$\phi\text{-}p \leq \lambda_1 \ \phi\text{-}p^* \leq \lambda_2 \ \phi\text{-}q ,$$

mais il est possible de trouver un E tel que ϕ-$p(E) = 0$ et ϕ-$p^*(E) = +\infty$. De même pour ϕ-p^* et ϕ-q .

Il y en a donc bien trois, au moins. On aimerait en trouver une meilleure que les autres. Une bonne raison d'éliminer ϕ-q vient du fait que, si E est un compact de $\mathbb{R}$, ϕ-$q(E)$ est égal, pour tout ϕ concave, soit à 0 soit à $+\infty$: c'est donc un cas dégénéré. Pour éliminer ϕ-p* on a montré qu'elle n'était pas invariante par translation: on a construit un compact E de R tel que $\ell^{\frac{1}{2}}$-p*(E) < $+\infty$, tandis que $\ell^{\frac{1}{2}}$-p*(E+a) = $+\infty$ où E+a est le translaté de E d'un réel a . On va donc garder ϕ-p , qui adopte comme ϕ-m un comportement normal et en particulier, comme le montre directement sa définition, est indépendante de tout déplacement dans $\mathbb{R}^p$. Cependant il existe une parenté assez étroite entre ces mesures (6) : en reprenant la famille de fonctions ℓ^a ,

$$\ell^a\text{-p}(E) < +\infty \longrightarrow \forall b > a\ ,\ \ell^b\text{-q}(E) = 0$$

$$\ell^a\text{-q}(E) > 0 \longrightarrow \forall b < a\ ,\ \ell^b\text{-p}(E) = +\infty\ ,$$

autrement dit ℓ^a-p , ℓ^a-p* , ℓ^a-q définissent, au moyen d'une coupure à la manière de la dimension de Hausdorff, le même nombre dimensionnel, noté Dim : la dimension de packing (introduit pour la première fois dans (1) , à l'aide des mesures ℓ^a-q).

Théorèmes de calcul

On retrouve pour ϕ-p un théorème analogue à celui pour ϕ-m , mais en remplaçant les lim inf par des lim sup (6) :

Pour toute mesure μ finie, positive, σ-additive,

$$\lambda\ \mu(E) \inf_{x\in E}\left(\limsup_{r\to 0}\frac{\phi(r)}{\mu(B_r(x))}\right) \le \phi\text{-p}(E) \le |\mu| \sup_{x\in E}\left(\limsup_{r\to 0}\frac{\phi(r)}{\mu(B_r(x))}\right),$$

λ étant constante.

Un lemme qui correspond à celui de Frostman est valable pour ϕ-P* :

Si E est borné, et ϕ-P*(E)<$+\infty$, il existe une mesure μ de poids fini telle que

$$\forall x \in E\ ,\ \forall r < 1\ ,\ \frac{\phi(r)}{\mu(B_r(x))} \le 1\ . \qquad (1)$$

(le fait que ce lemme est valable pour ϕ-P* vient de ce que sa démonstration, à l'instar de celle de Frostman, utilise un réseau de cubes dyadiques; je n'ai pas essayé de prouver le même résultat avec l'hypothèse plus faible que ϕ-P(E) est fini). Enfin le théorème de Billingsley retrouve exactement le correspondant que l'on devine pour Dim , et grâce au lemme précédent on peut écrire, pour tout E (1) :

$$\mathrm{Dim}(E) = \inf\left\{\sup_{x\in E}\left(\limsup_{r\to 0}\frac{\log\mu(B_r(x))}{\log r}\right)\right\}\ ,$$

où la borne inférieure est étendue à toutes les mesures μ finies (comparer avec la formule correspondante pour dim). Là où, par contre, la symétrie cesse, c'est dans la comparaison de dim et Dim avec les indices $\hat{\delta}$ et $\hat{\Delta}$ dont on a parlé précédemment: en effet, dim et $\hat{\delta}$ sont distincts, même si $\hat{\delta}$ prend, localement, partout la même valeur sur E (ceci se montre par un contre-exemple (1) au reste assez difficile, et qui eût mérité une représentation par graphe; mais je n'ai pas osé proposé un tel graphe pour publication au P.C.P.S.) alors qu'il se trouve que Dim = $\hat{\Delta}$! Ce qui fournit deux méthodes de définition très différentes pour Dim . Bien entendu cela est dû au manque relatif de finesse de l'échelle des fonctions ℓ^a , $a > 0$: les mêmes nombres dimensionnels, vus dans une échelle comportant des logarithmes itérés, seront distincts sur certains ensembles, tels par exemple que la trajectoire du mouvement brownien. J'utiliserai les deux notations, Dim ou $\hat{\Delta}$, suivant que l'une ou l'autre des définitions s'accorde le mieux au contexte.

Trois dimensions

On a donc toujours

$$\dim \leq \hat{\delta} \leq \hat{\Delta} = \mathrm{Dim} ,$$

et chacune de ces dimensions mérite considération. $\hat{\Delta}$ est une régularisation de Δ , et ces deux indices sont liés par le résultat important suivant (1) , fondé sur un théorème de Baire:

Si E est compact, et si pour tout $x \in E$ on a $\lim_{r \to 0} \Delta(E \cap B_r(x)) = a$, où a est une constante (Δ est alors dit "uniforme sur E "), alors $a = \Delta(E) = \hat{\Delta}(E)$.

Cependant $\hat{\Delta}$ a un comportement qui semble s'accorder mieux à l'idée intuitive de dimension que Δ : en particulier sa valeur sur n'importe quel ensemble dénombrable est 0 (comme pour tout indice σ-stable et régulier). Les mêmes remarques s'appliquent à δ et $\hat{\delta}$, et aussi un résultat analogue au précédent, mais à condition de renforcer un peu l'hypothèse: il faut supposer que, pour tout $x \in E$, $\lim_{r \to 0} \delta(E \cap B_r(x)) = \delta(E)$ (1) .

Quant à dim et Dim , elles ont partie égale, et leur intérêt réside surtout dans leurs rapports avec les mesures singulières. Comme ces deux dimensions sont, en quelque sorte, extrêmes, elles ont pu servir à définir un nouveau coefficient d'irrégularité $R = \mathrm{Dim} - \mathrm{dim}$. L'ensemble E est dit "régulier" (R-régulier) si $R(E) = 0$. Une application intéressante est que, si E est régulier et F quelconque dans $\mathbb{R}^p$, on a

$$\dim(E\times F) = \dim(E) + \dim(F) ,$$

résultat qui généralise un théorème de Besicovitch & Moran [1] . On le tire directement des inégalités ci-dessous (1) :

$$\dim(E)+\dim(F)\leq\dim(E\times F)\leq\dim(E)+\mathrm{Dim}(F)\leq\mathrm{Dim}(E\times F)\leq\mathrm{Dim}(E)+\mathrm{Dim}(F) .$$

Une petite remarque en passant: si E est non régulier au sens qui précède, il mérite certainement le nom de fractal. Dans ce cas nécessairement $\dim(E) < \mathrm{Dim}(E)$. Par exemple il est bien facile de construire un ensemble du type de celui de Cantor (parfait symétrique) dans l'intervalle $[0,1]$ qui soit tel que $\dim(E) = 0$, $\mathrm{Dim}(E) = 1$. Or Mandelbrot [12] propose l'inégalité

$$\dim(E) < \text{dimension topologique de } E$$

comme définition d'un fractal, définition qui n'englobe pas l'exemple précédent. Cela donnerait l'idée de proposer plutôt l'inégalité

$$\mathrm{Dim}(E) < \text{dimension topologique de } E .$$

Mais la plupart des ensembles considérés en [12] , sinon tous, sont tels que leur dimension de Hausdorff est égale à $\mathrm{Dim}(E)$, voire même à $\Delta(E)$.

<u>Mouvement brownien</u>

Mais la comparaison entre dim et Dim ne donne encore qu'une idée assez grossière du type de régularité d'un ensemble. Plus fine est la comparaison entre ϕ-m et ϕ-p , les mesures de Hausdorff et de packing. Nous avons étudié en (6) la trajectoire E_ω du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Un problème classique, posé par P. Lévy, était de trouver la "bonne" fonction ϕ , celle telle que $0 < \phi\text{-m}(E_\omega) < +\infty$ avec probabilité 1 . Ce problème est achevé en [10] : il faut prendre $\phi_1(t)=t^2\log|\log t|$. Nous avons poursuivi la même recherche pour ϕ-p , et trouvé que la bonne fonction était $\phi_2(t)=t^2/\log|\log t|$ (noter la symétrie agréable). Un lemme, nécessaire pour arriver à ce résultat, dit que si $T(r)$ désigne le temps total (passé et futur) durant lequel la particule reste dans la boule $B_r(0)$ (au temps 0 elle se trouve à l'origine), on a:

$$\liminf \frac{T(r)}{\phi_2(r)} = 2 \quad \text{presque sûrement.}$$

Il faut ensuite utiliser un théorème de densité. Dans cette partie le professeur Taylor a eu, évidemment, la part essentielle. Mais d'une façon générale il se trouve que tout l'ensemble de cette thèse a été écrite à Liverpool, et que j'ai grandement profité de nos très fréquentes conversations.

Les nombreuses définitions de Δ

Passons maintenant à la partie concernant Δ . Nous avons vu que cet indice avait été retrouvé plusieurs fois par des méthodes, soit métriques soit arithmétiques, très différentes. Comme les idées de départ divergent, il peut sembler surprenant que les résultats coïncident. Ceci est dû au manque relatif de finesse de l'échelle des fonctions ℓ^a , $a > 0$: dans une échelle plus fine les résultats divergeront.

C'est dans $\mathbb{R}$ que l'on peut observer le plus grand nombre de formulations différentes, puisque dans $\mathbb{R}$ seulement a été considérée une suite d'ouverts complémentaires du compact E étudié. Cette suite s'impose en effet naturellement, il suffit de prendre les composantes connexes du complémentaire. Notons (c_n) la suite décroissante des longueurs de ces intervalles. J'ai dans (2) réuni 12 définitions différentes - les onze premières étant des définitions "historiques" ou apparentées, la douzième basée sur l'emploi de réseaux, d'une forme aussi générale que possible, permettant d'approcher E par des recouvrements de plus en plus fins (mais toujours par intervalles de longueur comparable).
L'essentiel de la démonstration se ramène à la preuve de l'égalité entre les trois indices suivant:

$$\Delta_1(c_n) = \inf \{ \alpha : n\, c_n^{\alpha} \to 0 \}$$

$$\Delta_2(c_n) = \inf \{ \alpha : c_n^{\alpha-1} \sum_n^{\infty} c_i \to 0 \}$$

$$\Delta_3(c_n) = \inf \{ \alpha : n^{\frac{1}{\alpha}-1} \sum_n^{\infty} c_i \to 0 \} \quad .$$

On reconnaît la raréfaction logarithmique de Borel [6] dans la troisième expression. La première est la plus simple, et s'apparente à l'indice de Besicovitch-Taylor [2]

$$\inf \{ \alpha : \sum_1^{\infty} c_i^{\alpha} < +\infty \} \ .$$

Quant à $\Delta_2(c_n)$, qui est le plus difficile à comparer aux autres, il joue un rôle important dans certains calculs techniques concernant Δ : je l'ai retrouvé à plusieurs reprises par la suite, et n'aurai pu mener à bien différents travaux sans la connaissance préalable de ces égalités. On la retrouve en particulier dans l'étude du problème suivant:

Si E est dans $\mathbb{R}^p$, $p > 1$, quelles conditions doivent remplir une suite d'ouverts disjoints de diamètres c_n dans le complémentaire de E, pour que les expressions précédentes soient encore égales à $\Delta(E)$? En d'autres termes, pour que l'égalité

$$\Delta_1(c_n) = \Delta(E)$$

ait lieu. Pour motiver cette recherche, prenons un exemple bien connu. D'un triangle curviligne dans le plan, bordé par trois cercles mutuellement tangents, extrayons le disque ouvert de diamètre maximal, puis répétons la même opération dans les trois triangles restant, etc... Cet ensemble de disques, finalement partout dense dans le triangle initial, est le "packing apollonien". Si (c_n) est la suite des diamètres de ces disques, la "constante du packing" [13] a été définie comme $\inf \{ \alpha : \sum c_i^{\alpha} < +\infty \}$, c'est-à-dire justement la forme de Besicovitch-Taylor, et effectivement on peut montrer que cette constante n'est autre que $\Delta(E)$, où E est l'ensemble restant dans le triangle initial après avoir ôté tous les disques. Comment généraliser cela, non seulement à des disques ou des pavés, mais à des packings de toute forme? L'ouvrage (3) donne une réponse valable dans $\mathbb{R}^2$, que voici:

Prenons pour commencer un domaine V_0, qui contiendra E, et une famille dénombrable $(V_n)_{n\geq 1}$ d'ouverts disjoints inclus dans V_0, de telle sorte que pour tout $n\geq 0$, V_n a une frontière F_n topologiquement équivalente à un cercle. Pour éviter des problèmes de frontière définissons E comme

$$E = \overline{V_0 - \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n} .$$

On appelle c_n le diamètre de V_n, et on suppose $c_n \geq c_{n+1}$. Alors l'expression $\Delta_1(c_n)$ est égale à $\Delta(E)$ si les conditions suivantes sont réalisées:

(i) $|E|_2 = 0$.

(ii) F_n est rectifiable, de longueur ℓ_n, et pour une certaine constante $A > 1$: $\ell_n \leq A\, c_n$.

(iii) Il existe deux boules B'_n et B''_n telles que

$B'_n \subset V_n \subset B''_n$, et diam $B''_n \leq A$ diam B'_n.

(iv) L'ensemble $\left(\bigcup_0^{n-1} F_i\right) \cap F_n$ n'a pas plus de A composantes connexes.

(v) dist $(V_n, E) \leq A\, c_n$.

De ce type sont, clairement, les disques du packing apollonien; ou encore, les pavés recouvrant le complémentaire selon la méthode de Whitney [16, p.16]. Pour montrer qu'aucune de ces conditions n'est inutile, on donne cinq exemples d'ensembles, associés à une suite d'ouverts complémentaires, dont chacun vérifie quatre des conditions et manque à vérifier la cinquième; et pour lesquels $\Delta_1(c_n) \neq \Delta(E)$. Quant à la démonstration, elle est courte (et n'utilise pas l'hypothèse (iv)) si $\sum c_i = +\infty$ ($\Delta(E)$ est alors ≥ 1); et nettement plus difficile si $\sum c_i < +\infty$, cas où les F_n ont d'importantes parties communes. Dans le premier cas on rencontre une nouvelle expression équivalente pour $\Delta_1(c_n)$:
$\inf \{ \alpha : c_n^{\alpha-1} \sum_1^n c_i \to 0 \}$.

La généralisation du théorème ci-dessus à $\mathbb{R}^p$, $p \geq 3$, paraît inextricable. Du moins peut-on la faire dans le cas où les V_n sont des pavés, ce qui exclut les conditions (ii) et (iii) : c'est le sujet de l'article (7), dû à une question de J. Peyrière. Sans doute pourrait-on encore la tenter pour le cas où les V_n sont des corps convexes, avec des difficultés géométriques supplémentaires.

Spirales

D'autres expressions équivalentes de $\Delta_1(c_n)$ sont utilisées dans l'étude (5) des spirales Γ définies par l'équation polaire

$$\rho = f(\theta) \ , \ \theta \geq 0 \ ,$$

où f est continue, décroissante, convexe, tendant vers 0 quand θ tend vers $+\infty$, et où Γ est localement convexe. Le problème posé par Y. Dupain et M. Mendès-France était de relier $\Delta(\Gamma)$ à $\dim_S(\Gamma) = \inf \{ \alpha : \sum n \ \omega_n^\alpha < +\infty \}$, où ω_n est la mesure de l'ensemble des droites du plan coupant Γ en exactement n points (selon la mesure classique, invariante par tout déplacement). Dans le cas de la spirale, il a été possible de prouver l'égalité entre ces deux indices, la démonstration consistant d'abord à prouver que

$$\dim_S(\Gamma) = \inf \{ \alpha : \sum_1^\infty n \ \delta_n^\alpha < +\infty \}$$

où $\delta_n = f(2n\pi) - f(2(n+1)\cdot\pi)$, et ensuite que cette dernière valeur était égale aux suivantes:

$$\inf \{ \alpha : \delta_n^{\alpha-1} \sum_1^n i \ \delta_i \to 0 \} \ , \ \inf \{ \alpha : n^2 \ \delta_n^\alpha \to 0 \} \ ,$$

$$2 \inf \{ \alpha : \delta_n^{\alpha-1} \sum_n^\infty \delta_i \to 0 \} \ , \text{ et } \ \inf \{ \alpha : n \ \delta_n^{\alpha-1} \sum_n^\infty \delta_i \to 0 \} \ .$$

Ces résultats obtenus on en tire assez facilement $\Delta(\Gamma) = \dim_S(\Gamma)$, en donnant une estimation de $|\Gamma(r)|_2$. Ces δ_n peuvent en réalité être reliés à des diamètres d'ouverts complémentaires de Γ, et on pourrait ainsi ramener l'étude de $\Delta(\Gamma)$ au problème plus général de (3).

Le packing apollonien

C'est toujours une source de difficiles problèmes. Celui par exemple de démontrer l'égalité

$$\dim(E) = \Delta(E)$$

où E est l'ensemble résiduel, a été résolu par Boyd [9] de façon d'ailleurs assez complexe. J'ai cherché à démontrer la même égalité (à vrai dire je n'ai eu connaissance de la démonstration de Boyd qu'à la fin de mon travail) par la méthode, très simple dans son principe, consistant à utiliser le théorème de densité pour dim(E) en construisant sur E des mesures singulières adéquates. Avant cela il est nécessaire de construire un réseau recouvrant E , composé de triangles curvilignes aussi réguliers que possible, (réguliers, en ce sens que le rapport du diamètre extérieur au diamètre intérieur doit être borné; on évite par là les triangles très longs et très fins). Pour ce faire, enlevons dans une première étape tous les disques du packing qui sont tangents à au moins deux des cercles originaux (c'est la "guirlande de Kasner et Supnick"); cela détermine une famille dénombrable $\mathcal{F}_1$ de triangles, de toutes tailles, mais tous réguliers. Puis, dans chacun d'eux, répétons la même opération: au total cela détermine une famille $\mathcal{F}_2$, emboîtée dans $\mathcal{F}_1$. Et ainsi de suite à l'infini. Il faut vérifier que ce réseau se trouve être effectivement suffisant pour le calcul de dim(E) . Ensuite on définit une mesure par son poids sur chaque triangle de $\mathcal{F}_n$ .Une légère variante du théorème de densité fournit alors un encadrement pour dim(E) . Des réseaux de plus en plus fins permettent finalement d'obtenir une suite de valeurs de plus en plus précises pour dim(E). On montre d'autre part que Δ(E) est inférieur ou égal à la limite de cette suite. D'où l'égalité.

Il serait intéressant de vérifier si, comme nous le conjecturons, cette méthode ne s'appliquerait pas à des packings plus généraux. Telle quelle, elle fournit un bon exemple du calcul des dimensions par des procédés classiques. Il va de soi que les autres indices dont on a parlé, tous compris entre dim(E) et Δ(E) , prennent tous cette même valeur 1,306... : l'ensemble résiduel du packing apollonien est, du point de vue dimensionnel, au plus haut point régulier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. S. Besicovitch & P. A. P. Moran, "The measure of product and cylinder sets", J. Lond. Math. Soc. 20 (1945), 110-120.

[2] A. S. Besicovitch & S. J. Taylor, "On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure", J. Lond. Math. Soc. 29 (1954), 449-459.

[3] P. Billingsley, "Hausdorff dimension in probability theory", Illinois J. Math. 5 (1961), 291-298.

[4] E. Borel, "Les ensembles de mesure nulle", Bull. Soc. Math. France 41 (1913), 1-19.

[5] E. Borel, "Sur les ensembles de mesure nulle", Fund. Math. 25 (1935), 7-19.

[6] E. Borel, "Sur l'addition vectorielle des ensembles de mesure nulle", C. R. Acad. Sc. Paris 227 (1948), 103-105.

[7] G. Bouligand, "Ensembles impropres et nombre dimensionnel", Bull. Sc. Math. II 52 (1928), 320-334 & 361-376.

[8] G. Bouligand, "Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble plan", Bull. Sc. Math. II 53 (1929), 185-192.

[9] D. W. Boyd, "The residual set dimension of the apollonian packing", Mathematika 20 (1973), 170-174.

[10] Z. Ciesielski & S. J. Taylor, "First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path", Trans. Am. math. Soc. 103 (1962), 434-450.

[11] J.-P. Kahane & R. Salem, "Ensembles parfaits et séries trigonométriques" (1963), Hermann.

[12] B. Mandelbrot, "The fractal geometry of nature" (1982), W. H. Freeman.

[13] Z. A. Melzak, "Infinite packing of disks", Canad. J. Math. 18 (1966), 838-852.

[14] C. A. Rogers, "Hausdorff measures" (1970), Camb. Univ. Press.

[15] C. A. Rogers & S. J. Taylor, "Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure", Mathematika 8 (1961), 1-31.

[16] E. M. Stein, "Singular integrals and differentiability properties of functions", (1970), Princeton University Press.

[17] C. Tricot, "Sur la notion de densité", Cahiers du département d'économétrie de l'Université de Genève (1973).

[18] C. Tricot, Jr, "Sur la classification des ensembles boréliens de mesure de Lebesgue nulle" (1979), thèse de doctorat, Genève.

[19] C. Tricot, Jr, "Rarefaction indices", Mathematika 27 (1980), 46-57.

On pourra trouver des bibliographies plus complètes dans les ouvrages [12] , [14] , et [18] .

Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1982), **91**, 57
Printed in Great Britain

Two definitions of fractional dimension

BY CLAUDE TRICOT JR
University of Liverpool

(*Received* 13 *March* 1981)

Introduction

The main properties of the Hausdorff dimension, here denoted by dim, are

$$\text{monotonicity: } E_1 \subset E_2 \Rightarrow \dim(E_1) \leqslant \dim(E_2)$$
$$\sigma\text{-stability: } \dim\left(\bigcup_n E_n\right) \leqslant \sup_n \dim(E_n)$$

In $\mathbb{R}^p$, invariance under a group H of homeomorphisms: $\forall H \in \mathrm{H}$, $\dim \circ H = \dim$. The definition of H, introduced in (15) and (16), is recalled in § 2.

Furthermore dim takes the value p on each subset of $\mathbb{R}^p$ of positive p-dimensional Lebesgue measure, and $\log 2/(-\log a)$ on each symmetrical perfect set with constant ratio a (7).

Our purpose is to begin a systematic study of a second dimension Dim (the first reference can be found in (16), with the notation $\hat{\hat{d}}$) which has all the above mentioned properties. We show in § 1 that, as for Hausdorff dimension, Dim can be obtained from a family of outer measures $\Lambda^a - \hat{\mathfrak{M}}$. This section is valid in any metric space. The remainder of the paper is restricted to $\mathbb{R}^p$.

In § 2 we give, for each subset of $\mathbb{R}^p$, a definition of dim which is known for compact subsets (with a slightly different form, see (7)), using the lemma of Frostman. We show that a symmetric definition, where, roughly speaking, the sup is replaced by inf and conversely, can be found for Dim (Theorem 1).

In § 3 we introduce two other σ-stable indices $\hat{\delta}$ and $\hat{\Delta}$ (in fact $\hat{\Delta} = \mathrm{Dim}$, Proposition 2). With the help of the concept of uniformity of a rarefaction index on a set we can find a general result concerning a family of σ-stable indices (Proposition 3) and deduce the existence of a set such that $\dim \neq \hat{\delta}$.

We always have the inequality

$$\dim \leqslant \mathrm{Dim}$$

but these two dimensions are not identical: we study in § 4 the *irregularity coefficient* $\mathbf{R}$ defined by

$$\mathbf{R} = \mathrm{Dim} - \dim.$$

A set E is *regular* if $\mathbf{R}(E) = 0$: this new notion (weaker than that introduced in (16)) is used in § 5, devoted to the study of cartesian products, to give in particular that

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

holds if E, or F, is regular, in the sense of § 4 (this problem was suggested to me by Professor S. J. Taylor), and we see that this condition is weaker than that given by

Besicovitch and Moran(2) (Proposition 4). Several examples of dimension relations for cartesian products are given at the end.

I am most grateful to Professor S. J. Taylor for his advice and encouragement while I was preparing this paper.

§ 1 *The outer measures h-m and h-$\hat{M}$*

Let (X, ρ) be a metric space, $d(E)$ the diameter of E, and B the set of all open balls of X. A countable family of bounded subsets of X will be denoted by $\mathscr{R}$, and

$$D(\mathscr{R}) = \sup_{E \in \mathscr{R}} d(E).$$

If $E \subset X$, $r > 0$:

$$A(E, r) = \{\mathscr{R}/D(\mathscr{R}) \leqslant r, \quad E \subset \cup \mathscr{R}\}$$

$$B(E, r) = \{\mathscr{R} \subset B/D(\mathscr{R}) \leqslant r,$$

the elements of $\mathscr{R}$ do not overlap, and $\forall B \in \mathscr{R}$: $\rho(B, E) = 0\}$.

As in (12), we call $\mathscr{H}_0$ the class of functions h: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, monotone increasing for $t \geqslant 0$, positive for $t > 0$, continuous on the right for all $t \geqslant 0$, and such that $h(0) = 0$. It will be useful to write $h(E)$ instead of $h(d(E))$ when $E \neq \varnothing$, and $h(\mathscr{R})$ instead of the sum $\sum_{E \in \mathscr{R}} h(E)$.

Let $\Lambda = id_{\mathbb{R}^+}$.

If $E \subset X$, $h \in \mathscr{H}_0$, the limit, when $r \to 0$, of

$$h - m(E, r) = \inf\{h(\mathscr{R})/\mathscr{R} \in A(E, r)\}$$

is the Hausdorff measure of E, $h - m(E)$, and the Hausdorff dimension of E is defined in the following way:

$$\dim(E) = \inf\{a \in \mathbb{R}^+/\Lambda^a - m(E) = 0\} \tag{1}$$

$$= \sup\{a \in \mathbb{R}^+/\Lambda^a - m(E) = +\infty\}. \tag{2}$$

We now introduce another index by a similar method. Let us denote by $h - M(E)$ the limit, when $r \to 0$, of

$$h - M(E, r) = \sup\{h(\mathscr{R})/\mathscr{R} \in B(E, r)\}.$$

As for the Hausdorff measure it can be seen that the family $\Lambda^a - M$, $a \in \mathbb{R}^+$, determines a rarefaction index:

DEFINITION 1.

$$\Delta(E) = \inf\{a \in \mathbb{R}^+/\Lambda^a - M(E) = 0\} \tag{3}$$

$$= \sup\{a \in \mathbb{R}^+/\Lambda^a - M(E) = +\infty\} \tag{4}$$

with the following properties:

(P_1) Δ is monotone: $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \Delta(E_1) \leqslant \Delta(E_2)$.

(P_2) Δ is stable, i.e. $\Delta(E_1 \cup E_2) = \max(\Delta(E_1), \Delta(E_2))$: This follows from

$$h - M(E_1 \cup E_2) \leqslant h - M(E_1) + h - M(E_2).$$

(P_3) $\Delta(E) = \Delta(\bar{E})$.

This last property implies that Δ is not σ-stable, a function $\alpha: \mathscr{P}(\mathrm{X}) \to \mathbb{R}$ being σ-stable (16) if

$$\alpha(\bigcup_n E_n) = \sup \alpha(E_n). \tag{5}$$

This difference between Δ and dim is a result of the fact that $h - m$ is an outer measure, and $h - M$ is not. But we can use it as a pre-measure (12) and get the new outer measure:

$$h - \hat{M}(E) = \inf \sum_{E \subset \cup E_i} h - M(E_i), \tag{6}$$

(the sets E_i are arbitrary subsets of X).

Now we introduce our 'symmetrical index':

DEFINITION 2.

$$\mathrm{Dim}\,(E) = \inf\{a \in \mathbb{R}^+ / \Lambda^a - \hat{M}(E) = 0\} \tag{7}$$

$$= \sup\{a \in \mathbb{R}^+ / \Lambda^a - \hat{M}(E) = +\infty\}. \tag{8}$$

The fact that $h - \hat{M}$ is an outer measure implies that Dim has the same properties (P_4) and (P_5) as Hausdorff dimension:

(P_4) Monotonicity: $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \mathrm{Dim}\,(E_1) \leqslant \mathrm{Dim}\,(E_2)$.

(P_5) σ-stability: $\mathrm{Dim}\,(\bigcup_n E_n) = \sup_n \mathrm{Dim}\,(E_n)$.

Let us state a lemma which will be useful later:

LEMMA 1. *Let E be a bounded subset of* X, *and for each $r > 0$, $\mathbf{M}_r^*(E)$ be the greatest number of non-overlapping open balls of diameter $\in]r/2, r]$ s.t. $\rho(B, E) = 0$.*

Then

$$\Delta(E) = \limsup_{r \to 0} \frac{\log \mathbf{M}_r^*(E)}{-\log r}. \tag{9}$$

Proof. The inequality $\geqslant$ comes from

$$\left(\frac{r}{2}\right)^a \mathbf{M}_r^*(E) \leqslant \Lambda^a - M(E, r) \quad \text{for each} \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

which is trivial.

In the other direction, assume that $\Delta(E) \neq 0$, and take two real numbers β and γ, $0 < \beta < \gamma < \Delta(E)$.

By (4) $\Lambda^\gamma - M(E) = +\infty$, and for each $r \in]0, 1[$ there exists $\mathscr{R} \in \mathrm{B}(E, r)$ such that

$$\Lambda^\gamma(\mathscr{R}) \geqslant 1.$$

Let $n \geqslant 0$, and k_n be the number of $B \in \mathscr{R}$ such that

$$2^{-n-1} < d(B) \leqslant 2^{-n}.$$

Using the inequality

$$\sum_1^\infty k_n 2^{-n\gamma} \geqslant 1,$$

there exists an integer N such that

$$\mathbf{M}_{2^{-N}}^*(E) \geqslant k_N \geqslant 2^{N\beta}(1 - 2^{\beta-\gamma}),$$

so

$$(\log \mathbf{M}^*_{2^{-N}}(E)/\log 2^N) \geqslant \beta + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

which concludes the proof.

COROLLARY 1. *For each* $E \subset \mathrm{X}$:

$$\dim(E) \leqslant \mathrm{Dim}(E) \leqslant \Delta(E). \tag{10}$$

Proof. (*a*) Let us show first that

$$\dim(E) \leqslant \Delta(E). \tag{11}$$

Let $r > 0$, and $\mathscr{R}$ be a set of $\mathbf{M}^*_r(E)$ non overlapping open balls s.t. $\rho(B, E) = 0$.

If each $B \in \mathscr{R}$ is replaced by $\tilde{B}$ of same centre and diameter $3\,d(B)$, the set of all open balls $\tilde{B}$ is a covering of E. Therefore,

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad \Lambda^a - m(E, 3r) \leqslant \mathbf{M}^*_r(E)\,(3r)^a,$$

and

$$\Lambda^a - m(E) \leqslant 3^a \lim_{r \to 0} \inf \mathbf{M}^*_r(E)\, r^a$$

which by (1) and (9) implies the required inequality.

(*b*)

$$\mathrm{Dim}(E) \leqslant \Delta(E)$$

comes from $h - \hat{M}(E) \leqslant h - M(E)$ (6).

(*c*) Now let us take $a > \mathrm{Dim}(E)$: by (7)

$$\Lambda^a - \hat{M}(E) = 0,$$

so there exists a sequence (E_n), $\cup E_n = E$, such that

$$\sum_n \Lambda^a - M(E_n) \leqslant 1.$$

It follows from (3) that $\Delta(E_n) \leqslant a$ for each n. Using (11) and the σ-stability of dim, we obtain

$$\dim(E) \leqslant a.$$

We will see, in further examples, that these three indices are different, but take the same values on some large classes of sets.

§ 2 *Another definition of dim and Dim in* $\mathbb{R}^p$

Let $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{X} = \mathbb{R}^p$, ρ be the distance defined by

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i - y_i|,$$

$B_r(x)$ be the open ball of centre x, radius r, and for each $E \subset \mathbb{R}^p$:

$$E(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^p / \rho(x, E) \leqslant r\}.$$

The p-dimensional Lebesgue measure is denoted by $|\ |$.

Let $n \in \mathbb{N}$. A 2^n-*mesh* in $\mathbb{R}$ is a closed interval of the kind $[k2^{-n}, (k+1)\,2^{-n}]$, $k \in \mathbb{Z}$. A 2^n-*mesh* in $\mathbb{R}^p$ is a closed ball, the projection of which on each axis is a 2^n-mesh.

If E is bounded, $\omega(2^n, E)$ will denote the number of 2^n-meshes meeting E.

There is another definition of Δ in $\mathbb{R}^p$:

COROLLARY 2. *Let E bounded,* $\mathrm{M}_r(E)$ *be the greatest number of open balls of diameter r, non overlapping, and centred in E, and* $\mathrm{N}_r(E)$ *be the smallest number of closed balls of diameter r covering E. Then*

$$\Delta(E) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mathrm{M}_r(E)}{-\log r} = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mathrm{N}_r(E)}{-\log r}$$

$$= \limsup_{n} \frac{\log \omega(2^n, E)}{\log 2^n} = \limsup_{r\to 0} \left(p - \frac{\log |E(r)|}{\log r}\right). \tag{12}$$

Therefore Δ is exactly the '*metric dimension*' of A. Kolmogorov (9), the '*logarithmic density*' of C. Tricot (14), the '*entropy dimension*' of J. Hawkes (6).

Proof. Let us call $\Delta_1, \ldots, \Delta_5$ the five members of (12).

$\Delta_1 = \Delta_5$: by lemma 1, and the inequalities

$$\mathrm{M}_r^*(E)\left(\frac{r}{2}\right)^p \leqslant |E(r)| \leqslant \mathrm{M}_r^*(E)\,(4r)^p,$$

the last one resulting from the fact that $E(r)$ is covered by $\mathrm{M}_r^*(E)$ balls of diameter $4r$.

$\Delta_2 = \Delta_5$, and $\Delta_4 = \Delta_5$: similar argument.

$\Delta_5 \leqslant \Delta_3$: since $|E(r)| \leqslant \mathrm{N}_r(E)\,(3r)^p$.

$\Delta_3 \leqslant \Delta_4$: since $\mathrm{N}_r(E) \leqslant \omega(2^n, E)$ if $2^{-n} \leqslant r$.

Remark. In particular

$$\Delta \leqslant p. \tag{13}$$

If $|E| > 0$ we have

$$\dim(E) = \mathrm{Dim}(E) = \Delta(E) = p.$$

Let us give a property of invariance for dim, Dim, Δ:

In (15) we introduced the group $\mathrm{H}(\mathrm{X})$ of all homeomorphisms $H: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ such that

$$\forall x \in \mathrm{X}, \lim_{\substack{y\to x\\ z\to x\\ y\neq z}} \frac{\log \rho(H(y), H(z))}{\log \rho(y,z)} = 1.$$

This property is equivalent to:

For each compact set $K \subset \mathrm{X}$, $\log \rho(H(x), (H(y))\,(\log \rho(x,y))^{-1}$ converges to 1 uniformly on K as $\rho(x,y) \to 0$.

PROPOSITION 1. $\forall H \in \mathrm{H}(\mathbb{R}^p)$, $\dim \circ H = \dim$, $\Delta \circ H = \Delta$, $\mathrm{Dim} \circ H = \mathrm{Dim}$.

