

THÈSES D'ORSAY

CHRISTIAN GÉRARD

Propagation de la polarisation pour des problèmes aux limites

Thèses d'Orsay, 1986

http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1986__0190__P0_0

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

x 65783

ORSAY
n° d'ordre

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

le titre de DOCTEUR de
l'Université de Paris-Sud
Spécialité : Mathématiques Pures



par

Christian GERARD

Sujet : PROPAGATION DE LA POLARISATION POUR DES PROBLEMES AUX LIMITES.

Soutenue le 10 juin 1986 devant la commission d'examen :

MM.	J.M. BONY	Président
	S. ALINHAC	
	A. GRIGIS	Examineurs
	G. LEBEAU	
	J. SJÖSTRAND	

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE

Opérateurs pseudodifférentiels et Fourier intégraux totalement caractéristiques	6
Front d'onde polarisé d'une distribution vectorielle et propagation à l'intérieur	15
Systèmes de type principal réel et propagation de la polarisation le long des caractéristiques transversales et tangentes au bord	18
Propagation de la polarisation pour des problèmes aux limites	50

DEUXIEME PARTIE

Propagation de la polarisation dans des domaines convexes pour les bicaractéristiques	77
--	----

REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord rendre hommage à la mémoire du Professeur Charles Goulaouic. C'est lui qui m'a indiqué l'article de Dencker et il m'a toujours encouragé à travailler sur ce sujet.

Ma reconnaissance va ensuite au Professeur J. Sjöstrand qui a accepté d'être mon directeur de thèse après la disparition de Charles Goulaouic, et qui m'a appris beaucoup de choses.

Je remercie également les Professeurs J.M. Bony, S. Alinhac et G. Lebeau pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie enfin A. Grigis pour ses conversations et ses encouragements et pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Enfin, je tiens à remercier Claudine Harmide et Dominique Concha pour le soin qui a été apporté à la réalisation matérielle de ce travail.

S E C T I O N 0
=====

INTRODUCTION

Dans l'étude des solutions de systèmes hyperboliques comme par exemple les équations de Maxwell, on s'intéresse tout d'abord au tracé de rayons, ce qui devient dans le formalisme microlocal l'étude de la propagation des singularités. De nombreux travaux ont été consacrés à ce sujet, tant pour la propagation libre que pour les problèmes aux limites.

L'étape suivante consiste à étudier la polarisation des solutions.

On sait que de nombreux phénomènes physiques intéressants en optique sont liés à la polarisation de la lumière. Citons par exemple le cas des cristaux biréfringents ou des verres polaroïds.

Dans [1] N. Dencker a donné une définition microlocale de la polarisation d'une distribution vectorielle qui correspond à la traduction microlocale du tracé de rayons. Dencker démontre dans [1] que pour des solutions de systèmes d'équations aux dérivées partielles qui sont en un certain sens à caractéristiques réelles simples, on peut prédire la propagation de la polarisation le long des rayons.

On observe une torsion de la polarisation le long des rayons qui vient des termes d'ordre inférieur du système.

L'objet du présent travail est d'étudier la polarisation des solutions de problèmes aux limites. Les résultats de Dencker traitant le problème de la polarisation à l'intérieur, il reste à étudier le problème de la réflexion au bord.

On suppose que u est une solution d'un problème aux limites vérifiant des hypothèses convenables. En un point du bord arrivent plusieurs rayons, éventuellement tangents au bord. On suppose que l'on connaît la

polarisation de u sur un certain nombre de ces rayons (polarisation entrante), et on veut déterminer la polarisation de u sur les autres rayons (polarisation sortante).

On observe alors que la polarisation sortante est l'image de la polarisation entrante par une application linéaire qui dépend de la condition au bord. L'intérêt de ce résultat n'est pas que théorique car il montre que l'on peut déterminer une condition au bord inconnue en envoyant sur le bord des rayons avec une polarisation donnée et en observant la polarisation sortante.

Dans la Section I, on introduit quelques espaces de fonctions et de distributions sur une variété à bord et on rappelle le calcul des opérateurs pseudo-différentiels totalement caractéristiques introduits dans [2].

Dans la Section II, on rappelle les résultats et définitions de N. Dencker sur la polarisation des solutions de systèmes d'équations aux dérivées partielles à l'intérieur et on introduit une notion de polarisation construite sur des espaces de régularité finie.

Dans la Section III, on introduit la classe de problèmes aux limites que l'on va étudier et on démontre les principaux résultats sur la propagation de la polarisation le long de rayons transverses et tangents au bord.

Dans la Section IV, on utilise les résultats de la Section III pour démontrer des résultats sur la réflexion de la polarisation. On don-

ne pour finir des exemples où l'on applique les résultats précédents aux équations de Maxwell, à l'optique des cristaux et aux équations de la magnétohydrodynamique linéarisées.

PREMIERE PARTIE



S E C T I O N I
=====

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ET FOURIER INTEGRAUX
TOTALEMENT CARACTERISTIQUES

Dans cette section, nous introduisons quelques espaces de fonctions et de distributions sur une variété à bord et nous rappelons quelques résultats sur les opérateurs pseudo-différentiels et intégraux de Fourier introduits par Melrose dans [2].

I.1. ESPACES DE DISTRIBUTIONS ET DE FONCTIONS SUR UNE VARIETE A BORD ([2]).

Soit M une variété à bord C^∞ de bord ∂M et $\overset{\circ}{M} = M \setminus \partial M$.
On notera $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions C^∞ jusqu'au bord sur M ,
et $C_c^\infty(M)$ l'espace des fonctions de $C^\infty(M)$ à support compact. On les munit de la convergence uniforme des dérivées sur les compacts de M .
 $\dot{C}^\infty(M) \subset C^\infty(M)$ et $\dot{C}_c^\infty(M) \subset C_c^\infty(M)$ désignent les sous espaces formés des fonctions qui s'annulent à tous les ordres sur ∂M .

$D'(M) = (C_c^\infty(M))'$ est l'espace des distributions sur $\overset{\circ}{M}$ prolongeables,
et $\dot{D}'(M) = (\dot{C}_c^\infty(M))'$ est l'espace des distributions supportées par M .
On notera $\tilde{C}'(M) \subset D'(M)$ et $\tilde{C}'_c(M) \subset \dot{D}'(M)$ les sous espaces formés des distributions à support compact.

Enfin on a besoin d'espaces de régularité finie.

On suppose donc qu'on a choisi des coordonnées locales (x,y) près de ∂M de telle sorte que $\partial M = \{x=0\}$ et $x \geq 0$ sur M .

Pour $s \in \mathbb{R}$ on définit alors l'espace suivant :

Définition 1.1. $\mathcal{H}^s(M)$ ^{déf} = $\{u \in \mathcal{D}'(M) \mid D_x^j u \in C^0(\bar{R}_x^+, H^{s-j}(R_y^n)) \forall j \in \mathbb{N}\}$

où $H^s(R_y^n)$ désigne l'espace de Sobolev classique dans les variables y .

I.2. LE FIBRE COTANGENT COMPRESSE. ([2]).

Dans [2] Melrose définit un fibré vectoriel $\tilde{T}^*(M)$ qui est le support naturel du $WF_b u$ utilisé pour l'étude des problèmes aux limites. Nous en rappelons la définition et nous donnons quelques propriétés.

Soit $V \subset C^\infty(TM)$ l'espace des champs de vecteurs sur M tangents à ∂M . C'est l'espace des sections d'un fibré vectoriel C^∞ que l'on note \tilde{TM} . Pour $m \in M$ on considère la relation d'équivalence sur V :

$$V_m \sim V'_m \Leftrightarrow \begin{cases} (V-V') f(m) = 0 \quad \forall f \in C^\infty(M) & (2.1) \\ \text{si } m \in \partial M \quad d((V-V')g)(m) = 0 \quad \forall g \in C^\infty(M) \text{ avec } g=0 \text{ sur } \partial M. \end{cases}$$

On a la proposition suivante : (Lemme 2.2.I de [2]).

Proposition 2.1. On peut identifier V/\sim_m à $\tilde{T}_m M$ de telle sorte que $V = C^\infty(\tilde{TM})$ et il y a une application $C^\infty(2.2) \tilde{TM} \rightarrow TM$ d'image $\overset{\circ}{TM} \cup T(\partial M)$

Démonstration: Au dessus de $m \in \overset{\circ}{M}$ la condition (2.1) est vide donc définit la fibre du fibré tangent TM . Donc si $m \notin \partial M$ $T_m M = \tilde{T}_m M$. Si $m \in \partial M$ prenons des coordonnées locales (x,y) avec $M = \{x=0\}$. $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Les éléments de V s'écrivent $\sum_{j=1}^n a_j(x,y) \frac{\partial}{\partial y_j} + xb(x,y) \frac{\partial}{\partial x}$ et la classe de V par \tilde{m} est déterminée par $(b(m), a_1(m), \dots, a_n(m))$ l'application (2.2) qui envoie (b, a_1, \dots, a_n) sur (xb, a_1, \dots, a_n) vérifie les propriétés de la proposition 2.1. #

Soit $\tilde{T}^*(M)$ le dual de $\tilde{T}M$. Par dualité, l'application (2.2) donne une application $\pi : T^*(M) \rightarrow \tilde{T}^*(M)$.

Dans des coordonnées locales, une section de $\tilde{T}^*(M)$ s'écrit :

$$\alpha = \lambda(x,y)x^{-1} dx + \sum_{j=1}^n \eta_j(x,y) dy_j$$

où $dy_j, x^{-1}dx$ est la base duale de $\frac{\partial}{\partial y_j}, x \frac{\partial}{\partial x}$ ($x \frac{\partial}{\partial x}$ est considéré comme une section de $\tilde{T}M$), alors l'application π s'écrit :

$$\xi dx + \sum_{j=1}^n \eta_j dy_j \rightarrow x\xi \frac{dx}{x} + \sum_{j=1}^n \eta_j dy_j,$$

on a donc $\lambda = x\xi, \eta = \eta$

on voit donc en séparant les cas $x=0$ et $x>0$ que l'image de $T^*(M)$ par π s'identifie naturellement à $T^*(M) \cup T^*(M)$. C'est sur ce dernier ensemble qu'est défini le WF_b de [7].

I.3. OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS TOTALEMENT CARACTERISTIQUES.

Dans ce paragraphe nous rappelons la définition et quelques propriétés d'une classe d'opérateurs pseudo-différentiels sur une variété à

bord. . Leur principale propriété est la façon dont ils préservent les valeurs au bord. On se place sur $M = \overline{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}^n$ avec les coordonnées naturelles $z = (x, y)$. On considère des opérateurs qui s'écrivent sous forme d'intégrale oscillante :

$$Au(z) = (2\pi)^{-n-1} \int e^{i(z-z')\zeta} \tilde{a}(z, \zeta) u(z') dz' d\zeta \quad (3.1)$$

avec $\tilde{a}(z, \zeta) = a(x, y, x\xi, \eta)$ et $a(x, y, \lambda, \eta) \in S_{1,0}^m(M \times \mathbb{R}_{\lambda, \eta}^{n+1})$.

Il est démontré dans [2] que A envoie $C_c^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$, et $\dot{C}^s(M)$ dans $\dot{D}^s(M)$.

Définition 3.1. : L'espace $L_b^m(M)$ des opérateurs pseudodifférentiels totalement caractéristiques est l'espace des applications linéaires continues $A : C_c^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ telles que $\rho' A \rho$ est de la forme (3.1) pour tous $\rho, \rho' \in C_c^\infty(M)$.

On peut définir le symbole principal de $A \in L_b^m(M)$ qui est une fonction sur $\tilde{T}^*(M)$.

Proposition 3.2 : l'application symbole principal est un isomorphisme :

$$\tilde{\sigma}_m : L_b^m(M) / L_b^{m-1}(M) \longrightarrow S^m(\tilde{T}^*(M)) / S^{m-1}(\tilde{T}^*(M))$$

Proposition 3.3. : On a une application $(\)_\partial : L_b^m(M) \rightarrow L^m(\partial M)$ telle que

$$\forall u \in C_o^\infty(\overline{\mathbb{R}^+}, \dot{C}^s(\mathbb{R}^n)) \quad \forall A \in L_b^m(M) \quad Au|_{x=0} = (A)_\partial u|_{x=0} .$$

En effet on voit facilement sur la formule (3.1) que A_∂ est défini par

$$A_\partial u = (2\pi)^{-n} \int e^{i(y-y')\eta} a(o, y, o, \eta) u(y') dy' d\eta$$

et on a : $\sigma_m(A_\partial) = \sigma_m(A)|_{\tilde{T}^*(\partial M)}$

On a un calcul symbolique pour les opérateurs de $L_b^m(M)$ que nous ne rappellerons pas et qui coïncide avec le calcul symbolique dans $L^\infty(\overset{\circ}{M})$ au-dessus de $\overset{\circ}{M}$.

Nous nous contentons de renvoyer à l'article original de Melrose [2] pour une étude complète de ces opérateurs. Rappelons simplement la définition de $WF_b u$ associée à ces opérateurs.

Définition 3.4 : Si $u \in D'(M)$ $WF_b u = \cap \{ \Sigma_b(A) ; A \in L_b^0(M) \text{ à support propre et } Au \in \dot{A}(M) \}$ où $\Sigma_b(A) \subset \tilde{T}^*(M)$ est l'ensemble caractéristique de A .

I.4. TRANSFORMATIONS CANONIQUES A BORD ET OPERATEURS INTEGRAUX DE FOURIER TOTALEMENT CARACTERISTIQUES.

On connaît la définition d'une transformation canonique χ entre deux variétés sans bord. Si X et Y sont deux variétés à bord on peut demander que χ préserve le bord i.e. $\chi(\partial T^*(X)) \subset \partial T^*(Y)$ (4.1).

Proposition 4.1 : Si X et Y sont deux variétés à bord et $\gamma : \Omega \rightarrow T^*(Y) \setminus 0$ est une transformation canonique qui vérifie (4.1) avec Ω ouvert conique de $T^*(X) \setminus 0$ et si $(i_x^*)^{-1}(i_x^* \rho) \cap (\Omega \cap \partial T^*(X))$ est connexe $\forall \rho \in (\Omega \cap \partial T^*(X))$, il existe une unique transformation canonique $\partial \chi : i_x^*(\Omega \cap \partial T^*(X) | N^*(\partial X)) \rightarrow T^*(\partial Y)$ telle que le diagramme commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega \cap \partial T^*(X) / N^*(\partial X) & \xrightarrow{\chi} & \partial T^*(Y) \\
 \downarrow i_x^* & & \downarrow i_y^* \\
 T^*(\partial X) & \xrightarrow{\partial \chi} & T^*(\partial Y)
 \end{array}$$

ici i_x^* désigne la projection naturelle de $\partial T^*(X)$ sur $T^*(\partial X)$.

Pour se débarrasser de l'hypothèse de connexité des fibres de i_x^* on utilise des germes de transformations canoniques. De plus on veut des transformations canoniques qui conservent les fonctions de $(x, y, x\xi, \eta)$. Pour cela on introduit l'espace de fonctions suivant :

Définition 4.2. : Soit $\rho \in \partial T^*(M)$ et $C^\infty(\rho)$ l'anneau des germes en ρ de fonctions C^∞ sur $T^*(M)$. On dit que $f \in C^\infty(\rho)$ a des traces polynomiales d'ordre $t \in \mathbb{Z}$ si dans toutes coordonnées canoniques duales (x, y, ξ, η) en ρ telles que $M = \{x \geq 0\}$ on a : $\partial_x^k f(o, y, \xi, \eta)$ est un polynôme en ξ de degré $\leq k+t$ $\forall k \geq 0$. (4.2)

Cet espace de germes est noté C_{tp}^∞ .

On vérifie facilement que C_{op}^∞ est l'espace des germes en ρ des fonctions C^∞ sur $\tilde{T}^*(M)$. Et il suffit de vérifier la propriété (4.2) dans un seul système de coordonnées canoniques.

Définition 4.3 : Si $\rho' \in \partial T^*(X) \setminus N^*(\partial X)$, $\rho \in \partial T^*(Y)$ un germe de transformation canonique à bord est un germe χ de transformation canonique χ : $T^*(X), \rho' \rightarrow T^*(Y), \rho$ qui vérifie (4.1) et telle que : $X^* C_{t, \rho'}^\infty \rightarrow C_{t, \rho}^\infty$ $\forall t \in \mathbb{Z}$. (4.3).

La proposition suivante montre qu'il suffit de vérifier (4.3) pour $t = 1$.

Proposition 4.4 : χ est un germe de transformation canonique à bord ssi χ vérifie (4.1) et $\chi_* \mu$ appartient à $C_{1, \rho}^\infty$ pour un $\mu \in C_{1, \rho'}^\infty$ qui n'est pas constant le long de la fibre $(i^*)^{-1} i^* \rho$.

On peut interpréter la définition 4.3 à l'aide de \tilde{T}^*M

Proposition 4.5 : un germe de transformation canonique $\chi : T^*(X), \rho' \rightarrow T^*(Y), \rho$ vérifiant (4.1) est un germe de transformation canonique à bord si et seulement si il se relève en un difféomorphisme local :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\chi} : \tilde{T}^*(X), \rho' & \xrightarrow{\quad} & \tilde{T}^*(Y), \rho \\
 \pi_x \downarrow & & \downarrow \pi_y \\
 \chi : T^*(X), \rho' & \xrightarrow{\quad} & T^*(Y), \rho
 \end{array}
 \quad \text{avec } \pi_x(\tilde{\rho}') = \rho' \quad \pi_y(\tilde{\rho}) = \rho$$

On peut quantifier ces transformations canoniques par des opérateurs intégraux de Fourier qui s'écrivent formellement comme intégrale oscillante :

$$Fu(z) = \int e^{i\varphi(z,y',x\xi,\theta) - ix'\xi} a(z,y',x\xi,\theta) u(z') dz' d\xi d\theta$$

avec $\varphi \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N+1} \setminus 0)$ réelle et homogène de degré 1 en $(\mu, \theta) \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $a \in S^m(M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N+1} \setminus 0)$.

On a la proposition suivante analogue à Prop.3.3 :

Proposition 4.6 : On a $Fu|_{x=0} = \partial F(u|_{x=0})$ où ∂X est un opérateur intégral de Fourier associé à $\partial \chi$.

I.5. QUELQUES PROPRIETES DE L'ESPACE \mathcal{K}^S .

Démontrons quelques propriétés de l'espace \mathcal{K}^S qui seront nécessaires par la suite.

Lemme 5.1 : Soit $u \in (D'(M))^m$ tel que $D_x u - G(x,y,D_y)u \in C^\infty(M)$ avec $G \in L^{1'}(M)$. Alors si $u \in (\mathcal{K}^S(M))^m$ on a : $Au \in (\mathcal{K}^S(M))^m$, $\forall A \in L_b^0(M)$ à support propre.

Démonstration : On va utiliser le théorème de préparation de Malgrange pour écrire A sous la forme $B_o(xD_x - xG) + C$ avec $B \in L_b^{-1}(M)$ et $C \in L^{0'}(M)$.

Soit $a(x,y,\lambda,\eta) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{-i}(x,y,\lambda,\eta)$ avec $a_{-i} \in S_b^{-i}(M)$ le développement asymptotique

du symbole de A . Cherchons B sous forme de série asymptotique

$b(x,y,\lambda,\eta) = \sum_{i=1}^{+\infty} b_{-i}(x,y,\lambda,\eta)$ avec $b_{-i} \in S_b^{-i}(M)$.

D'après le théorème de préparation de Malgrange il existe $b_{-1} \in S_b^{-1}(M)$ et

$c_o \in S^{0'}(M)$ tels que : $a_o(x,y,\lambda,\eta) = b_{-1}(\lambda I_m - xg_1(x,y,\eta)) + c_o(x,y,\eta)$.

Soit $\tilde{a}_{-1}(x,y,\lambda,\eta)$ le terme d'ordre -1 dans le développement de $a - b_{-1}o(xD_x - xG) - c_o$ on peut à nouveau trouver $b_{-2} \in S_b^{-2}(M)$ et $c_{-1} \in S^{-1'}(M)$ tels que $\tilde{a}_{-1} =$

$b_{-2}(\lambda I_m - xg_1) + c_{-1}$ et $a - (b_{-1} + b_{-2}) \circ (xD_x - xG) - c_o - c_{-1} \in L_b^{-2}(M)$. On peut ainsi éliminer tous les termes du symbole complet de a . Donc il existe

$B \in L_b^{-1}(M)$ et $C \in L^{0'}(M)$ tels que $A = B o(xD_x - xG) + C$ modulo $S_b^{-\infty}$ Alors : $Au = Cu$ modulo $C^\infty(M)$.

D'autre part comme $D_x u - G(x, y, D_y)u \in C^\infty(M)$ $Cu \in (\mathcal{K}^s(M))^m$ si et seulement si $Cu \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_x^+, H^s(\mathbb{R}_y^n))$ et comme $C \in L^{0,1}(M)$, $Cu \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_x^+, H^s(\mathbb{R}_y^n))$
 On a donc démontré le lemme. # .

On a la propriété suivante qui fait le lien entre les espaces $\mathcal{K}^s(M)$ et $H^s(M)$ pour $s > 0$.

Lemme 5.2 : Soit $u \in D'(M)$ solution de $D_x u - G(x, y, D_y)u \in C^\infty(M)$ avec $G \in L^{1,1}(M)$, tel que $u \in \mathcal{K}^s(M)$ microlocalement en (x, y, ξ, η) avec $x > 0$, $s > 0$; Alors $u \in H^s(M)$ microlocalement en (x, y, ξ, η) .

Démonstration : $\mathcal{K}^s(M)$ est inclus dans $L_{loc}^2(\overline{\mathbb{R}}_x^+, H^s(\mathbb{R}_y^n))$.

Si $u \in \mathcal{K}^s(M)$ microlocalement en (x, y, ξ, η) , il existe $a \in S^0(M)$ elliptique en (x, y, ξ, η) tel que $au \in \mathcal{K}^s(M)$. Il faut remarquer que comme $D_x u - G(x, y, D_y)u \in C^\infty(M)$, d'après le lemme 5.1, la notion d'appartenance microlocale à $\mathcal{K}^s(M)$ ne dépend pas de a . Notons $v = au$. On a donc :

$$(5.1) \quad \int (1 + |\eta|^2)^s |\hat{v}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta < +\infty . \text{ D'autre part } \text{WF}u \cap \{\eta=0\} = \emptyset .$$

Dans (5.1) on peut donc intégrer seulement sur un cône $|\xi| \leq C|\eta|$.

on a : $\int_{|\xi| \leq C|\eta|} (1 + |\xi| + |\eta|)^{2s} |v(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta < +\infty$ car sur $|\xi| \leq C|\eta|$,
 $1 + |\xi| + |\eta| \leq C(1 + |\eta|)$. Donc $v \in H^s(M)$ # .

Donnons enfin quelques notations :

On suppose qu'on a fixé des coordonnées locales au voisinage de $\partial M(x, y)$ avec $\partial M = \{x=0\}$. On notera $L_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}_y^n)$ et $L_{cl}^m(\mathbb{R}_y^n)$ l'espace des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre m de type ρ, δ et classiques dans les variables y , pour $m \in \mathbb{R}$, et $L_{\rho, \delta}^{m'}(M)$, $L^{m'}(M)$ les espaces $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_x^+, L_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}_y^n))$ et $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_x^+, L_{cl}^m(\mathbb{R}_y^n))$. On notera $L_{\rho, \delta}^{m, p'}(M)$ et $L_{cl}^{m, p'}(M)$ l'espace des opérateurs de la forme $\sum_{\mu=0}^P P_\mu D_x^\mu$ avec $P_\mu \in L_{\rho, \delta}^{m-\mu'}(M)$ et $L_{cl}^{m-\mu'}(M)$. On notera $L_b^{m, p}(M)$ l'espace des opérateurs de la forme $\sum_{\mu=0}^P P_\mu D_x^\mu$ avec $P_\mu \in L_b^{m-\mu}(M)$ On notera $S_{\rho, \delta}^m$, S_{cl}^m ,

S_b^m les classes de symboles associées à ces classes d'opérateurs. Si q est une fonction scalaire dans $C^\infty(\tilde{T}^*M)$ le champ hamiltonien de q , H_q , s'écrit dans les coordonnées (x, y, λ, η) :

$$H_q = \frac{\partial q}{\partial \lambda} x \cdot \partial_x - \frac{\partial q}{\partial x} x \cdot \partial_\lambda + \sum_{i=1}^n \frac{\partial q}{\partial \eta_j} \partial_{y_j} - \frac{\partial q}{\partial y_j} \partial_{\eta_j} .$$

Si \tilde{p} et p sont deux $m \times m$ matrices dans $S_b^m(M)$ on note :

$$\{\tilde{p}, p\} = \partial_\lambda \tilde{p} x \cdot \partial_x p - \partial_x \tilde{p} x \cdot \partial_\lambda p + \sum_{i=1}^n \partial_{\eta_j} p \partial_{y_j} \tilde{p} - \partial_{y_j} p \partial_{\eta_j} \tilde{p}$$

et $p_{m-1}^s = p_{m-1} - \frac{1}{2i} (\partial_\lambda p + x \cdot \partial_x \partial_\lambda p + \sum_{i=1}^n \partial_{y_j} \partial_{\eta_j} p) .$

S E C T I O N II
 =====

FRONT D'ONDE POLARISE D'UNE DISTRIBUTION VECTORIELLE
 ET PROPAGATION A L'INTERIEUR

Dans cette section nous commençons par rappeler les résultats et définitions de N. Dencker [1] sur le front d'onde polarisé d'une distribution. Nous introduisons une notion de front d'onde polarisé nécessaire pour étudier les solutions de problèmes aux limites. Nous donnons aussi quelques propriétés de ce front d'onde polarisé.

II.1. LE FRONT D'ONDE POLARISE D'UNE DISTRIBUTION VECTORIELLE SUR UNE VARIETE A BORD.

Dans tout ce paragraphe X désigne une variété C^∞ de dimension n .

Définition 1.1 ([1]) : Soit $u \in (D'(X))^m$. le front d'onde polarisé de u est :

$$\text{WFpol } u = \bigcap N_A \quad \text{avec } N_A = \{(x, \xi, w) \in T^*(X) \setminus 0 \times \mathbb{C}^m \mid w \in \text{Ker } a(x, \xi)\}$$

$$Au \in C^\infty(X)$$

où A désigne un $1 \times m$ système d'opérateurs pseudodifférentiels dans $L_{cl}^0(X)$, de symbole principal $\sigma(A) = a(x, \xi)$.

On notera $\text{WFpol } u(x, \xi)$ la fibre de $\text{WFpol } u$ au-dessus de (x, ξ) . $\text{WFpol } u$ indique dans quelles directions de \mathbb{C}^m u est microlocalement C^∞ . Dans la suite on aura besoin d'une version $H^s(X)$ de $\text{WFpol } u$, notée $\text{WFpol}_s u$ que l'on définit de façon analogue en demandant $Au \in H^s(X)$.

On a les propriétés suivantes pour $\text{WFpol } u$ et $\text{WFpol}_s u$:

Proposition 1.2. ([1]). $\pi(\text{WFpol } u \setminus 0) = \text{WF } u$ (resp. $\pi(\text{WFpol}_s u \setminus 0) = \text{WF}_s u$), si π est la projection de $T^*(X) \times \mathbb{C}^m$ sur $T^*(X)$ et $\text{WF}_s u$ le front d'onde H^s de u .

Proposition 1.3 ([1]) : Si A est un $l \times m$ système dans $L_{cl}^p(X)$ de symbole principal $a(x, \xi)$ alors $a(WFpol u) \subset WFpol Au$ (resp. $a(WFpol_s u) \subset WFpol_{s-p} Au$) si

$$a(x, \xi, w) = (x, \xi, a(x, \xi)w)$$

Proposition 1.4 ([1]) : Si E est un $m \times m$ système dans $L_{cl}^p(X)$ de symbole principal $e(x, \xi)$, elliptique près de $(x_0, \xi_0) \in T^*(X) \setminus 0$, $WFpol Eu = e(WFpol u)$ (resp. $WFpol_{s-p} Eu = e(WFpol_s u)$) au voisinage de (x_0, ξ_0) .

Dans [1] N. Dencker introduit des systèmes de type principal réel et les orbites hamiltoniennes de ces systèmes, dont nous rappelons les définitions.

Définition 1.5 ([1]) : un $m \times m$ système $P \in L_{cl}^p(X)$ de symbole principal $p(x, \xi)$ est de type principal réel en $(x_0, \xi_0) \in T^*(X) \setminus 0$ s'il existe un $m \times m$ symbole $\tilde{p}(x, \xi)$ tel que : $\tilde{p}p = q(x, \xi) \Pi_m$ au voisinage de (x_0, ξ_0) , où $q(x, \xi)$ est un symbole scalaire de type principal réel et Π_m est l'identité de \mathbb{C}^m .

Définition 1.6 ([1]) : avec les notations de déf 1.5, on note $D_p^w = H_q w + \frac{1}{2} \{\tilde{p}, p\} w + i\tilde{p} p_{m-1}^s w$, où w est une fonction C^∞ sur $T^*(X) \setminus 0$ à valeurs dans \mathbb{C}^m et p_{m-1}^s est le symbole sous principal de P . Les orbites hamiltoniennes d'un système P de type principal réel sont les ensembles $\Gamma = \{(x, \xi, w(x, \xi)), (x, \xi) \in \gamma\}$ où γ est une bicaractéristique nulle de q et $w(x, \xi) \in \text{Ker } p(x, \xi)$ vérifie $D_p^w = 0$.

Le résultat essentiel de [1] est que $WFpol u$, pour u solution de $Pu \in C^\infty(X)$ est une union d'orbites hamiltoniennes de P . Ce résultat s'étend immédiatement à $WFpol_s u$

Théorème 1.7 : Soit u solution de $Pu = f$, avec $P \in L_{cl}^p(X)$ de type principal réel ; si f est microlocalement H^s au voisinage de (x_0, ξ_0) , $WFpol_{s+p-1} u$ est une union d'orbites hamiltoniennes de P au-dessus d'un voisinage de (x_0, ξ_0) .

II.2. LE FRONT D'ONDE POLARISÉ D'UNE DISTRIBUTION VECTORIELLE SUR UNE VARIÉTÉ A BORD.

Soit M une variété à bord C^∞ de bord ∂M et soit $\overset{\circ}{M} = M \setminus \partial M$. On va introduire une notion de front d'onde polarisé construit sur $\mathcal{K}^S(M)$ qui sera défini uniquement pour les solutions de systèmes non caractéristiques. Vu le problème qui nous intéresse et qui est énoncé dans la section IV, il ne nous a pas semblé nécessaire d'introduire une notion de front d'onde polarisé construit sur le WF_b utilisé par différents auteurs pour l'étude des problèmes aux limites. Signalons cependant que certains résultats sur $WF_b u$, en particulier le fait qu'en un point du bord on peut l'obtenir comme réunion des fronts d'onde des traces de u , ne s'étendent pas immédiatement à un $WFpol_b u$ éventuel.

Définition 2.1. : Soit $u \in (D'(M))^m$ solution de $D_x u - Gu \in C^\infty(M)$ avec $G \in L^1(M)$ et $\rho \in T^*(\overset{\circ}{M})$. On définit :

$$WFpol_s u(\rho) = \cap_{\substack{N_A \\ Au \in \mathcal{K}^S(M)}} N_A \quad \text{avec } N_A = \{w \in \mathcal{C}^m \mid w \in \text{Ker } a(\rho)\},$$

où A désigne un $1 \times m$ système dans $L^0_{cl}(\overset{\circ}{M})$ de symbole principal $a(x, y, \xi, \eta)$.

D'après le lemme 5.1 I il suffit de prendre A dans $L^0(\overset{\circ}{M})$ dans la définition. Les trois propositions suivantes se démontrent comme dans [1] en utilisant le lemme 5.1. I .

Proposition 2.1 : $\pi(WFpol_s u \setminus 0) = WF_s u$ si $WF_s u$ est le front d'onde $\mathcal{K}^S(M)$ et si $u \in (D'(M))^m$ est solution de $D_x u - Gu \in C^\infty(M)$. (2.1)

Proposition 2.2 : Si $u \in (D'(M))^m$ vérifie (2.1) et A est un $1 \times m$ système dans $L^0_{cl}(\overset{\circ}{M})$ de symbole principal $a(x, y, \xi, \eta)$, alors $a(WFpol_s u) \subset WFpol_s Au$

Proposition 2.3 : Si E est $m \times m$ système d'opérateurs pseudodifférentiels dans $L^0_{cl}(\overset{\circ}{M})$, elliptique près de $(x, y, \xi, \eta) \in T^*(\overset{\circ}{M}) \setminus 0$, alors pour $u \in (D'(M))^m$ vérifiant (2.1) on a $WFpol_s Eu = e(WFpol_s u)$.

S E C T I O N I I I

SYSTEMES DE TYPE PRINCIPAL REEL ET PROPAGATION
DE LA POLARISATION LE LONG DES BICARACTERISTIQUES
TRANSVERSALES ET TANGENTES AU BORD.

Dans cette section on introduit la classe de problèmes aux limites que l'on va étudier et on démontre les résultats de propagation qui seront utilisés dans la section IV pour obtenir les résultats principaux.

III.1. SYSTEMES DE TYPE PRINCIPAL REEL.

On considère des problèmes aux limites du type suivant :

$$(1') \begin{cases} D_x u - G(x,y,D_y)u \in C^\infty(M) \\ \beta(y,D_y)u(o) \in C^\infty(\partial M) \end{cases} \quad \text{sur } M = \overline{\mathbb{R}}_x^+ \times \mathbb{R}_y^n .$$

avec les hypothèses suivantes : (H) .

1) $G(x,y,D_y)$ est une $m \times m$ matrice dans $S_{cl}^{1'}(M)$ de symbole principal $g_1(x,y,\eta)$

$$2) f = \det(\xi \mathbb{I}_m - g_1(x,y,\eta)) = \prod_{\nu=1}^j (\xi - \mu_\nu(x,y,\eta))^{\alpha_\nu} \prod_{\nu=j+1}^k ((\xi - a_\nu(x,y,\eta))^{2-b_\nu(x,y,\eta)})^{\alpha_\nu} e(x,y,\xi,\eta)$$

avec i) pour $1 \leq \nu \leq k$, $e, \mu_\nu, a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R} \quad \forall (x,y,\eta) \in \overline{\mathbb{R}}_x^+ \times T^*(\mathbb{R}_y^n)$

ii) pour $1 \leq \nu \leq k, 1 \leq \nu' \leq k, \nu \neq \nu'$ on a : $\mu_\nu \neq \mu_{\nu'}, a_\nu \neq a_{\nu'}, \mu_\nu \neq a_{\nu'}$,

$$\forall (x,y,\eta) \in \overline{\mathbb{R}}_x^+ \times T^*(\mathbb{R}_y^n)$$

iii) $e(x,y,\xi,\eta) \neq 0 \quad \forall (x,y,\xi,\eta) \in T^*(M)$.

3) $\xi \mathbb{I}_m - g_1$ est de type principal réel, i.e. $\exists \tilde{p}$ $m \times m$ matrice dont les éléments sont dans des espaces $S_{cl}^{1,k'}(M)$ telle que :

$$\tilde{p}(\xi \mathbb{I}_m - g_1(x,y,\eta)) = \prod_{\nu=1}^j (\xi - \mu_\nu(x,y,\eta))^{\alpha_\nu} \prod_{\nu=1}^k (\xi - a_\nu(x,y,\eta))^{2-b_\nu(x,y,\eta)} e(x,y,\xi,\eta) \mathbb{I}_m$$

4) $\beta(y,D_y)$ est une $p \times m$ matrice dans $L_{cl}^0(\mathbb{R}_y^n)$.

