PATRICK GÉRARD

Distributions conormales analytiques et équations aux dérivées partielles non linéaires

Thèses d'Orsay, 1986

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1986__0191__P0_0>

ORSAY
n° d'ordre :
3936

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3° CYCLE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES PURES

PAR

M. Patrick GERARD

SUJET : " Distributions conormales analytiques et équations aux dérivées partielles non linéaires ".

soutenue le 25 Septembre 1985 devant la Commission d'examen

MM. Jean-Michel BONY Président

Serge ALINHAC

G. LEBEAU

REMERCIEMENTS

Il m'est particulièrement agréable d'exprimer ma profonde gratitude à Serge ALINHAC : si ce travail a pu être réalisé, c'est en grande partie grâce à sa direction stimulante et à ses précieux conseils.

Je tiens aussi à remercier vivement Gilles LEBEAU pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour ses nombreuses et fécondes suggestions.

Les indications de Jean-Michel BONY m'ont été également fort utiles ; en outre, il m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse, et je lui en suis tout spécialement reconnaissant.

Enfin, je voudrais remercier tous ceux qui, à leur manière, ont contribué à l'aboutissement de ce travail, et notamment Madame BARDOT, pour la patience et la précision avec lesquelles elle a assuré la frappe du manuscrit.

Patrick GERARD.

ABSTRACT

This thesis studies the class of conormal solutions associated with one or two characteristic hypersurfaces in the real analytic framework .

We prove the propagation of the conormal analytic property in semi-linear equations of real principal type and in quasi-linear hyperbolic systems.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.

Ce travail est une contribution à l'étude des singularités analytiques pour les solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Dans [4] et [5], Alinhac et Métivier ont montré que, si u est solution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire générale, assez régulière a priori, l'analyticité de u se propage à travers toute hypersurface que les caractéristiques réelles de l'opérateur linéarisé coupent transversalement. Il est alors naturel de se demander quel type de singularité analytique pour u se propage dans les mêmes conditions.

Depuis les travaux de Bony [7], Lascar [14], Rauch [16], on sait que les singularités microlocales (C^∞ ou analytiques) ne restent en général pas confinées, comme dans le cas linéaire, sur des bicaractéristiques, mais donnent lieu à des phénomènes d'interaction, essentiellement parce que l'effet d'une transformation non linéaire tend à augmenter le front d'onde, en général jusqu'à son enveloppe convexe. Cette idée a poussé Bony [8] à considérer des algèbres de distributions dont le front d'onde C^∞ est a priori confiné dans le fibré conormal à une hypersurface : ce sont les distributions conormales de Hörmander [13], associées à un symbole suffisamment décroissant dans les hautes fréquences.

Dans la première partie de ce travail, on étudie un équivalent analytique de ces classes, en vérifiant qu'il s'agit encore d'algèbres. L'appendice 2 montre que les distributions conormales analytiques à une hypersurface, que l'on définit ainsi, peuvent être représentées par une intégrale de Fourier, avec un symbole analytique en un sens faible. On peut également remarquer que les singularités analytiques de telles distributions sont toujours uniformément réparties sur l'hypersurface, ce qui n'est pas le cas dans le cadre C^∞, où Rauch et Reed ont mis en évidence un phénomène de "Hard Rays" (voir [17]).

Dans la seconde partie, nous généralisons les résultats de Bony [8] au cadre analytique. Si u est solution de l'équation semi-linéaire dans $\mathbb{R}^n$:

$$Pu = F(x, \partial_x^\alpha u)_{|\alpha| \leq m-1} \ , \quad m = \deg P$$

u étant a priori H^s, $s > \frac{n}{2} + m$, alors le caractère conormal analytique de u par rapport à une hypersurface Σ caractéristique pour P, se propage à travers toute hypersurface que les caractéristiques de P coupent transversalement. Nous démontrons aussi un résultat du même type pour une solution conormale analytique par rapport à deux hypersurfaces caractéristiques se coupant transversalement, avec l'hypothèse que P n'admet pas de troisième hypersurface caractéristique passant par l'intersection des deux autres. (C'est le cas par exemple si P est strictement hyperbolique d'ordre 2). La méthode utilisée est celle de [5] : on dérive l'équation, cette fois suivant les champs tangents à la configuration caractéristique, et on estime les dérivées de u grâce à une inégalité a priori, de type Carleman (inégalité (2.1.5)).

La troisième partie traite de la généralisation de ces résultats à des équations quasi-linéaires. On se restreint à une seule hypersurface Σ. On remarque que la solution u intervient cette fois explicitement dans l'équation caractéristique définissant Σ ; il serait donc abusif de supposer Σ régulière a priori, comme c'est le cas au paragraphe 2. Le résultat attendu est donc du type suivant :

" Σ et u étant données avec une régularité a priori, si d'autre part Σ est régulière "dans le passé", et si u est conormale à Σ dans le passé, alors cette situation se propage dans l'avenir ".

Dans le cadre C^{∞}, un tel résultat a été démontré par Alinhac [2], [3], pour des équations non linéaires générales. L'outil essentiel est la paracomposition [1], qui permet de redresser Σ en ne prenant en compte que très faiblement sa mauvaise régularité. Hélas on ne dispose pas d'un tel outil dans le cadre analytique. C'est pourquoi nous avons restreint notre étude aux systèmes quasi-linéaires strictement hyperboliques, dans lesquels la mauvaise régularité d'un changement de variables apparaît moins que dans une équation scalaire d'ordre élevé. Pour remédier au décalage de régularité existant néanmoins entre la solution du système et l'hypersurface, nous avons dû a priori dériver suffisamment le système, ce qui suppose une régularité initiale de la solution plus importante que celle attendue naturellement, mais comparable à celle qui est envisagée dans [2]. A partir de là, nous avons adopté la méthode utilisée dans la seconde partie, en conjuguant cette fois les estimations sur u et sur Σ à chaque pas de récurrence.

1. LES DISTRIBUTIONS CONORMALES ANALYTIQUES.

Dans ce paragraphe, on étudie une version analytique des algèbres définies par Bony dans [8], dans les deux configurations géométriques les plus simples : une hypersurface, puis deux hypersurfaces se coupant transversalement.

1.1. Définition - Proposition 1.1.1 :

Soit Σ une hypersurface analytique fermée de $\mathbb{R}^n$, ou la réunion de deux hypersurfaces analytiques fermées de $\mathbb{R}^n$, Σ_1 et Σ_2, se coupant transversalement.

Si ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{A}(\overline{\omega})$ l'espace des fonctions analytiques réelles au voisinage de $\overline{\omega}$, et $\mathcal{Z}_\Sigma(\overline{\omega})$ le $\mathcal{A}(\overline{\omega})$-module des champs de vecteurs analytiques au voisinage de $\overline{\omega}$, tangents à Σ en les points de $\Sigma \cap \omega$.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $s \in \mathbb{R}$. On dit qu'une distribution u sur Ω est dans $H_a^s(\Sigma)$ si, pour tout point x_o de Ω, il existe un voisinage ω de x_o, tel que $\omega \subset\subset \Omega$, un système fini de générateurs $Z_1,\dots,Z_N$ de $\mathcal{Z}_\Sigma(\overline{\omega})$ et une constante $C>0$ tels que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall I \in \{1,\dots,N\}^p,\ Z^I u \in H^s(\overline{\omega}) \quad \text{et}$$

$$\| Z^I u \|_{s,\overline{\omega}} \leq C^{p+1}\, p!\ . \tag{1.1.1}$$

Si u appartient à $H_a^s(\Sigma)$ dans Ω, alors (1.1.1) est vrai pour tout ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ et tout système fini $Z_1,\dots,Z_N$ de générateurs de $\mathcal{Z}_\Sigma(\overline{\omega})$. (Si un tel système existe).

Pour $I=\{i_1,\dots,i_p\}$, on a noté $Z^I = Z_{i_1}\dots Z_{i_p}$.
Enfin $\|\cdot\|_{s,\overline{\omega}}$ représente la norme $H^s(\overline{\omega})$.

Preuve : Il s'agit de prouver la dernière assertion.
Puisque $\|\cdot\|_{s,\overline{\omega}} \simeq \sum_i \|\cdot\|_{s,\overline{\omega}_i}$ si $\omega = \bigcup_i \omega_i$, on est ramené au cas de deux systèmes de générateurs $Z_1,\dots,Z_N$ et $Y_1,\dots,Y_M$ sur un même ouvert ω.

Supposons (1.1.1) vrai pour les Z_i, montrons le pour les Y_j. Il existe des fonctions a_{jk}, analytiques sur $\bar{\omega}$, telles que :

(1.1.2)
$$Y_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} Z_k \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant j \leqslant M$$

et donc il existe des fonctions $a_{J,K}$ analytiques sur $\bar{\omega}$, telles que :

(1.1.3)
$$Y^J = \sum_{1 \leqslant |K| \leqslant |J|} a_{J,K} Z^K .$$

Si $\sigma > \frac{n}{2}$, et $\sigma \geqslant |s|$, on en déduit :

(1.1.4)
$$\| Y^J u \|_{s,\bar{\omega}} \leqslant \sum_{1 \leqslant |K| \leqslant |J|} \| a_{J,K} \|_{\sigma,\bar{\omega}} \| Z^K u \|_{s,\bar{\omega}} .$$

Il reste à estimer les $\| a_{J,K} \|_{\sigma,\bar{\omega}}$.

En appliquant Y_j à (1.1.3), on a la formule de récurrence suivante :

(1.1.5)
$$a_{(j,J),K} = Y_j a_{J,K} + a_{j k_1} a_{J,K'} ,$$

avec $K = (k_1, K')$, le premier terme étant nul si $|K| = |J| + 1$.

On a alors classiquement : si $|J| = q$, $|K| = p \leqslant q$:

(1.1.6)
$$\| a_{J,K} \|_{\sigma,\bar{\omega}} \leqslant C_o C_1^q C_2^{q-p} (q-p)! .$$

De (1.1.6), (1.1.4) et (1.1.1) pour Z, on obtient (1.1.1) pour Y. q.e.d.

Proposition 1.1.2. : La classe $H^s_a(\Sigma)$ est invariante par difféomorphisme analytique : si $u \in H^s_a(\Sigma)$, $\phi^* u \in H^s_a(\phi^{-1}(\Sigma))$.

C'est une conséquence triviale de la définition 1.1.1.

Remarque 1.1.3 : Si $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, et si $u \in H^s_a(\Sigma)$, alors $u \in H^s_a(\Sigma_1)$ en dehors de Σ_2, et $u \in H^s_a(\Sigma_2)$ en dehors de Σ_1.

Remarque 1.1.4 : Les propositions (1.1.1), (1.1.2) permettent de ramener l'étude de l'appartenance à $H^s_a(\Sigma)$ aux cas suivants :

a) Si Σ est une hypersurface, $\Sigma=\{x_1=0\}$ et $Z_1=x_1\partial_1$, $Z_j=\partial_j$, $j\in\{2,\dots,n\}$.

b) Si $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$, Σ_1 et Σ_2 se coupant transversalement, on peut supposer que $\Sigma_i=\{x_i=0\}$ et : $Z_1=x_1\partial_1$, $Z_2=x_2\partial_2$, $Z_j=\partial_j$, $j\in\{3,\dots,n\}$ et les inégalités (1.1.1) à démontrer sont alors :

$$(1.1.1)' \qquad \forall\alpha\in\mathbb{N}\ ,\quad \|Z^\alpha u\|_{s,\overline{\omega}}\leqslant C^{|\alpha|+1}\,\alpha!$$

où l'on a noté : si $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $Z^\alpha=Z_1^{\alpha_1}\dots Z_n^{\alpha_n}$. (Notation plus agréable lorsque les champs commutent).

1.2. <u>Singularités analytiques des distributions conormales analytiques.</u>

D'après la définition 1.1.1, si $u\in H_a^s(\Sigma)$ près de x_o n'appartenant pas à Σ, alors, pour un voisinage ω de x_o, on a :

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}\ ,\quad \partial^\alpha u\in H^s(\overline{\omega}) \qquad \text{et} \qquad \|\partial^\alpha u\|_{s,\overline{\omega}}\leqslant C^{|\alpha|+1}\,\alpha!$$

ce qui entraîne clairement que u est analytique au voisinage de x_o.

Plus précisément, rappelons la :

<u>Proposition 1.2.1</u> : Soit Z un champ de vecteurs analytique sur Ω, et soit $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$. On suppose qu'il existe $s\in\mathbb{R}$ tel que :

$$(1.2.1)\quad \forall k\in\mathbb{N}\ ,\quad Z^k u\in H^s_{loc}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad \|Z^k u\|_{s,\overline{\omega}}\leqslant C_\omega^{k+1}\,k!\quad \forall\,\omega\subset\subset\Omega\ .$$

Alors :

a) $WF_a(u)$ est contenu dans l'ensemble caractéristique de Z :
car $Z=\{(x,\xi)\in T^*\Omega\smallsetminus 0\ ,\ \langle\xi\,,Z(x)\rangle=0\}$.

b) $WF_a(u)$ se propage suivant les courbes bicaractéristiques de Z.

Preuve : a) Montrons que, si $(x,\xi) \notin \operatorname{car} Z$, u est microlocalement analytique en (x,ξ) : par hypothèse $Z(x) \neq 0$, donc on peut se ramener au cas où $Z = \frac{\partial}{\partial x_1}$, et le résultat est alors évident, en utilisant par exemple la formulation de Hörmander [12] de l'analyticité microlocale.

b) Voir Helffer-Mattera [11], où l'on utilise un théorème de Kashiwara, démontré par Bony et Schapira dans [10].

Pour la commodité du lecteur, nous donnons une démonstration directe de b) dans l'Appendice 1.

Corollaire 1.2.2 : Soit Σ une hypersurface analytique fermée de $\mathbb{R}^n$, soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $u \in H_a^s(\Sigma)$ dans Ω. Alors :

a) $WF_a(u) \subset N_\Omega^*(\Sigma)$, fibré conormal à Σ dans Ω.

b) Si $\Omega \cap \Sigma$ est connexe, et si u est à valeurs réelles, alors :

- *soit u est analytique*
- *soit $WF_a(u) = N_\Omega^*(\Sigma)$.*

Preuve : On se ramène au cas où Σ est donnée par $x_1 = 0$, et on applique la proposition 1.2.1 à $Z = \partial_j$, pour $2 \leqslant j \leqslant n$; pour b) on tient compte du fait que, puisque u est à valeurs réelles, $WF_a(u)$ est invariant par l'homothétie de rapport -1.