Proof. Let $E \subset \mathbb{R}^p$. Without loss of generality we can assume that E is bounded. Let $\epsilon > 0$, and $r > 0$ such that

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \rho(x,y) \leqslant r \Rightarrow \rho(H(x), H(y)) \in [\rho(x,y)^{1+\epsilon}, \rho(x,y)^{1-\epsilon}].$$

(*a*) If $\mathscr{R}\in \mathrm{A}(E,r)$, for each $A\in\mathscr{R}$, the diameter of $H(A)$ is $\leqslant \mathrm{d}(A)^{1-\epsilon}$:
So $\tilde{\mathscr{R}} = \{H(A)/A\in\mathscr{R}\}\in \mathrm{A}(H(E), r^{1-\epsilon})$, and

$$\Lambda^{a}(\tilde{\mathscr{R}}) \leqslant \Lambda^{a(1-\epsilon)}(\mathscr{R}),$$

which implies $\dim (H(E)) \leqslant (1-\epsilon)^{-1}\dim (E)$.

(*b*) The same argument proves that

$$\mathrm{N}_{r^{1-\epsilon}}(H(E)) \leqslant \mathrm{N}_r(E),$$

so by (12) $\Delta(H(E)) \leqslant (1-\epsilon)^{-1}\Delta(E)$.

(*c*) If $a > \mathrm{Dim}(E)$, $\Lambda^a - \hat{M}(E) = 0$, and there exists (E_n), $\cup E_n = E$, s.t. $\Delta(E_n) \leqslant a$.

So $$\Delta(H(E_n)) \leqslant (1-\epsilon)^{-1}a \quad \text{by} \quad (b),$$

and therefore $\mathrm{Dim}(H(E)) \leqslant (1-\epsilon)^{-1}\mathrm{Dim}(E)$.

To conclude, we use the fact that ϵ is arbitrarily small, and that $H^{-1}\in \mathrm{H}(\mathbb{R}^p)$.

Now let us consider the σ-additive measures on a set E. In this paper they will always be finite, of total mass $\|\mu\|$, and positive, without further mention. By convention,

$$\text{if} \quad r\in]0,1[: \frac{\log 0}{\log r} = +\infty. \tag{14}$$

Notation. Let μ be a measure, and $x\in\mathbb{R}^p$. Let

$$\phi(x) = \liminf_{r\to 0}\frac{\log\mu(B_r(x))}{\log r}, \quad \Phi\mu(x) = \limsup_{r\to 0}\frac{\log\mu(B_r(x))}{\log r}.$$

$\phi\mu$ and $\Phi\mu$ are functions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

THEOREM 1. *Let E be an analytic subset of $\mathbb{R}^p$, and*

$$\gamma(E) = \sup_{\mu(E)>0}\{\inf_E \phi\mu\}, \quad \Gamma(E) = \inf_{\mu}\{\sup_E \Phi\mu\}. \tag{15}$$

Then

$$\dim(E) = \gamma(E), \quad \mathrm{Dim}(E) = \Gamma(E).$$

Proof. (*a*) The inequality $\gamma(E) \leqslant \dim(E)$ is not far from a result of P. Billingsley (3): If $\gamma(E) \neq 0$, and $\alpha\in]0,\gamma(E)[$, there exists a measure μ, $\mu(E) > 0$, such that

$$\forall x\in E, \liminf_{r\to 0}\frac{\log\mu(B_r(x))}{\log r} > \alpha. \tag{16}$$

Let $\epsilon > 0$, and $E_n = \left\{x\in E/r \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow \mu(B_r(x)) \leqslant r^{\alpha-\epsilon}\right\}$.

For each family $\mathscr{R}$ of open balls centred in E_n, and of diameter $\leqslant 1/n$, covering E_n, we have

$$\Lambda^{\alpha-\epsilon}(\mathscr{R}) \geqslant \mu(E_n). \tag{17}$$

As $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$, and $\bigcup_n E_n = E$, $\mu(E_n) > 0$ if n is large enough. On the other hand we know that dim (E_n) may be calculated with such open balls centred in E_n, therefore by (17)

$$\dim(E_n) \geqslant \alpha - \epsilon,$$

from which the result follows.

(*b*) $$\mathrm{Dim}(E) \leqslant \Gamma(E):$$

Let $\alpha > \Gamma(E)$, μ such that

$$\forall x \in E, \limsup_{r \to 0} \frac{\log \mu(B_r(x))}{\log r} < \alpha, \tag{18}$$

$\epsilon > 0$, and $E_n = \left\{x \in E / r \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow \mu(B_r(x)) \geqslant r^{\alpha+\epsilon}\right\}$.

Let n be such that $E_n \neq \varnothing$, and assume first that E_n is bounded.

If $r \leqslant 1/n$, each ball B of radius r centres in E_n verifies

$$\mu(B) \geqslant r^{\alpha+\epsilon},$$

whence

$$\mathbf{M}_{2r}(E)\, r^{\alpha+\epsilon} \leqslant \|\mu\|.$$

By (12) it follows that

$$\Delta(E_n) \leqslant \alpha + \epsilon$$

and by (10) $$\mathrm{Dim}(E_n) \leqslant \alpha + \epsilon.$$

If E_n is not bounded: replace E_n by

$$E'_n = E_n \cap B_n(0).$$

Then apply the σ-stability of Dim to conclude.

To complete the proof three lemmas are necessary. The first is well-known (see (7) for a proof in $\mathbb{R}$).

LEMMA 2. *Let $h \in \mathscr{H}_0$ such that*

$$\exists c_1 > 1 \quad \textit{and} \quad c_2 > 0 \textit{ s.t. } h(c_1 t) \leqslant c_2 h(t),$$

and E be a compact set.

$$h - m(E) > 0 \Rightarrow \exists \mu, \quad \mathrm{Supp}\, \mu = E, \textit{ such that}$$

$$\forall x \in E, \quad \forall r \in]0, 1[: \mu(B_r(x)) \leqslant h(r).$$

LEMMA 3.

$$h - M(E) < +\infty \Rightarrow \sup_{\mathscr{R} \in \mathrm{B}(E,1)} h(\mathscr{R}) < +\infty.$$

Proof. Let $r > 0$ be such that $h - M(E, r) \leqslant 2h - M(E)$.

If $\mathscr{R} \in \mathrm{B}(E, 1)$ is such that each ball of $\mathscr{R}$ has a diameter $\geqslant r$, $\mathscr{R}$ has no more than $|E(1)|\, r^{-p}$ elements.

So $$\sup_{\mathscr{R} \in \mathrm{B}(E,1)} h(\mathscr{R}) \leqslant 2h - M(E) + |E(1)|\, r^{-p} h(1).$$

LEMMA 4. *Let $h \in \mathscr{H}_0$ and $E \subset \mathbb{R}^p$.*
$h - M(E) < +\infty \Rightarrow \exists \mu$ *such that*

$$\forall x \in E, \quad \forall r \in]0, 1[: \mu(B_r(x)) \geqslant h(r).$$

Outline of Proof. It is in some sense the symmetrical lemma to Frostman's lemma, and we will use similar arguments.

As $h - M(E) < +\infty$, E is bounded.
Let $\mathscr{R}_n$ be the family of 2^n-meshes meeting E, and ν_n be the measure uniformly distributed on each $u \in \mathscr{R}_n$ such that $\nu_n(u) = h(2^{-n+1})$. Then by induction on k an increasing sequence $(\nu_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ of measures can be constructed such that

$$\forall u \in \mathscr{R}_{n-k}, \ \nu_{n,k}(u) \geqslant h(2^{-n+k+1}),$$

and such that there exists a covering $\mathscr{R}$ of E by disjoint meshes with $\nu_{n,n}(\cup \mathbb{R}) = h(\mathscr{R})$. Now apply Lemma 3 and a theorem of Helly to get a finite measure μ verifying

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in \mathscr{R}_n, \quad \mu(u) \geqslant h(2^{-n+1}). \tag{19}$$

Let $x \in E$, and $r \in]0, 1[$. There exists $u \in \bigcup_k \mathscr{R}_k$ such that $u \subset B_r(x)$, and $d(u) \geqslant r/2$. From (19)

$$h(r) \leqslant h(2 \operatorname{diam}(u)) \leqslant \mu(u) \leqslant \mu(B_r(x)).$$

End of the proof of Theorem 1.

(*c*) $\dim(E) \leqslant \gamma(E)$: Assume $\dim(E) \neq 0$. As E is analytic, for each $\alpha \in]0, \dim(E)[$ there exists (4) a compact subset $F \subset E$ such that

$$\alpha < \dim(F).$$

As $\Lambda^\alpha - m(E) = +\infty$ we can find (Lemma 2) a measure μ such that $F = \operatorname{Supp}\mu$, and $\inf_F \phi\mu \geqslant \alpha$.

If $x \in E - F$, let $r > 0$ be s.t. $F \cap B_r(x) = \varnothing$: then $\mu(B_r(x)) = 0$, and from (14), $\inf_{E-F} \phi\mu = +\infty$.

Therefore $\gamma(E) \geqslant \alpha$.

(*d*) $\Gamma(E) \leqslant \operatorname{Dim}(E)$: for each $\alpha > \operatorname{Dim}(E)$, $\Lambda^\alpha - \hat{M}(E) = 0$, and there exists a sequence (E_n), $\cup E_n = E$, such that

$$\sup_n \Lambda^\alpha - M(E_n) \leqslant 1.$$

Let $\mu^{(n)}$ be the measure constructed on E_n as in Lemma 4, and put

$$a_n = 2^{-n} \|\mu^{(n)}\|^{-1}, \quad \mu = \sum_n a_n \mu^{(n)}.$$

μ is a finite measure, and for each $x \in E_n$:

$$\forall r \in]0, 1[, \ \mu(B_r(x)) \geqslant a_n \mu^{(n)}(B_r(x)) \geqslant a_n r^\alpha,$$

so that

$$\Phi\mu(x) \leqslant \alpha.$$

§ 3 *Concept of uniformity, and examples*

This section is mainly devoted to a comparison between dim, Dim and other σ-stable indices. Let us recall that if α is a monotone set function, defined on the bounded subsets of $\mathbb{R}^p$, with values in $[0, p]$, the new set function

$$\hat{\alpha}(E) = \inf\{\sup_n \alpha(E_n) / \bigcup_n E_n = E\} \tag{20}$$

is σ-stable (see (5)), and can be extended to any subset of $\mathbb{R}^p$ (16). The properties

$$\hat{\alpha} \leqslant \alpha \quad \text{and} \quad \alpha \leqslant \beta \Rightarrow \hat{\alpha} \leqslant \hat{\beta} \tag{21}$$

are easily verified.

As an example, Δ is not σ-stable, but $\hat{\Delta}$ is. Another example is δ, defined on a bounded set E by

$$\delta(E) = \liminf_n \frac{\log \omega(2^n, E)}{\log 2^n}. \tag{22}$$

This has the properties (P_1) and (P_3), and, as with Δ, it may also be written

$$\begin{aligned} \delta(E) &= \liminf_{r \to 0} \frac{\log \mathrm{N}_r(E)}{-\log r} = \liminf_{r \to 0} \frac{\log \mathrm{M}_r(E)}{-\log r} \\ &= \liminf_{r \to 0} \left(p - \frac{\log |E(r)|}{\log r}\right), \end{aligned} \tag{23}$$

and the corresponding σ-stable index $\hat{\delta} \leqslant \hat{\Delta}$ by (21).

We will show that $\hat{\Delta}$ is coincident with Dim. We cannot find any similar result for dim, and give an example of a set such that $\dim(E) \neq \hat{\delta}(E)$ (Example 2).

Proposition 2.

$$\mathrm{Dim} = \hat{\Delta}. \tag{24}$$

Proof. The σ-stability of Dim and $\hat{\Delta}$, and (10) prove that $\mathrm{Dim} \leqslant \hat{\Delta}$.

Conversely, if $a > \mathrm{Dim}(E)$, by (7) $\Lambda^a - \hat{M}(E) = 0$, and E can be written $\bigcup_n E_n$, where $\Lambda^a - M(E_n) < +\infty$. Therefore $\Delta(E_n) \leqslant a$ by (3) and $\hat{\Delta}(E) \leqslant a$.

Notation. If α is a monotone bounded set function, let us denote for each $x \in \bar{E}$

$$\alpha(E, x) = \lim_{r \to 0} \alpha(E \cap B_r(x)), \tag{25}$$

and

$$\alpha^*(E) = \sup_{x \in E} \alpha(E, x). \tag{26}$$

For a fixed E, $\alpha(E, \cdot)$ can be considered as a function $\bar{E} \to \mathbb{R}$.

Definition 5. *α is 'uniform on E' if $\alpha(E, x)$ is constant on E.*
Then this constant is equal to $\alpha^*(E)$.

Remark. In general α is not necessarily uniform on E. For $\alpha = \dim$ there is an example in (13) of a perfect set E for which $\alpha(E, \cdot)$ takes a different value at each point.

LEMMA 5. *If α is stable, i.e.*

$$\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha(E_n) \tag{27}$$

and uniform on $\bar{E}$, where E is bounded, then $\alpha(E) = \alpha^*(E)$.

Proof. For each $\epsilon > 0$, and each $x \in \bar{E}$, there exists $r_x > 0$ such that

$$\alpha(E \cap B_{r_x}(x)) \leqslant \alpha^*(E) + \epsilon.$$

Applying Borel–Lebesgue's theorem to the open covering $\{B_{r_x}/x \in \bar{E}\}$ of $\bar{E}$, and using the stability of α, we deduce

$$\alpha(E) \leqslant \alpha^*(E) + \epsilon,$$

so $\alpha(E) \leqslant \alpha^*(E)$. The converse inequality is trivial.

PROPOSITION 3. *Let α be a monotone set function, such that for each E, $\alpha(\bar{E}) = \alpha(E)$. If α is uniform on the compact set F, and $\alpha(F) = \alpha^*(F)$, then $\alpha(F) = \hat{\alpha}(F)$.*

Proof. (25), (26) and the equality $\alpha(F) = \alpha^*(F)$ imply

$$\forall x \in F, \quad \forall r > 0, \quad \alpha(F \cap B_r(x)) = \alpha(F). \tag{28}$$

Suppose that $\hat{\alpha}(F) < \alpha(F)$: by (20) there exists a sequence (F_n) such that

$$F = \bigcup_n F_n \quad \text{and} \quad \alpha(F_n) < \alpha(F). \tag{29}$$

Let $x \in F_n$: for each $r > 0$, $\alpha(F_n \cap B_r(x)) \leqslant \alpha(F_n)$. Using (28) and (29), this implies that the closure of the two sets $F_n \cap B_r(x)$ and $F \cap B_r(x)$ are different, so F_n is nowhere dense in F, and F is of the first category: so F cannot be closed, by Baire's theorem.

COROLLARY 3. *If E is compact*

$$\Delta \textit{ uniform on } E \Rightarrow \Delta(E) = \mathrm{Dim}\,(E)$$

$$\delta \textit{ uniform on } E \textit{ and } \delta(E) = \delta^*(E) \Rightarrow \delta(E) = \hat{\delta}(E).$$

Proof. By (P_3), Lemma 5, Proposition 2 and 3.

Example 1. Let E be a symmetrical perfect set in $[0, 1]$:

$$E = \bigcap_n E_n,$$

where E_n is the union of 2^n non-overlapping intervals of length a_n, each of them containing two intervals of E_{n+1}. The sequence (a_n) verifies

$$a_0 = 1, \quad 2a_{n+1} < a_n.$$

(For more detailed definitions of these sets, see (7)).

As $2^n \leqslant N_r(E) \leqslant 2^{n+1}$ if $r \in [a_{n+1}, a_n]$, it follows from (12) and (23) that

$$\delta(E) = \liminf_n \frac{n \log 2}{-\log a_n}, \quad \Delta(E) = \limsup_n \frac{n \log 2}{-\log a_n}.$$

Moreover it is easy to see that δ and Δ are uniform on E, and $\delta(E) = \delta^*(E)$.

From Corollary 3, and a known result about dim (for example see (1)) we have

$$\dim(E) = \hat{\delta}(E) = \delta(E), \quad \operatorname{Dim}(E) = \Delta(E).$$

On the triadic Cantor set, all of these indices take the value $\log 2/\log 3$.

Example 2. We now define a perfect set in $\mathbb{R}$, such that $\dim(E) = 0$, and for each u in a Vitali covering Ω of E, $\delta(E \cap u) = 1$.

By Corollary 3, it follows that

$$\hat{\delta}(E) = \delta(E) = \operatorname{Dim}(E) = \Delta(E) = 1,$$

and in particular $\dim(E) \neq \hat{\delta}(E)$.

Let $(\mathscr{R}_n)_{n \leqslant 0}$ be a sequence of families of closed meshes in $\mathbb{R}$, such that each mesh of $\mathscr{R}_n$ contains two meshes of $\mathscr{R}_{n+1}$ which have at most one point in common.

Let $\Omega = \bigcup_n \mathscr{R}_n$ the set of all these meshes, and

$E = \bigcap_n (\cup \mathscr{R}_n)$: it is a perfect, bounded set.

If we enumerate the meshes of Ω so that $\Omega = \{V_i\}$, each $V \in \Omega$ has

$$\begin{cases} \text{an index } N(V), \text{ s.t. } V = V_{N(V)} \\ \text{a rank } r(V), \text{ s.t. } V \in \mathscr{R}_{r(V)}. \end{cases}$$

If $P(x) = [\frac{1}{2}(x-1)]$, and $r(V) \geqslant 1$, we can assume that the mesh of rank $r(V)-1$ which contains V has index $P(N(V))$.

Let F, G be two functions $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, strictly increasing, s.t.

$$\begin{cases} F(0) \leqslant G(0), \quad \text{and} \quad F(j)-F(i) \leqslant G(j)-G(i) \text{ for each pair } (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \quad i<j & (30) \\ F(k)/G(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 & (31) \\ G(k)/F(k+1) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0. & (32) \end{cases}$$

To calculate dim and δ it is not necessary to state exactly the position and length of each mesh of Ω; we will see that it is sufficient to give all the lengths after a certain rank. By induction on $r(V)$:

$$\begin{cases} r(V) = F(0): |V| = 2^{-G(0)} \\ r(V) \geqslant F(0)+1: \text{if there exists } k \geqslant 1 \text{ such that } r(V) = F(k) \text{ and } V \subset V_k, \text{ then} \\ \qquad |V| = 2^{-G(k)}. \text{ If not, } |V| = \frac{1}{2}|V_{P(N(V))}|. \end{cases}$$

(*a*) *This definition is consistent*: we must verify that, for each $V \in \Omega$, $|V| \leqslant \frac{1}{2}|V_{P(N(V))}|$.

Let us call $\mathscr{C}_k$, $k \geqslant 1$, the category of $V \in \Omega$ such that $r(V) = F(k)-1$, and $V \subset \mathscr{C}_k$. It is sufficient to prove that, for each $V \in \mathscr{C}_k$:

$$2^{-G(k)} \leqslant \tfrac{1}{2}|V|.$$

By induction on k:

$$k = 1: \tfrac{1}{2}|V| = \tfrac{1}{2}.2^{-(F(1)-1-F(0))}.2^{-G(0)} \geqslant 2^{-G(1)}$$

if $F(1)-F(0) \leqslant G(1)-G(0)$: by (30).

$k = 2$: since $F(2)-F(0) \leqslant G(2)-G(0)$.

$k \geqslant 3$: let us assume that $\mathscr{R}_n$ is constructed for any $n \leqslant F(k)-1$. Let W be a mesh of Ω containing V.

If $F(P(k)) < r(W)$, $\quad |W| = \tfrac{1}{2}|V_{P(N(W))}|$.

If $F(P(k)) = r(W)$: it follows, from the inequality

$$\begin{aligned} F(P(k)) &\geqslant 1+P(k) \quad (F \text{ is strictly increasing}) \\ &\geqslant r(V_k) \end{aligned}$$

that $W \subset V_k \subset V_{P(k)}$, and then $|W| = 2^{-G(P(k))}$.

From this discussion we deduce

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}|V| &= \tfrac{1}{2}.2^{-[F(k)-1-F(P(k))]}.2^{-G(P(k))} \\ &\geqslant 2^{-G(k)} \quad \text{using (30).} \end{aligned} \tag{33}$$

(*b*) $\dim(E) = 0$: let μ be the measure defined on E by giving the mass 2^{-n} to each mesh of $\mathscr{R}_n$.

If $x \in E$ there exists a decreasing sequence (V_{k_i}) such that $x = \bigcap_i V_{k_i}$. Let $v_i(x)$ be the mesh of rank $F(k_i)$, containing x, and included in V_{k_i}:

$$\mu(v_i(x)) = 2^{-F(k_i)}, \quad v_i(x) = 2^{-G(k_i)}.$$

So

$$\lim_i \frac{\log \mu(v_i(x))}{\log |v_i(x)|} = \lim_i \frac{F(k_i)}{G(k_i)} = 0, \quad \text{by (31).}$$

By Billingsley's theorem (3) it follows that $\dim(E) = 0$.

(*c*) $\delta(E) = 1$: we have proved (33) that every mesh in the category $\mathscr{C}_k$ has length 2^{-L_k} where

$$L_k = F(k)-1-F(P(k))+G(P(k)).$$

Some straightforward calculations prove that $L_{k-1}(G(P(k)))^{-1} \to +\infty$.

Therefore, for a certain $K \in \mathbb{N}$, $k \geqslant K \Rightarrow G(P(k)) < L_{k-1}$. Let L be an integer $> L_K$, and k such that

$$L_{k-1} < L \leqslant L_k.$$

Let V be a mesh of rank $F(P(k))$, included in V_k. Since $|V| = 2^{-G(P(k))}$, and $k > K$, we have

$$G(P(k)) < L \leqslant L_k,$$

and thus V contains $2^{L-G(P(k))}$ 2^L-meshes of Ω, each of them meeting E. So

$$\begin{aligned} \frac{\log \omega(2^L, E)}{\log 2^L} &\geqslant \frac{L-G(P(k))}{L} \\ &\geqslant 1-\frac{G(P(k))}{L_{k-1}} \to 1. \end{aligned}$$

Whence (22) and (13) $\Rightarrow \delta(E) = 1 (= \Delta(E) = \mathrm{Dim}(E))$.

(*d*) *δ is uniform on E*: it is sufficient to prove that, for any $i \in \mathbb{N}$, $\delta(E \cap V_i) = 1$.

Let $R_0 = r(V_i)$, $\Omega | V_i = \{V \in \Omega / V \subset V_i\}$, b be the increasing bijection

$$\mathbb{N} \to \{r(V)/V \subset V_i\},$$

and for each $k \geqslant 0$:

$$W_k = V_{b(k)}, \quad R(W_k) = r(V_{b(k)}), \quad \mathrm{N}'(W_k) = k,$$

$$F'(k) = F(b(k)) - R_0,$$

$$G'(k) = G(b(k)).$$

It is sufficient to verify that the lengths of meshes of $\Omega | V_i$ are defined in the same way as for those of Ω (replace V, r, F, G, N by W, R, F', G', N').

Furthermore F' and G' have the properties (30), (31) and (32). Then each previous result about E is valid for $E \cap V_i$. In particular $\delta(E \cap V_i) = 1$.

(*e*) *Particular case:* it is not difficult to choose functions F and G satisfying conditions (30), (31), (32). For example

$$F(k) = 2^{k^2}, \quad G(k) = (k+1)\, 2^{k^2}.$$

§ 4 *Irregularity coefficient R*

If the value of different rarefaction indices on a set E coincide we obtain a notion of regularity for E. In the converse case the set is irregular, and this irregularity can be measured by a suitable coefficient. In (16) we studied a strong notation of regularity, by means of the coefficient $\mathbf{r}$. In (15) we introduced a weaker irregularity coefficient $\mathbf{R}$:

DEFINITION 6. *We call 'irregularity coefficient' the set function*

$$\mathbf{R}(E) = \mathrm{Dim}(E) - \dim(E). \tag{34}$$

E is said to be '$\mathbf{R}$-regular', or 'regular', if $\mathbf{R}(E) = 0$.

Some properties of $\mathbf{R}$ are easily deduced from the definition:

(P_6) $\forall H \in \mathrm{H}(\mathbb{R}^p)$, $\quad \mathbf{R} \circ H = \mathbf{R}$.

(P_7) $\mathbf{R}(\cup E_n) \leqslant \sup \mathbf{R}(E_n)$.

Examples 3. The following sets are $\mathbf{R}$-regular: countable sets, symmetrical perfect sets such that (a_n) converges (see Example 1), subsets of $\mathbb{R}^p$ such that $\dim(E) = p$.

If E is any symmetrical perfect set in $\mathbb{R}$,

$$\mathbf{R}(E) = \limsup_n \frac{n \log 2}{-\log a_n} - \liminf_n \frac{n \log 2}{-\log a_n}, \tag{35}$$

so $\mathbf{R}$ can take any value between 0 and 1.

In $\mathbb{R}^p$ it is easy to see, with p-dimensional Cantor set, that $\mathbf{R}$ can take any value between 0 and p.

Remark. If E is a regular compact subset of $\mathbb{R}^2$ such that $\dim(E) \leqslant 1$, for each real real number t let E_t be the linear set $\{x + ty/(x,y) \in E\}$. We can show that E_t is also a regular set, except for t in a set T with $\dim(T) \leqslant \dim(E)$:

Firstly we can easily see, without hypothesis on E, that for each t, $\Delta(E_t) \leqslant \Delta(E)$. This comes from the fact that, if u is a ball of $\mathbb{R}^2$, u_t is an interval of length $(1+|t|)\,d(u)$, so

$$N_{r(1+|t|)}(E_t) \leqslant N_r(E) \quad \text{for each} \quad r > 0.$$

Secondly, as $(\cup E^{(n)})_t = \cup E_t^{(n)}$, it follows that

$$\mathrm{Dim}\,(E_t) \leqslant \mathrm{Dim}\,(E).$$

Thirdly, a theorem of R. Kaufman (8) says that, except for t in a set T with

$\dim(T) \leqslant \dim(E)$, $\quad \dim(E_t) = \dim(E)$.

This concludes the proof.

If $t \in T$, E_t can be irregular: it is sufficient to see that the cartesian product $E_1 \times E_2$ of two linear, irregular sets may be regular (Example 7 in the next section).

§ 5 *Dimension of a cartesian product*

If E, F are subsets of $\mathbb{R}^p$, we want to give some estimate of $\dim(E \times F)$, in terms of $\dim(E)$ and $\dim(F)$. This was first investigated by Besicovitch and Moran (2), then by Eggleston (5), Marstrand (11), Larman (10) and Wegmann (17). In fact the introduction of the second index Dim allows us to give new results:

THEOREM 3. *Let E, F in $\mathbb{R}^p$:*

$$\begin{aligned}\dim(E)+\dim(F) \leqslant \dim(E\times F) &\leqslant \dim(E)+\mathrm{Dim}\,(F)\\ &\leqslant \mathrm{Dim}\,(E\times F) \leqslant \mathrm{Dim}\,(E)+\mathrm{Dim}\,(F). \end{aligned} \tag{36}$$

Proof. (*a*) The first equality has been stated in (2) and (5) with some complementary hypothesis on E and F, and was proved without hypothesis in $\mathbb{R}$ (11), then in a more general metric space (17). If E, F are analytic sets, it is an immediate consequence of Theorem 1.

Indeed, let $\epsilon > 0$, μ a measure such that $\mu(E) > 0$ and $\inf_E \phi\mu \geqslant \gamma(E) - \epsilon$, ν a measure such that $\nu(F) > 0$ and $\inf_F \phi\nu \geqslant \gamma(F) - \epsilon$. Using the product measure $\mu \times \nu$, we can see that

$$\forall (x,y) \in E \times F,: \quad \phi\mu(x) + \phi\nu(y) \leqslant \phi(\mu \times \nu)\,(x,y),$$

so

$$\gamma(E) + \gamma(F) \leqslant \gamma(E \times F) + 2\epsilon.$$

(*b*) For the second inequality, let us begin by showing:

$$\dim(E \times F) \leqslant \dim(E) + \Delta(F). \tag{37}$$

Let $a > \dim(E)$, $b > \Delta(F)$, $N \in \mathbb{N}$ be such that

$$n \geqslant N \Rightarrow \omega(2^n, F)\, 2^{-nb} < 1, \tag{38}$$

(see (12) for a definition of Δ), $M \geqslant N$, and

$$\mathscr{R} \in \mathrm{A}(E, 2^{-M}) \quad \text{such that} \quad \Lambda^a(\mathscr{R}) < 1. \tag{39}$$

For each $u \in \mathscr{R}$, $2^{-n-1} < d(u) \leqslant 2^{-n}$, the set

$$\mathscr{S}(u) = \{u \times B / B \text{ is a } 2^n\text{-mesh}, B \cap F \neq \varnothing\}$$

is a covering of $u \times F$ by $\omega(2^n, F)$ sets of diameter 2^{-n}, so

$$\begin{aligned}\Lambda^{a+b}(\mathscr{S}(u)) &= \omega(2^n, F)\, 2^{-na} 2^{-nb} \\ &\leqslant 2^a d(u)^a \quad \text{by (38).}\end{aligned}$$

Then $\mathscr{S} = \bigcup_{u \in \mathscr{R}} \mathscr{S}(u) \in \mathrm{A}(E+F, 2^{-M})$, and by (39)

$$\Lambda^{a+b}(\mathscr{S}) < 2^a.$$

As M is arbitrarily large, it follows that

$$\Lambda^{a+b} - m(E \times F) < +\infty,$$

so $\dim(E \times F) \leqslant a+b$, which implies (37).

Now let us write $E = \bigcup_n F_n$:

By (37) $$\dim(E \times F_n) \leqslant \dim(E) + \Delta(F_n),$$

and by σ-stability of dim

$$\dim(E \times F) \leqslant \dim(E) + \sup_n \Delta(F_n),$$

which proves the required inequality.

(*c*) For each $n \in \mathbb{N}$,

$$\omega(2^n, E \times F) = \omega(2^n, E)\, \omega(2^n, F), \tag{40}$$

so

$$\begin{aligned}\Delta(E \times F) &\geqslant \delta(E) + \Delta(F) \\ &\geqslant \dim(E) + \Delta(F).\end{aligned} \tag{41}$$

Now by (P_2) we can assume, without loss of generality, that for each $\epsilon > 0$ there exist two sequences (E_n) and (F_n) such that

$$E_n \uparrow E, \quad F_n \uparrow F \tag{42}$$

$$\sup_n \Delta(E_n \times F_n) \leqslant \mathrm{Dim}(E \times F) + \epsilon. \tag{43}$$

By (42)

$$\lim_n \dim(E_n) = \dim(E), \quad \lim_n \Delta(F_n) \geqslant \mathrm{Dim}(F),$$

by (41)

$$\Delta(E_n + F_n) \geqslant \dim(E_n) + \Delta(F_n)$$

and by (43)

$$\mathrm{Dim}(E \times F) + \epsilon \geqslant \dim(E) + \mathrm{Dim}(F).$$

(*d*) (40) implies

$$\Delta(E \times F) \leqslant \Delta(E) + \Delta(F),$$

then it is sufficient to apply Proposition 2, for the last inequality.

From (34) and this theorem we easily deduce the following:

COROLLARY 4.

(i) *E regular* $\Rightarrow \dim(E)+\dim(F) = \dim(E\times F)$,
(ii) *E and F regular* $\Rightarrow E\times F$ *regular*,
(iii) $E\times F$ *regular* $\Rightarrow \mathbf{R}(E) = \mathbf{R}(F)$, *and* $\dim(E\times F) = \dim(E)+\mathrm{Dim}(F)$.

Conditions for the equality

$$\dim(E)+\dim(F) = \dim(E\times F), \tag{44}$$

were given in (2). The next proposition shows that the condition of Corollary 4, (i) is weaker:

PROPOSITION 4. *If* $E\subset \mathbb{R}^p$ *is a set of finite positive a-dimensional measure, and if at all points of E the lower a-dimensional density is positive, then E is regular, and* dim, Dim *are uniform on E.*

Proof. The hypothesis (see (2)) means that

$$\Lambda^a - m(E) < +\infty, \tag{45}$$

and

$$\forall x\in E\colon \liminf_{r\to 0} r^{-a}.\Lambda^a - m(E\cap B_r(x)) > 0. \tag{46}$$

It is sufficient to prove that $\mathrm{Dim}(E) = a$: indeed $\dim(E) = a$ by (45) and (46), so E is regular, and the proposition remains valid if E is replaced by $E\cap B_r(x)$, for any fixed r and $x\in E$. Then

$$\dim(E\cap B_r(x)) = \mathrm{Dim}(E\cap B_r(x)) = a,$$

which proves the uniformity.

Let us assume that E is bounded, without loss of generality.

Let

$$E(n,k) = \left\{x\in E \,\middle|\, r<\frac{1}{k}\Rightarrow \Lambda^a - m(E\cap B_r(x)) > \frac{r^a}{n}\right\}:$$

then by (46) $E = \bigcup_{n,k} E(n,k)$, and it is sufficient to prove that, if $E(n,k)\neq\varnothing$:

$$\Delta(E(n,k) \leqslant a. \tag{47}$$

Each ball B of radius $r<1/k$, centred in $E(n,k)$, verifies

$$d(B)^a < 2^a n.\Lambda^a - m(E\cap B).$$

Then

$$\mathbf{M}_r(E(n,k)) \leqslant r^{-a}n.\Lambda^a - m(E),$$

(see Corollary 2 for the definition of $\mathbf{M}_r(E)$), which implies (47), provided (45) and (12).

Example 4. Let E_1 be a symmetrical perfect set in [0, 1] (see Example 1) defined by the sequence (a_n) such that

$$\lim_n n\log 2(-\log a_n)^{-1} = a > 0,$$

E_2 a symmetrical perfect set in $[1, 2]$ defined by the sequence (b_n),

$$\limsup_n n \log 2(-\log b_n)^{-1} \leqslant a \quad \text{and} \quad \liminf_n n \log 2(-\log b_n)^{-1} < a,$$

and F any set in $\mathbb{R}^p$.

Then $\mathbf{R}(E_1 \cup E_2) = 0$ (stability of dim, Dim and (34)) and thus by Corollary 4, (i), $E_1 \cup E_2$ and F verify (44). Nevertheless dim is not uniform on $E_1 \cup E_2$, and this set does not verify the conditions of Proposition 4.

Example 5. Another example is given by a symmetrical perfect set E such that

$$a_n = 4^{-n-\log n}.$$

As

$$\frac{n \log 2}{-\log a_n} = \frac{n}{(2n+\log n)}$$

converges to $\frac{1}{2}$, E is regular, nevertheless $\Lambda^{\frac{1}{2}} - m(E) = 0$.

Example 6. Again if E is a s.p.s. in $[0, 1]$, defined by the sequence (a_n), it is easily verified that

$$\dim(E \times E) = \delta(E \times E) = 2\delta(E),$$

$$\operatorname{Dim}(E \times E) = \Delta(E \times E) = 2\Delta(E),$$

then E regular $\Leftrightarrow E \times E$ regular $\Leftrightarrow \left(\dfrac{n \log 2}{-\log a_n}\right)$ converges.

The pair (E, E) verifies (44), and shows, if E is non regular, that Corollary 4, (i) has no converse.

Example 7. which shows that Corollary 4, (ii) has no converse.