Démontrons le lemme :

Lemme 1.1 : Soit $M(x,y,\eta)$ une $2m \times 2m$ matrice dans $S_{cl}^{1'}(M)$ et a et b deux symboles scalaires dans $S_{cl}^{1'}(M)$ et $S_{cl}^{2'}(M)$ respectivement. On suppose que $\det(\xi \mathbb{I}_{2m} - M) = ((\xi - a)^2 - b)^m$ et que $(M - a \mathbb{I}_{2m})^2 - b \mathbb{I}_{2m} = 0$ au voisinage de $(0, y^0, \eta^0)$. Alors il existe $S(x,y,\eta)$ $2m \times 2m$ matrice dans $S_{cl}^{0'}(M)$, homogène de degré 0 en η et définie dans un voisinage V de $(0, y^0, \eta^0)$ telle que :

S est elliptique et

$$(1.4) \quad S^{-1}MS = \tilde{M} \quad \text{avec} \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} N & & \\ & \ddots & \\ & & N \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{bmatrix} a & |\eta| \\ b & a \end{bmatrix}$$

Démonstration : en remplaçant M par $M - a \mathbb{I}_{2m}$ on se ramène au cas où $a = 0$.

Plaçons nous au point $(0, y^0, \eta^0)$. On peut diviser M par $|\eta|$ pour se débarrasser du problème de l'homogénéité. En écrivant la forme de Jordan de M au point $(0, y^0, \eta^0)$ et en utilisant que $(M(0, y^0, \eta^0))^2 = 0$ on voit que les blocs de Jordan ne peuvent être de dimension supérieure à 2. Donc il existe une $2m \times 2m$ matrice K inversible telle que $K^{-1}M(0, y^0, \eta^0)K = \tilde{M}_0$ avec \tilde{M}_0 de la forme indiquée dans (1.4) avec $a = b = 0$ $|\eta| = 1$. On peut donc supposer que $M(0, y^0, \eta^0) = \tilde{M}_0$.

D'après les résultats de [13] il existe une $2m \times 2m$ matrice $S(x,y,\eta) \in C^\infty$ telle que $S^{-1}MS$ est de la forme suivante : $S^{-1}MS = M_0 + M'$ avec

$$M' = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

où les seuls éléments non nuls de M' sont sur les lignes noires.

On utilise maintenant que $(M_0 + M')^2 = b \mathbb{I}_{2m}$ (1.5). Regardons par exemple les 2 premières lignes et les 2 premières colonnes de M' . On voit facilement que

(1.5) entraîne que la 2^{ème} ligne de M' est nulle sauf son 1^{er} élément qui est égal à b et que la 1^{ère} colonne de M' est nulle sauf son 2^{ème} élément qui est égal à b . Donc M' se décompose en 2 blocs :

$$\left[\begin{array}{cc|c} \hline 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & \\ \hline 0 & & \tilde{M}' \\ \hline \end{array} \right]$$

et on peut traiter de la même façon le cas de \tilde{M}' . On a donc $S^{-1}MS$ de la forme (1.4) avec $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$. On a donc démontré le lemme. #

On peut appliquer le lemme 1.1 à chaque bloc M_ν pour $j + 1 < \nu \leq k$.
Donc il existe une $2\alpha_\nu \times 2\alpha_\nu$ matrice $S_\nu(x, y, \eta) \in S^{0'}(M)$ telle que $S_\nu^{-1}M_\nu S_\nu$ soit de la forme (1.3) au voisinage de $(0, y^0, \eta^0)$.

Donc pour $b(x, y, \eta) \neq 0$, M_ν a deux valeurs propres de multiplicité α_ν associées à des espaces propres de dimension α_ν et pour $b(x, y, \eta) = 0$ M_ν a une valeur propre de multiplicité $2\alpha_\nu$ associée à un espace propre de dimension α_ν .

Le fait que la partie principale de G se sépare suivant les différentes valeurs propres entraîne qu'on peut découpler G en blocs modulo $S^{-\infty}$, d'après un résultat de [14].

Soit $u \in (D'(M))^m$ une solution de (P) et soit $S(x, y, D_y) \in L^{0'}(M)$ définie par (1.1). Soit $\tilde{u} = Su$, alors \hat{u} est solution de :

$$\begin{cases} D_x \tilde{u} - \tilde{G} \tilde{u} \in C^\infty(M) \\ \beta S^{-1}(0, y, D_y) \tilde{u} \in C^\infty(\partial M) \end{cases}$$

avec $\tilde{G} = SGS^{-1} + D_x S S^{-1}$ si $S^{-1}(x, y, D_y)$ est une famille d'inverses de $S(x, y, D_y)$.

Le symbole principal de \tilde{G} , \tilde{g}_1 est de la forme indiquée dans (1.1). On utilise maintenant un résultat de [14] :

Proposition 1.2 : il existe une $m \times m$ matrice $K(x,y,D_y)$ dans $L_{cl}^{0'}(M)$ de symbole principal Π_m telle que si $v = K\tilde{v}$ est solution de

$$(P') \quad \begin{cases} D_x v - H v \in C^\infty(M) \\ \beta S^{-1} K^{-1} v(o) \in C^\infty(\partial M) \end{cases}$$

avec $h_1(x,y,\eta) = \tilde{g}_1(x,y,\eta)$ et H a pour symbole :

$$(1.5) \quad \left[\begin{array}{c} H_1 \\ \vdots \\ H_j \\ \vdots \\ H_{j+1} \\ \vdots \\ H_k \\ \vdots \\ H_{+} \\ H_{-} \end{array} \right]$$

où les H_ν pour $1 \leq \nu \leq j$ sont des $\alpha_\nu \times \alpha_\nu$ matrices dans $L_{cl}^{1'}(M)$ et les H_ν pour $j+1 \leq \nu \leq k$ sont des $2\alpha_\nu \times 2\alpha_\nu$ matrices dans $L_{cl}^{1'}(M)$.

On donne maintenant la définition des orbites hamiltoniennes du système (P')

Définition 2.1 : On appelle orbites hamiltoniennes de $D_x \Pi_m - G$ les courbes

$\Gamma = \{(x,y,\xi,\eta,w(x,y,\xi,\eta)) \in T^{*k}(M) \times \mathbb{C}^m\} \subset \gamma \times \mathbb{C}^m$ où γ est une bicaractéristique

nulle de $q = \prod_{\nu=1}^j (\xi - \mu_\nu) \prod_{\nu=j+1}^k ((\xi - a_\nu)^2 - b_\nu) e$ et w est solution de

$H_q w + \frac{1}{2} \{\tilde{p}, p\} + i \tilde{p} p_o^s w = 0$ où $p = \xi \Pi_m - g_1$ et p_o^s est le symbole sous

principal de $D_x \Pi_m - G$.

Rappelons maintenant la classification des points de $T^{*k}(\partial M)$ associée au symbole

$g_\nu = (\xi - a_\nu)^2 - b_\nu$ qui est celle de [3].

$T^{*k}(\partial M)$ se divise en :

1) $\mathcal{H}_\nu = \{(y,\eta) \mid b_\nu(o,y,\eta) > 0\}$ appelée zone hyperbolique. Dans \mathcal{H}_ν on a 2 solutions en ξ de $g_\nu(o,y,\xi,\eta) = 0$ et deux bicaractéristiques de g_ν qui arrivent en (y,η) et qui sont transverses à ∂M .

2) $\mathcal{E}_\nu = \{(y,\eta) \mid b_\nu(o,y,\eta) < 0\}$ appelée zone elliptique.

Dans \mathcal{C}_ν^ξ on n'a pas de solutions de $g_\nu(0, y, \xi, \eta) = 0$ et aucune bicaractéristique de g_ν n'arrive en (y, η) .

3) $\mathcal{C}_\nu = \{(y, \eta) \mid b_\nu(0, y, \eta) = 0\}$ appelée hypersurface glancing.

Dans \mathcal{C}_ν on a une racine double en ξ de $g_\nu(0, y, \xi, \eta) = 0$ et une bicaractéristique de g_ν arrive en (y, η) qui est tangente à ∂M .

Les points de \mathcal{C}_ν sont classifiés par le comportement local des bicaractéristiques de g_ν en ces points.

On définit $\Sigma_{\nu, \pm}^2 = \{(y, \eta) \in T^*(\partial M) \mid H_{g_\nu} x(y, \eta) = 0, H_{g_\nu}^2 x(y, \eta) >_< 0\}$ $\Sigma_{\nu+}^2$ est l'ensemble des points diffractifs pour g_ν et $\Sigma_{\nu-}^2$ l'ensemble des points glissants.

On considérera uniquement des points de $\Sigma_{\nu+}^2$.

III.2 PROPAGATION DU FRONT D'ONDE POLARISE LE LONG DES BICARACTERISTIQUES TRANSVERSALES.

On considère le cas où P est un des blocs de la décomposition (1.5) associé à une bicaractéristique transversale. On suppose donc que $G(x, y, \eta) = \mu(x, y, \eta) \Pi_m + \sum_{j=0}^{\infty} G_j(x, y, \eta)$ avec $\mu(x, y, \eta)$ réel et homogène de degré un en η et G_j homogène de degré $-j$ en η .

Soit $(y^0, \eta^0) \in T^*(\partial M) \setminus 0$ et γ la bicaractéristique nulle de $\xi - \mu(x, y, \eta)$ qui part de $\rho_0 = (0, y^0, \mu(0, y^0, \eta^0), \eta^0)$ on notera $(x, y(x), \xi(x), \eta(x))$ les points de γ pour x assez petit.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.1. : Sous les hypothèses précédentes, soit $u \in (D'(M))^m$ solution de :

$$\begin{cases} Pu \in C^\infty(M) \\ u|_{x=0} = v \text{ avec } v \in (D'(\partial M))^m \end{cases}$$

alors au dessus de γ , pour x assez petit, $WF_{\text{pol}} u$ (resp. $WF_{\text{pol}} u$) est égal

à l'union des orbites hamiltoniennes de P qui partent de (ρ_o, w_o) avec $w_o \in \text{WFpol } v(y^o, \eta^o)$ (resp. $\text{WFpol}_s v(y^o, \eta^o)$).

On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.1 : Il existe E $m \times m$ système dans $L^{o'}(M)$ tel que :

- 1) E est elliptique sur v
- 2) $PE \equiv E(D_x^{-\mu}(x, y, D_y))$ modulo $L_b^{-\infty}(M)$.

Démonstration : on cherche E sous forme de série asymptotique

$E = E_o + E_{-1} + \dots + E_{-j} + \dots$ avec E_{-j} homogène de degré $-j$ en η . Pour cela il faut résoudre les équations de transport

$$(2.1) \quad H_{\xi^{-\mu}} E_o + i G_o E_o = 0$$

$$(2.2) \quad H_{\xi^{-\mu}} E_{-j} + i G_o E_{-j} = R_{-j}.$$

On peut trouver E_o inversible et indépendant de ξ solution de (2.1) et par récurrence on montre facilement que si E_{-k} est indépendant de ξ pour $k \leq j-1$, R_{-j} l'est aussi. On peut donc résoudre (2.2) avec E_{-j} indépendant de ξ . #

On peut maintenant démontrer la proposition.

Soit $u \in (D'(M))^m$ solution de $Pu \in C^\infty(M)$. Soit $E \in L^{o'}(M)$ obtenu par le lemme 2.1 on a $(D_x^{-\mu}(x, y, D_y))E^{-1}u \in C^\infty(M)$ où E^{-1} est une paramétrix de E .

Pour démontrer la Prop.2.1, il suffit de montrer que $\text{WFpol } E^{-1}u$ (resp. $\text{WFpol}_s E^{-1}u$) est égal à $\text{WFpol } E^{-1}v(o)$ (resp. $\text{WFpol}_s E^{-1}v(o)$). (2.3).

En effet l'équation des orbites hamiltoniennes de P est :

$$H_{\xi^{-\mu}} w + i p_o^s w = 0 \quad \text{et} \quad p_o^s = G_o. \quad \text{D'après (2.1) } E_o \text{ vérifie}$$

$H_{\xi^{-\mu}} E_o + i G_o E_o = 0$. Soit $\rho_1 \in \gamma$ et $w_1 \in \text{WFpol}_u(\rho_1)$ (le raisonnement est le même pour $\text{WFpol}_s u$). Soit $(\rho, w(\rho))$ l'orbite hamiltonienne de P qui part de (ρ_1, w_1) . Supposons que (2.3) est vérifié :

on a : $H_{\xi-\mu}^{-1}(E_0^{-1}(\rho)w(\rho)) = (H_{\xi-\mu}^{-1}E_0^{-1}(\rho))w(\rho) + E_0^{-1}(\rho)H_{\xi-\mu}^{-1}w(\rho) =$
 $= E_0^{-1}i G_0 w(\rho) - E_0^{-1}i G_0 w(\rho) = 0$. Donc : $E_0^{-1}(\rho_0)w(\rho_0) = E_0^{-1}(\rho_1)w(\rho_1)$.
 D'après (2.3) comme $E_0^{-1}(\rho_1)w(\rho_1) \in \text{WFpol } E^{-1}u(\rho_1)$ on a
 $E_0^{-1}(\rho_0)w(\rho_0) \in \text{WFpol } E^{-1}v(0)(\rho_0)$. Donc $w(\rho_0) \in \text{WFpol } v(\rho_0)$ et la prop.2.1

est démontrée. Il suffit donc de démontrer (2.3). On suppose donc que u est solution de $D_x u - \mu(x, y, D_y) u \in C^\infty(M)$. Remarquons tout d'abord qu'au-dessus de $\rho \in \gamma \cap \{x > 0\}$ on peut définir $\text{WFpol } u(\rho)$ (resp. $\text{WFpol }_s u(\rho)$) uniquement à l'aide d'opérateurs dans $L^{0'}(M)$ sans agrandir $\text{WFpol } u(\rho)$. En effet en suivant la preuve du lemme 5.1.I on vérifie facilement que :

$\forall A \in L^0(M) \exists \tilde{A} \in L^{0'}(M)$ tel que $Au = \tilde{A}u$ modulo $C^\infty(M)$ et $\sigma_0(A) = \sigma_0(\tilde{A})$ en ρ .

On peut donc se restreindre aux opérateurs de $L^{0'}(M)$. Soit $\rho_1 \in \gamma$ et

$w_1 \notin \text{WFpol }_s u(\rho_1)$ il existe donc $A \in L^{0'}(M)$ tel que $Au \in \mathcal{C}^s$ et

$\langle \sigma_0(A)(\rho_1), w_1 \rangle \neq 0$. Notons $\rho_1 = (x_1, y_1, \xi_1, \eta_1)$, en prenant la trace sur

$x = x(\rho_1)$ il existe $B \in L^0(\mathbb{R}_y^n)$ tel que $Bu(x(\rho_1)) \in H^s(\mathbb{R}_y^n)$ et

$\langle \sigma_0(B)(y_1, \eta_1), w_1 \rangle \neq 0$.

En suivant la preuve du lemme 2.1 on construit $B \in L^{0'}(M)$ tel que

$\tilde{B}|_{x=x_1} = B$ et $(D_x - \mu(x, y, D_y))B = B(D_x - \mu(x, y, D_y))$ modulo $S^{-\infty}(M)$, alors

Bu vérifie : $D_x \tilde{B}u - \mu(x, y, D_y) \tilde{B}u \in C^\infty(M)$ et $\tilde{B}u|_{x=x_1} \in H^s(\mathbb{R}_y^n)$ donc d'après

les résultats classiques sur les problèmes hyperboliques on a

$Bu|_{x=0} \in H^s(\mathbb{R}_y^n)$, et on a $\sigma_0(B)(\rho_0) = \sigma_0(A)(\rho_1)$, donc $w_1 \notin \text{WFpol }_s v(0)(\rho_0)$.

Pour démontrer la proposition dans l'autre sens on raisonne de la même

façon en remplaçant ρ_1 par ρ_0 et en utilisant que $Bu \in C^0(\mathbb{R}_x^+, H^s(\mathbb{R}_y^n))$

on démontre de même la Prop. 2.1 pour $\text{WFpol } u$. #

III.3 PROPAGATION DU FRONT D'ONDE POLARISE LE LONG DE BICARACTERISTIQUES TANGENTES PRES DE Σ_+^2 .

On considère maintenant le cas où P est un des blocs de la décomposition

(1.5) associé à une bicaractéristique tangente à ∂M en $(y^0, \eta^0) \in T^*(\partial M) \setminus 0$

tel que (y^0, η^0) est un point diffractif pour cette bicaractéristique.

On suppose donc que $g(x, y, \eta) = \sum_{j=1}^{+\infty} g_{-j}(x, y, \eta)$ avec $g_{-j}(x, y, \eta)$ homogène de degré $-j$ en η et $g_1(x, y, \eta)$ est de la forme :

$$\left[\begin{array}{ccc} N & & \\ & O & \\ & & N \end{array} \right] \text{ avec } N = \left[\begin{array}{cc} a(x, y, \eta) & |\eta| \\ \frac{b(x, y, \eta)}{|\eta|} & a(x, y, \eta) \end{array} \right]$$

où $a(x, y, \eta)$ et $b(x, y, \eta)$ sont réels et homogènes en η de degré 1 et 2 respectivement. On a donc $\det(\xi \mathbb{I}_{2m} - g_1) = ((\xi - a)^2 - b)^m$ où m désigne le nombre de blocs et $b(0, y^0, \eta^0) = 0$ et $\{\xi - a, b\} > 0$ en $(0, y^0, \eta^0)$.

$P = D_x \mathbb{I}_{2m} - G$ est de type principal réel au sens de la définition de III.1 en effet si \tilde{P} est de la forme :

$$\left[\begin{array}{ccc} c_0(\xi \mathbb{I}_2 - N) & & \\ & O & \\ & & c_0(\xi \mathbb{I}_2 - N) \end{array} \right] \text{ où } c_0(A) \text{ désigne la comatrice de } A.$$

alors $\tilde{P}P_1 = ((\xi - a)^2 - b)\mathbb{I}_{2m} = q_2(x, y, \xi, \eta)\mathbb{I}_{2m}$.

On note γ la bicaractéristique de q_2 issue de $(0, y^0, a(0, y^0, \eta^0), \eta^0)$ et γ_+, γ_- les 1/2 bicaractéristiques sortante et entrante.

Soit $u \in (D'(M))^{2m}$ solution de $Pu \in C^\infty(M)$ (3.1). On peut composer (3.1) à gauche par $P \in L^{1,0}(M)$ avec $\tilde{p}_0^s = 0$. Si $Q = \tilde{P}P$ on a $Qu \in C^\infty(M)$ et $q_2 = (\xi - a)^2 - b$.

On notera $Q_2 = q_2(x, y, D_x, D_y)$.

On va d'abord montrer que l'on peut se ramener au cas où $Q = Q_2$, c'est à dire au cas où le système est diagonal. Notons ρ_0 le point $(0, y^0, 0, \eta^0)$.

Démontrons d'abord la proposition suivante :

Proposition 3.1 : Soit f une $2m \times 2m$ matrice $\in C^\infty(T^*M)$ $f = c_1 \xi^2 + c_2 \xi + c_3$ avec les $c_i \in C^\infty(T^*M)$; il existe une $2m \times 2m$ matrice $a \in C^\infty(T^*M)$ telle que $H_{q_2} a + af = 0$ sur $\{q_2 = 0\}$ et a inversible près de ρ_0 .

Démonstration : D'après les résultats de [6] on peut trouver une transformation canonique à bord qui transforme q_2 en $\xi^2 - x\eta_n^2 + \eta_1\eta_n$ au voisinage de ρ_0 . On va suivre la démonstration de la prop.V.12 de [6] avec quelques modifications dues au fait qu'on est au voisinage d'un point diffractif et à la présence du produit af .

On se place dans les coordonnées (x, y, λ, η) de $T^*(M)$.

On a : $xH_{q_2} = 2\lambda(\partial_x + \xi \partial_\lambda) + x^2\eta_n \partial_\lambda + x\eta_n \partial_{y_1} + x(\eta_1 - 2x\eta_n) \partial_{y_n}$. Sur $\{q_2=0\}$ on a : $\xi^2 - x\eta_n^2 + \eta_1 \eta_n = 0$ donc $\lambda^2 = -x^2 \eta_1 \eta_n + x^3 \eta_n^2$.

D'autre part, comme on cherche des solutions homogènes on pose $\eta_n = 1$ il vient : $W = xH_{q_2} = 2\lambda \partial_x + (3x^2 - 2x \eta_1) \partial_\lambda + x \partial_{y_1} + x(\eta_1 - 2x) \partial_{y_n}$ on veut résoudre $Wa + axf = 0$ sur $\{q_2 = 0\}$. Comme f est un polynôme de degré 2 en ξ , grâce au théorème de division de Malgrange on peut supposer que f est un polynôme de degré 1 en ξ donc que $xf = g(x, y, \eta)\lambda + h(x, y, \eta)$ avec $h(0, y, \eta) = 0$. On va chercher a sous la forme $b(x, y, \eta)\lambda + c(x, y, \eta)$.

On a : $w_a = 2\lambda^2 \partial_x b + 2\lambda \partial_x c + (3x^2 - 2x\eta_1) b + x\lambda \partial_{y_1} b + x \partial_{y_1} c + x(\eta_1 - 2x) (\partial_{y_n} b \lambda + \partial_{y_n} c) = \lambda(2\partial_x c + x \partial_{y_1} b + x(\eta_1 - 2x) \partial_{y_n} b) + (3x^2 - 2x\eta_1) b + x \partial_{y_1} c + 2(-x^2 \eta_1 + x^3) \partial_x b + x(\eta_1 - 2x) \partial_{y_n} c = \lambda[2\partial_x c + x(\partial_{y_1} + (\eta_1 - 2x) \partial_{y_n}) b] + [2(x^3 - x^2 \eta_1) \partial_x b + (3x^2 - 2x\eta_1) b + x(\partial_{y_1} + (\eta_1 - 2x) \partial_{y_n}) c]$ et $axf = b g \lambda^2 + (bh + cg) \lambda + ch = (bh + cg) \lambda + ch + (x^3 - x^2 \eta_1) b g$.

On résoud d'abord l'équation $Wa + axf = 0$ en séries formelles de η_1 .

On pose donc :
$$\begin{cases} b\lambda + c = \sum_{j \geq 0} (b_j \lambda + c_j) \eta_1^j \\ g\lambda + h = \sum_{j \geq 0} (g_j \lambda + h_j) \eta_1^j \end{cases}$$

Le coefficient de η_1^j dans $w(b\lambda + c)$ est :

$$\lambda [2\partial_x c_j + x(\partial_{y_1} - 2x\partial_{y_n})b_j + x\partial_{y_n} b_{j-1}] + [2x^3\partial_x b_j + 3x^2b_j + x(\partial_{y_1} - 2x\partial_{y_n})c_j + 2x^2\partial_x b_{j-1} - 2xb_{j-1} + x\partial_{y_n} c_{j-1}] .$$

Le coefficient de η_1^j dans axf est : $\sum_{n+m=j} (b_n^h + c_n^g)\lambda + \sum_{m+n=j}$

$$c_n^h + x^3b_n^g - x^2 \sum_{m+n=j-1} b_n^g . \text{ Dans la suite on notera } \sum_{m+n=j} a_n^b = (ab)_j .$$

Puis on résoud chaque équation obtenue en séries formelles de x :

$$\text{Pour } j \geq 0 \text{ on pose : } \begin{cases} b_j^\lambda + c_j = \sum_{h \geq 0} (b_j^h + c_j^g) x^h \\ g_j^\lambda + h_j = \sum_{h \geq 0} (g_j^h + h_j^k) x^h . \end{cases}$$

et on notera $\sum_{p+q=r} a_j^p b_j^q = (a_j b_j)^r$. En identifiant les coefficients de x^r il vient :

$$2(r+1)c_j^{r+1} + \partial_{y_1} b_j^{r-1} - 2\partial_{y_n} b_j^{r-2} + \partial_{y_n} b_{j-1}^{r-1} + (bh)_j^r + (cg)_j^r = 0 \quad (3.2).$$

$$(2r-1)b_j^{r-2} + \partial_{y_1} c_j^{r-1} - 2\partial_{y_n} c_j^{r-2} + 2(r-1)b_{j-1}^{r-1} + \partial_{y_n} c_{j-1}^{r-1} - 2b_{j-1}^{r-1} + (ch)_j^r + (bg)_j^{r-3} - (bg)_{j-1}^{r-2} = 0 \quad (3.3).$$

Pour $j = 0, r = 0$ l'équation (3.3) ne donne rien car $h_0^0 = 0$.
 Pour $j = 0, r = 1$ l'équation (3.3) donne : (3.4) $\partial_{y_1} c_0^0 + c_0^0 h^1 = 0$. On peut résoudre (3.4) en imposant $c_0^0 = \mathbb{1}_{2m}$ sur $y_1 = 0$ (3.5) .

Puis on détermine les c_0^r et b_0^r par récurrence. Si on connaît c_0^k pour $k \leq r$ et b_0^k pour $k \leq r-1$, l'équation (3.2) au rang r permet de déterminer c_0^{r+1} et l'équation (3.3) au rang $(r+2)$ permet de déterminer b_0^r car c_0^{r+2} n'intervient pas dans $(ch)_0^r$ car $h_0^0 = 0$.

On peut donc déterminer successivement les b_0^r, c_0^r pour $r \geq 0$.

Supposons maintenant que l'on connaisse les c_p^r, b_p^r pour $r \geq 0$ et $0 \leq p \leq j-1$. On peut alors déterminer les c_j^r, b_j^r pour $r \geq 0$.

En effet pour $r = 1$ (3.3) donne : $\partial_{y_1} c_j^0 = - (c^0 h^1)_j$ car $h_p^0 = 0 \forall p$.

et $(c^0 h^1)_j = c_j^0 h_o^1 + f_j(c_o^0, \dots, c_{j-1}^0)$. On peut donc déterminer c_j^0 .

Supposons alors que l'on connaisse c_j^k pour $0 \leq k \leq r$ et b_j^k pour $0 \leq k \leq r-1$. L'équation (3.2) au rang r permet de déterminer c_j^{r+1} car $h_o^0 = 0$. L'équation (3.3) au rang $r+2$ permet de déterminer b_j^r . On peut donc déterminer successivement tous les b_j^r et c_j^r . On construit ensuite b et c qui admettent b_j^r et c_j^r comme coefficients de Taylor en $x = \eta_1 = 0$. alors $a = b\lambda + c$ est une solution de : $H_{q_2} a + af = l$ avec $l \in O(x^\infty, \eta_1^\infty)$, et à cause de (3.5) a est inversible au voisinage de (o, y^o, o, η^o) . Si on peut trouver une solution de $H_{q_2} a + a\lambda a^{-1} = 0$ avec a inversible en ρ^o alors aa sera une solution de la Prop.3.1.

On peut donc se ramener à démontrer la Prop.3.1 dans le cas où $f \in O(x^\infty, \eta_1^\infty)$.

Dans ce cas on va résoudre $Wa + axf = 0$ en séries formelles de x .

$$\text{On pose donc : } \begin{cases} b\lambda + c = \sum_{k \geq 0} (b_k \lambda + c_k) x^k \\ g\lambda + h = \sum_{k \geq 0} (g_k \lambda + h_k) x^k \end{cases} \text{ et chaque } g_k, h_k \text{ est dans } O(\eta_1^\infty).$$

Le coefficient de x^k dans $W(b\lambda + c)$ est : $(2(k+1)c_{k+1} + \partial_{y_1} b_{k-1} + \eta_1 \partial_{y_n} b_{k-1} - 2\partial_{y_n} b_{k-2})\lambda + (2(k-2)b_{k-2} - 2\eta_1 (k-1)b_{k-1} + 3b_{k-2} - 2\eta_1 b_{k-1} + \partial_{y_1} c_{k-1} + \eta_1 \partial_{y_n} c_{k-1} - 2\partial_{y_n} c_{k-2})$.

Le coefficient de x^k dans $(b\lambda + c)(g\lambda + h)$ est :

$$((bh)^k + (cg)^k)\lambda + (ch)^k + (bg)^{k-3} - \eta_1 (bg)^{k-2} \text{ où on a noté :}$$

$$(ab)^k = \sum_{m+n=k} a_m b_n. \text{ En identifiant les coefficients de } x^k \text{ il vient :}$$

$$2(k+1)c_{k+1} + \partial_{y_1} b_{k-1} + \eta_1 \partial_{y_n} b_{k-1} - 2\partial_{y_n} b_{k-2} + (bh)^k + (cg)^k = 0$$

$$2(k-2)b_{k-2} - 2\eta_1 (k-1)b_{k-1} + 3b_{k-2} - 2\eta_1 b_{k-1} + \partial_{y_1} c_{k-1} + \eta_1 \partial_{y_n} c_{k-1} - 2\partial_{y_n} c_{k-2} +$$

$$(ch)^k + (bg)^{k-3} - \eta_1 (bg)^{k-2} = 0. \text{ La 2ème équation au rang 1 est : } \partial_{y_1} c_o +$$

$$\eta_1 \partial_{y_n} c_o - 2\eta_1 b_o + c_o h_1 = 0. \text{ On choisit } c_o = \mathbb{1}_m. \text{ On a donc } \partial_{y_1} c_o = \partial_{y_n} c_o = 0$$

et comme $h_1 \in O(\eta_1^\infty)$ on peut trouver $b_o \in O(\eta_1^\infty)$ tel que $-2\eta_1 b_o + c_o h_1 = 0$.

Supposons par récurrence que l'on connaisse b_j, c_j pour $j \leq r$ et que

$b_j \in O(\eta_1^\infty)$ et $c_j \in O(\eta_1^\infty)$ pour $j \neq 0$.

La 1ère équation au rang r permet de déterminer $c_{r+1} \in O(\eta_1^\infty)$.

La 2ème équation au rang $r+2$ permet de déterminer $b_{r+1} \in O(\eta_1^\infty)$.

En effet $h_0 = 0$ donc c_{r+2} n'intervient pas dans $(ch)_{r+2}$. On obtient donc

$-2\eta_1 b_{r+1} = f_r(c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, b_0, \dots, b_r)$ avec $f_r \in O(\eta_1^\infty)$ donc on peut déterminer

$b_{r+1} \in O(\eta_1^\infty)$. On peut donc déterminer successivement les b_j, c_j pour $j \geq 0$.

On construit ensuite b et c qui admettent b_j et c_j comme coefficients de

Taylor en $x = 0$. $\tilde{a} = b\lambda + c$ est une solution de $H_{q_2} \tilde{a} + \tilde{a}f = h$ avec $h \in O(x^\infty)$ et

\tilde{a} est inversible en ρ_0 . Comme plus haut, il suffit donc de démontrer la

Prop.3.1 dans le cas où $f \in O(x^\infty)$. On suppose donc que $f \in O(x^\infty)$.

on va résoudre :

$$(3.6) \quad \begin{cases} H_{q_2} a + af = 0 \text{ sur } \{q_2 = 0\} \\ a \text{ elliptique en } \rho_0 \end{cases} \quad \text{avec } a \in C^\infty(\tilde{T}^*M).$$

en utilisant la méthode de Peano-Baker ([15] p.408).

Pour appliquer la méthode de Peano-Baker on commence par chercher

$a_0 \in C^\infty(\tilde{T}^*M)$ tel que :

$$(3.7) \quad \begin{cases} H_{q_2} a_0 = 0 \text{ sur } \{q_2 = 0\} \text{ et } \tilde{a}_0(\rho_0) \text{ elliptique.} \\ a_0|_{x=0} = \tilde{a}_0 \end{cases}$$

Il suffit de prendre $a_0 = \Pi_{2m}$. Puis pour $i \geq 1$ on cherche $a_i \in C^\infty(\tilde{T}^*M)$

tel que :

$$(3.8) \quad \begin{cases} H_{q_2} a_i = a_{i-1} f \\ a_i|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad \text{.Alors } a = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \text{ est solution de (3.6)}$$

Commençons donc par résoudre (3.8) sur $\{q_2 = 0\}$. On veut maintenant des solutions qui sur $x = 0$ sont paires par rapport à ξ . On écrit f comme polynôme du 1er degré en ξ par le théorème de division de Malgrange.

Comme d'autre part on cherche des solutions avec une certaine homogénéité

on fixe $\eta_n = 1$. Sur $\{q_2 = 0\}$ on prend comme coordonnées près de ρ_0 ,

$(x, y, \xi, \eta_2; \dots, \eta_n)$.

Le changement de coordonnées :
$$\begin{cases} x = s^2 - r \\ \xi = s \\ y_n = y'_n + \eta_1 s + 2(rs - \frac{s^3}{3}) \end{cases}$$

transforme H_{q_2} en $\partial_{y_1} + \partial_s$.

En oubliant les indices i , il suffit de résoudre :
$$(3.9) \quad \begin{cases} H_{q_2} a = f & \text{sur } \{q_2 = 0\} \\ a|_{x=q_2=0} = 0 \end{cases}$$

avec $f \in O(x^\infty)$.

Prolongeons f par 0 dans $x \leq 0$. Dans les nouvelles coordonnées il

faut trouver a telle que
$$\begin{cases} (\partial_{y_1} + \partial_s) a = f \\ a|_{s^2-r=0} = 0. \end{cases}$$
 Comme on a prolongé f par 0 dans $s^2-r \leq 0$,

il suffit de résoudre
$$\begin{cases} (\partial_{y_1} + \partial_s) a = f \\ a|_{s=0} = 0 \end{cases}$$
 On a donc une solution de (3.9) qui

est évidemment paire en ξ sur $x = 0$.

Donc on a résolu (3.8) et donc (3.6) sur $\{q_2 = 0\}$. Il reste à étendre a hors

de $\{q_2 = 0\}$ pour avoir $a \in C^\infty(\mathbb{T}^*M)$. Soit h une extension quelconque de a

hors de $\{q_2 = 0\}$. Par le théorème de préparation de Malgrange on peut écrire :

$h = c(x, y, \xi, \eta) q_2 + a_1(x, y, \eta) \xi + a_0(x, y, \eta)$. Alors $\tilde{a} = a_1(x, y, \eta) \xi + a_0(x, y, \eta)$

vérifie évidemment $H_{q_2} \tilde{a} + \tilde{a} f = 0$ sur $\{q_2 = 0\}$ et

$\tilde{a}|_{q_2=x=0} = a|_{x=0} = a_1(0, y, -\xi^2, \eta_2, \dots, \eta_n) \xi + a_0(0, y, -\xi^2, \eta_2, \dots, \eta_n)$. Comme $a|_{x=0}$

est paire en ξ on a : $a_1(0, y, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = 0$ sur $\eta_1 \leq 0$. Il reste

encore à modifier \tilde{a} dans $\eta_1 \geq 0$. $a_1(0, y, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ est nul dans $\eta_1 \leq 0$

donc s'annule à l'ordre ∞ sur $\eta_1 = 0$.

D'autre part l'hypersurface $\{q_2 = 0\}$ est au-dessus de $\eta_1 - x \leq 0$. Soit

$X(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que
$$\begin{cases} X(t) = 0 & \text{pour } t \geq 1 \\ X(t) = 1 & \text{pour } t \leq 0. \end{cases}$$
 alors la fonction

$a_1(0, y, \eta_1, \dots, \eta_n) X(x/\eta_1)$ est C^∞ car $a_1(0, y, \eta_1, \dots, \eta_n) \in O(\eta_1^\infty)$, et elle

est nulle sur $\{q_2 = 0\}$. Notons encore \tilde{a} la fonction $(a_1(x, y, \eta) - X(x/\eta_1) a_1(0, y, \eta)) \xi$

+ $a_0(x, y, \eta)$. Elle vérifie $H_{q_2} \tilde{a} + \tilde{a} f = 0$ sur $\{q_2 = 0\}$ et

$\frac{\partial \tilde{a}}{\partial \xi} \Big|_{x=0} = a_1(0, y, \eta) - a_1(0, y, \eta) = 0$. et $\tilde{a}(\rho_0) = a_0(0, y^0, \eta^0)$ est elliptique.