Corollaire 1.2.3 : Soient Σ_1, Σ_2 deux hypersurfaces analytiques fermées, se coupant transversalement suivant une sous variété Δ de codimension 2. Soit $u \in H_a^s(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ dans Ω.

a) $WF_a(u) \subset N_\Omega^* \Sigma_1 \cup N_\Omega^* \Sigma_2 \cup N_\Omega^* \Delta$.

b) On suppose u à valeurs réelles, et Ω assez petit pour que $\Omega \cap \Delta$ soit connexe, et $\Omega \cap (\Sigma_i \setminus \Delta)$ ait deux composantes C_i et C_i', pour $i = 1,2$.

Orientons $N^*\Sigma_1$ *et* $N^*\Sigma_2$ *de manière quelconque, et posons :*

$$N^+ = Conv\left\{(N^*\Sigma_1)^+ \cup (N^*\Sigma_2)^+\right\}, \quad N = N^+ \cup (-N^+)$$
$$N'^+ = Conv\left\{(N^*\Sigma_1)^+ \cup (N^*\Sigma_2)^-\right\}, \quad N' = N'^+ \cup (-N'^+)$$

de sorte que $N^*\Delta = N \cup N'$. *(Conv désigne l'enveloppe convexe).*

Alors $WF_a(u)$ *est réunion d'ensembles pris dans la liste suivante :*

$$\overline{N^*_\Omega C_1},\ \overline{N^*_\Omega C_2},\ \overline{N^*_\Omega C'_1},\ \overline{N^*_\Omega C'_2},\ N,\ N'.$$

Preuve : Compte tenu de la remarque 1.1.3 et du corollaire 1.2.2, il suffit d'étudier $WF_a(u)|_\Delta$. On se ramène à $\Sigma_1 = \{x_1 = 0\}$, $\Sigma_2 = \{x_2 = 0\}$.

a) On applique la proposition 1.2.1 a) à $Z = \partial_j$, pour $3 \leqslant j \leqslant n$.

b) On applique la proposition 1.2.1 b) à $Z = \partial_j$, pour $3 \leqslant j \leqslant n$, ce qui permet d'abord de propager $WF_a(u)$ le long de Δ, puis par exemple à $Z = x_1\partial_1$, ce qui propage $WF_a(u)$ dans la fibre de $N^*\Delta$, ou plus exactement dans chacune des quatre composantes de $(N^*\Delta \setminus N^*\Sigma_1 \setminus N^*\Sigma_2)|_{x_0}$, pour $x_0 \in \Delta$. Enfin on utilise le fait que $WF_a(u) = -WF_a(u)$.

q.e.d.

1.3. Algèbres de distributions conormales analytiques.

Dans ce paragraphe, nous vérifions que les distributions conormales analytiques sont adaptées aux problèmes non linéaires : nous montrons que, si $s > \frac{n}{2}$ et si $w \in H^s_a(\Sigma)$, alors, pour toute fonction F analytique, $F(w)$ est dans $H^s_a(\Sigma)$.

Il nous faut donc estimer les $Z^\alpha F(w)$, où les Z_j sont les champs intervenant à la remarque 1.1.4. Pour cela, nous introduisons une famille de semi-normes, dans l'esprit de [4], [5].

Fixons $s \in \mathbb{R}$, $s > \frac{n}{2}$, de sorte que $H^s(\overline{\omega})$, pour $\omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, soit une algèbre, et normalisons $\|\cdot\|_{s,\overline{\omega}} = \|\cdot\|_s$ afin que :

$$\| u v \|_s \leqslant \| u \|_s \| v \|_s . \tag{1.3.1}$$

Soit $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_N\}$ un ensemble de champs de vecteurs analytiques près de $\overline{\omega}$, et qui commutent. On peut définir, près de $\overline{\omega}$:

$$H^{s,\infty}(\mathcal{Z})_{|\overline{\omega}} = \left\{ w \in H^s(\overline{\omega}) , \forall \alpha \in \mathbb{N}^n , Z^\alpha w \in H^s(\overline{\omega}) \right\} , \quad \text{et :}$$

$$H^s_a(\mathcal{Z})_{|\overline{\omega}} = \left\{ w \in H^{s,\infty}(\mathcal{Z})_{|\overline{\omega}} , \exists C > 0 , \forall \alpha \in \mathbb{N}^n , \| Z^\alpha w \|_s \leqslant C^{|\alpha|+1} \alpha! \right\}.$$

Si $\mathcal{Z}$ est un système de générateurs du module des champs tangents à Σ, alors :

$$H^s_a(\mathcal{Z})_{|\overline{\omega}} = H^s_a(\Sigma)_{|\overline{\omega}} .$$

Fixons enfin $f \in C^\infty(\overline{\omega})$.

Pour $w \in H^{s,\infty}(\mathcal{Z})_{|\overline{\omega}}$ et pour p entier $\geqslant 1$, on pose :

$$|w|_p = \sup_{|\alpha|=p} \| f^{p-1} Z^\alpha w \|_s .$$

On considère d'autre part la suite $m_p = c \dfrac{p!}{(p+1)^2}$, la constante $c > 0$ étant ajustée de telle sorte que

$$\sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} m_{m-q} m_q \leqslant m_p \qquad \text{pour tout} \quad p \geqslant 0$$

$$\sum_{q=1}^{p} \binom{p}{q} m_{p-q+1} m_q \leqslant p m_p \qquad \text{pour tout} \quad p \geqslant 1 .$$

Pour $\varepsilon > 0$, et $p \geqslant 1$, on pose $M_p = \varepsilon^{1-p} m_p$, tandis que l'on convient de noter $M_o = 1$.

En tenant compte de

$$\sum_{\substack{|\beta|=q \\ \beta \leqslant \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} = \binom{|\alpha|}{q} \qquad \text{pour} \quad \alpha \in \mathbb{N}^n$$

les relations ci-dessus prennent la forme suivante, que nous utiliserons couramment :

(1.3.2) $$\sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} M_{|\alpha-\beta|}\, M_{|\beta|} \leqslant \varepsilon\, M_{|\alpha|}$$

(1.3.2)' $$\sum_{0<\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} M_{|\alpha-\beta|+1}\, M_{|\beta|} \leqslant |\alpha|\, M_{|\alpha|}\ .$$

Pour $w \in H^{s,\infty}(\mathcal{Z})|_{\overline{\omega}}$, on note enfin

$$[w]_p = \sup_{1\leqslant q\leqslant p} \frac{|w|_q}{M_q}\ .$$

<u>Remarque 1.3.1.</u> : Pour vérifier qu'une fonction $u \in H^{s,\infty}(\mathcal{Z})|_{\overline{\omega}}$ est dans $H^s_a(\mathcal{Z})|_{\overline{\omega}}$, il s'agit de montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $f \equiv 1$

(1.3.3) $$\sup_{p\geqslant 1} [u]_p < +\infty\ .$$

f est ici introduite en vue d'applications ultérieures.

Enonçons maintenant le résultat principal de ce paragraphe.

<u>Proposition 1.3.2</u> : On suppose que f vérifie la propriété suivante :

(1.3.4) $$M = \sup_{q\geqslant 1} \| f^q \|_s < +\infty\ .$$

Soit alors $w = (w_1,\dots,w_r)$ une fonction vectorielle appartenant à $H^{s,\infty}(\mathcal{Z})$ sur $\overline{\omega}$, avec $s > \frac{n}{2}$.

Soit F une fonction analytique au voisinage de $w(\overline{\omega})$.

Alors $F(w) \in H^{s,\infty}(\mathcal{Z})|_{\overline{\omega}}$, et il existe $\delta > 0$, $L > 0$, ne dépendant que de F, d'un majorant de M, et de $\|w\|_s$, tels que, pour tout $p \geqslant 1$ et tout $\varepsilon > 0$, la condition

(1.3.5) $$\varepsilon\, [w]_p \leqslant \delta$$

entraîne

(i) $[F(w)]_p \leqslant L\, [w]_p$

(ii) $|F(w)|_{p+1} \leqslant L(|w|_{p+1} + M_{p+1}\, [w]_p)$.

Preuve : Elle est analogue à celle du lemme 3.3.1 de [4]. On a :

$$(1.3.6) \qquad Z^{\alpha} F(w) = \sum_{1\leqslant q\leqslant |\alpha|} \ \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_q=\alpha \\ \alpha_j \neq 0}} C_{\alpha_1\dots\alpha_q} \, F^{(q)}(w)(Z^{\alpha_1} w,\dots,Z^{\alpha_q} w)$$

où les $C_{\alpha_1\dots\alpha_q}$ ne dépendent que de la liste $\alpha_1,\dots,\alpha_q$.

Cette formule est immédiate, par récurrence sur $|\alpha|$. On en déduit déjà que $F(w) \in H^{s,\infty}(\mathcal{Z})_{|\bar{\omega}}$.

F étant analytique au voisinage de $w(\bar{\omega})$, il existe deux constantes A et R telles que

$$(1.3.7) \qquad \| F^{(q)}(w) \|_s \leqslant A R^q q! \ .$$

Considérons alors les séries formelles

$$\tilde{F}(W) = \sum_{q=1}^{\infty} A R^q W^q$$

$$\theta(X) = \sum_{\alpha>0} \frac{M_{|\alpha|}}{\alpha!} X^{\alpha} \ .$$

La relation (1.3.2) signifie que

$$(\theta(X))^2 << \varepsilon\, \theta(X)$$

($P(X) << Q(X)$ signifie que chaque coefficient de P est majoré en module par le coefficient de Q du même ordre).

On en déduit que, si $\rho > 0$ est tel que $\varepsilon \rho R \leqslant \frac{1}{2}$:

$$(1.3.8) \qquad \tilde{F}(\rho\theta(X)) << 2 A \rho R \ \theta(X) \ .$$

Majorons maintenant (1.3.6) (avec $|\alpha| = p$), en tenant compte de (1.3.7) :

$$(1.3.9) \qquad \begin{aligned} \| f^{p-1} Z^{\alpha} F(w) \|_s &\leqslant \Sigma\, C_{\alpha_1\dots\alpha_q} \| f^{q-1} \|_s \ \| F^{(q)}(w) \|_s \prod_{i=1}^{q} \| f^{|\alpha_i|-1} Z^{\alpha_i} w \|_s \\ &\leqslant M \Sigma\, C_{\alpha_1\dots\alpha_q} A R^q q! \, M_{|\alpha_1|} \cdots M_{|\alpha_q|} \, ([w]_p)^q \end{aligned}$$

et ce dernier terme n'est autre que $M\,\partial_X^\alpha \tilde{F}([w]_p\,\theta(X))_{|X=0}$, d'après la formule (1.3.6) appliquée à $Z_j = \partial_j$.

Fixons $\delta = \frac{1}{2R}$. Alors, si $\varepsilon [w]_p \leqslant \delta$, on a, d'après (1.3.8) :

$$|F(w)|_p \leqslant 2MAR\; M_p [w]_p\,, \tag{1.3.10}$$

ce qui donne (i).

(ii) s'obtient de la même manière, en isolant dans (1.3.6) le terme $F'(w) \cdot Z^\alpha w$.

q.e.d.

Remarque 1.3.3. : Supposons que l'on ait $\| f \|_s \leqslant 1$. Alors la quantité $\| f \|_s$ va apparaître devant tous les termes de (1.3.9) pour lesquels $q \geqslant 2$. En conséquence, on peut préciser (ii) en écrivant :

(ii)' $\quad |F(w)|_{p+1} \leqslant L\left(|w|_{p+1} + M_{p+1}\, \| f \|_s\, [w]_p\right)$.

Cette remarque nous sera utile au chapitre 3. (Lemme 3.6).

Corollaire 1.3.4 : Si $w_1, \ldots, w_r$ sont dans $H^s_a(\Sigma)$, et si F est analytique, alors $F(w_1, \ldots, w_r)$ est dans $H^s_a(\Sigma)$.

Preuve : On utilise la remarque 1.3.1 : $f \equiv 1$. Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sup_p [w]_p < +\infty$, et, quitte à restreindre ε, (1.3.5) est vérifiée pour tout p. Il suffit alors d'utiliser (i).

Remarque 1.4. : On peut évidemment définir des distributions conormales associées à des configurations géométriques plus compliquées (voir Bony [9], et Melrose-Ritter [15] pour le cas C^∞). Cependant, Bony [9] a remarqué que, si l'on continue à utiliser des champs de vecteurs pour de telles définitions, les classes ainsi définies deviennent trop grandes, lorsqu'on considère plus de deux hypersurfaces : on n'a plus de théorèmes de propagation, comme ceux que nous allons démontrer dans ce qui suit. Il faut alors recourir à des " champs singuliers ", et la généralisation au cadre analytique semble nettement plus délicate.

2. PROPAGATION DU CARACTERE CONORMAL ANALYTIQUE POUR LES SOLUTIONS D'EQUATIONS SEMI-LINEAIRES.

2.0. Forme générale des résultats.

On s'intéresse aux solutions d'une équation du type :

$$Pu = F(y, \partial_y^\alpha u)_{|\alpha| \leq m-1} \tag{2.0.1}$$

où P est un opérateur différentiel à coefficients analytiques, d'ordre m, et où F est une fonction analytique réelle de ses arguments.

On considère une solution u de (2.0.1) sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, a priori assez régulière, et on montre que le caractère conormal analytique de u se propage à travers toute surface S par rapport à laquelle P est de type principal réel, si toutefois l'hypersurface (les hypersurfaces) assujettie (s) à porter les singularités de u est (sont) caractéristiques (s) pour P.

Un tel résultat est local, mais on obtient un énoncé global sur des "domaines d'influence" pour P, obtenus par déformations de telles surfaces S. (Voir [4]).

2.1. Cas d'une hypersurface.

Théorème 2.1. : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit P un opérateur différentiel à coefficients analytiques réels sur Ω, d'ordre m. Soit S une hypersurface C^2 de Ω, et soit $y_o \in S$. On suppose réalisée la condition suivante :

(2.1.1) *Si $(y_o, \eta^o) \in T^*_{y_o}\Omega \setminus \{0\}$ vérifie $p(y_o, \eta^o) = 0$, alors :*

$$\{p, \varphi\}(y_o, \eta^o) \neq 0,$$

φ étant une équation de S et p le symbole principal de P.

Soit alors $s > \frac{n}{2}+m$, *et soit* $u \in H^s_{loc}(\Omega)$, *réelle, une solution de (2.0.1),* F *étant analytique réelle près de* $(y_o, \partial^\alpha u(y_o))_{|\alpha|\leq m-1}$.
On fait alors l'hypothèse suivante :

(H.1) *Il existe une hypersurface analytique* Σ, *caractéristique pour* P, *telle que* $u \in H^s_a(\Sigma)$ *sur l'ouvert* $\Omega^- = \{y \in \Omega, \varphi(y) < 0\}$.