If $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is strictly increasing, $p(0) = 0$, and $\mathscr{R}(n)$ a family of $2^{p(n)}$-meshes, so that each mesh of $\mathscr{R}(n)$ contains two meshes of $\mathscr{R}(n+1)$ (as in Example 2), let $E(p)$ be the perfect, bounded set defined by

$$E(p) = \bigcap_n (\cup \mathscr{R}(n)).$$

As for a symmetrical perfect set

$$\dim(E(p)) = \delta(E(p)) = \liminf_n \frac{n}{p(n)}$$

$$\operatorname{Dim}(E(p)) = \Delta(E(p)) = \limsup_n \frac{n}{p(n)}.$$

Now let $K_n = \frac{4}{3}(4^n - 4)$ and define p by

$$p(1) = 9, \quad p(K_n) = 4^n \quad \text{and} \quad p(k+1) = 1 + p(k) \quad \text{if} \quad K_n + 1 \leqslant k < K_n.$$

Let $L_n = \frac{1}{3}(4^n - 4)$ and define q by

$$q(1) = 5, \quad q(L_n) = 2 \cdot 4^{n-1} \quad \text{and} \quad q(k+1) = 1 + q(k) \quad \text{if} \quad L_n + 1 \leqslant k < L_n.$$

It follows that

$$\dim(E(p)) = \dim(E(q)) = \delta(E(p)) = \delta(E(q)) = \tfrac{1}{3},$$
$$\mathrm{Dim}(E(p)) = \mathrm{Dim}(E(q)) = \Delta(E(p)) = \Delta(E(q)) = \tfrac{2}{3}.$$

If $\omega^*(2^l, E(p))$ is the number of 2^l-meshes u such that $u \cap E(p) \neq \varnothing$, we can verify that

$$\omega^*(2^l, E(p)\times E(q)) = 2^{l-4}$$

for each $l \geqslant 4$, so

$$\mathrm{Dim}(E(p)\times E(q)) = \Delta(E(p)\times E(q)) = \delta(E(p)\times E(q)) = 1.$$

To calculate the Hausdorff dimension of $E(p)\times E(q)$, let μ be the measure on $E(p)$ defined by

$$\mu(u) = (\omega^*(2^l, E(p)))^{-1},$$

for each 2^l-mesh u such that $\mathring{u} \cap E(p) \neq 0$, and ν the corresponding measure on $E(q)$.
Then for each 2^l-mesh U in $\mathbb{R}^2$ such that $\mathring{U} \cap (E(p)\times E(q)) \neq 0$,

$$(\mu\times\nu)(U) = 2^{-l+4}.$$

Applying an easy generalization to $\mathbb{R}^2$ of the Billingsley's theorem, it follows that

$$\dim(E(p)\times E(q)) = 1.$$

So $E(p)\times E(q)$ is regular, though $\mathbf{R}(E(p)) = \mathbf{R}(E(q)) = \tfrac{1}{3}$.

REFERENCES

(1) BEARDON, A. F. The generalized capacity of Cantor sets, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **19** (1968), 301–304.

(2) BESICOVITCH, A. S. and MORAN, P. A. P. The measure of product and cylinder sets. *J. London Math. Soc.* **20** (1945), 110–120.

(3) BILLINGSLEY, P. Hausdorff dimension in probability theory. *Illinois J. Math.* **4** (1960), 187–209.

(4) DAVIES, R. O. Subsets of finite measure in analytic sets. *Indagat. Math.* **14** (1952), 488–489.

(5) EGGLESTON, H. G. A correction to a paper on the dimension of cartesian product sets. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **49** (1953), 437–440.

(6) HAWKES, J. Hausdorff measure, entropy, and the independence of small sets. *Proc. London Math. Soc.* (3) **28** (1974), 700–724.

(7) KAHANE, J. P. ET SALEM, R. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques.* Paris, Hermann, 1963.

(8) KAUFMAN, R. On Hausdorff dimension of projections. *Mathematika* **15** (1968), 153–155.

(9) KOLMOGOROV, A. N. and TIHOMIROV, V. M. ϵ-Entropy and ϵ-capacity of sets in functional spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.* **17** (1961), 277–364.

(10) LARMAN, D. G. On Hausdorff measure in finite-dimensional compact metric spaces. *Proc. London Math. Soc.* (3), **17** (1967), 193–206.

(11) MARSTRAND, J. M. The dimension of the cartesian product sets. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **50** (1954), 198–202.

(12) ROGERS, C. A. *Hausdorff measures.* Cambridge University Press, 1970.

(13) ROGERS, C. A. and TAYLOR, S. J. Additive set functions in euclidean space. *Acta Math.* **101** (1959), 273–302.

(14) TRICOT, C. Sur la notion de densité. *Cahiers du Dep. d'Econométrie de l'Université de Genève* (1973).

(15) TRICOT JR, C. *Sur la classification des ensembles boré liens de measure de Lebesgue nulle.* Genève, Imprimerie Nationale, 1980.

(16) TRICOT, JR, C. Rarefaction indices. *Mathematika* **27** (1980), 46–57.

(17) WEGMANN, H. Die Hausdorff-Dimension von kartesischen Produktmengen in metrischen Räumen. *J. Reine Angew. Math.* **234** (1969), 163–171.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Douze définitions de la densité logarithmique.* Note (*) de **Claude Tricot,** présentée par Gustave Choquet.

On démontre, dans $\mathbb{R}$, l'équivalence de différentes définitions d'une même dimension fractionnaire : la densité logarithmique. La plupart d'entre elles sont apparues, sous les noms les plus divers, entre 1928 et 1974. La douzième formulation s'obtient à l'aide de réseaux d'intervalles vérifiant certaines conditions de régularité.

The main result establishes, in $\mathbb{R}$, *the equivalence of different definitions of the same fractional dimension index: the logarithmic density. Most of these were first defined between* 1928 *and* 1974, *with various names. The twelfth definition is new and uses nets of intervals verifying suitable regularity conditions.*

La densité logarithmique Δ intervient, dans $\mathbb{R}$, comme indice de raréfaction, ou comme dimension fractionnaire, sous des formes différentes mais en réalité équivalentes. Nous nous proposons de réunir un certain nombre de ces formulations parmi les plus connues et de démontrer (ou le cas échéant de rappeler) leur équivalence. Le théorème 1 concerne les formulations Δ_1 à Δ_{11}. La première idée de Δ_8, Δ_9, Δ_{11} est due à G. Bouligand [1] en 1928 (« ordre dimensionnel »). Plus tard mais indépendamment, A. N. Kolmogorov et V. M. Tihomirov [2] en 1959 ont introduit Δ_9 dans leur étude d'espaces fonctionnels (« dimension métrique »), et C. Tricot en 1973, la « densité suivant une fonction f » mesurant la rareté d'un compact au moyen de fonctions croissantes vérifiant des hypothèses convenables, cette densité devenant Δ_8 si f est le logarithme [3]. La limite inférieure du rapport utilisé pour définir Δ_{10} a été comparée par L. Pontrjagin et L. Schnirelmann [4] (1932, « ordre métrique ») à la dimension topologique, Δ_{10} lui-même étant repris dans [2], et dans [5] par J. Hawkes (1974, « entropy dimension »). Δ_5 et Δ_6 furent employés implicitement par Paul Lévy en 1948 à propos du mouvement brownien ([6], p. 224). Δ_7 est la « raréfaction logarithmique » de E. Borel (1948) introduites pour l'étude des sommes d'ensembles rares [7], et Δ_3 une adaptation de la précédente par M. Fréchet et Z. Moszner [8] (1965). Δ_4, plus tard appelé « indice de Taylor-Besicovitch » a été défini [9] en 1954 pour majorer la dimension de Hausdorff.

Les égalités $\Delta_8=\Delta_9=\Delta_{11}$ peuvent être trouvées dans [1], $\Delta_9=\Delta_{10}$ dans [2], $\Delta_4=\Delta_{10}$ dans [5]. Nous montrons qu'on peut ramener la démonstration du théorème 1 à la preuve des égalités $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3$.

Le théorème 2 concerne Δ_{12}, qui est une généralisation de Δ_8 au moyen de réseaux d'intervalles adaptés à l'ensemble E considéré.

Pour une treizième définition, voir [10].

L'espace considéré est $\mathbb{R}$, $|\ |$ est la mesure de Lebesgue, ρ la distance euclidienne. On suppose que E est un compact non fini, de mesure nulle.

Soit $(\mathscr{C}_n)$ la suite des intervalles complémentaires de E dans [inf E, sup E] ordonnée de telle sorte que la suite correspondante (c_n) des longueurs de ces intervalles soit non croissante.

Pour $r>0$, $n\in\mathbb{N}$, posons :

K_r = nombre de $\mathscr{C}_i$ de longueur $\geqq r$, $L_r=\sum_{c_i<r} c_i$;

M_r = plus grand nombre d'intervalles ouverts disjoints de longueur r dont le centre est dans E;

N_r = plus petit nombre d'intervalles fermés de longueur r recouvrant E;

$\omega(n, E)$ = nombre de mailles-n rencontrant E, une *maille-n* étant un intervalle de la forme $[kn^{-1}, (k+1)n^{-1}[$, $k\in\mathbb{Z}$ (définition légèrement différente dans [1] et [3]);

$E(r)=\{x\in\mathbb{R}/\rho(x, E)\leqq r\}$.

THÉORÈME 1. – *Avec les notations précédentes, soit :*

$$\Delta_1 = \inf\{\alpha / nc_n^\alpha \to 0\} = \limsup_{n\to\infty} \log n/(-\log c_n),$$

$$\Delta_2 = \inf\left\{\alpha \Big/ c_n^{\alpha-1} \sum_n^\infty c_i \to 0\right\} = \limsup_{n\to\infty}\left(1 - \left(\log \sum_n^\infty c_i\right)\Big/ \log c_n\right),$$

$$\Delta_3 = \inf\left\{\alpha \Big/ n^{1-\alpha}\left(\sum_n^\infty c_i\right)^\alpha \to 0\right\} = \limsup_{n\to\infty} \log n \Big/ \left(\log n - \log \sum_n^\infty c_i\right),$$

$$\Delta_4 = \inf\left\{\alpha \Big/ \sum_1^\infty c_i^\alpha < +\infty\right\},$$

$$\Delta_5 = \inf\{\alpha / r^\alpha K_r \to 0\} = \limsup_{r\to 0} \log K_r/(-\log r),$$

$$\Delta_6 = \inf\{\alpha / r^{\alpha-1} L_r \to 0\} = \limsup_{r\to 0} (1 - \log L_r/\log r),$$

$$\Delta_7 = \inf\{\alpha / K_r^{1-\alpha} L_r \to 0\} = \limsup_{r\to 0} \log K_r/(\log K_r - \log L_r),$$

$$\Delta_8 = \inf\{\alpha / n^{-\alpha}\omega(n, E) \to 0\} = \limsup_{n\to\infty} \log \omega(n, E)/\log n,$$

$$\Delta_9 = \inf\{\alpha / r^\alpha M_r \to 0\} = \limsup_{r\to 0} \log M_r/(-\log r),$$

$$\Delta_{10} = \inf\{\alpha / r^\alpha N_r \to 0\} = \limsup_{r\to 0} \log N_r/(-\log r),$$

$$\Delta_{11} = \inf\{\alpha / r^{\alpha-1} |E(r)| \to 0\} = \limsup_{r\to 0}(1 - \log|E(r)|/\log r),$$

alors, pour tous i, j, on a $\Delta_i = \Delta_j$.

Démonstration. – La série Σc_i étant convergente, on remarque que :

$$\forall i, \quad \Delta_i \leqq 1. \tag{1}$$

La vérification de l'égalité $\Delta_1 = \Delta_4$ est facile, et de même $\Delta_1 = \Delta_5$, $\Delta_2 = \Delta_6$, $\Delta_3 = \Delta_7$, et $\Delta_8 = \Delta_9 = \Delta_{10} = \Delta_{11}$.

En utilisant le fait que $|E| = 0$, on peut vérifier que :

$$\left|E\left(\frac{1}{2}r\right)\right| = L_r + r K_r + \mathcal{O}(r),$$

ce qui entraîne :

$$\Delta_{11} = \max(\Delta_5, \Delta_6).$$

Il ne reste plus à montrer que :

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3.$$

(*a*) $\Delta_1 \leqq \Delta_3$: par (1), et l'inégalité :

$$nc_{2n} < c_n + \ldots + c_{2n} < \sum_n^\infty c_i,$$

qui entraîne :

$$2n c_{2n}^{\alpha} < 2n^{1-\alpha}\left(\sum_{n}^{\infty} c_i\right)^{\alpha}, \quad \text{pour tout } \alpha < 1;$$

(*b*) $\Delta_3 \leqq \Delta_1$: si $\Delta_1 < 1$, et $\alpha \in]\Delta_1, 1[$:

$$\sum_{n}^{\infty} c_i = \mathcal{O}(n^{1-1/\alpha});$$

(*c*) $\Delta_2 \leqq \Delta_1$: car pour $\alpha < 1$:

$$c_n^{\alpha-1} \sum_{n}^{\infty} c_i = \sum_{n}^{\infty} c_i . c_n^{\alpha-1} \leqq \sum_{n}^{\infty} c_i^{\alpha},$$

ce qui donne :

$$\Delta_2 \leqq \Delta_4 = \Delta_1;$$

(*d*) $\Delta_1 \leqq \Delta_2$: supposons $\Delta_2 < 1$, et soit $\alpha \in]\Delta_2, 1[$, $\varepsilon = \Delta_1 - \Delta_2$. $\alpha \geqq \Delta_2 \Rightarrow \exists\, \mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que :

(2)
(3)
$$n \geqq \mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_n < n^{-1/(\alpha+\varepsilon)}, \\ \sum_{n}^{\infty} c_i < c_n^{1-\alpha}; \end{cases}$$

(2) et (3) impliquent :

(4)
$$\sum_{n}^{\infty} c_i < n^{-(1-\alpha)/(\alpha+\varepsilon)},$$

(4) implique $\Delta_3 \leqq (\alpha+\varepsilon)/(1+\varepsilon)$, pour tout $\alpha > \Delta_2$, donc :

$$\Delta_3 \leqq (\Delta_2+\varepsilon)/(1+\varepsilon) = \Delta_1/(1+\varepsilon).$$

Enfin (*a*) implique $\varepsilon = 0$, et le théorème est démontré.

Cette version simplifiée de la démonstration est due en partie aux suggestions du professeur Roy O. Davies.

Passons à Δ_{12} :

On appelle *grille pour* E un ensemble $\Omega = \{ u_n(x)/n \in \mathbb{N}, x \in \mathrm{E} \}$ d'intervalles non dégénérés $u_n(x)$ tels que, pour tout $x \in \mathrm{E}$:

(i)
$$x \in \bigcap_{n} u_n(x);$$

(ii)
$$\lim_{n} |u_n(x)| = 0.$$

Pour tout $\mathscr{R} \subset \Omega$, $\mathscr{R} \neq \varnothing$, on note $\cup \mathscr{R} = \bigcup_{u \in \mathscr{R}} u$, $\mathrm{D}(\mathscr{R}) = \sup_{u \in \mathscr{R}} |u|$, $d(\mathscr{R}) = \inf_{u \in \mathscr{R}} |u|$, et $\mathscr{R}_n = \{ u_n(x)/x \in \mathrm{E} \}$ le recouvrement de E par les intervalles de rang n.

THÉORÈME 2. — *Avec les notations précédentes, soit :*

$$\Delta_{12} = \inf \{ \alpha / \mathrm{D}(\mathscr{R}_n)^{\alpha-1} | \cup \mathscr{R}_n | \to 0 \} = \limsup_{n \to \infty} (1 - \log | \cup \mathscr{R}_n | / \log \mathrm{D}(\mathscr{R}_n)).$$

Pour que $\Delta_{11} = \Delta_{12}$, *il suffit que* Ω *vérifie les conditions suivantes :*

(*a*) $\log \mathrm{D}(\mathcal{R}_n)/\log d(\mathcal{R}_n) \to 1$;

(*b*) *ou bien* (*b* 1) $\log \mathrm{D}(\mathcal{R}_{n+1})/\log \mathrm{D}(\mathcal{R}_n) \to 1$, *ou bien* (*b* 2) $\log \varkappa_n/\log \mathrm{D}(\mathcal{R}_n) \to 0$, *où* $\varkappa_n$ *est le plus grand nombre d'intervalles de* $\mathcal{R}_{n+1}$ *que peut rencontrer un intervalle de* $\mathcal{R}_n (1 \leqq \varkappa_n \leqq +\infty)$.

Donnons des exemples de grilles vérifiant les hypothèses du théorème 2 :

1. La grille des intervalles de la forme $[x-r_n, x+r_n]$, $x \in \mathrm{E}$, à condition que $\lim_n (\log r_n)/(\log r_{n+1}) = 1$, et $\lim_n r_n = 0$.

2. La grille des mailles-r^n, $n \in \mathbb{N}$, rencontrant E, où r est un entier $\geqq 2$. Ou encore, comme en [11], la grille des mailles-$f(n)$, où $f(n) = \prod_{i=1}^{n} a_i$, a_i entier $\geqq 2$, à condition que $\lim_n (\log a_{n+1})/(\log f(n)) = 0$. En fait il suffit que f vérifie la condition plus générale $\lim_n (\log f(n+1)/\log f(n)) = 0$ [3]. Ces grilles vérifient les hypothèses (*a*) et (*b* 1).

3. La grille des intervalles blancs d'un parfait de translation [12] tel qu'à la n-ième étape on trouve $\prod_{i=1}^{n} k_i$ intervalles de longueur a_n, $k_i \geqq 2$, $0 < a_n < k_n^{-1} a_{n-1}$, à condition que $\lim_n (\log k_{n+1}/\log a_n) = 0$. Elle vérifie (*a*) et (*b* 2), et la densité logarithmique vaut $\limsup \left(\log \prod_{i=1}^{n} k_i\right)/(\log a_n)$.

(*) Remise le 12 octobre 1981.

[1] G. Bouligand, *Bull. Sc. math.*, 52, (2), 1928, p. 320-376.

[2] A. N. Kolmogorov et V. M. Tihomirov, *Uspekhi Mat. Nauk.*, 14, no. 2, (86), 1959, p. 3-86; *Amer. Math. Soc. Transl.*; 17, (2), 1961, p. 277-364.

[3] C. Tricot, *Sur la notion de densité*, Cahiers du département d'Économétrie de l'Université de Genève, 1973.

[4] L. Pontrjagin et L. Schnirelmann, *Ann. of Math.*, 33, 1932, p. 156-162.

[5] J. Hawkes, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 28, (3), 1974, p. 700-724.

[6] P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, 2e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[7] E. Borel, *Comptes rendus*, 227, 1948, p. 103-105.

[8] M. Fréchet et Z. Moszner, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 82, (3), 1965, p. 181-203.

[9] A. S. Besicovitch et S. J. Taylor, *J. Lond. Math. Soc.*, 29, 1954, p. 449-459.

[10] C. Tricot Jr., *Proc. Camb. Phil. Soc.* (à paraître).

[11] J. Peyrière, *Duke Math. J.*, 44, 1977, p. 591-601.

[12] J.-P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris, 1963.

University of Liverpool Dep. of Pure Math.,
Box 147, *Liverpool* L69 3BX, *England.*

Metric properties of compact sets of measure 0 in $\mathbb{R}^2$.

Claude Tricot

Department of Pure Mathematics
University of Liverpool
P.O. Box 147
Liverpool L69 3BX

§1. Introduction

Compact sets of Lebesgue measure zero in $\mathbb{R}^2$ can be analysed using Hausdorff measures. However in the present paper we are concerned with other definitions of rarity. For example, the rate at which $|E(r)|_2$ converges to zero is a measure of rarity, where $|\ |_2$ denotes Lebesgue measure in $\mathbb{R}^2$,

$$E(r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, E) \leq r\},$$

and ρ is the euclidean distance.

A classical rarefaction index is the logarithmic density Δ, defined by

$$\Delta(E) = \limsup_{r \to 0} (2 - \log|E(r)|_2 / \log r) \tag{1}$$

(replace 2 by p to get a definition of Δ in $\mathbb{R}^p$). This density appeared in numerous papers about compact sets, but in different forms: we give, briefly, the references [1], [2], [4], [8], [12], but a more complete bibliography can be found in [12].

Our problem is to extend, to dimension 2, the results of [13] about the compact sets of $\mathbb{R}$: namely the equivalence between various definitions of Δ, including some new definitions.

There are two distinct ways of looking at the logarithmic density:

(a) The first (valid also in more general metric spaces) uses coverings of E by classes of sets whose diameters tend to 0, but are always comparable (without this last condition we get indices of the Hausdorff dimension type). For example (1) is based on the E-coverings by balls of radius r and centre in E. Another example will be useful:

Let us define $M_r(E)$ the greatest number of disjoint open balls of diameter r, with centres in E, $N_r(E)$ the smallest number of closed balls of diameter r covering E, $\omega(n, E)$ the number of n-meshes meeting E, an n-mesh in $\mathbb{R}^p$ being a p-dimensional cube the projection of which on each axis is a half-open interval $[kn^{-1}, (k+1)n^{-1}[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Then

$$\Delta(E) = \limsup_{r \to 0} \log M_r(E)/(-\log r) = \limsup_{r \to 0} \log N_r(E)/(-\log r) \\ = \limsup_{n\to+\infty} \log \omega(n, E)/\log n . \tag{2}$$

The proof of these equalities can be found in [2] and [8].

(b) The second, which as far as we know has previously been used only in $\mathbb{R}$, consists in studying the complementary set of E in a fundamental interval containing E. The decreasing sequence (c_n) of the lengths of the open intervals whose union is this complementary set is used in different formulations, the simplest being, in the notations of [13]

$$\Delta_1(c_n) = \limsup_{n\to+\infty} \log n / (-\log c_n), \tag{3}$$

but all are in fact equal to $\Delta(E)$. These open intervals have been called "contiguous" [1], "complementary" [4], or "white" [7]. There is no unique way of generalizing them to "complementary open sets" in $\mathbb{R}^p$. Let us take in $\mathbb{R}^2$, a countable family of disjoint open sets $\mathcal{C}_n$, of diameter c_n, $c_n \geq c_{n+1}$, included in a fundamental open set $\mathcal{C}_0$, and such that the frontier F_n of $\mathcal{C}_n$, $n \geq 0$, is a Jordan curve of length $\ell_n = \ell\text{-}m(F_n)$ (1-measure of Caratheodory, or Hausdorff). Let us define $E \subset Cl(\mathcal{C}_0)$ by

$$E = \mathrm{Cl}\left(\mathrm{Cl}(\mathcal{C}_0) - \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Cl}(\mathcal{C}_n)\right). \qquad (4)$$

Note that the frontier F_n may or may not be included in E. Given a compact set E there exists in fact an infinity of families $(\mathcal{C}_n)$ satisfying (4), and the direct analogues of the formulae known in $\mathbb{R}$ can give surprising results if these complementary open sets are not regular enough, by themselves and by their relationships. Five typical examples of "irregularity" are studied in §2. What general conditions on the $\mathcal{C}_n$ can we find which ensure that $\Delta(E) = \Delta_1(c_n)$? The following theorem, inspired by the examples of §2, is an attempt to answer this question.

<u>Theorem</u> <u>With the preceding notations, the conditions (i) to (v) are sufficient to ensure the equality</u> $\Delta_1(c_n) = \Delta(E)$.

(i) $|E|_2 = 0$

<u>There exists</u> $M \in \mathbb{N}$ <u>and</u> $A \in \mathbb{R}^+$ <u>such that for all</u> $n \geq 0$

(ii) $c_n^2 \leq A|\mathcal{C}_n|_2$

(iii) $\rho(\mathcal{C}_n, E) \leq Ac_n$

(iv) $\ell_n \leq Ac_n$

(v) $\left(\bigcup_0^{n-1} F_i\right) \cap F_n$ <u>has no more than</u> M <u>connected components</u>.

The proof is given in §4 and §5.

This problem is related to that of the "apollonian packing" of a curvilinear triangle by circles [3], [10]. The characteristic constant

$e(c) = 1,30695$ [11] of the packing is nothing more than $\Delta_1(c_n)$, where c_n is the sequence of diameters of these circles, therefore the logarithmic density of the residual set E after removing all the open disks. The same remark applies to the packing of an equilateral triangle with inverted triangles [6]. §6 is devoted to such applications.

2. Five pathological examples

These examples contradict, each in turn, one of the conditions of the above theorem, but satisfy the four others.

Example 1 (i) is not satisfied. It is easy to construct an example where E contains an open set. Let us look for a nowhere dense set E: this will imply that (i) cannot be replaced by a "topological" condition.

Let F be a "translation perfect set" in $[0, 1]$ (see [7] for a definition) the complementary set of which is the union, for all $n \geq 1$, of 3^n open meshes of length 9^{-n}. F is a nowhere dense compact subset of linear measure 1/2. E is defined as the image of F by a Peano curve which, to each 9^n-mesh of I associates a 3^n-mesh of $[0, 1] \times [0, 1]$ (such a curve is studied in [6]). E is a nowhere dense compact subset of $\mathbb{R}^2$ such that $|E|_2 = |F|_1 = 1/2$, hence $\Delta(E) = 2$. Take $\mathcal{C}_0 =]0, 1[\times]0, 1[$, and $(\mathcal{C}_n)_{n\geq1}$ the family of the open images of 9^n-meshes in the complementary set of F. This sequence satisfies (4) using the continuity of the Peano curve, and $\Delta_1(c_n) = \Delta(F) = 1 < \Delta(E)$.

The conditions (ii) to (v) follow easily from the fact that the $\mathcal{C}_n$ are squares at distance zero from E.

Example 2 (ii) is not satisfied: take $E =]0, 1[\times \{0\}$, $\mathcal{C}_0 =]0, 1[\times]0, 1[$, $\mathcal{C}_n =]0, 1[\times]2^{-n}, 2^{-n+1}[$ if $n \geq 1$. Then $\Delta(E) = 1$, $c_n > 1$, $\Delta_1(c_n)$ is not defined. Put $A = 3$ and $M = 1$ for the other conditions.

Example 3 (iii) is not satisfied: take $E =]0, 1[\times \{0\}$, then $\Delta(E) = 1$, $\mathcal{C}_0 =]0, 1[\times]0, 1[$, and for $(\mathcal{C}_n)_{n\geq 1}$ the family of all squares of the following type

$$]i/k(k+1), (i+1)/k(k+1)[\times]1/(k+1), 1/k[, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad i = 0, \ldots, k^2+k-1.$$

Then $\rho(\mathcal{C}_n, E)$ is comparable with $n^{-1/3}$, and c_n with $n^{-2/3}$ in the neighbourhood of $+\infty$. $\Delta_1(c_n) = \frac{3}{2} > \Delta(E)$.

Example 4 The Von Koch curve E over the segment $X_0 =]0, 1[\times \{0\}$ (see [6] and [9] for more details) is the limit of a sequence of polygonal curves $\mathcal{P}_n$ defined as follows:

For each ordered pair (P, Q) of points in the plane, let us call $T(P, Q)$ the polygonal curve $PS_1S_2S_3Q$ made up of 4 segments of length $\rho(P, Q)/3$, the value of the angles at the three vertices S_1, S_2, S_3 being

$$(\overrightarrow{PS_1}, \overrightarrow{S_1S_2}) = \pi/3, \qquad (\overrightarrow{S_1S_2}, \overrightarrow{S_2S_3}) = 2\pi/3, \qquad (\overrightarrow{S_2S_3}, \overrightarrow{S_3Q}) = \pi/3.$$

Then $\mathcal{P}_1 = T((0, 0), (1, 0))$, and by induction: $\mathcal{P}_n$ is made up of 4^n segments of length 3^{-n}, and $\mathcal{P}_{n+1}$ is obtained from $\mathcal{P}_n$ by replacing each oriented segment PQ of $\mathcal{P}_n$ (the orientation is taken from $(0, 0)$ to $(1, 0)$ for the whole curve) by the curve $T(P, Q)$.

For each $n \geq 1$, let X_n be the open set between X_0 and $\mathcal{P}_n$: $X_n \subset X_{n+1}$, and, if $p > n$, the open set $X_p - Cl(X_n)$ is the union of $a(n, p)$ connected components, where

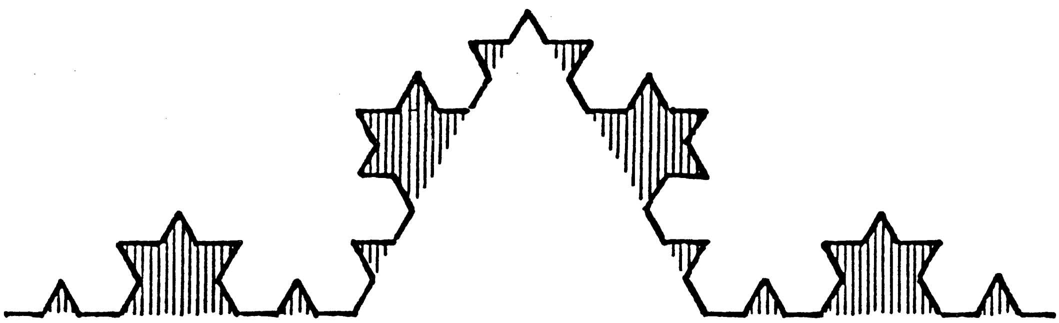
$$a(n, p) = 2^{p+n} - 2^{2n}, \tag{5}$$

their diameters varying between 3^{-p} and 3^{-n-1}, the largest connected components being bounded by a polygonal curve of length

$$3^{-n-1} + 2^{-2n-1}(4/3)^p. \tag{6}$$

The Figure 1 represents $\mathcal{P}_3$. The shaded area is $X_3 - Cl(X_1)$, which has 12 connected components, of diameter 1/27 and 1/9, the latters having a perimeter equal to 11/27.

Figure 1



Let $(n(k))$ be a sequence of integers, such that $n(0) = 0$ and

$$n(k + 1) \geq 2n(k). \tag{7}$$

Let $\mathcal{C}_0 =]0, 1[\times]0, 1[$, $\mathcal{C}_1$ be the set of points which are "over" E in $\mathcal{C}_0$, and $(\mathcal{C}_n)_{n\geq 2}$ be the family of all the connected components of $X_{n(k+1)} - \mathrm{Cl}(X_{n(k)})$, $k \geq 0$. Then (4) is verified and $\Delta(E) = \log 4 / \log 3$.

Let $b(k) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} a(n(i), n(i+1))$. From (7) $b(k)$ is comparable to $2^{n(k)}$ when k becomes large: then from (6) $\ell_{b(k)}$ is comparable to $(4/3)^{n(k)}$, and (iv) is not verified, while $c_{b(k)}$ is comparable to $3^{-n(k)}$, which implies

$$\Delta_1(c_n) = \log 2 / \log 3 < \Delta(E).$$

Finally, (i) follows from the inequality $\Delta(E) < 2$, (ii) from the fact that each $\mathcal{C}_n$, $n \geq 2$, contains an equilateral triangle of diameter c_n, (iii) from the equality $\rho(\mathcal{C}_n, E) = 0$, (v) from the fact that each F_n, $n \geq 2$, meets only one F_m such that $m < n$ and then $F_n \cap F_m$ is a segment.

Example 5 (v) is not satisfied. Let (a_n) be a sequence of $\mathbb{R}^{+*}$, $a_0 = 1$, $a_{n+1} < \frac{1}{2}a_n$, and let E be a symmetric perfect set [7] defined as

$$E = \bigcap_0^\infty E_n ,$$

where E_n is the union of 2^n disjoint closed intervals of length a_n, each of them containing exactly two intervals of E_{n+1}.

It is always possible to choose (a_n) such that

$$\limsup n \log 2/(-\log a_n) = \Delta(E) > 0, \quad \liminf n \log 2/(-\log a_n) = 0, \quad (8)$$

and a strictly increasing sequence $(n(k))$ of integers such that

$$n(0)=0, \quad n(k)\log 2/(-\log a_{n(k)}) \to 0 \quad \text{and} \quad n(k+1) - n(k) \to +\infty . \quad (9)$$

Let $\mathcal{C}_0 =]0, 1[\times]0, 1[$, and let $(\mathcal{C}_n)$ be the family of open sets of the following type:

$$u \times]0, a_{n(k)}[- E_{n(k+1)} \times [0, a_{n(k+1)}], \tag{10}$$

where u is an interval of $E_{n(k)}$ and $k \in \mathbb{N}$.

The formula (4) is verified, and $\Delta(E) > 0$. On the other hand for each $k \in \mathbb{N}$ there are in $(\mathcal{C}_n)$ $2^{n(k)}$ open sets at distance 0 from E, given by (10), hence of diameter $a_{n(k)}\sqrt{2}$, perimeter $4a_{n(k)} + (2^{n(k+1)-n(k)+1} - 4)a_{n(k+1)} \leq 6a_{n(k)}$, and area $\geq \frac{1}{2}a^2_{n(k)}$. The conditions (ii) to (iv) follow. (i) follows from (8).

Finally, if $N(k) = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} 2^{n(i)}$, the set $F_{N(k)+1} \cap F_0$ has $2^{n(k+1)-n(k)}$ connected components, therefore (v) is not verified, from (9). (9) implies also

$$\Delta_1(c_n) = \limsup \log N(k)/(-\log c_{n(k)}) = 0 < \Delta(E) .$$

§3. Preliminary remarks

Before proving the Theorem let us start by exploring the meaning of the conditions imposed on the hypothesis.

(a) Topological consequences

From (4), for each $n \geq 1$, $E \cap \mathcal{C}_n = \emptyset$, and if $F_n \cap F_p$ contains a Jordan arc Γ of extremities P and Q, then

$$E \cap \Gamma \subset \{P, Q\}. \tag{11}$$

From (i), E is nowhere dense in $\mathcal{C}_0$. Each point of E is a limit of a subsequence $(\mathcal{C}_{n(k)})$ of open sets with diameter tending to 0.
From (ii),

$$\sum c_n^2 < +\infty, \quad \text{which implies that} \quad \lim_n c_n = 0. \tag{12}$$

(b) Convexity

If $\mathbb{R}^2 - \mathrm{Cl}(\mathcal{C}_0)$ is a finite union of convex open sets, and if each $\mathcal{C}_n$, $n \geq 1$ is itself a convex open set containing a ball of diameter $c'_n \geq Bc_n$, where B is a fixed constant in $]0, 1[$, then the conditions (ii), (iv) and (v) are verified:

(iii) follows from the inequalities

$$c_n^2 \leq B^{-2} c'^2_n \leq 4(\pi B^2)^{-1} |\mathcal{C}_n|_2$$

(iv) from the convexity: $\ell_n \leq \pi c_n$

(v) from the fact that, if $p < n$, $F_n \cap F_p$ if it is non-empty is made up of a finite number ($= 1$ if $p \geq 1$) of segments or points.

On the other hand F_n contains, in that case, the vertex of a circular sector included in $\mathrm{Cl}(\mathcal{C}_p)$, of radius $\frac{1}{2}Bc_n$, angle $\alpha = 2 \sin^{-1}(\frac{1}{2}B)$, area $\geq (\frac{1}{2}B)^3 c_n^2$. All sectors of this type, for all $p < n$ such that $F_n \cap F_p \neq \emptyset$, are disjoint, and included in $\mathcal{C}_n(\frac{1}{2}Bc_n)$, which has diameter $(1 + B)c_n \leq 2c_n$, so that the area $\leq \pi c_n^2$. Therefore there cannot exist more than $8\pi/B^3$ such integers p.

(c) <u>Universal families</u>

For any compact E, a sequence of convex complementary open sets can be constructed using the net of 2^n-meshes, in the following way (proposed by J. Peyrière):

Let $\mathcal{C}_0$ be the interior of the smallest closed mesh containing E, $\mathcal{C}_1$ be the largest open mesh (or one amongst those of maximal size) included into $\mathcal{C}_0$ and at distance > 0 from E, ..., $\mathcal{C}_n$ an open mesh, of maximal size, included into $\mathcal{C}_0 - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{C}_i$ and at distance > 0 from E. The hypothesis about the distances implies (4), whilst by maximality $\rho(\mathcal{C}_n, E) \leq c_n$, which implies (iii). (ii), (iv), (v) are trivial. This construction shows that, for every compact of measure 0, there is a family of complementary open sets satisfying the conditions of the Theorem. It is, clearly, possible to find other examples of universal families, using other suitable nets of the plane.