On a donc démontré la Prop.3.1. On démontre de la même façon la Prop.3.1.

pour une équation non homogène, dont le second membre est de la même forme que $f \#$.

Proposition 3.2. : il existe A et B $2m \times 2m$ matrices dans $L_b^0(M)$ telles que $BQ - Q_2 A \equiv 0$ et A elliptique au voisinage de ρ_0 .

Démonstration : On a $Q = Q_2 + Q_1 + Q_0 + \dots$ avec $Q \in L_b^{i,2}(M)$ et q_i homogène de degré i en (ξ, η) .

On va déterminer a et b sous forme de série asymptotique :

$$a = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{-i} \quad b = \sum_{i=0}^{+\infty} b_{-i} \quad \text{avec } a_{-i}, b_{-i} \in S_b^{-i}(M).$$

La seule différence avec la méthode classique des équations de transport, vient du fait qu'on cherche des symboles dans $C^\infty(\tilde{T}^*M)$.

On a : $\sigma_2(Bq - q_2 A) = q_2(b_0 - a_0)$. On prend donc $a_0 = b_0$

$$\begin{aligned} \sigma_1(Bq - q_2 A) &= b_{-1}q_2 + \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n \partial_{\eta_j} a_0 \partial_{y_j} q_2 + \frac{1}{i} \partial_{\xi} a_0 \partial_x q_2 + a_0 q_{-1} - q_2 a_{-1} \\ &- \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n \partial_{y_j} a_0 \partial_{\eta_j} q_2 - \frac{1}{i} \partial_x a_0 \partial_{\xi} q_2 = b_{-1}q_2 + a_0 q_1 - q_2 a_{-1} + \frac{1}{i} H_{q_2} a_0. \end{aligned}$$

On résoud d'abord $H_{q_2} a_0 - i a_0 q_1 = 0$ sur $\{q_2 = 0\}$ en utilisant la Prop.3.1. On peut trouver a_0 sous forme de polynôme du 1er degré en ξ , donc $H_{q_2} a_0 - i a_0 q_1$ est un polynôme du 2ème degré en ξ qui s'annule sur $\{q_2 = 0\}$. Donc il existe $c_{-1}(x, y, \eta) \in S^{-1}(M)$ tel que :

$$H_{q_2} a_0 - i a_0 q_1 = c_{-1} q_2. \text{ On prend alors } i(b_{-1} - a_{-1}) = c_{-1}.$$

Supposons par récurrence que l'on connaisse les $a_{-i}, b_{-i} \forall i < n-2$.

Pour éliminer $\sigma_{-n}(Bq - q_2 A)$ on doit résoudre une équation du type :

$$H_{q_2} a_{-n+1} - i a_{-n+1} q_1 = f_{-n} + i(b_{-n} - a_{-n}) q_2 \text{ avec } f_{-n} \text{ dépendant des } q_i \text{ et des } a_{-i}, b_{-i} \text{ pour } i \leq n-2.$$

On résoud d'abord cette équation sur $\{q_2=0\}$ par la Prop.3.1.

On a donc $H_{q_2} a_{-n+1}^{-i} a_{-n+1}^{q_1} q_{-n}^{-f} = c_{-n} q_2$ avec c_{-n} connu dans $S^{-n'}(M)$.

On prend ensuite $i(a_{-n}^{-b} q_{-n}) = c_{-n}$. On peut ainsi déterminer tous les a_{-i}, b_{-i} ce qui démontre la proposition #.

Si $u \in (D'(M))^{2m}$ est une solution de $Qu \in C^\infty(M)$ on a donc $Q_2 Au \in C^\infty(M)$.

Proposition 3.3 : Soit $u \in (D'(M))^{2m}$ solution de $Q_2 u \in C^\infty(M)$.

Soit $\rho^1 = (x^1, y^1, \xi^1, \eta^1) \in \gamma_-$ avec $x^1 > 0$. Alors il existe \tilde{A} $2m \times 2m$ matrice dans $L_{\mathcal{C}l}^0(M)$ telle que $\tilde{A}u \in C^\infty$ (resp. \mathcal{K}^S) microlocalement en $(x^1, y^1, \xi^1, \eta^1)$ et $WF_{pol} u(x^1, y^1, \xi^1, \eta^1)$ (resp. $WF_{pol} \tilde{A}u(x^1, y^1, \xi^1, \eta^1)$) = Ker $\tilde{a}_o(x^1, y^1, \xi^1, \eta^1)$. et $Q_2 \tilde{A} - \tilde{A}Q_2 \equiv 0$ dans un voisinage conique de $(x^1, y^1, \xi^1, \eta^1)$.

Démonstration : Comme on est en un point de $T^{jk}(\dot{M})$ on peut se ramener au cas où $Q_2 = D_x$ par conjugaison par des opérateurs intégraux de Fourier classiques.

Comme $x^1 > 0, \gamma_-$ est transverse aux surfaces $x = cste$ au voisinage de ρ^1 .

On peut donc trouver F et G opérateurs intégraux de Fourier classiques et X opérateur de troncature près de ρ^1 , tel que $XGQ_2 - XD_x F \equiv 0$ au-dessus d'un voisinage de (x^1, y^1) . Fixons une surface initiale $x = x^1 + \varepsilon$ avec ε assez petit.

On peut de plus choisir X commutant avec D_x . Alors $v = Xfu$ est solution de $D_x v \in C^\infty$ au voisinage de (x^1, y^1) (3.11).

Soit $B(x, y, D_x, D_y)$ un système dans $L_{\mathcal{C}l}^0(\dot{M})$ tel que $Bv \in C^\infty$ et $WF_{pol} v(x^1, y^1, \xi^1, \eta^1) = \text{Ker } b_o(x^1, y^1, \xi^1, \eta^1)$.

D'après la Prop.2.1 il existe un système $\tilde{B}(y, D_y)$ dans $L_{\mathcal{C}l}^0(\mathbb{R}_y^n)$ tel que $\tilde{B}(y, D_y)v(x^1 + \varepsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}_y^n)$. De plus on a

$$WF_{pol} v(x^1 + \varepsilon)(y^1, \eta^1) = \text{Ker } \tilde{b}_o(y^1, \eta^1). \text{ A cause de (3.11),}$$

$\tilde{B}(y, D_y)v(x, y) \in C^\infty(\dot{M})$ en tronquant \tilde{B} au voisinage de x^1 . Il faut enfin modifier $\tilde{B}(y, D_y)$ qui n'est pas un opérateur dans $L^0(\dot{M})$. Soit $X(\eta, \xi) \in C^\infty$ et homogène de degré 0 en (η, ξ) telle que :

$$\begin{cases} X(\eta, \xi) = 0 & \text{si } |\eta| \leq \varepsilon_1 |\xi| \\ X(\eta, \xi) = 1 & \text{si } |\eta| \geq \varepsilon_2 |\xi| \end{cases} \quad \text{avec } \varepsilon_1 < \varepsilon_2 . \text{ Si } \varepsilon_2 \text{ est assez petit,}$$

$X(\eta, \xi)$ est égal à 1 au voisinage de $(x^1, y^1, \xi^1, \eta^1)$ et si $\tilde{C}(y, D_y, D_x) = X(D_y, D_x) \tilde{B}(y, D_y), \tilde{C}(y, D_y, D_x) \in L^0(\overset{\circ}{M})$ et $\tilde{C}(y, D_y, D_x)v \in C^\infty(\overset{\circ}{M})$.

D'autre part, d'après la Prop.2.1. on a $\text{WFpol } v(x^1, y^1, \xi^1, \eta^1) = \text{Ker } \tilde{b}_0(y^1, \eta^1) = \text{Ker } \tilde{C}_0(x^1, y^1, \xi^1, \eta^1)$ et $D_x \tilde{C} - \tilde{C} D_x \equiv 0$ au voisinage de $(x^1, y^1, \xi^1, \eta^1)$.

Pour revenir à u on vérifie facilement que $\tilde{A} = \tilde{GCF}$ vérifie la proposition.

Le cas de $\text{WFpol}_s u$ se traite de la même façon # .

On se place maintenant dans le cas général c'est-à-dire qu'on a :

$q_2 = (\xi - \lambda(x, y, \eta))^2 - \mu(x, y, \eta)$ et $\rho^0 = (0, y^0, \lambda(0, y^0, \eta^0), \eta^0)$ est un point strictement diffractif pour q_2 .

Proposition 3.4 : Soit $u \in (D'(M))^{2m}$ solution de $Q_2 u \in C^\infty(M)$. L'opérateur A de la Prop.3.3 se prolonge en un opérateur $A \in L^{0,1'}(M)$ tel que $Q_2 A - B Q_2 \equiv 0$ (3.12) avec $B \in L^{0,1'}(M)$.

Démonstration : Soit S l'hypersurface $\{x=x^1\}$. Si x^1 est assez petit H_{q_2} est transverse à S en ρ^1 .

En utilisant les arguments de la démonstration de la Prop.3.2, il suffit de vérifier que pour $f \in L^{p,2'}(M)$ et $a_0(y, \xi, \eta)$ $2m \times 2m$ matrice polynômiale du 1er degré en ξ il existe $a(x, y, \xi, \eta)$ $2m \times 2m$ matrice dans $S^{0,1'}(M)$ telle que :

$$\begin{cases} H_{q_2} a = f \text{ sur } \{q_2=0\} \\ a|_{S \cap V_1} = a_0 \end{cases} \quad (3.13) \text{ où } V_1 \text{ est un petit voisinage conique de } \rho^1$$

En effet en utilisant le théorème de préparation de Malgrange comme dans le lemme 5.1 I, on peut supposer que l'opérateur A est dans $L^{0,1'}(M)$.

Démontrons donc (3.13) :

On cherche tout d'abord la restriction de a à $\{q_2=0\}$ sous la forme

$$a(x, y, \xi, \eta) = a^1(x, y, \eta) \xi + a^0(x, y, \eta).$$

On peut alors trouver a^1 et a^0 tels que $a = a^1 \xi + a^0$ vérifie :

$$\begin{cases} H_{q_2} a = f \text{ sur } \{q_2=0\} \\ a|_{S \cap v_1 \cap \{q_2=0\}} = a^0|_{\{q_2=0\}} \end{cases}$$

Puis on peut étendre a^0 et a^1 hors de $\{q_2=0\}$ pour avoir $a|_{S \cap v_1} = a^0$. On a donc démontré (3.12). #

On définit maintenant les opérateurs de Neumann N_+ et N_- associés à l'opérateur Q_2 . Pour $u_0 \in D'(\partial M)$. Soit $u_{\pm} \in D'(M)$ solution de :

$$\begin{cases} q_2 u \in C^\infty(M) \\ u|_{\partial M} \equiv u_0 \text{ en } (y^0, \eta^0) \\ u \equiv 0 \text{ sur } v_{\pm} \end{cases}$$

On définit alors $N_{\pm} u_0 = D_x u_{\pm}|_{\partial M}$.

Rappelons maintenant un lemme qui sera utile dans la suite :

Lemme 3.5 : Soit $u \in D'(M)$ solution de $Q_2 u \in C^\infty(M)$. Si $u \in \mathcal{K}^s$ microlocalement en un point de v_- . Alors $D_x u(0) - N_+ u(0)$ est microlocalement H^{s-1} en (y^0, η^0) où N_+ est défini plus haut.

Démonstration : On peut facilement extraire ce résultat de [10] sous l'hypothèse supplémentaire que $u(0) \in C^\infty(\partial M)$. Il suffit de remplacer u par $u - K_+ u$ où K_+ est une paramétrix sortante du problème de Dirichlet pour se ramener à la situation de [10] et démontrer le lemme. # .

On peut maintenant démontrer un premier résultat de propagation de $WF_{pol} u$.

Proposition 3.6 : Soit $u \in (D'(M))^{2m}$ solution de :

$$\begin{cases} Q_2 u \in C^\infty(M) \\ u|_{\partial M} \in C^\infty(\partial M) \end{cases} \text{ et soit } w \in \mathcal{C}^{2m} \text{ et } \rho^1 \in \gamma_- .$$

Alors si $w \notin WF_{pol} u(\rho^1)$ (resp. $WF_{pol} u(\rho^1)$), il existe des $1 \times 2m$ matrices

$b_{cl}^0 \in L_{cl}^0(\partial M)$, $b_{cl}^{-1} \in L_{cl}^{-1}(\partial M)$ telles que $b_{cl}^0 D_x u(0) - N^+ b_{cl}^{-1} D_x u(0)$ est microlocalement

C^∞ en (y^0, η^0) (resp. microlocalement H^{s-1} en (y^0, η^0)). et
 $\langle \sigma(b^0)(y^0, \eta^0), w \rangle \neq 0$ (3.14)

Démonstration : Soit $w \in \mathbb{C}^{2m}$ tel que $w \notin \text{WFpol } u(\rho^1)$ (resp. $\text{WFpol}_s u(\rho^1)$)

Par définition il existe une $1 \times 2m$ matrice \tilde{a} dans $L_{cl}^0(M)$ telle que
 $\tilde{a}u \in C^\infty(M)$ (resp. $\mathcal{K}^S(M)$), $\langle \sigma(\tilde{a})(\rho_1), w \rangle \neq 0$ et \tilde{a} vérifiant les propriétés
de Prop.3.3.

D'après la Prop.3.4 on peut prolonger \tilde{a} en $a = a^1(x, y, D_y)D_x + a^0(x, y, D_y)$
 $a^0 \in L_{cl}^{0'}(M)$ $a^1 \in L_{cl}^{-1'}(M)$. Notons $v = au$

on a d'après (3.12) : $Q_2 v \in C^\infty(M)$ et $v \in C^\infty(M)$ en ρ_1 (resp. $\in \mathcal{K}^S(M)$ en ρ_1)

donc d'après le lemme 3.5 on a : $D_x v - N_+ v \in C^\infty(\partial M)(y^0, \eta^0)$ (resp. $H^{s-1}(\partial M)$)

et $D_x v(0) - N_+ v(0) = (D_x a^1)D_x u(0) + a^1 D_x^2 u(0) + (D_x a^0)u(0) + a^0 D_x u(0) - N_+ a^1 D_x u(0) -$

$N_+ a^0 u(0) = (a^0 + D_x a^1) D_x u(0) - N_+ a^1 D_x u(0)$ modulo $C^\infty(\partial M)$ car $u(0) \in C^\infty(\partial M)$

en posant $b^0 = (a^0 + D_x a^1)$, $b^1 = a^1$ on a : $b^0 D_x u(0) - N_+ b^1 D_x u(0) \in C^\infty(\partial M)$

en (y^0, η^0) (resp. $H^{s-1}(\partial M)$ en (y^0, η^0)).

D'autre part : $\sigma(b^0)(y^0, \eta^0) = \sigma(a^0)(y^0, \eta^0) = \sigma(a)(\rho^0)$ car en $\rho^0, \xi = 0$

et $\sigma(a)(\rho^0) = \sigma(\tilde{a})(\rho^1)$ car on a $H_{q_2} \sigma(a) = 0$ sur $\{q_2=0\}$. Donc

$\langle \sigma(b^0)(y^0, \eta^0), w \rangle \neq 0$ et on a démontré la proposition. #

Remarque 3.7 : L'opérateur $b^0 - N_+ b^1$ n'est pas dans une des classes $L_{\rho, \delta}^0(\partial M)$

avec $\rho + \delta \geq 1$ mais dans la classe $A_+^{0,+}(\partial M)$ de [11]. A priori on ne peut

donc pas conclure de (3.14) que $w \notin \text{WFpol } D_x u(0)(y^0, \eta^0)$. Cependant d'après

[6] il existe F et G opérateurs intégraux de Fourier elliptiques dans

$I^0(\partial M, \mathbb{R}^n, \partial \chi)$ tels que $FN_+ \equiv \tilde{N}_+ G$ au voisinage de (y^0, η^0) où \tilde{N}_+ est le

multiplicateur de Fourier $\eta_n^{2/3} \frac{A_+}{A_+} (\eta_1 \eta_n^{-1/3})$, où A_+ est une des 2 fonctions

d'Airy utilisées dans la construction de paramétrix dans le cas diffractif.

Soit $\varphi_1(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases} \varphi_1(s) = 1 & |s| \leq 1 \\ \varphi_1(s) = 0 & |s| \geq 2 \end{cases}$ et $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$.

Rappelons la définition de la classe $N_\rho^m(\{\eta_1=0\})$ (voir [16])

Définition 3.8 : un symbole $p(y, \eta_1, \dots, \eta_n)$ est dans $N_\rho^m(\{\eta_1=0\})$ si pour $|\eta_1| < |\eta_2, \dots, \eta_n|$ on a : $|D_y^\beta D_{\eta_1}^\gamma D_{\eta'}^\alpha p| \leq C_{\alpha, \beta, \gamma} |\eta_1|^{m-|\alpha|} (|\eta_1|^\rho + |\eta_1|)^{-|\gamma|}$. et si $p \in S_{1,0}^m$ sur tout cône disjoint de $\{\eta_1=0\}$.

alors $\frac{A'_+}{A_+}(\eta_1 \eta_n^{-1/3}) \in N_{1/3}^{1/3}(\{\eta_1=0\})$ et on a le résultat suivant : si $a > 1/3$
 $\varphi_1(\eta_1 \eta_n^{-a}) \eta_n^{2/3} \frac{A'_+}{A_+}(\eta_1 \eta_n^{-1/3}) \in N_{1/3}^{1-(1-a)/2}(\{\eta_1=0\})$ et $\varphi_2(\eta_1 \eta_n^{-a}) \eta_n^{2/3} \frac{A'_+}{A_+}(\eta_1 \eta_n^{-1/3})$
 $\in N_a^1(\{\eta_1=0\})$. D'autre part $N_\rho^m(\{\eta_1=0\}) \subset S_{\rho,0}^m(\mathbb{R}^n)$, donc on a décomposé
 \tilde{N}_+ en : $\tilde{N}_+ = \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2$ avec $\tilde{N}_2 \in L_{a,0}^1(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{N}_1 \in L_{1/3,0}^{1-(1-a)/2}(\mathbb{R}^n)$

Prenons $a > 1/2$ alors $F^{-1} \tilde{N}_2 G \in L_{a,1-a}^1(\partial M)$ et le théorème d'Egorov s'applique à \tilde{N}_2 .

On va maintenant donner une définition de $WF_{pol} u$ où l'on utilise des symboles dans les classes $S_{\rho,1-\rho}^0(\mathbb{R}^n)$, $\rho > 1/2$.

Définition 3.9 : Soit $u \in (D'(\mathbb{R}^n))^m$, $w \in \mathcal{C}^m$, et $(x_0, \xi_0) \in T^*(\mathbb{R}^n)$.

On dit que $w \notin \tilde{WF}_{pol} u(x_0, \xi_0)$ (resp. $\tilde{WF}_{pol}_S u(x_0, \xi_0)$) si il existe $a_1, \dots, a_m \in L_{\rho,1-\rho}^0(\mathbb{R}^n)$ tels que $\sum_{i=1}^m a_i u_i \in C^\infty$ (resp. H^s) et il existe V voisinage conique de (x_0, ξ_0) tel que $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \left| \sum_{i=1}^m a_i(x, t \xi) w_i \right| \neq 0 \quad \forall (x, \xi) \in V$.

On note alors $WF_{pol} \tilde{u} = \{(x, \xi, w) \in T^*(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}^m \mid w \in \tilde{WF}_{pol} u(x, \xi)\}$, qui est un ensemble fermé de $T^*(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}^m$.

On a les deux propositions suivantes :

Proposition 3.10 : avec les notations de Prop.1.2 II, $\pi(\tilde{WF}_{pol} u \setminus 0) = WF u$ (resp. $\pi(\tilde{WF}_S pol u) = WF_S u$).

Démonstration : Si $\tilde{WF}_{pol} u(x_0, \xi_0) = 0$ il existe une $m \times m$ matrice E dans $L_{\rho,1-\rho}^0(\mathbb{R}^n)$, telle que $Eu \in C^\infty$, et telle que $\forall w \in \mathcal{C}^m \setminus \{0\} \liminf_{t \rightarrow +\infty} \|E(x, t \xi) w\| \neq 0$, $\forall (x, \xi) \in V$ voisinage conique de (x_0, ξ_0) . Ceci entraîne que E est microlocalement inversible au-dessus d'un voisinage conique de (x_0, ξ_0) ce qui démontre la proposition. #

Proposition 3.11 : Soit $u \in (D'(\mathbb{R}^n))^m$ et E une $m \times m$ matrice dans $L_{cl}^0(\mathbb{R}^n)$ elliptique en (x_0, ξ_0) alors $\widetilde{WF}pol Eu = e \widetilde{WF}pol u$ où e est le symbole principal de E .

Supposons que $u \in \mathcal{H}^{s'}$ avec $s' > s-1/4$ et qu'on s'intéresse à la propagation de $\widetilde{WF}pol_s u$. Alors on a le résultat suivant :

Proposition 3.12 : Soit $u \in (D'(M))^{2m}$ avec $u \in \mathcal{H}^{s'}(M)$ et $s' > s-1/4$

et u solution $\begin{cases} Q_2 u \in C^\infty(M) \\ u|_{\partial M} \in C^\infty(\partial M) \end{cases}$

Soit $w \in \mathcal{U}^{2m}$ tel que $w \notin \widetilde{WF}pol_s u(\nu^1)$ alors $w \notin \widetilde{WF}pol_{s-1} D_x u(0)(y^0, \eta^0)$.

Démonstration : D'après la remarque 3.7 prenons $a > 1/2$ tel que $\frac{1-a}{2} > s-s'$,

alors on a $b^0 D_x u - F^{-1} \widetilde{N}_2 G b^1 D_x u \in H^{s-1}$ microlocalement en (y^0, η^0) . On a,

d'après la Prop. 3.6 $\langle \sigma(b^0)(y^0, \eta^0), w \rangle \neq 0$ et $F^{-1} \widetilde{N}_2 G b^1 \in L_{a, 1-a}^0(\partial M)$.

Pour démontrer la proposition il suffit donc de montrer que : $\forall \varepsilon > 0 \exists V$

voisinage conique de (y^0, η^0) tel que $\forall (y, \eta) \in V \limsup_{t \rightarrow +\infty} |\widetilde{N}_2(y, t\eta) \widehat{b}^1(y, t\eta)| < \varepsilon$,

où $\widehat{b}^1 = G b^1 G^{-1} \in L_{1,0}^{-1}(\mathbb{R}^n)$. On coupe à nouveau \widetilde{N}_2 en 2 parties :

$\widetilde{N}_2(y, \eta) = \varphi_1(\eta_1 \eta_n^{-1/3}) \widetilde{N}_2(y, \eta) + \varphi_2(\eta_1 \eta_n^{-1/3}) \widetilde{N}_2(y, \eta)$. Donc

$\widetilde{N}_2(y, t\eta) = \varphi_1(t^{2/3} \eta_1 \eta_n^{-1/3}) \varphi_2(t^{1-a} \eta_1 \eta_n^{-a}) t^{2/3} \eta_n^{2/3} \frac{A'_+}{A_+} (t^{2/3} \eta_1 \eta_n^{-1/3}) +$

$\varphi_2(t^{2/3} \eta_1 \eta_n^{-1/3}) \varphi_2(t^{1-a} \eta_1 \eta_n^{-a}) t^{2/3} \eta_n^{2/3} \frac{A'_+}{A_+} (t^{2/3} \eta_1 \eta_n^{-1/3})$.

. Pour t assez grand le 2ème terme est nul. Il reste à regarder le comportement du 1er terme.

D'après le développement asymptotique de A_+ on a :

$$\left| \frac{A'_+}{A_+} (t^{2/3} \eta_1 \eta_n^{-1/3}) \right| \leq C (t^{2/3} |\eta_1 \eta_n^{-1/3}|)^{1/2}$$

et : $|b^1(y, t\eta)| \leq C t^{-1} |\eta|^{-1}$.

Donc $|\varphi_1(t^{2/3} \eta_1 \eta_n^{-1/3}) \varphi_2(t^{1-a} \eta_1 \eta_n^{-a}) t^{2/3} \eta_n^{2/3} \frac{A'_+}{A_+} (t^{2/3} \eta_1 \eta_n^{-1/3}) b^1(y, t\eta)| \leq C \left(\frac{|\eta_1|}{\eta_n} \right)^{1/2}$

Donc si on prend V de la forme $|\eta_1, \dots, \eta_{n-1}| < \varepsilon_0 |\eta_n|$ avec ε_0 assez petit on a : $\limsup_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{N}_2(y, t\eta) \tilde{b}^1(y, t\eta)| < \varepsilon \forall (y, \eta) \in V$. On a donc démontré la proposition. #

On s'intéresse maintenant à la propagation de la polarisation dans l'autre sens le long de γ_- .

Soit $\rho^1 = (x^1, y^1, \xi^1, \eta^1)$ un point de γ_- avec $x^1 > 0$ et x^1 assez petit pour que l'opérateur A de la Prop. 3.1 soit elliptique en ρ^1 .

Soit S l'hypersurface $\{x=x^1\}$. On va construire une paramétrix microlocale du problème mixte :

$$(3.15) \quad \begin{cases} Q_2 u \in C^\infty(M) \\ (y^0, \eta^0) \notin \text{WFu}(0) \\ u|_S = f \text{ en } (y^1, \eta^1) \text{ et } (x^1, y^1, -\xi^1, \eta^1) \notin \text{WFu} \end{cases}$$

Il suffit de se donner une seule trace sur S car si u est solution de $Q_2 u \in C^\infty(M)$ alors au voisinage de ρ^1 , Q_2 se factorise en $(D_x - \Lambda_+(x, y, D_y)) \circ (D_x - \Lambda_-(x, y, D_y))$ et en ρ^1 $D_x - \Lambda_+$ est elliptique donc on a $D_x u|_S = \Lambda_-(x^1, y, D_y) u|_S$ microlocalement en (y^1, η^1) .

Soit \tilde{Q}_2 une extension de Q_2 dans $x < 0$ et soit \mathcal{U} une paramétrix microlocale du problème de Cauchy : $\begin{cases} \tilde{Q}_2 v \in C^\infty(\tilde{M}) \\ v|_S = f \text{ en } (y^1, \eta^1) \text{ et } (x^1, y^1, -\xi^1, \eta^1) \notin \text{WFv} \end{cases}$.

Soit $R : M \rightarrow \partial M$ l'application de restriction au bord et soit K_+ une para-

métrix sortante du problème de Dirichlet : $\begin{cases} Q_2 u \in C^\infty(M) \\ u(0) = u_0 \text{ en } (y^0, \eta^0) \\ u = 0 \text{ microlocalement sur } \gamma_- \end{cases}$

Alors la solution de (3.15) s'écrit $u = \mathcal{U} f - K_+ \mathcal{R} \mathcal{U} f$ microlocalement au voisinage de ρ^0 . On a donc $D_x u(0) = (\mathcal{R} D_x \mathcal{U} - N_+ \mathcal{R} \mathcal{U}) f$.

Définition 3.13 : Soient M_1 et M_2 2 variétés C^∞ de dimension n et

$C \subset T^*(M_1) \times T^*(M_2)$ une relation canonique homogène. On dit que C est

folding au point $(m_1, m_2) \in C$ si les deux projections $\pi_i : C \rightarrow T^{**}(M_i)$ sont des folds en (m_1, m_2) .

On a alors la proposition suivante démontrée dans [10] :

Proposition 3.14 : (Proposition 6.16 de [10] :

$\mathcal{R}D_x \mathcal{U}$ et $\mathcal{R}\mathcal{U}$ sont des opérateurs intégraux de Fourier associés à une relation canonique $C \subset T^{**}(\partial M) \times T^{**}(S)$ qui est folding au point $(y^0, \eta^0, y^1, \eta^1)$

L'exemple classique d'une relation canonique folding est la relation canonique Λ_φ dans $T^{**}(\mathbb{R}^n) \times T^{**}(\mathbb{R}^n)$ avec $\varphi(y, y', \mu, s) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1})$
 $= (y-y')\mu + s\mu_1/\mu_n - 1/3 s^3/\mu_n^2$.

on a $\Lambda_\varphi = \{(y, \eta), (y', \eta') \in T^{**}(\mathbb{R}^n) \times T^{**}(\mathbb{R}^n) \mid y_j = y'_j \ 2 < j \leq n-1, \eta = \eta', (y_1 - y'_1)^2 = -\eta_1/\eta_n, y_n - y'_n = \frac{1}{3} (y_1 - y'_1)^3\}$.

Rappelons maintenant quelques résultats sur les fonctions d'Airy dont on aura besoin dans la suite. Les fonctions d'Airy sont les fonctions entières solutions de $A''(s) = sA'(s)$. Parmi ces fonctions on note A_i l'unique solution qui est bornée sur \mathbb{R}^+ et qui vérifie $A_i(0) = 1$.

A_i est exponentiellement décroissante sur \mathbb{R}^+ et oscillante sur \mathbb{R}^- et tous ses zéros sont sur \mathbb{R}^- . on a $A_i(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its+1/3t^3} dt$ (3.16).

à partir de A_i on construit les fonctions d'Airy $A_{\pm}(s) = A_i(e^{\pm 2i\pi/3} s)$.

A_{\pm} sont oscillantes sur \mathbb{R}^- et exponentiellement croissantes sur \mathbb{R}^+ . On notera A_i (resp. $A_i^!$) le multiplicateur de Fourier de symbole $A_i(\eta_1 \eta_n^{-1/3})$ (resp. $A_i^!(\eta_1 \eta_n^{-1/3})$). En utilisant la formule (3.16) on vérifie facilement

que A_i et $A_i^!$ sont des opérateurs intégraux de Fourier associés à la relation

canonique Λ_φ . On a d'autre part les représentations suivantes pour A_+ et A_-

on a : $A_-(s) = -\frac{i\omega}{2} F(s) e^{iX(s)}$ $A_+(s) = \frac{i\bar{\omega}}{2} F(s) e^{-iX(s)}$ où $F(s)$ et $X(s)$

sont des fonctions C^∞ positives qui ont les développements asymptotiques suivants :

$$F^2(s) \sim \frac{1}{\pi(-s)^{1/2}} (1-a_1(-s)^{-3} + \dots) \text{ pour } s \rightarrow -\infty$$

$$F(s) \sim \frac{1}{\pi} e^{\frac{2}{3}s^{3/2}} \text{ pour } s \rightarrow +\infty$$

$$X(s) - \frac{\pi}{4} \sim \frac{2}{3}(-s)^{3/2}(1-b_1(-s)^3 + \dots) \text{ pour } s \rightarrow -\infty$$

On a le résultat suivant démontré dans [12].

Proposition 3.15 : (Corollaire 5.8 de [12]) Soit $C \subset T^*(\partial M) \times T^*(S)$ une relation canonique homogène qui est folding au point $(y^0, \eta^0, y^1, \eta^1)$, et Γ un petit voisinage conique de $(y^0, \eta^0, y^1, \eta^1)$. Alors il existe des opérateurs intégraux de Fourier elliptiques $J \in I^0(\mathbb{R}^n, \partial M, \chi_1)$, $K \in I^0(S, \mathbb{R}^n, \chi_2^{-1})$ associés à des transformations canoniques locales :

$$\begin{aligned} \chi_1 : T^*(\partial M) &\longrightarrow T^*(\mathbb{R}^n) & \chi_2 : T^*(S) &\longrightarrow T^*(\mathbb{R}^n) \\ (y^0, \eta^0) &\longrightarrow (0, \tilde{\eta}_0) & (y^1, \eta^1) &\longrightarrow (0, \tilde{\eta}_0) \end{aligned}$$

avec $\tilde{\eta}_0 = (0, \dots, 0, 1)$, tels que tout opérateur intégral de Fourier classique $F \in I^m(S, \partial M, C)$ avec $WF'(F) \subset \Gamma$ est de la forme $F = J(A_i B_1 + A_i' B_2)K$ avec $B_1 \in L_{\mathcal{C}}^{m+1/6}(\mathbb{R}^n)$, $B_2 \in L_{\mathcal{C}}^{m-1/6}(\mathbb{R}^n)$

Proposition 3.16 : il existe un opérateur $a \in L_{\mathcal{C}}^{5/6}(\mathbb{R}^n)$ elliptique tel que :

$$(3.17) \quad RD_x \mathcal{U} - N_+ R \mathcal{U} \equiv J a \frac{1}{A_+} K \text{ sur un voisinage conique de } (y^0, \eta^0, y^1, \eta^1).$$

Démonstration : D'après la Prop 3.15 il existe $B_1 \in L_{\mathcal{C}}^{1/6}(\mathbb{R}^n)$, $B_2 \in L_{\mathcal{C}}^{-1/6}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{B}_1 \in L_{\mathcal{C}}^{7/6}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{B}_2 \in L_{\mathcal{C}}^{5/6}(\mathbb{R}^n)$ tels que :

$$RD_x \mathcal{U} - N_+ R \mathcal{U} \equiv J(A_i \tilde{B}_1 + A_i' \tilde{B}_2)K - N_+ J(A_i B_1 + A_i' B_2)K$$

D'autre part d'après ([12]8.4) on peut choisir J de telle sorte que :

$$N_+ = J(a \tilde{N}_+ + b_0)J^{-1} \text{ en } (y^0, \eta^0) \text{ avec : } \tilde{N}_+ \text{ est le multiplicateur de Fourier}$$

de symbole $\frac{A_+}{A_+}(\eta_1 \eta_n^{-1/3})$, $a_0 \in L_{\mathcal{C}}^{2/3}(\mathbb{R}^n)$ elliptique et $b_0 \in L_{\mathcal{C}}^0(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{Donc on a } RD_x \mathcal{U} - N_+ R \mathcal{U} \equiv J(A_i \tilde{B}_1 + A_i' \tilde{B}_2 - (a \tilde{N}_+ + b_0)(A_i B_1 + A_i' B_2))K \equiv$$

$$\equiv J(A_i \tilde{B}_1 + A_i' \tilde{B}_2 - a_o \tilde{N}_+ A_i B_1 - a_o \tilde{N}_+ A_i' B_2 - b_o A_i B_1 - b_o A_i' B_2) K$$

$$\equiv J a_o (-\tilde{N}_+ A_i B_1 - \tilde{N}_+ A_i' B_2 + a_o^{-1} A_i \tilde{B}_1 + a_o^{-1} A_i' \tilde{B}_2 - a_o^{-1} b_o A_i B_1 - a_o^{-1} b_o A_i' B_2) K$$

D'après le lemme 3.17 on peut écrire $a_o^{-1} A_i \tilde{B}_1 + a_o^{-1} A_i' \tilde{B}_2 - a_o^{-1} b_o A_i B_1 - a_o^{-1} b_o A_i' B_2$

sous la forme $A_i C_1 + A_i' C_2$ avec $C_1 \in L_{cl}^{1/2}(\mathbb{R}^n)$, $C_2 \in L_{cl}^{1/6}(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{Donc } RD_x \mathcal{U} - N_+ R \mathcal{U} = J a_o (A_i C_1 + A_i' C_2 - \tilde{N}_+ A_i B_1 - \tilde{N}_+ A_i' B_2) K$$

D'autre part, on a l'identité suivante entre A_+ , A_i et A_i' :

$$A_i'(s) = \frac{c}{A_+(s)} + A_i(s) \frac{A_+'(s)}{A_+(s)}$$

$$\text{Donc } RD_x \mathcal{U} - N_+ R \mathcal{U} \equiv J a_o (A_i (C_1 + \tilde{N}_+ C_2 - \tilde{N}_+ B_1 - \tilde{N}_+^2 B_2) + \frac{c}{A_+} (C_2 - \tilde{N}_+ B_2)) K$$

où $\frac{1}{A_+}$ a pour symbole $\frac{1}{A_+(\eta_1 \eta_n^{-1/3})}$.