Alors $u \in H^s_a(\Sigma)$ *près de* y_o.

2.1.1. Remarque : L'hypothèse (2.1.1) signifie que P est "de type principal réel" par rapport à S, i.e. :

i) S est non caractéristique pour P

ii) Les caractéristiques réelles de P sont simples et transverses à S en y_o.

Le reste du paragraphe 2.1 est consacré à la démonstration du théorème 2.1. D'après Bony [8], $u \in H^{s,\infty}(\Sigma)$ près de y_o. Il reste donc à obtenir des estimations du type (1.1.1).

2.1.2. Réduction à un modèle local.

Utilisant la remarque 1.1.4, on se ramène au cas où $y_o = 0$, et où, dans des coordonnées $(x,s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, on a : $\begin{cases} d\varphi(y_o) = (0;0,1) \\ \Sigma = \{(x,s), x_1 = 0\}. \end{cases}$

(Si $y_o \notin \Sigma$, le théorème 2.1 se réduit à celui de [5] !).

On procède ensuite comme dans [4] (paragraphe 2.2 et lemme 3.1 : remarquer qu'une telle manipulation ne change pas l'équation de Σ) pour se ramener à démontrer le résultat suivant :

Lemme 2.1.2 : *Soit* $\mathscr{C}$ *le cylindre* $\{|x| < a\} \times]0,T[$ *et soit* $u \in H^s(\overline{\mathscr{C}})$, $s > \frac{n}{2}+m$, *une solution réelle de (2.0.1), où* p *vérifie les conditions suivantes :* $\forall (x,t) \in \overline{\mathscr{C}}$:

i) $p(x,t;\ 0,1) \neq 0$.

ii) *pour tout* $\xi \neq 0$, *les racines réelles de l'équation en* τ :

$p(x,t;\xi,\tau) = 0$ *sont simples.*

iii) $p(0,x',t\ ;\ 1,0,0) = 0$

et où F *est analytique réelle de ses arguments.*

On suppose que u *est dans* $H^{s,\infty}(\{x_1 = 0\})|_{\bar{\mathscr{C}}}$ *et vérifie les estimations (1.1.1)' pour tout ouvert* ω *tel que* $\bar{\omega} \subset \{(x,t) \in \bar{\mathscr{C}}\ ,\ t < \eta\,|x|^2 + \eta_1\}$ *où* $\eta\ ,\ \eta_1 > 0$ *vérifient :*

$$T < \eta\, a^2 + \eta_1 . \tag{2.1.2}$$

Dans ces estimations, les Z_j *sont les champs considérés en a) de la remarque 1.1.4 :*

$$Z_1 = x_1\,\partial_1\quad,\quad Z_j = \partial_j\qquad 2 \leqslant j \leqslant n\ . \tag{2.1.3}$$

Alors u *vérifie (1.1.1)' pour tout* ω *tel que*

$$\bar{\omega} \subset \bar{\mathscr{C}}\ \cap \{t < T\}$$

Pour obtenir les estimations (1.1.1)', on va dériver l'équation (2.0.1) suivant les Z_j

$$P\,Z^{\beta} u = [P,Z^{\beta}]u + Z^{\beta} F \tag{2.1.4}$$

où
$$F = F(x,t,\partial^{\alpha}_{x,t}\,u)_{|\alpha| \leqslant m-1}$$

2.1.3. <u>L'inégalité a priori</u>.

Pour obtenir des estimations sur $Z^{\beta} u$ à partir d'estimations sur le premier membre de (2.1.4), nous utiliserons l'inégalité a priori suivante, démontrée dans [5] (Lemme 2.3).

Lemme 2.1.3 : Soit $P = P(x,t,D_x,D_t)$ un opérateur différentiel de la forme

$$P = D_t^m + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{|\alpha| \leq m-k} a_{\alpha,k}(x,t)\, D_x^\alpha D_t^k$$

à coefficients C^∞ sur $\overline{\mathcal{C}}$.

On suppose que le symbole principal p de P est réel, et que, pour tout $(x,t) \in \overline{\mathcal{C}}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, les racines réelles de l'équation en τ : $p(x,t,\xi,\tau) = 0$ sont simples.
Alors, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, il existe $C > 0$, $\gamma_o > 0$ tels que :
$\forall w \in H^{\mu+m-1}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ vérifiant $Pw \in H^\mu(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ et $\operatorname{supp} w \subset \{|x| < a\} \times]0,T[$, $\forall \gamma \geq \gamma_o$:

$$\sum_{|\alpha| \leq m-1} \gamma \, \|(T-t)^{\gamma-1} \partial^\alpha w\|_\mu \leq C \, \|(T-t)^\gamma P w\|_\mu + C \sum_{|\alpha| \leq m-2} \gamma^{m-|\alpha|} \, \|(T-t)^{\gamma-(m-|\alpha|)} \partial^\alpha w\|_\mu \tag{2.1.5}$$

où $\| \ \|_\mu$ désigne la norme $H^\mu(\mathbb{R}^n \times [0,T])$.

2.1.4. Estimation sur les commutateurs.

Le second membre de (2.1.4) nous invite à estimer la norme d'opérateurs du type $[A, Z^\beta]$, où A est un opérateur différentiel à coefficients analytiques.

Commençons par une remarque formelle :
Si $Z_1, \ldots, Z_N, A$ sont des éléments d'une algèbre associative, les Z_j commutant deux à deux, on a une "formule de Leibniz" :

$$[Z^\beta, A] = \sum_{0 < \gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} (\mathrm{ad}\, Z)^\gamma \, A \, Z^{\beta-\gamma} , \tag{2.1.6}$$

où $(\mathrm{ad}\, Z)^\gamma = (\mathrm{ad}\, Z_1)^{\gamma_1} \ldots (\mathrm{ad}\, Z_N)^{\gamma_N}$; on obtient cette formule en utilisant le fait que $\mathrm{ad}\, A$ est une dérivation de l'algèbre considérée.

Dans le cas de l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients analytiques, les Z_j étant cette fois des champs de vecteurs, les opérateurs $(a\,d\,Z)^{\gamma} A$ sont d'ordre inférieur ou égal à celui de A, et nous allons estimer leurs coefficients :

Lemme 2.1.4 : Soit A un opérateur différentiel à coefficients analytiques sur $\overline{\omega}$, et soient $Z_1,\dots,Z_N$ comme ci-dessus.

Alors, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, il existe une constante C positive telle que : pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^N$, pour tout coefficient a_γ de $(a\,d\,Z)^{\gamma} A$,

$$\|a_\gamma\|_{\mu,\overline{\omega}} \leqslant C^{|\gamma|+1}\,\gamma! \,. \tag{2.1.7}$$

Preuve : Il suffit évidemment de prouver (2.1.7) lorsque ω est la trace sur $\mathbb{R}^n$ d'un polydisque $D(x_o,R_o)$, avec $x_o \in \mathbb{R}^n$.

Quitte à restreindre r_o, on peut supposer que A et les Z_j sont à coefficients holomorphes au voisinage du disque fermé $\overline{D(x_o,R_o)}$, avec $1 > R_o > r_o$.

Si B est un opérateur différentiel à coefficients holomorphes près de $\overline{D(x_o,r)}$, on note $\|B\|_r$ le maximum des modules des coefficients de B sur $D(x_o,r)$. Si B est d'ordre ℓ, et si C est un autre opérateur à coefficients holomorphes près de $\overline{D(x_o,\rho)}$ avec $1>\rho>r$, on a, d'après les inégalités de Cauchy :

$$\|BC\|_r \leqslant K_1 \frac{\|B\|_r \; \|C\|_\rho}{(\rho-r)^{\ell}} \tag{2.1.8}$$

K_1 étant une constante ne dépendant que des ordres de B et de C.

En conséquence, pour r, ρ tels que $R_o > \rho > r$, on a :

$$\|[Z_j,B]\|_r \leqslant K_2 \left[\frac{\|B\|_\rho}{\rho-r} + \|B\|_r\right] \tag{2.1.9}$$

où K_2 ne dépend que de ℓ et des Z_j.

Par récurrence sur p, montrons que :

$$\forall \gamma \in \mathbb{N}^n \ , \quad |\gamma| = p \quad , \qquad \forall r \in]0,R_o[$$

$$\| (a\,d\,Z)^\gamma A \|_r \leqslant C_o \left(\frac{C_1 p}{R_o - r} \right)^p \tag{2.1.10}$$

Pour $p = 0$, (2.1.10) est vraie dès que $C_o \geqslant \|A\|_{R_o}$.

Voyons comment passer du rang p au rang $p+1$; on applique (2.1.9) avec $B = (a\,d\,Z)^\gamma A$:

$$\| (a\,d\,Z_j)(a\,d\,Z)^\gamma A \|_r \leqslant K_2\, C_o (C_1\, p)^p \left\{ \frac{1}{(R_o - \rho)^p (\rho - r)} + \frac{1}{(R_o - r)^p} \right\} . \tag{2.1.11}$$

Choisissant $\rho = \dfrac{p\,R_o + 1}{p+1}$, on obtient, tenant compte de $R_o < 1$:

$$\| (a\,d\,Z_j)(a\,d\,Z)^\gamma A \|_r \leqslant 2\,K_2\,C_o\,C_1^p \, \frac{(p+1)^{p+1}}{(R_o - r)^{p+1}} \ , \tag{2.1.12}$$

qui entraîne (2.1.10) au rang $p+1$, sous réserves que $C_1 \geqslant 2\,K_2$.
En appliquant (2.1.10) pour un certain $r \in]r_o, R_o[$ et en utilisant les inégalités de Cauchy, on obtient (2.1.7).

q.e.d.

En associant la formule (2.1.6) au lemme 2.1.4, on obtient le résultat suivant, que nous utiliserons plus loin :

Corollaire 2.1.4 : Sous les hypothèses du lemme 2.1.4, pour tout réel t *, il existe une constante* C *positive telle que :*
pour tout $g \in C^\infty(\overline{\omega})$ *, pour tout* $u \in H^{t+\ell,\infty}$ *relativement à* $Z_1,\dots,Z_N$ *près de* $\overline{\omega}$*, pour tout* $\beta \in \mathbb{N}^n$ *:*

$$\| g[A, Z^\beta] u \|_{t,\overline{\omega}} \leqslant C \sum_{0<\gamma\leqslant\beta} \binom{\beta}{\gamma} C^{|\gamma|}\, \gamma! \sup_{|\alpha|\leqslant \ell} \| g\, \partial^\alpha Z^{\beta-\gamma} u \|_{t,\overline{\omega}} \tag{2.1.13}$$

où ℓ *est l'ordre de* A *.*

2.1.5. Choix des semi-normes.

On estime le terme $Z^\beta F$ figurant dans (2.1.4) à l'aide de la proposition (1.3.2).

Posons pour cela $\mu = s - m + 1 > \frac{n}{2}$. La forme de l'inégalité a priori (2.1.5) suggère de prendre pour fonction f :

$$f(x,t) = (T-t)^{\lambda} \quad ,$$

où $\lambda \geqslant \mu$ est à choisir.

Si $T < 1$, f vérifie bien (1.3.4) et on peut appliquer la proposition (1.3.2) sur $\omega = \mathscr{C}$.

On définit les semi-normes $|\cdot|_p$ et $[\cdot]_p$ sur $\mathscr{C}$ avec μ au lieu de s, avec le choix de f ci-dessus, et avec $\varepsilon > 0$ à choisir.

On définit également les quantités suivantes :

$$\phi_p(u) = \sup_{\substack{|\alpha| \leqslant m-1 \\ |\beta| = p}} \| (T-t)^{\lambda(p-1)} \partial^{\alpha} Z^{\beta} u \|_{\mu}$$

$$\psi_p(u) = \sup_{1 \leqslant q \leqslant p} \frac{\phi_q(u)}{M_q} .$$

Notre objectif est de prouver qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$ tels que, si u est la solution étudiée :

(2.1.14) $$\sup_{p \geqslant 1} \psi_p(u) < +\infty .$$

Il est clair que le lemme 2.1.2 sera alors prouvé, et donc aussi le théorème 2.1.

Enonçons un corollaire de la proposition 1.3.2 :

<u>Lemme</u> <u>2.1.5</u> : *Il existe* $\varepsilon_o > 0$, $\delta > 0$ *et* $L > 0$ *tels que pout tout* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$, *pour tout* $\lambda \geqslant \mu$, *pour tout* $p \geqslant 1$, *la condition :*

(2.1.15) $$\varepsilon \psi_p(u) \leqslant \delta$$

entraîne :

(2.1.16) $$\left| F(t,x,\partial^{\alpha} u)_{|\alpha| \leqslant m-1} \right|_{p+1} \leqslant L \left(\phi_{p+1}(u) + M_{p+1}(1 + \psi_p(u)) \right) .$$

Preuve : Nous notons w la fonction à valeurs vectorielles suivante :

$$w = (t,x,\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leqslant m-1} .$$

Alors $w \in H^{\mu,\infty}(\Sigma)_{|\bar{\mathscr{C}}}$, et on a, pour tout $p \geqslant 1$:

$$|w|_{p+1} \leqslant \sup_{|\alpha|\leqslant m-1} \sup_{|\beta|=p+1} \|(T-t)^{\lambda p} Z^\beta \partial^\alpha u\|_\mu + C_o C^{p+1}(p+1)!$$

$$\leqslant \phi_{p+1}(u) + \sup_{\substack{|\alpha|\leqslant m-1\\|\beta|=p+1}} \|(T-t)^{\lambda p}[Z^\beta,\partial^\alpha]u\|_\mu + C_o C^{p+1}(p+1)!$$

en appliquant le corollaire 2.1.4 à chaque ∂^α, $|\alpha| \leqslant m-1$, on en déduit qu'il existe $\varepsilon_o > 0$ et $C_1 > 0$ tels que :

$$\forall \lambda \geqslant 1 \quad , \quad \forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_o[\ :$$

$$|w|_{p+1} \leqslant \phi_{p+1}(u) + C_1 \sum_{0<\gamma\leqslant\beta} \binom{\beta}{\gamma} M_{|\gamma|} M_{|\beta-\gamma|} (\psi_p(u)+1) + C_1 M_{p+1}$$

soit $|w|_{p+1} \leqslant \phi_{p+1}(u) + C_1 M_{p+1}(1+\psi_p(u))$, d'après la relation (1.3.2) et de même :

$$[w]_p \leqslant C_2(1+\psi_p(u)) \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon \in]0,\varepsilon_o[\ .$$

Compte tenu de ces estimations, la proposition 1.3.2 iii) donne (2.1.16) sous l'hypothèse (2.1.15).

q.e.d.