(d) <u>Other definitions of</u> $\Delta_1(c_n)$

Two different forms of $\Delta_1(c_n)$ will be useful in the sequel (we follow the notations of [13]):

<u>Lemma 1</u> <u>Let</u>

$$\Delta_2(c_n) = \inf\{\alpha \text{ s.t. } c_n^{\alpha-1}\sum_n^\infty c_i \to 0\} = \limsup(1 - \log\sum_n^\infty c_i/\log c_n) \tag{13}$$

$$\Delta_{13}(c_n) = \inf\{\alpha \text{ s.t. } c_n^{\alpha-1}\sum_1^n c_i \to 0\} = \limsup(1 - \log\sum_1^n c_i/\log c_n). \tag{14}$$

<u>Then</u>

$$\sum_1^\infty c_i < +\infty \Rightarrow \Delta_1(c_n) = \Delta_2(c_n) \le 1, \text{ and } \Delta_{13}(c_n) = 1. \tag{15}$$

$$\sum_1^\infty c_i = +\infty \Rightarrow \Delta_1(c_n) = \Delta_{13}(c_n) \ge 1, \text{ and } \Delta_2(c_n) = +\infty . \tag{16}$$

<u>Proof</u> The equality $\Delta_1(c_n) = \Delta_2(c_n)$, in (15), was proved in [13]. In (16), $\Delta_1(c_n) \ge 1$, and for each $\alpha > \Delta_1(c_n)$, we have

$$c_n = \mathcal{O}(n^{-1/\alpha}), \quad \text{giving } c_n^{\alpha-1}\sum_1^n c_i = \mathcal{O}(1).$$

Therefore $\Delta_{13}(c_n) \le \Delta_1(c_n)$. The converse inequality follows from

$$nc_n^\alpha \le c_n^{\alpha-1}\sum_1^n c_i .$$

Finally, for every $a > 0$

$$a\Delta_1(c_n^a) = \inf\{\alpha \text{ s.t. } nc_n^\alpha \to 0\} = \Delta_1(c_n), \tag{17}$$

$$a\Delta_2(c_n^a) = \inf\{\alpha \text{ s.t. } c_n^{\alpha-a}\sum_n^\infty c_i^a \to 0\}, \tag{18}$$

and this expression is equal to $\Delta_1(c_n)$ if $\sum c_i^a < +\infty$,

$$a\Delta_{13}(c_n^a) = \inf\{\alpha \text{ s.t. } c_n^{\alpha-a}\sum_1^n c_i^a \to 0\}, \tag{19}$$

and this expression is equal to $\Delta_1(c_n)$ if $\sum c_i^a = +\infty$.

§4. <u>The hypotheses</u> (ii) <u>and</u> (iii) <u>of the Theorem imply that</u> $\Delta_1(c_n) \leq \Delta(E)$.

(iii) implies that $E((A + 1)r)$ contains every $\mathcal{C}_n$ of diameter $\leq r$, for all $r > 0$.

(ii) and the fact that the $\mathcal{C}_n$ are disjoint imply that

$$A \sum_{|c_i| \leq r} c_i^2 \leq |E((A + 1)r)|_2 .$$

If $r \in]0, c_1[$ and if n is the integer such that

$$c_{n+1} < r \leq c_n ,$$

then for all $\alpha \in]0, 2[$

$$r^{\alpha-2}|E((A + 1)r|_2 \geq Ac_n^{\alpha-2}(\sum_n^{\infty} c_i^2 - c_n^2)$$

which, with (1) and (18), implies the required inequality.

§5. The hypotheses (i), (iv), (v) of the Theorem imply that $\Delta(E) \leq \Delta_1(c_n)$.

A simple argument would deal with the particular case of the universal family described in §3 (c): If $k(n)$ is the smallest integer such that

$$c_{k(n)} < \sqrt{2}\, 2^{-n},$$

we get from (i)

$$\omega(2^n, E)2^{-2n} = \frac{1}{2} \sum_{i \geq k(n)} c_i^2 ,$$

then, for each $\alpha \in]0, 2[$

$$\omega(2^n, E)2^{-n\alpha} < 2^{\alpha/2} c_{k(n)}^{\alpha-2} \sum_{i \geq k(n)} c_i^2 .$$

which, with (2) and (18) implies the required inequality.

We could also give, in the case of convex families, an easier special proof.

General case We can assume, without loss of generality, that

$$E \cap F_0 = \emptyset . \tag{20}$$

Indeed if B is any open ball containing F_0 it is always possible to find in $B - \mathcal{C}_0$ two open sets $\mathcal{C}_{-1}$ and $\mathcal{C}_{-2}$, bounded by a simple closed curve, and such that

$B - \mathcal{C}_0 \subset \mathrm{Cl}(\mathcal{C}_{-1}) \cup \mathrm{Cl}(\mathcal{C}_{-2})$, and $\mathrm{Cl}(\mathcal{C}_{-1}) \cap \mathrm{Cl}(\mathcal{C}_{-2})$ is made up of two segments.

Then it suffices to replace $\mathcal{C}_0$ by B, include $\mathcal{C}_{-1}$ and $\mathcal{C}_{-2}$ in the family $(\mathcal{C}_n)$, changing the numeration and if necessary the value of A and M, to get a new family $(\mathcal{C}_n)$ verifying (4) and the Theorem's conditions, such that (20) is true and $\Delta_1(c_n)$ is unchanged.

From (20) there exists a positive real number r_0 such that

$$E(r_0) \subset \mathcal{C}_0 . \tag{21}$$

Let us fix a real number r in $]0, \min(r_0, c_1)[$. Let $n(r)$ be the unique integer such that

$$c_{n(r)+1} < r \le c_{n(r)} . \tag{22}$$

Define the set

$$P_r = \left(\bigcup_{i=1}^{n(r)} \mathcal{C}_i \right) \cap E(r) .$$

From (iv) the F_n are rectifiable, which implies, with (i) and (21) that

$$|E(r)|_2 \le |P_r|_2 + \sum_{n(r)+1}^{\infty} c_i^2 . \tag{23}$$

Therefore we must estimate $|P_r|_2 = \sum_{i=1}^{n(r)} |\mathcal{C}_i \cap E(r)|_2$. There are two cases, requiring different arguments.

<u>Case</u> A) $\Delta_1(c_n) < 1$, so that $\sum_1^{\infty} c_n < +\infty$.

We shall prove the following inquality:

$$|P_r|_2 \le 36\pi r \sum_{i=n(r)+1}^{\infty} \ell_i + 8\pi M n(r) r^2 , \tag{24}$$

which is sufficient: indeed, from (iv), (23) and (24)

$$r^{\alpha-2} |E(r)|_2 \le 8\pi M n(r) r^{\alpha} + 36\pi A r^{\alpha-1} \sum_{i=n(r)+1}^{\infty} c_i + r^{\alpha-2} \sum_{i=n(r)+1}^{\infty} c_i^2 ,$$

for all α. Using (22), (17) and (18), and making r tend to 0:

$$\begin{aligned} \Delta(E) &\le \max(\Delta_1(c_n), \ \Delta_2(c_n), \ 2\Delta_2(c_n^2)) \\ &= \Delta_1(c_n) \ \text{ from (15).} \end{aligned}$$

To prove (24), three lemmas are necessary.

Lemma 2 Let C be a simple arc, and for all $\varepsilon > 0$ let $\mathfrak{C}(C, \varepsilon)$ be the set of all arcs included in $C(\varepsilon)$ and having the same extremities as C: then

$$\ell\text{-m}(C) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \{\ell\text{-m}(C') \,/\, C' \in \mathfrak{C}(C, \varepsilon)\}. \tag{25}$$

This is a restatement of the well-known property of lower semi-continuity for ℓ-m.

Lemma 3 If E, U are two measurable subsets of $\mathbb{R}^2$, U open and connected, $|E \cap U|_2 = 0$, then for all pairs (P, Q) of points in U there exists a simple arc C with extremities P and Q, such that

$$\ell\text{-m}(C \cap E) = 0. \tag{26}$$

Since any connected open set in the plane is pathwise connected, we can obtain this result by a Fubini-type argument on the set of all connecting polygonals between P and Q.

Lemma 4 For each simple arc C and for each $\varepsilon < \ell$-m(C)

$$|C(\varepsilon)|_2 \leq 9\pi\, \varepsilon\, \ell\text{-m}(C). \tag{27}$$

Indeed, the maximum number of points of C at distance $\geq 2\varepsilon$ from each other is $M_{2\varepsilon}(C)$. If $M_{2\varepsilon}(C) = 1$, then $C(\varepsilon)$ is included in a disk of radius 3ε, so that

$$|C(\varepsilon)|_2 \leq 9\pi\varepsilon^2 \leq 9\pi\, \varepsilon\, \ell\text{-m}(C).$$

If $M_{2\varepsilon}(C) > 1$, C is included in $M_{2\varepsilon}(C)$ balls of radius 2ε, and $C(\varepsilon)$ in $M_{2\varepsilon}(C)$ balls of radius 3ε, where $2(M_{2\varepsilon}(C) - 1)\varepsilon \leq \ell$-m$(C)$:

this gives

$$|C(\varepsilon)|_2 \leq 9\pi M_{2\varepsilon}(C)\varepsilon^2, \text{ and } M_{2\varepsilon}(C) \leq \ell\text{-m}(C)/\varepsilon,$$

which proves (27). The constant 9π could certainly be improved: all we need is a uniform bound.

Now let us prove (24): the set $\{F_i \cap F_j / 1 \leq i < j \leq n(r)\}$ is the union of simple arcs (possible degenerate), each of them being included in a frontier F_i, $1 \leq i \leq n(r)$. Since, by (v), their number is less than $Mn(r)$, the set H of their extremities contains no more than $2Mn(r)$ points.

For each i, $1 \leq i \leq n(r)$, the set $F_i - \bigcup_{j=1, j\neq i}^{n(r)} F_j$ is also the union of simple arcs, whose extremities belong to H. Let us call G the set of all these arcs, for $1 \leq i \leq n(r)$, of diameter $\geq 3r$.

Let $C \in G$: C is included in the frontier of an open set $\mathcal{C}$ of rank $\leq n(r)$. Let P, Q be the extremities of C, in H. Let P_1 in C be such that $\rho(P_1, P) \in]\frac{r}{2}, r[$ and Q_1 in C be such that $\rho(Q_1, Q) \in]\frac{r}{2}, r[$. Let C_1 be the sub-arc of C with extremities P_1 and Q_1. From (iv) C_1 is rectifiable. By Lemma 2 there exists $\varepsilon > 0$ such that

$$\forall C' \in \mathcal{E}(C_1, \varepsilon) \quad : \quad \ell\text{-m}(C') \geq \frac{1}{2}\,\ell\text{-m}(C_1). \tag{28}$$

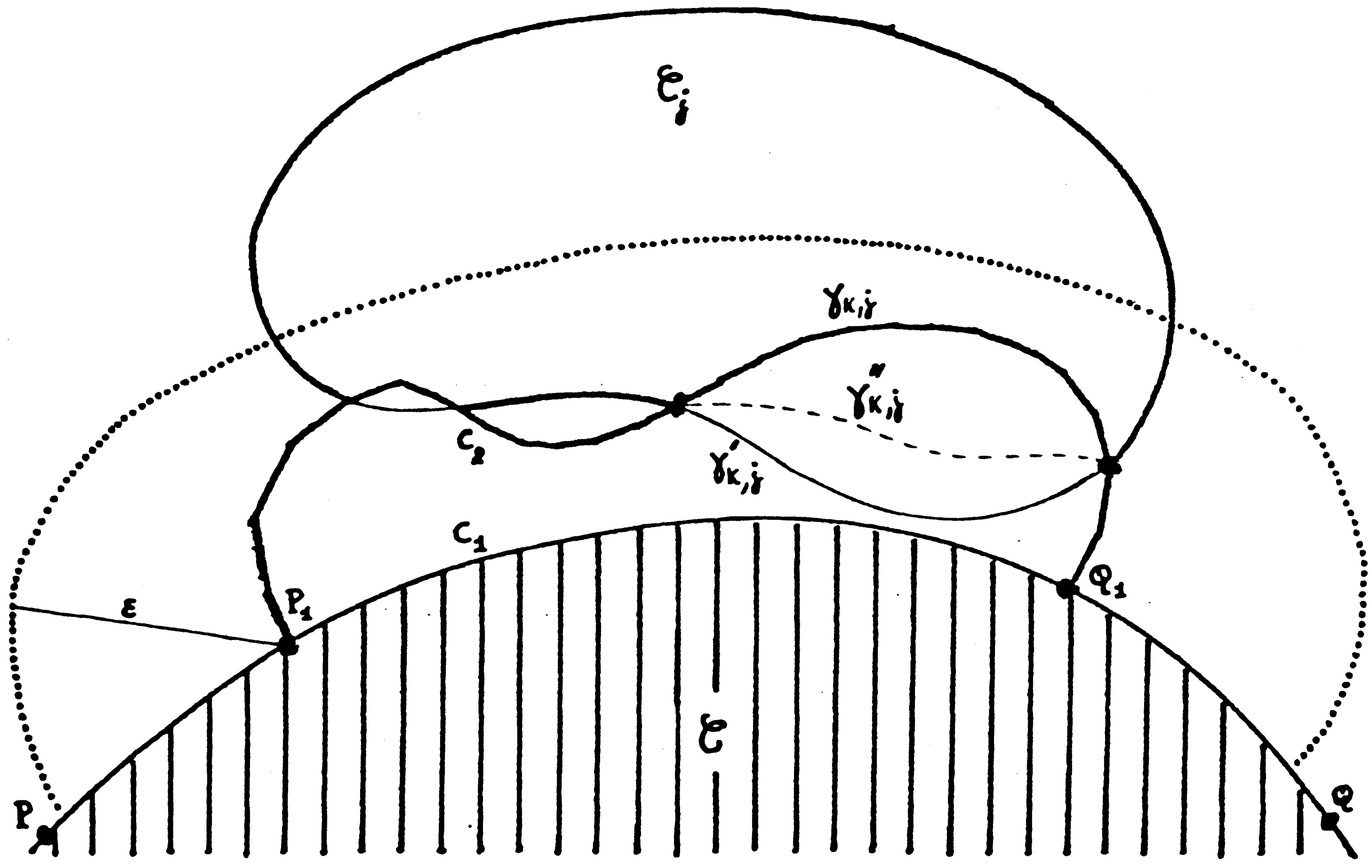
By Lemma 3 it is possible to find, in $C_1(\varepsilon) - \mathcal{C}$ a rectifiable arc C_2 of extremities P_1, Q_1 such that

$$\ell\text{-m}(C_2 \cap E) = 0. \tag{29}$$

For all $j > n(r)$ the set $C_2 \cap \mathcal{C}_j$ is open in C_2; if it is non-empty, it is a countable union of disjoint simple arcs $\gamma_{k,j}$, whose extremities are in F_j. To each $\gamma_{k,j}$ it is possible to associate an arc $\gamma'_{k,j}$ included in $F_j \cap C_1(\varepsilon)$, whose extremities are those of $\gamma_{k,j}$, and such that if $k \neq \ell$, $\gamma'_{k,j}$ and $\gamma'_{\ell,j}$ have at most one extremity in common. Finally, to each $\gamma'_{k,j}$ we associate a simple arc $\gamma''_{k,j}$ included in $\mathcal{C}_j \cap C_1(\varepsilon)$, with the same extremities, of length smaller than $2\ \ell\text{-m}(\gamma'_{k,j})$, and such that if $k \neq \ell$, $\gamma''_{k,j}$ and $\gamma''_{\ell,j}$ have at most one extremity in common. Then

$$\sum_k \ell\text{-m}(\gamma''_{k,j}) \leq 2\ \ell\text{-m}(F_j \cap C_1(\varepsilon)). \tag{30}$$

<u>Figure 2</u>



Let C_3 be the set obtained from C_2 by replacing each $\gamma_{k,j}$ by $\gamma''_{k,j}$, for all k and $j > n(r)$: then C_3 is a simple arc with extremities P_1 and Q_1, included in $C_1(\varepsilon)$. (29) and (30) imply

$$\ell\text{-}m(C_3) \leq 2 \sum_{j=n(r)+1}^{\infty} \ell\text{-}m(F_j \cap C_1(\varepsilon)). \tag{31}$$

so that, using (28):

$$\ell\text{-}m(C_1) \leq 4 \sum_{j=n(r)+1}^{\infty} \ell\text{-}m(F_j \cap C_1(\varepsilon)). \tag{32}$$

But the diameter of C is greater than $3r$, so that

$$\operatorname{diam}(C_1) \geq r,$$

and we can apply (27) to give

$$|C_1(r)|_2 \leq 36\pi r \sum_{j=n(r)+1}^{\infty} \ell\text{-}m(F_j \cap C_1(\varepsilon)). \tag{33}$$

As (33) is true for ε arbitrarily small, and C_1 is at distance >0 from the arcs of $G - \{C\}$, $\varepsilon = \varepsilon_C$ can be chosen small enough to ensure that, making the same construction over each arc of G, all the sets of the type $C_1(\varepsilon_C)$ are disjoint. Moreover, using (11), each point of P_r is, either at distance $\leq r$ from one such C_1, or at distance $\leq 2r$ from H. We deduce, using (33) and the fact that there are no more than $2Mn(r)$ points in H, the inequality (24).

<u>Case</u> B) $\Delta_1(c_n) \geq 1$.

From (22), (27) and (iv) we deduce that

$$\forall i \leq n(r), \; |(F_i(r)|_2 \leq 9\pi A\, r c_i,$$

then

$$|P_r|_2 \leq 9\pi Ar \sum_{i=1}^{n(r)} c_i . \tag{34}$$

For all $\alpha > 0$, by (23):

$$r^{\alpha-2}|E(r)|_2 \leq 9\pi Ar^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{n(r)} c_i + r^{\alpha-2} \sum_{i=n(r)+1}^{\infty} c_i^2 ,$$

which with (22), (14) and (18) implies

$$\Delta(E) \le \max(\Delta_{13}(c_n), \ 2\Delta_2(c_n^2))$$
$$= \Delta_1(c_n), \quad \text{by (16)}.$$

Note that, in Case B, the hypothesis (v) has not been needed.

Remark 1 The arguments of §4 are immediately generalizable to $\mathbb{R}^p$, $p \ge 3$, but that seems to be more difficult for those of §5. In fact, some supplementary assumptions are necessary about the sets $F_i \cap F_j$. and their boundaries; and this will make the proof more complicated. We have a proof in the case where the $\mathcal{C}_n$ are cubes in $\mathbb{R}^n$, with sides parallel to the axes, which requires n cases: $i \le \Delta_1(c_n) < i + 1$, $i = 0, 1, n - 1$. In each case we derive an inequality for P_r like (24) or (34).

Remark 2 The conditions of the Theorem may be weakened, in the following way:

Let us call M_n the number of connected components of $F_n \cap (\bigcup_0^{n-1} F_i)$ (M_n can be unbounded). Then, with the notations of §1,

The equality $\Delta_1(c_n) = \Delta(E)$ holds if the following five conditions are satisfied:

(i) $|E|_2 = 0$

(ii) $\lim_n \log|\mathcal{C}_n|_2 / \log c_n = 2$

(iii) $\lim_n \log \rho(\mathcal{C}_n, E) / \log c_n = 1$

(iv) $\lim_n \log \ell_n / \log c_n = 1$

(v) M_n is finite, and $\lim_n \log M_n / \log c_n = 0$.

The proof in this case only requires rather more analytic computations with ε's; we used the statement of §1 to make things easier to follow.

§6. Applications

a) Packing of circles Let us assume that F_0 is such that, for each circle C strictly included in $Cl(\mathcal{C}_0)$, $F_0 \cap C$ contains only a bounded number of points: for example, F_0 can itself be a circle, or $\mathbb{R}^2 - Cl(\mathcal{C}_0)$ can be a finite union of open convex sets.

Let $(\mathcal{C}_n)_{n\geq 1}$ be a countable set of disks $\subset \mathcal{C}_0$, with decreasing diameters, such that $\cup \mathcal{C}_n$ is dense in $\mathcal{C}_0$: then the conditions (ii) to (v) of the Theorem are verified, and the residual set E of (4) can be written

$$E = Cl(\mathcal{C}_0) - \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n, \tag{35}$$

since $F_n \subset E$ for all $n \geq 0$. If, moreover, $|E|_2 = 0$, which is the case of the "osculatory packing" where, after a rank N, each $\mathcal{C}_n$ has maximal diameter in $\mathcal{C}_0 - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{C}_i$ (see [3]), the "exponent of the packing"

$$e(C) = \inf\{\alpha \text{ s.t. } \sum c_n^{\alpha} < +\infty\} .$$

defined by Melzak [10], which corresponds to the Besicovitch-Taylor index in $\mathbb{R}$ [4], is easily shown to be equal to $\Delta_1(c_n)$, and therefore to $\Delta(E)$ (easy part of the proof; §4 and §5, Case B). The inequality

$$\dim(E) \leq e(C) \tag{36}$$

proved in [3], where dim is the Hausdorff dimension, is a particular case of the well-known inequality

$$\dim(E) \leq \Delta(E)$$

for all bounded sets E. For some E this inequality can be an equality. Is this the case for (36)? B. Mandelbrot, in [9] (p. 188), seems to assume the equality, but I am not aware of any proof of this result.

b) <u>Packing of equilateral triangles</u> The osculatory packing of an equilateral triangle by equilateral triangles of sides parallel but of opposite sense has been studied in [5]. By self-similarity $\dim(E) = \log 3 / \log 2$. As this packing contains 3^{n-1} triangles of side 2^{-n}, for all $n \geq 1$ (assuming that the fundamental triangle has side 1), $\Delta_1(c_n) = \log 3 / \log 2$, and this is also the value of $\Delta(E)$, provided we show that these triangles verify all the required hypotheses (see convex case in §3 b)) and that $|E|_2 = 0$, where E can be written as in (35). Actually there is an easier way to compute $\Delta(E)$, using self-similarity, a method which is known for dim (as example see [7] and [9]) and ought to be known for Δ, though as far as I know it is not in the literature. We state it formally:

<u>Lemma 5</u> <u>(Self-similarity)</u> <u>Let</u> k <u>be an integer</u> ≥ 2, <u>and</u> k <u>real numbers</u> $a_1, \ldots, a_k$ <u>such that</u> $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k < 1$. <u>Let</u> $E \subset \mathbb{R}^p$ <u>such that</u> $E = \sum_{i=1}^{k} E_i$, <u>where</u> E_i <u>is similar to</u> E <u>with similarity ratio</u> a_i. <u>Then</u> $\Delta(E)$ <u>is the solution of the equation in</u> α:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^{\alpha} = 1. \tag{37}$$

<u>Proof</u> Let α_0 be the solution of (37), and $F(r) = r^{\alpha_0} N_r(E)$, where N_r is defined in §1. The inequality

$$N_r(E) \leq \sum_{i=1}^{k} N_r(E_i)$$

implies, by similarity

$$N_r(E) \leq \sum_{i=1}^{k} N_{r/a_i}(E) ,$$

so that

$$F(r) \leq \sum_{i=1}^{k} a_i^{\alpha_0} F(r/a_i).$$

From this inequality we can prove by induction that

$$\forall r < a_1, \quad F(r) \leq \sup_{s\in[a_1,1]} F(s) < +\infty.$$

This implies $\Delta(E) \leq \alpha_0$. In the other direction,

$$N_r(E) \geq \left(\sum_{i=1}^{k} N_r(E_i)\right)/k$$

implies, for all $\varepsilon > 0$,

$$r^{\alpha_0-\varepsilon} N_r(E) \geq (r^{-\varepsilon}/k) \sum_{i=1}^{k} a_i^{\alpha_0} F(r/a_i),$$

which proves, after an induction on k, that

$$r^{\alpha_0-\varepsilon} N_r(E) \to +\infty \text{ when } r \to 0,$$

so that $\Delta(E) \geq \alpha_0 - \varepsilon$.

A corollary is that, in the case of self-similarity, Δ is always equal to dim. If $a_i = a$ for all i, then

$$\Delta(E) = \dim(E) = \log k / (-\log a). \tag{38}$$

c) To illustrate case A of §5, with $\sum c_n < +\infty$, it suffices to remove, from the equilateral triangle of side 1, a polygon of 6 sides of length alternately a and $1 - 2a$, $0 < a < 1/3$, leaving three equilateral triangles of side a, and repeat the construction on each of these triangles by similarity. If our complementary open sets are the polygons thus constructed, we can see in this example that they have important parts of their frontier in common: indeed, to get $\Delta(E) < 1$ it is necessary that E be nowhere dense in each F_n. The residual set E, defined by (4), is such that

$$\Delta(E) = \log 3 / (-\log a)$$

from (38). The value 1 is obtained for $a = 1/3$, in fact for the residual set corresponding to the osculatory packing of the equilateral triangle by regular hexagons with sides parallel to those of the triangle. The linear measure of E is positive and finite. On each side S of each triangle, as well as on three of the six sides of each hexagon, $E \cap S$ is congruent to a piece of the triadic Cantor set.

REFERENCES

[1] Borel, E. Sur l'addition vectorielle des ensembles de mesure nulle. Cr. Acad. Sc. 227 (1948), 103-105.

[2] Bouligand, G. Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble fermé. Bull. Sc. math. (2) 52 (1928), 320-376.

[3] Boyd, D. W. Osculatory packing by spheres, Canad. Math. Bull. 13 (1970), 59-64.

[4] Besicovitch, A. S. & Taylor, S. J. On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure. J. London Math. Soc. 29 (1954), 449-459.

[5] Eggleston, H. G. On closest packing by equilateral triangles. Proc. Camb. Phil. Soc. 49 (1953), 26-30.

[6] Kahane, J.-P. Courbes étranges, ensembles minces. Bull. Ass. des Professeurs de Mathématiques de l"Enseignement Public, 49 (1970) 325-339.

[7] Kahane, J.-P. & Salem, R. Ensembles parfaits et séries trignométriques. Paris, Hermann (1963).

[8] Kolmogorov, A. N. & Tihomirov, V. M. ε-entropy and ε-capacity of sets of function spaces. Uspehi Mat. Nauk 14 (1959), no. 2 (86), 3-86. English translation: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 17 (1961), 277-364.

[9] Mandelbrot, B. Fractals: form, chance and dimension. San Francisco, W. H. Freeman & Co., (1977).

[10] Melzak, Z. A. Infinite packing of disks. Canad. J. Math. 18 (1966), 838-852.

[11] Melzak, Z. A. On the solid packing constant for circles. Math. Comp. 23 (1969), 169-172.

[12] Tricot, C. Sur la notion de densité. Cahiers du dépt. d'Econométrie de l'Université de Genève, 1973.

[13] Tricot, C. jr. Douze définitions de la densité logarithmique. Cr. Acad. Sc. Paris 293 (1981) 549-552.

A NEW PROOF FOR THE RESIDUAL SET DIMENSION OF THE APOLLONIAN PACKING

Claude Tricot

Liverpool

§1 <u>Introduction</u> Let U be a curvilinear triangle formed by three externally tangent circles and D_k a sequence of open disks constructed inductively as follows : D_1 is the disk of maximal radius ρ_1 inscribed in U. Assuming D_1, D_2, ..., D_n are given in U, D_{n+1} is a disk of maximal radius ρ_{n+1} contained in $U - \bigcup_{i=1}^{n} D_i$. The family D_n of such disks is the "apollonian packing" of U. The residual set $E = E_U$ defined by

$$E = Cl(U) - \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

has zero planar measure, but its Hausdorff dimension $\dim(E)$ is at least 1.03 [6], and less than 2 [5]. In order to give a precise estimate of $\dim(E)$, one method consists in defining

$$\Delta(E) = \inf \left\{ x>0 \ : \ \sum \rho_n^x < +\infty \right\} ,$$

computing the value of $\Delta(E)$ (~ 1.3, see [2], [3]), and proving that

$$\dim(E) = \Delta(E) . \tag{1}$$

The inequality

$$\dim(E) \leqslant \Delta(E)$$

is easy [1], and can be viewed as a particular case of some results about the complementary open sets of a compact set, [8]. We are interested here in the reverse inequality

(2) $$\Delta(E) \leqslant \dim(E) \quad ,$$

which is much more difficult. A proof can be found in Boyd [4]. Our purpose is to give a different and, we hope, simpler argument.

First of all let us give a brief abstract of Boyd's proof : The operation which consists in removing, from any curvilinear triangle T, the maximal inscribed disk is called operation Ψ, and $\Psi(T)$ is the family of the three triangles obtained. For any family $\{T_i\}$ of disjoint triangles, define $\Psi(\{T_i\})$ as $\bigcup_i \Psi(T_i)$. Starting from U, $\Psi(U)$ consists of 3 triangles, $\Psi(\Psi(U)) = \Psi^2(U)$ has 3^2 triangles, ..., $\Psi^n(U)$ has 3^n triangles. These families $\Psi^n(U)$ are nested, and cover E. Let $\vartheta(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Psi^n(U)$. The Hausdorff dimension of E is generally defined using coverings of E by open sets. If we use only coverings of E by curvilinear triangles taken from $\vartheta(U)$ we get a variant $\dim_0(E)$ of this dimension. Using this intermediary index, it is shown essentially that

(3) $$\dim_0(E) \leqslant \dim(E)$$

and

(4) $$\Delta(E) \leqslant \dim_0(E) \quad ,$$

which proves (2). The inequality (3) derives directly from the following :

LEMMA 1 <u>Let</u> $\{V_i\}$ <u>be a finite covering of</u> E <u>by open disks : there exists a finite family</u> $\{W_j\} \subset \vartheta(U)$, <u>covering</u> E, <u>such that for all</u>

$x > 0$,

$$\sum \operatorname{diam}(W_j)^x \leqslant 2^{1-x} \sum \operatorname{diam}(V_i)^x \quad .$$

For a proof, see [4, Lemma 2] , inspired by arguments of [5, Theorem 2] . It is relatively simple, and we will use (3) as part of the argument in the present paper.

The proof of (4) is far more technical, and uses algebraic calculations. We have tried to replace this by other arguments which are purely geometrical and therefore easier to visualize. Our idea is as follows :

We want to define another sequence of nested families of coverings, and then, by induction, some suitable measures μ_k carried by E , which allow us to apply a density theorem of Rogers & Taylor [7] . Indeed, the great difficulty of using $\mathcal{V}(U)$ is that it contains some very irregular ("long and thin") triangles. To avoid this problem we will replace the operation Ψ by Ω , which consists in removing, from any T , all the disks of the packing of T which are tangent to at least two of the circles bounding T . This gives an infinite family $\Omega(T)$ of triangles which are uniformly regular (in the sense that the ratio of the outer diameter to the inner diameter is bounded). Defining $\dim_1(E)$ as the corresponding variant of the Hausdorff dimension, we will prove

(5) $$\Delta(E) \leqslant \dim_1(E) \quad ,$$

which is the important part of the argument (§4, §5, §6), and

(6) $$\dim_1(E) \leqslant \dim_0(E) \quad ,$$

which is fairly easy (§7) and, with help of (3), completes the proof of (2).

The sections §2 and §3 are devoted to notation, preliminary results and geometrical lemmas.

For the geometry of the problem our main basis was [5].
I wish to thank Prof. S.J.Taylor for his useful advice.

§2 Notations and Propositions a) A curvilinear triangle T, bounded by three externally tangent circles of radii a, b, c is denoted $T = T(a,b,c)$ without mention of order. The 3-uple $(\alpha(T), \beta(T), \gamma(T))$ denotes the set $\{a,b,c\}$ in a decreasing order. As a limiting case, one of the sides of T can be a straight line, and then $\alpha(T) = +\infty$.

(7) $\delta(T)$ = diameter of $T = \sqrt{4\alpha^2\beta\gamma / (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}$ [5].

(8) $\tau(T)$ = radius of the circle circumscribed to $T = \sqrt{abc / (a+b+c)}$ [5].

(9) $\sigma(T)$ = radius of the circle inscribed in $T = 1 / (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{2}{\tau})$

(Soddy's formula).

Let $(p_n(T))$ be the sequence of radii of those circles which are tangent to the initial circles of radii $\beta(T)$, $\gamma(T)$. Then

$$p_1(T) = \sigma(T), \quad p_n = p_n(T) = \sigma(\beta, \gamma, p_{n-1}) \quad \text{if } n \geqslant 2,$$

(10) $$\frac{1}{p_n} = (\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})\ n^2 + \frac{2n}{\tau} + \frac{1}{\alpha} \qquad \text{(Melzak's formula)}.$$

Similarly, $(q_n(T))$ and $(r_n(T))$ are the sequences of the radii of those circles tangent respectively to the initial circles of radii $\gamma(T)$,

$\alpha(T)$ and $\alpha(T)$, $\beta(T)$. Formulas for q_n and r_n are derived from (10) by circular permutation.

b) As defined in §1, $\Omega(T)$ is the family of all curvilinear triangles of radii p_n , q_n , r_n , $n \geqslant 1$:

$$\Omega(T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ T(\alpha, r_n, r_{n+1}) , T(\beta, r_n, r_{n+1}) , T(\beta, p_n, p_{n+1}) , T(\gamma, p_n, p_{n+1}) , T(\gamma, q_n, q_{n+1}) , T(\alpha, q_n, q_{n+1}) \} .$$

For any family $\{T_i\}$ of disjoint triangles, define $\Omega(\{T_i\})$ as $\bigcup_i \Omega(T_i)$. Let $\Omega^1(T) = \Omega(T)$, ... , $\Omega^n(T) = \Omega(\Omega^{n-1}(T))$, and $\mathcal{U}(T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega^n(T)$.

c) Now we define two families of functions F_k and G_k by

$$(11) \quad \forall T , \forall x \in \mathbb{R} , \forall k \geqslant 1 : \quad F_k(T;x) = \sum \{ \gamma(S)^x \ : \ S \in \Omega^k(T) \}$$

$$(12) \quad G_k(T;x) = \sum \{ \beta(S)^x \ : \ S \in \Omega^k(T) \} .$$

Then

$$(13) \quad F_1(T;x) = 2 \sum_2^{\infty} (p_n(T)^x + q_n(T)^x + r_n(T)^x) ,$$

$$(14) \quad G_1(T;x) = 2 \sum_1^{\infty} (p_n(T)^x + q_n(T)^x + r_n(T)^x) .$$

Since, if $1 \leqslant \ell < k$, we have $\Omega^k(T) = \Omega^{\ell}(\Omega^{k-\ell}(T))$:

$$(15) \quad F_k(T;x) = \sum \{ F_{k-\ell}(S;x) \ : \ S \in \Omega^{\ell}(T) \} ,$$

$$(16) \quad G_k(T;x) = \sum \{ G_{k-\ell}(S;x) \ : \ S \in \Omega^{\ell}(T) \} .$$

If $T^1 = T(1,1,1)$ and $T^{\infty} = T(\infty,1,1)$, we use the fact that F_k and G_k are increasing in the variables α, β, γ, and a remark of Boyd [2] , to show that

$$(17) \quad F_k(T;x) \geqslant \gamma(T)^x \, F_k(T^1;x)$$

$$(18) \quad G_k(T;x) \leqslant \beta(T)^x \, G_k(T^{\infty};x) ,$$

from which with (15) and (16) we deduce the crucial inequalities

(19) If $1 \leqslant \ell < k$: $F_k(T^1;x) \geqslant F_\ell(T^1;x) \quad F_{k-\ell}(T^1;x)$

(20) $$G_k(T^\infty;x) \leqslant G_\ell(T^\infty;x) \quad G_{k-\ell}(T^\infty;x) \quad .$$

As a direct consequence of (19) and (20) ,

(21) $$F_1(T^1;x)^k \leqslant F_k(T^1;x) \leqslant G_k(T^\infty;x) \leqslant G_1(T^\infty;x)^k \quad .$$

We deduce from (10) , (13) and (14) that, considered as functions in the variable x , the domain of definition of F_1 and G_1 is $]\frac{1}{2}, +\infty[$. In this domain they are continuous, strictly decreasing and convex. It is easy to check that

(22) $$\lim_{x \to \frac{1}{2}} F_1(T^1;x) = +\infty \quad , \text{ and } \lim_{x \to \infty} G_1(T^\infty;x) = 0 \quad ,$$

so that the range of $F_1(T^1;x)$ and of $G_1(T^\infty;x)$ is $\mathbb{R}^{+*}$. Using (21) , $F_k(T^1;x)$ and $G_k(T^\infty;x)$ have the same properties, for all $k \geqslant 1$. Therefore the real numbers x_k and y_k verifying

(23) $$F_k(T^1;x_k) = G_k(T^\infty;y_k) = 1$$

are uniquely determined.

d) As explained in § 1, it will be enough, for the proof of (2) , to establish the following results :

PROPOSITION 1 $$|y_k - x_k| = \mathcal{O}(1/k) \quad .$$

PROPOSITION 2 <u>If</u> $U = T^\infty$, $$\Delta(E) \leqslant \inf_k y_k \quad .$$

PROPOSITION 3 <u>If</u> U <u>is any curvilinear triangle</u>, $$\sup_k x_k \leqslant \dim_1(E) \quad .$$

PROPOSITION 4 $$\dim_1(E) \leqslant \dim_0(E) \quad .$$

Propositions 1, 2, 3 prove (5) , Proposition 4 proves (6) .