$J^{-1}(RD_x \mathcal{U} - N_+ R \mathcal{U})K^{-1}$ doit avoir une relation canonique \tilde{C} incluse dans

Λ_φ . Mais d'autre part, à cause des résultats de propagation des singularités pour les solutions de (3.15) on sait que \tilde{C} doit être bijective de $T^*(\mathbb{R}^n)$ sur $T^*(\mathbb{R}^n)$ et non régulière car on est au voisinage d'un point diffractif.

Donc \tilde{C} doit être égale à une moitié de Λ_φ .

Les opérateurs $\frac{1}{A_+}$ et $\frac{1}{A_-}$ ont pour relation canonique chacun une des moitiés de Λ_φ . Supposons tout d'abord que \tilde{C} soit égale à la relation canonique

de $\frac{1}{A_+}$. Plaçons nous dans $\eta_1 < 0$. Dans $\eta_1 < 0$ A_i est un opérateur intégral de Fourier classique. Comme $\frac{c}{A_+} (C_2 - \tilde{N}_+ B_2)$ a la relation canonique \tilde{C} on a :

$$C_1 + \tilde{N}_+ (C_2 - B_1) - \tilde{N}_+^2 B_2 \in S^{-\infty} \text{ dans } \eta_1 < 0 \quad (3.18)$$

D'après la proposition 6.11 de [12], ceci entraîne que $C_1, C_2 - B_1, B_2$ s'annulent à l'ordre ∞ sur $\eta_1 = 0$, c'est-à-dire que $C_1, C_2 - B_1, B_2 \in O(\eta_1/\eta_n)^\infty$ (3.19).

$$\text{Soient : } q_1(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \begin{cases} q_1(s)=1 & \text{pour } |s| \leq 1 \\ q_1(s)=0 & \text{pour } |s| \geq 2 \end{cases}$$

$$q_2(s) \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad \begin{cases} q_2(s)=1 & \text{pour } s \geq 2 \\ q_2(s)=0 & \text{pour } s \leq 1 \end{cases} \quad \text{et } q_1 + q_2 = 1 \quad \text{pour } s \geq 1 .$$

Soit $q_3 = 1 - q_1 - q_2$. Soit $1/3 < a < 1$. Notons $Q_i(D_y)$ $1 \leq i \leq 3$ les opérateurs de symbole $q_i(\eta_1 \eta_n^{-a})$. Soit $R(D_y)$ un opérateur de troncature dans $|\eta_1, \dots, \eta_{n-1}| \leq \varepsilon \eta_n$ pour ε assez petit.

A cause de (3.19), $Q_1(D_y)R(D_y)(C_1 + \tilde{N}_+(C_2 - B_1) - \tilde{N}_+^2 B_2) \in S^{-\infty}$ et

$Q_2(D_y)R(D_y)A_i \in S^{-\infty}$, car $A_i(s)$ est exponentiellement décroissante

dans \mathbb{R}^+ . Enfin $Q_3(D_y)R(D_y)(C_1 + \tilde{N}_+(C_2 - B_1) - \tilde{N}_+^2 B_2) \in S^{-\infty}$ à cause de (3.18).

Donc on a $RD_x \mathcal{U} - N_+ R \mathcal{U} = J a \frac{c}{A_+} (C_2 - \tilde{N}_+ B_2) K$ au voisinage de $(y^0, \eta^0, y^1, \eta^1)$

Comme $B_2 \in O(\eta_1/\eta_n)^\infty$ d'après les résultats de [12] $\tilde{N}_+ B_2$ est classique.

Il reste à vérifier que $a = a \frac{c}{A_+} (C_2 - \tilde{N}_+ B_2)$ est elliptique en $(0, \tilde{\eta}_0)$, c'est-à-dire que C_2 est elliptique en $(0, \tilde{\eta}_0)$. Supposons que $\sigma(C_2)(0, \tilde{\eta}_0) = 0$.

Alors à cause de (3.19) on a $\sigma(B_2)(0, \tilde{\eta}_0) = 0$. Comme $\sigma(B_2)(0, \tilde{\eta}_0) = 0$,

ceci entraîne que le symbole principal de $R \mathcal{U}$ est nul en $(y^0, \eta^0, y^1, \eta^1)$

ce qui est faux. Donc C_2 est bien elliptique en $(0, \tilde{\eta}_0)$. On a donc démontré

(3.17). Supposons maintenant que \tilde{C} est la relation canonique de $\frac{1}{A_-}$. La

transformation canonique $\chi : (y, \eta) \longrightarrow (y, -\eta)$ conjugue les relations cano-

niques de $\frac{1}{A_+}$ et $\frac{1}{A_-}$. On remplace donc J et K par $J \circ F$ et $F^{-1} \circ K$

où $F \in I^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \chi)$ est elliptique pour se ramener au cas précédent. #

Lemme 3.17 : Soit $a \in L_{cl}^m(\mathbb{R}^n)$. Alors on a : (3.20) $aA_i = A_i a_1 + A_i' a_2$

avec $a_1 \in L_{cl}^m(\mathbb{R}^n)$, $\sigma_m(a) = \sigma_m(a_1)$ sur $\eta_1 = 0$, $a_2 \in L_{cl}^{m-1/3}(\mathbb{R}^n)$.

(3.21) $aA_i' = A_i \tilde{a}_1 + A_i' \tilde{a}_2$ avec $a_1 \in L_{cl}^{m+1/3}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{a}_2 \in L_{cl}^m(\mathbb{R}^n)$ et

$\sigma_m(a) = \sigma_m(\tilde{a}_2)$ sur $\eta_1 = 0$.

Démonstration : On suit la démonstration de Prop.5.2 de [12]

Démontrons d'abord (3.20) :

$$\text{on a : } \hat{A}_i u(\eta) = \int e^{i(t\eta_1/\eta_n + 1/3 t^3/\eta_n^2)} \eta_n^{-2/3} \hat{u}(\eta) dt$$

$$\text{Donc : } a \hat{A}_i u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x-y)\eta + it\eta_1/\eta_n + i \frac{t^3}{3} \eta_n^2} a(x,\eta) \eta_n^{-2/3} u(y) dy d\eta dt \quad (3.22)$$

et de même on a : $(A_i a_1 + A_i' a_2) u(x) =$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int e^{i(x-y)\eta + it\eta_1/\eta_n + i \frac{t^3}{3} \eta_n^2} \eta_n^{-2/3} a_1(y,\eta) + it \eta_n^{-4/3} a_2(y,\eta) u(y) dy d\eta dt \quad (3.23),$$

où $a_1(y,\eta)$ et $a_2(y,\eta)$ sont les symboles réduits à droite de a_1 et a_2 .

Notons φ la phase $(x-y)\eta + t\eta_1/\eta_n + 1/3 t^3/\eta_n^2$. On a $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} =$

$$(x_1 - y_1 + t/\eta_n, x'' - y'', x_n - y_n - t\eta_1/\eta_n^2 - 2/3 t^3/\eta_n^3)$$

où on écrit $y = (y_1, y'', y_n)$

Donc on a : $a(x,\eta) = b(y,\eta,t) + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \cdot c(x,y,\eta,t)$ où $b(y,\eta,t) = a(y_1 - t/\eta_n, y'', y_n +$

$$+ t\eta_1/\eta_n^2 + 2/3 t^3/\eta_n^3, \eta)$$

on a $b(y,\eta,t) \in S_{cl}^m$, et $c(x,y,\eta,t) \in S_{cl}^m$. On a $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \eta_1/\eta_n + t^2/\eta_n^2$, donc

on peut écrire :

$$b(y,\eta,t) = b_1(y,\eta) + t b_2(y,\eta) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} d(y,\eta,t) \text{ avec } b_1 \in S_{cl}^m, b_2 \in S_{cl}^{m-1}, d \in S_{cl}^m.$$

En intégrant par parties dans (3.22), (3.22) s'écrit comme somme d'un

terme de la forme (3.23) avec $a_1 \in S_{cl}^m$, $a_2 \in S_{cl}^{m-1/3}$ et d'un terme de

la forme :

$$\int e^{i\varphi(x,\eta,t)} f(x,y,\eta,t) u(y) dy d\eta dt \quad \text{avec } f \in S_{cl}^{m-1}$$

On peut répéter ce procédé en écrivant $f(x,y,\eta,t) = f_1(x,y,\eta) + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} g(x,y,\eta,t)$,

et en sommant asymptotiquement les symboles obtenus, on démontre (3.20).

Il reste à voir quel est le symbole principal de a_1 sur $\eta_1 = 0$. Sur

$\eta_1 = 0$ on a $b_1(y,\eta) = b(y,\eta,0) = a(y,\eta)$. Donc sur $\eta_1 = 0$ le symbole principal

de a_1 est égal à celui de a . On démontre (3.21) de la même façon. #

Démontrons maintenant un lemme qui sera utile dans la suite :

Lemme 3.18 : Soit $a \in L_{cl}^m(\mathbb{R}^n)$, alors il existe $a_1 \in L_{cl}^m(\mathbb{R}^n)$ et $a_2 \in L_{cl}^{m-1/3}(\mathbb{R}^n)$ avec $\sigma_m(a) = \sigma_m(a_1)$ sur $\eta_1 = 0$ tels que $a \frac{1}{A_+} \equiv \frac{1}{A_+} (a_1 + a_2 \tilde{N}_+)$ sur un voisinage conique de $(0, \tilde{\eta}_0)$.

Démonstration : Soit donc $a \in L_{cl}^m(\mathbb{R}^n)$ on a : $\frac{1}{A_+} = c^{-1} A_i' - c^{-1} \tilde{N}_+ A_i$

donc $a \frac{1}{A_+} = c^{-1} a A_i' - c^{-1} a A_i \tilde{N}_+$. D'après le lemme 3.17 on a :

$$a A_i = A_i a_1 + A_i' a_2 \text{ et } a A_i' = A_i \tilde{a}_1 + A_i' \tilde{a}_2 \text{ donc } a \frac{1}{A_+} = A_i (c^{-1} a_1 \tilde{N}_+ + c^{-1} \tilde{a}_1) + A_i' (c^{-1} a_2 \tilde{N}_+ + c^{-1} \tilde{a}_2)$$

En réutilisant l'identité on a :

$$\begin{aligned} a \frac{1}{A_+} &= A_i (c^{-1} a_1 \tilde{N}_+ + c^{-1} \tilde{a}_1) + c \frac{1}{A_+} (c^{-2} a_2 \tilde{N}_+ + c^{-1} \tilde{a}_2) + A_i \tilde{N}_+ (c^{-1} a_2 \tilde{N}_+ + c^{-1} \tilde{a}_2) \\ &= \frac{1}{A_+} (\tilde{a}_2 + a_2 \tilde{N}_+) + c^{-1} A_i (a_1 \tilde{N}_+ + \tilde{N}_+ a_2 + \tilde{a}_1 + \tilde{N}_+ a_2 \tilde{N}_+) \end{aligned}$$

D'après les arguments de la Prop. 3.16 $A_i (a_1 \tilde{N}_+ + \tilde{N}_+ \tilde{a}_2 + \tilde{a}_1 + \tilde{N}_+ a_2 \tilde{N}_+)$ est dans $S^{-\infty}$ dans un voisinage conique de $\eta_1 = 0$. On ne peut pas en déduire que $a_2 \in O(\eta_1/\eta_n)^\infty$ car on a des \tilde{N}_+ à droite et à gauche dans l'expression. On a simplement que $\sigma(a_2) = 0$ sur $\eta_1 = 0$, et on a $a_2 \in L_{cl}^{m-1/3}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{a}_2 \in L_{cl}^m(\mathbb{R}^n)$. On a donc démontré le lemme. #

On peut maintenant démontrer un résultat de propagation de WFpol u en sens assez faible, c'est-à-dire qu'on obtient des formes linéaires dont les coefficients sont dans de mauvaises classes de symboles.

Proposition 3.19 : Soit $u \in \mathcal{G}^{s'}(M)^{2m}$ solution de $\begin{cases} \mathcal{Q}_2 u \in C^\infty(M) \\ u|_{\partial M} \in C^\infty(\partial M) \end{cases}$ avec $s' > s - 1/4$.

et soit $w \in \mathcal{G}^{2m}$. Alors si $w \notin \text{WFpol}_{s-1} D_x u(0)(y^0, \eta^0)$, il existe une $1 \times 2m$ matrice $d \in L_{a, 1-a}^0(S)$ avec $\frac{1-a}{2} > s-s'$ et c opérateur scalaire dans $L_{1/3, 2/3}^\varepsilon(S)$ $\forall \varepsilon > 0$ qui est le conjugué par des opérateurs intégraux de Fourier d'une troncature non homogène, tels que $cdu|_S \in H^s(S)$ microlocalement en ρ^1 , et : il existe V voisinage conique de ρ^1 dans S tel que

$$\left| \liminf_{t \rightarrow +\infty} | \langle d(y, t\eta), w \rangle | \neq 0 \quad \forall (y, \eta) \in V \right.$$

Démonstration : Soit $w \in \mathbb{C}^{2m}$ tel que $w \notin \text{WFpol}_{s-1} D_x u(0)(y^0, \eta^0)$. Par définition il existe une $1 \times 2m$ matrice b dans $L_{\mathcal{C}^\ell}^{-1}(\partial M)$ telle que :

$$(3.25) \quad b D_x u(0) \in H^s(\partial M) \text{ et } \langle \sigma(b)(y^0, \eta^0), w \rangle \neq 0. \text{ Notons } f = u|_S.$$

D'après la Prop.3.16 on a : $D_x u(0) = J a \frac{1}{A_+} K f$ avec les notations de Prop.3.1

Donc $b D_x u(0) = b J a \frac{1}{A_+} K f \equiv J \tilde{b} a \frac{1}{A_+} K f$ avec $\tilde{b} \in L_{\mathcal{C}^\ell}^{-1}(\partial M)$, $J \tilde{b} \equiv b J$ et

$\sigma(\tilde{b})(0, \tilde{\eta}_0) = \sigma(b)(y^0, \eta^0)$ à cause du théorème d'Egorov pour les opérateurs

intégraux de Fourier classiques. D'autre part d'après la Prop.3.16 a est

scalaire et $a \in L_{\mathcal{C}^\ell}^{5/6}(\mathbb{R}^n)$.

On a $J \tilde{b} a \frac{1}{A_+} K f = J \frac{1}{A_+} (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 \tilde{N}_+) K f$ à cause du lemme 3.18, avec $\tilde{b}_1 \in L_{\mathcal{C}^\ell}^{-1/6}(\mathbb{R}^n)$

et $\sigma(\tilde{b}_1)(0, \tilde{\eta}_0) = \sigma(\tilde{b} a)(0, \tilde{\eta}_0)$ et $\tilde{b}_2 \in L_{\mathcal{C}^\ell}^{-1/2}(\mathbb{R}^n)$.

(3.25) donne (3.26) : $\frac{1}{A_+} (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 \tilde{N}_+) K f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ microlocalement en (y^0, η^0) .

Soit $q(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec $\begin{cases} q(s) = 1 \text{ pour } s \leq 1 \\ q(s) = 0 \text{ pour } s \geq 2 \end{cases}$.

Notons q/F l'opérateur de symbole $q(\eta_1 \eta_n^{-1/3}) \frac{1}{F(\eta_1 \eta_n^{-1/3})}$. D'après le compor-

tement asymptotique de F donné page 40 $q/F \in \text{Op}(N_{1/3}^{1/6}\{\eta_1=0\})$. En composant

(3.26) à gauche par le multiplicateur de Fourier de symbole

$$q(\eta_1 \eta_n^{-1/3}) e^{-iX(\eta_1 \eta_n^{-1/3})} \quad \text{on a : } q/F (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 \tilde{N}_+) K f \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ en } (0, \tilde{\eta}_0).$$

On réécrit cette égalité sous la forme $q/F e e^{-1} (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 \tilde{N}_+) K f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ en

$(0, \tilde{\eta}_0)$ avec e elliptique scalaire dans $L_{\mathcal{C}^\ell}^{-1/6}(\mathbb{R}^n)$. D'après [8],

$c = K q/F e K$ appartient à $L_{1/3, 2/3}^\varepsilon(S) \quad \forall \varepsilon > 0$. D'après la remarque 3.7 $e^{-1} \tilde{b}_1 + e^{-1} \tilde{b}_2 \tilde{N}_+$ se décompose en $d_1 + d_2$ avec $d_1 \in L_{a,0}^0(\mathbb{R}^n)$ et $d_2 \in L_{1/3,0}^{-(1-a)/2}(\mathbb{R}^n)$.

Comme $u \in (H^{s'}(M))^{2m}$ on a : $K q/F e K^{-1} d_1 K f \in H^s(S)$ microlocalement en ρ^1 et

en suivant la preuve de la Prop.3.12 on a : $\exists V$ voisinage conique de $(0, \tilde{\eta}_0)$

dans $T^*(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} | \langle d_1(y, t\eta), w \rangle | \neq 0 \quad \forall (y, \eta) \in V .$$

alors $K^{-1}d_1K \in L_{a, 1-a}^0(S)$ et d'après la remarque qui suit la définition 3.9 on a le résultat de la Prop.3.19. #

Remarque 3.20 : On ne peut pas éviter l'opérateur c qui est dans une mauvaise classe de symboles, car c correspond à une troncature non conique qui est nulle dans la région elliptique. En effet, si on étudie l'influence du bord sur la polarisation le long d'un rayon tangent γ , on ne peut espérer avoir des résultats uniformes dans un voisinage conique de γ , car dans tout voisinage conique de γ on a des rayons qui ne rencontrent pas le bord.

On notera encore $\widetilde{WF}pol_s u$ le front d'onde polarisé défini dans la Prop.3.19. Plus précisément on dira que $w \in \widetilde{WF}pol u(\rho^1)$ si il existe une $1 \times 2m$ matrice $d \in L_{a, 1-a}^0(S)$ et c opérateur scalaire dans $L_{1/3, 2/3}^\varepsilon(S)$ $\forall \varepsilon > 0$ conjugué par des opérateurs intégraux de Fourier d'un opérateur de troncature non nul en $(0, \widetilde{\eta}_0)$, tels que $cdu|_S \in H^s(S)$ et tels qu'il existe V voisinage conique de ρ^1 dans S tel que $\liminf_{t \rightarrow +\infty} | \langle d(y, t\eta), w \rangle | \neq 0 \quad \forall (y, \eta) \in V .$

Revenons maintenant au problème initial, c'est-à-dire :

$u \in (D'(M))^{2m}$ solution de $Pu \in C^\infty(M)$. En composant à gauche par $\widetilde{P} \in L^{1, 0'}(M)$ avec $\widetilde{p}_0^s = 0$ on a : $Qu \in C^\infty(M)$ et $q_2 = (\xi-a)^2 - b$. Soit \widetilde{K}_+ une paramétrix sortante du problème de Dirichlet pour Q :

alors $v = u - \widetilde{K}_+ u$ est solution de
$$\begin{cases} Qv \in C^\infty(M) & \text{et } v-u \text{ est } C^\infty \text{ sur } \gamma_- \\ v|_{\partial M} \in C^\infty(\partial M) \end{cases}$$

Soit A une $2m \times 2m$ matrice $\in L^0_b(M)$ donnée par la Prop.3.1.

Av est solution de
$$\begin{cases} Q_2 Av \in C^\infty(M) \\ Av(O) \in C^\infty(\partial M) \end{cases} \quad \text{car } Av(O) = A_\partial(v(O))$$

D'après [2] on peut écrire A sous la forme :

$$Av(x, y) = \int e^{i(y-y')\eta} \eta_{Ma}(x, y, \eta, t) v(xt, y') dy' d\eta dt$$

avec $Ma(x,y,\eta,t) = \int e^{i(1-t)\lambda} a(x,y,\lambda,\eta) d\lambda$ et $a \in S_{1,0}^o(\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1})$.

Donc $D_x Av = \int e^{i(y-y')\eta} D_x Ma(x,y,\eta,t) v(xt,y') + Ma(x,y,\eta,t) t D_x v(xt,y') dy' d\eta dt$

et $AD_x v = \int e^{i(y-y')\eta} Ma(x,y,\eta,t) D_x v(xt,y') dy' d\eta dt$.

Donc $D_x Av - AD_x v = A'_o v + A'_1 D_x v$ où le symbole de A'_o est $D_x a$ et celui de A'_1 est $D_\lambda a$.

$$\text{Donc } D_x Av(0) = (A'_\partial + A'_1) (D_x u(0) - \tilde{N}_+ u(0)) + A'_{o\partial} v(0) = \quad (3.28)$$

$(A'_\partial + A'_1) (D_x u(0) - \tilde{N}_+ u(0))$ modulo $C^\infty(\partial M)$, où \tilde{N}_+ est l'opérateur de Neumann associé à Q . Il est facile de vérifier que si N_+ est l'opérateur de Neumann associé à Q_2 on a $\tilde{N}_+ = (A'_\partial + A'_1)^{-1} (N_+ A'_\partial - A'_{o\partial})$. (3.29)

Enfin, en examinant la preuve de la Prop.3.1 on voit qu'on peut prendre $A'_\partial, A'_{1\partial}, A'_{o\partial}$ classiques.

On a alors les deux théorèmes suivants :

Théorème 3.21 : Soit $u \in (D'(M))^{2m}$ solution de $Pu \in C^\infty(M)$ avec $u \in \mathcal{K}^{s'}(M)$.

Soit ϕ le flot sur \mathcal{C}^{2m} associé aux orbites hamiltoniennes de P . Alors

si $w \in \tilde{WFpol}_{s-1}(G(0)u(0) - \tilde{N}_+ u(0))(y^o, \eta^o)$ pour $s' > s-1/4$ on a :

$\phi(w) \in \tilde{WFpol}_s u$ le long de γ_- .

Démonstration : On utilise la Prop.3.12 et les réductions vues plus haut.

Soit ρ^1 un point de γ_- dans $\overset{o}{M}$ et $w^1 \in \tilde{WFpol}_s u(\rho^1)$.

Soit a_o le symbole principal de A donné par la Prop.3.1 a_o vérifie l'équation $Hq_2 a_o - ia_o q_1 = 0$ avec $q_1 = \frac{1}{2i} \{\tilde{p}, p\} + \tilde{p} p_o^s$. On peut appliquer

la Proposition 3.6 à Av et à cause de Prop.1.4.I, $a_o(\rho^1)_{w^1} \notin \tilde{WFpol}_s Au(\rho^1)$.

Donc en appliquant la Prop.3.12 à Av on a : $a_o(\rho^1)_{w^1} \notin \tilde{WFpol}_{s-1} D_x Av(0)(y^o, \eta^o)$.

Notons $\Gamma = (\rho(t), w(t))$ l'orbite hamiltonienne de P qui part de (ρ^1, w^1) .

$$\begin{aligned} \text{On a } H_{q_2} (a_o w) &= (H_{q_2} a_o) w + a_o H_{q_2} w = \frac{a_o}{2} \{\tilde{p}, p\} w - ia_o \tilde{p} p_o^s w + ia_o \tilde{p} p_o^s w - \frac{a_o}{2} \{\tilde{p}, p\} w \\ &= 0 \quad (3.30). \end{aligned}$$

Soit $w^o \in \mathcal{C}^{2m}$ tel que $(0, y^o, 0, \eta^o, w^o) \in \Gamma$. D'après (3.30) on a :

$a_o(\rho^1)w^1 = a_o(0, y^o, 0, \eta^o)w = a_{\partial o}(y^o, \eta^o)w^o$. A cause de (3.28) on a :
 $a_o^{-1}(0, y^o, 0, \eta^o) a_o(\rho^1)w^1 \notin \widetilde{\text{WFpol}}_{s-1}(D_x u(O) - \widetilde{N}_+ u(O))$ et (3.30) entraîne que :
 $a_o^{-1}(0, y^o, 0, \eta^o) a_o(\rho^1)w^1 = w^o$.
 Donc $w^o \notin \widetilde{\text{WFpol}}_{s-1}(D_x u(O) - \widetilde{N}_+ u(O))$ et on a démontré le théorème.

Théorème 3.22 : Soit $u \in (D'(M))^{2m}$ solution de $Pu \in C^\infty(M)$ avec $u \in \mathcal{H}^s(M)$.

Soit ϕ le flot sur \mathbb{C}^{2m} associé aux orbites hamiltoniennes de P . Alors

si $w \in \widetilde{\text{WFpol}}_s u|_S(\rho^1)$ pour $s' > s-1/4$. on a :

$$\phi(w) \in \widetilde{\text{WFpol}}_{s-1}(G(O)u(O) - \widetilde{N}_+ u(O))(y^o, \eta^o).$$

Démonstration : Comme dans la démonstration du th.3.21 on applique la Prop.3.19 à Av .

Soit $w^o \notin \widetilde{\text{WFpol}}_{s-1}(D_x u(O) - \widetilde{N}_+ u(O))(y^o, \eta^o)$. Par (3.28) on a

$a_o(0, y^o, 0, \eta^o)w^o \notin \widetilde{\text{WFpol}}_{s-1} D_x Av(O)(y^o, \eta^o)$. Donc par la Prop.3.19 on a

$a_o(0, y^o, 0, \eta^o)w^o \notin \widetilde{\text{WFpol}}_s Av|_S(\rho^1)$ donc $a_o^{-1}(\rho^1)a_o(0, y^o, 0, \eta^o)w^o \notin \widetilde{\text{WFpol}}_s u|_S(\rho^1)$

(3.30) entraîne que $a_o^{-1}(\rho^1)a_o(0, y^o, 0, \eta^o)w^o = w^1$ où w^1 est tel que

$(\rho^1, w^1) \in \Gamma$. On a donc démontré le théorème. #

S E C T I O N I V
 =====

PROPAGATION DU FRONT D'ONDE POLARISE
 POUR DES PROBLEMES AUX LIMITES.

IV.1 Notations et définitions.

Dans cette section on utilise les résultats de la section III pour démontrer des résultats sur la réflexion de la polarisation.

Donnons d'abord le problème que l'on va essayer de résoudre. On utilise les notations de §1 III. On se place au voisinage d'un point $(y^0, \eta^0) \in T^*(\mathbb{R}_y^n)$ tel que $(y^0, \eta^0) \in G_\nu$ pour $j + 1 \leq \nu \leq k$.

Notons pour $1 \leq \nu \leq j$, γ_ν la bicaractéristique de $\xi - \mu_\nu$ issue de $(0, y^0, \mu_\nu(0, y^0, \eta^0), \eta^0)$ et pour $j + 1 \leq \nu \leq k$, γ_ν la bicaractéristique de $(\xi - a_\nu)^2 - b_\nu$, issue de $(0, y^0, a_\nu(0, y^0, \eta^0), \eta^0)$. On suppose que parmi les variables y , il y en a une notée y_1 , qui joue le rôle du temps, ce qui permet de séparer de façon intrinsèque γ_ν en deux demi-bicaractéristiques γ_ν^+ et γ_ν^- . On suppose que l'on connaît le front d'onde polarisé de u en un point de γ_ν pour $1 \leq \nu \leq j_0$ et en un point de γ_ν^- pour $j + 1 \leq \nu \leq k$, et on veut déterminer le front d'onde polarisé de u le long de γ_ν pour $j_0 + 1 \leq \nu \leq j$ et le long de γ_ν^+ pour $j + 1 \leq \nu \leq k$.

On commence par se ramener au cas où le problème aux limites est de la forme (P') avec les notations de §1 III. v se sépare en $v =$

$(v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_k, v_+, v_-)$ suivant les blocs de H dans la Prop.1.2 III.

Chaque v_ν est solution d'un système : $D_x v_\nu - H_\nu v_\nu \in C^\infty(M)$ (1.1)

v_+ et v_- sont solutions de systèmes paraboliques rétrograde et direct respectivement.

Donnons quelques définitions :

Définition 1.1 : . pour $1 \leq \nu \leq j$, $L_\nu(x, y, \eta)$ est l'espace propre de

$g_1(x, y, \eta)$ associé à la valeur propre $\mu_\nu(x, y, \eta)$ pour $(x, y, \mu_\nu(x, y, \eta), \eta) \in \gamma_\nu$ et $\mathcal{L}_\nu(x, y, \eta)$ le symbole de la projection propre sur $L_\nu(x, y, \eta)$.

. pour $j + 1 \leq \nu \leq k$, $L_\nu^\pm(x, y, \eta)$ est l'espace propre de $g_1(x, y, \eta)$ associé à la valeur propre $a_\nu(x, y, \eta) \pm \sqrt{b_\nu(x, y, \eta)} = c_\nu^\pm(x, y, \eta)$ pour $(x, y, c_\nu^\pm(x, y, \eta), \eta) \in \gamma_\nu^\pm$ et $\mathcal{L}_\nu^\pm(x, y, \eta)$ est le symbole de la projection propre sur $L_\nu^\pm(x, y, \eta)$.

. $L_\pm(x, y, \eta)$ est la somme des espaces propres généralisés associés aux valeurs propres de $g_1(x, y, \eta)$ à partie imaginaire positive (négative) et $\mathcal{L}_\pm(x, y, \eta)$ est le symbole de la projection propre sur L_\pm

. pour $j + 1 \leq \nu \leq k$, $\mathcal{L}_\nu(x, y, \eta)$ est le symbole de la projection sur l'espace propre généralisé de $g_1(x, y, \eta)$ associé à $a_\nu(x, y, \eta) + \sqrt{b_\nu(x, y, \eta)}$.

Soit pour $1 \leq \nu \leq k$ π_ν la projection $v \rightarrow (0, \dots, 0, v_\nu, 0, \dots, 0)$ et

π_+ , π_- les projections $v \rightarrow (0, \dots, 0, v_+, 0)$ $v \rightarrow (0, \dots, 0, v_-)$. On a

$\pi_\nu S = S\mathcal{L}_\nu$ pour $1 \leq \nu \leq j$ $\pi_\nu S = S(\mathcal{L}_\nu^+ \oplus \mathcal{L}_\nu^-)$ pour $j + 1 \leq \nu \leq k$, et

$\pi_\pm S = S\mathcal{L}_\pm$.

Donnons d'abord une conséquence de (1.1)

Lemme 1.1 : Pour $u \in (D'(M))^m$ solution de (P) on a :

$$\text{WFpol } u(x, y, \xi, \eta) \text{ (resp. } \text{WF pol}_S u(x, y, \xi, \eta)) \subset \begin{cases} L_\nu(x, y, \eta) \text{ pour } 1 \leq \nu \leq j \text{ et } (x, y, \xi, \eta) \in \gamma_\nu \\ L_\nu^\pm(x, y, \eta) \text{ pour } j+1 \leq \nu \leq k \text{ et } (x, y, \xi, \eta) \in \gamma_\nu^\pm \end{cases}$$

Démonstration : il suffit de raisonner sur v et d'utiliser (1.1) qui

entraîne que $v_{\nu'}$ est microlocalement C^∞ sur $\gamma_{\nu'}$ pour $\nu \neq \nu'$ et pour

$1 \leq \nu \leq j$. Pour $j + 1 \leq \nu \leq k$, on raisonne de la même façon en utilisant

que H_ν se sépare à nouveau sur deux espaces propres par le lemme 1.1.III. #

On a le lemme évident suivant :

Lemme 1.2 : Les orbites hamiltoniennes de $\xi \Pi_m - H$ au-dessus de γ_ν pour $1 \leq \nu \leq k$ sont de la forme $(0, \dots, 0, w_\nu, 0, \dots, 0)$ où w_ν est une orbite hamiltonienne de $\xi \Pi_m - H_\nu$.

IV.2. Cas transverse.

Dans ce paragraphe on suppose qu'il n'y a que des rayons transverses, c'est-à-dire $k = j$. On dira qu'on a réflexion du front d'onde polarisé si on peut déterminer le front d'onde polarisé de u sur les bicaractéristiques sortantes en fonction de sa valeur sur les bicaractéristiques entrantes. On veut des hypothèses portant uniquement sur β_0 , symbole principal de β . Une condition suffisante pour avoir la réflexion de WFu en (y^0, η^0) est :

$$(2.1) \quad \forall w \in \mathcal{C}^m \quad \forall (y, \eta) \text{ dans un voisinage de } (y^0, \eta^0),$$

$\beta_0(y, \eta)w = 0 \Rightarrow \pi'(y, \eta)w = M(y, \eta)\pi(y, \eta)w + M^-(y, \eta)\pi^-(y, \eta)w$ où $\pi(y, \eta)w$ est la projection de w sur le produit des $L_\nu(0, y, \eta)$ pour $1 \leq \nu \leq j_0$, $\pi^-(y, \eta)w$ la projection de w sur le produit des $L_\nu(0, y, \eta)$ pour $j_0 + 1 \leq \nu \leq j$ et $M(y, \eta)$ et $M^-(y, \eta)$ sont des matrices homogènes de degré 0 en η . On note cette condition (ε_1) .

Une condition plus forte est (ε_2) :

(ε_1) est vérifiée et $M(y, \eta)$ est inversible en (y^0, η^0) , et envoie chaque espace propre de $g_1(x, y, \eta)$ sur un espace propre de $g_1(x, y, \eta)$

On va aussi étudier les phénomènes d'ondes de Rayleigh quand le système au bord est de type principal réel.

Une condition pour observer ces phénomènes est (R) :

$\beta(y, Dy)u(0) \in C^\infty(\partial M)$ entraîne : pour un $\nu \in [1, j]$ $R_\nu(y, Dy)v_\nu \in C^\infty(\partial M)$. avec $R_\nu(y, Dy)$ opérateur de type principal réel au sens de [1].

On note δ_ν la bicaractéristique de R_ν passant par (y^0, η^0) .

Donnons enfin quelques notations. D'après les hypothèses du §1 on suppose

qu'on connaît $WF_{pol} u$ (resp. $WF_{pol} u_s$) en un point de γ_ν pour $1 \leq \nu \leq j_0$. On

s'est donc donné des $d_\nu \times m$ systèmes a_ν dans $L^0(\hat{M})$ de symbole principal

$$a_\nu(x, y, \xi, \eta)$$

tels que $a_\nu(x, y, D_x, D_y)u \in C^\infty(M)$ (resp. $\in \mathcal{K}^S(M)$) et pour un point

$$\rho_\nu^0 = (x_0, y_\nu(x_0), \mu_\nu(x_0, y_\nu(x_0)), \eta_\nu(x_0), \eta_\nu(x_0)) \in \gamma_\nu$$

$$\text{Ker } a_\nu(\rho_\nu^0) = \text{WFpol } u(\rho_\nu^0) \text{ (resp. } \text{WFpol}_S u(\rho_\nu^0))$$

Soit $\psi_\nu(x)$ le flot associé aux orbites hamiltoniennes de $\xi \Pi_m - G$ tracées au-dessus des bicaractéristiques de $\xi - \mu_\nu$.

Pour (y, η) dans un voisinage conique de (y^0, η^0) la bicaractéristique nulle de $\xi - \mu_\nu$ issue de $(0, y, \mu_\nu(0, y, \eta), \eta)$ coupe l'hypersurface $x = x_0$ en un point unique $\rho_\nu(y, \eta)$.

Pour $1 \leq \nu \leq j_0$, on note alors $\text{WFpol } u(y, \eta, \nu_\nu)$ (resp. $\text{WFpol}_S u(y, \eta, \nu_\nu)$) l'espace $\psi_\nu^{-1}(x_0)$ ($\text{Ker } a_\nu(\rho_\nu(y, \eta))$).

On a alors les théorèmes suivants :

Théorème 2.1 : Soit $u \in (\mathcal{K}^{S-1}(M))^m$ solution du problème aux limites (P') vérifiant la condition (ε_1) . Si la dimension de $F_\nu(y, \eta)$, image de l'espace $K(y, \eta) = \bigoplus_{1 \leq k \leq j_0} \text{WFpol}_S u(y, \eta, \nu_k)$ par $\mathcal{L}_\nu(0, y, \eta) \circ M(y, \eta)$ est constante dans un voisinage conique de (y^0, η^0) pour un $\nu \geq j_0 + 1$, alors au-dessus de γ_ν , $\text{WFpol}_S u$ est contenu dans les orbites hamiltoniennes de $D_x \Pi_m - G$ issues de points $(0, y^0, \mu_\nu(0, y^0, \eta^0), \eta^0, w)$ avec $w \in F_\nu(y^0, \eta^0)$.