2.1.6. Dérivation de l'équation. (sous les hypothèses du lemme 2.1.2)

Lemme 2.1.6. : Il existe $\varepsilon_o > 0$, $\delta > 0$, $L > 0$ tels que : pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_o]$, pour tout $\lambda \geqslant 1$, pour tout $p \geqslant 1$, la condition (2.1.15) entraîne :

$$(2.1.17) \qquad \sup_{|\beta|=p+1} \|(T-t)^{\lambda p} p Z^\beta u\|_\mu \leqslant L\, p\Big[\phi_{p+1}(u) + M_{p+1}(1+\psi_p(u))\Big] .$$

Preuve : On majore le membre de gauche grâce à la relation (2.1.4). La contribution de $Z^\beta F$ est contrôlée grâce au lemme 2.1.5.

D'autre part, la condition iii) du lemme 2.1.2 entraîne qu'il existe des opérateurs différentiels d'ordre $m-1$, $A_o,\dots,A_n$, à coefficients analytiques, tels que :

$$P = \sum_{j=1}^{n} A_j Z_j + A_o \,. \tag{2.1.18}$$

Mais alors $[P,Z^\beta] = \sum_{j=1}^{n} [A_j,Z^\beta]Z_j + [A_o,Z^\beta]$.

On applique le corollaire (2.1.4)' à chaque A_j : quitte à diminuer ε_o, on a alors :

$$\begin{aligned} \|(T-t)^{\lambda p}[P,Z^\beta]u\|_\mu &< C_1 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta\geq\gamma>0} \binom{\beta}{\gamma} M_{|\gamma|} \sup_{|\alpha|\leq m-1} \|(T-t)^{\lambda p}\partial^\alpha Z^{\beta-\gamma} Z_j u\|_\mu \\ &+ C_1 \sum_{\beta\geq\gamma>0} \binom{\beta}{\gamma} M_{|\gamma|} \sup_{|\alpha|\leq m-1} \|(T-t)^{\lambda p}\partial^\alpha Z^{\beta-\gamma} u\|_\mu \,. \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

Le second terme du membre de droite de (2.1.19) se majore par :

$$C_1 \sum_{0<\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} M_{|\gamma|} M_{|\beta-\gamma|} (1+\psi_p(u)) \tag{2.1.20}$$

soit par $C_2 M_{p+1}\psi_p(u)$ d'après (1.3.2).

Dans le premier terme, on isole les termes correspondant à $|\gamma| = 1$; on obtient alors pour majorant

$$C_2\Big[(p+1)\,\phi_{p+1}(u) + \sum_{\substack{\gamma\leq\beta \\ |\gamma|\geq 2}} \binom{\beta}{\gamma} M_{|\gamma|} M_{|\beta-\gamma|+1} (1+\psi_p(u))\Big] \tag{2.1.21}$$

qui, d'après (1.3.2)', est majoré par

$$C_3\, p\Big(\phi_{p+1}(u) + M_{p+1}(1+\phi_p(u))\Big) \,. \tag{2.1.22}$$

En reportant dans (2.1.19), on obtient finalement l'inégalité annoncée (2.1.17).

q.e.d.

2.1.7. Formule de récurrence.

Lemme 2.1.7 : Sous les hypothèses du lemme 2.1.2, il existe $\varepsilon_o > 0$, $\lambda_o > 0$, $\delta > 0$, $L > 0$, *tels que, pour tous* $\varepsilon \in]0,\varepsilon_o]$, $\lambda \geqslant \lambda_o$, $p \geqslant 1$, *les conditions (2.1.15) et :* $\varepsilon\lambda \leqslant \frac{1}{2}$ *entraînent :*

$$\phi_{p+1}(u) \leqslant L\, M_{p+1}\left(1 + \psi_p(u)\left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\lambda\right)\right) . \tag{2.1.23}$$

Preuve : C'est essentiellement celle du lemme 3.3 de [5].

a) On introduit une suite de troncatures $\chi_N \in C^\infty(\overline{\mathscr{C}})$ telles que :

$$\begin{cases} \chi_N(x,t) = 1 & \text{si} \quad t \leqslant \eta\,|x|^2 + \eta_1 - \eta_2 \\ \chi_N(x,t) = 0 & \text{si} \quad t \geqslant \eta\,|x|^2 + \eta_1 - \frac{\eta_2}{2} \end{cases} \tag{2.1.24}$$

$\eta_2 > 0$ étant choisi de telle sorte que :

$$\eta_2 < \eta_1 \quad , \qquad T < \eta\, a^2 + \eta_1 - \eta_2 \tag{2.1.25}$$

les χ_N vérifiant de plus :

$$\sup_{(x,t)\in\overline{\mathscr{C}}} |\partial^\alpha \chi_N(x,t)| \leqslant (C\,N)^{|\alpha|} , \qquad \text{pour} \qquad |\alpha| \leqslant N . \tag{2.1.26}$$

Remarquons que les hypothèses du lemme 2.1.2 entraînent que :

$$u \in H^s_a(\Sigma)\big|_{\mathscr{C}\,\cap\,\operatorname{supp}\chi_N} .$$

b) Pour $p \geqslant 1$, choisissons $N = [s] + p + 3 = m + [\mu] + p + 2$. Alors, en utilisant la formule de Leibniz et (2.1.26), on obtient :

$$\text{Si} \quad k = p + 2 - r , \quad 0 \leqslant r \leqslant m \qquad \phi_k(\chi_N u) \leqslant C_1\, \varepsilon_1^{1-k}\, m_k . \tag{2.1.27}$$

En particulier, écrivant $P = \sum_{j=1}^{n} A_j Z_j + A_o$, on en déduit : pour $|\beta| = p + 1$,

$$\| (T-t)^{\lambda p} \, p Z^{\beta} \chi_N u \|_{\mu} \leqslant C_2 \, \varepsilon_1^{-p-1} \, m_{p+2} \; . \tag{2.1.28}$$

c) Utilisation de l'inégalité a priori. On pose $v = u - \chi_N u$. Compte tenu de (2.1.24), (2.1.25), v est à support dans $\{|x| < a\} \times]0,T]$, on peut donc appliquer le lemme 2.13 à $w = Z^{\beta} v$, pour $|\beta| = p+1$.

Sous réserves que $\lambda \geqslant \lambda_1$, l'inégalité (2.1.5) donne :

$$\lambda p \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \| (T-t)^{\lambda p} \partial^{\alpha} Z^{\beta} v \|_{\mu} \leqslant C_3 \Big(A(v) + B(v) \Big) \tag{2.1.29}$$

où :

$$A(v) = \| (T-t)^{\lambda p} \, p Z^{\beta} v \|_{\mu} \leqslant L_1 \, p \Big(\phi_{p+1}(u) + M_{p+1}(1 + \psi_p(u)) \Big) \tag{2.1.30}$$

compte tenu du lemme 2.1.7 et de (2.1.28), quitte à diminuer ε_o.

$$B(v) = \sum_{|\alpha| \leqslant m-2} (\lambda p)^{m-|\alpha|} \, \| (T-t)^{\lambda p-(m-|\alpha|)} \, \partial^{\alpha} Z^{\beta} v \|_{\mu} \; . \tag{2.1.31}$$

Maintenant on se rappelle que $Z_1 = x_1 \partial_1$, $Z_j = \partial_j$ pour $j \geqslant 2$. On peut donc " convertir " un certain nombre de Z en ∂, jusqu'à ce que l'on obtienne $m-1$ dérivées ∂.

Ainsi, pour $m - |\alpha| \geqslant 2$:

$$\| (T-t)^{\lambda p-(m-|\alpha|)} \, \partial^{\alpha} Z^{\beta} v \|_{\mu} \leqslant C_4 \, \phi_{p+2-(m-|\alpha|)}(v) \tag{2.1.32}$$

(sous réserves que $\lambda p - (m-|\alpha|) \geqslant \lambda(p+1-(m-|\alpha|))$, ce qui est vérifié dès que $\lambda \geqslant 2$).

Soit encore : pour $m - |\alpha| \geqslant 2$

$$\| (T-t)^{\lambda p- m-|\alpha|)} \, \partial^{\alpha} Z^{\beta} v \|_{\mu} \leqslant C_5 \, M_{p+2-(m-|\alpha|)}(1 + \psi_p(u)) \tag{2.1.33}$$

en tenant compte de (2.1.27).

Revenant à (2.1.31) :

$$B(v) \leqslant C_5 \sum_{|\alpha| \leqslant m-2} (\lambda p)^{m-|\alpha|} \, M_{p+2-(m-|\alpha|)}(1 + \psi_p(u)) \; .$$

Or $p^{m-|\alpha|}\, m_{p+2-(m-|\alpha|)} \leq C_6\, m_{p+2}$, donc :

$$B(v) \leq C_7\, m_{p+2}(1+\psi_p(u))\, \varepsilon^{-p-1} \sum_{|\alpha|\leq m-2} (\lambda\varepsilon)^{m-|\alpha|}$$

$$\leq C_7\, \varepsilon\lambda^2 p\, M_{p+1}\ (1+\psi_p(u)) \quad \text{si} \quad \varepsilon\lambda \leq \frac{1}{2}\ .$$

Reportant dans (2.1.29) en tenant compte de (2.1.30), on obtient, en utilisant à nouveau (2.1.27) :

(2.1.34) $$\lambda p\, \phi_{p+1}(u) \leq L_2\, p\Big(\phi_{p+1}(u) + M_{p+1}(1+\psi_p(u))(1+\varepsilon\lambda^2) + \lambda M_{p+1}\Big)$$

ce qui, après division par λp, donne (2.1.23) si λ est assez grand. q.e.d.

2.1.8. Conclusion - choix des paramètres.

Soient ε_o, λ_o, δ, L les constantes mises en évidence au lemme 2.1.7.

On choisit $H > 0$, tel que $H \geq \psi_1(u)$ (remarquer que $\psi_1(u)$ ne dépend ni de ε, ni de λ) et $H \geq 2L$.

Fixons $\lambda \geq \lambda_o$, tel que $\lambda \geq 4L$. Puis fixons $\varepsilon > 0$, tel que $\varepsilon H \leq \delta$, $\varepsilon\lambda \leq \frac{1}{2}$, et

$$\varepsilon\lambda \leq \frac{1}{4L}\ .$$

Supposons $\psi_p(u) \leq H$ pour un certain p. Alors, d'après le lemme 2.1.7, on a :

$$\frac{\phi_{p+1}(u)}{M_{p+1}} \leq L\left(1 + H\left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\lambda\right)\right)$$

$$\leq L + \frac{H}{2} \qquad \text{d'après le choix de } \lambda \text{ et } \varepsilon$$

$$\leq H \qquad \text{d'après le choix de } H\ .$$

Donc $\psi_{p+1}(u) = \sup\left(\dfrac{\phi_{p+1}(u)}{M_{p+1}}\ ,\ \psi_p(u)\right) \leq H.$

Par récurrence, on a donc :

$$\forall\, p \geq 1 \quad , \quad \psi_p(u) \leq H \ ,$$

c'est-à-dire (2.1.14), ce qui achève la démonstration du théorème 2.1, comme annoncé au paragraphe 2.1.5.

2.2. Cas de deux hypersurfaces.

Théorème 2.2 : Soient Ω , P , S , y_o , s , u , F *satisfaisant les hypothèses du théorème 2.1, où l'on a remplacé (H1) par :*

(H2) Il existe deux hypersurfaces analytiques Σ_1 *et* Σ_2, *caractéristiques pour* P, *telles que :*

i) Σ_1 *et* Σ_2 *se coupent transversalement suivant une sous-variété* Δ, *de codimension 2, contenue dans*

$$\overline{\Omega^+} = \{y \in \Omega \ , \ \varphi(y) \geq 0\} \ .$$

ii) Il n'existe pas d'autre hypersurface caractéristique pour P *passant par* Δ.

iii) $u \in H^s_a(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ *sur l'ouvert* Ω^-.

Alors $u \in H^s_a(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ *près de* y_o.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 2.2.

Remarque 2.2.1 :

a) Le théorème 2.2 n'a d'intérêt par rapport au théorème 2.1 que si $y_o \in \Delta$ (compte-tenu de la remarque 1.1.3).

b) D'après Bony [8], on a déjà $u \in H^{s,\infty}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ près de y_o.

c) Pour démontrer le théorème 2.2, on suit la même démarche que précédemment. Il est à noter qu'il existe deux systèmes de coordonnées partiellement adaptés au problème :

- D'une part, le système (x,t) mis en évidence au Lemme 2.1.2, p vérifiant toujours les conditions i) et ii) du lemme 2.1.2.

- D'autre part, un système $(y_1,\dots,y_n)$ où Σ_1 et Σ_2 seraient respectivement données par les équations $y_1=0$ et $y_2=0$.

La condition $\Delta\subset\{\varphi\geqslant 0\}$ interdit évidemment de trouver un système de coordonnées du premier type où Σ_1 et Σ_2 seraient données par $x_1=0$ et $x_2=0$.

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme fondamental, qui donne immédiatement le théorème 2.2.

Lemme 2.2.2 : Soit $\mathscr{C}$ le cylindre $\{|x|<a\}\times]0,T[$, et soit $\mathscr{D}$ l'image de $\mathscr{C}$ par un certain difféomorphisme analytique :

$$\Psi : (x,t)\to(y_1,\dots,y_n)$$

défini au voisinage de $\overline{\mathscr{C}}$.
On suppose que $0\in\mathscr{D}$ et que $\Psi^{-1}(0)=(0,\eta_1)$, où $\eta_1>0$.
Soit $u\in H^s(\overline{\mathscr{D}})$, $s>\frac{n}{2}+m$, une solution de (2.0.1), le symbole principal p de P vérifiant les conditions suivantes :

a) Si $\tilde{p}$ est le transporté de p par Ψ^{-1}, $\tilde{p}$ vérifie les conditions i) et ii) du lemme 2.1.2.

b) Notons $\Sigma_1=\{y\in\mathscr{D}, y_1=0\}$, $\Sigma_2=\{y\in\mathscr{D}, y_2=0\}$, $\Delta=\Sigma_1\cap\Sigma_2$.

b1) Σ_1 et Σ_2 sont caractéristiques pour p.

b2) Il n'existe pas d'autre hypersurface caractéristique pour p passant par Δ.

b3) $\Delta\subset\{y\in\mathscr{D}, t(y)\geqslant\eta_1\}$.