§3 Technical lemmas

LEMMA 2 x_k <u>and</u> y_k <u>being defined by</u> (23) :

(24) $$\forall k \geqslant 1 \quad , \quad 1 < x_1 \leqslant x_k \leqslant y_k \leqslant y_1 < 2 \quad .$$

<u>Proof</u> Since the centres of the disks tangent to at least two initial circles of T^1 are on three straight lines, it is easy to verify that

$$F_1(T^1;1) = (12 + 5\sqrt{3}) \,/\, (6 + 3\sqrt{3}) > 1 \quad ,$$

so that $x_1 > 1$. From (21) , $F_k(T^1;x_1) \geqslant 1$, then $x_k \geqslant x_1$. (21) is used also for $x_k \leqslant y_k$ and $y_k \leqslant y_1$. To complete the proof, we must verify that $G_1(T^{\infty};2) < 1$: this follows from (10) and (14) , which give the inequality

$$G_1(T^{\infty};2) \leqslant 6 \sum_1^{\infty} (\ n+1\ )^{-4} \quad .$$

LEMMA 3 <u>For all</u> x :

(25) $$G_1(T^{\infty};x) \leqslant 2^x \, G_1(T^1;x) \quad .$$

<u>Proof</u> Since $p_n(T^1) = q_n(T^1) = r_n(T^1)$, and $q_n(T^{\infty}) = r_n(T^{\infty}) > p_n(T^{\infty})$, it is enough to show that for all n :

$$\frac{r_n(T^{\infty})}{r_n(T^1)} = \frac{2n^2 + 2n\sqrt{3} + 1}{n^2 + 2n + 1} \leqslant 2 \quad .$$

The following is a consequence of the "regularity" of the triangles of $\mathcal{U}(T)$:

LEMMA 4 <u>If</u> T <u>is any curvilinear triangle, and</u> $S \in \mathcal{U}(T)$: <u>then</u>

(26) $$\beta(S) \leqslant 4 \ \gamma(S)$$

(27) $$\beta(S) \,/\, \sqrt{10} \leqslant \delta(S) \leqslant 2 \ \beta(S) \quad .$$

<u>Proof</u> Let $T = T(\alpha,\beta,\gamma)$, and $S \in \Omega(T)$: (26) comes from the inequality

$$\beta(S) \ / \ \gamma(S) \leqslant \sigma / r_2 = (4(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}) + \frac{4}{\tau} + 1) / (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\tau} + 1) ,$$

from (9) and (10) , the right member being an increasing function of α , of maximum 4 when $\alpha \to +\infty$. For (27) , take $\alpha = 1$, and use (7) and (26) .

LEMMA 5 <u>If</u> T <u>is any curvilinear triangle</u>

$$(28) \qquad \forall x \in \left] \tfrac{1}{2} , 2 \right[\quad : \quad \sigma(T)^x \leqslant 4 \, F_1(T;x) ,$$

<u>and denoting</u> $\sigma'(T) = \max \left\{ \sigma(S) , \text{ where } S \in \Omega(T) \right\}$:

$$(29) \qquad 4 \ \sigma'(T) \leqslant \sigma(T) .$$

<u>Proof</u> For (28) , take $\alpha = 1$, and using (9) and (10) , show that the ratio r_n/σ is a decreasing function in the variables β and γ . Then

$$F_1(T;x) \ / \ \sigma(T)^x \geqslant 2 \sum_2^\infty (\ r_n(T) \ / \ \sigma(T) \ )^x \quad \text{by (13)}$$

$$\geqslant 2 \sum_2^\infty (\ r_n(1,1,1) \ / \ \sigma(1,1,1) \ )^2$$

$$\geqslant 1 \ / \ 4 \ .$$

As $\sigma'(T) = \sigma(\alpha, \sigma, r_2)$, we verify, with help of (8) , (9) , (10) , that

$$\frac{1}{\sigma'} = \frac{12}{\alpha} + \frac{9}{\beta} + \frac{4}{\gamma} + \frac{12}{\tau} \geqslant \frac{4}{\sigma} ,$$

from which (29) follows.

§ 4 <u>Proof of Proposition 1</u> For each $x > \frac{1}{2}$, and for each curvilinear triangle T , the derivative $\frac{d}{dx} F_1(T;x)$ exists, and from (13) is equal to :

$$\frac{d}{dx} F_1(T;x) = 2 \sum_2^\infty (\ p_n(T)^x \log p_n(T) \ + \ q_n(T)^x \log q_n(T) \ + \ r_n(T)^x \log r_n(T) \ ),$$

then if $\sigma(T) \leqslant 1$

$$\left| \frac{d}{dx} F_1(T;x) \right| \geqslant 2 \ \left| \log \ \sigma(T) \right| \ F_1(T;x) ,$$

and by convexity of F_1 :

(30) If $\frac{1}{2} < x < y$: $F_1(T;x) - F_1(T;y) \geqslant 2\,(y-x)\,\left|\log \sigma(T)\right|\, F_1(T;y)$.

From (21) , $\frac{1}{2} < x_k < y_k < 2$. Let us take $x = x_k$, $y = y_k$, and omit the index k in the few following lines for the sake of simplicity : we have

$$\begin{aligned}
0 &= F_k(T^1;x) - G_k(T^\infty;y) \geqslant F_k(T^1;x) - 2^y\, G_k(T^1;y) && \text{from (25)}\\
&= \sum\left\{ \left(F_1(T;x) - 2^y\, G_1(T;y) \right) \;:\; T \in \Omega^{k-1}(T^1) \right\} && \text{from (15) and (16)}\\
&= \sum\left\{ \left(F_1(T;x) - 2^y\, F_1(T;y) - 6.2^y\, \sigma(T)^y \right) \right\} && \text{from (14)}\\
&\geqslant \sum\left\{ \left[\left(2(y-x)\left|\log \sigma(T)\right| - 25.2^y + 1 \right] F_1(T;y) \right\} , && \text{from (28) and (30)} .
\end{aligned}$$

Replacing $\sigma(T)$ by

$$\sigma_{k-1} = \max \left\{ \sigma(T) \text{ where } T \in \Omega^{k-1}(T^1) \right\} ,$$

we deduce the inequality

$$(31) \qquad y_k - x_k \leqslant \left(25.2^{y_k} - 1 \right) / \, 2\left|\log \sigma_{k-1}\right| .$$

From (29) , the sequence (σ_k) verifies the inductive relation

$$\sigma_k \leqslant \sigma_{k-1} / 4 ,$$

then
$$\sigma_k \leqslant \sigma(T^1)\, 4^{-k+1} \leqslant 4^{-k} ,$$

and, with (31) , and $y_k \leqslant 2$:

$$y_k - x_k \leqslant 99 / 2(k-1) \log 4 .$$

§ 5 Proof of Proposition 2 Let E be the residual set from the apollonian packing of T^∞ , (ρ_n) be the sequence of the radii, and

$$\Delta(E) = \inf \left\{ x \text{ such that } \sum \rho_n^x < +\infty \right\} .$$

In the sum $\sum_{k=1}^{\infty} G_k(T^\infty;x)$, each ρ_n is counted at least once and no more than 6 times. Therefore

$$(32) \qquad \Delta(E) = \inf \left\{ x \text{ such that } \sum_{k=1}^{\infty} G_k(T^\infty;x) < +\infty \right\} .$$

With the convention that $G_0(T^\infty;x) = 1$, it follows from (20) that if i, j, k, ℓ are four integers such that $k = j\ell + i$, then

$$G_k(T^\infty;x) \leqslant G_\ell(T^\infty;x)^j \, G_i(T^\infty;x) \quad .$$

Let us fix $\ell \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} G_k(T^\infty;x) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\ell-1} G_\ell(T^\infty;x)^j \, G_i(T^\infty;x)$$

$$\leqslant \ell \max_{0 \leqslant i \leqslant \ell-1} G_i(T^\infty;x) \sum_{j=0}^{\infty} G_\ell(T^\infty;x)^j \quad .$$

If x is any number $> y_\ell$, then $G_\ell(T^\infty;x) < 1$, and $\sum\limits_{k=0}^{\infty} G_k(T^\infty;x) < +\infty$.

Then $\Delta(E) \leqslant y_\ell$, for all ℓ .

§6 Proof of Proposition 3 A curvilinear triangle U being given, we have defined in §2 the family $\mathcal{U}(U)$ with help of the operation Ω. Each point of $U - \bigcup \mathcal{U}(U)$ which is not a vertex of the triangles of $\mathcal{U}(U)$ is the limit of an imbedded sequence of these triangles. We will therefore change a little the definition of $E = E_U$, and assume that it is the residual set, less the set of vertices; this will not alter the dimension.

For any $k \geqslant 1$, we can also consider the operation Ω^k, define the subfamily $\mathcal{U}_k(U) = \bigcup\limits_{\ell=1}^{\infty} \Omega^{k\ell}(U)$, and call $\dim_k(E)$ the new variant of $\dim(E)$ defined using only coverings of E by triangles taken from $\mathcal{U}_k(U)$. The inequalities

$$\dim(E) \leqslant \dim_1(E) \leqslant \dim_k(E)$$

are obvious. We are interested in the converse inequalities. For Proposition 3 it suffices to show the following, for all $k \geqslant 1$:

(33) $$x_k \leqslant \dim_k(E) \quad ,$$

(34) $$\dim_k(E) \leqslant \dim_1(E) \quad .$$

a) Let us prove (33) . Let us fix $k \geqslant 1$. We construct by induction a measure μ_k as follows :

$$\begin{cases} \mu_k(U) = F_k(U;x_k) \\ \text{If } \quad T \in \Omega^k(U) \quad : \quad \mu_k(T) = \gamma(T)^{x_k} \\ \text{If } \quad T \in \Omega^{k\ell}(U) \ , \ \ell \geqslant 2 \ , \quad T \subset T' \in \Omega^{k(\ell-1)}(U) \quad : \end{cases}$$

$$\mu_k(T) = \gamma(T)^{x_k} \ \mu(T') \ / \ F_k(T';x_k) \quad .$$

μ_k is, clearly, a finite, additive measure, and $\mu_k(E) = \mu_k(U) > 0$.

From the relation

$$\gamma(T)^{x_k} = \gamma(T)^{x_k} F_k(T^1;x_k) \leqslant F_k(T;x_k) \quad ,$$

deduced from (17) , we can verify, by induction on ℓ , that

(35) $$\forall \, T \in \mathcal{U}_k(U) \quad , \quad \mu_k(T) \leqslant \gamma(T)^{x_k} \quad .$$

With help of (7) , we have also

(36) $$\gamma(T) \leqslant \delta(T) \quad , \qquad \text{so that}$$

(37) $$\forall \, T \in \mathcal{U}_k(U) \quad : \quad \mu_k(T) \leqslant \delta(T)^{x_k} \quad .$$

If $\mathcal{R}$ is a covering of E by triangles of $\mathcal{U}_k(U)$, we get

$$\sum \left\{ \delta(T)^{x_k} \ : \ T \in \mathcal{R} \right\} \geqslant \mu_k(E) \quad ,$$

which proves (33) . This kind of argument was used already by Rogers & Taylor[7].

b) Let $K = 40\, G_1(T^{\infty};1)$. Before proving (34) , let us first establish the following inequality for all $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 1$, for all triangles T , and for all $x \in [1, 2]$:

$$(38) \qquad \sum \{ \delta(S)^x \ : \ S \in \Omega^j(T) \} \leqslant K^j\, \delta(T)^x \ .$$

By induction : if $j = 1$,

$$\begin{aligned} \sum \{ \delta(S)^x \ : \ S \in \Omega(T) \} &\leqslant 2^x \sum \beta(S)^x \quad \text{by } (27) \\ &= 2^x\, G_1(T;x) \\ &\leqslant 2^x\, \beta(T)^x\, G_1(T^{\infty};x) \quad \text{by } (18) \\ &\leqslant K\, \delta(T)^x \quad \text{by } (27) \ . \end{aligned}$$

If (38) is true for $1, 2, \ldots, j$:

$$\begin{aligned} \sum \{ \delta(S)^x \ : \ S \in \Omega^{j+1}(T) \} &= \sum\sum \{ \delta(S)^x \ : \ S' \in \Omega(T) \ , \ S \in \Omega^j(S') \} \\ &\leqslant \sum \{ K^j\, \delta(S')^x \ : \ S' \in \Omega(T) \} \quad \text{by hypothesis} \\ &\leqslant K^{j+1}\, \delta(T)^x \ . \end{aligned}$$

Now let $\mathcal{R} \subset \mathcal{U}_1(U)$ be a covering of E by disjoint triangles. Let $T \in \mathcal{R}$, $k \geqslant 2$. If $T \notin \mathcal{U}_k(U)$, then $T \in \mathcal{U}_\ell(U)$ where $\ell = k\, i + j$, $0 < j < k$. Then $\Omega^{k-j}(T) \subset \mathcal{U}_k(U)$. If we replace in $\mathcal{R}$ each such T by $\Omega^{k-j}(T)$ we get a new covering $\mathcal{R}' \subset \mathcal{U}_k(U)$, such that from (38)

$$\sum \{ \delta(T)^x \ : \ T \in \mathcal{R}' \} \leqslant K^k \sum \{ \delta(T)^x \ : \ T \in \mathcal{R} \} \ .$$

This proves (34) .

§7 Proof of Proposition 4 We will first show that, fot all $S \in \mathcal{V}(U)$, either $S \in \mathcal{U}(U)$, or there exists $\tilde{S} \in \mathcal{U}(U)$, $\tilde{S} = T(\alpha,\beta,\gamma)$, and $k \geqslant 1$, such that $S \in \{ T(\beta,\gamma,p_k), T(\gamma,\alpha,q_k), T(\alpha,\beta,r_k) \}$.

Suppose $S \in \Psi^n(U)$, and proceed by induction on n:

The case $n = 1$ is clear : take $\tilde{S} = U$, $k = 1$.

Assume that the statement is true for n. Take $S \in \Psi^{n+1}(U)$ and $S' \in \Psi^n(U)$ such that $S \subset S'$. If $S' \in \mathcal{U}(U)$, take $\tilde{S} = S'$ and $k = 1$. If not, there exists $\tilde{S}'$, $\tilde{S}' = T(\alpha,\beta,\gamma)$, and $\ell \geqslant 1$, such that, for example, $S' = T(\beta,\gamma,p_\ell)$. But $S \in \Psi(S')$, then either $S = T(\beta,p_\ell,p_{\ell+1})$, or $S = T(\gamma,p_\ell,p_{\ell+1})$, or $S = T(\beta,\gamma,p_{\ell+1})$. In the two first cases $S \in \Omega(\tilde{S}') \subset \mathcal{U}(U)$. In the last case, take $\tilde{S} = \tilde{S}'$ and $k = \ell+1$, and the induction is proved.

If, in the second case, $S = T(\beta,\gamma,p_k)$, the family

$\mathcal{G} = \{ T(\beta,p_i,p_{i+1}), T(\gamma,p_i,p_{i+1}), i \geqslant k-1 \}$ (where $p_0 = \alpha$ if $k = 1$)

is a covering of $E \cap S$ by triangles of $\mathcal{U}(U)$. It is possible to show that, for all $x \in [1, 2]$:

$$\sum \{ \delta(T)^x : T \in \mathcal{G} \} \leqslant 2^x(K+2)\,\delta(S)^x \; ; \tag{39}$$

Indeed, $\sum \delta(T)^x \leqslant 2^x \sum \beta(T)^x$ from (27)

$$= 2^{x+1}(p_k^x + p_{k+1}^x + \dots)$$

$$< 2^x(\,2\gamma(S)^x + F_1(S;x)\,)$$

$$\leqslant 2^x\left(2\,\delta(S)^x + \sum\left\{ \delta(T')^x \;:\; T' \in \Omega(S) \right\} \right) \text{ from } (36)$$

$$\leqslant 2^x(K+2)\,\delta(S)^x \quad \text{from } (38)\text{ , case } j = 1 .$$

(39) holds also if $S = T(\gamma\,,\alpha,q_k)$ or $S = T(\alpha\,,\beta,r_k)$, with the suitable $\mathcal{G}$.

It follows that, if $\mathcal{R}$ is any covering of E by triangles of $\mathcal{V}(U)$, we can replace each S of $\mathcal{R}$ which is not in $\mathcal{U}(U)$ by the corresponding $\mathcal{G}$, in order to get a new covering $\mathcal{R}' \subset \mathcal{U}(U)$ such that, for all $x \in [1\,,\,2]$:

$$\sum\left\{ \delta(T)^x \;:\; T \in \mathcal{R}' \right\} \leqslant 4(K+2)\sum\left\{ \delta(S)^x \;:\; S \in \mathcal{R} \right\} .$$

This completes the proof.

<u>Remark</u> We have proved also that

$$\sup x_k = \inf y_k$$

(Propositions 2 and 3). It seems likely that (x_k) is strictly increasing and (y_k) strictly decreasing, but we do not need this for the proof.

REFERENCES

[1] D.W.Boyd , "Osculatory packings by spheres", Canad.Math.Bull. 13 (1970), 59-64.

[2] ——— "The disk packing constant", Aeq.Math. 7 (1972), 182-193.

[3] ——— "Improved bound for the disk packing constant", Aeq.Math. 9 (1973), 99-106.

[4] ——— "The residual set dimension of the apollonian packing", Mathematika 20 (1973), 170-174.

[5] K.E.Hirst , "The apollonian packing of circles", J.Lond.Math.Soc. 42 (1967), 281-291.

[6] D.G.Larman , "On the Besicovitch dimension of the residual set of arbitrarily packed disks in the plane", J.Lond.Math.Soc. 42 (1967), 292-302.

[7] C.A.Rogers & S.J.Taylor , "Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure" Mathematika 8 (1961), 1-31.

[8] C.Tricot , "Metric properties of compact sets of measure 0 in $\mathbb{R}^2$ ", to appear.

Claude Tricot

University of Liverpool

Department of Pure Mathematics

P.O.Box 147

Liverpool L69 3BX

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p.

DIMENSIONS DES SPIRALES

PAR

YVES DUPAIN, MICHEL MENDÈS-FRANCE et CLAUDE TRICOT (*)

RÉSUMÉ. — G. BOULIGAND a donné une définition de la dimension d'une courbe liée au recouvrement par une bande. Nous introduisons une nouvelle dimension des courbes liée au nombre de points d'intersection de la courbe avec une droite aléatoire. Pour une grande classe de spirales, ces deux dimensions coincïdent.

ABSTRACT. — G. BOULIGAND has given a definition of a curve related to the covering of the curve by a band. We define a new dimension of a curve in terms of the number of intersection points of the curve with a random straight line. For a large class of spirals, both dimensions coincide.

1. Introduction

De l'escargot au tourbillon turbulent, la nature fourmille de spirales (D'ARCY THOMPSON [1], COOK [4], STEVENS [12]) lesquelles se prêtent à une étude dimensionnelle. Apporter notre contribution à ce nouveau regard sur la nature inauguré par MANDELBROT dans son livre sur les objets fractals [7], tel pourraît être un des buts de notre étude. Nous nous contenterons cependant de nous limiter à un cadre purement mathématique.

Les spirales que l'on considère sont toutes bornées dans le plan, s'enroulent autour d'un point qu'on choisit être l'origine, et tendent vers ce point. Ces spirales sont représentées par leur équation polaire $\rho = f(\theta)$ où f est définie pour $\theta \geqslant 0$, décroissante vers 0 quand θ croît indéfiniement.

(*) Texte reçu le 15 novembre 1982, révisé le 15 avril 1983.

Y. DUPAIN et M. MENDÈS-FRANCE, Université de Bordeaux-I, U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

C. TRICOT, The University of Liverpool, Department of Mathematics, P.O. Box 147, Liverpool L693BX, G.-B.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1983/ /$ 5.00

Certaines spirales comme $\rho=(1+\theta)^{-1}$ convergent « rapidement » vers 0 alors que d'autres $\rho=(\log(2+\theta))^{-1}$ convergent lentement vers 0. Ces dernières ont une tendance plus grande à « remplir » un voisinage de 0, presque à la façon d'une courbe de Peano, et en ce sens on pourrait assimiler la spirale lente à un ensemble localement bidimensionnel.

La dimension topologique et la dimension de Hausdorff d'une spirale sont toujours égales à l'unité et ne permettent donc pas de classifier les spirales. Par contre, la dimension de BOULIGAND (notée $\dim_B$), plus fine que les dimensions précédentes, permet cette classification. Nous verrons que lorsque Γ parcourt la famille des spirales, $\dim_B \Gamma$ parcourt l'intervalle [1, 2]. Plus lente est la spirale et plus sa dimension avoisine 2.

En partant d'une remarque de STEINHAUS, nous définissons une nouvelle dimension que nous appellerons dimension de STEINHAUS ($\dim_S$). Les définitions de $\dim_B$ et $\dim_S$ ne sont pas logiquement équivalentes. Nous montrerons cependant que pour une grande classe de spirales Γ :

$$\dim_B \Gamma = \dim_S \Gamma.$$

Ceci constituera notre résultat principal.

2. Dimension de BOULIGAND

Soit A un ensemble plan borné, soit $\varepsilon>0$, soit $A(\varepsilon)$ l'ensemble des points à distance moindre que ε de A, et $|A(\varepsilon)|$ sa mesure.

Si A est réduit à un point :

$$|A(\varepsilon)| \asymp \varepsilon^2, \qquad \varepsilon \to 0.$$

(La notation $f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$ signifie :

$$0<\liminf_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \limsup_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} < +\infty.)$$

Si A est un segment de droite :

$$|A(\varepsilon)| \asymp \varepsilon$$

et si enfin A est un disque :

$$|\mathrm{A}(\varepsilon)| \asymp 1=\varepsilon^0.$$

Les exposants 2, 1, 0 de ε varient en sens opposé des dimensions respectives du point, du segment, du disque. Cette remarque simple a conduit G. BOULIGAND à définir la dimension de A [3] :

$$\dim_B(A)=\inf\{\alpha / \lim_{\varepsilon\searrow 0} \varepsilon^{\alpha-2}|A(\varepsilon)|=0\}.$$

Si A est une courbe plane bornée, alors :

$$1\leqslant\dim_B(A)\leqslant 2.$$

A titre d'illustration, on se convaincra que la dimension de la spirale $\rho=(1+\theta)^{-a}$, $a>0$ est $\max\{1, 2(1+a)^{-1}\}$, que la spirale $\rho=(\log(2+\theta))^{-1}$ est de dimension 2 et que la spirale $\rho=\exp(-\theta)$ est de dimension 1.

Remarque. — On montre sans difficulté que la dimension supérieure de KOLMOGOROV et TIHOMIROV [6] liée à la ε-capacité et la ε-entropie coïncide avec la dimension de BOULIGAND. On pourra aussi comparer ces dimensions avec celle de E. BOREL [2], page 294.

3. Dimension de STEINHAUS

Une droite D du plan (x, y) est repérée par son équation normale :

$$x\cos\theta+y\sin\theta-\rho=0,$$

où $0\leqslant\theta<2\pi$, $\rho\geqslant 0$. Il y a unicité de la représentation sauf si $\rho=0$. Un point (θ, ρ), $0\leqslant\theta<2\pi$, $\rho\geqslant 0$ représente donc une droite et réciproquement à part l'exception signalée. La mesure de Lebesgue du plan (θ, ρ) induit une mesure $dD=d\theta\, d\rho$ sur l'ensemble des droites D.

Soit C une courbe plane bornée dans le plan (x, y), localement rectifiable. Soit $\Omega=\Omega(C)$ l'ensemble des droites qui intersectent C et soit Ω_k le sous-ensemble des droites qui coupent C en k points exactement ($k\geqslant 1$). Soit enfin :

$$\omega=\operatorname{mes}\Omega \qquad \text{et} \qquad \omega_k=\operatorname{mes}\Omega_k.$$

On supposera toujours que $\omega_\infty=0$. Cette condition est d'ailleurs automatiquement remplie pour les spirales qui nous intéressent.

Un théorème classique de STEINHAUS [11] (*voir* aussi SANTALO [10]) montre que la longueur $l(C)$ de C est donnée par :

$$l(C)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\omega_k.$$

Appliquée au contour fermé ∂K frontière de l'enveloppe convexe K de C, cette formule s'écrit :

$$l(\partial K)=\frac{1}{2}2\,\omega=\omega,$$

d'où :

$$\frac{2\,l(C)}{l(\partial K)}=\sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{\omega_k}{\omega}.$$

Si on interprète ω_k/ω comme la probabilité pour qu'une droite intersectant C coupe C en k points exactement, on voit que $2\,l(C)/l(\partial K)$ est l'espérance mathématique du nombre de points d'intersection de C avec une droite aléatoire. Ainsi la longueur $l(C)$ est liée de façon précise au nombre moyen de points d'intersection avec une droite. Il s'ensuit que la dimension de STEINHAUS définie ci-dessous est elle aussi liée à cette même quantité.

Supposons que $l(C)$ soit infini. Il se peut qu'il existe alors un nombre réel α (nécessairement >1) tel que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,(\omega_k)^{\alpha}<\infty.$$

Ce nombre est de « dimension α » car :

$$\omega_k=\int_{\Omega_k} d\theta\,d\rho,$$

a la dimension d'une longueur. Nous appellerons dimension de STEINHAUS de C le nombre :

$$\begin{aligned}\dim_S C&=\inf\{\,\alpha\geqslant 1/\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} k\,(\omega_k)^{\alpha}<\infty\,\}\\ &=\sup\{\,\alpha\geqslant 1/\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} k\,(\omega_k)^{\alpha}=\infty\,\}.\end{aligned}$$

Une courbe de longueur finie est donc de dimension unité. Un calcul simple montre que la spirale $\rho=(1+\theta)^{-a}$ a pour dimension $\max\{1,\,2(1+a)^{-1}\}$ et que la spirale $\rho=(\log(2+\theta))^{-1}$ a pour dimension 2. Sur ces exemples, les dimensions de BOULIGAND d'une part et de STEINHAUS d'autre part coïncident. Ce résultat se généralise ainsi qu'on va le voir au paragraphe suivant.

4. Lien entre les deux dimensions

THÉORÈME. — *Soit Γ une spirale localement convexe définie par son équation polaire $\rho = f(\theta)$ où f est réelle, définie continue pour $\theta \geqslant 0$, tendant vers zéro pour θ infini et convexe. Alors :*

$$\dim_B(\Gamma) = \dim_S(\Gamma).$$

La démonstration du théorème se fait à l'aide des deux lemmes suivants :

LEMME 1. — *Soit Γ la spirale $\rho = f(\theta)$ où f est continue et décroissante vers* 0. *On suppose que Γ est localemenr convexe. Soit :*

$$\delta_k = f(2k\pi) - f(2(k+1)\pi).$$

Alors :

$$\dim_s(\Gamma) = \inf\{\alpha \geqslant 1 / \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} k\,\delta_k^{\alpha} < \infty\}.$$

Démonstration. — Soit Ω'_k l'ensemble des droites $x\cos\theta + y\sin\theta - \rho = 0$, avec $f(2(k+1)\pi) \leqslant \rho < f(2k\pi)$. La convexité locale de Γ entraîne que l'ensemble des points situés entre Ox et une quelconque demi-spire $(k\pi \leqslant \theta \leqslant (k+1)\pi)$ est convexe. On en déduit que les droites de Ω'_k coupent la première spire $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$ en 1 ou 2 points, les $(k-1)$ spires suivantes en deux points, et la spire d'ordre $k+1$ $(2k\pi \leqslant \theta < 2(k+1)\pi)$ en 0,1, 2 ou 3 points. Les spires d'ordre supérieur ne sont pas coupées. Il y a donc au moins $2k-1$, au plus $2k+3$ points d'intersection.

Soit Ω_j l'ensemble des droites qui intéressent Γ en j points exactement. Alors :

$$\Omega_{2k} \subset \Omega'_{k-1} \cup \Omega'_k,$$
$$\Omega_{2k+1} \subset \Omega'_{k-1} \cup \Omega'_k \cup \Omega'_{k+1},$$

et comme $\operatorname{mes}\Omega'_k = 2\pi\delta_k$:

$$\omega_{2k} \leqslant 2\pi(\delta_{k+1} + \delta_k),$$
$$\omega_{2k+1} \leqslant 2\pi(\delta_{k-1} + \delta_k + \delta_{k+1}).$$

On tire de ces deux inégalités :

$$2k\,\omega_{2k}^{\alpha} + (2k+1)\,\omega_{2k+1}^{\alpha} \leqslant \lambda_1 \textstyle\sum_{i=k-1}^{k+1} i\,\delta_i^{\alpha} \qquad (\alpha \geqslant 1),$$

λ_1 constante. Ceci assure que :

$$\dim_s(\Gamma) \leqslant \inf\{\alpha \geqslant 1 / \textstyle\sum_1^\infty k\delta_k^\alpha < +\infty\}.$$

Pour l'inégalité dans l'autre sens, on observe que :

$$\Omega'_k \subset \textstyle\bigcup_{2k-1}^{2k+3} \Omega_i,$$

d'où l'on tire :

$$k\delta_k^\alpha \leqslant \lambda_2 \textstyle\sum_{2k+1}^{2k+3} i\,\omega_i^\alpha,$$

λ_2 constante.

LEMME 2. — *Soit* (ε_k) *une suite décroissante tendant vers zéro. On pose :*

$$D_1 = \inf\{\alpha \mid \textstyle\sum_1^\infty k\,\varepsilon_k^\alpha < +\infty\},$$
$$D_2 = 2\inf\{\alpha \mid \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{\alpha-1} \textstyle\sum_k^\infty \varepsilon_i = 0\},$$
$$D_3 = \inf\{\alpha \mid \lim_{k\to\infty} k\,\varepsilon_k^{\alpha-1} \textstyle\sum_k^\infty \varepsilon_i = 0\},$$
$$D_4 = \inf\{\alpha \mid \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k^{\alpha-1} \textstyle\sum_1^k i\,\varepsilon_i = 0\},$$
$$D_5 = \inf\{\alpha \mid \lim_{k\to\infty} k^2 \varepsilon_k^\alpha = 0\}.$$

Alors $D_1 = D_5$.

Si de plus :

$$\textstyle\sum_1^\infty \varepsilon_k < +\infty \qquad \textit{et} \qquad \sum_1^\infty k\,\varepsilon_k = +\infty,$$

alors :

$$1 \leqslant D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 \leqslant 2.$$

Démonstration. — (i) $\sum_1^\infty k\,\varepsilon_k^\alpha < +\infty \Rightarrow k\,\varepsilon_k^\alpha = O(k^{-1})$, donc $D_5 \leqslant D_1$.

Inversement :

$$k^2 \varepsilon_k^\alpha \to 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \beta > \alpha : \ k\,\varepsilon_k^\beta = O(k^{1-2\beta/\alpha}),$$

dont la somme converge. Donc $D_1 \leqslant D_5$.

(ii) (*a*) L'égalité :

$$\inf\{\alpha / \varepsilon_k^{\alpha-1} \textstyle\sum_k^\infty \varepsilon_i \to 0\} = \inf\{\alpha / k\,\varepsilon_k^\alpha \to 0\}$$

a été prouvée dans [13]. A l'aide de transformations mineures, on en tire $D_2 = D_5$.

(*b*) L'inégalité :

$$(2k)^2\,\varepsilon_{2k}^{\alpha}<4k\,\varepsilon_k^{\alpha-1}\sum_k^{\alpha}\varepsilon_i,$$

valable pour tout $\alpha\geqslant 1$, entraîne :

$$D_5\leqslant \max(1,\,D_3).$$

Mais si $D_5<1$, il existe $\alpha<1$ tel que :

$$\varepsilon_k=O(k^{-2/\alpha}),$$

et alors $\Sigma k\,\varepsilon_k$ converge, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $1\leqslant D_5\leqslant D_3$.

D'autre part :

$$\sum_1^{\infty}\varepsilon_k<+\infty\quad\Rightarrow\quad\varepsilon_k=O(k^{-1})\qquad\text{donc}\quad D_5\leqslant 2,$$
$$\text{et}\qquad k\,\varepsilon_k=O(1)\qquad\text{donc}\quad D_3\leqslant 2.$$

Pour démontrer que $D_3\leqslant D_5$, on peut donc se restreindre au cas :

$$D_5<2,$$

choisir $\alpha\in]D_5,\,2[$, et constater que :

$$\varepsilon_k=O(k^{-2/\alpha})\quad\Rightarrow\quad\varepsilon_k^{\alpha-1}\sum_k^{\infty}\varepsilon_i=O(k^{-2(\alpha-1)/\alpha+1-2/\alpha})=O(k^{-1}).$$

Donc $\alpha\geqslant D_3$ d'où $D_3\leqslant D_5$, puis $D_3=D_5$.

(*c*) $D_5\leqslant D_4$ provient directement de :

$$\frac{1}{2}k^2\,\varepsilon_k^{\alpha}<\varepsilon_k^{\alpha}\sum_1^k i\leqslant\varepsilon_k^{\alpha-1}\sum_1^k i\,\varepsilon_i,$$

et $D_4\leqslant D_5$ de :

$$\varepsilon_k=O(k^{-2/\alpha})\quad\Rightarrow\quad\varepsilon_k^{\alpha-1}\sum_1^k i\,\varepsilon_i=O(k^{-2(\alpha-1)/\alpha+2-2/\alpha})=O(1),$$

valable si $\alpha>1$.

Démonstration du théorème. — D'après les hypothèses faites sur la fonction f, la partie de courbe Γ_k correspondant à $2k\pi\leqslant\theta\leqslant 2(k+1)\pi$ est un arc simple de Jordan de longueur finie L_k, telle que :

$$2\pi f(2(k+1)\pi)\leqslant L_k\leqslant 2\pi f(2k\pi).$$

Soit $\Gamma_k(r)$ l'ensemble des points du plan à distance moindre que r de Γ_k. Il existe une constante C (inférieure à 9π) telle que :

$$\forall r < L_k : \quad |\Gamma_k(r)| \leqslant C L_k r$$

(pour le voir : en posant M_r le plus grand nombre de boules disjointes de rayon r centrées en Γ_k, montrer que $M_r \leqslant L_k/r$, et $|\Gamma_k(r)| \leqslant 9\pi r^2 M_r$).

Fixons $r \in]0, f(0)[$, et soit k l'entier tel que :

$$\delta_{k+1} \leqslant r < \delta_k,$$

où $\delta_k = f(2k\pi) - f(2(k+1)\pi)$. k est unique, car la convexité de f entraîne la décroissance de δ_k, propriété fondamentale pour la suite.