Théorème 2.2 : Soit $u \in (\mathcal{K}^{S-1}(M))^m$ solution du problème aux limites (P) vérifiant la condition (ε_2) alors pour tout $\nu \geq j_0 + 1$ $\text{WFpol}_S u$ au-dessus de γ_ν est égal à l'union des orbites hamiltoniennes de $D_x \Pi_m - G$ issues de points $(0, y^0, \mu_\nu(0, y^0, \eta^0), \eta^0, w)$ avec $w \in F_\nu(y^0, \eta^0)$.

Corollaire 2.2 : Sous les hypothèses des théorèmes 2.1 ou 2.2 si $\mathcal{L}_\nu(0, y, \eta) \circ M(y, \eta)$ restreint à K est injectif alors les conclusions des théorèmes 2.1 et 2.2 sont vraies pour $\text{WFpol } u$.

Démonstration du théorème 2.1 : D'après le § 1 on peut se ramener au cas où le problème aux limites est de la forme (P') et à démontrer ces résultats

pour $v = K Su$. D'après les hypothèses du § 1, on connaît $WFpol_s u$ en un point de v_ν pour $1 \leq \nu \leq j_0$ donc on connaît $WFpol_s v_\nu$ en un point de v_ν pour $1 \leq \nu \leq j_0$ d'après le lemme 1.1. On peut appliquer la Prop.2.1.III à v_ν pour $1 \leq \nu \leq j_0$ et on a :

(2.1) pour $1 \leq \nu \leq j_0$ il existe des $d_\nu \times \alpha_\nu$ matrices $A_\nu(y, D_y)$ de symbole principal a_ν dans $L^0(\partial M)$ telles que : $A_\nu(y, D_y) v_\nu \in H^S(\partial M)$ (2.2) et

$$\text{Ker } a_\nu(y^0, \eta^0) = \pi_\nu \circ S(O, y^0, \eta^0) \circ WFpol_s u(O, y^0, \eta^0, v_\nu) = WFpol_s v_\nu(O)(y^0, \eta^0) \quad (2.3).$$

β_0 vérifie la condition (ε_1) donc $\gamma_0 = \beta_0 \circ S(O, y, \eta)$ vérifie :

$$\gamma_0(y, \eta) w = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} w_{j_0+1} \\ \vdots \\ w_j \end{pmatrix} = \tilde{m}(y, \eta) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{j_0} \end{pmatrix} + \tilde{m}^-(y, \eta) w_- \quad (2.4).$$

D'autre part $v_-(O) \in C^\infty(\partial M)$ car v_- est solution d'un système parabolique rétrograde. Donc comme $\gamma v \in C^\infty(\partial M)$ on a :

$$\begin{pmatrix} v_{j_0+1} \\ \vdots \\ v_j \end{pmatrix} (O) = \tilde{M}(y, D_y) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{j_0} \end{pmatrix} (O) \text{ modulo } C^\infty(\partial M) \quad (2.5)$$

où $\tilde{M}(y, D_y) \in L^0(\partial M)$ a pour symbole principal $\tilde{m}(y, \eta)$. A cause de (2.1), il existe une matrice $N(y, D_y)$ elliptique dans $L^0(\partial M)$ de symbole principal $n(y, \eta)$ telle que si $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{j_0} \end{pmatrix} = N(y, D_y) \tilde{v}$ les $\ell = d_1 + \dots + d_{j_0}$ premières

composantes de \tilde{v} sont dans $H^S(\partial M)$ microlocalement en (y^0, η^0) . (2.6).

Soit \tilde{K} le sous-espace de $\mathbb{C}^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{j_0}}$ formé des vecteurs dont les ℓ premières composantes sont nulles. Alors on a de plus : $n(y^0, \eta^0) \tilde{K} = \tilde{K}$.

L'hypothèse que $F_\nu(y, \eta)$ est de dimension constante entraîne que si on remplace les ℓ premières colonnes de $\tilde{M}(y, \eta) \times N(y, \eta)$ par des zéros, on a des combinaisons linéaires entre les lignes de $\tilde{M}(y, \eta) \times N(y, \eta)$ correspondant à w_ν qui sont identiquement nulles dans un voisinage de (y^0, η^0) . Il existe donc une matrice $P_\nu(y, \eta)$ homogène d'ordre 0 en η telle que :

sur un voisinage de (y^0, η^0) $P_\nu \circ \pi_\nu \circ \tilde{m} \circ (n(y, \eta)|_{\tilde{K}}) \equiv 0$ (2.7)

et par définition de $F_\nu(y, \eta) : S(0, y, \eta) F_\nu(y, \eta) = \text{Ker } p_\nu(y, \eta)$.

Si $P_\nu(y, D_y) \in L^0(\partial M)$ a pour symbole principal $p_\nu(y, \eta)$ on a donc :

$$(2.8) P_\nu(y, D_y) v_\nu(0) = P_\nu(y, D_y) \circ \pi_\nu \circ \tilde{M} \circ N\tilde{v} \in H^s(\partial M) \text{ à cause de (2.6)}$$

et (2.7). Les termes d'ordre -1 dans le calcul symbolique sont absorbés

par le fait que u donc v appartient à $H^{s-1}(\partial M)$. (2.8) entraîne que

$\text{WFpol}_{S_\nu} v_\nu(0)(y^0, \eta^0) \subset \text{Ker } p_\nu(y^0, \eta^0)$. A cause de (1.1), on peut appliquer la

Prop.2.1 III à v_ν ce qui démontre le théorème . #

Démonstration du corollaire 2.2 : Si on s'intéresse à $\text{WFpol } u$ il faut

prendre en compte tous les termes du calcul symbolique. Il est facile

de vérifier qu'on a (2.6) en remplaçant $H^s(\partial M)$ par $C^\infty(\partial M)$ avec les notations

précédentes. On a aussi (2.7). Le problème est de choisir les termes d'ordre

inférieur du symbole de P_ν pour avoir :

$$(2.9) P_\nu(y, D_y) \circ \pi_\nu \circ \tilde{M} \circ (N|_{\tilde{K}}) \equiv 0 \text{ modulo } S^{-\infty} .$$

Cherchons donc le symbole complet de P_ν sous la forme : $\sum_{j=0}^{-\infty} p_\nu^j(y, \eta)$ le

symbole complet de $\tilde{M} \circ N|_{\tilde{K}}$ s'écrit : $\sum_{j=0}^{-\infty} m^j(y, \eta)$. On trouve d'abord p_ν^0 grâce

à (2.6). Puis pour éliminer le terme d'ordre -1 dans $P_\nu \circ \pi_\nu \circ \tilde{M} \circ N|_{\tilde{K}}$

il faut trouver p_ν^{-1} pour que :

$$p_\nu^0 \circ \pi_\nu \circ m^{-1} + p_\nu^{-1} \circ \pi_\nu \circ m^0 + \sum_{k=1}^n D_{\eta^k} (p_\nu^0 \circ \pi_\nu) D_{x_k} (m^0) = 0 .$$

on peut trouver p_ν^{-1} tel que $p_\nu^{-1} \circ \pi_\nu \circ m^0 = f$, où f est une matrice

arbitraire si $\pi_\nu \circ m^0$ est injective. On vérifie ensuite qu'on peut déter-

miner les p_ν^{-j} pour $j \geq 1$ pour avoir (2.9). (2.9) et (2.6) entraînent que

$P_\nu(y, D_y) v_\nu(0) \in C^\infty(\partial M)$ microlocalement en (y^0, η^0) . On a donc démontré

le corollaire 2.2 pour le th.2.1 et on procède de même pour le Th.2.2. #

Démonstration du théorème 2.2 : on conserve les notations précédentes.

On a (2.5) et la condition (ε_2) entraîne que $\tilde{m}(y, \eta)$ se décompose en blocs

$$\tilde{m}(y, \eta) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{j_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{j_0+1} \\ \vdots \\ w_j \end{pmatrix} \text{ avec } w_\nu = n_\nu(y, \eta) w_{\nu_k} \text{ avec } \nu_k \leq j_0 \text{ pour } j_0+1 \leq \nu \leq j .$$

Donc on a : $v_\nu(0) = N_\nu(y, D_y) v_{\nu_k}(0)$ modulo $H^S(\partial M)$ où $N_\nu \in L^0(\partial M)$ a pour symbole principal $n_\nu(y, \eta)$. On a $WFpol_s v_\nu(0)(y^0, \eta^0) =$

$$\pi_{\nu_k} \circ S(0, y^0, \eta^0) \cdot (WFpol_s u(y^0, \eta^0, \nu_{\nu_k}))$$

et par la Prop.2.3 II $WFpol_s v_\nu(0)(y^0, \eta^0) = n_\nu(y^0, \eta^0) (WFpol_s v_{\nu_k}(0)(y^0, \eta^0))$

Puis on peut appliquer la Prop.2.1.III à v_ν ce qui démontre le théorème. #

Remarque 2.1 : avec les notations du théorème 2.1 supposons que le rang de $\mathcal{L}_\nu(0, y, \eta) \circ M(y, \eta)$ est constant au voisinage de (y^0, η^0) . Alors si $K\{y^0, \eta^0\}$ est transverse à $\text{Ker } \mathcal{L}_\nu(0, y^0, \eta^0) \circ M(y^0, \eta^0)$ l'hypothèse de dimension constante est vérifiée.

Remarque 2.2 : L'hypothèse du théorème 2.1 dépend de la donnée de $WFpol_s u$ au-dessus de ν_ν pour $1 \leq \nu \leq j_0$, alors que le théorème 2.2 est valable pour toutes les polarisations incidentes.

Remarque 2.3 : on vérifie aisément qu'une relation $a(y, D_y) v(0) \in H^S(\partial M)$

qui couple ν_ν et $\nu_{\nu'}$, pour $\nu \neq \nu'$ ne donne pas de renseignement sur $WFpol_s v$ le long de ν_ν et de $\nu_{\nu'}$. Ceci explique que dans la condition (ε_2) on suppose que $m(y, \eta)$ se sépare en blocs sur les espaces propres de $g_1(0, y, \eta)$. On peut voir l'utilité de considérer $WFpol_s u$ en supposant que $u \in \mathcal{C}^{s-1}(M)^m$. Supposons que $u \in (D'(M))^6$ est solution d'un système (\mathcal{D}') avec 2 bicaractéristiques transverses en (y^0, η^0) ,

ν et ν' . Notons $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{pmatrix}$ les projections de u sur

les espaces propres associés à ν et ν' .

Supposons que la condition au bord est :

$$(2.10) \begin{cases} u'_1 = u_1 + u_2 + u_3 + a_{-1}(u_1) \\ u'_2 = 2u_1 + 2u_2 + u_3 + b_{-1}(u_2) \\ u'_3 = u_3 + c_{-1}(u_1) \end{cases}$$

avec a_{-1} , b_{-1} , $c_{-1} \in L^{-1}(\partial M)$. (2.10) vérifie (ε_1) mais pas (ε_2) .

Supposons d'autre part que la donnée de WFpol u sur γ entraîne que $u_3(0) \in C^\infty(\partial M)$ microlocalement en (y^0, η^0) .

$$\text{On a alors : } \begin{cases} u'_1 = u_1 + u_2 + a_{-1}(u_1) \\ u'_2 = 2u_1 + 2u_2 + b_{-1}(u_2) \\ u'_3 = c_{-1}(u_1) \end{cases} \quad \text{modulo } C^\infty(\partial M)$$

Cherchons à priori $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \in L^0(\partial M)$ tels que : $\alpha^1 u'_1 + \alpha^2 u'_2 + \alpha^3 u'_3 \in C^\infty(\partial M)$.

Il vient $(\alpha^1 + 2\alpha^2 + \alpha^1 a_{-1} + \alpha^3 c_{-1})u_1 + (\alpha^1 + 2\alpha^2 + \alpha^2 b_{-1})u_2 \in C^\infty(\partial M)$.

Comme u_1 et u_2 sont arbitraires il faut donc que :

$$(2.11) \quad \begin{cases} \alpha^1 + 2\alpha^2 + \alpha^1 a_{-1} + \alpha^3 c_{-1} \equiv 0 \\ \alpha^1 + 2\alpha^2 + \alpha^2 b_{-1} \equiv 0 \end{cases} \quad \text{si } \alpha^i = \sum_{j=0}^{-\infty} \alpha_j^i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Prenons par exemple $\alpha_o^2 \neq 0$. Il vient $\alpha_o^1 + 2\alpha_o^2 = 0$. Pour annuler les termes d'ordre -1 dans (2.11) il faut :

$$\begin{cases} \alpha_{-1}^1 + 2\alpha_{-1}^2 = -2\alpha_o^2 a_{-1} + \alpha_o^3 c_{-1} \\ \alpha_{-1}^1 + 2\alpha_{-1}^2 = \alpha_o^2 b_{-1} \end{cases} \quad \text{Donc } \alpha_o^2 (b_{-1} + 2a_{-1}) = \alpha_o^3 c_{-1}.$$

Il suffit de prendre $c_{-1}(y^0, \eta^0) = 0$ et $(b_{-1} + 2a_{-1})(y^0, \eta^0) \neq 0$ pour avoir une contradiction. Donc avec la condition au bord (2.10) on n'a pas réflexion de WFpol u . Par contre si $u \in \mathcal{K}^{s-1}(M)$, on a réflexion de WFpol_s u pour la polarisation incidente $u_3(0) \in \mathcal{K}^s(\partial M)$.

Enfin on peut remplacer dans les théorèmes 2.1 et 2.2 l'hypothèse $u \in \mathcal{K}^{s-1}(M)$ par $u \in \mathcal{K}^{s-1}(M)$ microlocalement sur $\gamma_1, \dots, \gamma_{j_o}$.

On va maintenant démontrer un théorème sur les ondes de Rayleigh.

Théorème 2.3 : Soit $u \in (D'(M))^m$ solution du problème aux limites (P) vérifiant la condition (R). Si WFpol $u(y^0, \eta^0, \nu) = E_\nu(0)$, alors au-dessus des bicaractéristiques de $\xi - \mu_\nu$ qui partent des points de δ_ν , WFpol u est égal à l'union des orbites hamiltoniennes qui partent des points appartenant

aux orbites hamiltoniennes de R_{ν} issues de (y^0, η^0, w) avec $w \in E_{\nu}(0)$.

Démonstration : D'après (R) on a $R_{\nu}(y, D_y)v_{\nu}(0) \subset C^{\infty}(\partial M)$ et

$WF_{\text{pol}} v_{\nu}(0)(y^0, \eta^0) = E_{\nu}(0)$. Il suffit d'appliquer le théorème 1.7 II à

$v_{\nu}(0)$ qui est solution d'un système de type principal réel. Donc au-dessus

de $\delta_{\nu} WF_{\text{pol}} v_{\nu}(0)$ est l'union des orbites hamiltoniennes de R_{ν} partant

de (y^0, η^0, w) avec $w \in E_{\nu}(0)$. Puis en tout point de δ_{ν} on peut appliquer la proposition 2.1.III à $v_{\nu}(0)$, ce qui donne le théorème. #

IV.3. Cas diffractif.

Dans ce paragraphe on suppose qu'il y a des rayons qui sont tangents à

∂M , plus précisément les rayons ν_{j+1} pour $j+1 \leq \nu \leq k$. Notons \tilde{N}_{ν}^{+} et

\tilde{N}_{ν}^{-} les opérateurs de Neumann associés aux blocs $D_x \Pi - H_{\nu}$. Notons

$\nu = \beta S^{-1} K^{-1}$ et D^{-1} l'opérateur de symbole $|\eta|^{-1}$. On se ramène donc

à ν solution du problème aux limites (δ') . Une condition suffisante

pour avoir la réflexion de WF_{ν} pour ν solution de (δ') est :

$$(3.1) \quad \nu \in C^{\infty}(\partial M) \text{ entraîne : } \begin{bmatrix} \pi' \nu \\ D^{-1}(H_{j+1}(0) - \tilde{N}_{j+1}^{-}) \nu_{j+1} \\ \vdots \\ D^{-1}(H_k(0) - \tilde{N}_k^{-}) \nu_k \end{bmatrix} = M(y, D_y) \begin{bmatrix} \pi \nu \\ D^{-1}(H_{j+1}(0) - \tilde{N}_{j+1}^{+}) \nu_{j+1} \\ \vdots \\ D^{-1}(H_k(0) - \tilde{N}_k^{+}) \nu_k \end{bmatrix}$$

modulo $C^{\infty}(\partial M)$, où M est un opérateur pseudodifférentiel matriciel.

En général les composantes de M sont des produits d'opérateurs d'Airy

associés à des hypersurfaces différentes. Pour simplifier les résultats

on va donc supposer qu'il n'y a qu'un seul rayon tangent, c'est à dire

que $j+1 = k$ (hypothèse \mathcal{K}'). Sous cette hypothèse, on va voir que la condition

(3.1) est satisfaite si β vérifie la condition de Lopatinski-Shapiro, dans

le cas où les ν_{ν} pour $1 \leq \nu \leq j_0$ sont des bicaractéristiques entrantes

et pour $j_{0+1} \leq \nu \leq j$, des bicaractéristiques sortantes. Supposons donc

que β vérifie la condition de Lopatinski-Shapiro (voir [17] pour la définition). D'après les résultats de [7] par une transformation canonique dans les variables (y, η) dépendant de façon C^∞ de x , on peut se ramener au cas où $a_{j+1} \equiv 0$. Les opérateurs intégraux de Fourier associés à ces transformations préservent l'espace $\mathcal{H}^s(M)$. Oublions l'indice $j+1$, pour simplifier les notations.

D'après le lemme 1.1.III on peut trouver une base de $\mathcal{C}^{2\alpha}$ dans laquelle $H_{j+1}(0, y, \eta)$ s'écrit :

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & |\eta| \Pi_\alpha \\ \hline \frac{b}{|\eta|} \Pi_\alpha & 0 \end{array} \right]$$

Notons $\pi_1 w$ la projection de $w \in \mathcal{C}^m$ sur l'espace engendré par les α premiers vecteurs de cette base et $\pi_2 w$ la projection sur l'espace engendré par les α derniers. La condition de Lopatinski-Shapiro est bien sûr invariante par changement de base. Soit γ_0 le symbole principal de γ . La condition de Lopatinski-Shapiro vérifiée par γ_0 entraîne que :

$$(3.2) \quad \forall w \in \mathcal{C}^m \quad \gamma_0 w = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi_1 w \\ \pi_2 w \end{pmatrix} = K(y, \eta) \begin{pmatrix} \pi w \\ \pi_2 w \end{pmatrix} + \bar{K}(y, \eta) \pi_2 w$$

avec $K(y, \eta)$ matrice homogène d'ordre 0 en η . Donc

$$\gamma v \in C^\infty(\partial M) \Rightarrow \begin{pmatrix} \pi_1 v \\ \pi_2 v \end{pmatrix} = K(y, D_y) \begin{pmatrix} \pi v \\ \pi_2 v \end{pmatrix} \text{ modulo } C^\infty(\partial M).$$

avec $K \in L_{cl}^0(\partial M)$. D'après la Prop. 3.16 III il existe J opérateur intégral de Fourier elliptique dans $I^0(\mathbb{R}^n, \partial M, \chi_1)$ tel que : $JN^\pm \equiv (a_0^\pm \Phi^\pm + b_0^\pm) J$ au voisinage de (y^0, η^0) où :

- N^\pm sont les opérateurs de Neumann associés à $\xi^2 - b$
- $a_0^\pm \in L_{cl}^{2/3}(\mathbb{R}^n)$ est elliptique en $(0, \eta_0)$, $b_0^\pm \in L_{cl}^0(\mathbb{R}^n)$
- Φ^\pm est le multiplicateur de Fourier de symbole $\frac{A^\pm}{A^\pm} (\eta_1 \eta_n^{-1/3})$

En décomposant K en blocs on a :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \pi^1 v = K_{11} \pi v + K_{12} \pi_2 v \\ \pi_1 v = K_{21} \pi v + K_{22} \pi_2 v \end{cases} \quad \text{modulo } C^\infty(\partial M) .$$

$$\text{et } D^{-1} (H(O, y, D_y) \tilde{N}^+ v(O)) = \begin{pmatrix} \pi_2 v - D^{-1} \tilde{N}^+ \pi_1 v \\ D^{-2} b \pi_1 v - D^{-1} \tilde{N}^+ \pi_2 v \end{pmatrix} + A_0 \begin{pmatrix} \pi_1 v \\ \pi_2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^+ \\ h_2^+ \end{pmatrix}$$

avec $A_0 \in L_{\mathcal{C}}^{-1}(\partial M)$.

On travaille maintenant sur $J^{-1} v$ et $J^{-1} h^\pm$ que l'on notera v et h^\pm .

$$(3.3) \text{ entraîne : } \begin{cases} \pi v = K_{11} \pi v + K_{12} \pi_2 v \\ \pi_1 v = K_{21} \pi v + K_{22} \pi_2 v \end{cases} \quad \text{modulo } C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

avec $K_{ij} = J^{-1} K_{ij} J \in L_{\mathcal{C}}^0(\mathbb{R}^n)$. Supposons de plus que $v \in H^{s'}(\partial M)$

$$(3.4) \text{ entraîne : } \begin{pmatrix} h_1^+ \\ h_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_2 v - A_1 \phi^+ \pi_1 v \\ B_1 \pi_1 v - B_2 \phi^+ \pi_2 v \end{pmatrix} \quad \text{modulo } H^{s'+1/3}(\mathbb{R}^n)$$

avec $A_1 \in L_{\mathcal{C}}^{-1/3}(\mathbb{R}^n)$, $B_1 \in L_{\mathcal{C}}^0(\mathbb{R}^n)$, $B_2 \in L_{\mathcal{C}}^{-1/3}(\mathbb{R}^n)$. En effet (3.29) III entraîne que $\tilde{N}^+ = N^+$ modulo $L_{1/3,0}^{2/3}(\partial M)$.

$$\text{Donc } h_1^+ = \Pi_\alpha \pi_2 v - A_1 \phi^+ \pi_1 v = (\Pi_\alpha - A_1 \phi^+ K_{22}) \pi_2 v - A_1 \phi^+ K_{21} \pi v =$$

$$(\Pi_\alpha - A_1 K_{22} \phi^+) \pi_2 v - A_1 K_{21} \phi^+ \pi v \quad \text{modulo } H^{s'+1/3}(\mathbb{R}^n).$$

Dans la suite on va utiliser le calcul des opérateurs de Fourier-Airy développé dans [11]. Les notations employées sont celles de [11].

D'après le théorème 4.21 de [11] $F^+ = \Pi_\alpha - A_1 K_{22} \phi^+$ a un inverse microlocal près de $(O, \tilde{\eta}_0)$ dans la classe $A_+^{0,+}(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{Donc on a : } \pi_2 v = (F^+)^{-1} (h_1^+ + A_1 K_{21} \phi^+ \pi v) \quad \text{modulo } H^{s'+1/3}(\mathbb{R}^n)$$

$$\pi_2 v = (F^-)^{-1} (h_1^- + A_1 K_{21} \phi^- \pi v) \quad \text{modulo } H^{s'+1/3}(\mathbb{R}^n).$$

$$\text{Donc : } (F^-)^{-1} h_1^- = (F^+)^{-1} h_1^+ + ((F^+)^{-1} A_1 K_{21} \phi^+ - (F^-)^{-1} A_1 K_{21} \phi^-) \pi v \quad \text{modulo } H^{s'+1/3}(\mathbb{R}^n)$$

De même on a : $\pi'v = \kappa_{12} (F^+)^{-1} h_1^+ + (\kappa_{11} + \kappa_{12} (F^+)^{-1} A_1 \kappa_{21} \phi^+) \pi'v$ modulo $H^{s'+1/3}(\mathbb{R}^n)$

et : $h_2^- = B_1 \kappa_{21} \pi'v + (B_1 \kappa_{22} - B_2 \phi^-) \pi_2'v$ modulo $H^{s'+1/3}(\mathbb{R}^n)$.

donc $h_2^- = (B_1 \kappa_{22} - B_2 \phi^-) (F^+)^{-1} h_1^+ + ((B_1 \kappa_{22} - B_2 \phi^-) (F^+)^{-1} A_1 \kappa_{21} \phi^+ + B_1 \kappa_{21}) \pi'v$

Donc on peut obtenir h_1^-, h_2^- , $\pi'v$ en fonction de $\pi'v$ et de h_1^- . On a donc obtenu (3.1).

Rappelons brièvement la définition des classes $A_+^{m,+}(\mathbb{R}^n)$ et $A_-^{m,+}(\mathbb{R}^n)$ de [11]. Soit $\varphi_{\pm}^j(z) = \frac{A_{\pm}^j}{A_{\pm}}(z)$ on note $\varphi_{\pm}^j(z) = \frac{d^j}{dz^j} \varphi_{\pm}(z)$

et on note ϕ_{\pm}^j le multiplicateur de Fourier de symbole $\varphi_{\pm}^j(\eta_1 \eta_n^{-1/3})$.

Alors $\phi_{\pm}^j \in L_{1/3,0}^{(1/3-2j/3)+}(\mathbb{R}^n)$ où $n_{\pm} = \sup(n, 0)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. D'après la Proposition 4.1 de [11], $B \in A_s^{m,+}(\mathbb{R}^n)$, $s = \pm$ si $B \in L_{1/3,0}^m(\mathbb{R}^n)$ et B a un symbole $\sigma(B) \sim b_0(y, \eta) + \sum_{j \geq 1} b_j(y, \eta) \phi_s^{j-1}$ avec $b_j \in S_{cl}^{m-j/3}(\mathbb{R}^n)$.

Le développement converge dans $S_{1/3,0}^m(\mathbb{R}^n)$. On appellera $b_0(y, \eta)$ la partie classique de B . Comme $u(0) \in H^{s'}(\mathbb{R}^n)$, v et $h^{\pm} \in H^{s'}(\mathbb{R}^n)$

donc $\forall B \in A_{s'}^{0,+}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$(3.5) \quad \begin{cases} Bv = (b_0 + b_1 \phi_s) v \\ Bh^{\pm} = (b_0 + b_1 \phi_s) h^{\pm} \end{cases} \quad \text{modulo } H^{s'+1/3}(\mathbb{R}^n)$$

On a donc

$$(3.6) \quad \begin{pmatrix} (F^-)^{-1} h_1^- \\ \pi'v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} h^+ \\ \pi'v \end{pmatrix} \quad \text{modulo } H^{s'+1/3}(\mathbb{R}^n) \quad \text{où } M \text{ a un symbole}$$

de la forme suivante : $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$, où les blocs correspondent

à la décomposition suivant $(F^-)^{-1} h_1^-$, $\pi'v$, h^+ et $\pi'v$, et on a :

M_{11} , M_{21} , M_{22} sont dans $A_+^{0,+}(\mathbb{R}^n)$ et M_{12} est la somme d'un terme de $A_+^{0,+}(\mathbb{R}^n)$ et d'un terme de $A_-^{0,+}(\mathbb{R}^n)$. Pour simplifier les calculs, on va

supposer que $K_{21} \equiv 0$, ce qui entraîne que $K_{21} \equiv 0$ donc que $M_{12} \equiv 0$.

(voir remarque 3.2). (Hypothèse \mathcal{K}'') on notera $M_0(y, \eta)$ le symbole principal de la partie classique de M . on a :

$$M_0(0, \tilde{\eta}_0) = \left(\begin{array}{c|c} \Pi_\alpha & 0 \\ \hline K_{12}(0, \tilde{\eta}_0) & K_{11}(0, \tilde{\eta}_0) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \Pi_\alpha & 0 \\ \hline K_{12}(y^0, \eta^0) & K_{11}(y^0, \eta^0) \end{array} \right)$$

Donnons maintenant quelques notations :

D'après les hypothèses du §1, on suppose que l'on connaît $WFpol_s v$ le long de γ_{j+1}^- . On s'est donc donné un $d_{j+1} \times 2 \alpha_{j+1}$ système $a_{j+1} \in L_{cl}^0(M)$ de symbole principal $\sigma(a_{j+1})$ tel que $a_{j+1} v_{j+1} \in \mathcal{K}^s(M)$ et $WFpol_s v(\rho_{j+1}^0) = Ker \sigma(a_{j+1})(\rho_{j+1}^0)$ où $\rho_{j+1}^0 \in \gamma_{j+1}^-$.

Alors d'après la Prop.3.6 III et le théorème (3.21) III, il existe des $d_{j+1} \times 2 \alpha_{j+1}$ systèmes a_{j+1}^0 et a_{j+1}^1 dans $L_{cl}^0(\partial M)$ et $L_{cl}^{-1}(\partial M)$ tels que :

$$(a_{j+1}^0 - N^+ a_{j+1}^1) D^{-1} (H_{j+1}(0) - \tilde{N}^+) v_{j+1}(0) \in H^s(\partial M), \text{ si } u \in \mathcal{K}^{s'}(M) \text{ s' } > s-1/3$$

On note alors $WFpol_s u(y^0, \eta^0, \gamma_{j+1}^-)$ l'espace $S^{-1}(0, y^0, \eta^0) Ker \sigma(a_{j+1}^0)(y^0, \eta^0)$.

On note \mathcal{M}_0 la matrice $S^{-1}(0, y^0, \eta^0) M_0(0, \tilde{\eta}_0) S(0, y^0, \eta^0)$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.1 : Soit $u \in (\mathcal{K}^{s'}(M))^m$ solution du problème aux limites (ρ)

vérifiant les hypothèses (\mathcal{K}') et (\mathcal{K}''), tel que β vérifie la condition de Lopatinski-Shapiro et $s' > s-1/4$. On suppose que

$$K = \bigoplus_{1 \leq k \leq j_0} WFpol_s u(y^0, \eta^0, \gamma_k) \oplus WFpol_s u(y^0, \eta^0, \gamma_{j+1}^-)$$
 est transverse à

$Ker \mathcal{L}_v(0, y^0, \eta^0) \circ \mathcal{M}_0$ et que $\mathcal{L}_v(0, y^0, \eta^0) \circ \mathcal{M}_0$ restreint à K est

injectif. Alors - si $j_0 + 1 \leq \nu \leq j$, au-dessus de γ_{ν}^- $WFpol_s u$ est contenu

dans les orbites hamiltoniennes de $D_x \Pi - G$ issues de points

$(0, y^0, \mu_\nu(0, y^0, \eta^0), \eta^0, w)$ avec w appartenant à l'image de K par

$\mathcal{L}_v(0, y^0, \eta^0) \circ \mathcal{M}_0$.

- si $\nu = j+1$, au-dessus de γ_{j+1}^- , $WFpol_s u$ est contenu dans

les orbites hamiltoniennes de $D_x \Pi_m - G$ issues de points $(0, y^0, a_{j+1}(0, y^0, \eta^0), \eta^0, w)$ avec w appartenant à l'image de K par $f_{j+1}(0, y^0, \eta^0) \circ \mathfrak{M}_0$.

Démonstration : On se ramène tout d'abord au cas où le problème aux limites est de la forme (P') et à démontrer le théorème pour $v = KSu$.

En suivant la démonstration du théorème 2.1 et d'après la définition de

$WFpol_s u(y^0, \eta^0, \cdot, \cdot)_{j+1}$, il existe pour $1 < v \leq j_0$ des $d_v \times \alpha_v$ matrices

$A_v(y, D_y)$ de symbole principal $a_v(y, \eta)$ dans $L_{cl}^0(\partial M)$ telles que :

$$A_v(y, D_y) v_v \in H^s(\partial M) \quad (3.7) \text{ et } \text{Ker } a_v(y^0, \eta^0) = \pi_v \circ S(0, y^0, \eta^0) WFpol_s u(y^0, \eta^0, v_v) \quad (3.8).$$

De même il existe des $d_{j+1} \times 2\alpha_{j+1}$ matrices A_{j+1}^0 et $A_{j+1}^1 \in L_{cl}^0(\partial M)$ et $L_{cl}^{-1}(\partial M)$

$$\text{telles que : } (A_{j+1}^0 - N_+ A_{j+1}^1) D^{-1}(H_{j+1}(0) - \tilde{N}^+) v_{j+1}(0) \in H^s(\partial M) \quad (3.9)$$

$$\text{et } \text{Ker } a_{j+1}^0(y^0, \eta^0) = \pi_{j+1} \circ S(0, y^0, \eta^0) \cdot WFpol_s u(y^0, \eta^0, v_{j+1}^-) \quad (3.10).$$

En conjuguant les relations (3.7) et (3.9) par J , il existe pour $1 < v \leq j_0$

des $d_v \times \alpha_v$ matrices Q_v dans $L_{cl}^0(\mathbb{R}^n)$ telles que $Q_v(y, D_y) v_v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et :

$$\sigma(Q_v)(0, \tilde{\eta}_0) = a_v(y^0, \eta^0), \text{ et il existe des } d_{j+1} \times 2\alpha_{j+1} \text{ matrices } Q_{j+1}^0 \text{ et}$$

$$Q_{j+1}^1 \text{ dans } L_{cl}^0(\mathbb{R}^n) \text{ et } L_{cl}^{-1/3}(\mathbb{R}^n) \text{ telles que : } (Q_{j+1}^0 + Q_{j+1}^1 \Phi_+) \mathcal{M}^+ \in H^s(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{et } G(Q_{j+1}^0)(0, \tilde{\eta}_0) = c \sigma(A_{j+1}^0)(y^0, \eta^0) \text{ où } c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \text{ Donc il existe des}$$

matrices \mathcal{M}^0 et \mathcal{M}^1 dans $L_{cl}^0(\mathbb{R}^n)$ et $L_{cl}^{-1/3}(\mathbb{R}^n)$ telles que : - \mathcal{M}^0 est

elliptique en (y^0, η^0) , et si $\mathcal{M} = \mathcal{M}^0 + \mathcal{M}^1 \Phi_+$, on a :

$$\text{- si } \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{j_0} \\ h^+ \end{pmatrix} = \mathcal{M}(y, D_y) \tilde{v} \text{ les } d = d_1 + d_2 + \dots + d_{j_0} + d_{j+1} \text{ premières composantes de } \tilde{v} \text{ sont dans } H^s(\mathbb{R}^n) \quad (3.11).$$

Soit \tilde{K} le sous-espace de $\mathbb{C}^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{j_0} + 2(\alpha_{j+1})}$ formé des vecteurs dont

les d premières composantes sont nulles. On a $\sigma(\mathcal{M}^0)(0, \tilde{\eta}_0) \tilde{K} = S(0, y^0, \eta^0) K$.

L'hypothèse que K est transverse à $S^{-1}(0, y^0, \eta^0) \text{Ker } \pi_v \circ M_0(0, \tilde{\eta}_0)$ entraîne

qu'il existe une matrice $C_v(y, \eta)$ homogène de degré 0 en η telle que :

$$\text{Sur un voisinage de } (0, \tilde{\eta}_0) C_v \circ \pi_v \circ M_0 \circ \sigma(\mathcal{M}^0)(y, \eta) \Big|_{\tilde{K}} \equiv 0 \quad (3.12).$$

On veut maintenant trouver un opérateur C_v tel que

$$C_v \circ \pi_v \circ M \circ \mathcal{M} \Big|_{\tilde{K}} \in L_{1/3,0}^{-1}(\mathbb{R}^n) \quad (3.13).$$

Pour cela on utilise le calcul symbolique et les notations de [12].