On suppose que $u\in H^{s,\infty}(\Sigma_1\cup\Sigma_2)_{|\overline{\mathscr{D}}}$ et vérifie les estimations (1.1.1)' pour tout ouvert ω tel que

$$\overline{\omega} \subset \{y \in \overline{\mathcal{D}} \ , \ t(y) < \eta \ |x(y)|^2 + \eta_1\}$$

où l'on a noté $\psi^{-1}(y) = (x(y) \ , \ t(y))$, η , η_1 , T *vérifiant (2.1.2), et les* Z_j *étant les champs considérés en b) de la remarque 1.1.4 :*

$$(2.2.1) \qquad Z_1 = y_1 \, \partial_1 \ , \ Z_2 = y_2 \, \partial_2 \quad , \quad Z_j = \partial_j \quad , \quad 3 \leqslant j \leqslant n \ .$$

Alors u *vérifie (1.1.1)' pour tout* ω *tel que :*

$$\overline{\omega} \subset \overline{\mathcal{D}} \cap \{y \ , \ t(y) < T\} \ .$$

2.2.3. Conséquence des hypothèses sur la forme de l'opérateur.

Lemme 2.2.3 : Sous les hypothèses du lemme 2.2.2, il existe des opérateurs A_o , A_1 , ... , A_n , *à coefficients analytiques sur* $\overline{\mathcal{D}}$, *d'ordre* $m-1$, *et un opérateur* K, *à coefficients analytiques sur* $\overline{\mathcal{D}}$, *d'ordre* $m-2$, *elliptique, (quitte à restreindre* $\mathcal{D}$ *) tels que :*

$$(2.2.2) \qquad P = \sum_{j=1}^{n} A_j \, Z_j + A_o + K \, \partial_1 \, \partial_2 \ .$$

Preuve : D'après la condition b1) et la formule de Taylor, on peut écrire : (notant $y = (y_1, y_2, y'')$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta'')$)

$$(2.2.3) \qquad p(y,\zeta) = \sum_{j=1}^{n} a_j(y,\zeta) < \zeta \ , \ Z_j(y) > + \ \zeta_1 \, \zeta_2 \ k(y'', \zeta_1, \zeta_2)$$

où les a_j sont polynômiales de degré $m-1$ en ζ , et où k est polynômiale $(m-2)$-homogène en (ζ_1, ζ_2) , la dépendance en y étant analytique.
Nous allons prouver que $k(0,\zeta_1,\zeta_2) = 0$ entraîne $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$. On en déduira alors que $m-2$ est pair, que $k(y'',\zeta_1,\zeta_2)$ est de signe constant $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ pour y'' près de 0, et il suffira de remplacer $k(y'',\zeta_1,\zeta_2)$ par $k(y'',\zeta_1,\zeta_2) + \varepsilon \ |\zeta''|^{m-2}$ (en modifiant les $a_j(y,\zeta)$ pour $j \geqslant 3$) , pour obtenir un symbole $k(y,\zeta)$ elliptique comme annoncé.

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $(\zeta_1^o,\zeta_2^o) \neq (0,0)$ tel que :

(2.2.4) $$k(0,\zeta_1^o,\zeta_2^o) = 0 .$$

Notons $\zeta^o = (\zeta_1^o,\zeta_2^o,0)$. Alors, par (2.2.3) et (2.2.4) :

$$p(0,\zeta^o) = 0 .$$

Mais la condition a) du lemme 2.2.2 s'écrit : $\forall \zeta \neq 0$, $p(y,\zeta) = 0 \Rightarrow \{p,t\}(y,\zeta) \neq 0$.
Ainsi :

(2.2.5) $$\{p,t\}(0,\zeta^o) \neq 0 .$$

Mais la condition b3) entraîne que :

$$d_{y''} t\,(0) = 0 \quad , \text{ et donc que :}$$

(2.2.6) $$t(y) = \eta_1 + y_1 t_1 + y_2 t_2 + r(y) \ ,$$

où $t_j = \frac{\partial t}{\partial y_j}(0)$, $r(0) = d_y r(0) = 0$, avec $(t_1,t_2) \neq (0,0)$ puisque t est une fonction coordonnée.

Injectons (2.2.6) dans (2.2.5) :

$$\begin{aligned} 0 \neq \{p,t\}(0,\zeta^o) &= t_1 \frac{\partial p}{\partial \zeta_1}(0,\zeta^o) + t_2 \frac{\partial p}{\partial \zeta_2}(0,\zeta^o) \\ &= \zeta_1^o\,\zeta_2^o \left(t_1 \frac{\partial k}{\partial \zeta_1}(0,\zeta_1^o,\zeta_2^o) + t_2 \frac{\partial k}{\partial \zeta_2}(0,\zeta_1^o,\zeta_2^o) \right) . \end{aligned}$$

On en déduit :

(2.2.7) $$\zeta_1^o \neq 0 \quad , \quad \zeta_2^o \neq 0$$

(2.2.8) $$\exists\, i \in \{1,2\} \quad , \quad \frac{\partial k}{\partial \zeta_i}(0,\zeta_1^o,\zeta_2^o) \neq 0 .$$

Considérons alors : $V = \{(y,\zeta) \in T^*\mathcal{D} \setminus 0 \ , \ y_1 = y_2 = 0 \ , \ \zeta'' = 0 \ , \ k(y'',\zeta_1,\zeta_2) = 0\}$.
Par hypothèse $(0,\zeta^o) \in V$, et d'après (2.2.8) V est sous-variété de $T^*\mathcal{D}$ de dimension $n-1$, qui se projette localement sur Δ .

D'autre part, V est une sous-variété conique du conormal à Δ, donc la 1-forme canonique s'annule sur V.

Enfin $V \subset \{(y,\zeta) \in T^*\mathcal{D} \setminus 0\ ,\ p(y,\zeta)=0\}$, et, toujours d'après (2.2.8), l'hamiltonien H_p de p est transverse à V (localement). On peut donc tisser à l'aide des courbes intégrales de H_p une lagrangienne conique Λ contenant V et contenue dans $\{p=0\}$.

La projection de Λ sur $\mathbb{R}^n$ est alors (toujours d'après (2.2.8)) une hyper-surface Σ, caractéristique pour p, et qui contient Δ.

Mais $(0,\zeta^o) \in \Lambda = N^*\Sigma$, et (2.2.7) montre que $\Sigma \neq \Sigma_1$ et $\Sigma \neq \Sigma_2$, ce qui contredit la condition b2).

q.e.d.

Nous reprenons les mêmes semi-normes qu'en 2.1.5, mais pour des fonctions u définies sur $\bar{\mathcal{D}}$ et non sur $\bar{\mathcal{E}}$. En d'autres termes

$$f(y) = (T - t(y))^{\lambda} \quad , \quad \text{où } \lambda \geqslant 1 \text{ est à choisir.}$$

Notre objectif est à nouveau de montrer (2.1.14).

Pour cela, on dispose toujours du lemme 2.1.3, d'après la condition a) du lemme 2.2.2. On "transporte", bien sûr, cette inégalité a priori à des fonctions sur $\bar{\mathcal{D}}$. Le c) de la démonstration du lemme 2.1.7 montre que l'on est ramené à prouver le :

<u>Lemme 2.2.4</u> : Sous les hypothèses du lemme 2.2.2, il existe $\varepsilon_o > 0$, $\lambda_o > 0$, $\delta > 0$, $L > 0$, *tels que : pour tous* $\varepsilon \in]0,\varepsilon_o]$, $\lambda \geqslant \lambda_o$, $p \geqslant 1$, *les conditions* (2.1.5) *et* $\varepsilon\lambda \leqslant \frac{1}{2}$ *impliquent :*

$$(2.2.9) \qquad \| (T-t)^{\lambda p}\, P Z^{\beta} v \|_{\mu} \leqslant Lp \left(\phi_{p+1}(u) + M_{p+1}(1+\psi_p(u))(1+\varepsilon\lambda^2) \right)$$

où $|\beta| = p+1$, $v = u - \chi_N u$, $N = m + [\mu] + p + 2$, (χ_N) *étant la suite de troncatures introduites au a) de la démonstration du lemme 2.1.7, transportées au domaine* $\mathcal{D}$.

Remarque 2.2.5 : Les estimations (2.1.27) sont bien sûr encore vraies, en revanche (2.1.28) pose problème, car P fait intervenir trop de dérivées ∂ (il y en a m dans le terme $K\,\partial_1\,\partial_2$) , et il faudrait donc avoir a priori des estimations H^{s+1} pour les $Z^\beta u$. C'est pourquoi on a préféré le lemme 2.2.4 à une réécriture du lemme 2.1.6. Comme nous allons le voir, toute la difficulté du théorème 2.2 par rapport au théorème 2.1 est dans cette perte de dérivées Z , dûe à la présence du terme $K\,\partial_1\,\partial_2$ dans (2.2.2).

Preuve du lemme 2.2.4 : On écrit :

(2.2.10) $$P\,Z^\beta v = [K\,\partial_1\,\partial_2, Z^\beta]v + [Q, Z^\beta]v + Z^\beta\,P\,v$$

où $Q = \sum_{j=1}^{n} A_j\,Z_j + A_o$, conformément au lemme 2.2.3.

Nous majorerons séparément la contribution dans (2.2.9) de chacun des trois termes du membre de droite de (2.2.10).

Notons avant tout que les estimations (2.1.27) se généralisent de la façon suivante :

(2.2.11) $$\text{Pour tout } \ q \leqslant p+2 \ , \ \phi_q(X_N u) \leqslant C_o(C_1 p)^{q+m+\mu-1} \ .$$

a) Compte tenu de la forme de Q, la démonstration du lemme 2.1.6 associée aux estimations (2.2.11) donne, pour ε_o assez petit :

(2.2.12) $$\| (T-t)^{\lambda p}\,[Q, Z^\beta]v \|_\mu \leqslant L_1\,p\Big(\phi_{p+1}(u) + M_{p+1}(1+\psi_p(u))\Big) \ .$$

De la même manière, on montre que, si $|\gamma| = p$:

(2.2.13) $$\| (T-t)^{\lambda p}\,Z^\gamma\,Q\,v \|_\mu \leqslant L_1\Big(\phi_{p+1}(u) + M_{p+1}(1+\psi_p(u))\Big)$$

et, si $|\gamma| = q \leqslant p-1$:

(2.2.14) $$\| (T-t)^{\lambda q}\,Z^\gamma\,Q\,v \|_\mu \leqslant L_1\Big[M_{q+1}(1+\psi_p(u)) + (C_2 p)^{q+m+\mu}\Big]$$

(2.2.13) et (2.2.14) nous seront utiles dans la suite de la démonstration.

b) On a :

$$Z^\beta P v = Z^\beta (1-\chi_N) F - Z^\beta [P,\chi_N]\, u \ .$$

Cette fois $[P,\chi_N]$ est d'ordre $m-1$, et ses coefficients sont majorés grâce à (2.1.26), et à support dans $t \leqslant \eta\,|x|^2 + \eta_1 - \frac{\eta_2}{2}$:

$$\|\, (T-t)^{\lambda p} Z^\beta [P,\chi_N] u \,\|_\mu \leqslant L_2\, M_{p+1} \qquad \text{pour } \varepsilon_o \text{ assez petit .}$$

Utilisant le lemme 2.1.5 et (2.1.26) :

$$\|\, (T-t)^{\lambda p} Z^\beta (1-\chi_N) F \,\|_\mu \leqslant L_2 \Big(\phi_{p+1}(u) + M_{p+1} (1+\psi_p(u)) \Big) \ .$$

On obtient finalement :

$$(2.2.15) \qquad \|\, (T-t)^{\lambda p} Z^\beta P v \,\|_\mu \leqslant L_3 \Big(\phi_{p+1}(u) + M_{p+1} (1+\psi_p(u)) \Big) \ .$$

Et, de même : si $|\gamma| = q \leqslant p$

$$(2.2.16) \qquad \|\, (T-t)^{\lambda(q-1)} Z^\gamma P v \,\|_\mu \leqslant L_3 \Big(M_q (1+\psi_p(u)) + (C_3 p)^{q+m+\mu} \Big) .$$

c) Il reste à estimer le premier terme du second membre de (2.2.10) :

$$[K \partial_1 \partial_2 , Z^\beta] = K\, [\partial_1 \partial_2 , Z^\beta] + [K , Z^\beta]\, \partial_1 \partial_2 \ .$$

Mais, puisque $Z_1 = y_1 \partial_1$, $Z_2 = y_2 \partial_2$, $Z_j = \partial_j$ pour $j \geqslant 3$, on voit facilement que :

$$[\partial_1 \partial_2 , Z^\beta] = \sum_{\gamma<\beta} a_{\beta,\gamma}\, Z^\gamma \partial_1 \partial_2 \ , \qquad \text{avec :}$$

$$|a_{\beta,\gamma}| \leqslant C_4 \binom{\beta}{\gamma} \ .$$

Dès lors

$$\| (T-t)^{\lambda p} [K\partial_1 \partial_2, Z^{\beta}] v \|_{\mu} \leqslant C_4 \sum_{\gamma<\beta} \binom{\beta}{\gamma} \| (T-t)^{\lambda p} Z^{\gamma} K \partial_1 \partial_2 v \|_{\mu}$$

$$(2.2.17) \qquad + C_4 \sum_{\gamma\leqslant\beta} \binom{\beta}{\gamma} \| (T-t)^{\lambda p} [K, Z^{\gamma}] \partial_1 \partial_2 v \|_{\mu}$$

$$= A(v) + B(v) .$$

Se rappelant que $K\partial_1 \partial_2 v = Pv - Qv$, on a facilement, en utilisant (2.2.13), (2.2.14) et (2.2.16) :

$$(2.2.18) \qquad A(v) \leqslant L_4\, p\Big(\phi_{p+1}(u) + M_{p+1}(1+\psi_p(u))\Big) .$$

Pour estimer $B(v)$, il nous faut faire réapparaître K devant $\partial_1 \partial_2$ pour pouvoir procéder comme ci-dessus. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.2.6 : Il existe une constante $C>0$ telle que $\forall \rho \geqslant m-2+\mu$, $\forall w$ à support dans $\{|x|<a\} \times]0,T]$, $\forall \gamma \in \mathbb{N}^N$:

$$(2.2.19) \qquad \| (T-t)^{\rho} [K, Z^{\gamma}] w \|_{\mu} \leqslant \sum_{\delta<\gamma} \frac{\gamma!}{\delta!} C^{|\gamma-\delta|} \nu_{\delta}(w) , \qquad \text{où}$$

$$(2.2.20) \qquad \nu_{\delta}(w) = \| (T-t)^{\rho} Z^{\delta} K w \|_{\mu} + \sum_{|\alpha|\leqslant m-3} \rho^{m-2-|\alpha|} \| (T-t)^{\rho-(m-2-|\alpha|)} \partial^{\alpha} Z^{\delta} w \|_{\mu}$$

(rappelons que $m-2$ est l'ordre de K).