L'ensemble $\Gamma(r)$ contient tous les points à distance $\leqslant f(2(k+1)\pi)$ de l'origine. D'autre part, tout point de $\Gamma(r)$ est, soit à distance $\leqslant r + f(2(k+1)\pi)$ de 0, soit à distance $\leqslant r$ d'un Γ_i, $0 \leqslant i \leqslant k$. On en déduit les inégalités suivantes :

$$\pi f(2(k+1)\pi)^2 \leqslant |\Gamma(r)| \leqslant \pi[f(2(k+1)\pi) + r]^2 + \textstyle\sum_{i=0}^{k} |\Gamma_i(r)|.$$

En utilisant le fait que $f(2k\pi) = \sum_{i=k}^{\infty} \delta_i$, l'inégalité de gauche peut s'écrire :

$$|\Gamma(r)| \geqslant \pi (\textstyle\sum_{k+1}^{\infty} \delta_i)^2$$

et donc, pour tout α, $0 < \alpha < 2$:

$$\begin{aligned} r^{\alpha-2} |\Gamma(r)| &\geqslant \pi \delta_k^{\alpha-2} (\textstyle\sum_{k+1}^{\infty} \delta_i)^2 \\ &= \pi (\delta_k^{\alpha/2-1} \textstyle\sum_k^{\infty} \delta_i - \delta_k^{\alpha/2})^2. \end{aligned}$$

Comme $\delta_k^{\alpha/2}$ tend vers zéro, ceci assure que :

$$\dim_B(\Gamma) \geqslant D_2,$$

en reprenant les notations du lemme 2.

Quant à l'inégalité de droite, elle devient :

$$|\Gamma(r)| \leqslant \pi[\textstyle\sum_{k+1}^{\infty} \delta_i + r]^2 + 2\pi C r [\textstyle\sum_0^k (i+1)\delta_i + (k+1) \textstyle\sum_{k+1}^{\infty} \delta_i]$$

et donc pour tout α, $1 < \alpha < 2$:

$$\begin{aligned} r^{\alpha-2} |\Gamma(r)| &\leqslant \pi (\delta_{k+1}^{\alpha/2-1} \textstyle\sum_{k+1}^{\infty} \delta_i + \delta_k^{\alpha/2})^2 + \\ &\qquad 2\pi C \delta_k^{\alpha-1} [\textstyle\sum_0^k (i+1)\delta_i + (k+1) \textstyle\sum_{k+1}^{\infty} \delta_i] \\ &\leqslant \pi (\delta_{k+1}^{\alpha/2-1} \textstyle\sum_{k+1}^{\infty} \delta_i + \delta_k^{\alpha/2})^2 + 2\pi C \delta_k^{\alpha-1} [\textstyle\sum_0^k i\delta_i + k \textstyle\sum_k^{\infty} \delta_i] + O(\delta_k^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

Or $\sum_0^{\prime} \delta_i = f(0)$ est borné, et $\sum_0^{\prime} i\,\delta_i$ diverge : pour s'en assurer, il suffit d'observer que cette somme est supérieure, à une constante près, à la longueur totale de la spirale. D'après le lemme 2 les quantités D_2, D_3, D_4 sont donc dans [1, 2], et la dernière inégalité prouve que :

$$\dim_B(\Gamma) \leqslant \max(D_2, D_3, D_4) = D_5.$$

Le théorème se déduit alors des lemmes 1 et 2.

RÉFÉRENCES

[1] D'ARCY THOMPSON, On Growth and Form, J. T. BONNER, éd., Cambridge University Press, 1969.

[2] BOREL (E.). — *Éléments de la théorie des ensembles*, Albin-Michel, 1949.

[3] BOULIGAND (G.). — Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble fermé, *Bull. Sc. Math.*, vol. 2, n° 53, 1929, p. 185-192.

[4] COOK (T. A.). — Curves of Life, Dover, 1979.

[5] DEKKING (F. M.) et MENDÈS-FRANCE (M.). — Uniform Distribution Modulo One: a Geometrical Viewpoint, *Jour. für die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. 329, 1981, p. 143-153.

[6] KOLMOGOROV (A. N.) et TIHOMIROV (Y. M.). — ε-Entropy and ε-Capacity of Sets in Functional Spaces, *Amer. Math. Soc. Translations*, vol. 17, série 2, 1961, p. 277-364.

[7] MANDELBROT (B. B.). — Fractals, Form Chance and Dimension, Freeman, 1977.

[8] MENDÈS-FRANCE (M.). — Chaotic Curves, *Luminy symposium on Oscillations*, sept. 1981, J. DEMONGEOT, éd., *Springer Verlag Lecture Notes in Biomathematics* (à paraître).

[9] MENDÈS-FRANCE (M.) et TENENBAUM (G.). — Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro, *Bull. Soc. math. France*, t. 109, 1981, p. 207-215.

[10] SANTALÓ (L.). — Integral Geometry and Geometric Probability, *Encyclopedia of Mathematics*, Addison Wesley, 1976.

[11] STEINHAUS (H.). — Length Shape and Area, *Colloquium Mathematicum*, vol. 3, 1954, p. 1-13.

[12] STEVENS (P. S.). — Les formes dans la nature, Seuil Science Ouverte, 1978.

[13] TRICOT (C.). — Douze définitions de la densité logarithmique, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 293, série I, 1981, p. 549-552.

Packing measure, and its evaluation for a Brownian path

by

S. James Taylor and Claude Tricot
Department of Pure Mathematics
University of Liverpool.

1. Introduction The size of sets of zero Lebesgue measure in $\mathbb{R}^d$ can be investigated by several distinct techniques. The first of these to be extensively developed was established by Hausdorff [6]- for a recent account see Rogers [7]. Hausdorff measure is defined using economical covers of a set. For a given monotone function $\phi(s)$, there is a sense in which Hausdorff ϕ-measure is the smallest outer measure determined by ϕ; there are several other measures based on ϕ. In the present paper we define packing ϕ-measure and examine some of its basic properties. We will see that it is the largest of the known ϕ-measures and many of its properties mirror those of Hausdorff measure.

The definition of packing measure has to be given in two stages. In section 3 we consider various pre-measures and eventually choose one of them to generate packing measure in section 5. The other pre-measures will be useful for establishing the properties of $\phi - p(E)$, the ϕ-packing measure. In the theory of Hausdorff measures an essential tool used to prove $\phi - m(E)$ finite and positive is the use of upper density first developed by Frostman [4] and made precise in [8]. The analogous theorem for packing measure, using lower density, is developed in section 5 and used for immediate calculations. For example, the classical Cantor set in $[0, 1]$ has finite positive packing measure with respect to $\phi(s) = s^\alpha$, $\alpha = \log 2/\log 3$, so that this set is so regular that the correct

ϕ giving finite positive measure is the same for both Hausdorff and packing measure.

The notion of strong and weak ϕ-variation of a function $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ was defined by Goffman and Loughlin in [5]. Just as the weak variation is related to Hausdorff measure, we are able to show, in section 4, that ϕ -packing measure of the image of f is bounded by the limiting strong ϕ-variation. The strong variation of Brownian motion was obtained in [11] so this relationship gives an upper bound for the packing measure of a Brownian trajectory.

In [2] it was shown that $\phi(s) = s^2 \log|\log s|$ is the correct function to give the Hausdorff measure of a Brownian trajectory in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$. In the final section 7 we show that $\psi(s) = s^2/\log|\log s|$ is the correct function to make the ψ-packing measure of the trajectory finite and positive. The proof requires a new analysis of the small values of the sojourn time in a ball for the process. This is carried out in section 6, and leads to Theorem 6.7 describing the lower asymptotic behaviour of the sojourn time. In order to set the scene we start in section 2 by developing notation and describing the main results for Hausdorff measure for which we can obtain analogues.

2. <u>Measures of Hausdorff type</u> We will restrict our attention to subsets of Euclidean space $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$. Some, but not all, of our results extend to more general metric spaces but we will use the structure of $\mathbb{R}^d$ and not concern ourselves with the validity of extensions. We use $|E|$ to denote the Lebesgue outer measure of E and $||x||$ to denote the distance from 0 to $x \in \mathbb{R}^d$. We denote the open ball centre at x and radius $r > 0$ by

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : ||x - y|| < r\} .$$

Let Γ^* stand for the class of dyadic cubes in $\mathbb{R}^d$. $C \in \Gamma^*$ if it has side length 2^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, and each of its projections $\mathrm{proj}_i C$ on the ith axis is a $\frac{1}{2}$-open interval of the form $[k_i 2^{-n}, (k_i + 1)2^{-n})$ with $k_i \in \mathbb{Z}$. For $x \in \mathbb{R}^d$, let $u_n(x)$ be the unique dyadic cube of side 2^{-n} containing x.

We also need the larger class Γ^{**} of semi-dyadic cubes: $C \in \Gamma^{**}$ if it has side length 2^{-n} and $\mathrm{proj}_i C = [\frac{1}{2}k_i 2^{-n}, (\frac{1}{2}k_i + 1)2^{-n})$ with $k_i \in \mathbb{Z}$. Each $x \in \mathbb{R}^d$ belongs to 2^d cubes of side 2^{-n} in Γ^{**}: of these we denote by $v_n(x)$ the unique cube in Γ^{**} of side 2^{-n} whose complement is at distance 2^{-n-2} from $u_{n+2}(x)$. The coordinate of the centre of $v_n(x)$ is within 2^{-n-2} of the corresponding coordinate of x.

Φ denotes the class of functions $\phi : (0, 1) \to \mathbb{R}$ which are increasing continuous with $\phi(s) \to 0$ as $s \downarrow 0$, and satisfy a smoothness condition:

(1) There exists $c_0 > 0$ such that $\phi(2x) < c_0\phi(x)$ for $0 < x < \frac{1}{2}$.

The identity function $e(x) = x$ and each of its positive powers is clearly in Φ.

Suppose $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ is the family of bounded subsets of $\mathbb{R}^d$. We introduce a partial order in the class of set functions

$$F : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Put

$$F_1 \preccurlyeq F_2$$

if there is a finite $\lambda > 0$ such that

$$F_1(E) \leq \lambda F_2(E) \quad \text{for all } E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

and write

$$F_1 \asymp F_2$$

and say F_1 and F_2 are equivalent if both $F_1 \preccurlyeq F_2$ and $F_2 \preccurlyeq F_1$.

$d(E)$ denotes the diameter of $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. If $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, put

$$\phi(\mathcal{R}) = \sum_{E \in \mathcal{R}} \phi(d(E))$$

and

$$\|\mathcal{R}\| = \sup\{d(E) : E \in \mathcal{R}\}.$$

$\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ is a covering family if, for each $\varepsilon > 0$, there is a subfamily $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$ with $\|\mathcal{R}\| < \varepsilon$ and $\mathbb{R}^d \subset \bigcup_{E \in \mathcal{R}} E$. Clearly this property is valid for Γ^* or Γ^{**} or $\mathcal{S}$ the family of all open balls. For any covering family $\mathcal{F}$, define

(2) $$\mathcal{F}\phi - m(E) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \{\phi(\mathcal{R}) : \|\mathcal{R}\| > \varepsilon,\ \mathcal{R} \subset \mathcal{F},\ E \subset \bigcup_{F \in \mathcal{R}} F\}.$$

Whenever $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}\phi - m$ is the classical ϕ-measure defined by Hausdorff which we will denote by $\phi - m$. When $\mathcal{F} = \mathcal{S}$ we obtain spherical Hausdorff measure. Since every bounded set is contained in a ball of double the diameter (1) implies immediately

(3) $$\mathcal{S}\phi - m \asymp \phi - m .$$

When $\mathcal{F} = \Gamma^*$ we denote $\Gamma^*\phi - m$ by $\phi - m^*$, and again it is easy to see that

(4) $$\phi - m \asymp \phi - m^* .$$

These restricted Hausdorff measures were first defined and used by Besicovitch. For our present purposes we make two further modifications. Given $E \subset \mathbb{R}^d$, let $\mathcal{S}_E$ be the family of open balls $\{B_r(x) : r > 0,\ x \in E\}$ with centres in E. We again get

(5) $$\phi - m(E) \le \mathcal{S}_E\,\phi - m(E) \le c\,\phi - m(E)$$

for a suitable constant c. Now put

$$\Gamma_E^{**} = \{v_n(x) : n \in \mathbb{N},\ x \in E\},$$

and denote $\Gamma_E^{**}\phi - m(E)$ by $\phi - m^{**}(E)$. It again follows that

(6) $$\phi - m \asymp \phi - m^{**} .$$

We note that each of the above set functions is defined on all subsets of $\mathbb{R}^d$, takes values in $[0,+\infty]$ and is a metric outer measure in the sense of Carathéodory. For each of them there is a class of measurable subsets $\mathcal{M}$ and the restriction of the set function to $\mathcal{M}$ is a σ-additive measure. Further $\mathcal{M}$ contains the Borel subsets of $\mathbb{R}^d$. The rarefaction index corresponding to Hausdorff measure is usually called Hausdorff-Besicovitch dimension, defined by

$$\dim E = \inf\{a > 0 : e^a - m(E) = 0\} = \sup\{a > 0 : e^a - m(E) = +\infty\} .$$

Clearly (3), (4), (5) and (6) show that any of the above set functions would have given the same value of $\dim E$. However if $\dim E = \delta > 0$, then $e^\delta - m(E)$ can be zero, finite and positive, or $+\infty$. Only if

$$0 < e^\delta - m(E) < +\infty$$

do we say that $\phi(s) = s^\delta$ is the correct function in Φ for giving the Hausdorff measure of E.

If we want to prove that $\phi - m(E) < +\infty$ it is sufficient to find K such that, for each $\varepsilon > 0$ there is a cover $\mathcal{R}$ of E for which $\|\mathcal{R}\| < \varepsilon$ and $\phi(\mathcal{R}) \le K < +\infty$. Using the definition (2) it is harder to show that $\phi - m(E) > 0$ for now we have to find $c > 0$ such that $\phi(\mathcal{R}) \ge c$ for every possible cover of E. To avoid the need to consider all covers the following density theorem, which is immediately deducible from the results in [8] is a useful tool.

THEOREM 2.1. For a given $\phi \in \Phi$, there are constants c_1, c_2 such that, for all $E \subset \mathbb{R}^d$ and every finite Borel measure μ in $\mathbb{R}^d$

$$c_1\mu(E) \inf_{x\in E} \left\{ \liminf_{n\to\infty} \frac{\phi(2^{-n})}{\mu[u_n(x)]} \right\} \le \phi - m(E)$$

$$\le c_2\mu(\mathbb{R}^d) \sup_{x\in E} \left\{ \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \inf_{\substack{x\in u \\ d(u)\le\varepsilon}} \frac{\phi(d(u))}{\mu(u)} \right\}$$

where the last infimum is taken over non-degenerate rectangles u containing x with diameter at most ε.

Variants of this theorem can be obtained by using (3) to (6) to replace $\phi - m$ by one of the restricted measures, by replacing $u_n(x)$ by $v_n(x)$ or by replacing the lim inf by $\liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\phi(\varepsilon)}{\mu(B_\varepsilon(x))}$.

A necessary tool for examining Brownian paths will be a density theorem for packing measure. Our choice of precise definition will ensure that such a density theorem is valid. We would point out that, in terms of a given $\phi \in \Phi$, there are other measures which lie between $\phi - m$ and $\phi - p$. No density theorem is known for these, and in some cases one can show that none is valid.

As usual we use c to denote a finite positive constant whose value is unimportant and may change from line to line.

3. Packing pre-measures Our first step is to consider several ways of modifying definition (2) by changing inf to sup and replacing covers of E by packings of disjoint sets related to E. We again assume $\mathcal{F}$ is a covering family of bounded sets in $\mathbb{R}^d$. We say $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ is a packing of E if, for all $F \in \mathcal{R}$, $\bar{E} \cap \bar{F} \ne \emptyset$ and the sets in $\mathcal{R}$ are disjoint. Put

$$(7)\quad \mathcal{F}\phi - P(E) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup\{\phi(\mathcal{R}) : \|\mathcal{R}\| \le \varepsilon, \mathcal{R} \subset \mathcal{F}, \mathcal{R} \text{ is a packing of } E\}.$$

If we made no restriction on $\mathcal{F}$, this would not be a useful definition, because near any $x \in E$ one could fit in an arbitrary number of disjoint sets of diameter $\varepsilon > 0$ having x in their closure. This would give a value $+\infty$ even for the singleton $\{x\}$. In [15], the definition (7) was used with $F = \mathcal{S}$ the class of open balls. That definition is now denoted

$$\mathcal{S}\phi - P(E) = \phi - Q(E),$$

but we will not adopt it in this paper for reasons which become evident later. Different natural choices of $\mathcal{F}$ yield pre-measures and measures which are not equivalent, although we will see that they all lead to the same rarefaction index Δ discussed in [14].

It turns out that we not only need to restrict the family $\mathcal{F}$ in (7) but also demand that E contains a point near the 'centre' of each set used in packing. We consider three further possibilities for $\mathcal{F}$.

(i) $\mathcal{S}_E$ is the family of balls $B_r(x)$, $r > 0$, $x \in E$.

$$\mathcal{S}_E\phi - P(E) \text{ is denoted by } \phi - P(E).$$

(ii) $\Gamma_E^* = \{u_n(x) \,;\, n \in \mathbb{N}, x \in E\} \subset \Gamma^*$

$$\Gamma_E^*\phi - P(E) \text{ is denoted by } \phi - P^*(E).$$

(iii) $\Gamma_E^{**} = \{v_n(x) : n \in \mathbb{N}, x \in E\} \subset \Gamma^{**}$

$$\Gamma_E^{**}\phi - P(E) \text{ is denoted by } \phi - P^{**}(E).$$

We will discard $\phi - Q$ and $\phi - P^*$ and show that $\phi - P$ and $\phi - P^{**}$ are equivalent set functions. Our final definition will be based on $\phi - P$ as this is clearly invariant under translation. $\phi - P^{**}$ will be useful as an auxiliary set function. The first step is to clarify the simple properties of the set functions based on (7) which we have defined.

LEMMA 3.1. Let $\tau = \tau_\phi$ be any one of the set functions $\phi - P$, $\phi - P^*$, $\phi - P^{**}$, $\phi - Q$. Then

(i) τ is monotone: $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \tau(E_1) \leq \tau(E_2)$;

(ii) τ is subadditive: $\tau(E_1 \cup E_2) \leq \tau(E_1) + \tau(E_2)$;

(iii) if $\tau_\phi(E) = 0$, there exists $\psi \in \Phi$ such that $\tau_\psi(E) = 0$ and

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{\phi(s)}{\psi(s)} = 0 ;$$

(iv) if $\tau_\phi(E) = +\infty$, there exists $\psi \in \Phi$ such that $\tau_\psi(E) = +\infty$ and

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{\psi(s)}{\phi(s)} = 0 ;$$

(v) if $E = \{x\}$, then $\tau_\phi(E) = 0$ for all ϕ ;

(vi) if E is a bounded open set in $\mathbb{R}^d$ and $\phi(s) = s^d$, then

$$0 < \tau_\phi(E) < +\infty .$$

<u>Remark</u> All the above are true for Hausdorff measure and its variants. For Hausdorff measure (ii) can be strengthened to $\tau\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(E_i)$. This is false in the present case. Consider $\phi(s) = s^{1/2}$ and $E = Q \cap [0, 1]$, the set of rationals in $[0, 1]$. Since $\tau_\phi(E) = \tau_\phi([0, 1])$, $\tau_\phi(E) = +\infty$, but E is a countable union of singletons. Thus τ is not an outer measure.

The proofs for Lemma 3.1 follow immediately from the definition.

LEMMA 3.2. If τ is one of $\phi - P$, $\phi - Q$, then for all $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\tau(E) = \tau(\bar{E})$.

Proof From (i) of Lemma 3.1, $\tau(E) \le \tau(\bar{E})$. For $\phi - Q$, any packing of $\bar{E}$ is also a packing of E so $\tau(E) \ge \tau(\bar{E})$. Given $\varepsilon > 0$, for any sequence $\{r_k\}$ of positive reals we can define a sequence $\{r'_k\}$ with $0 < r'_k < r_k$ and $\Sigma\phi(2r_k) \le (1 + \varepsilon)\Sigma\phi(2r'_k)$. Hence if $\mathcal{R}$ is any family of disjoint open balls of radii r_k and centre $x_k \in \bar{E}$, we can find a family $\mathcal{R}'$ of balls radii r'_k centred at $x'_k \in E$ such that $B_{r'_k}(x'_k) \subset B_{r_k}(x_k)$. Since these are disjoint we get $\phi - P(\bar{E}) \le (1 + \varepsilon)\phi - P(E)$, and this is true for all $\varepsilon > 0$.

Remark Consider the case $\phi(s) = s^\alpha$, $\alpha < 1$ and subsets of $(0, 1)$. If E is any infinite set in $(0, 1)$ we can order the complementary intervals J_i of $(0, 1)\backslash\bar{E}$ so that $|J_i| = c_i$ decreases. If $|\bar{E}| = 0$ a simple calculation shows

(i) if $\Sigma\, c_i^\alpha$ diverges then $\phi - Q(E) = +\infty$;

(ii) if $\Sigma\, c_i^\alpha$ diverges then $\phi - Q(E) = 0$.

In fact, if $\phi(s)$ is concave, there are no subsets of the line with Lebesgue measure zero and finite positive $\phi - Q$ measure. This is the main reason we discard $\phi - Q$ as a candidate for packing pre-measure.

LEMMA 3.3
$$\phi - P \asymp \phi - P^{**} \lesssim \phi - P^{*} \qquad \text{and}$$
$$\phi - P \lesssim \phi - Q \ .$$

Proof From the definition of $v_n(x)$ it follows that

$$B_{2^{-n-2}}(x) \subset v_n(x) \subset B_{\rho 2^{-n}}(x)$$

where $\rho = n^{1/2}$ is the diameter of a unit cube. Condition (1) now implies the first equivalence $\phi - P \asymp \phi - P^{**}$. Since every semi-dyadic $v_n(x)$ contains the dyadic $u_{n+1}(x)$ we get $\phi - P^{**} \lesssim \phi - P^{*}$. The last inequality is obvious.

<u>Example 3.4</u>. Let E_0 be the perfect symmetric set in $[0, 1]$ with ratio 1/4. That is

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R} : x = \Sigma a_n 4^{-n} : a_n = 0 \text{ or } 3\} .$$

There are three types of dyadic interval $u = [k2^{-n}, (k + 1)2^{-n})$

(a) $u^0 \cap E_0 \neq \phi$ (b) $u \cap E_0 = \phi$

(c) $u \cap E_0 = \{k2^{-n}\}$. Call these $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$.

Given $\varepsilon < 1$, $x \in E_0$ there is a $u \in \mathcal{F}_1$ such that

$$u \subset B_\varepsilon(x) \quad \text{and} \quad |u| > \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

It follows that $\phi - P(E_0) \leq c_0^2 \mathcal{F}_1\phi - P(E_0)$. But the structure of E_0 tells us that

$$\mathcal{F}_1 e^{\frac{1}{2}} - P(E_0) = 1 \quad \text{so} \quad e^{\frac{1}{2}} - P(E_0) < +\infty .$$

Now the complementary set $[0, 1]\backslash E_0$ contains 2^n dyadic intervals of length 2^{-2n}; of these 2^{n-1} are in $\mathcal{F}_3$ and are disjoint for different values of n. Hence $e^{\frac{1}{2}} - P^*(E_0) = +\infty$, so $\phi - P$ and $\phi - P^*$ are not equivalent. In fact $\phi - P^*(E_0) = +\infty$ for any $\phi(s) = s^{\frac{1}{2}}/g(s)$ where $\sum \frac{1}{g(2^{-2n})} = +\infty$.

<u>Example 3.5</u> Let E_1 be the set E_0 less the countable set of end-points of complementary intervals. Now all the dyadic intervals meeting E_1 are in $\mathcal{F}_1$ so $e^{\frac{1}{2}} - P^*(E_1) < +\infty$. However $\phi - Q(E_1) = +\infty$ if $\phi(s) = s^{\frac{1}{2}}/g(s)$ and $\sum \frac{1}{g(2^{-2n})}$ diverges. Thus $\phi - P^*$ is not equivalent to $\phi - Q$. This example also shows that Lemma 3.2 is not true for $\phi - P^*$.

In [10] we noted that the gap between $\phi - m$ and generalised ψ-capacity in the sense of Frostman [4] was about a factor $|\log s|$. The same phenomenon exhibits itself concerning the maximum 'gap' between $\phi - P$, $\phi - P^*$ and $\phi - Q$. We now make this precise

LEMMA 3.6. Let $g : (0, 1) \to \mathbb{R}^+$ be such that $\sum \frac{1}{g(2^{-n})} < +\infty$ and ϕ, $\phi|g = \psi \in \Phi$. Then

$$\phi - P(E) < +\infty \Rightarrow \psi - Q(E) = 0 \ .$$

Proof Let $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\delta > 0$, $\mathcal{R}$ be a family of disjoint balls at distance 0 from E, $\|\mathcal{R}\| \leq \delta$. Suppose k_n is the number of balls in $\mathcal{R}$ of radius between 2^{-n} and 2^{-n+1}. Each of these balls meets some $B_{2^{-n}}(x)$ for $x \in E$. Now there is a constant λ_d such that no ball of radius 2^{-n} can meet more than λ_d disjoint balls of radius $\geq 2^{-n}$. Assume δ small enough to ensure that, for $2^{-n} < \delta$,

$$2\phi - P(E) \geq \phi(2^{-n})M_n$$

where M_n is the maximum number of disjoint open balls of radius 2^{-n} centred in E. It follows that

$$k_n \leq \lambda_d M_n \leq 2 \cdot \lambda_d \cdot \phi - P(E) \,/\, \phi(2^{-n}) \quad .$$

Now

$$\begin{aligned} \psi(\mathcal{R}) &\leq \sum k_n \phi(2^{-n+1})/g(2^{-n+1}) \\ &\leq c_0 \lambda_d . 2 . \phi - P(E) \sum \frac{1}{g(2^{-n})} \quad . \end{aligned}$$

Since this series converges, the sum of the tail $\to 0$ as $\delta \downarrow 0$, so $\psi - Q(E) = 0$.

Remark A simpler version of the same argument shows that $\phi - P(E) < +\infty \Rightarrow \psi - P^*(E) = 0$.

COROLLARY 3.7. Under the conditions of Lemma 3.6.

$$\psi - Q \preccurlyeq \phi - P \text{ and } \psi - P^* \preccurlyeq \phi - P.$$

Using any of the above definitions we could use the normal technique to obtain a rarefaction index. The following result shows that we always get the same index :

COROLLARY 3.8 For all $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, there is an index Δ such that $0 \leq \Delta \leq d$ and

(i) if $0 < \Delta < \Delta$, $e^{\delta} - P(E) = e^{\delta} - P^{*}(E) = e^{\delta} - P^{**}(E) = e^{\delta} - Q(E) = +\infty$;

(ii) if $\delta > \Delta$, $e^{\delta} - P(E) = e^{\delta} - P^{*}(E) = e^{\delta} - P^{**}(E) = e^{\delta} - Q(E) = 0$.

For subsets of $\mathbb{R}^1$, there are many more equivalent definitions of Δ, see Tricot [14].

Remark A different definition of packing pre-measure is given by Bruneau [1, p.140]. In general this will lead to a rarefaction index distinct from Δ, so we do not discuss it in this paper. We also note that our definition of $\phi - P$ (and of $\phi - p$, see section 5) was first considered for subsets of $\mathbb{R}$ in Tricot [13, p.145].

4. Relation with strong variation

Suppose $f : I = [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ and π is a dissection of $[0, 1]$

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1, \qquad \sigma(\pi) = \max(x_i - x_{i-1}).$$

Define the strong ϕ-variation $W_\phi(f)$ and limiting strong ϕ-variation $V_\phi(f)$ by

$$(8) \qquad W_\phi(f) = \sup_\pi \sum_{i=1}^{n} \phi(\|f(x_i) - f(x_{i-1})\|),$$

$$(9) \qquad V_\phi(f) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\sigma(\pi)<\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \phi(\|f(x_i) - f(x_{i-1})\|).$$

In the present section we compare these variations with $\phi - P(f(I))$. The first result is immediate.

LEMMA 4.1 Suppose f is bounded, and $\phi \in \Phi$ is defined and increasing on $\left[0, 2\|f\|\right]$. Then

$$\phi - P(f(I)) \le 2c_0 W_\phi(f) .$$

Proof If $\mathcal{R}$ is a disjoint family of open balls $B_1, B_2, \dots, B_n$ with centres $y_i = f(x_i)$ in their natural order, then

$$d(B_i) \le 2\min(\|y_i - y_{i-1}\|, \|y_{i+1} - y_i\|) \quad \text{if } 2 \le i \le n-1$$

$$d(B_1) \le 2\|y_1 - y_2\|, \qquad d(B_n) \le 2\|y_n - y_{n-1}\|.$$

Now use (1) and (8) to give

$$\phi(\mathcal{R}) \le 2c_0 \sum_{i=1}^{n} \phi(\|y_i - y_{i-1}\|) \le 2c_0 W_\phi(f).$$

But $\phi - P(f(I)) \le \sup \phi(\mathcal{R})$ over all disjoint families $\mathcal{R}$, so the Lemma is established.

We now impose a convexity condition.

LEMMA 4.2 Suppose that, for all $x, y \in (0, \frac{1}{2})$

(10) $$\phi(x + y) \le \phi(x) + \phi(y) ;$$

Then $$\phi - P(f(I)) \le 2c_0 V_\phi(f) .$$

<u>Proof</u> Given $\varepsilon > 0$, let $\mathcal{R}$ be a disjoint family of balls with centres $y_i = f(x_i)$ and $x_i < x_{i+1}$. Add points to the dissection to give $x'_0 = 0 < x'_1 < \ldots < x'_N = 1$ a new dissection π' with $\sigma(\pi') < \varepsilon$ and $\{x'_j\} \supset \{x_i\}$. Now

$$\|x_i - x_{i-1}\| \le \sum_{x_{i-1} \le x_{j-1} < x_i} \|x_j - x_{j-1}\|$$

so the concavity of ϕ, now gives for each $\varepsilon > 0$

$$\phi(\mathcal{R}) \le 2c_0 \sum_{j=1}^{N} \phi(\|f(x'_j) - f(x'_{j-1})\|)$$

$$\le 2c_0 \sup_{\sigma(\pi')<\varepsilon} \sum_{j=1}^{N} \phi(\|f(x'_j) - f(x'_{j-1})\|)$$

and the result follows on letting $\varepsilon \downarrow 0$.

The condition (10) holds for $\phi(s) = s^\alpha$ $(\alpha \le 1)$ but it is not true for $\alpha > 1$. In our application (10) will not be true. If we assume

(11) $$\phi(x + y) \ge \phi(x) + \phi(y) \quad \text{for all } x, y \in (0, \tfrac{1}{2})$$

we can make progress but the argument needed is more complicated.

LEMMA 4.3 Suppose f is continuous and nowhere constant and ϕ satisfies (11): then

$$\phi - P(f(I) \le c_0 V_\phi(f) .$$

<u>Proof</u> Define $u : I \times (0, 1) \to I$ by

$$u(x, s) = -x + \sup\{y : x \le y \le 1 \text{ and } f([x, y]) \subset B_s(f(x))\}.$$

As a function of s, u is increasing. Since f is nowhere constant, $\lim_{s \to 0} u(x, s) = 0$ for each $x \in I$. We show

(12) as $s \downarrow 0$, $u(x, s) \to 0$ uniformly for $x \in I$.

Suppose (12) is false, then there is a $c > 0$ and sequences $\{x_n\}$, $\{s_n\}$ with $s_n \to 0$ as $n \to \infty$ and $u(x_n, s_n) > c$. By taking a subsequence we can assume that $x_n \to x_0$. Suppose $0 < \varepsilon < c$. Now

$$\|f(x_0) - f(x_0 + \varepsilon)\| \le \|f(x_0) - f(x_n)\| + \|f(x_n) - f(x_n + \varepsilon)\| + \|f(x_n + \varepsilon) - f(x_0 + \varepsilon)\|$$

$$\text{and} \quad \|f(x_n) - f(x_n + \varepsilon)\| \le s_n,$$

so letting $n \to \infty$ and using the continuity of f,

$$f(x_0) = f(x_0 + \varepsilon)$$

so f is constant on $[x_0, x_0 + c]$. This contradiction establishes (12).

For $\delta > 0$, let $\mathcal{R}$ be a finite family of disjoint open balls B_i of radii $s_i < \delta$ and centre $y_i = f(x_i)$ ordered so that $x_{i-1} < x_i$. Since f is continuous,

$$x_i < x_i + u(x_i, s_i) < x_{i+1}$$

and

$$f(x_i + u(x_i, s_i)) \in F_r(B_i).$$

Hence

$$\phi(2s_i) \le c_0 \phi(\|f(x_i) - f(x_i + u(x_i, s_i))\|).$$

By adding further division points between $x_i + u(x_i, s_i)$ and x_{i+1} if necessary we obtain a partition z_i of I with $0 < z_{i+1} - z_i < \sup_{x \in I} u(x, \delta)$ which becomes small as $\delta \downarrow 0$, by (12). Thus

$$\phi(\mathcal{R}) \leq c_0 \sum \phi(\|f(z_i) - f(z_{i+1})\|)$$

$$\leq c_0(V_\phi(f) + \varepsilon)$$

when δ is small enough. This establishes the lemma.

LEMMA 4.4 Suppose f is continuous and ϕ satisfies (11). For all $\varepsilon > 0$ there is a continous nowhere constant $g : I \to \mathbb{R}^d$ such that

$$f(I) \subset g(I)$$

and
$$V_\phi(g) \leq c_0^2[V_\phi(f) + \varepsilon] .$$

<u>Proof</u> If f is nowhere constant, take $g = f$. Otherwise, let E be the set of points of I where f is locally constant, then $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ where I_n is a maximal closed interval and $f(x) = y_n$ for $x \in I_n$. For $n = 1, 2, \ldots,$ let S_n be a circle in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$, or a line segment described twice in $\mathbb{R}^1$, with perimeter $\phi^{-1}(\varepsilon 2^{-n-2})$, and let $\psi_n : I \to S_n$ be the uniform parametrisation of S_n such that $\psi_n(0) = \psi_n(1) = y_n$. Define g by

for $x \in I \setminus E$, $\quad g(x) = f(x)$

for $x \in I_n = [a_n, b_n]$, $\quad g(x) = \psi_n\left(\dfrac{x - a_n}{b_n - a_n}\right)$.

We only need to estimate the variation of g. For a given dissection π, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$, there are five cases to consider.

(i) $x_i, \; x_{i+1} \in I \setminus E$. Then

$$\phi(\|g(x_{i+1}) - g(x_i)\|) = \phi(\|f(x_{i+1}) - f(x_i)\|).$$

(ii) $x_i \in I \setminus E, \; x_{i+1} \in I_n$ for some n. Then

$$\|g(x_{i+1}) - g(x_i)\| \le 2\max\{\|f(x_i) - f(x_{i+1})\|, \; \phi^{-1}(\varepsilon 2^{-n-2})\}$$

so $$\phi(\|g(x_{i+1}) - g(x_i)\|) \le c_0[\phi(\|f(x_i) - f(x_{i+1})\|) + \varepsilon 2^{-n-2}].$$

(iii) $x_i \in I_n, \; x_{i+1} \in I \setminus E$. Same argument as (ii).

(iv) $x_i \in I_m, \; x_{i+1} \in I_n, \; m \ne n$. The same method as (ii) applied twice gives

$$\phi(\|g(x_{i+1}) - g(x_i)\|) \le c_0^2[\phi(\|f(x_i) - f(x_{i+1})\|) + \varepsilon 2^{-n-2} + \varepsilon 2^{-m-2}].$$

(v) $x_i, \; x_{i+1} \in I_n$. Let j, k be the smallest and largest integers such that $j \le i \le k \Rightarrow x_i \in I_n$. Using (11) gives

$$\sum_{i=j}^{k-1} \phi(\|g(x_{i+1}) - g(x_i)\|) \le \phi\left(\sum_{i=j}^{k-1} \|g(x_{i+1}) - g(x_i)\|\right)$$

$$\le \varepsilon 2^{-n-2}.$$

When we add over i, the term $\varepsilon 2^{-n-2}$ can occur at most three times for a given integer n so

$$\sum_{i=0}^{N-1} \phi(\|g(x_{i+1}) - g(x_i)\|) \le c_0^2\left[\sum_{i=0}^{N-1} \phi(\|f(x_{i+1}) - f(x_i)\|) + \varepsilon\right].$$

This establishes Lemma 4.4.