Notons $L \in A_+^{0,+}(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur $\pi_\nu \circ M \circ \int_K^\rho \tilde{\nu}$. On a $L = L^0 + L^1 \phi_+$, avec $L^0 \in L_{\mathcal{CL}}^0(\mathbb{R}^n)$, $L^1 \in L_{\mathcal{CL}}^{-1/3}(\mathbb{R}^n)$ et d'après les hypothèses du théorème, le symbole principal de L^0 est injectif en $(0, \tilde{\eta}_0^0)$, donc injectif sur un voisinage de $(0, \tilde{\eta}_0^0)$. En suivant la preuve du théorème 4.21 de [12], on démontre facilement qu'il existe une matrice $F \in A_+^{0,+}(\mathbb{R}^n)$, telle que $F \circ L - \mathbb{1}_K \in S^{-\infty}$ sur un voisinage conique de $(0, \tilde{\eta}_0^0)$.

Grâce à (3.12) et à l'injectivité de L^0 , il existe $C_\nu \in A_+^{0,+}(\mathbb{R}^n)$ tel que le symbole principal formel de $C_\nu \circ L$ est nul. Ceci entraîne que $C_\nu \circ L$ est la somme d'un élément de $A_+^{-1,+}(\mathbb{R}^n)$ et d'un symbole classique $H \in L_{\mathcal{CL}}^0(\mathbb{R}^n)$ dont le symbole principal s'annule en $(0, \tilde{\eta}_0^0)$. En remplaçant C_ν par $C_\nu - HF$ on a une solution de (3.13). Si on note encore C_ν cette matrice le symbole principal de la partie classique de C_ν est égal à $c_\nu(0, \tilde{\eta}_0^0)$ en $(0, \tilde{\eta}_0^0)$.

$$(3.6), (3.11) \text{ et } (3.13) \text{ entraînent donc que } C_\nu \pi_\nu \begin{pmatrix} (F^-)^{-1} \mathbb{1}_K^- \\ \pi_{\nu'} \end{pmatrix} \in H^S(\mathbb{R}^n).$$

On distingue maintenant deux cas :

- Si $j_0 + 1 \leq \nu \leq j$ on a obtenu en utilisant (3.5) une relation

$$(C_\nu^0 + C_\nu^1 \phi_+) \nu_\nu \in H^S(\mathbb{R}^n) \text{ avec } C_\nu^0 \in L_{\mathcal{CL}}^0(\mathbb{R}^n), C_\nu^1 \in L_{\mathcal{CL}}^{-1/3}(\mathbb{R}^n) \text{ et } C_\nu^0(0, \tilde{\eta}_0^0) \text{ est l'image par } \pi_\nu \circ M_0(0, \tilde{\eta}_0^0) \circ S(0, y^0, \eta^0) \text{ de } K.$$

On utilise maintenant la remarque 3.7 III, la définition 3.9 III et le

fait que $\nu_\nu(0) \in H^{S'}(\partial M)$, ce qui montre que $\widetilde{WF}pol_{\nu_\nu}(0)(y^0, \eta^0) \subset \text{Ker}(c_\nu^0)(0, \tilde{\eta}_0^0)$

D'après la proposition 2.1III qui est encore vraie pour $\widetilde{WF}pol_{\nu_\nu}$ on en déduit la conclusion du théorème.

- Si $\nu = j+1$. On a obtenu en utilisant (3.5) une relation :

$$(C_{j+1}^0 + C_{j+1}^1 \phi_+) (F^-)^{-1} \mathbb{1}_K^- \in H^S(\mathbb{R}^n) \text{ avec } C_{j+1}^0 \in L_{\mathcal{CL}}^0(\mathbb{R}^n) \text{ et } C_{j+1}^1 \in L_{\mathcal{CL}}^{-1/3}(\mathbb{R}^n) \text{ et } \text{Ker } \sigma(C_{j+1}^0)(0, \eta_0^0) \text{ est l'image par } \pi_{j+1} \circ M_0(0, \tilde{\eta}_0^0) \circ S(0, y^0, \eta^0) \text{ de } K.$$

En utilisant à nouveau (3.5) pour l'expression de $(F^-)^{-1}$ on obtient une

relation : $(d_{j+1}^0 + d_{j+1}^1 \phi^+ + d_{j+1}^2 \phi^- + d_{j+1}^3 \phi^+ \phi^-) \mathcal{K}^- \in H^s(\mathbb{R}^n)$ (3.14)

avec :

$d_{j+1}^0 \in L_{\mathcal{C}\mathcal{L}}^0(\mathbb{R}^n)$, d_{j+1}^1 , $d_{j+1}^2 \in L_{\mathcal{C}\mathcal{L}}^{-1/3}(\mathbb{R}^n)$, $d_{j+1}^3 \in L_{\mathcal{C}\mathcal{L}}^{-2/3}(\mathbb{R}^n)$, et

$\sigma(d_{j+1}^0)(0, \tilde{\eta}_0) = \sigma(C_{j+1}^0)(0, \tilde{\eta}_0)$. On utilise maintenant que $\mathcal{K}^- = J^- h^-$ et

on va suivre la preuve de la Proposition 3.19 III. Notons $f_{j+1} = v_{j+1}|_S$.

Comme dans la preuve du théorème 3.21 III, on se ramène au cas où v_{j+1}

vérifie les hypothèses de la Prop.3.19 III.

Notons d l'opérateur qui apparaît dans (3.14). (3.14) entraîne que

$d J_x^{-1} D_x v_{j+1} \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$. Avec les notations de Prop.3.10 III on a :

$$d J_x^{-1} D_x v_{j+1} = d J_x^{-1} J_a \frac{1}{A_+} K f_{j+1} = d a \frac{1}{A_+} K f_{j+1}.$$

On a $d a \frac{1}{A_+} \equiv \frac{1}{A_+} \tilde{d}$ avec \tilde{d} de la forme (3.14) et $\text{Ker } \sigma(d_{j+1}^0)(0, \tilde{\eta}_0) =$

$\text{Ker } \sigma(\tilde{d}_{j+1}^0)(0, \tilde{\eta}_0)$ en effet il suffit d'utiliser le lemme 3.18 III et le

fait que ϕ_+ , ϕ_- et $\frac{1}{A_+}$ commutent car ce sont des multiplicateurs de Fourier.

On a donc $\frac{1}{A_+} \tilde{d} K f_{j+1} \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$. Puis on utilise la remarque 3.7 III pour

écrire \tilde{d} sous la forme $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2$ avec $\tilde{d}_1 \in L_{a,0}^{5/6}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{d}_2 \in L_{1/3,0}^{5/6-(1-a)/2}(\mathbb{R}^n)$.

Il suffit ensuite de suivre la fin de la démonstration de la Prop.3.19 III

pour démontrer le théorème. #

Remarque 3.2 : Dans le cas où l'hypothèse \mathcal{K}'' n'est pas vérifiée le théorème 3.1

est encore vrai mais il faut développer un calcul symbolique dans une

classe plus grande que $A_+^{m,+}(\mathbb{R}^n)$, celle des opérateurs $B \in L_{1/3,0}^m(\mathbb{R}^n)$

tels que $\sigma(B)$ a un développement :

$$\sigma(B) \sim_{b_0} (y, \eta)_+ \sum_{j,k \geq 1} b_{jk}(y, \eta) \phi_+^{j-1} \phi_-^{k-1} \text{ avec } b_{j,k} \in S_{\mathcal{C}\mathcal{L}}^{m-j/3-k/3}(\mathbb{R}^n).$$

4. Exemples.

Dans ce paragraphe on va donner quelques exemples.

4.1 Réflexion sur une surface pour l'équation des ondes.

On se place en dimension d'espace égale à 3. On a donc $y = (y_1, y_2, y_3)$

y_1 représentant le temps, et on regarde la réflexion sur $x = 0$.

le système est un système 3×3 du 2e ordre : $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y_3^2} = 0$.

Si $\vec{E} = (e_1, e_2, e_3)$ les changements d'inconnues :

$$(4.1) \begin{cases} u_i = e_i \\ u'_i = D_x \Lambda^{-1} e_i \end{cases} \text{ où } \Lambda \text{ est un opérateur à support propre de symbole}$$

$(1 + |\eta|^2)^{1/2}$ ramènent le système à :

$$\begin{cases} D_x u_i = \Lambda u'_i \\ D_x u'_i = \Lambda^{-1} r u_i \end{cases} \text{ où } r(D_y) = D_{y_1}^2 - D_{y_2}^2 - D_{y_3}^2.$$

Regardons d'abord le cas transversal.

Soit $(y^0, \eta^0) \in T^*(\partial M)$ tel que $\eta_1^2 > \eta_2^2 + \eta_3^2$. Au voisinage de (y^0, η^0) les

changements d'inconnues $\begin{cases} u_i = v_i + v'_i \\ u'_i = \frac{\mu}{\Lambda} (v_i - v'_i) \end{cases}$ où μ a pour symbole $\sqrt{\eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2}$

ramènent le système à $D_x \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{v}' \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{v}' \end{pmatrix}$ où le symbole principal de

$$G \text{ est } \begin{bmatrix} \mu \Pi_3 & 0 \\ 0 & -\mu \Pi_3 \end{bmatrix} \text{ En } (y^0, \eta^0) \text{ on a donc 2 bicaractéristiques triples } \gamma \text{ et } \gamma' \text{ qui arrivent.}$$

Il est facile de vérifier que au-dessus de γ $WF_{\text{pol}} \vec{E} = WF_{\text{pol}} \vec{v}$ et au-dessus de γ' $WF_{\text{pol}} \vec{E} = WF_{\text{pol}} \vec{v}'$.

Regardons maintenant un certain nombre de conditions aux limites.

$$(4.2) \begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \text{ où } \vec{v} \text{ est un vecteur normal à } x = 0. \\ \vec{E} \times \vec{v} = 0 \end{cases}$$

On obtient : $\begin{cases} v_2 + v'_2 = 0 \\ v_3 + v'_3 = 0 \\ v_1 - v'_1 \in C^\infty \end{cases}$ on est dans les hypothèses du théorème 2.2 et du corollaire 2.2.

on a donc réflexion de $WF_{\text{pol}} u$ et de $WF_{\text{pol}} u_s$.

(4.3) $\{D_x \vec{E} - A(y)D_{y_1} \vec{E} = 0$ où A est une matrice 3×3 (condition de type impédance). (4.3) entraîne que $(\mu \Pi_3 - AD_{y_1}) \vec{v} = (\mu \Pi_3 + AD_{y_1}) \vec{v}'$.

Si $-\frac{1}{\eta_1^0} \mu(\eta_1^0)$ n'est pas une valeur propre de $A(y^0)$ on est dans les

hypothèses du théorème 2.2. et du corollaire 2.2.

Regardons maintenant le cas tangent. On part d'un système 3×3 du 2e ordre

$D_x^2 \vec{E} = r(x, y, D_y) \vec{E}$. Supposons que la condition au bord est du type

$D_x \vec{E}(0) = A \vec{E}(0)$ avec $A \in L^1(\partial M)$. Soit (y^0, η_1^0) un point strictement diffractif

pour $D_x^2 - r$ et γ la bicaractéristique nulle de $\xi^2 - r$ qui passe par

$(0, y^0, 0, \eta_1^0)$. La condition au bord vérifie Lopatinski Shapiro si A est

elliptique en (y^0, η_1^0) . On suppose donc que A est elliptique en (y^0, η_1^0) .

Dans ce cas on obtient un résultat plus précis en utilisant les Prop. 3.6 III

et 3.19 III. Supposons que l'on connaisse $WF_{pol} \vec{E}$ en un point de γ_- .

En remplaçant \vec{E} par $\vec{E}' = \vec{E} - K_+ \vec{E}(0)$ où K_+ est une paramétrix sortante

pour le problème de Dirichlet pour $D_x^2 - r$, on voit qu'il existe des

matrices $a_0 \in L^0(\partial M)$ et $a_1 \in L^{-1}(\partial M)$ telles que $(a_0 - N^+ a_1)(D_x \vec{E} - N^+ \vec{E})(0) \in C^\infty(\partial M)$.

On a $D_x \vec{E} = A \vec{E}$ donc $D_x \vec{E} - N^+ \vec{E} = (A - N^+)(A - N^-)^{-1}(D_x \vec{E} - N^- \vec{E})$. Donc on a :

$(a_0 - N^+ a_1)(A - N^+)(A - N^-)^{-1}(D_x \vec{E} - N^- \vec{E}) \in C^\infty(\partial M)$. $(A - N^-)^{-1}$ est dans $A_-^{-1,+}(\mathbb{R}^n)$.

Donc on peut écrire $(A - N^-)^{-1}$ sous la forme $\sum_{i=0}^{+\infty} b_i (N^-)^i$ avec $b_i \in L_{cl}^{-1-i}(\mathbb{R}^n)$.

Ceci permet en suivant la preuve de la Prop. 3.19 III d'obtenir une relation

de type $a \vec{E}|_S \in C^\infty(S)$. Mais on ne peut pas suivre le symbole principal de a .

On a $WF_{pol}_S(D_x \vec{E} - N^- \vec{E})(0)(y^0, \eta_1^0) = WF_{pol}_S(D_x \vec{E} - N^+ \vec{E})(0)$ donc la polarisation

de \vec{E} ne change pas par interaction au bord, quelle que soit la condition

au bord.

4.2. Problèmes de transmission entre deux milieux.

On se place en dimension d'espace égale à 3, on regarde la transmission

à travers $x = 0$. Dans $x > 0$ on est dans l'air on a : $D_x^2 \vec{E}_+ - r_+(x, y, D_y) \vec{E}_+ = 0$

Dans $x < 0$ on est dans un cristal isotrope on a : $D_x^2 \vec{E}_- - r_-(x, y, D_y) \vec{E}_- = 0$.

et on a $r_+ > r_-$ (la vitesse de la lumière est plus grande dans l'air).

On a les conditions aux limites
$$\begin{cases} \vec{E}_+(0) = \vec{E}_-(0) \\ D_x \vec{E}_+(0) = - D_x \vec{E}_-(0) \end{cases}$$

Regardons d'abord le cas transversal.

On se place en un point (y^0, η^0) tel que $r_+(0, y^0, \eta^0) > 0$ et $r_-(0, y^0, \eta^0) > 0$.

Sur chaque système on fait les transformations de 4.1 et on se ramène à :

$$(4.4) \quad D_x \begin{pmatrix} \vec{v}_+ \\ \vec{v}'_+ \end{pmatrix} = G_+ \begin{pmatrix} v_+ \\ v'_+ \end{pmatrix} \quad D_x \begin{pmatrix} \vec{v}_- \\ \vec{v}'_- \end{pmatrix} = G_- \begin{pmatrix} \vec{v}_- \\ \vec{v}'_- \end{pmatrix} \quad \text{avec}$$

$$G_{\pm} = \begin{bmatrix} \mu_{\pm} \Pi_3 & 0 \\ 0 & -\mu_{\pm} \Pi_3 \end{bmatrix} \mu_{\pm} = \sqrt{r_{\pm}}.$$

la condition au bord devient :

$$(4.5) \quad \begin{cases} v_+ + v'_+ = v_- + v'_- \\ \mu_+ (v_+ - v'_+) = -\mu_- (v_- - v'_-) \end{cases}$$

Au point (y^0, η^0) arrivent 4 bicaractéristiques transversales v_+, v'_+, v_-, v'_- .

Supposons que l'on connaisse WFpol \vec{E} le long de v_+ et v'_+ , c'est-à-dire WFpol $v_+(0)$ et WFpol $v'_+(0)$.

(4.5) se transforme en :

$$\begin{cases} v_- = av_+ + bv'_+ & \text{avec } a = \frac{1}{2} (1 - \mu_+ / \mu_-) \\ v'_- = bv_+ + av'_+ & b = \frac{1}{2} (1 + \mu_+ / \mu_-) \end{cases}$$

dans ce cas on ne peut donc pas appliquer le théorème 2.2.

Regardons maintenant le cas tangent.

On suppose donc que (y^0, η^0) est un point strictement diffractif pour $D_x^2 - r_-(x, y, D_y)$, donc que $r_-(0, y^0, \eta^0) = 0$. Pour \vec{E}_- on ne peut plus faire

la réduction vue plus haut. En faisant le changement d'inconnues (4.1)

sur \vec{E}_- on se ramène à (4.4) avec G_+ comme plus haut et G_- de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & \Lambda \Pi_3 \\ \Lambda^{-1} r_- \Pi_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{la condition au bord devient : } \begin{cases} v_+ + v'_+ = v_- \\ \mu_+ (v_+ - v'_+) = \Lambda v'_- \end{cases}$$

on a donc
$$\begin{cases} \Lambda v'_- - N^+ v_- = (\mu_+ - N^+) v_+ - (\mu_+ + N^+) v'_+ \\ \Lambda^{-1} r_- v_- - N^+ v'_+ = \Lambda^{-1} ((r_- - N^+ \mu_+) v_+ + (r_- + N^+ \mu_+) v'_+) \end{cases}$$

où N^+ sont les opérateurs de Neumann associés à $D_x^2 - r_-$. En remplaçant N^+ par des opérateurs dans $L_{a,0}^0(\partial M)$ on se ramène à :

$$\begin{pmatrix} \Lambda v'_- - N^+ v_- \\ \Lambda^{-1} r_- v_- - N^+ v'_+ \end{pmatrix} = \tilde{M}^+ \begin{pmatrix} v_+ \\ v'_+ \end{pmatrix} \text{ modulo } H^s(\partial M) \text{ si } \vec{E}_+(0), \vec{E}_-(0) \in H^{s'}(\partial M) \text{ pour } s' > s - 1/4 .$$

avec $\tilde{M}^+ \in L_{a,1-a}^1(\partial M)$. Sous une hypothèse de dimension constante analogue à celle des théorèmes 3.1 et 2.1 on peut montrer la réflexion de la polarisation et on vérifie que la polarisation de \vec{E}_- est la même le long de v_- et v'_+ .

4.3. Equations de la magnétohydrodynamique.

C'est un système d'équations hyperboliques non linéaires dont les inconnues sont \vec{u}, \vec{B}, ρ , vitesse du fluide, champ magnétique et densité du fluide.

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \partial_t \vec{B} - \operatorname{rot}(\vec{u} \times \vec{B}) = 0 \\ \rho \partial_t \vec{u} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \operatorname{grad} p - \mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B} = 0 \\ \partial_t \rho + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0 . \end{cases}$$

On suppose le fluide incompressible c'est-à-dire $\rho = \rho_0 = \text{cste}$.

Donc on a $\operatorname{div} \vec{u} = 0$. Le système linéarisé au voisinage de $\vec{u} = 0, \vec{B} = \vec{B}^0$

devient :

$$(4.6) \begin{cases} \partial_t \vec{B} - \operatorname{rot}(\vec{u} \times \vec{B}^0) = 0 \\ \rho_0 \partial_t \vec{u} - \mu^{-1} (\operatorname{rot} \vec{B}^0 \times \vec{B} + \operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B}^0) = 0 . \end{cases}$$

On se place sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y^3$. $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ est la variable duale de y .

. Commençons par étudier la polarisation à l'intérieur.

(4.6) se met sous la forme $D_t \begin{pmatrix} \vec{B} \\ \vec{u} \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} \vec{B} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = 0$

G a 3 valeurs propres doubles, $0, \alpha^{1/2}(\vec{B}^0 \cdot \eta), -\alpha^{1/2}(\vec{B}^0 \cdot \eta)$ où $\alpha = \frac{1}{\mu \rho_0}$

. associées chacune à des espaces propres de dimension 2, si $\vec{B}^0 \cdot \eta \neq 0$

Plaçons nous dans une base de \mathbb{R}^3 où $\frac{\vec{\eta}}{|\vec{\eta}|} = \vec{e}_3$, par exemple

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{|\vec{\eta}|} (\eta_2, -\eta_1, 0), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{|\vec{\eta}|} (\eta_1, \eta_2, -\frac{\eta_2^2 + \eta_1^2}{\eta_3}), \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{|\vec{\eta}|} (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

$0, \alpha^{1/2}(\vec{B}^0 \cdot \vec{\eta}), -\alpha^{1/2}(\vec{B}^0 \cdot \vec{\eta})$ sont associés respectivement aux vecteurs propres $(0, \vec{B}^0), (\vec{e}_3, 0)$; $(\alpha^{1/2} \vec{B}^0 \times \vec{e}_3, -\alpha \vec{e}_1), (\alpha^{1/2} \vec{B}^0 \times \vec{e}_1, -\alpha \vec{e}_2)$; $(\alpha^{1/2} \vec{B}^0 \times \vec{e}_3, \alpha \vec{e}_1), (\alpha^{1/2} \vec{B}^0 \times \vec{e}_1, \alpha \vec{e}_2)$. Supposons d'abord que $\vec{B}^0 \cdot \vec{e}_3 \neq 0$.

Les bicaractéristiques de τ sont associées à un déplacement d'ensemble du fluide. Le long d'une bicaractéristique de τ les résultats de [1] et le lemme 1.1. IV montrent que \vec{u} et \vec{B} sont microlocalement C^∞ . En effet on a $\text{div } \vec{u} = 0, \text{div } \vec{B} = 0$ (4.7) donc $\text{WFpol } \vec{u}$ et $\text{WFpol } \vec{B}$ sont orthogonaux à \vec{e}_3 et $\text{WFpol}(\vec{B}, \vec{u})$ est inclus dans $\text{vect}\{(0, \vec{B}^0), (\vec{e}_3, 0)\}$. donc on a $\text{WFpol } \vec{u} = \text{WFpol } \vec{B} = 0$.

Les bicaractéristiques de $\tau \pm \alpha^{1/2}(\vec{B}^0 \cdot \vec{\eta})$ sont associées à des ondes appelées ondes d'Alfvén. Le long d'une bicaractéristique de $\tau + \alpha^{1/2}(\vec{B}^0 \cdot \vec{\eta})$ on a : $\text{WFpol}(\vec{B}, \vec{u}) \subseteq \text{vect}\{(\alpha^{1/2} \vec{B}^0 \times \vec{e}_3, -\alpha \vec{e}_1), (\alpha^{1/2} \vec{B}^0 \times \vec{e}_1, -\alpha \vec{e}_2)\}$. Donc $\text{WFpol}(\vec{B}, \vec{u})$ est de dimension 1 à cause de (4.7). On a le même résultat le long d'une bicaractéristique de $\tau - \alpha^{1/2}(\vec{B}^0 \cdot \vec{\eta})$.

. Regardons maintenant le cas où $\vec{B}^0 \cdot \vec{e}_3 = 0$. Ce mode de propagation est appelé propagation perpendiculaire. Dans ce cas G a : une valeur propre quadruple, 0 associée aux vecteurs propres $(\vec{B}^0 \times \vec{e}_3, \vec{e}_1), (\vec{B}^0 \times \vec{e}_3, \vec{e}_2), (\vec{e}_3, \vec{e}_1), (\vec{e}_3, \vec{e}_2)$, deux valeurs propres simples $\pm \alpha^{1/2} |\vec{B}^0|$ associées aux vecteurs propres $(-\vec{B}^0, \alpha^{1/2} |\vec{B}^0| \vec{e}_3)$ et $(+\vec{B}^0, \alpha^{1/2} |\vec{B}^0| \vec{e}_3)$.

. Le long d'une bicaractéristique pour τ on obtient que $\text{WFpol}(\vec{B}, \vec{u})$ est de dimension 3.

. Le long d'une bicaractéristique pour $\tau \pm \alpha^{1/2} |\vec{B}^0|$ on obtient que \vec{u} et \vec{B} sont C^∞ .

. Enfin si $\frac{\partial \vec{B}^0}{\partial t} = 0$ $\vec{B}^0 \cdot \vec{e}_3$ est constant le long d'une bicaractéristique donc on reste dans l'un ou l'autre cas. Dans tous les cas on a propagation

de $\text{WFpol}(\vec{B}, \vec{u})$ le long des orbites hamiltoniennes de (4.6).

Regardons maintenant la réflexion sur un obstacle.

Supposons qu'on regarde la réflexion sur la surface $y_1 = 0$ et que $\vec{B}^0 = (b^0, 0, 0)$.

en utilisant que $\text{div } \vec{u} = \text{div } \vec{B} = 0$ on obtient à partir de (4.6) le système suivant : $D_{y_1} \begin{pmatrix} \vec{B} \\ \vec{u} \end{pmatrix} = H(D_t, D_{y_2}, D_{y_3}) \begin{pmatrix} \vec{B} \\ \vec{u} \end{pmatrix}$ (4.7) où le symbole principal de H est :

$$h = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\tau}{b^0} & & & & & \\ & \mathbb{I}_3 & & & & \\ & & & & & 0 \\ \hline 0 & -\eta_2 & -\eta_3 & & & \\ \eta_2 & 0 & 0 & \rho_0 \mu \frac{\tau}{b^0} & & \\ \eta_3 & 0 & 0 & & & \mathbb{I}_3 \end{array} \right] \quad h \text{ a deux valeurs propres triples } \tau/b^0 \text{ et } \rho_0 \mu \frac{\tau}{b^0} \text{ et est diagonalisable.}$$

Le système (4.7) est donc de type principal réel.

Prenons les conditions aux limites naturelles sur $y_1 = 0$: $u_1 = 0$, $b_1 = 0$,

$\partial_{y_3} b_1 - \partial_{y_1} b_3 = 0$, $\partial_{y_1} b_2 - \partial_{y_2} b_1 = 0$. En utilisant (4.7) on obtient la condition au bord suivante : (4.8) $\beta \begin{pmatrix} \vec{B}(0) \\ \vec{u}(0) \end{pmatrix} = 0$ où le symbole principal de β

$$\text{est : } \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & 0 & \\ \hline & 0 & & \\ & & 1 & \tau \\ & & \Lambda & \tau \\ & & & \Lambda \end{array} \right] \quad \text{où } \Lambda = (1 + \tau^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)^{1/2}$$

En supposant pour simplifier que $\begin{pmatrix} \vec{B} \\ \vec{u} \end{pmatrix}(0) \in H^{s-1}(y_1=0)$ on voit facilement que dans ce cas on n'a pas réflexion de $\text{WFpol}_s \begin{pmatrix} \vec{B} \\ \vec{u} \end{pmatrix}$, mais que la condition au bord se propage à l'intérieur.

En effet notons \vec{e} et \vec{f} les projections de $\begin{pmatrix} \vec{B} \\ \vec{u} \end{pmatrix}$ sur les espaces propres de h associés à τ/b^0 et $\rho_0 \mu \tau/b^0$.

Alors (4.8) entraîne que $\vec{f}(0) \in H^s(y_1=0)$ et que $e_1(0) \in H^s(y_1=0)$

microlocalement en un point $(t^0, y_2^0, y_3^0, \tau^0, \eta_2^0, \eta_3^0)$ avec $\tau^0 \neq 0$.

D'après la Prop.2.1. III ces conditions se propagent à l'intérieur le long des orbites hamiltoniennes de $D_{y_1} - H$.

4.4. Réfraction entre deux milieux

On regarde la réfraction entre un milieu anisotrope et un milieu isotrope, par exemple entre un cristal et l'air.

On se place dans \mathbb{R}^3 et on regarde la réfraction à travers ($x=0$). Dans $x > 0$ on est dans le cristal que l'on suppose pour simplifier monoaxial .

Le champ électrique \vec{E}_+ vérifie le système :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_+}{\partial t^2} = (-\sigma^{-1} \text{rot rot } \sigma^{-1} + \sigma \text{ grad div } \sigma) \vec{E}_+ \quad (4.9)$$

où $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ avec $\sigma > 1$. On note (y_1, y_2) les autres variables d'espace.

Le symbole principal de ce système est $-\tau^2 \Pi_3 + A$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \sigma^2 \xi^2 & (\sigma-1/\sigma) \xi \eta_1 & (\sigma-1/\sigma) \xi \eta_2 \\ (\sigma-1/\sigma) \xi \eta_1 & \xi^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 & 0 \\ (\sigma-1/\sigma) \xi \eta_2 & 0 & \xi^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 \end{bmatrix}$$

les 3 valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = \sigma^2 \xi^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2$, $\lambda_2 = \xi^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2$, $\lambda_3 = \xi^2 + \frac{1}{\sigma^2} (\eta_1^2 + \eta_2^2)$ associées aux vecteurs propres :

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} \sigma \xi \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \frac{1}{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \frac{1}{\Lambda^2} \begin{pmatrix} \eta_1^2 + \eta_2^2 \\ -\sigma \xi \eta_1 \\ -\sigma \xi \eta_2 \end{pmatrix}$$

où $\Lambda^2 = \xi^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2$.

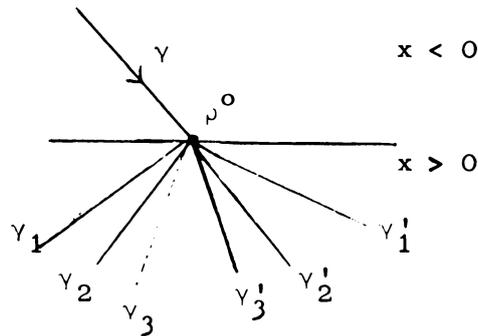
Dans $x < 0$ on a simplement l'équation des ondes classiques avec une

vitesse c plus grande que 1. $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_-}{\partial t^2} - \Delta \vec{E}_- = 0$ (4.10).

Les conditions aux limites peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{E}_+ = \vec{E}_- & \text{sur } x = 0 . \\ D_{x^+} \vec{E}_+ = D_{x^-} \vec{E}_- \end{cases}$$

Enfin dans $x > 0$ on a de plus $\text{div } \sigma \vec{E}_+ = 0$ et dans $x < 0$ $\text{div } \vec{E}_- = 0$.
 On se place en un point $\rho^0 = (y_1^0, y_2^0, t^0, \eta_1^0, \eta_2^0, \tau^0)$ de $\{x=0\}$ et on suppose
 qu'il y a un rayon γ qui arrive en ρ^0 de la région $x < 0$ donc dans
 la région $x > 0$ on a 6 rayons qui partent de ρ^0 $\gamma_i, \gamma_i', 1 \leq i \leq 3$
 associés à λ_i . On suppose qu'aucun rayon n'est tangent au bord et que
 $(\eta_1^0, \eta_2^0) \neq (0,0)$, c'est-à-dire qu'on ne regarde pas la réfraction conique.

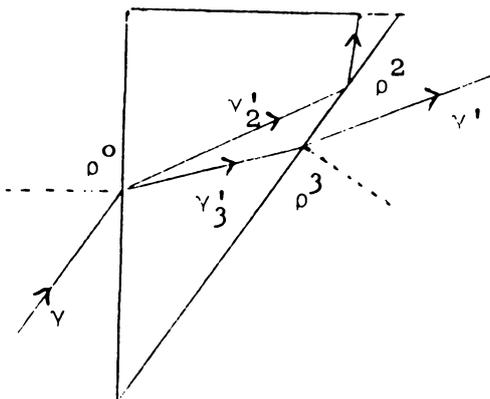


Il est clair que le long de γ_i et γ_i' $\text{WFpol } \vec{E}_+$ est colinéaire à \vec{a}_i d'après
 le lemme 1.1. D'autre part $\text{div } \sigma \vec{E}_+ = 0$ dans $x_1 > 0$ donc en tout point
 $(x_1, y_1, y_2, t, \xi, \eta_1, \eta_2, \tau) = \rho$ $\text{WFpol } \vec{E}_+(\rho) \subset \{w \mid \sigma_1 w_1 + \eta_1 w_2 + \eta_2 w_3 = 0\}$.

Ceci montre que le long de γ_1 et γ_1' \vec{E}_+ est microlocalement C^∞ .

On suppose que la lumière le long de γ n'est pas polarisée c'est à
 dire que sur γ $\text{WFpol } \vec{E}_-$ est de dimension 2. Le long de $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_2', \gamma_3'$ $\text{WFpol } \vec{E}_+$
 est de dimension 1, c'est à dire que la lumière est polarisée.

On peut ainsi expliquer comment on produit de la lumière polarisée par
 passage à travers un cristal biréfringent.



En effet en choisissant correctement les angles du prisme on peut faire en sorte qu'on ait réflexion totale en ρ^2 tandis qu'en ρ^3 on a $WF_{pol} \vec{E}_+$ qui est de dimension 1 le long de v'_3 et de dimension 0 le long des autres rayons.

En réduisant le problème à un problème du 1er ordre en ρ^3 et en appliquant le théorème 2.1 on voit que le long de v' $WF_{pol} \vec{E}_-$ est de dimension 1, c'est à dire que la lumière est polarisée. # .



Références :

- [1] N. Dencker : On the propagation of polarization sets for systems of real principal type. Journal of Functional Analysis n°3 (1982) p. 351-373.
- [2] R.B. Melrose : Transformation of boundary problems. Acta mathematica 147 (1981) p.149-235.
- [3] R.B. Melrose : Differential boundary values problems of principal type Seminar on singularities of solutions of linear equations Princeton University Press (1978).
- [4] K.G. Andersson-R.B. Melrose : The propagation of singularities along gliding rays. Inventiones math.41 (1977) p.197-232.
- [5] L. Hörmander : Spectral analysis of singularities. Seminar on singularities of solutions...
- [6] R.B. Melrose : Transformations methods of boundary values problems. dans singularities of boundary values problems édité par H.G. Garnir.
- [7] R.B. Melrose-J. Sjöstrand : Singularities of boundary values problems I C.P.A.M. (1978).
- [8] M. Farris : Egorov's theorem on a manifold with diffractive boundary. Communications in p.d.e. n°6 (1981) p.651-687.
- [9] L. Hörmander : Chapitre XXIV du livre à paraître.
- [10] M. Williams : Wave fronts sets of extensions of solutions to diffractive boundary values problems. Communications in p.d.e. n°8 p.875-928 (1983).
- [11] R.B. Melrose : Airy operators Comm. in p.d.e. n°3 p.76 (1978).
- [12] R.B. Melrose-M.E. Taylor : near peak scattering for a convex obstacle à paraître.

- [13] V.I. Arnold : On matrices depending on parameters. Russians Math. Surveys. (1971).

- [14] M.E. Taylor : Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations. C.P.A.M. n°28 p.457-478. (1975).

- [15] E.L. Ince : Ordinary differential equations. Dover Publications.1956.

- [16] M.E. Taylor : Pseudodifferential operators. Princeton University Press1981.

- [17] J. Chazarain-A. Piriou : Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires. Gauthier-Villars 1981.

DEUXIEME PARTIE

L'article constituant cette 2nde partie est paru dans COMM. in P.D.E. 10(12), 1347-1382 (1985).

PROPAGATION DE LA POLARISATION POUR DES PROBLEMES
AUX LIMITES CONVEXES POUR LES BICARACTERISTIQUES.

C. Gerard
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex - France.

" U.A. du C.N.R.S. 169 "

On étudie la propagation de la polarisation des solutions de problèmes aux limites dans le cas où il y a des rayons glissants. On montre qu'au-dessus de ces rayons la polarisation se propage le long de courbes appelées orbites hamiltoniennes frontalière. La torsion de la polarisation le long de ces courbes fait intervenir la condition aux limites.

On étudie aussi l'interaction entre rayons transverses et rayons glissants, dans le cas d'un système formé de plusieurs blocs couplés par la condition aux limites.

*
* *

§.0. INTRODUCTION.

Le but de cet article est d'étudier la polarisation des solutions de problèmes aux limites dans le cas où il y a des rayons glissants. Un exemple de ces problèmes est donné par les équations de Maxwell à l'intérieur d'un ouvert strictement convexe. La propagation des singularités C^∞ pour des problèmes analogues dans le cas scalaire a été étudiée par plusieurs auteurs ([2], [5]) et on observe la propagation de singularités dans le bord de l'ouvert le long de courbes appelées rayons glissants qui sont des limites de bicaractéristiques réfléchies.

On s'intéresse ici à la propagation de la polarisation des solutions de systèmes le long des rayons glissants et à l'interaction entre rayons transverses au bord et rayons glissants.