Avant de démontrer le lemme 2.2.6, voyons comment il permet d'achever la preuve du lemme 2.2.4 : si $|\gamma| = q \leqslant p+1$, on applique le lemme 2.2.6 à $w = \partial_1 \partial_2 v$, $\rho = \lambda q$ pour $\lambda \geqslant m-2+\mu$.

Si $\delta < \gamma$, $|\delta| = r$, estimons $\nu_{\delta}(w)$, ou plutôt sa contribution dans le second membre de (2.2.19), puis dans $B(v)$: le premier terme ne pose bien sûr pas de problème, il se majore exactement comme $A(v)$, et sa contribution dans $B(v)$ est majorée par $L_5\, p\Big(\phi_{p+1}(u) + M_{p+1}(1+\psi_p(u))\Big)$. En convertissant le plus possible de dérivées Z en dérivées ∂, on a d'autre part :

$$\| (T-t)^{\lambda q-(m-2-|\alpha|)} \partial^{\alpha} Z^{\delta} \partial_1 \partial_2 v \|_{\mu} \leqslant L_6\, M_{r-(m-3-|\alpha|)}(1+\psi_p(u))$$

$$(2.2.21) \qquad + L_6 (C_5\, p)^{r+c}$$

où c est une constante ne dépendant pas de r ni de q.
La contribution des termes du type $L_6(C_5\,p)^{r+c}$ dans $B(v)$ ne pose pas de problème : elle est majorée par

$$L_7(C_6\,p)^{p+c'}\ , \quad \text{donc par } M_{p+1} \text{ pour } \varepsilon_o \text{ assez petit .}$$

Pour majorer le second membre de (2.2.19), il reste finalement à estimer la somme double :

$$L_6 \sum_{r<q} \frac{q!}{r!}\, C^{q-r} \sum_{h=0}^{m-3} (\lambda q)^{h+1}\, M_{r-h}\ (1+\psi_p(u))$$

(en convenant que $M_{r-h}=0$ si $h>r$).
En intervertissant les deux signes Σ, et en remarquant que :

$$\frac{q!}{r!} \leqslant C_7^{q-r+1}\, \frac{(q-h)!}{(r-h)!}$$

on obtient le majorant suivant : (pour ε_o assez petit)

$$L_7 \sum_{h=0}^{m-3} M_{q-h}\ (\lambda q)^{h+1}\ (1+\psi_p(u))$$

$$\leqslant L_8 \sum_{h=0}^{m-3} q\lambda(\lambda\varepsilon)^h\, M_q\ (1+\psi_p(u))$$

$$\leqslant L_9\ \varepsilon\,\lambda^2\ M_{q+1}\ (1+\psi_p(u)) \quad \text{si} \quad \varepsilon\,\lambda \leqslant \frac{1}{2}\ .$$

La contribution de ce terme dans $B(v)$ est de façon immédiate majorée par
$L_{10}\, M_{p+1}\ \varepsilon\,\lambda^2\,(1+\psi_p(u))$.
q.e.d.

Achevons la démonstration du théorème 2.2 en prouvant le lemme 2.2.6 :
On applique l'inégalité suivante (corollaire de l'inégalité de Gårding, voir [5], lemme 2.3)

$$(2.2.22)\quad \sum_{|\alpha|\leqslant m-2} \|\,(T-t)^\rho\,\partial^\alpha f\|_\mu \leqslant C_o\ \|\,(T-t)^\rho\, K f\|_\mu + C_o \sum_{|\alpha|\leqslant m-3} \rho^{m-2-|\alpha|}\ \|(T-t)^{\rho-(m-2-|\alpha|)}\partial^\alpha f\|_\mu$$

vraie pour $\rho \geqslant m-2+\mu$, f à support dans

$$\{|x(y)| < a \, , \, t(y) \in]0,T]\} \, ,$$

à des fonctions f du type $Z^\delta w$, où $\delta < \gamma$.

D'après le corollaire (2.1.4)', on a :

$$(2.2.23) \quad \|(T-t)^\rho [K,Z^\gamma]w\|_\mu \leqslant C_1 \sum_{\delta<\gamma} \frac{\gamma!}{\delta!} C_2^{|\gamma-\delta|} \sup_{|\alpha|\leqslant m-2} \|(T-t)^\rho \partial^\alpha Z^\delta w\|_\mu$$

donc, compte tenu de (2.2.22) :

$$(2.2.24) \quad \|(T-t)^\rho [K,Z^\gamma]w\|_\mu \leqslant \sum_{\delta<\gamma} \frac{\gamma!}{\delta!} C_3^{|\gamma-\delta|} \Big(\|(T-t)^\rho [K,Z^\delta]w\|_\mu + \nu_\delta(w)\Big) .$$

Posons $\mu_\gamma(w) = \|(T-t)^\rho [K,Z^\gamma] w\|_\mu$. (2.2.24) s'écrit alors :

$$(2.2.25) \qquad \mu_\gamma(w) \leqslant \sum_{\delta<\gamma} \frac{\gamma!}{\delta!} C_3^{|\gamma-\delta|} \Big(\mu_\delta(w) + \nu_\delta(w)\Big)$$

et $\mu_o = 0$.

Soit alors $(a_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{N}^n}$ la suite d'entiers définie par :

$$a_o = 1 \quad , \quad a_\gamma = \sum_{\delta<\gamma} a_\delta .$$

On montre facilement par récurrence sur $|\gamma|$ et à l'aide de (2.2.25) que :

$$\mu_\gamma \leqslant \sum_{\delta<\gamma} \frac{\gamma!}{\delta!} C_3^{|\gamma-\delta|} a_{\gamma-\delta} \, \nu_\delta .$$

Le lemme sera prouvé si on montre que :

$$a_\gamma \leqslant C_4^{|\gamma|} \quad , \text{ ce qui est élémentaire.}$$

Par exemple, posons : $s_p = \sum_{|\gamma|=p} a_\gamma$. Alors

$$s_p = \sum_{|\gamma|=p} \sum_{\delta<\gamma} a_\delta .$$

Si $|\delta| = q$, a_δ intervient autant de fois qu'il existe de $\gamma > \delta$ tel que $|\gamma| = p$, i.e. autant de fois qu'il existe γ' tel que $|\gamma'| = p-q$, i.e. :

$C^{p-q}_{n+p-q-1}$ fois. Ainsi :

$$s_p = \sum_{q=0}^{p-1} C^{p-q}_{n+p-q-1}\ s_q \leqslant 2^{n-1} \sum_{q=0}^{p-1} 2^{p-q}\ s_q$$

et $s_o = 1$. On en déduit :

$$\forall p \geqslant 1 \quad , \quad s_p \leqslant 2^{n+p-1}\ (1+2^{n-1})^{p-1}. \qquad \text{q.e.d.}$$

<u>*Corollaire*</u> <u>*2.3.*</u> *: Sous les hypothèses du théorème 2.2, supposons que :*

$$(\mathit{supp\ sing}_a\, u) \cap \Omega^- = (\Sigma_1 \cup \Sigma_2) \cap \Omega^- .$$

Alors on a encore, près de y_o *:*

$$\mathit{supp\ sing}_a\, u = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 .$$

<u>Preuve</u> : Là encore ce résultat n'a d'intérêt que si $y_o \in \Delta$. D'après le théorème 2.2, $u \in H^s_a(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ près de y_o, et on peut appliquer le corollaire 1.2.3 b) soient C_1, C_2 les composantes de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \setminus \Delta$ qui intersectent Ω^-, avec $C_i \subset \Sigma_i$, et soient C_1' et C_2' les deux autres composantes. (Avec $C_i' \subset \Sigma_i$). L'hypothèse entraîne déjà que $C_1 \cup C_2 \subset \operatorname{supp\ sing}_a u$. Si, par exemple, $C_1' \cap \operatorname{supp\ sing}_a u$ était vide, alors on aurait $u \in H^s_a(\Sigma_1)$ dans Ω_+, donc, d'après le théorème 2.1, $u \in H^s_a(\Sigma_1)$ près de y_o, ce qui, compte tenu du corollaire 1.2.2 a), contredirait le fait que $C_2 \subset \operatorname{supp\ sing}_a u$.
Donc $C_1' \subset \operatorname{supp\ sing}_a u$, et de même pour C_2'. q.e.d.

<u>Remarque 2.4</u> : Le corollaire 2.3 permet de préciser exactement $\operatorname{supp\ sing}_a u$, mais il reste une imprécision pour $WF_a(u)_{|\Delta}$: d'après le corollaire 1.2.4, on a, sous les hypothèses du corollaire 2.3, une des quatre configurations suivantes:

$$WF_a(u)_{|\Delta} = N^*\Sigma_{1|\Delta} \cup N^*\Sigma_{2|\Delta} \ ;\ WF_a(u)_{|\Delta} = N \ ;\ WF_a(u)_{|\Delta} = N' \ ;\ WF_a(u)_{|\Delta} = N^*\Delta .$$

Si l'équation (2.0.1) est linéaire, c'est bien sûr la première configuration qui est à retenir.

Les autres configurations, qui sont probablement plus fréquentes, correspondent à un phénomène d'interaction , dont l'existence justifie l'importance de l'hypothèse ii) dans le théorème 2.2 (voir aussi Bony [9]).

3. PROPAGATION DU CARACTERE CONORMAL ANALYTIQUE POUR LES SOLUTIONS D'EQUATIONS QUASI-LINEAIRES.

3.0. Introduction.

On aimerait généraliser le théorème (2.1) à une équation non linéaire générale :

$$F(y,\partial^{\alpha}u)_{|\alpha|\leqslant m}=0\ . \tag{3.0.1}$$

Une différence essentielle apparaît immédiatement : une hypersurface Σ, d'équation $\varphi=0$, est caractéristique si φ vérifie l'équation :

$$\sum_{|\alpha|=m}\frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}}(y,\partial^{\alpha}u)\,(\nabla\varphi)^{\alpha}=0 \qquad , \qquad \text{pour} \quad \varphi(y)=0\ . \tag{3.0.2}$$

Ainsi, si (3.0.1) n'est pas semi-linéaire, les coefficients de (3.0.2) dépendent de u. Dans un problème étudiant la régularité de u, il est alors peu réaliste de supposer Σ a priori régulière, comme on l'a fait jusqu'à présent. Un équivalent du théorème (2.1) dans ce cadre doit plutôt avoir la forme suivante :
" Soit u une solution de (3.0.1), a priori assez régulière ; soit Σ une hypersurface caractéristique pour l'équation (3.0.1), par rapport à u. Alors : si Σ est analytique dans le passé et u conormale analytique par rapport à Σ dans le passé, cette situation se propage dans l'avenir ".
Un tel résultat a été prouvé dans le cadre C^{∞} par S. Alinhac (voir [2] et [3]), qui pour cela a mis au point la paracomposition, dont l'avantage est de redresser la caractéristique en ne prenant en compte que faiblement sa mauvaise régularité. On ne dispose pas hélas d'un tel outil dans le cadre analytique. En conséquence, pour minimiser l'influence de la mauvaise régularité de φ dans les estimations sur u, nous avons dû recourir au procédé plus classique consistant à dériver l'équation (3.0.1) un nombre suffisant de fois. L'effet déplaisant de cette méthode est que l'indice s pour lequel on souhaite montrer que $u\in H^{s}_{a}(\Sigma)$ doit être (encore) plus grand qu'à l'ordinaire (de l'ordre de $\frac{n}{2}+2m$, alors que le

le théorème d'Alinhac demande $s > \frac{n}{2} + m + \frac{7}{2}$) . En revanche, cette différence est très faible dès que l'on étudie des systèmes quasi-linéaires du premier ordre. Nous avons donc préféré énoncer et démontrer le résultat de ce chapitre dans ce cadre.

3.1. Enoncé du résultat.

Théorème 3.1 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit u une solution sur Ω du système quasi-linéaire $m \times m$ suivant :*

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(y,u) \frac{\partial u}{\partial y_j} = F(y,u) \tag{3.1.1}$$

où $A_1, \dots, A_n$ et F sont des fonctions analytiques réelles de leurs arguments. On suppose que $u \in H^s_{loc}(\Omega)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, avec :

$$s > \frac{n}{2} + \frac{7}{2}. \tag{3.1.2}$$

• Soit d'autre part Σ une hypersurface C^∞, caractéristique pour (3.1.1) par rapport à u. On suppose que $u \in H^{s,\infty}(\Sigma)$ sur Ω.

• Soit enfin S une hypersurface C^2, spatiale pour l'opérateur : $\sum_{j=1}^{n} A_j(y,u) \frac{\partial}{\partial y_j}$ au point $y_0 \in S \cap \Sigma$.

On fait les hypothèses suivantes :

i) Σ est analytique sur $\Omega^- = \{y, \rho(y) < 0\}$, où $\rho = 0$ est une équation de S.

ii) $u \in H^s_a(\Sigma)$ dans Ω^-.

Alors, près de y_0, Σ est analytique et $u \in H^s_a(\Sigma)$.

Le reste de ce travail est consacré à la démonstration du théorème 3.1. Remarquons que les hypothèses laissent entendrent que le résultat de S. Alinhac a déjà été appliqué.

3.2. Réduction à un modèle local. Redressement de Σ .

i) Procédant comme dans [4], paragraphe 2.2, on se ramène à une équation du type :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(t,x,u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = F(t,x,u) \tag{3.2.1}$$

près du cylindre $\mathscr{C} =]0,T[\times \{x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|x| < a\}$, l'hypothèse S spatiale étant à remplacer par :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j \ (t,x,u) \tag{3.2.2}$$

est strictement hyperbolique par rapport à $t = \text{cste}$ sur .

La surface Σ peut être prise de la forme :

$$x_1 = \varphi(t,x') \ , \tag{3.2.3}$$

φ étant une fonction C^∞ sur le cylindre $\overline{\mathscr{C}}'$, où $\mathscr{C}' =]0,T[\times \{x' \in \mathbb{R}^{n-2}$, $|x'| < a\} \approx \mathscr{C} \cap \{x_1 = 0\}$ vérifiant l'équation caractéristique :

$$\varphi'_t = \lambda\Big(t,\varphi(t,x') \ , x',u(t,\varphi(t,x') \ ,x') \ , \varphi'_{x'}(t,x')\Big) \tag{3.2.4}$$

où $\lambda(y,u,\xi')$ est une fonction analytique réelle de ses arguments : c'est l'une des valeurs propres de $A_1(y,u) - \sum_{j=2}^{n} A_j(y,u) \xi_j$.