Putting the last two lemmas together gives:

THEOREM 4.5 Suppose $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ is continuous and $\phi \in \Phi$ satisfies (11), then

$$\phi - P(f(I)) \le c_0^3 V_\phi(f).$$

This theorem is not, in general, sharp. The gap between critical functions ϕ for $\phi - P(f(I))$ and $V_\phi(f)$ can be arbitrarily large.

<u>Example</u> 4.6 Suppose ϕ is any strictly increasing continuous function. Define $f : I \to \mathbb{R}$ by

$$f(0) = 0, \quad f(x) = \phi^{-1}(x)\sin(1/x) \quad \text{for } 0 < x \le 1.$$

Take $z_k = \frac{2}{k\pi}$, $k = 1, 2, \dots$ to see that $V_\phi(f) = +\infty$. However, $f(I)$ is a bounded interval so $e - P(f(I)) < +\infty$.

If we want f to be bijective we could take the graph of the above f in $\mathbb{R}^2$.

5. <u>Packing measure</u>

Any pre-measure $F : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^+$ gives rise to an outer measure $\tilde{F}$ on the power set by

$$(13) \qquad \tilde{F}(E) = \inf\{\textstyle\sum F(E_n) : E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad E \subset \bigcup E_n\};$$

see Rogers [7]. If F is monotone and sub-additive - Lemma 3.1 shows that our packing pre-measures satisfy this condition - then (13) is equivalent to

$$(14) \qquad \tilde{F}(E) = \inf\{\lim F(E_n) : E_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad E_n \uparrow E\}.$$

The outer measures generated by the pre-measures $\phi - P$, $\phi - P^*$, $\phi - P^{**}$ $\phi - Q$ will be denoted by $\phi - p$, $\phi - p^*$, $\phi - p^{**}$, $\phi - q$ respectively. Each of these is a metric outer measure so the class $\mathcal{M}$ of measurable sets includes the Borel subsets of $\mathbb{R}^d$, and the outer measure becomes σ-additive on $\mathcal{M}$.

It follows from Lemma 3.1 that countable sets have zero measure, and from Lemma 3.3 that

$$\phi - p \asymp \phi - p^{**} \preccurlyeq \phi - p^{*} ,$$

(15)

$$\phi - p \preccurlyeq \phi - q .$$

We now prove a result which applies to $\phi - p$ and $\phi - q$ by Lemma 3.2.

LEMMA 5.1. Suppose $F : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^+$ is monotone subadditive and satisfies $F(A) = F(\bar{A})$ for all A. If E is a compact set such that $F(E \cap V) = +\infty$ for all V which are open and meet E, then $\tilde{F}(E) = +\infty$.

<u>Proof</u> Suppose $E_n \uparrow E$. Since E is closed we must have E_N somewhere dense in E (Baire's Theorem) for some N. Then take an open interval such that $\overline{E_N \cap V} = \overline{E \cap V}$ to get

$$F(E_N) \geq F(E_N \cap V) = F(\overline{E_N \cap V})$$

$$= F(\overline{E \cap V}) = F(E \cap V) = +\infty .$$

Using (14) gives $\tilde{F}(E) = +\infty$.

Before proving a density theorem we state a result about Γ^{**} the family of semi-dyadic cubes which was noted in [9] for $d = 2$. Γ^{*} is nested in the sense that any family in Γ^{*} can be replaced by a disjoint subfamily with the same union. Lemma 5.2 states a similar result for Γ^{**}.

LEMMA 5.2. Given $u_1, u_2, \ldots, u_k$ a finite sequence of sets in Γ^{**} there is a subsequence $v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ such that

(i) $\bigcup_{i=1}^{k} u_i = \bigcup_{j=1}^{\ell} v_j = E$,

(ii) each $x \in E$ is contained in at most 2^d of the cubes v_j .

We now state the main density theorem which has a similar structure to Theorem 2.1 for Hausdorff measure.

THEOREM 5.3. Suppose μ is a Borel measure in $\mathbb{R}^d$ with $0 < \|\mu\| = \mu(\mathbb{R}^d) < +\infty$, $u_n(x)$ and $v_n(x)$ denote the dyadic cube and semi-dyadic cube containing x. For each $\phi \in \Phi$ there are finite constants $\lambda_1 > 0$ such that, for all $E \subset \mathbb{R}^d$,

$$\lambda_1 \mu(E) \inf_{x \in E} \left\{ \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\phi(r)}{\mu(B_r(x))} \right\} \le \phi - p(E) \le \|\mu\| \sup_{x \in E} \left\{ \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\phi(r)}{\mu(B_r(x))} \right\}$$

$$\lambda_2 \mu(E) \inf_{x \in E} \left\{ \limsup_{n \to \infty} \frac{\phi(2^{-n})}{\mu(u_n(x))} \right\} \le \phi - p^*(E) \le \|\mu\| \sup_{x \in E} \left\{ \limsup_{n \to \infty} \frac{\phi(2^{-n})}{\mu(u_n(x))} \right\}$$

$$\lambda_3 \mu(E) \inf_{x \in E} \left\{ \limsup_{n \to \infty} \frac{\phi(2^{-n})}{\mu(v_n(x))} \right\} \le \phi - p^{**}(E) \le \|\mu\| \sup_{x \in E} \left\{ \limsup_{n \to \infty} \frac{\phi(2^{-n})}{\mu(v_n(x))} \right\}$$

<u>Proof</u> Each of the above results can be proved by similar arguments. We give the details for $\phi - p(E)$ which is the hardest case. The right hand inequality is trivial unless there is a finite K such that, for all $x \in E$

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{\phi(r)}{\mu(B_r(x))} < K ;$$

In this case, put $E_n = \left\{ x \in E : r \le \frac{1}{n} \Rightarrow \phi(r) < K\, \mu(B_r(x)) \right\}$. Then $E_n \uparrow E$ so $\phi - p(E) \le \sup \phi - P(E_n)$. But if $\mathcal{R}$ is a disjoint family of open balls centred in E_n with $\|\mathcal{R}\| < \frac{1}{n}$ we get $\phi(\mathcal{R}) < K\, \|\mu\|$; so

$$\phi - P(E_n) \le K\|\mu\| . \quad \text{Hence} \quad \phi - p(E) \le K\|\mu\| \text{ for every}$$

$K > \sup_{x \in E} \left\{ \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\phi(r)}{\mu(B_r(x))} \right\}$ and the right hand inequality is established.

Now assume that K is such that, for all $x \in E$,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\phi(2^{-n})}{\mu(v_n(x))} > K .$$

For a fixed n_0, let $n(x)$ be the smallest integer $\ge n_0$ such that

$$\phi(2^{-n(x)}) > K\mu(v_n(x))$$

and suppose $\mathcal{R}$ is the family of all such $v_n(x)$. Choose a subfamily $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ such that each $x \in E$ belongs to at most 2^d cubes of $\mathcal{R}'$ (use Lemma 5.2). Write $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{R}_{2^d}$ where each $\mathcal{R}_i$ contains disjoint cubes in Γ^{**}. Now $\mathcal{R}'$ covers E so we can find $\mathcal{R}_N$ such that

$$\mu(\cup \mathcal{R}_N) \geq 2^{-d}\mu(E)$$

It now follows that

$$\phi(\mathcal{R}_N) > K2^{-d}\mu(E) .$$

Since this argument works for each n_0 we deduce that

$$\phi - P^{**}(E) \geq K2^{-d}\mu(E) .$$

Using Lemma 3.3 there is a fixed $\lambda > 0$ such that for all $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\phi - P(A) \geq \lambda\phi - P^{**}(A) ;$$

so if we make use of (14) we have shown that,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\phi(2^{-n})}{\mu(v_n(x))} > K \text{ for all } x \in E \Rightarrow \phi - p(E) \geq \lambda K2^{-d}\mu(E) .$$

But $B_r(x) \subset v_n(x)$ for $r \leq 2^{-n-2}$, so monotonicity of ϕ and μ with (1) yields

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{\phi(r)}{\mu(B_r(x))} > K \Rightarrow \limsup_{n \to \infty} \frac{\phi(2^{-n})}{\mu(v_n(x))} > \frac{K}{c_0^3}$$

and we have established the left hand inequality with $\lambda_1 = \lambda 2^{-d} c_0^{-3}$.

<u>Remark</u> It is clear from the argument used that if the lim sup is attained uniformly over E, the right hand inequality is valid for $\phi - P$ as well as $\phi - p$.

<u>Example 3.4</u> We can now establish the packing measure properties of E_0. Let μ be the uniform measure on E_0 such that each dyadic interval u of length 2^{-2n} such that $\mathring{u} \cap E_0 \neq \emptyset$ has mass 2^{-n}, and the remaining dyadic

intervals of length 2^{-2n} have zero mass. It is now easy to check that each $v_n(x)$ for $x \in E_0$ has measure at least $2^{-\frac{1}{2}(n-3)}$, so we can use Theorem 5.3 to establish that $\phi - p(E_0) > 0$ whenever $\phi(s) = s^{\frac{1}{2}}$. We already know that $\phi - p(E_0) \leq \phi - P(E_0) < +\infty$.

Example 3.5 Since $E_0 \setminus E_1$ is countable we know that $\phi - p^*(E_0 \setminus E_1) = 0$ so that $\phi - p^*(E_0) = \phi - p^*(E_1) \leq \phi - P^*(E_1) < +\infty$, whenever $\phi(s) = s^{\frac{1}{2}}$. Now $\phi - Q(E_0) = +\infty$ for any $\phi(s) = s^{\frac{1}{2}}/g(s)$ with $\sum \frac{1}{g(2^{-2n})} = +\infty$,

so we can apply Lemma 5.1 and use the uniform structure of E_0 to deduce that $\phi - q(E_0) = +\infty$ for any such ϕ. This shows that $\phi - q$ and $\phi - p^*$ are not equivalent, and that the conclusion of Lemma 5.1 does not hold for $\phi - P^*$.

Example 5.4 It is clear that $\phi - p$ is invariant for translations. The following argument shows that it is possible to have $\phi - p(E) < +\infty$ and $\phi - p^*(E) = +\infty$. Further there is a real number α such that $\phi - p^*(E_0) < \infty$, $\phi - p^*(E_0 + \alpha) = +\infty$ so $\phi - p^*$ is not even weakly invariant for translations. Let E_0 be the closed set of example 3.4. Let

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^i}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 2^{i_0} > 2n$$

$$k_i = 2^i - n \quad \text{for } i \geq i_0, \quad \phi(s) = s^{\frac{1}{2}}.$$

Let $D \subset E_0 + \alpha = \{y : y = x + \alpha, \alpha \in E_0\}$ be the countable set of left extremities of the complementary intervals of $E_0 + \alpha$ in $[\alpha, 1 + \alpha]$. We say $x \in D$ has order n if x is the left exremity of an interval of length 2^{-2n+1} (there are 2^{n-1} points of order n). Denote by $A_m = \{\frac{p}{2^m} : p \in \mathbb{Z}\}$ the 2^m-net of $\mathbb{R}$-dyadic points. We prove a number of properties. If $i \geq i_0$ and $x \in D$ has order k_i, there exists $y \in A_{2k_i}$ such that

$$\frac{1}{2^{2k_i+2n}} < x - y < \frac{2}{2^{2k_i+2n}}. \tag{16}$$

Indeed $x-\alpha$ is dyadic and belongs to A_{2k_i} so $x - \alpha = \frac{p}{2^{2k_i}}$. Put $y = \frac{p}{2^{2k_i}} + \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{2^{2^j}} \in A_{2k_i}$, since $n \le 2^{i-1}$. Hence

$x - y = \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^j}}$ which gives

$$\frac{1}{2^{2^{i+1}}} < x - y < \frac{2}{2^{2^{i+1}}}$$

and (16) follows since $2^{i+1} = 2k_i + 2n$.

Suppose μ is the uniform measure on $E_0 + \alpha$ constructed by translating the measure on E_0. We now show that very little of $u_n(x)$ for $x \in D$ is in the set $E_0 + \alpha$. In fact, if $x \in D$ has order k_i, $i \ge i_0$ then

(17) $$\mu(u_{2k_i}(x)) \le \frac{1}{2^{k_i+n}} .$$

If y is as defined above $u_{2k_i}(x) = \left[y, y + \frac{1}{2^{2k_i}}\right)$ and only $[y, x]$ carries any mass. But for $p > 2k_i$

$$\mu\left[x - \frac{1}{2^{2p-1}}, x\right] = \frac{1}{2^p}$$

and an application of (16) now gives (17).

For all $z \in E_0 + \alpha$, let $x_n(z)$ be the smallest $x \in D$, $x \ge z$ of order n. Then if $i \ge i_0$ and $x_{k_i} - z < 2^{-n-2k_i}$, we have

(18) $$\mu(u_{k_i}(z)) \le 2^{-n-k_i} .$$

This follows from (16) and (17).

Now each $z \in E_0 + \alpha$ can be written

$$z = \alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{4^i} \quad \text{with} \quad \delta_i = 0 \text{ or } 3$$

and the probability measure μ on E_0 is the projection of the product measure

$$P(\delta_i = 0) = \frac{1}{2} = P(\delta_i = 3) \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Let H_i be the event $\delta_{k_i+1} = \delta_{k_{i+2}} = \ldots = \delta_{k_i+n} = 3$. If $i_0 < i < j$, H_i and H_j are independent each with probability $2^{-n} > 0$. Hence H_i occurs infinitely often with probability one. We have proved

(19) $\mu(\{z \in E_0 + \alpha : \delta_{k_i+1} = \delta_{k_i+2} = \ldots = \delta_{k_i+n} = 3 \text{ infinitely often}\}) = 1$.

For such values of i we can apply (18) to get

$$\mu\{z \in E_0 + \alpha : \frac{\phi(|u_{k_i}(z)|)}{\mu(u_{k_i}(z))} \geq 2^n \text{ infinitely often}\}) = 1 .$$

By Theorem 5.3, $\phi - p^*(E_0 + \alpha) \geq 2^n\lambda_2$. This is true for all n, so $\phi - p^*(E_0 + \alpha) = + \infty$.

<u>Example 5.5</u> It is easy to check that the triadic Cantor set $C \subset [0, 1]$ satisfies

$$0 < e^\alpha - p(C) < + \infty \quad \text{for} \quad \alpha = \log 2/\log 3 .$$

CONJECTURE. This set C is such that

$$e^\alpha - p^*(C) = + \infty \quad .$$

In order to prove this one seems to need a strong independence result concering the expansions of a real to bases 2 and 3.

COROLLARY 5.6. Each of the outer measures $\phi - p$, $\phi - p^*$, $\phi - q$ define the same dimensional index.

Proof This follows from Corollary 3.8. The index is denoted Dim or $\hat{\Delta}$ - see Tricot [15].

We have now to make a choice for "packing measure". We discard $\phi - q$ because there may be no interesting sets of finite positive measure. The above examples show that $\phi - p^*$ is not translation invariant. We could take either $\phi - p$ or $\phi - p^{**}$ as both satisfy the density theorem and are equivalent. However $\phi - p^{**}$ involves the use of a particular net and it is unlikely to be invariant for translations so we make

DEFINITION 5.7. Given $\phi \in \Phi$, the outer measure $\phi - p$ is called the ϕ-packing measure.

6. Sojourn time for Brownian motion.

Before we can attack the problem of packing measure for sample paths we need precise information about the small tail of the distribution of the total time spent in a ball. We restrict attention to Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$ where the process is transient and therefore the total sojourn time is finite. The case $d = 1$ is trivial and a solution for $d = 2$ will require some additional techniques.

$X_t = X_t(\omega)$, $-\infty < t < +\infty$ is a standard version of the Weiner process in $\mathbb{R}^d$. We use P^x to denote the probability given $X_0 = x$ and write $P = P^0$. We need several associated random variables

$$M_d = \sup\{\| X_t - X_0 \|, \ 0 \leq t \leq 1\} .$$

For $r > 0$, $P_d(r)$ denotes the first passage time out of the ball $B_r(0)$, given $X_0 = 0$

$$P_d(r) = \inf\{ t > 0 : X_t \notin B_r(0)\} .$$

The total time spent in $B_r(0)$ after 0, given $X_0 = 0$ is

$$U_d(r) = |\{t > 0 : X_t \in B_r(0)\}| ;$$

while the corresponding time before 0 is

$$V_d(r) = |\{t < 0 : X_t \in B_r(0)\}| ,$$

and the sojourn time in $B_r(0)$ given $X_0 = 0$ is

$$T_d(r) = U_d(r) + V_d(t) .$$

We will be interested in this paper in the small values of $T_d(r)$ as $r \downarrow 0$. $U_d(r)$ and $V_d(r)$ are independent positive random variables with the same distribution so T_d is small only if U_d and V_d are both small. It is for this reason that our argument will have to be more complicated than that in [2], for there the large values of T_d were relevant and these are the same size as the large values of U_d or V_d.

The trajectory of the process on $[0, 1]$ is denoted $E(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^d : x = X_t \text{ for some } t \in [0, 1]\}$. Since X_t is continuous a.s. $E(\omega)$ is a compact set. For $n \in \mathbb{N}$ we put

$N_n(\omega)$ = number of dyadic cubes of side 2^{-n} containing a point of $E(\omega)$.

We can now state some elementary results.

LEMMA 6.1. Suppose $\|x\| > r$, then

$$P\{B_r(x) \text{ is hit by } X_t \text{ for } t > 0\} = \left(\frac{r}{\|x\|}\right)^{d-2} .$$

This is well known: it follows from the fact that the hitting probability of a ball starting from y is a harmonic function of y with boundary value 1 on the surface of $B_r(x)$.

LEMMA 6.2. There are positive constants c_1, c_2 such that, for $r > 1$,

$$c_1 r^{d-2} e^{-\frac{1}{2}r^2} \le P\{M_d \ge r\} \le c_2 r^{d-2} e^{-\frac{1}{2}r^2} .$$

<u>Proof</u> The reflection principle gives

$$P\{\|X_1\| \ge r\} \le P\{M_d \ge r\} \le 2P\{\|X_1\| \ge r\}.$$

The result now follows using the large tail of the normal distribution.

LEMMA 6.3. There is a positive constant c_3 such that

$$E(N_n(\omega)) < c_3 2^{2n} \quad \text{for all} \quad n \in \mathbb{N} .$$

This can be deduced from Lemmas 6.1 and 6.2 by a standard calculation or we can obtain it as a corollary of the results in [2].

LEMMA 6.4. For $0 < t < 1$

$$c_1 t^{-\frac{d}{2}+1} e^{-\frac{1}{2t}} \le P\{U_d(1) \le t\} \le c_2 t^{-\frac{d}{2}+1} e^{-\frac{1}{2}t} .$$

<u>Proof</u> It was proved in [2] that $U_d(1)$ has the same distribution as $P_{d-2}(1)$. Hence

$$\begin{aligned} P\{U_d(1) \le t\} &= P\{P_{d-2}(1) \le t\} \\ &= P\{P_{d-2}(t^{-\frac{1}{2}}) \le 1\} \\ &= P\{M_{d-2} \ge t^{-\frac{1}{2}}\} \end{aligned}$$

using the scaling property for Brownian motion in the second line above. The result now follows from Lemma 6.2.

LEMMA 6.5 For each $\varepsilon > 0$ there is a $t_1 = t_1(\varepsilon) > 0$ such that

$$e^{-(2+\varepsilon)/t} \le P\{T_d(1) \le t\} \le e^{-(2-\varepsilon)/t}, \quad \text{for } 0 < t < t_1 .$$

<u>Proof</u> Since $U_d(1)$ and $V_d(1)$ are independent with the same distribution we get

$$P\{T_d(1) \le t\} \ge [P\{U_d(1) \le \tfrac{1}{2}t\}]^2$$
$$\ge c_1^2 t^{-d+2} e^{-2/t} \quad \text{by lemma 6.4}$$
$$\ge e^{-(2+\varepsilon)/t} \quad \text{if } t \text{ is small enough.}$$

A fairly crude method gives the right hand inequality. Put

$$G(s) = P\{U_d(1) \le s\}$$

and fix an integer k. Then

$$P\{T_d(1) \le t\} = \int_0^t G(t-s)dG(s) = \sum_{i=1}^k \int_{\frac{i-1}{k}t}^{\frac{i}{k}t} G(t-s)dG(s)$$
$$\le \sum_{i=1}^k G\left(\frac{k-i+1}{k}t\right) G\left(\frac{i}{k}t\right).$$

Now use Lemma 6.4 to give

$$G\left(\frac{k-i+1}{k}t\right) G\left(\frac{i}{k}t\right) \le c_2^2\, t^{-d+1} k^{d-2} \exp\left[-\frac{1}{2t} \cdot \frac{k^2+k}{i(k-i+1)}\right].$$

But, for $1 \le i \le k$, $\frac{k^2+k}{i(k-i+1)} \ge 4(1-\frac{1}{k})$, so

$$P\{T_d(1) \le t\} \le c_2^2 t^{-d+1} k^{d-1} e^{-\frac{2}{t}(1-\frac{1}{k})}.$$

Given $\varepsilon > 0$ we now choose $k > 3/\varepsilon$ and then t, small enough to give

$$P\{T_d(1) \le t\} \le e^{-(2-\varepsilon)/t} \quad \text{for } 0 < t < t_1 .$$

<u>Remark</u> It is clear that we could tighten up the above argument considerably but not enough to give an exact asymptotic value for $P\{T_d(1) \le t\}$ as $t \downarrow 0$. If we could have proved the following it would have simplified our task in the next section.

CONJECTURE 6.6. There are constants $\lambda(d)$ such that

$$P\{T_d(1) \le t\} \sim ct^{\lambda(d)}e^{-2/t} \quad \text{as} \quad t \downarrow 0 .$$

It seems likely that this should follow from a general result on the small tail of the distribution of the sum of two positive independent random variables, but the existing techniques are not good enough.

THEOREM 6.7. Suppose $T_d(r)$ is the total time spent in the ball $B_r(0)$ by a Brownian motion process in $\mathbb{R}^d$ $(d \ge 3)$, X_t, $-\infty < t < +\infty$ with $X_0 = 0$. Then

$$\liminf_{r \downarrow 0} \frac{T_d(r)}{\psi(r)} = 2 \quad \text{a.s.}$$

where $\psi(r) = r^2/\log|\log r|$.

<u>Proof</u>. We fix d throughout the proof and omit it. In the easier direction a standard Borel Cantelli argument will work. Fix $\gamma < 2$. For $k = 2, 3, \ldots$ let

$$a_k = \exp(-k/\log k)$$
$$E_k = \{\omega : T(a_k) \le \gamma\psi(a_k)\}.$$

Using the scaling property,

$$\begin{aligned} P(E_k) &= P\{T(1) \le \gamma/\log|\log a_k|\} \\ &\le P\{T(1) \le \gamma/\log k\} \\ &\le k^{-\alpha}, \quad \text{where } \alpha = (2-\varepsilon)/\gamma , \end{aligned}$$

by lemma 6.5, when k is large enough. Taking ε small enough to make $\alpha > 1$ we have $\Sigma\, P(E_k)$ converges so, with probability 1, there exists $k_1 = k_1(\omega)$ for which

$$k \ge k_1 \Rightarrow T(a_k) > \gamma\psi(a_k) .$$

Thus

$$\liminf_{k \to \infty} \frac{T(a_k)}{\psi(a_k)} \geq \gamma \quad \text{a.s.}$$

But $T(r)$ and $\psi(r)$ are monotone for small r and

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\psi(a_k)}{\psi(a_{k+1})} = 1 .$$

Hence

$$\liminf_{r \downarrow 0} \frac{T(r)}{\psi(r)} \geq \gamma \quad \text{a.s. .}$$

Since γ can be chosen arbitrarily close to 2 we get

(20) $$\liminf_{r \downarrow 0} \frac{T(r)}{\psi(r)} \geq 2 \quad \text{a.s. .}$$

In the other direction we require precise estimates of probabilities so we have to use the fact that $T_d(r)$ is the sum of two independent random variables

$$T(r) = U(r) + V(r) .$$

We now fix $\gamma > 2$ and show that, for

$$b_k = \exp(-k(\log k)^2) \quad k = 2, 3, \ldots$$

infinitely many of the events

(21) $$D_k = \{\omega : T(b_k) \leq \gamma\psi(b_k)\}$$

occur with probability 1. This is enough to give

$$\liminf_{r \downarrow 0} \frac{T(r)}{\psi(r)} \leq 2 \quad \text{a.s.}$$

which with (20) will complete the proof of the theorem. The first step uses the minimum 'rate of escape' to show that there is no contribution to $T(b_k)$ from values of t with $|t|$ much greater than b_k^2. To be precise put $\tau_k = k^3 b_k^2$ and

$$T(b_k, \tau_k) = |\{t \in \mathbb{R} : |t| \le \tau_k \text{ and } \|X_t\| \le b_k\}|.$$

Then the event $T(b_k, \tau_k) \neq T(b_k)$ is contained in

$$\{\omega : \exists t > \tau_k \text{ with } \|X_t\| \le b_k\} \cup \{\omega : \exists t < -\tau_k \text{ with } \|X_t\| \le b_k\}.$$

The estimates for delayed hitting probability in [3] give

$$P\{T(b_k, \tau_k) \neq T(b_k)\} = O(k^{-3/2}),$$

so that a.s. there exists $k_2 = k_2(\omega)$ for which

(22) $$k \ge k_2 \Rightarrow T(b_k) = T(b_k, \tau_k) .$$

Using the large tail of the normal distribution to estimate $P\{\|X_{\tau_k}\| > k^2 b_k\}$ we can show that a.s. there exists $k_3 = k_3(\omega)$ for which

(23) $$k \ge k_3 \Rightarrow \|X_{\tau_k}\| \le k^2 b_k \text{ and } \|X_{-\tau_k}\| \le k^2 b_k .$$

Now put $e_k = b_k + (k+1)^2 b_{k+1}$ and note that

(24) $$k \ge k_3 \Rightarrow B_{b_k}(0) \subset B_{e_k}(X_{\tau_{k+1}}) .$$

Define new sections of sojourn time

$$U(t_0, r, \tau) = |\{t : t_0 \le t \le t_0 + \tau \text{ and } \|X_t - X_{t_0}\| \le r\}|$$

$$V(t_0, r, \tau) = |\{t : t_0 - \tau \le t \le t_0 \text{ and } \|X_{\bar{t}} - X_{t_0}\| \le r\}| .$$

By (24), for $k \ge k_3$ we have

(25) $$U(0, b_k, \tau_k) \le \tau_{k+1} + U(t_{k+1}, e_k, \tau_k - \tau_{k+1}) .$$

But now the events

$$A_k = \{\omega : U(\tau_{k+1}, e_k, \tau_k - \tau_{k+1}) \le \tfrac{1}{2}\gamma\psi(b_k) - \tau_{k+1}\}$$

are independent, and

$$P(A_k) \geq P(U(e_k) \leq \tfrac{1}{2}\gamma\psi(b_k) - \tau_{k+1})$$

$$= P(U(1) \leq y_k)$$

where $y_k = (\tfrac{1}{2}\gamma\psi(b_k) - \tau_{k+1})/e_k^2 \sim \tfrac{1}{2}\gamma/\log k$ as $k \to \infty$. It follows from Lemma 6.4, that for each $\varepsilon > 0$, whenever k is large enough

$$P(A_k) \geq k^{-(1+\varepsilon)/\gamma}.$$

The same result holds for the symmetrical event

$$B_k = \{\omega : V(-\tau_{k+1}, e_k, \tau_k - \tau_{k+1}) \leq \tfrac{1}{2}\gamma\psi(b_k) - \tau_{k+1}\}.$$

The events A_k, B_k are independent, so we get

$$P(A_k \cap B_k) \geq k^{-2(1+\varepsilon)/\gamma}.$$

But for $k = 2, 3, \ldots,$ the events $A_k \cap B_k$ depend on disjoint time intervals and are therefore independent. It follows that, with probability 1, for each $\gamma > 2$, $A_k \cap B_k$ happens infinitely often. We now combine (22) and (25) to deduce that D_k defined by (21) happens infinitely often a.s.

Remark There are two differences between the result of theorem 6.7 and the corresponding lim sup law obtained in [1]. Firstly the asymptotic value does not depend on $d \geq 3$. Secondly, the constant is different for a one-sided law. A simplified version of the above argument shows that

$$\liminf_{r \downarrow 0} \frac{U_d(r)}{\psi(r)} = \tfrac{1}{2} \quad \text{a.s.}$$

COROLLARY 3.8 For fixed t_0, let $T_d(t_0, r)$ denote the total time spent in $B_r(X_{t_0})$ by a Brownian motion process in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$. Then

$$\liminf_{r \downarrow 0} \frac{T_d(t_0, r)}{\psi(r)} = 2 \quad \text{a.s.}$$

<u>Proof</u> $Y_s = X_{t_0+s} - X_{t_0}$, $-\infty < s < \infty$ defines a version of the Brownian motion process for which $Y_0 = 0$. Apply the theorem to Y.

7. <u>The exact packing measure of Brownian motion</u>

Our object in this section is to prove that

$$\psi(r) = r^2/\log|\log r|$$

is the correct function in Φ to give a finite positive ψ-packing measure for a piece of Brownian trajectory in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$. To obtain an upper bound we use a result which may be more general than we need.

LEMMA 7.1 Suppose $Y_t(\omega)$ is any standard process in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ and $E(\omega) = \left\{ x : x = Y_t \text{ for some } t \in [0, 1] \right\}$. Let $N_n(w)$ be the number of dyadic cubes of side 2^{-n} which meet $E(\omega)$, μ be a finite Borel measure in $\mathbb{R}^d$ and write, for $\lambda > 0$

$$q_{n,\lambda} = \sup_{x \in E(\omega)} P\{\mu(B_{2^{-n}}(x)) < \lambda\phi(2^{-n})\}.$$

If $\sum_{n=1}^{\infty} \left[q_{n,\lambda}\phi(2^{-n})E(N_n(\omega))\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty$ then $\phi - P(E(\omega)) < +\infty$ a.s.

<u>Proof</u> Using (1) and the trivial inequality $N_n \leq N_{n+2}$, the hypothesis of Lemma 7.1 implies

$$\sum \left[q_{n+2,\lambda}\phi(2^{-n})E(N_n(\omega))\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{26}$$

A semi-dyadic cube v of side 2^{-n} is called 'good' if $\mu(v) \geq \lambda\phi(2^{-n-2})$, otherwise it is 'bad'. If $v = v_n(x)$ then v contains $B_{2^{-n-2}}(x)$ so that for $x \in E(\omega)$

$$P(v_n(x) \text{ is bad}) \leq q_{n+2,\lambda} .$$

There are less than $2^d N_n$ such cubes $v_n(x)$ so, if M_n is the number of bad cubes

$$E(M_n(\omega)) < 2^d q_{n+2,\lambda} E(N_n(\omega)).$$

Hence

$$P\left\{M_n > \left[q_{n+2,\lambda}E(N_n)/\phi(2^{-n})\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \leq 2^d\left[q_{n+2,\lambda}\phi(2^{-n})E(N_n)\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Using Borel-Cantelli and (26) a.s. there is $n_1 = n_1(\omega)$ such that

$$M_n \leq \left[q_{n+2,\lambda}E(N_n)/\phi(2^{-n})\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } n \geq n_1.$$

Now if $\mathcal{R}$ is a family of disjoint cubes of Γ^{**} with $\|\mathcal{R}\| \leq 2^{-n}$, $n \leq n_1$, the contribution of the 'bad' cubes to the sum $\phi(\mathcal{R})$ becomes negligible, for

$$\sum\{\phi(d(v)) : v \in \mathcal{R},\ v \text{ is bad}\} \leq \sum_{i=n}^{\infty} M_n \phi(d2^{-n})$$

$$\leq c \sum_{i=n}^{\infty} \left|q_{n+2,\lambda}\phi(2^{-n})E(N_n)\right|^{\frac{1}{2}}$$

and this converges to 0 as $n \to \infty$ by (25). Also

$$\sum\{\phi(d(v)) : v \in \mathcal{R},\ v \text{ is good}\} \leq c_0^3 \sum\phi(\tfrac{1}{4} \text{ side of } v)$$

$$\leq \frac{c_0^3}{\lambda} \|\mu\| .$$

Thus we have proved that $\phi - P^{**}(E(\omega)) \leq c_1 < +\infty$. By Lemma 3.3 this tells us that there is a c_2 s.t.

$$\phi - P(E(\omega)) \leq c_2 < +\infty \text{ a.s.}$$

COROLLARY 7.2 If X_t is a standard Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$, then $\psi - p(E(\omega)) \leq c < +\infty$ where $\psi(r) = r^2/\log|\log r|$.

<u>Proof</u> We define μ be projecting Lebesgue measure from $[0, 1]$ onto $E(\omega)$. Thus for Borel A

$$\mu(A) = |\{t \in [0, 1] : X_t \in A\}| .$$

Clearly $\mu(\mathbb{R}^d) = \mu(E(\omega)) = 1$. Now suppose $0 < \lambda < \frac{1}{4}$. For $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} P\{\mu(B_{2^{-n}}(X_t)) \leq \lambda\psi(2^{-n})\} &\leq P\{U(2^{-n}) \leq \lambda\psi(2^{-n})\} \\ &\leq P\{U(1) \leq \lambda 2^{2n}\psi(2^{-n})\} \\ &\leq P\{U(1) \leq \lambda/\log n\}. \end{aligned}$$

Using Lemma 6.4 gives

$$q_{n,\lambda} \leq C_2\lambda^{-\frac{1}{2}d+1}(\log n)^{\frac{1}{2}d-1}n^{-1/2\lambda}.$$

Using Lemma 6.3, the hypothesis of Lemma 7.1 is satisfied for $\lambda < \frac{1}{4}$. Thus we have

$$\psi - P(E(\omega)) \leq c < +\infty \text{ a.s.}$$

<u>Remark</u> There is an alternative proof of the result $\psi - p(E(\omega)) \leq c$. If we use Theorem 4.5 and the result about strong variation proved in [11], $V_\psi(f(I)) = 2$ a.s., then we get an immediate upper bound.

LEMMA 7.3 If X_t is a standard Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$, there is a constant c_3 such that $\psi - p(E(\omega)) \geq c_3 > 0$ a.s.

<u>Proof</u> We apply the density theorem to the measure μ defined above. By Corollary 3.8, for each fixed $t_0 \in (0, 1)$, almost surely

$$\limsup_{r \downarrow 0} \frac{\psi(r)}{\mu(B_r(X(t_0))} = \tfrac{1}{2}, \tag{27}$$

By a Fubini argument the set of $t_0 \in (0, 1)$ for which (27) is true has full measure, so the corresponding $E_1 \subset E(\omega)$ satisfies $\mu(E_1) = 1$. Apply Theorem 5.3 to the set E_1 and we get

$$\psi - p(E) \geq \psi - p(E_1) \geq \tfrac{1}{2}\lambda_1 > 0 \text{ a.s.}$$

We can now state our main result.