On introduit d'abord une classe de systèmes du 1er ordre pour lesquels on va étudier la propagation de la polarisation. Dans le §.2, on étudie la propagation de la polarisation le long des rayons transverses à l'aide des arguments de [1]. Dans les §.3, 4 et 5 on étudie la propagation le long des rayons glissants en réduisant le système à une équation scalaire du second ordre et en adaptant les méthodes de [2] au front d'onde polarisé. Enfin, dans le §.6, on étudie l'interaction de la polarisation entre rayons glissants et transverses.

Rappelons d'abord la définition de la polarisation (WF pol u) d'une distribution vectorielle introduite dans [1].

Définition 0.1 : Soit X une variété C^∞ et soit $u \in (D'(X))^m$. On définit WF pol u par $WF pol u = \bigcap_{a \in C^\infty(X)} N_a$ où $N_a = \{(x, \xi, w) \in T^*(X) \times \mathbb{C}^m \mid w \in \text{Ker } a(x, \xi)\}$ et a désigne un $1 \times m$ système d'opérateurs dans $L^0(X)$ de symbole principal $a(x, \xi)$.

WF pol u indique dans quelles directions de \mathbb{C}^m u est microlocalement C^∞ . On notera WF pol u (x, ξ) la fibre de WF pol u au-dessus de (x, ξ) . WF pol u se projette sur WF u :

Proposition 0.1 ([1]) : $(x, \xi) \notin WF u \iff WF pol u(x, \xi) = \{0\}$.

Dans [1], N. Dencker étudie la propagation de WF pol u pour u solution de $Pu \in C^\infty(X)$ où P est un système de type principal réel (voir [1]) et montre que WF pol u se propage le long de courbes dans $T^*(X) \times \mathbb{C}^m$, appelées orbites hamiltoniennes, et tracées au-dessus des bicaractéristiques de P.

On va montrer ici que dans le cas de problèmes aux limites avec des rayons glissants, la polarisation de la trace de u sur le bord se propage au-dessus de ces rayons le long d'orbites hamiltoniennes frontière. La torsion de la polarisation le long de ces courbes fait intervenir à la fois la condition aux limites et le symbole sous principal de P.

§.1. NOTATIONS.

Soit M une variété à bord C^∞ de bord ∂M . Notre étude sera locale au voisinage d'un point du bord, donc on supposera qu'on a des coordonnées (x, y) sur M et que $M = \overline{\mathbb{R}}_x^+ \times \mathbb{R}_y^n$ avec $y = (y_1, \dots, y_n)$. On note (ξ, η) les coordonnées duales.

On note $L^p(\partial M)$ l'espace des opérateurs pseudodifférentiels classiques d'ordre p sur ∂M , $L^{p'}(M)$ l'espace $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_x^+, L^p(\partial M))$ et $L_b^p(M)$ l'espace des opérateurs introduits dans [6]. On note \tilde{T}^*M le fibré cotangent compressé introduit dans [6].

On notera $S^p(\partial M)$, $S^{p'}(M)$, $S_b^p(M)$ les classes de symboles associées à ces opérateurs.

On note $D'(M)$ l'espace des distributions prolongeables et $\mathcal{H}^s(M)$ l'espace défini par : $u \in \mathcal{H}^s(M) \iff D_x^j u \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_x^+, H^{s-j}(\mathbb{R}_y^n))$, $\forall j \in \mathbb{N}$. En un point $(x, y, \xi, \eta) \in T^*(M)$ avec $x > 0$, on définit $WF \text{ pol}_s u(x, y, \xi, \eta)$ pour u solution de : (P) $D_x u - G(x, y, D_y)u \in C^\infty(M)$ avec $G \in L^{1'}(M)$ comme dans la Déf. 0.1, en remplaçant X par M et $a u \in C^\infty(X)$ par $a u \in \mathcal{H}^s(M)$.

La notion d'appartenance microlocale à $\mathcal{H}^s(M)$ ne pose pas de problème à cause de (P) (voir lemme 5.2 de [3]).

En un point $(y, \eta) \in T^*(\partial M)$ on définit $WF \text{ pol}_s v(y, \eta)$ pour $v \in (D'(\partial M))^m$ comme dans la Déf. 0.1 en remplaçant X par ∂M et $a v \in C^\infty(X)$ par $a v \in H^s(\partial M)$ où $H^s(\partial M)$ désigne l'espace de Sobolev classique.

Donnons enfin la définition des rayons glissants associés à un opérateur scalaire de 2ème ordre ([2]).

Soit $q_2(x, y, \xi, \eta) = (\xi - \lambda(x, y, \eta))^2 - \mu(x, y, \eta)$ avec λ et μ homogènes en η de degré 1 et 2 respectivement. Soit $(y^0, \eta^0) \in T^*(\partial M)$ tel que $\mu(0, y^0, \eta^0) = 0$. On appelle rayon glissant de q_2 passant par (y^0, η^0) la courbe intégrale de H_{r_0} passant par (y^0, η^0) où $r_0 = \mu(0, y^0, \eta^0)$. On notera \mathcal{G} l'hypersurface glancing donnée par $r_0(y, \eta) = 0$.

On introduit maintenant la classe de problèmes aux limites pour lesquels on va étudier la propagation du front d'onde polarisé.

On considère des problèmes aux limites de type suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} D_x u = G(x, y, D_y) u & \text{sur } M = \overline{\mathbb{R}}_x^+ \times \mathbb{R}_y^n, \\ \beta(y, D_y) u(0) = 0, \end{cases}$$

avec les hypothèses suivantes : (JG)

1) G est un $m \times m$ système dans $L^{1'}(M)$ de symbole principal $g_1(x, y, \eta)$.

$$2) \quad \det(\xi 1_m - g_1) = \prod_{\nu=1}^j (\xi - \mu_\nu(x, y, \eta))^{\alpha_\nu} ((\xi - \lambda)^2 - \mu)^{\alpha_{j+1}},$$

avec μ_ν, λ, μ réels, $\mu_\nu, \lambda \in S^{1'}(M)$, $\mu \in S^{2'}(M)$, $\mu_\nu \neq \mu_{\nu'}$ pour $\nu \neq \nu'$. $\mu_\nu \neq \lambda$ pour $1 \leq \nu \leq j$.

3) $\xi 1_m - g_1$ est de type principal réel, i.e. il existe h_1 , $m \times m$ matrice dans $S^{1'}(M)$ telle que

$$(\xi 1_m - h_1) (\xi 1_m - g_1) = \prod_{\nu=1}^j (\xi - \mu_\nu) ((\xi - \lambda)^2 - \mu) 1_m.$$

4) $\beta \in L^0(\partial M)$ est une $p \times m$ matrice.

On se place au voisinage d'un point $(y^0, \eta^0) \in T^*(\partial M)$ tel que $\mu(0, y^0, \eta^0) = 0$, $\{\xi - \lambda, \mu\}(0, y^0, \eta^0) < 0$, c'est-à-dire que (y^0, η^0) est un point strictement glissant pour $(\xi - \lambda)^2 - \mu$ (voir [2]).

Examinons maintenant quelques conséquences des hypothèses (H). On peut obtenir des renseignements sur les espaces propres de g_1 .

L'hypothèse 2) entraîne la proposition suivante :

Proposition 1.1 : Il existe une $m \times m$ matrice $S(x, y, \eta)$ dans $S^{0'}(M)$, homogène de degré 0 en η , définie au voisinage de $(0, y^0, \eta^0)$, telle que S est elliptique et :

$$(1.1) \quad S^{-1} g_1 S = \tilde{g}_1 \quad \text{avec} \quad \tilde{g}_1 = \begin{bmatrix} M_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & M_j & \\ 0 & & & M_{j+1} \end{bmatrix}$$

et : - pour $1 \leq \nu \leq j$, M_ν est une $\alpha_\nu \times \alpha_\nu$ matrice qui a μ_ν comme unique valeur propre ;

- pour $\nu = j+1$, M_ν est une $2\alpha_\nu \times 2\alpha_\nu$ matrice qui a $\lambda \pm \sqrt{\mu}$ comme valeurs propres.

Démonstration : Cette proposition est classique et découle facilement de l'hypothèse 2). Il est clair que $\xi 1_m - \tilde{g}_1$ est encore de type principal réel. En écrivant la décomposition en blocs de la matrice $\xi 1_m - \tilde{g}_1$ et en utilisant que $\xi 1_m - \tilde{g}_1$ est aussi de type principal réel, on voit que pour $1 \leq v \leq j$ il existe $\tilde{p}_v(\xi)$ $\alpha_v \times \alpha_v$ matrice polynomiale en ξ telle que $\tilde{p}_v(\xi)(\xi 1_{\alpha_v} - M_v) = (\xi - \mu_v) q_v(\xi) 1_{\alpha_v}$. Or $q_v(M_v)$ est inversible car q_v ne contient pas la racine μ_v . Donc $M_v = \mu_v 1_{\alpha_v}$.

Donc l'hypothèse 3) entraîne que les blocs de g_1 associés aux valeurs propres simples sont diagonalisables. (1.2). De même, il existe $\tilde{p}_{j+1}(\xi)$ $2\alpha_{j+1} \times 2\alpha_{j+1}$ matrice polynomiale en ξ , telle que $\tilde{p}_{j+1}(\xi)(\xi 1_{2\alpha_{j+1}} - M_{j+1}) = ((\xi - \lambda)^2 - \mu) q_{j+1}(\xi) 1_{2\alpha_{j+1}}$. Comme $q_{j+1}(\lambda \pm \sqrt{\mu})$ n'est pas nul, on a $(M_{j+1} - \lambda 1_{2\alpha_{j+1}})^2 - \mu 1_{2\alpha_{j+1}} = 0$ (1.3).

On a alors le lemme suivant :

Lemme 1.1 : Soit $M(x, y, \eta)$ une $2m \times 2m$ matrice dans $S^{1'}(M)$ telle que :

$$\det(\xi 1_{2m} - M) = ((\xi - \lambda)^2 - \mu)^m \quad \text{et que} \quad (M - \lambda 1_{2m})^2 - \mu 1_{2m} = 0$$

au voisinage de $(0, y^0, \eta^0)$. Alors il existe $S(x, y, \eta)$ $2m \times 2m$ matrice dans $S^{0'}(M)$, définie dans un voisinage de $(0, y^0, \eta^0)$ telle que :

- S est elliptique ;

$$(1.4) - S^{-1}MS = \tilde{M} \quad \text{avec} \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} N & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & N \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{bmatrix} \lambda & |\eta| \\ \frac{\mu}{|\eta|} & \lambda \end{bmatrix}.$$

Démonstration : En remplaçant M par $M - \lambda 1_{2m}$ il suffit de démontrer le lemme pour $\lambda = 0$. En divisant M par $|\eta|$ on peut se ramener au cas où M et μ sont homogènes de degré 0. Le lemme est vrai au point (y^0, η^0) en utilisant la forme de Jordan de $M(0, y^0, \eta^0)$. Soit $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ une base dans laquelle $M(0, y^0, \eta^0)$ est de la forme (1.4). Alors la base $(e_1, \dots, e_n, M(e_1, \dots, e_n))$ est une base dans laquelle $M(0, y, \eta)$ est de la forme (1.4). ■

Le fait que la partie principale de G se sépare en blocs suivant les différentes valeurs propres entraîne qu'on peut découpler G en blocs modulo $S^{-\infty}$ d'après un résultat de [4]. Soit $u \in (D'(M))^m$ une solution de (P) et soit $S(x, y, D_y) \in L^{0'}(M)$ définie par (1.1). Soit $\tilde{u} = Su$. Alors \tilde{u} est solution de :

$$\begin{cases} D_x \tilde{u} - \tilde{G} \tilde{u} \in C^\infty(M) \\ \beta S^{-1}(0, y, D_y) \tilde{u} \in C^\infty(\partial M) \end{cases}$$

avec $\tilde{G} = SGS^{-1} + D_x SS^{-1}$ si $S^{-1}(x, y, D_y)$ est une famille d'inverses de $S(x, y, D_y)$. Le symbole principal de \tilde{G} , \tilde{g}_1 est de la forme indiquée dans (1.1). On utilise maintenant un résultat de [4].

Proposition 1.2 : Il existe une $m \times m$ matrice $K(x, y, D_y) \in L^{0'}(M)$ de symbole principal 1_m telle que si $v = K\tilde{u}$, v est so-

pose donc que $G(x, y, \eta) = \mu(x, y, \eta) 1_m + \sum_{j=0}^{\infty} G_j(x, y, \eta)$ avec $\mu(x, y, \eta)$ réel et homogène de degré 1 en η et G_j homogène de degré $-j$ en η .

Soit $(y^0, \eta^0) \in T^*(\partial M) \setminus 0$ et γ la bicaractéristique nulle de $\xi - \mu(x, y, \eta)$ qui part de $\rho_0 = (0, y^0, \mu(0, y^0, \eta^0), \eta^0)$. On notera $(x, y(x), \xi(x), \eta(x))$ les points de γ pour x assez petit.

On a la proposition suivante :

Proposition 2.1. : *Sous les hypothèses précédentes, soit $u \in (D'(M))^m$ solution de :*

$$\begin{cases} Pu \in C^\infty(M) \\ u|_{x=0} = v \text{ avec } v \in D'(\partial M) \end{cases}$$

alors au dessus de γ , pour x assez petit, $WF \text{ pol } u$ (resp. $WF \text{ pol}_s u$) est égal à l'union des orbites hamiltoniennes de P qui partent de (ρ_0, w_0) avec $w_0 \in WF \text{ pol } v(y^0, \eta^0)$ (resp. $WF \text{ pol}_s v(y^0, \eta^0)$).

On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.1. : *Il existe E $m \times m$ système dans $L^0(M)$ tel que :*

- 1) E est elliptique sur γ
- 2) $PE \equiv E(D_x - \mu(x, y, D_y)$ modulo $L^{-\infty}(M)$.

Démonstration : On cherche E sous forme de série asymptotique $E = E_0 + E_{-1} + \dots + E_{-j} + \dots$ avec E_{-j} homogène de degré $-j$ en η .

Pour cela il faut résoudre les équations de transport

$$(2.1) \quad H_{\xi-\mu} E_0 + i G_0 E_0 = 0$$

$$(2.2) \quad H_{\xi-\mu} E_{-j} + i G_0 E_{-j} = R_{-j} .$$

On peut trouver E_0 inversible et indépendant de ξ solution de (2.1) et par récurrence on montre facilement que si E_{-k} est indépendant de ξ pour $k \leq j-1$, R_{-j} l'est aussi.

On peut donc résoudre (2.2) avec E_{-j} indépendant de ξ .

On peut maintenant démontrer la proposition.

Démonstration de la Proposition 2.1 : Soit $u \in (D'(M))^m$ solution de $Pu \in C^\infty(M)$. Soit $E \in L^{0'}(M)$ obtenu par le lemme 2.1. On a : $(D_x - \mu(x,y, D_y))E^{-1}u \in C^\infty(M)$ où E^{-1} est une paramétrix de E . Pour démontrer la proposition 2.1, il suffit de montrer que $\text{WF pol } E^{-1}u$ (resp. $\text{WF pol}_S E^{-1}u$) est égal à $\text{WF pol } E^{-1}v(0)$ (resp. $\text{WF pol}_S E^{-1}v(0)$). En effet, l'équation des orbites hamiltoniennes de P est : $H_{\xi-\mu} w + i p_0^S w = 0$ et $p_0^S = G_0$. D'après (2.1) E_0 vérifie $H_{\xi-\mu} E_0 + i G_0 E_0 = 0$.

Soit $\rho_1 \in Y$ et $w_1 \in \text{WF pol } u(\rho_1)$. (Le raisonnement est le même pour $\text{WF pol}_S u$).

Soit $(\rho, w(\rho))$ l'orbite hamiltonienne de P qui part de (ρ_1, w_1) . Supposons donc que $\text{WF pol } E^{-1}u$ est égal à $\text{WF pol } E^{-1}v(0)$:

$$H_{\xi-\mu}(E_0^{-1}(\rho) w(\rho)) = (H_{\xi-\mu} E_0^{-1}(\rho)) w(\rho) + E_0^{-1}(\rho) H_{\xi-\mu} w(\rho) = \\ E_0^{-1} i G_0 w(\rho) - E_0^{-1} i G_0 w(\rho) = 0.$$

Donc $E_0^{-1}(\rho_0) w(\rho_0) = E_0^{-1}(\rho_1) w(\rho_1)$. D'après (2.3) comme

$$E_0^{-1}(\rho_1) w(\rho_1) \in \text{WF pol } E^{-1} u(\rho_1)$$

on a :

$$E_0^{-1}(\rho_0) w(\rho_0) \in \text{WF pol } E^{-1} v(o)(y^0, \eta^0).$$

Donc $w(\rho_0) \in \text{WF pol } v(y^0, \eta^0)$ et la Prop. 2.1 est démontrée.

Il suffit donc de démontrer (2.3).

On suppose donc que u est solution de $D_x u - \mu(x, y, D_y) u \in C^\infty(M)$. Remarquons tout d'abord qu'au dessus de $\rho \in Y \cap \{x > 0\}$ on peut définir $\text{WF pol } u(\rho)$ (resp. $\text{WF pol}_S u(\rho)$) uniquement à l'aide d'opérateurs dans $L^{0'}(M)$ sans agrandir $\text{WF pol } u(\rho)$. En effet par une application facile du théorème de préparation de Malgrange on vérifie aisément que : $\forall A \in L^0(M)$, $\exists \tilde{A} \in L^{0'}(M)$ tel que $Au = \tilde{A}u$ modulo $C^\infty(M)$ et $\sigma_0(A) = \sigma_0(\tilde{A})$ en ρ . (Voir l'annexe de [4]).

On peut donc se restreindre aux opérateurs de $L^{0'}(M)$. Soit $\rho_1 \in Y$ et $w_1 \notin \text{WF pol}_S u(\rho_1)$. Il existe donc $A \in L^{0'}(M)$ tel que $Au \in \mathcal{H}^S(M)$ et $\langle \sigma_0(A)(\rho_1), w_1 \rangle \neq 0$. Notons $\rho_1 = (x_1, y_1, \xi_1, \eta_1)$. En prenant la trace sur $x = x(\rho_1)$, il existe $B \in L^0(\mathbb{R}_y^n)$ tel que $Bu(x(\rho_1)) \in H^S(\mathbb{R}_y^n)$ et $\langle \sigma_0(B)(y_1, \eta_1), w_1 \rangle \neq 0$.

En suivant la preuve du lemme 2.1 on construit $\tilde{B} \in L^{0'}(M)$ tel que $\tilde{B}|_{x=x_1} = B$ et $(D_x - \mu(x, y, D_y)) \tilde{B} = \tilde{B} (D_x - \mu(x, y, D_y))$.

Alors $\tilde{B}u$ vérifie
$$\begin{cases} (D_x - \mu(x, y, D_y)) \tilde{B}u \in C^\infty(M) \\ \tilde{B}u|_{x=x_1} \in H^s(\mathbb{R}_y^n) . \end{cases}$$

D'après les résultats classiques sur les problèmes hyperboliques on a :

$$\tilde{B}u|_{x=0} \in H^s(\mathbb{R}_y^n), \text{ et } \sigma_0(\tilde{B})(\rho_0) = \sigma_0(A)(\rho_1) .$$

Donc $w_1 \notin \text{WF pol}_s v(o)(y^0, \eta^0)$. Pour démontrer la proposition dans l'autre sens on raisonne de la même façon en remplaçant ρ_1 par ρ_0 et en utilisant que $\tilde{B}u \in C^0(\bar{R}_x^+, H^s(\mathbb{R}_y^n))$.

On démontre de même la Prop. 2.1 pour $\text{WF pol } u$. ■

§.3. PROPAGATION DU FRONT D'ONDE POLARISE LE LONG DES RAYONS GLISSANTS.

On considère maintenant le cas où P est le bloc de la Prop. 1.2 associé à un rayon glissant. $u \in (D'(M))^{2m}$ est donc solution de :

$$(3.1) \quad \begin{cases} D_x - Gu \in C^\infty(M) \\ \beta u(o) \in C^\infty(\partial M) \end{cases}$$

où G est un $2m \times 2m$ système dans $L^{1'}(M)$ de symbole principal :

$$(3.2) \quad g_1 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\eta_n 1_m \\ \hline \frac{\mu}{\eta_n} 1_m & 0 \end{array} \right] + \lambda 1_{2m} .$$

On fait de plus l'hypothèse suivante (\mathcal{L}) :

β est un $m \times 2m$ système qui vérifie la condition de Lopatinski-Shapiro, c'est-à-dire que la restriction de $\sigma_0(\beta)$ à $\mathbb{C}^m \times \{0\}$ est elliptique.

Si A est une $2m \times 2m$ matrice, on note $(A)_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq 2$ les blocs de A associés à la décomposition (3.2). On note ρ_0 le point $(0, y^0, 0, \eta^0)$. On notera $G = G_1 + G_0$ avec $G_1 = g_1(x, y, D_y)$. Par conjugaison par des opérateurs intégraux de Fourier en y dépendant de façon C^∞ de x , on peut se ramener au cas où $\lambda \equiv 0$. (Voir [8]).

On commence par simplifier autant que possible le symbole de G .

Proposition 3.1 : Il existe une $2m \times 2m$ matrice K dans $L^{-1}(M)$ telle que $\tilde{u} = (1 + K)u$ est solution de $D_x \tilde{u} - \tilde{G} \tilde{u} \in C^\infty(M)$ avec \tilde{G} de symbole principal g_1 et l'équation suivante est vérifiée :

$$(3.3) \quad (G_0)_{12} = (G_0)_{22} = 0 \text{ modulo } S^{-\infty}.$$

Démonstration : Soit $v = (1 + K_1)u$ avec $K_1 \in L^{-1}(M)$. $D_x v = (1 + K_1)(G_1 + G_0)(1 + K_1)^{-1}v + D_x K_1(1 + K_1)^{-1}v = G_1 v + (K_1 G_1 - G_1 K_1 + G_0)v$ modulo des termes d'ordre -1 appliqués à v .

On a $G_1 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ F & 0 \end{pmatrix}$ avec $E = \eta_n 1_m$, $F = \frac{\mu}{\eta_n} 1_m$.

Si $G_0 = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$ $K_1 = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$, on a :

$K_1 G_1 - G_1 K_1 + G_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} A_{11} = K_{12} F - E K_{21} + G_{11} \\ A_{12} = K_{11} E - E K_{22} + G_{12} \\ A_{21} = K_{22} F - F K_{11} + G_{21} \\ A_{22} = K_{21} E - F K_{12} + G_{22} \end{cases}$

on prend d'abord K_{11} et K_{22} tels que $K_{11} - K_{22} = -E^{-1} G_{12}$.
 Puis on prend $K_{12} = 0$ et $K_{21} = -E^{-1} G_{22}$. On peut donc supposer
 qu'on a (3.3) modulo S^{-1} . Pour annuler les termes d'ordre -1
 on multiplie v par $1 + K_2$ avec $K_2 \in L^{-2'}(M)$ et K_2 doit véri-
 fier

$$(K_2 G_1 - G_1 K_2 + G_{-1})_{12} = (K_2 G_1 - G_1 K_2 + G_{-1})_{22} = 0$$

où G_{-1} est le terme d'ordre -1 dans $((1 + K_1)G_1 + G_0 + D_x K_1)$
 $(1 + K_1)^{-1}$. On peut donc trouver K_2 et éliminer successivement
 tous les termes dans $(G_0)_{12}$ et $(G_0)_{22}$.

On pose $1 + K = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + K_j)$. Alors K vérifie la proposition. ■

Dans la suite on supposera donc que u est solution de (3.2)
 et que G vérifie (3.3). En composant (3.1) à gauche par un opé-
 rateur \tilde{P} de symbole principal $\xi 1_{2m} + g_1(x, y, \eta) = \tilde{p}$ et de symbole

sous principal nul, u est solution de $Qu \in C^\infty(M)$ avec $Q = Q_2 + Q_1 + Q_0$ avec $q_1 = \frac{1}{2} \{\tilde{p}, p\} + i\tilde{p}p_0^s$, $q_0 \in L^{0'}(M)$ où $p = \xi^2 - g_1$ et p_0^s est le symbole sous principal de $D_x - G$. On remarque que $(q_1)_{12} = 0$ en utilisant que $(G_0)_{12} = (G_0)_{22} = 0$.
On se ramène maintenant au cas où $q = q_2(x, y, D_x, D_y)$.

On a la proposition suivante :

Proposition 3.2 : Soit f une $2m \times 2m$ matrice dans $C^\infty(T^*M)$ polynomiale de degré 2 en ξ à coefficients dans $C^\infty(\tilde{T}^*M)$ telle que $(f)_{12} = 0$. Alors il existe une $2m \times 2m$ matrice $a \in C^\infty(\tilde{T}^*M)$ telle que $H_{q_2} a + a f = 0$ sur $\{q_2 = 0\}$, $(a)_{12} = 0$ et $a(\rho_0)$ inversible.

Démonstration : Cette proposition est démontrée dans [9] dans le cas scalaire et dans [3] dans le cas matriciel quand (y^0, η^0) est un point strictement diffractif pour q_2 . On peut suivre la preuve de [9] en utilisant les modifications introduites dans [3] pour traiter le cas matriciel. On trouve que $a|_q$ vérifie l'équation :

$$(3.4) \quad H_{r_0} a + a f = 0 .$$

La proposition 3.2 permet de démontrer la prop. suivante comme dans [3].

Proposition 3.3 : Il existe A et B $2m \times 2m$ matrices dans $L_b^0(M)$ avec A polynomiale de degré 1 en ξ telles que $BQ - Q_2A \in L_b^{-\infty}(M)$ dans un voisinage conique de ρ_0 , $(A)_{12} \in L_b^{-\infty}(M)$ et A elliptique en ρ_0 .

Soit $v = Au$; v est solution de $Q_2 v \in C^\infty(M)$ microlocalement près de ρ_0 . On réduit maintenant (3.1) à une équation scalaire du 2ème ordre avec condition au bord matricielle, qu'on étudiera dans le §.4.

Soit A^{-1} un inverse microlocal de A près de ρ_0 . On a $D_x A^{-1} v - GA^{-1} v \in C^\infty(M)$, or $D_x A^{-1} v = A^{-1} D_x v + C_0 v + C_{-1} D_x v$ où le symbole de C_0 est $D_x a^{-1}$ et celui de C_{-1} est $D_\lambda a^{-1}$ si le symbole de A^{-1} est noté a^{-1} . Donc :

$$(3.5) \quad (A^{-1} + C_{-1})D_x v - (GA^{-1} - C_0)v \in C^\infty(M).$$

Si $C \in L_b^0(M)$ on notera $C_\partial \in L^0(\partial M)$ l'opérateur de symbole $c(o, y, o, \eta)$. La condition au bord est : $\beta A_\partial^{-1} v(o) \in C^\infty(\partial M)$. β vérifie la condition de Lopatinski-Sapiro donc si $u = (u_1, u_2)$ on a : $\beta u = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ où $\beta_1 \in L^0(M)$ est elliptique.

(3.5) entraîne que $((A^{-1} + C_{-1})D_x v)_1 = H(A^{-1} v)_2 + D_0 v_1$ avec $D_0 \in L^0(\partial M)$, $H \in L^1(\partial M)$ elliptique et

$$\begin{cases} (A_\partial^{-1} D_x v)_1 = (A_\partial^{-1})_{11} D_x v_1 \\ (A_\partial^{-1} v)_1 = (A_\partial^{-1})_{11} v_1 \end{cases} \quad \text{modulo } C^\infty(\partial M) \text{ d'après la Prop. 3.3.}$$

Donc la condition au bord s'écrit : $\beta_1 (A_\partial^{-1})_{11} v_1 + \beta_2 (A_\partial^{-1} v)_2 = \beta_1 (A_\partial^{-1})_{11} v_1 + \beta_2 (H^{-1} (A_\partial^{-1})_{11} D_x v_1 - H^{-1} D_0 v_1) = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 D_x v_1$ avec $\gamma_1 \in L^0(\partial M)$ elliptique et $\gamma_2 \in L^{-1}(\partial M)$.

Donc v_1 est solution de :
$$\begin{cases} Q_2 v_1 \in C^\infty(M) \\ (\gamma_1 v_1 + \gamma_2 D_x v_1)(0) \in C^\infty(\partial M). \end{cases}$$

Dans le paragraphe 4. on va étudier la propagation de $\text{WF pol } D_x v_1(0)$ le long d'un rayon glissant.

§.4. PROPAGATION DE $\text{WF pol } u$ DANS LE CAS MODELE.

On suppose maintenant que $u \in (D'(M))^{2m}$ est solution du problème aux limites :

$$(4.1) \quad \begin{cases} Q_2 u \in C^\infty(M) \\ u(0) + K D_x u(0) \in C^\infty(\partial M) \text{ avec } K \in L^{-1}(\partial M) \end{cases}$$

et on s'intéresse à la propagation de $\text{WF pol } D_x u(0)$ le long des rayons glissants associés à q_2 . Soit $\rho_0 = (y^0, \eta^0) \in \mathcal{G}$, soit γ le rayon glissant passant par ρ_0 et soit ρ'_0 un autre point de γ avec $y_1(\rho'_0) < y_1(\rho_0)$. Soit W un voisinage conique du segment de rayon glissant $[\rho'_0, \rho_0]$ et V un voisinage de ρ'_0 ne contenant pas ρ_0 .

Démontrons d'abord la proposition suivante : (lemme 7.6 de [2]).

Proposition 4.1 : Soit $C(y, D_y)$ un $1 \times 2m$ système dans $L^{-1}(\partial M)$ à support dans V . Alors il existe A et B , $1 \times 2m$ systèmes polynômiaux du 1er degré en ξ à coefficients dans $L^0(M)$ et $\varepsilon > 0$ tels que : $\text{Supp } A, B \subset \{(x, y, \xi, \eta) \mid x \leq \varepsilon, y_1(\rho'_0) - \varepsilon \leq y_1 \leq \varepsilon, (y, \eta) \in W\}$

- $Q_2 A - B Q_2 \in L_b^{-\infty}(M)$ au dessus de $y_1 \leq \varepsilon/2$
- $A|_{x=0} = E(1 + K D_x) + C(y, D_y) D_x$ avec $E \in L^0(\partial M)$.

Démonstration : On cherche A et B sous forme de séries asymptotiques $a \sim \sum_{j=0}^{-\infty} a_j$, $b \sim \sum_{j=0}^{-\infty} b_j$ avec a_j, b_j , homogènes en (ξ, η) de degré j .

Soit $c \sim \sum_{j=-1}^{-\infty} c_j$ le développement de c . Le premier terme dans le développement de $Q_2 A - B Q_2$ est $q_2(a_0 - b_0)$. On prend donc $a_0 = b_0$. Le terme suivant est $H_{q_2} a_0 + i q_2(a_1 - b_{-1})$. On résout d'abord $H_{q_2} a_0 + i q_2(a_1 - b_{-1}) = 0$ sur $\{q_2 = 0\}$ en imposant a_0 sur $x = 0$. D'après les résultats de [7] on peut trouver une transformation canonique à bord qui transforme q_2 en $\xi^2 + x \eta_n^2 + \eta_1 \eta_n$ et ρ_0 en $(0, \tilde{\eta}_0)$ avec $\tilde{\eta}_0 = (0, 0, \dots, 1)$.

On se ramène donc à ce modèle pour la construction des symboles. Dans $T^*(\mathbb{R}_y^n \times \overline{\mathbb{R}}_x^+)$, on note G l'hypersurface $\{(x, y, \xi, \eta) \mid \xi^2 + x \eta_n^2 + \eta_1 \eta_n = 0\}$ et F l'hypersurface $\{(x, y, \xi, \eta) \mid x = 0\}$. On note $J = F \cap G = \{(0, y, \xi, \eta) \mid \xi^2 = \eta_1 \eta_n\}$, J a deux involutions J_F et J_G définies par les feuillages hamiltoniens de F et G . On a $J_F(y, \xi, \eta) = (y, -\xi, \eta)$ et $J_G(x, \xi, \eta) = (\bar{y}, -\xi, \eta)$ avec $\bar{y} = (\bar{y}_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \bar{y}_n)$ et $\bar{y}_1 = y_1 + 2\xi/\eta_n$, $\bar{y}_n = y_n - 2\eta_1 \xi/3\eta_n^2$. On suppose que sur W on a $|\eta| \leq 2\eta_n$. Sur ce voisinage, J est donc au-dessus de $\eta_1 \leq 0$. Notons encore c_{-1} la restriction de c_{-1} à J . En suivant le lemme 7.6 de [2] on doit trouver a , $1 \times 2m$ système dans $C^\infty(J)$, J_G invariant, tel que :

$$(4.2) \quad (J_F^* a + a)k_{-1}\xi + J_F^* a - a = (J_F^*(c_{-1}\xi) + c_{-1}\xi)k_{-1}\xi + (J_F^*(c_{-1}\xi) - c_{-1}\xi).$$

Notons $c = c_{-1}\xi$. On cherche d'abord $\tilde{a} \in C^\infty(J)$ tel que :

$$(4.3) \quad (J_F^*(\tilde{a}+c) + \tilde{a} + c)k_{-1} \xi + (J_F^*(\tilde{a}+c) - (\tilde{a}+c)) \in 0(\xi^\infty)$$

et \tilde{a} est J_G invariant. Sur J on prend comme coordonnées (y, ξ, η') avec $\eta' = (\eta_2 \dots \eta_n)$. On cherche \tilde{a} sous la forme $\tilde{a}(y, \xi, \eta') = h(y_1 + \xi/\eta_n, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n + \xi^2/3 \eta_n^2, \xi^2/\eta_n, \eta')$, \tilde{a} est bien J_G invariant. Soit $\sum_{j=0}^{\infty} h_j(y, \eta') t^j$ le développement de Taylor de $h(y, t, \eta')$ en $t=0$, le coefficient de ξ^k dans le développement de \tilde{a} en $\xi=0$ est :

$$\sum_{\substack{2j + \alpha + 2\beta = k \\ j, \alpha, \beta \geq 0}} (\partial_{y_1}^\alpha \partial_{y_n}^\beta h_j) (1/\eta_n)^\alpha (y_1/3 \eta_n^2)^\beta \alpha! \beta!$$

l'équation (4.3) donne donc : $\partial_{y_1} h_0 - \eta_n h_0 k_{-1} = c_{-1} \eta_n$. On peut résoudre cette équation en imposant $h_0 = 0$ sur $y_1 = y_1(\rho'_0) - \varepsilon$. Alors h_0 est nul pour $y_1 \leq y_1(\rho'_0) - \varepsilon$. $\tilde{a}|_{\xi=0}$ vérifie donc l'équation suivante :

$$(4.4) \quad \partial_{y_1} \tilde{a} - \eta_n \tilde{a} k_{-1} = c_{-1} \eta_n .$$

Pour annuler le coefficient de ξ^k dans (4.3) pour $k \geq 2$ on a à résoudre des équations du type $\partial_{y_1} h_k - \eta_n h_k k_{-1} = H_k(h_0, \dots, h_{k-1})$ où H_k est un opérateur différentiel nul pour $y_1 \leq y_1(\rho'_0) - \varepsilon$. On peut donc déterminer successivement les h_k en fixant $h_k = 0$ sur $y_1 = y_1(\rho'_0) - \varepsilon$.