Les conditions i) et ii) du théorème 3.1 se traduisent par :

a) φ est analytique sur $\{(t,x') \in \overline{\mathscr{C}}' \ , t < \eta \ |x'|^2 + \eta_1\}$

b) u est $H^s_a(\Sigma)$ sur $\{(t,x) \in \overline{\mathscr{C}} \ , t < \eta \ |x|^2 + \eta_1\}$

où η , η_1 sont des nombres positifs tels que, de plus :

$$T < \eta \ a^2 + \eta_1 \ . \tag{3.2.5}$$

On doit alors montrer que φ est analytique sur $\mathscr{C}'$, et que $u \in H^s_a(\Sigma)$ sur $\mathscr{C}$.

ii) Pour cela, redressons d'abord la caractéristique par le changement de coordonnées $(t,x) \rightsquigarrow (\tilde{t},\tilde{x})$ donné par :

$$(3.2.6) \qquad \begin{cases} x_1 = \tilde{x}_1 + \varphi(\tilde{t},\tilde{x}') \\ x' = \tilde{x}' \\ t = \tilde{t} \, . \end{cases}$$

Σ est alors donnée par l'équation $\tilde{x}_1 = 0$, et (3.2.4) s'écrit :

$$(3.2.4)' \qquad \varphi'_{\tilde{t}} = \lambda\left(\tilde{t},\varphi(\tilde{t},\tilde{x}') \, , \tilde{x}', \tilde{u}(\tilde{t},0,\tilde{x}') \, , \varphi'_{\tilde{x}'}(\tilde{t},\tilde{x}')\right) ,$$

la condition a) étant trivialement conservée dans les coordonnées $(\tilde{t},\tilde{x}')$.
Compte tenu de la proposition 1.1.2 d'invariance par difféomorphisme analytique, on peut supposer que b) reste vraie dans les coordonnées $(\tilde{t},\tilde{x})$, quitte à modifier la valeur des paramètres a , T , η , η_1.
Enfin l'équation (3.2.1) s'écrit, dans les nouvelles coordonnées :

$$(3.2.1)' \qquad \tilde{L}\tilde{u} = F\,(\tilde{t},\tilde{x}_1 + \varphi \, , \tilde{x}',\tilde{u}) \quad , \qquad \text{où}$$

$$(3.2.7) \qquad \begin{aligned} \tilde{L} = \frac{\partial}{\partial\tilde{t}} &+ \left\{A_1(\tilde{t},\tilde{x}_1 + \varphi,\tilde{x}',\tilde{u}) - \sum_{j=2}^{n-1} A_j(\tilde{t},\tilde{x}_1 + \varphi,\tilde{x}',\tilde{u})\,\partial_j \varphi - \partial_{\tilde{t}}\varphi\right\} \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_1} \\ &+ \sum_{j=2}^{n-1} A_j(\tilde{t},\tilde{x}_1 + \varphi,\tilde{x}',\tilde{u}) \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_j} \end{aligned}$$

est un opérateur strictement hyperbolique par rapport à $\tilde{t}$, et la matrice coefficient de $\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_1}$ a m valeurs propres réelles distinctes dont une est nulle.
L'intérêt de ce changement de variables est que le caractère conormal s'exprime à l'aide des champs

$$(3.2.8) \qquad Z_1 = \tilde{x}_1 \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_1} \quad , \quad Z_j = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_j} \quad , \quad j = 2,\ldots,n-1 \quad , \quad Z_n = \frac{\partial}{\partial\tilde{t}} \, .$$

Compte tenu de la proposition 1.1.2, le théorème 3.1 sera démontré si nous prouvons que φ est analytique sur $\tilde{\mathscr{C}}'$ et que $\tilde{u} \in H^s_a(\Sigma)$ sur $\mathscr{C}$ (puisque alors le changement de variables $(\tilde{t},\tilde{x}) \to (t,x)$ sera globalement analytique). Sauf mention expresse du contraire, nous travaillerons donc dès maintenant dans le système de coordonnées $(\tilde{t},\tilde{x})$, et, pour alléger les notations, nous n'écrirons plus les "$\sim$".

3.3. Inégalité a priori.

Lemme 3.3 : Soit $\mathscr{C} =]0,T[\times \{x \in \mathbb{R}^{n-1}, |x| < a\}$.

Soit $L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(t,x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ *un opérateur* $m \times m$ *strictement hyperbolique par rapport à* $t = cste$ *sur* $\mathscr{C}$. *On suppose que les matrices carrées* $m \times m$ A_j *sont* H^s *sur* $\overline{\mathscr{C}}$, *avec* $s > \frac{n}{2} + 1$.

Alors pour tout réel $r \in [0,s]$, *il existe des constantes* $\gamma_0 > 0$, $C > 0$ *telles que : pour toute* $u \in H^r(\overline{\mathscr{C}}, \mathbb{R}^m)$ *telle que* $Lu \in H^r(\overline{\mathscr{C}}, \mathbb{R}^m)$ *et* $\operatorname{supp} u \subset]0,T] \times \{|x| < a\}$, *pour tout* $\gamma \geq \gamma_0$:

$$(3.3.1) \qquad \gamma \, \|(T-t)^{\gamma-1} u\|_r \leq C \, \|(T-t)^{\gamma} L u\|_r$$

où $\|\cdot\|_r$ *est la norme* $H^r(\overline{\mathscr{C}})$.

Preuve : Elle suit celle du lemme 2.1 de [5], la difficulté étant que les A_j ne sont pas C^∞. En prenant γ_0 assez grand par rapport à r, on vérifie facilement que l'on peut supposer que le support de u est en fait compact, contenu dans $\mathscr{C}$. En remarquant que

$$(3.3.2) \qquad (T-t)^{\gamma} L (T-t)^{1-\gamma} = (T-t) L + \gamma - 1 ,$$

on est ramené, en posant $v = (T-t)^{\gamma-1}$, à prouver l'estimation suivante :

$$(3.3.3) \qquad \forall v \in C_0^\infty(\mathscr{C}) \;, \quad \|v\|_r \leq \frac{C}{\gamma} \, \|(T-t)L v + (\gamma-1) v\|_r$$

et ceci pour tout réel $r \in [0,s]$, $\gamma \geq \gamma_0$.

a) Remarquons d'abord que, si (3.3.3) est vraie pour une valeur de r inférieure ou égale à $s-1$, elle l'est pour $r+1$. En effet on a :

(3.3.4) $$\|\partial_i v\|_r \leqslant \frac{C}{\gamma} \|(T-t)L\,\partial_i v + (\gamma-1)\partial_i v\|_r$$

et, puisque L est à coefficients H^s, $[(T-t)L\,,\partial_i]$ est un opérateur d'ordre 1 à coefficients H^{s-1} donc en voie H^{r+1} dans H^r : $(s-1>\frac{n}{2})$

(3.3.5) $$\|[(T-t)L\,,\partial_i]v_i\|_r \leqslant C_1 \|v\|_{r+1} \,.$$

En sommant pour $i=1$ à n, on en déduit :

(3.3.6) $$\|v\|_{r+1} \leqslant \frac{C_2}{\gamma} \|(T-t)L\,v + (\gamma-1)\,v\|_{r+1} + \frac{C_3}{\gamma}\|v\|_{r+1}$$

ce qui donne bien (3.3.3) pour $r+1$ en prenant $\gamma \geqslant \gamma_o$ assez grand.

b) Supposons alors que (3.3.3) est vraie pour $r=0$. Alors, d'après a), elle est vraie pour $r=1$, et, par interpolation, pour tout $r\in[0,1]$, en particulier pour tout $r_o\in[0,s-[s]]$. Mais alors, par récurrence (en utilisant a)) elle est vraie pour tout r de la forme r_o+k, $k\in\{0,1,\ldots,[s]\}$, c'est-à-dire pour tout $r\in[0,s]$, si l'on fait varier r_o.

c) Démonstration de (3.3.3) pour $r=0$.

On utilise le calcul paradifférentiel introduit par J-M. Bony dans [7].
Soit $B=\{x\in\mathbb{R}^{n-1}, \ |x|<a\}$. Considérons les $A_j\in H^s(\mathscr{C})$ comme des fonctions $C^o([0,T]\,,H^{s-1/2}(\overline{B}))$ et $C^1([0,T]\,,H^{s-3/2}(\overline{B}))$. Si $\rho=s-\frac{n}{2}-1>0$, on a, en utilisant le théorème 2.5 b) de [7] :

(3.3.7) $$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\,A\,(t) + R(t) \ ,$$

où

$$A(t)\in C^o([0,T]\,,\mathrm{Op}\ \Sigma^1_{\rho+1}(\overline{B}))\cap C^1([0,T]\,,\mathrm{Op}\ \Sigma^1_\rho(\overline{B}))$$

et où $R(t)$ est une famille continue d'opérateurs ρ-régularisants, ce qui entraîne :

(3.3.8) $$\|R\,v\|_o \leqslant C\ \|v\|_o$$

et donc il suffit de prouver (3.3.3) en remplaçant L par $\tilde{L} = \frac{\partial}{\partial t} + i A(t)$.
D'après l'hypothèse de stricte hyperbolicité, le symbole principal $a_1(t,x,\xi)$ de $A(t)$ a m valeurs propres réelles distinctes : ceci permet de construire une famille $s_0(t,x,\xi) \in C^0([0,T],\Sigma^0_{\rho+1}(\overline{B})) \cap C^1([0,T],\Sigma^0_\rho(\overline{B}))$ à valeurs dans les matrices $m \times m$ auto-adjointes, telle que :

$$(3.3.9) \qquad s_0(t,x,\xi)\ a_1(t,x,\xi) = a_1(t,x,\xi)^*\ s_0(t,x,\xi)$$

$$(3.3.10) \qquad s_0(t,x,\xi) \geqslant C_0\, I \quad \text{pour} \quad c_0 > 0\ .$$

Il correspond à s_0 une famille d'opérateurs paradifférentiels matriciels auto-adjoints elliptiques, $S(t)$, telle que :

$$(3.3.11) \qquad S(t)\ A(t) = A(t)^*\ S(t) + Q(t)\ ,$$

où $Q \in C^0([0,T], Op\ \Sigma^0_\rho(\overline{B}))$.
D'après l'inégalité de Gårding, on a :

$$(3.3.12) \qquad \forall w \in C^\infty_0(B) \qquad (S(t)w,w) \geqslant C_0\ |w|^2_0 - C'\ |w|^2_{-1}\ ,$$

et, quitte à modifier $S(t)$ par un terme auto-adjoint d'ordre inférieur, on peut supposer que $C' = 0$ dans (3.3.12).
Notons $(\cdot,\cdot)$ le produit scalaire de $L^2(B)$. Alors, d'après la continuité L^2 de $S(t)$, la quantité

$$(3.3.13) \qquad F(t) = \operatorname{Re}\Big(S(t)\Big((T-t)\ \tilde{L}\, v(t) + (\gamma-1)\, v(t)\Big)\ , v(t)\Big)$$

vérifie

$$(3.3.14) \qquad \int_0^T F(t)\, dt \leqslant C_1\ \|\ (T-t)\tilde{L}\, v + (\gamma-1)\, v\|_0\ \|v\|_0$$

et, d'après (3.3.12) (avec $C' = 0$) :

$$(3.3.15) \qquad \int_0^T F(t)\, dt \geqslant \int_0^T (T-t)\ \operatorname{Re}\Big(S(t)\tilde{L}\, v(t)\ , v(t)\Big) dt + (\gamma-1)\, C_2\ \|v\|^2_0\ .$$

Il reste à prouver que :

$$(3.3.16) \qquad \int_0^T (T-t)\,\mathrm{Re}\Big(S(t)\tilde{L}\,v(t)\,,v(t)\Big)\,dt \geqslant -\,C_3\,\|v\|_o^2$$

et (3.3.3) sera prouvée pour γ assez grand.

Or on a, en intégrant par parties en t :

$$(3.3.17) \qquad \begin{aligned} \int_0^T (T-t)\,\mathrm{Re}\Big(S(t)\,\partial_t v(t)\,,v(t)\Big)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \Big(S(t)\,v(t)\,,v(t)\Big)\,dt \\ &-\int_0^T (T-t)\Big(S'(t)\,v(t)\,,v(t)\Big)\,dt \end{aligned}$$

ce qui est minoré par $-C_4\,\|v\|_o^2$, et d'autre part :

$$(3.3.18) \qquad \mathrm{Re}\Big(i\,S(t)\,A(t)\,v(t)\,,v(t)\Big) = i\,\Big((S(t)\,A(t) - A(t)^*\,S(t))\,v(t)\,,v(t)\Big)$$

qui est minoré par $-C_5\,|v|_o^2$ d'après 3.3.11.

q.e.d.

3.4. Idée sommaire de la démonstration.

Pour estimer les $Z^\beta u$ et les $\partial^\gamma \varphi$, on procède par récurrence sur l'ordre de dérivation : à chaque pas, on dérive un nombre suffisant de fois le système (3.2.1)' suivant les Z_j, comme dans le cas semi-linéaire, et on dérive aussi l'équation caractéristique (3.2.4)'.

Ainsi, sur l'équation (3.2.4)', il est facile de prévoir que la connaissance des Z-dérivées d'ordre $\leqslant p$ de u permettra d'estimer les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ de φ. D'un autre côté, on peut prévoir sur (3.2.1)' et (3.2.7) que, pour estimer les Z-dérivées d'ordre $p+1$ de u, il faut connaître les dérivées d'ordre $\leqslant p+2$ de φ (on montrera qu'il faut en fait connaître les dérivées de φ jusqu'au rang $p+3$).

On constate donc un décalage entre les dérivées de u et celles de φ. Pour y remédier, nous allons dériver suffisamment le système (3.2.1)' en prenant soin de ne pas y faire apparaître de dérivées de φ d'ordre supérieur ! Le plus sûr pour cela est de dériver le système sous la forme (3.2.1), i.e. avant de faire le changement de variables indiqué au point ii) du paragraphe 3.2. Nous notons ∇ la dérivation par rapport aux anciennes coordonnées (t,x). Le lien avec la " nouvelle dérivation " ∂ est donné par :

(3.4.1) $$\nabla_1 = \partial_1 \quad , \quad \nabla_j = \partial_j - \partial_j \varphi \partial_1 \quad , \quad \nabla_t = \partial_t - \partial_t \varphi \partial_1 \qquad (2 \leqslant j \leqslant n-1) .$$

Notons d'autre part :

(3.4.2) $$u_k = \nabla^k u = (\nabla^\alpha u)_{|\alpha|=k} .$$

Alors le système (3.2.1)' dérivé trois fois s'écrit :

(3.4.3) $$L(\nabla^\alpha u) = g_\alpha (t,x,\varphi,u_k)_{0 \leqslant k \leqslant 3} \qquad \text{si} \qquad |\alpha| = 3 ,$$

L étant l'opérateur décrit par (3.2.7).