THEOREM 7.4 Suppose X_t $(-\infty < t < \infty)$ is a standard Brownian motion in $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 3)$. Almost surely there are finite positive constants ρ_d such that

$$\psi - p(X(A)) = \rho_d |A|$$

for every Borel set $A \subset \mathbb{R}$, where

$$X(A) = \{x \in \mathbb{R}^d : t \in A \text{ with } X_t = x\}.$$

<u>Proof</u> Corollary 7.2 and Lemma 7.3 ensure that

$$0 < c_3 t \leq \psi - p(X(0, t)) \leq c_2 t \tag{28}$$

for each fixed $t > 0$. But now $Y_t = \psi - p(X(0, t))$ is an independent increment process, since an elementary computation shows that

$$\psi - p\left[X(0,\ t_1) \cap X(t_1,\ t_2)\right] \;=\; 0 \quad \text{a.s.}$$

(in fact for $d \geq 4$ the set in square brackets is empty). It follows that ψ- $p(X(0,t))$ is a Lévy process; using (28) and argument in [12] we deduce that there is a constant ρ_d such that

$$\psi - p(X(0,\ t)) \;=\; \rho_d t \qquad \text{for all} \quad t > 0 \quad \text{a.s.}$$

A similar argument works for $\psi - p(X(-t,\ 0))$. It is now immediate that

$$\psi - p(X(t_1,\ t_2)) \;=\; \rho_d(t_2 - t_1)$$

for all rational t_1, t_2 and therefore for all t_1, t_2 by monotonicity. The result now follows for any Borel set A since we can approximate A by a union of intervals.

<u>Remark</u> We have seen that (27) and $V_\psi(X_t)$ do not depend on the dimension $d \geq 3$. It seems likely that the constants ρ_d in Theorem 7.4 are the same for each $d \geq 3$. It would be interesting to find ρ_d.

REFERENCES

1. M. Bruneau, Variation totale d'une fonction, Lecture notes in Mathematics (413), Springer-Verlag 1974.

2. Z. Ciesielski and S. J. Taylor, First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path, Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), 434-450.

3. A. Dvoretzki and P. Erdös, Some problems on random walk in space, Proc. Second Berkeley Symp. (1950), 353-367.

4. O. Frostman, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles, Medd Lunds Univ. Mat. Semin. 3 (1935).

5. C. Goffman and J. J. Loughlin, Strong and weak ϕ-variation of Brownian motion, Indiana Univ. Math. Jour. 22 (1972), 135-138.

6. F. Hausdorff, Dimension und ausseres Mass, Math. Annalen 79 (1919), 157-179.

7. C. A. Rogers, Hausdorff measures, Cambridge Press 1970.

8. C. A. Rogers and S. J. Taylor, Functions continuous and singular with respect to a Hausdorff measure, Mathematika 8 (1961), 1-31.

9. S. J. Taylor, The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion, Proc. Camb. Phil. Soc. 60 (1964), 253-258.

10. S. J. Taylor, On the connection between generalized capacities and Hausdorff measures, Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961), 524-531.

11. S. J. Taylor, Exact asymptotic estimates of Brownian path variation, Duke Math. Jour. 39 (1972), 219-241.

12. S. J. Taylor and J. G. Wendel, The exact Hausdorff measure of the zero set of a stable process, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 6 (1966), 170-180.

13. C.Tricot, Sur la classification des ensembles boréliens de mesure de Lebesgue nulle (Thèse de doctorat), Genève 1979.

14. C.Tricot, Douze définitions de la densité logarithmique, C. R. Acad. Sc. Paris 293 (1981), Série I, 549-552.

15. C. Tricot, Two definitions of fractional dimension, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 91 (1982), 57-74.

Department of Pure Mathematics,
The University of Liverpool
P. O. Box 147
Liverpool L69 3BX

ETUDE DIMENSIONNELLE D'UN COMPACT, PAR LE PAVAGE DU COMPLÉMENTAIRE

Claude Tricot

Le complémentaire d'un ensemble E fermé de $\mathbb{R}^n$ peut être considéré comme la réunion d'une famille (C_k) de cubes fermés parallèle aux axes, d'intérieurs disjoints, et de diamètres c_k tels que

(1) $$\lambda_1 c_k \leq \operatorname{dist}(C_k, E) \leq \lambda_2 c_k$$

où λ_1 et λ_2 sont deux constantes positives (on peut prendre $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$). Ce résultat est dû à Whitney. Voir [1] pour une démonstration.

Si E est compact, pris dans un domaine borné U quelconque, les seuls cubes complémentaires qui aient véritablement quelque intérêt du point de vue de la géométrie de E sont ceux qui rencontrent U. Le volume total de ces cubes est fini, car la suite (C_k) de leurs diamètres est bornée. Lorsque E est de mesure de Lebesgue nulle, cette suite peut servir à définir un nombre dimensionnel $\Delta(c_k)$ caractéristique de E. L'une des formes les plus simples de $\Delta(c_k)$ est

(2) $$\Delta(c_k) = \inf\{\alpha : \sum c_k^\alpha < +\infty\},$$

c'est-à-dire l'exposant de convergence de la suite (voir [2] pour un bref historique, et des références). Il faut remarquer que $\Delta(c_k)$ n'a, jusqu'ici, été défini et utilisé que pour $n = 1$, tandis qu'il existe une définition métrique de la dimension de E valable pour n

quelconque, qui est

(3) $$\Delta(E) = \inf\{\alpha : r^{\alpha-n}|E(r)|_n \to 0\},$$

$E(r)$ désignant l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ à distance $\leq r$ de E, et $|\ |_n$ la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle. Or il se trouve que dans $\mathbb{R}$, si $|E|_1 = 0$, et si les c_k sont les longueurs des intervalles complémentaires de E, on a l'égalité

(4) $$\Delta(E) = \Delta(c_k).$$

Nous voulons montrer que (4) est vraie dans $\mathbb{R}^n$ si les c_k sont les diamètres de cubes complémentaires du type Whitney, c'est-à-dire vérifiant (1), et surtout obtenir le théorème plus général suivant:

<u>Théorème</u> <u>Soit</u> $(C_k)_{k\geq 1}$ <u>une famille de cubes fermés de</u> $\mathbb{R}^n$ <u>parallèles aux axes, d'intérieurs disjoints, les diamètres</u> c_k <u>étant bornés et rangés en ordre décroissant.</u> <u>Soit</u> U <u>un ouvert borné, et</u> $E = \overline{U - \bigcup_1^\infty C_k}$. <u>On suppose que</u> E <u>est non vide, et que</u>

(i) $|E|_n = 0$

(ii) $\mathrm{dist}(C_k, E)/c_k$ <u>est borné</u>

(iii) $E \cap \mathrm{Fr}(U) = \emptyset$.

<u>Soit</u> $\Delta(c_k)$ <u>comme en</u> (2), $\Delta(E)$ <u>comme en</u> (3). <u>Alors</u> $\Delta(E) = \Delta(c_k)$.

Si E est compact, de mesure nulle, et U convenablement choisi, une famille de cubes de Whitney vérifient effectivement le théorème, mais avec la condition supplémentaire concernant la constante λ_1. Dans $\mathbb{R}^2$ un résultat plus général a été obtenu en [3], avec des ensembles complémentaires homéomorphes au disque et vérifiant de bonnes conditions de régularité, mais l'argument semble difficile à utiliser dans $\mathbb{R}^3$. On peut aussi envisager des corps convexes plutôt que des cubes, mais on est alors amené à des difficultés techniques propres à la convexité. Le théorème ci-dessus peut être considéré comme une première étape, avec l'avantage de conserver toutes les difficultés inhérentes à la comparaison entre les deux indices, mais dans un contexte géométriquement simplifié. La démonstration se divise en cinq parties: I) $\Delta(c_k) \le \Delta(E)$, II) $\Delta(E) \le \Delta(c_k)$ dans le cas où (C_k) est une famille de Whitney, III) $\Delta(E) \le \Delta(c_k)$ dans le cas où $\sum_1^\infty c_k^{n-1} = +\infty$, IV) $\Delta(E) \le \Delta(c_k)$ dans le cas où $\sum_1^\infty c_k^{n-p-1} = +\infty$, $\sum_1^\infty c_k^{n-p} < +\infty$, $1 \le p \le n-1$, et V) démonstration d'une proposition utilisée dans IV). C'est précisement cette proposition, fortement basée sur la topologie du cube, qui fait difficulté quand on envisage des ensembles complémentaires plus généraux. La partie I) se démontre à l'aide de l'hypothèse (ii), II), III) et IV) à l'aide de (i) et (iii).

On ne donne pas la démonstration du lemme suivant, déjà cité dans [3]. La partie la plus difficile du raisonnement se trouve dans [2].

<u>Lemme</u> <u>Soit (γ_k) une suite décroissante de réels positifs, et</u> $a > 0$.

(5) <u>Si</u> $\sum_1^\infty \gamma_k^a < +\infty$, $\Delta(\gamma_k)$ <u>est égal à</u> $\inf\{\alpha > 0 : \gamma_k^{\alpha-a} \sum_k^\infty \gamma_i^a \to 0\} \leq a$.

(6) <u>Si</u> $\sum_1^\infty \gamma_k^a = +\infty$, $\Delta(\gamma_k)$ <u>est égal à</u> $\inf\{\alpha > 0 : \gamma_k^{\alpha-a} \sum_1^k \gamma_i^a \to 0\} \geq a$.

<u>Démonstration du théorème</u> Rappelons que $|\ |_n$ désigne la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle, et que pour tout $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}(r)$ désigne l'ensemble des points à distance $\leq r$ de $\mathcal{E}$. Comme E est borné, $|E(r)|_n$ l'est aussi, et par (3) $\Delta(E) \leq n$. Comme U est borné, la famille des C_k est bornée, donc $\sum_1^\infty c_k^n < +\infty$, et par (2) $\Delta(c_k) \leq n$.

I. <u>Montrons que</u> $\Delta(c_k) \leq \Delta(E)$.

Soit $k \geq 1$, $\lambda_2 \geq \sup_k(\mathrm{dist}(C_k, E)/c_k)$, et $r = (\lambda_2 + 1)c_k$. Comme le volume des cubes C_i est $n^{-n/2}c_i^n$, et que $C_i \subset E(r)$ pour tout $i \geq k$, on obtient

$$|E(r)|_n \geq n^{-n/2} \sum_{i=k}^\infty c_i^n ,$$

et pour tout α,

$$r^{\alpha-n}|E(r)|_n \geq (\lambda_2 + 1)^{\alpha-n}\, n^{-n/2}\, c_k^{\alpha-n} \sum_k^\infty c_i^n ,$$

qui démontre l'inégalité, à l'aide de (5).

II. $\Delta(E) \leq \Delta(c_k)$, dans le cas où (C_k) est une famille de Whitney: La démonstration est encore très simple, et juste l'inverse de la précédente.

D'après (iii) il existe $r_0 > 0$ tel que

(7) $$E(r_0) \subset E \cup (\bigcup_1^\infty C_k).$$

Soit $\lambda_1 \in]0, \inf_k(\operatorname{dist}(C_k, E)/c_k)]$, $r \in]0, r_0/\lambda_1[$, K le plus petit entier tel que

(8) $$c_K \leq r,$$

et $s = \lambda_1 r$. Aucun C_k de rang $< K$ ne rencontre $E(s)$, donc par (7)

$$E(s) \subset E \cup (\bigcup_K^\infty C_k).$$

On peut supposer que $\Delta(c_k) < n$, et prendre $\alpha < n$: en utilisant (i), on obtient

$$s^{\alpha-n}|E(s)|_n \leq \lambda_1^{\alpha-n}\, n^{-n/2}\, c_K^{\alpha-n} \sum_K^\infty c_k^n,$$

d'où par (5)

$$\Delta(E) \leq \Delta(c_k).$$

L'intérêt de la démonstration réside dans les parties qui suivent, où la famille de cubes complémentaires n'est pas de Whitney, ce que se produit en particulier si leur frontière contient des points de E.

III. $\Delta(E) \geq \Delta(c_k)$, dans l'hypothèse où $\sum_1^\infty c_k^{n-1} = +\infty$.

Soit r_0 vérifiant (7), $r \in]0, \min(r_0, c_1)[$, K l'entier tel que

(9) $$c_{K+1} < r \leq c_K,$$

et F_k la frontière de C_k. On a

(10) $$E(r) \subset E \cup (\bigcup_{K+1}^\infty C_k) \cup (\bigcup_r^K F_k(r)).$$

Or $|F_k(r)|_n \leq \lambda_3 r c_k^{n-1}$, pour une constante λ_3, et $|E|_n = 0$. Donc

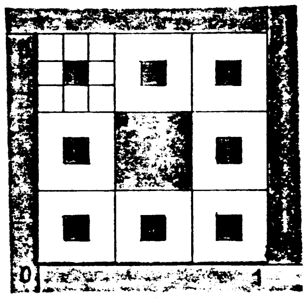
$$|E(r)|_n \leq \lambda_3 r \sum_1^K c_k^{n-1} + n^{-n/2} \sum_{K+1}^{\infty} c_k^n .$$

Si $\Delta(c_k) < n$, et $\alpha \in]\Delta(c_k), n[$, on a $\alpha \geq n-1$ d'après (6), et

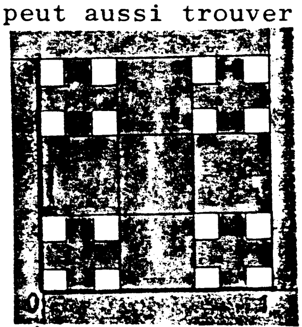
$$r^{\alpha-n}|E(r)|_n \leq \lambda_3 c_K^{\alpha-n+1} \sum_1^K c_k^{n-1} + n^{-n/2} c_{K+1}^{\alpha-n} \sum_{K+1}^{\infty} c_k^n ,$$

où le membre de droite tend vers 0. Donc $\Delta(E) \leq \alpha$.

<u>Remarque</u> Intuitivement le cas où $\sum c_k^{n-1}$ diverge est un cas où il y a une forte "densité" de cubes, généralement isolés les uns des autres, ou dont les parties de frontières communes sont peu importantes pour des cubes de diamètres comparables. L'ensemble E est alors proche des F_k, ou même recouvre F_k, et l'approximation de $E(r)$ à l'aide des $F_k(r)$ dans (10) devient raisonnable. Un exemple typique, dans $\mathbb{R}^2$, est celui de l'ensemble self-similaire ci-contre dans I^2, où 4 carrés de côté 2 sont ajoutés pour assurer l'hypothèse (iii). Si $k \geq 5$, F_k est inclus dans E, et $\Delta(E) = \log 8 / \log 3 \in [1, 2]$.



Cependent on peut aussi trouver des cas tels que le produit cartésion de l'ensemble triadique de Cantor par lui-même, où la mesure linéaire de E sur chaque F_k est nulle. Remplacer $E(r)$ par les $F_k(r)$ devient ici une grossière approximation.



Il y a aussi des cas où $E \cap F_k = \phi$ pour tout k (familles de Whitney); il faut alors s'imaginer que les cubes qui bordent la frontière d'un C_k donné sont relativement petits.

IV . $\Delta(E) \leq \Delta(c_k)$, dans l'hypothèse où il existe un entier p, $1 \leq p \leq n-1$, tel que $\sum_1^\infty c_k^{n-p-1} = +\infty$, $\sum_1^\infty c_k^{n-p} < +\infty$.

Ici quelques généralités concernant la géométrie des cubes et familles de cubes sont nécessaires:

Etant donné un cube fermé Γ parallèle aux axes, appellons "p-variété" de Γ, $0 \leq p \leq n-1$, l'intersection de Γ avec une variété linéaire de dimension p parallèle à p axes de coordonnées et passant par un sommet de Γ. Une 0-variété est un "sommet", une $(n-1)$-variété une "face" de Γ. Le nombre de p-variétés de Γ est donc $2^{n-p}\binom{n}{p}$.
Si V est l'une d'elles,

(11) $$|V(r)|_n \leq \lambda_4 r^{n-p}(\operatorname{diam}(\Gamma))^p,$$

λ_4 constante.

Ces définitions sont étendues à toute famille $\Omega = \{\Gamma_k\}$ de cubes: V est une p-variété de Ω si V est p-variété de l'un des Γ_k (ainsi tout sommet de Γ_k est dit sommet de Ω, même s'il est intérieur à $\cup\Omega$). On va utiliser la Proposition suivante, qui sera démontrée en V:

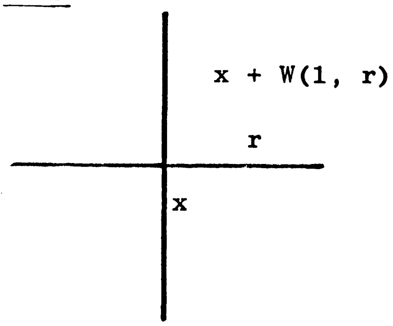
<u>Proposition</u> <u>Soit un entier</u> p, $1 \leq p \leq n-1$, <u>et</u> $J(p)$ <u>l'ensemble des points de</u> $I^n = [0, 1]^n$ <u>ayant</u> $n-p$ <u>coordonneés nulles</u>. <u>Soit</u> Ω <u>une famille finie des cubes d'intérieurs disjoints parallèle aux axes tels que</u>

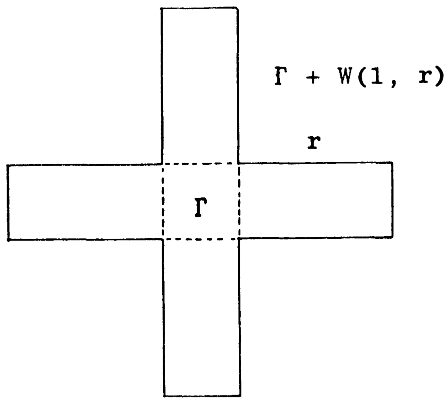
$$J(p) \subset \cup\Omega, \qquad I^n \not\subset \cup\Omega.$$

<u>Alors</u> I^n <u>rencontre une</u> $(n-p-1)$-<u>variété de</u> Ω.

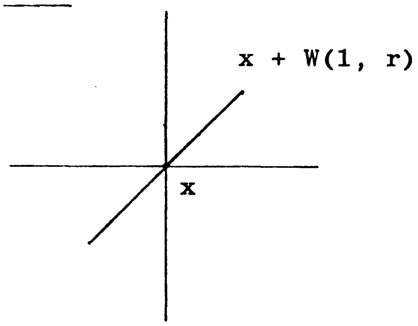
Soit maintenant $W(p, r)$ l'ensemble des x de $[-r, r]^n$ ayant $n - p$ coordonnées nulles: $W(p, r)$ est inclus dans $\binom{n}{p}$ variétés linéaires de dimension p passant par l'origine. Pourtout $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E} + W(p, r) = \{x + y : x \in \mathcal{E}, \; y \in W(p, r)\}$. Voici quelques exemples, où $\{x\}$ est un singleton, Γ un cube:

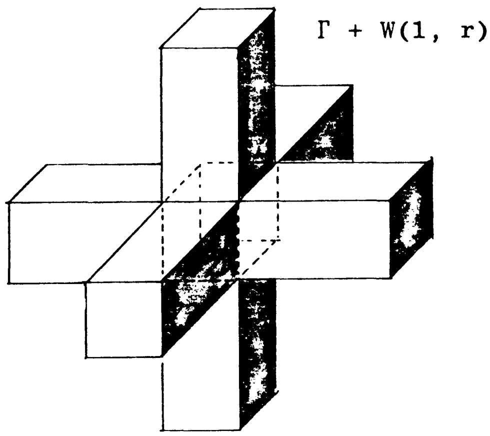
n = 2

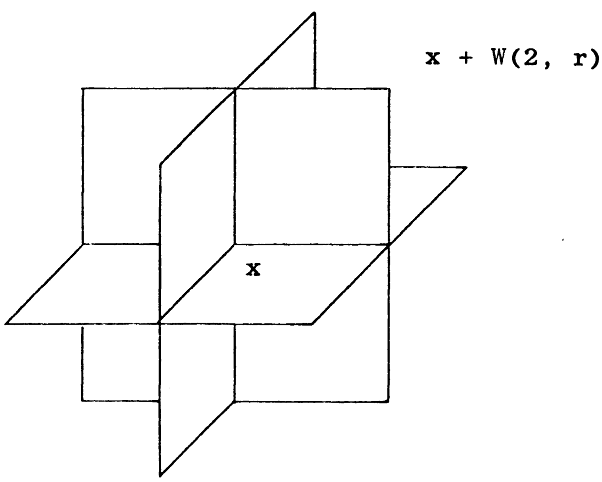


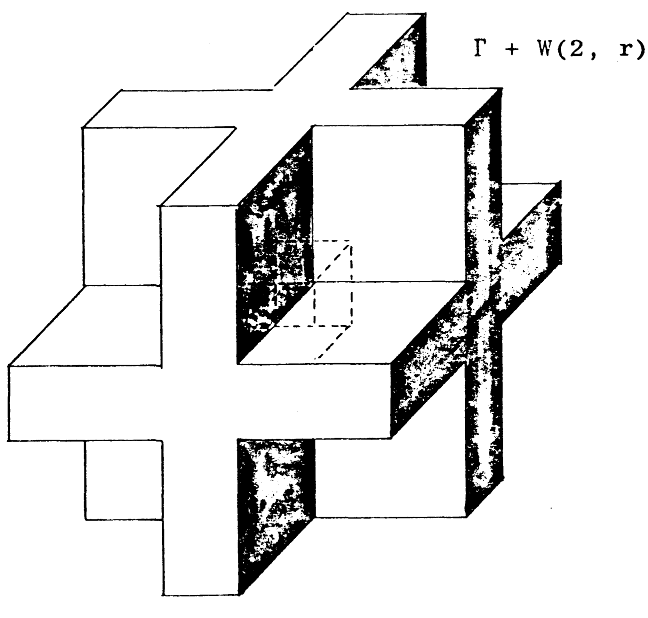


n = 3









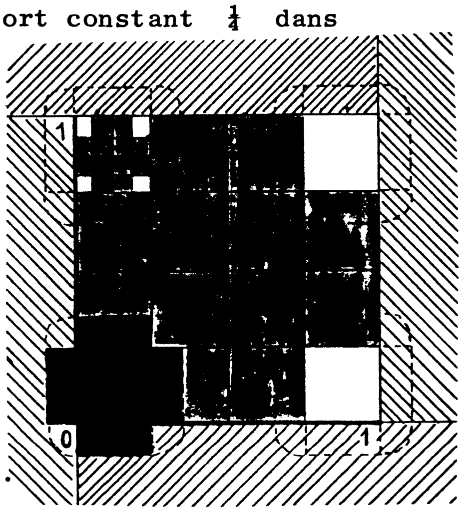
Le volume de $\Gamma + W(p, r)$, où $r \geq \mathrm{diam}(\Gamma)$, vérifie

(12) $$|\Gamma + W(p, r)|_n \quad \leq \quad \lambda_5 r^p (\mathrm{diam}\ \Gamma)^{n-p},$$

λ_5 constante. Notre but est d'estimer $|E(r)|_n$ à l'aide du volume des "briques élémentaires" $C_k + W(p, r)$, $c_k < r$. Prenons un r_0 comme en (7), $r \in]0, \min(r_0, c_1)[$, K comme en (9), et $X = \bigcup_{K+1}^{\infty} (C_k + W(p, r))$. Comme $X \subset (E + W(p, r)) \cup \left(\bigcup_{K+1}^{\infty} C_k + W(p, r)\right)$, et que d'après (i) $|E + W(p, r)|_n = 0$, on en déduit, en utilisant (12):

(13) $$|X|_n \quad \leq \quad \lambda_5 r^p \sum_{K+1}^{\infty} c_k^{n-p} .$$

Maintenant on doit estimer $|E(r) - X|_n$, et pour cela utiliser la Proposition. Un exemple simple dans $\mathbb{R}^2$ est celui du produit cartésien de l'ensemble parfait symétrique à rapport constant $\frac{1}{4}$ dans I avec lui- même. $n = 2$, $p = 1$, $c_1 = \ldots = c_4 = 2\sqrt{2}$, $c_5 = \ldots = c_{16} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $c_{17} = \frac{\sqrt{2}}{16}$. Si $c_{16} < r < c_{17}$, X est la réunion des 4 croix dont l'une est marquée en noir, et $E(r) - X$ est formé de 16 quarts de cercle de rayon r. On voit ici que tout $x \in E(r) - X$ est proche d'un sommet de $\{C_k\}_{k\leq 16}$.



Dans le cas général, si $x \in E(r) - X$, $x + W(p, r)$ ne peut rencontrer $E \cup (\bigcup_{K+1}^{\infty} C_k)$. Par conséquent $x + W(p, r) \subset \bigcup_{1}^{K} C_k$. D'autre part il existe $y \in E$ à distance $\leq r$ de x. Si par exemple $x_i \leq y_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on se retrouve exactement dans le cas de figure de la Proposition, avec $\Omega = \{C_k\}_{k\leq K}$, moyennant une translation (qui ramène x à l'origine) et une homothétie (d'origine 0, de rapport $\frac{1}{r}$). Ainsi donc x se trouve à distance $\leq r\sqrt{n}$ d'une $(n - p - 1)$-variété de Ω. Il en est de même dans les autres cas de figure. Etant donné (11) et le fait que chaque C_k comprend $2^{p+1}\binom{n}{p+1}$ telles variétés, on obtient

(14) $$|E(r) - X|_n \leq \lambda_6 r^{p+1} \sum_1^K c_k^{n-p-1},$$

λ_6 constante. De (13) et (14) on tire

(15) $$|E(r)|_n \leq \lambda_5 r^p \sum_{K+1}^{\infty} c_k^{n-p} + \lambda_6 r^{p+1} \sum_1^K c_k^{n-p-1}.$$

D'après (5), (6) et l'hypothèse initiale, $\Delta(c_k) \in [n - p - 1, n - p]$. Si $\Delta(c_k) = n - p$, et $\alpha > \Delta(c_k)$, on tire de (15)

$$r^{\alpha-n}|E(r)|_n \leq \lambda_5 c_K^{\alpha-n+p} \sum_{K+1}^{\infty} c_k^{n-p} + \lambda_6 c_K^{\alpha-n+p+1} \sum_1^K c_k^{n-p-1},$$

dont le membre de droite tend vers 0 d'après (6). Si $\Delta(c_k) < n - p$, et $\alpha \in]\Delta(c_k), n - p]$,

$$r^{\alpha-n}|E(r)|_n \leq \lambda_5 c_{K+1}^{\alpha-n+p} \sum_{K+1}^{\infty} c_k^{n-p} + \lambda_6 c_K^{\alpha-n+p+1} \sum_1^K c_k^{n-p-1},$$

dont le membre de droite tend vers 0 d'après (5) and (6). Donc dans tous les cas $\Delta(E) \leq \alpha$, ce qui démontre l'inégalité cherchée, et achève la démonstration du théorème.

V. <u>Démonstration de la Proposition</u> Elle s'appuie sur les faits suivants, dont on ne donne pas la justification. Ω désigne une famille de cubes comme dans l'énoncé.

<u>F1</u> <u>Soit Ω' la section de Ω par un hyperplan $\mathcal{P}$ orthogonal à un axe: si</u> $1 \leq p \leq n - 1$, <u>toute</u> (p - 1)-<u>variété de Ω' est la section d'une p-variété de</u> Ω.

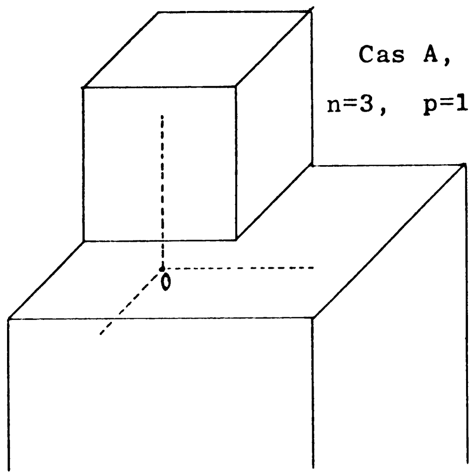
<u>F2</u> <u>Le point</u> P <u>est un sommet de</u> Ω <u>si et seulement si</u> P <u>est l'intersection de</u> n <u>faces orthogonales de</u> Ω.

Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur n. Le cas $n = 1$, $p = 0$, où Ω est une famille d'intervalles et $J(0) = \{0\}$ est clair. Supposons la proposition vraie au rang $n - 1$. Nous allons prendre des sections de I^n par des hyperplans. $\mathcal{P}(i)$ désigne l'hyperplan d'équation $x_i = 0$. Considérons 3 cas:

A) $p \leq n - 2$, et il existe i_0 tel que $I^n \cap \mathcal{P}(i_0) \not\subset \cup\Omega$.

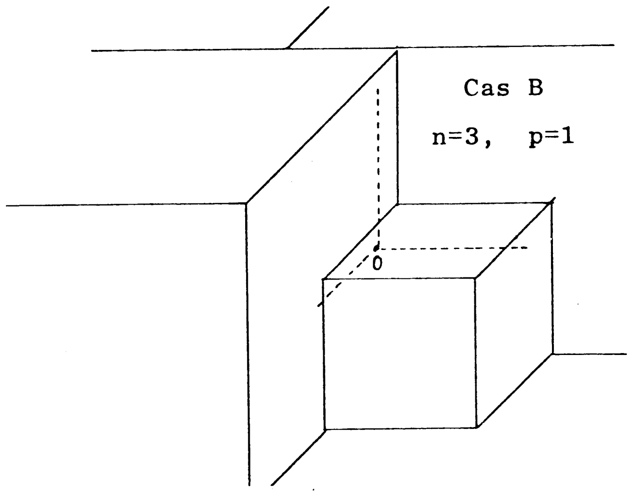
B) $p \leq n - 2$, et pour tout $i = 1, \ldots, n$, $I^n \cap \mathcal{P}(i) \subset \cup\Omega$.

C) $p = n - 1$.



Cas A,
$n=3$, $p=1$

<u>Cas A</u> $\mathcal{P}(i_0)$ est de dimension $n - 1$, et $J(p) \cap \mathcal{P}(i_0) = \{x \in I^n : x_{i_0} = 0$, et $n - p - 1$ des x_i sont nuls pour $i \neq i_0\}$. On applique l'hypothèse de récurrence dans $\mathcal{P}(i_0)$, et on en déduit que I^n rencontre une $(n - p - 2)$-variété de la section $\Omega \cap \mathcal{P}(i_0)$. Par F1, I^n rencontre donc une $(n - p - 1)$-variété de Ω.



Cas B
$n=3$, $p=1$

<u>Cas B</u> Soit y, de coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ un point de $I^n - \cup\Omega$, et $\mathcal{Q}$ l'hyperplan d'équation $x_n = y_n$. La projection de $J(p)$ sur $\mathcal{Q}$ est l'ensemble

$$J' = \{x \in I^n : x_n = y_n, \text{ et } n - p - 1 \text{ des } x_i \text{ sont nuls pour } 1 \leq i \leq n - 1\}.$$

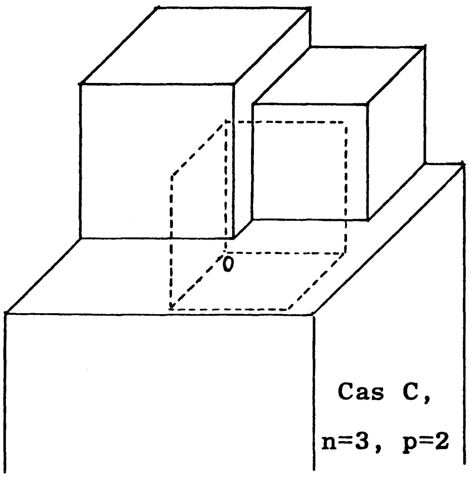
Montrons que $J' \subset \cup\Omega$: tout $x \in J(p)$ a au moins une coordonnée x_i nulle, pour $i \leq n - 1$, donc $x \in \mathcal{P}(i)$, qui est orthogonal à $\mathcal{Q}$.

La projection de x sur $\mathcal{Q}$ appartient donc aussi à $\mathcal{P}(i)$. Mais $I^n \cap \mathcal{P}(i) \subset \cup\Omega$ par hypothèse. Donc la projection de x sur $\mathcal{Q}$ appartient à $\cup\Omega$. L'inclusion étant démontrée, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence dans $\mathcal{Q}$, avec Ω et J', et terminer comme en A).

<u>Cas C</u> $J(n-1)$ est l'ensemble des n faces du cube I^n qui passent par l'origine. On va montrer que, si $J(n-1) \subset \cup\Omega$ et $I^n \not\subset \cup\Omega$, alors

a) I^n contient un sommet z de Ω

b) z est le sommet d'un cube n-dimensionnel Γ tel que $\operatorname{Int}\Gamma \subset I^n - \cup\Omega$.



Cas C, n=3, p=2

a) et b) sont évidents au rang 1. a) est en fait exactement ce qu'on veut démontrer: mais l'hypothèse que b) est vrai au rang $n-1$ est utile pour montrer que a) est vrai au rang n. Supposons donc a) et b) vrais au rang $n-1$.

Soit y, de coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ dans $I^n - \cup\Omega$, $\mathcal{P}_t$ l'hyperplan d'équation $x_n = t$, et I_t, J_t, Ω_t les sections respectives de I^n, $J(n-1)$, Ω par $\mathcal{P}_t$. On sait que $I_0 = J_0$ est inclus dans Ω_0, et que $I_{y_n} \not\subset \Omega_{y_n}$. Il existe donc un réel $t_1 = \sup\{t \in [0, y_n[\ : I_t \subset \Omega_t\}$. Si ε est assez petit, pour tout $t \in]t_1, t_1 + \varepsilon[$ on a $I_t \not\subset \Omega_t$. Un tel t étant donné, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence dans $\mathcal{P}_t$, avec Ω_t et J_t, et en déduire que I_t contient un cube $(n-1)$-dimensionnel Γ_t tel que $\operatorname{Int}\Gamma_t \subset I_t - \Omega_t$, et l'un des sommets z_t de Γ_t est sommet de Ω_t.

Par F2 z_t est l'intersection de $n - 1$ faces orthogonales de $\Omega_{t'}$, donc par F1 z_t appartient à n faces orthogonales $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{n-1}$ de Ω, toutes parallèles à l'axe Ox_n. Comme Ω est fini, on peut prendre un ε assez petit pour que, si $t_1 < t' < t < t_1 + \varepsilon$, la translation définie par le vecteur $(0, \ldots, 0, t' - t)$ transforme Ω_t en $\Omega_{t'}$, Γ_t en $\Gamma_{t'}$, et z_t en $z_{t'}$, les $\mathcal{F}_i$ étant indépendantes de t. Soit $z^* = \lim\limits_{\substack{t \to t_1 \\ t > t_1}} z_t$, $\Gamma^* = \lim\limits_{\substack{t \to t_1 \\ t > t_1}} \Gamma_t$. Par continuité $z^* \in \bigcap\limits_{i=1}^{n-1} \mathcal{F}_i$, Γ^* est un cube $(n - 1)$-dimensionnel inclus dans $\mathrm{Fr}(\cup\Omega) \cap \mathcal{G}_t$, de sommet z^*. Donc z^* appartient à une face horizontale $\mathcal{F}_n$ de Ω: par F2, z^* est un sommet de Ω, et a) est démontré. D'autre part z^* est sommet d'une cube n-dimensionnel dont l'intérieur est inclus dans $\bigcup\limits_{t_1<t<t_1+\varepsilon} \Gamma_t$, donc ne rencontre pas $\cup\Omega$, ce qui démontre b). Ceci achève la démonstration de la proposition.

<u>Remarque</u> Cette démonstration reste utilisable si on remplace les cubes dans l'énoncé du théorème par des "parallélipipèdes" généralisés, de la forme $\prod\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, à condition que le rapport $\dfrac{\max(b_i - a_i)}{\min(b_i - a_i)}$ reste borné pour la famille (C_k).

<u>Références</u>

[1] E. M. Stein, "Singular integrals and differentiability properties of functions", Princeton University Press, 1970.

[2] C. Tricot, "12 définitions de la densité logarithmique", C. R. Acad. Sc. Paris 293 (1981), 549-552.

[3] C. Tricot, "Metric properties of compact sets of measure 0 in $\mathbb{R}^2$", à paraître.