En remplaçant c par $c - \tilde{a}$, on peut donc supposer que :

$$(4.5) \quad (J_F^* c + c) k_{-1} \xi + J_F^* c - c \in 0(\xi^\infty) .$$

En suivant la preuve du lemme 7.6 de [2] on introduit l'involution

\tilde{J}_F^* définie par :

$$(4.6) \quad \tilde{J}_F^* f = J_F^*(f) \times (k_{-1} \xi + 1_m)(k_{-1} \xi - 1_m)^{-1}.$$

Avec ces notations on cherche $a \in C^\infty(J)$ tel que :

$$(4.7) \quad \tilde{J}_F^* a - a = \tilde{J}_F^* c - c$$

et $J_G^* a = a$ et $a = 0$ pour $y_1 \leq y_1(\rho'_0) - \varepsilon$. (4.7) entraîne que

$\tilde{J}_F^* J_G^* a = a + (\tilde{J}_F^* c - c)$. On définit alors a par

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{J}_F^* J_G^*)^k (\tilde{J}_F^* c - c) \quad \text{pour } \xi > 0$$

la somme étant localement finie à cause de (4.7). Pour $\xi < 0$ on définit a par $a = J_G^* a$. La fonction a définie ainsi est C^∞ si $(\tilde{J}_F^* c - c) \in O(\xi^\infty)$, ce qui est le cas. On a donc trouvé une solution de (4.2). D'après le lemme (5.2) de [2], il existe donc $\tilde{a}_0 \in C^\infty(G)$ tel que $H_{q_2} \tilde{a}_0 = 0$ et $\tilde{a}_0|_J = a$. Par le théorème de préparation de Malgrange, on peut écrire \tilde{a}_0 sous la forme $\tilde{a}_0 = a_0^0(x, y, \eta) + a_0^1(x, y, \eta)\xi$ avec a_0^i homogène de degré $-i$ en η .

Il reste à étendre a_0^0 et a_0^1 dans $x\eta_n^2 + \eta_1\eta_n \geq 0$ sans changer $a_0^0 + a_0^1\xi$ sur $\{q_2 = 0\}$ et en vérifiant la condition au bord.

$H_{q_2}(a_0^0 + a_0^1\xi)$ est un polynôme du 2ème degré en ξ qui s'annule sur $\{q_2 = 0\}$, donc il existe un $1 \times 2m$ système $d \in S^{-1}(M)$, C^∞ dans $x\eta_n^2 + \eta_1\eta_n \leq 0$, tel que :

$$(4.8) \quad H_{q_2}(a_0^0 + a_0^1\xi) = dq_2 \quad \text{dans } x\eta_n^2 + \eta_1\eta_n \leq 0.$$

En écrivant les coefficients des puissances de ξ dans (4.8), il vient :

$$(4.9) \quad 2 \partial_x a_0^0 + H_{r_0} a_0^1 = 0$$

$$(4.10) \quad 2 \partial_x a_0^1 = d \quad \text{dans } x \eta_n^2 + \eta_1 \eta_n \leq 0.$$

$$(4.11) \quad H_{r_0} a_0^0 + \eta_n^2 a_0^1 = d(x \eta_n^2 + \eta_1 \eta_n).$$

On étend $a_0^0(o, y, \eta)$ et $a_0^1(o, y, \eta)$ dans $\eta_1 > 0$ de façon à vérifier la condition au bord de la Proposition 4.1. (4.11) permet d'étendre $d(o, y, \eta)$ dans $\eta_1 > 0$ car $\text{grad}(\eta_1 \eta_n) \neq 0$. Puis (4.9) et (4.10) permettent d'étendre $D_x a_0^0(o, y, \eta)$ et $D_x a_0^1(o, y, \eta)$ dans $\eta_1 > 0$.

En dérivant ces équations par rapport à x , on peut étendre les $D_x^k a_0^0(o, y, \eta)$, $D_x^k a_0^1(o, y, \eta)$ et $D_x^k d(o, y, \eta)$ dans $\eta_1 > 0$.

Puis, par le théorème d'extension de Whitney on peut étendre a_0^0 , a_0^1 , d dans $x \eta_n^2 + \eta_1 \eta_n \geq 0$.

Pour déterminer les a_j , b_j pour $j \leq -1$, on doit résoudre des équations :

$$(4.12) \quad H_{q_2} a_j + i q_2 (a_{j-1} - b_{j-1}) + R_{j+1} = 0$$

où R_{j+1} ne dépend que de $a_j - b_j$ et des a_k, b_k pour $k > j$. R_{j+1} est nul pour $y_1 \leq y_1(\rho'_0) - \varepsilon$, car les a_k, b_k et $a_j - b_j$ le sont.

Soit \tilde{a}_j une solution de (4.12) sur $\{q_2=0\}$ qui est nulle pour $y_1 \leq y_1(\rho'_0) - \varepsilon$. En suivant le même raisonnement que plus haut, on peut trouver α_j $1 \times 2m$ système $\in C^\infty(J)$, J_G invariant, tel que α_j est nul pour $y_1 \leq y_1(\rho'_0) - \varepsilon$, et $\alpha_j - \tilde{a}_j - c_{j-1} \xi = e_j(1_m - k_j \xi) = \ell_j$ de façon à vérifier la condition au bord de la Proposition (1.1). Notons encore α_j l'extension de α_j à $\{q_2=0\}$ qui vérifie $H_{q_2} \alpha_j = 0$. Alors $a_j = \alpha_j - \tilde{a}_j$ est solution de (4.12) sur $\{q_2=0\}$, et par le théorème de préparation de Malgrange $a_j = a_j^0(x, y, \eta) + a_j^1(x, y, \eta) \xi$ avec a_j^i homogène de degré $j-i$ en η . Il reste à étendre a_j^0 et a_j^1 dans $x \eta_n^2 + \eta_1 \eta_n \geq 0$, ce qui se fait comme pour a_0^0 et a_0^1 . On a donc démontré la proposition. ■

On définit maintenant des orbites hamiltoniennes associées au problème aux limites (4.1) analogues aux orbites hamiltoniennes de [1] et qui sont tracées au dessus des rayons glissants de q_2 . Rappelons que $q_2 = \xi^2 + r(x, y, \eta)$ et que $r_0(y, \eta) = r(0, y, \eta)$ et soit k_{-1} le symbole principal de K .

Définition 4.2 : On appelle orbites hamiltoniennes frontière du problème aux limites (P) les courbes $\Gamma = \{(y, \eta, w(y, \eta))\} \subset Y \times \mathbb{C}^{2m}$ où Y est un rayon glissant de q_2 et w est solution de $(H_{r_0} w + e k_{-1} w = 0)$ où e est un symbole scalaire elliptique homogène de degré deux et constant sur les rayons glissants.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 4.3 : Soit $u \in (D'(M))^{2m}$ solution de

$$(P) \begin{cases} Q_2 u \in C^\infty(M) \\ u(o) + K D_x u(o) \in C^\infty(\partial M) \end{cases}$$

alors au dessus de γ $WF \text{ pol } D_x u(o)$ (resp. $WF \text{ pol } D_x u(o)$) est une union d'orbites hamiltoniennes frontière de (P).

Démonstration : On commence par traiter le cas de $WF \text{ pol } D_x u(o)$.

Soit $w'_0 \in \mathbb{C}^{2m}$ tel que $w'_0 \notin WF \text{ pol } D_x u(o) (\rho'_0)$. Il existe donc un $1 \times 2m$ système $C(y, D_y) \in L^{-1}(\partial M)$ tel que $C(y, D_y) D_x u(o) \in C^\infty(\partial M)$ et $\langle c_{-1}(\rho'_0), w'_0 \rangle \neq 0$. Supposons par exemple que :

$$(4.13) \quad \text{Re} \langle c_{-1}(\rho'_0), w'_0 \rangle > 0.$$

On remplace alors $C(y, D_y)$ par $X(y) C(y, D_y)$ où $X(y)$ est une fonction troncature non nulle en ρ'_0 telle que $\text{Re} \langle X(y) c_{-1}(y, \eta), w(y, \eta) \rangle \geq 0 \quad \forall (y, \eta) \in \gamma$ où $w(y, \eta)$ est l'orbite hamiltonienne frontière de (P) qui part de (ρ'_0, w'_0) . On applique maintenant la Proposition 4.1 à XC .

Soit A l'opérateur de la Proposition 4.1. $v = \Lambda u$ vérifie :

$$(4.14) \begin{cases} Q_2 v \in C^\infty(M) \\ v = 0 \text{ hors de } \{(x, y) \mid x \leq \varepsilon, y_1(\rho'_0) - \varepsilon \leq y_1 \leq \varepsilon, \exists \eta \\ \text{tel que } (y, \eta) \in W\} \\ v|_{x=0} \in C^\infty(\partial M). \end{cases}$$

In effet, on a :

$$Au(o) = E(y, D_y)(u(o) + R D_x u(o)) + X C(y, D_y) D_x u(o) \in C^\infty(\partial M).$$

En suivant les arguments du théorème 4.15 de [2] on en déduit que $v \in C^\infty(M)$. On a :

$$\begin{aligned} D_x v(o) &= (D_x A_0)(o, y, D_y) u(o) + A_0(o, y, D_y) D_x u(o) + \\ &+ (D_x A_1)(o, y, D_y) D_x u(o) + A_1(o, y, D_y) D_x^2 u(o) \end{aligned}$$

si

$$A_0(x, y, D_y) + A_1(x, y, D_y) D_x = A.$$

Donc $D_x v(o) = (-D_x A_0)k - A_1 r_0 k + A_0 + D_x A_1) D_x u(o) = \tilde{A} D_x u(o) \in C^\infty(\partial M)$. Le symbole principal de \tilde{A} sur \mathcal{G} est égal à a_0 , symbole principal de A_0 . D'après la preuve de la Proposition 4.1, $a_0|_{\mathcal{G}}$ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} H_{r_0} a_0 - e a_0 k_{-1} = e X c_{-1} \\ a_0(\rho'_0) = 0 \end{cases}$$

où e est égal à η_n^2 dans les coordonnées canoniques de la Proposition 4.1 ; e est donc bien constant sur les rayons glissants.

Soit $w(y, \eta)$ l'orbite hamiltonienne frontière de (P) qui passe par (ρ'_0, w'_0) et soit $w_0 = w(\rho_0)$. Montrons que

$\langle a_0(\rho_0), w_0 \rangle \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{r_0} \langle a_0(\rho), w(\rho) \rangle &= \langle e a_0 k_{-1} + e X c_{-1}, w \rangle + \langle a_0(\rho), -e k_{-1} w \rangle = \\ &\langle e X c_{-1}, w \rangle \text{ et } \langle a_0(\rho'_0), w(\rho'_0) \rangle = 0, \operatorname{Re} \langle e X c_{-1}(\rho), w(\rho) \rangle > 0, \end{aligned}$$

donc $\langle a_0(\rho_0), w(\rho_0) \rangle \neq 0$.

- Regardons maintenant le cas de $\text{WF pol}_S D_X u(o)$.

On obtient de même un $1 \times 2m$ système $c(y, D_y) L^{-1}(\partial M)$.

Avec les mêmes notations que plus haut v vérifie :

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_2 v \in C^\infty(M) \\ v = 0 \text{ hors de } \{(x, y) \mid x \leq \varepsilon, y_1(\rho'_0) - \varepsilon \leq y_1 \leq \varepsilon\} \exists \eta \\ \text{tel que } w(y, \eta) \in W \\ v|_{x=0} \in H^{s+1}(\partial M). \end{array} \right.$$

La seule chose à vérifier est que $D_X v(o) \in H^s(\partial M)$ micro-localement sur γ . Ceci est clair sur le cas modèle où $q_2 = \xi^2 + x \eta_n^2 + \eta_1 \eta_n$ car la paramétrix microlocale pour le problème (4.15) construite dans [5] montre que $D_X v(o) \equiv N_+ v(o)$ où N_+ est un multiplicateur de Fourier de symbole $\eta_n^{2/3} \frac{A_i'}{A_i}(\eta_1 \eta_n^{-1/3})$, où A_i est la fonction d'Airy utilisée dans [5].

N_+ envoie $H^s(\partial M)$ dans $H^{s-1}(\partial M)$. Dans le cas général on se ramène au cas modèle par conjugaison par les opérateurs intégraux de Fourier construits dans [6].

On a donc démontré le théorème. ■

§.5. PROPAGATION DE $\text{WF pol } u$ DANS LE CAS GENERAL.

On revient maintenant au problème initial, c'est-à-dire que $u \in (D'(M))^{2m}$ est solution du problème aux limites (P) où g_1 est

de la forme (3.2). On s'intéresse à la propagation de $WF\text{ pol } u(o)$ au dessus de γ , où γ est un rayon glissant de q_2 . D'après la Proposition 3.1 on peut supposer que G vérifie (3.3) sans changer $WF\text{ pol } u(o)$.

Définition 5.1 : On appelle orbites hamiltoniennes frontière du problème aux limites (P) les courbes $\Gamma = \{(y, \eta, w(y, \eta))\} \subset \gamma \times \mathbb{C}^{2m}$ où γ est un rayon glissant de q_2 et $w = (w_1, w_2)$ avec $w_1 = \sigma_o(\beta_1^{-1} \beta_2)(y, \eta) w_2(y, \eta)$ et $w_2(y, \eta)$ est solution de $H_{r_o} w_2 + (\frac{1}{2} \{\tilde{p}, p\} + i \tilde{p} p_o)_{11} w_2 + \frac{e}{|\eta|} \sigma_o(\beta_1^{-1} \beta_2) w_2 = 0$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 5.2 : Soit $u \in (D'(M))^{2m}$ solution du problème aux limites (P). Alors au dessus de γ , $WF\text{ pol } u(o)$ (resp. $WF\text{ pol }_s u(o)$) est une union d'orbites hamiltoniennes frontière de (P).

Démonstration : On a $\beta_1 u_1(o) + \beta_2 u_2(o) \in C^\infty(\partial M)$ et $\beta_1 \in L^0(\partial M)$ est elliptique, donc on a :

$$(w_1, w_2) \in WF\text{ pol } u(o)(y, \eta) \iff w_1 = \sigma_o(\beta_1^{-1} \beta_2)(y, \eta) w_2$$

et

$$w_2 \in WF\text{ pol } u_2(o)(y, \eta) .$$

Il suffit donc de regarder $WF\text{ pol } u_2(o)$

Soit $v = Au$, avec A donné par la Proposition 3.3.

D'après le §.3. on a :

$$\begin{cases} Q_2 v_1 \in C^\infty(M) \\ \gamma_1 v_1(o) + \gamma_2 D_x v_1(o) \in C^\infty(\partial M) \end{cases}$$

avec $\gamma_1 \in L^0(\partial M)$, $\sigma_o(\gamma_1) = \sigma_o(\beta_1) \times \sigma_o(A_\partial^{-1})_{11}$, $\gamma_2 \in L^{-1}(\partial M)$,

$\sigma_{-1}(\gamma_2) = \frac{1}{|\eta|} \sigma_o(\beta_2) \sigma_o(A_\partial^{-1})_{11}$ et on a : $u_2(o) = (A_\partial^{-1} v)_2 = \tilde{\Lambda} D_x v_1(o)$

avec $\tilde{\Lambda} \in L^{-1}(\partial M)$ et $\sigma_{-1}(\tilde{\Lambda}) = \frac{1}{|\eta|} \sigma_o(A_\partial^{-1})_{11} = \tilde{a}(y, \eta)$. Donc :

$$\text{WF pol } u_2(o)(y, \eta) = \tilde{a}(y, \eta) \text{ WF pol } D_x v_1(o)(y, \eta).$$

D'après le théorème 4.3 WF pol $D_x v_1(o)$ est une union d'orbites hamiltoniennes frontière au dessus de γ pour le problème aux limites :

$$\begin{cases} Q_2 v_1 \in C^\infty(M) \\ v_1(o) + \gamma_1^{-1} \gamma_2 D_x v_1(o) \in C^\infty(\partial M). \end{cases}$$

Ces courbes sont les solutions de :

$$(5.1) \quad H_{r_o} w + \sigma_o(A_\partial)_{11} \sigma_o(\beta_1^{-1}) \sigma_o(\beta_2) \sigma_o(A_\partial^{-1})_{11} w = 0.$$

D'après (3.4) \tilde{a} vérifie $H_{r_o} \tilde{a} + (\frac{1}{2} \{\tilde{p}, p\} + i \tilde{p} p_o^s + H_{r_o} \frac{1}{|\eta|})_{11} \tilde{a} = 0$.

On peut oublier le terme $H_{r_o} \frac{1}{|\eta|}$ qui correspond uniquement à multiplier \tilde{a} par un facteur scalaire non nul. Si w est une solution de (5.1), $\tilde{a}(y, \eta) w(y, \eta)$ vérifie :

$$H_{r_o} (\tilde{a} w) = - (\frac{1}{2} \{\tilde{p}, p\} + i \tilde{p} p_o^s) \tilde{a} w - \tilde{a} \tilde{a}^{-1} \sigma_o(\beta_1^{-1}) \sigma_o(\beta_2) \tilde{a} w.$$

On a donc démontré le théorème pour WF pol $u(o)$.

On le démontre de la même façon pour $\text{WF pol}_S u(o)$. ■

§.6. INTERACTION ENTRE BICARACTERISTIQUES TRANSVERSALES ET RAYONS GLISSANTS.

Dans ce paragraphe on étudie la propagation de la polarisation pour les solutions du problème aux limites (P).

Donnons d'abord le problème que l'on va essayer de résoudre. On se place au voisinage d'un point $(y^0, \eta^0) \in T^*(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mu(o, y^0, \eta^0) = 0$. $\{\xi - \lambda, \mu\}(o, y^0, \eta^0) < 0$. Au point (y^0, η^0) arrivent j bicaractéristiques transversales pour $\xi - \mu_\nu$, notées γ_ν et un rayon glissant pour $(\xi - \lambda)^2 - \mu$ noté γ . On suppose que parmi les variables y il y en a une notée y_1 , qui joue le rôle de temps, ce qui permet de séparer γ en γ_+ et γ_- , $\frac{1}{2}$ bicaractéristiques entrantes et sortantes en (y^0, η^0) . On suppose que l'on connaît $\text{WF pol } u$ en un point de γ_ν pour $1 \leq \nu \leq j_0$ et $\text{WF pol } u(o)$ en un point de γ_- , et on veut déterminer $\text{WF pol } u(o)$ sur γ_+ et $\text{WF pol } u$ sur γ_ν pour $\nu \geq j_0 + 1$, c'est-à-dire qu'on étudie l'interaction de la polarisation entre rayons transverses et rayons glissants.

On commence par se ramener au cas où le problème aux limites est de la forme (P') avec les notations du §.1. On peut donc supposer que u se décompose en $(u_1, \dots, u_j, \tilde{u})$ où chaque u_ν pour $1 \leq \nu \leq j$ est solution d'un système $D_x u_\nu - H_\nu u_\nu \in C^\infty(M)$ qui vérifie les hypothèses du §.2 et \tilde{u} est solution d'un système :

$D_x \tilde{u} - H_{j_0+1} \tilde{u} \in C^\infty(M)$ qui vérifie les hypothèses du §.3.

On a $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ avec les notations du §.3, et on note $u_+ = (u_1, \dots, u_{j_0})$ $u_- = (u_{j_0+1}, \dots, u_j)$. On suppose que β vérifie la condition de Lopatinski-Shapiro par rapport à cette décomposition des bicaractéristiques, c'est-à-dire que la restriction de $\sigma_0(\beta)$ à $\{w \in \mathbb{C}^m \mid w_+ = \tilde{w}_2 = 0\}$ est bijective. (hypothèse \mathcal{L}). Alors l'hypothèse \mathcal{L} entraîne que : $\beta u(o) \in C^\infty(\partial M)$

$$\Rightarrow (6.1) \quad \begin{cases} u_-(o) - B_{11} u_+(o) - B_{12} \tilde{u}_2(o) \in C^\infty(\partial M) & \text{avec } B_{ij} \in L^0(\partial M) \\ \tilde{u}_1(o) - B_{21} u_+(o) - B_{22} \tilde{u}_2(o) \in C^\infty(\partial M) . \end{cases}$$

Pour simplifier on va supposer que :

$$(6.2) \quad \text{WF } u_\nu \subset \gamma_\nu \quad \text{pour } 1 \leq \nu \leq j_0 .$$

Par hypothèse on connaît $\text{WF } \text{pol}_s u$ en un point de γ_ν pour $1 \leq \nu \leq j_0$. On note $\text{WF } \text{pol}_s u(y^0, \eta^0, \gamma_\nu)$ l'image de $\text{WF } \text{pol}_s u$ par les orbites hamiltoniennes de $D_x - H$ au dessus de γ_ν .

On connaît aussi $\text{WF } \text{pol}_s u(o)$ en un point ρ'_0 de γ_- , donc on connaît $\text{WF } \text{pol}_s \tilde{u}(o)$ en ρ'_0 . On dira que deux sous-espaces vectoriels E et F de \mathbb{C}^m sont transverses si la codimension de $E \cap F$ est maximale, c'est-à-dire si $\text{codim}(E \cap F) = \min(m, \text{codim } E + \text{codim } F)$.

On fait enfin les hypothèses suivantes :

$$(6.3) \quad \text{i) le rang de } \sigma_0(B_{21}) \text{ est constant sur un voisinage de } (y^0, \eta^0) .$$

ii) $K = \bigoplus_{j=1}^{j_0} \text{WF pol}_s u(o) (y^0, \eta^0, \gamma_k)$ est transverse à $\text{Ker } \sigma_o(B_{21})(y^0, \eta^0)$, on note $F = \sigma_o(B_{21})(y^0, \eta^0)(K)$ et $H = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^{2\alpha_{j+1}} \mid w_1 - \sigma_o(B_{22})(y^0, \eta^0)w_2 \in F\}$.
 Pour $\rho_1 \in \gamma_+$, $\rho_1 \neq (y^0, \eta^0)$ on note $H(\rho_1) = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^{2\alpha_{j+1}} \mid w_1 - \sigma_o(B_{22})(\rho_1)w_2 = 0\}$.

iii) Notons $u_-(o) = M(y, l_y) \begin{pmatrix} u_+(o) \\ \tilde{u}(o) \end{pmatrix}$ modulo $C^\infty(\partial M)$ la première équation de (6.1). Pour $\nu \geq j_0 + 1$ on note π_ν la projection $(w_1, \dots, w_j, \tilde{w}) \rightarrow w_\nu$. On suppose que le rang de $\pi_\nu \circ \sigma_o(M)$ est constant sur un voisinage de (y^0, η^0) et que $K \oplus H$ est transverse à $\text{Ker } \pi_\nu \circ \sigma_o(M)(y^0, \eta^0)$.

On utilisera le problème aux limites suivant :

$$(6.4) \quad \begin{cases} D_x \tilde{u} - H_{j+1} \tilde{u} \in C^\infty(M) \\ \tilde{u}_1(o) - B_{22} \tilde{u}_2(o) \in C^\infty(\partial M) . \end{cases}$$

Théorème 6.1 : Soit $u \in (D'(M))^m$ solution du problème aux limites (P') vérifiant les hypothèses (L) et (6.3) et tel que $u(o) \in H^{s-1}(\partial M)$. Alors :

- on peut décomposer $\tilde{u}(o)$ sous la forme $\tilde{u}(o) = u_g + u_t$
 avec :

- $\forall \rho \in \gamma$, $\text{WF pol}_s u_g(\rho)$ est égal à l'image de $\text{WF pol}_s u(o)$ (ρ') par les orbites hamiltoniennes frontière de (6.4).

- u_t est microlocalement C^∞ sur Υ_- , $WF\,pol_s u_t(y^0, \eta^0)$ est inclus dans H , $WF\,pol_s u_t(\rho_1)$ est inclus dans $H(\rho_1)$ pour $\rho_1 \in \Upsilon_+ \neq (y^0, \eta^0)$.

- Pour $\nu \geq j_0 + 1$, au dessus de Υ_ν , $WF\,pol_s u$ est inclus dans l'union des orbites hamiltoniennes de (P') partant de (y^0, η^0, w) avec w appartenant à l'image par $\pi_\nu \circ \sigma_0(M)(y^0, \eta^0)$ de l'espace $K \oplus H$.

On peut obtenir un résultat sur $WF\,pol u$ en faisant les hypothèses suivantes :

- (6.3)' i) $\sigma_0(B_{21})(y^0, \eta^0)|_K$ est injectif
 ii) $\sigma_0(M)(y^0, \eta^0)|_{K \oplus H}$ est injectif.

Corollaire 6.1 : Soit $u \in (D'(M))^m$ solution du problème aux limites (P') vérifiant les hypothèses (\mathcal{L}) , (6.3) et (6.3)'. Alors les résultats du théorème 6.1 sont valables en remplaçant $WF\,pol_s u$, $WF\,pol_s u_g$ et $WF\,pol_s u_t$ par $WF\,pol u$, $WF\,pol u_g$ et $WF\,pol u_t$.

Démonstration du théorème 6.1 : Soit $v = A\tilde{u}$ donné par la Proposition 3.3. D'après le §.3 on a :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(o) = (A_\partial^{-1})_{11} v_1(o) \\ \tilde{u}_2(o) = \tilde{A} e_{D_x} v_1(o) + \tilde{B} v_1(o) \end{cases} \quad \text{modulo } C^\infty(\partial M)$$

où $\tilde{A} \in L^0(\partial M)$, $\sigma_0(\tilde{A}) = \sigma_0(A_\partial^{-1})_{11}$ et $e = \frac{1}{|D_y|}$, $\tilde{B} \in L^{-1}(\partial M)$ et la 2ème équation de (6.1) se transforme en : $\gamma_1 v_1(o) + \gamma_2 D_x v_1(o) - B_{21} u_+(o) \in C^\infty(\partial M)$ avec $\gamma_1 \in L^0(\partial M)$, $\sigma_0(\gamma_1) = \sigma_0(A_\partial^{-1})_{11}$ et $\gamma_2 \in L^{-1}(\partial M)$, $\sigma_{-1}(\gamma_2) = -\frac{1}{|\eta|} \sigma_0(B_{22}) \sigma_0(A_\partial^{-1})_{11}$.

D'après les résultats de [5], il existe une solution v_o du problème mixte microlocal :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2 v_o \in C^\infty(M) \\ v_o \in C^\infty(M) \text{ pour } y_1 < 0 \\ \gamma_1 v_o(o) + \gamma_2 D_x v_o(o) - B_{21} u_+(o) \in C^\infty(\partial M) . \end{array} \right.$$

Alors $\tilde{v} = v_1 - v_o$ est solution du problème aux limites du théorème 4.3, et on a :

$$(6.5) \quad \tilde{v} = v_1 \text{ modulo } C^\infty(\partial M) \text{ pour } y_1 < 0 .$$

On a :

$$(6.6) \quad \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(o) \\ \tilde{u}_2(o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_\partial^{-1})_{11} \tilde{v}(o) \\ \tilde{A} e D_x \tilde{v}(o) + \tilde{B} \tilde{v}(o) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (A_\partial^{-1})_{11} v_o(o) \\ \tilde{A} e D_x v_o(o) + \tilde{B} v_o(o) \end{pmatrix} \text{ modulo } C^\infty(\partial M)$$

En appliquant la Proposition 2.1 à chaque u_ν pour $1 \leq \nu \leq j_o$, on voit qu'il existe pour $1 \leq \nu \leq j_o$ une $d_\nu \times \alpha_\nu$ matrice a_ν dans $L^0(\partial M)$ telle que :

$$a_\nu(y, D_y) u_\nu(o) \in H^S(\partial M)$$

et

$$\text{Ker } \sigma_0(a_\nu)(y^0, \eta^0) = \pi_\nu \text{WF pol}_S u(y^0, \eta^0, \gamma_\nu)$$

où π_ν est définie en (6.3).

En notant $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ 0 \end{pmatrix}$ on a : $C u_+(o) \in H^S(\partial M)$ et

$\text{Ker } \sigma_0(C)(y^0, \eta^0) = K$. Il existe donc $N(y, D_y)$ matrice elliptique dans $L^0(\partial M)$ telle que :

$$(6.7) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } u_+ = N \tilde{u}_+(o) \text{ les } d = d_1 + \dots + d_j \text{ premières} \\ \text{composantes de } \tilde{u}_+(o) \text{ sont dans } H^S(\partial M) \text{ et} \\ K = \sigma_0(N)(y^0, \eta^0) \tilde{K} \text{ où } \tilde{K} \text{ désigne le sous-espace} \\ \text{de } \mathbb{C}^{\alpha_1 + \dots + \alpha_j} \text{ dont les } d \text{ premières composantes} \\ \text{sont nulles.} \end{array} \right.$$

Les hypothèses (6.3) i) et ii) entraînent que l'image de \tilde{K} par $\sigma_0(B_{21})(y, \eta) \sigma_0(N)(y, \eta)$ est de dimension constante au voisinage de (y^0, η^0) . Il existe donc une matrice $d(y, \eta)$ de rang maximal telle que :

$$(6.8) \quad d(y, \eta) \sigma_0(B_{21})(y, \eta) \sigma_0(N)(y, \eta) |_{\tilde{K}} = 0$$

sur un voisinage de (y^0, η^0) et $\text{Ker } d(y^0, \eta^0) = F$.

Donc si $D(y, D_y) \in L^0(\partial M)$ a pour symbole principal $d(y, \eta)$ au voisinage de (y^0, η^0) on a :

$$(6.9) \quad D B_{21} u_+(o) \in H^S(\partial M) .$$

En effet on a besoin de ne regarder que les termes d'ordre 0 dans le calcul symbolique car $u(o) \in H^{s-1}(\partial M)$.

D'autre part en suivant la preuve du théorème 5.2, on vérifie facilement qu'il existe une matrice $\tilde{C} \in L^0(\partial M)$ telle que :

$$(6.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{C} \begin{pmatrix} (A_{\partial}^{-1})_{11} \tilde{v}(o) \\ \tilde{A} e D_x \tilde{v}(o) + \tilde{B} \tilde{v}(o) \end{pmatrix} \in H^s(\partial M) \text{ et} \\ \text{Ker } \sigma_o(\tilde{C})(y^o, \eta^o) \text{ est égal à } L. \end{array} \right.$$

Enfin, on a : $B_{21} u_+(o) = \gamma_1 v_o(o) + \gamma_2 D_x v_o(o)$ modulo $C^\infty(\partial M)$.

Donc $B_{21} u_+(o) = (A_{\partial}^{-1})_{11} v_o(o) - B_{22}(\tilde{A} e D_x v_o(o) + \tilde{B} v_o(o))$ modulo $C^\infty(\partial M)$ d'après la définition de γ_1 et γ_2 .

Donc on a :

$$\text{WF pol}_s \begin{pmatrix} (A_{\partial}^{-1})_{11} v_o(o) \\ \tilde{A} e D_x v_o(o) + \tilde{B} v_o(o) \end{pmatrix} (y^o, \eta^o) \subset \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^{2\alpha_j+1} \mid w_1 - \sigma_o(B_{22})(y^o, \eta^o) w_2 \in F\}.$$

Ce dernier espace est noté H dans (6.3).

$$\text{En notant } u_g = \begin{pmatrix} (A_{\partial}^{-1})_{11} \tilde{v}(o) \\ \tilde{A} e D_x \tilde{v}(o) + \tilde{B} \tilde{v}(o) \end{pmatrix}, \quad u_t = \begin{pmatrix} (A_{\partial}^{-1})_{11} v_o(o) \\ \tilde{A} e D_x v_o(o) + \tilde{B} v_o(o) \end{pmatrix}$$

on a démontré la partie du théorème concernant $\tilde{u}(o)$ en (y^o, η^o) , d'après (6.6).

On démontre de même la partie du théorème concernant $\tilde{u}(o)$ en ρ_1 avec $\rho_1 \in \gamma_+$, $\rho_1 \neq (y^o, \eta^o)$.

Il reste à regarder $\text{WF pol}_s u$ sur les bicaractéristiques γ_ν pour $\nu \geq j_0 + 1$.

Soit donc $\nu \geq j_0 + 1$. On utilise maintenant la première équation de (6.1). On a $C u_+(0) \in H^S(\partial M)$ et $E \begin{pmatrix} \tilde{u}_1(0) \\ \tilde{u}_2(0) \end{pmatrix} \in H^S(\partial M)$ avec $\text{Ker } e(y^0, \eta^0) = H$ à cause de la 2ème équation de (6.1).

L'hypothèse iii) entraîne que la méthode utilisée pour obtenir la matrice D permet d'obtenir une matrice $F_\nu(y, D_y) \in L^0(\partial M)$ telle que $F_\nu(y, D_y) u(0) \in H^S(\partial M)$ et $\text{Ker } \sigma_0(F_\nu)(y^0, \eta^0)$ est l'image par $\pi_\nu \circ \sigma_0(M)(y^0, \eta^0)$ de $K \oplus H$.

Puis on applique la Proposition 2.1 à u_ν . Ceci démontre la partie du théorème concernant γ_ν pour $\nu \geq j_0 + 1$.

On a donc terminé la démonstration. ■

Démonstration du corollaire 6.1 : Si on s'intéresse à $\text{WF pol } u$, il faut prendre en compte tous les termes du calcul symbolique. Il est facile de voir qu'on a (6.7) en remplaçant $H^S(\partial M)$ par $C^\infty(\partial M)$. On a aussi (6.8). Le problème est de choisir les termes d'ordre inférieur du symbole de D pour avoir :

$$(6.11) \quad D(y, D_y) \circ B_{21} \circ N|_{\tilde{K}} = 0 \text{ modulo } S^{-\infty}(\partial M).$$

On cherche le symbole complet de D sous la forme $\sum_{j=0}^{-\infty} d_j(y, \eta)$. Le symbole complet de $B_{21} \circ N|_{\tilde{K}}$ s'écrit $\sum_0^{-\infty} m_j(y, \eta)$.

On trouve d'abord $d_0(y, \eta) = d(y, \eta)$ grâce à (6.8). Puis pour éliminer le terme d'ordre -1 dans $D \circ B_{21} \circ N|_{\tilde{K}}$ il faut trouver d_{-1} tel que :

$$d_0 m_{-1} + d_{-1} m_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{i} D_{\eta_k} (d_0) D_{y_k} (m_0) = 0.$$

On peut trouver d_{-1} tel que $d_{-1} m_0 = f$ où f est une matrice arbitraire car m_0 est injective. On vérifie ensuite qu'on peut déterminer d_j pour $j < -1$ pour avoir (6.11).

Puis (6.7) et (6.11) entraînent :

$$(6.12) \quad D(y, D_y) B_{21} u_+(0) \in C^\infty(\partial M).$$

A cause du théorème 5.2 pour la propagation C^∞ on obtient la partie du théorème qui concerne u_g . Grâce à (6.12) on obtient la partie du théorème qui concerne u_t .

Il reste à regarder WF polu sur les bicaractéristiques γ_ν pour $\nu \geq j_0 + 1$. Comme plus haut l'hypothèse que $M(y^0, \eta^0)|_{K \oplus H}$ est injective entraîne qu'on peut obtenir $F_\nu(y, D_y) \in L^0(\partial M)$ telle que $F_\nu(y, D_y) u_\nu \in C^\infty(\partial M)$.

On a donc démontré le corollaire 6.1. ■



REFERENCES

- [1] N. DENCKER :
On the propagation of polarization sets for systems of real principal type ,
 Journal of Functional Analysis, vol. 46 (1982), 351-373.
- [2] K.G. ANDERSON, R.B. MELROSE :
The propagation of singularities along gliding rays ,
 Inventiones Math., 41 (1977), 197-232.
- [3] C. GERARD :
 Thèse de 3ème cycle, Université Paris XI (Orsay), (1984).
- [4] M.E. TAYLOR :
Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations ,
 CPAM, 28 (1975), 457-478.
- [5] G. ESKIN :
 Séminaire Goulaouic-Schwartz, exposé n° 12, (1977).
- [6] R.B. MELROSE :
Transformations of boundary value problems ,
 Acta Mathematica, vol. 147, (1981), 149-236.
- [7] R.B. MELROSE :
Equivalence of glancing hypersurfaces ,
 Inventiones Math., 37 , (1976), 165-191.
- [8] R.B. MELROSE, J. SJÖSTRAND :
Singularities of boundary value problems II ,
 CPAM 35, (1982), 129-168.
- [9] R.B. MELROSE :
Transformations methods of boundary value problems ,
 In Singularities of Boundary Value Problems, D. Reidel Publishing Company, Edité par H.G. Garnir (1981).