De même, l'équation caractéristique (3.2.4)' dérivée trois fois s'écrit :

(3.4.4) $$M(\nabla^\alpha \varphi) = u_\alpha \Big(t,x',\nabla^\ell \varphi, u_{k|x_1=0}\Big)_{\substack{0 \leqslant \ell < 3 \\ 0 \leqslant k \leqslant 3}} \quad , \quad \text{si} \quad |\alpha| = 3 ,$$

(dans cette dernière équation, on pouvait bien sûr faire apparaître les $Z^k u$ plutôt que les u_k), où :

(3.4.5) $$M = \partial_t + \sum_{j=2}^{n-1} a_j \Big(t,x',\varphi,\nabla\varphi,u_{|x_1=0}\Big)\, \partial_j$$

est un champ de vecteurs à coefficients réels.

Cette fois, grâce à (3.4.3), les Z-dérivées $(p+1)^{\underline{\text{ièmes}}}$ de u_3 seront obtenues connaissant les dérivées d'ordre $\leqslant p+3$ de φ, et en même temps, grâce à (3.4.4), ces dernières seront estimées connaissant les Z-dérivées d'ordre $\leqslant p$ de u_3 ... Mettons maintenant en forme ces remarques.

3.5. <u>Semi-normes</u>.

Nous considérons à nouveau la suite (M_p) introduite au paragraphe 1.3. Rappelons que M_p dépend d'un paramètre $\varepsilon > 0$, à fixer plus loin.

Pour $\sigma \in \mathbb{R}$, $w \in H^{\sigma,\infty}(\Sigma)_{|\overline{\mathscr{C}}}$, nous notons :

$$\forall p > 1 \quad , \quad \phi_p^\sigma(w) = \max_{|\beta|=p} \| (T-t)^{\lambda(p-1)} Z^\beta w \|_\sigma$$

$$\psi_p^\sigma(w) = \max_{1 \leqslant q \leqslant p} \frac{\phi_p^\sigma(w)}{M_q}$$

où $\lambda \geqslant 1$ est un paramètre à fixer plus loin.

Pour $\tau \in \mathbb{R}$, $\theta \in C^\infty(\overline{\mathscr{C}}')$, nous notons :

$$\forall p \geqslant 4 \quad , \quad \alpha_p^\tau(\theta) = \max_{|\gamma|=p} |(T-t)^{\lambda(p-4)} \partial^\gamma \theta|_\tau$$

$$\beta_p^\tau(\theta) = \max_{4 \leqslant q \leqslant p} \frac{\alpha_q^\tau(\theta)}{M_{q-3}} .$$

Rappelons que $\| \ \|_\sigma$ désigne la norme $H^\sigma(\overline{\mathscr{C}})$ tandis que $| \ |_\tau$ désigne la norme $H^\tau(\overline{\mathscr{C}}')$.

Nous aurons également besoin d'une version modifiée des semi-normes α et β :

$$\forall p \geqslant 3 \quad , \quad \tilde{\alpha}_p^\tau(\theta) = \max_{|\gamma|=p} |(T-t)^{\lambda(p-3)} \partial^\gamma \theta|_\tau$$

$$\tilde{\beta}_p^\tau(\theta) = \max_{3 \leqslant q \leqslant p} \frac{\tilde{\alpha}_q^\tau(\theta)}{M_{q-2}} .$$

On vérifie aisément que, pour λ assez grand et ε assez petit :

$$(3.5.1) \qquad \tilde{\alpha}_p^\tau(\theta) \leqslant \alpha_p^\tau(\theta)$$

$$(3.5.1)' \qquad \tilde{\beta}_p^\tau(\theta) \leqslant \varepsilon\, \beta_p^\tau(\theta) .$$

Montrons maintenant quelques estimations naturelles sur les semi-normes que nous venons d'introduire :

<u>Lemme</u> <u>3.5</u> : *Soient* $\theta \in C^\infty(\overline{\mathscr{C}}')$, *analytique pour* $t < \eta |x'|^2 + \eta_1$ *(où* $T < \eta a^2 + \eta_1$*), et* $w \in H^{\sigma+1,\infty}(\Sigma)$ $(\sigma > \frac{n}{2})$ *sur* $\overline{\mathscr{C}}$. *Alors il existe* $\lambda_o > 0$, $\varepsilon_o > 0$ *tels que, pour tout* $\lambda \geqslant \lambda_o$ *et tout* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$, *on ait, pour tout* p :

(i)

$$\tilde{\alpha}_p^{\tau}(\theta) \leqslant C\left\{\alpha_{p+1}^{\tau-1}(\theta) + M_{p-3}\left(1+\beta_p^{\tau-1}(\theta)\right)\right\} \tag{3.5.2}$$

$$\tilde{\beta}_p^{\tau}(\theta) \leqslant C\left\{1+\beta_{p+1}^{\tau-1}(\theta)\right\}. \tag{3.5.2'}$$

(ii) *Sous l'hypothèse* $\varepsilon\, max\left(\tilde{\beta}_{p+1}^{\sigma}(\varphi),\, \psi_p^{\sigma}(\nabla w)\right) \leqslant 1$:

$$\phi_{p+1}^{\sigma}(w) \leqslant C\, M_{p+1}. \tag{3.5.3}$$

(iii) *Sous les hypothèses :* $\varepsilon\, max\left(\tilde{\beta}_{p+2}^{\sigma}(\varphi),\, \psi_p^{\sigma}(\nabla w)\right) \leqslant 1$ *et* $w \in H_a^{\sigma+1}(\Sigma)$ *pour* $t < \eta\,|x|^2 + \eta_1$:

$$\phi_{p+1}^{\sigma+1}(w) \leqslant C\left\{\phi_{p+1}^{\sigma}(\nabla w) + M_{p+1}\left(1+\psi_p^{\sigma}(\nabla w)\right)\right\}. \tag{3.5.4}$$

<u>Preuve</u> : (i) Notons $\gamma = \lambda(p-3)$. Alors

$$|(T-t)^{\gamma}\nabla^p\theta|_{\tau} \leqslant |\nabla((T-t)^{\gamma}\nabla^p\theta)|_{\tau-1} + |(T-t)^{\gamma}\nabla^p\theta|_{\tau-1} \tag{3.5.5}$$

et d'autre part

$$|\nabla((T-t)^{\gamma}\nabla^p\theta)|_{\tau-1} \leqslant \gamma|(T-t)^{\gamma-1}\nabla^p\theta|_{\tau-1} + |(T-t)^{\gamma}\nabla^{p+1}\theta|_{\tau-1} \tag{3.5.6}$$

θ étant analytique pour $t < \eta\,|x'|^2 + \eta_1$, on peut, en introduisant une troncature χ_N comme au lemme (2.1.7), écrire :

$$\theta = \theta_1 + \theta_2, \tag{3.5.7}$$

où $\text{supp}\,\theta_1 \subset]0,T] \times \{|x| < a\}$, et :

$$\gamma|(T-t)^{\gamma-1}\nabla^p\theta_2|_{\tau-1} \leqslant C\, M_{p-3} \tag{3.5.8}$$

$$|(T-t)^{\gamma}\nabla^{p+1}\theta_2|_{\tau-1} \leqslant C\, M_{p-3}, \tag{3.5.9}$$

pour ε_o assez petit.

Enfin la version la plus élémentaire du lemme 2.1.3, avec $P = \partial_t$, donne, écrivant $\partial_t = \Sigma\, a_j \nabla_j$:

$$\gamma |(T-t)^{\gamma-1} \nabla^p \theta_1|_{\tau-1} \leqslant C\ |(T-t)^{\gamma} \nabla^{p+1} \theta_1|_{\tau-1} . \tag{3.5.10}$$

Reportant (3.5.8), (3.5.9) et (3.5.10) dans (3.5.6), on obtient :

$$|\nabla((T-t)^{\gamma} \nabla^p \theta)|_{\tau-1} \leqslant C\left\{ |(T-t)^{\gamma} \nabla^{p+1} \theta|_{\tau-1} + M_{p-3} \right\} \tag{3.5.11}$$

ce qui, reporté dans (3.5.5), donne (3.5.2). (3.5.2)' en est un corollaire trivial.

(ii) Pour $|\beta| = p+1$, on écrit $Z^{\beta} = Z^{\beta'} Z_k$, et on remarque que :

$$Z_1 = x_1 \nabla_1 \quad , \quad Z_j = \nabla_j + \partial_j \varphi \nabla_1 \quad , \quad Z_n = \nabla_t + \partial_t \varphi \nabla_1 \qquad (2 \leqslant j \leqslant n-1) . \tag{3.5.12}$$

La formule de Leibniz donne alors :

$$\phi^{\sigma}_{p+1}(w) \leqslant C\left\{ \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} M_q M_{p-q} \right\} \left(1 + \varepsilon\, \tilde{\beta}^{\sigma}_{p+1}(\varphi)\right)\left(1 + \psi^{\sigma}_p(\nabla w)\right) \tag{3.5.13}$$

où le coefficient ε de $\tilde{\beta}^{\sigma}_{p+1}(\varphi)$ provient du décalage entre indices dans la définition de $\tilde{\beta}^{\tau}_p(\theta)$, sachant d'autre part que $M_{q-1} \leqslant \varepsilon M_q$, pour ε assez petit.

Enfin on a noté : $M_o = 1$.

De cette manière $\sum_{o}^{p} \binom{p}{q} M_q M_{p-q} \leqslant C\ M_p \leqslant \varepsilon\ M_{p+1}$ et (3.5.3) est démontré, compte tenu de l'hypothèse [illegible]e.

(iii) Posons $\gamma = \lambda p$. Raisonnant comme en i), on a :

$$\begin{aligned} \phi^{\sigma+1}_{p+1}(w) &\leqslant \phi^{\sigma}_{p+1}(w) + \gamma\, \| (T-t)^{\gamma-1} Z^{p+1} w \|_{\sigma} + \| (T-t)^{\gamma} \nabla Z^{p+1} w \|_{\sigma} \\ &\leqslant C\left(\| (T-t)^{\gamma} \nabla Z^{p+1} w \|_{\sigma} + M_{p+1} \right), \end{aligned}$$

compte tenu des hypothèses et de (3.5.3).

Notons $$\mu_p^\sigma(w) = \| (T-t)^{\lambda(p-1)} \nabla Z^p w \|_\sigma \quad \text{et}$$

$$\nu_p^\sigma(w) = \max_{1\leqslant q\leqslant p} \frac{\mu_q^\sigma(w)}{M_q} .$$

Alors on a :

$$\mu_{p+1}^\sigma(w) \leqslant \phi_{p+1}^\sigma(\nabla w) + \| (T-t)^{\lambda p} [\nabla, Z^{p+1}] w \|_\sigma . \tag{3.5.15}$$

Exprimant ∇ au moyen de ∂ à l'aide des relations (3.4.1) et écrivant la formule de Leibniz

$$[\nabla, Z^{p+1}] = - \sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} (a\, d\, Z)^{p+1-q} \nabla \cdot Z^q \tag{3.5.16}$$

on obtient :

$$\mu_{p+1}^\sigma(w) \leqslant \phi_{p+1}^\sigma(\nabla w) + \left(\sum_{q=0}^{p} \binom{p+1}{q} M_{p-q} M_q\right) h^\lambda \left(1 + \tilde{\beta}_{p+2}^\sigma(\varphi)\right) \times \left(1 + \nu_p^\sigma(w)\right) \tag{3.5.17}$$

où $h \in]0,1[$ est tel que : $\| (T-t)^\lambda \|_\sigma \leqslant h^\lambda$ pour $\lambda \geqslant \lambda_0$, le terme $\| (T-t)^\lambda \|_\sigma$ étant obtenu grâce au décalage habituel (voir aussi remarque 1.3.3).

De $\binom{p+1}{q} \leqslant (p+1)\binom{p}{q}$ on déduit finalement, compte tenu des hypothèses et de $(p+1)\, M_p \leqslant 2\,\varepsilon\, M_{p+1}$:

$$\mu_{p+1}^\sigma(w) \leqslant \phi_{p+1}^\sigma(\nabla w) + C\, h^\lambda \left(1 + \nu_p^\sigma(w)\right) \times M_{p+1} . \tag{3.5.18}$$

Prenant λ assez grand, on en déduit

$$\nu_{p+1}^\sigma(w) \leqslant \max\left\{\psi_{p+1}^\sigma(\nabla w) + \frac{1}{2}\,(\nu_p^\sigma(w) + 1)\ ,\ \nu_p^\sigma(w)\right\} . \tag{3.5.19}$$

Notons pour simplifier $\nu_{p+1} \equiv \nu_{p+1}^\sigma(w)$; $\psi_{p+1} \equiv \psi_{p+1}^\sigma(\nabla w)$.

Nous allons déduire de (3.5.19) que :

$$\forall p\ ,\quad \nu_p \leqslant 2\,\psi_p + C . \tag{3.5.20}$$

En effet, tant que $\nu_p \geqslant 2\,\psi_{p+1} + 1$, la suite (ν_p) est stationnaire :

S'il existe p tel que $\nu_p \leqslant 2\,\psi_{p+1} + 1$, alors

$$\nu_{p+1} \leqslant \psi_{p+1} + \frac{1}{2}\,(\nu_p + 1) \leqslant 2\,\psi_{p+1} + 1 \quad , \tag{3.5.21}$$

et a fortiori

$$\nu_{p+1} \leqslant 2\,\psi_{p+2} + 1 \quad , \tag{3.5.22}$$

ce qui montre que, par récurrence :

$$\nu_{q+1} \leqslant 2\psi_{q+1} + 1 \qquad \forall\, q \geqslant p\,.$$

On en déduit (3.5.20) avec $C = \nu_1 + 1$.

Revenant à (3.5.18), on en déduit :

$$\mu^\sigma_{p+1}(w) \leqslant \phi^\sigma_{p+1}(\nabla w) + C\,M_{p+1}\left(1 + \psi^\sigma_p(\nabla w)\right) , \tag{3.5.23}$$

ce qui, reporté dans (3.5.14), donne (3.5.4).

q.e.d.

Notre objectif est maintenant de démontrer que, pour un certain τ : $\sup\limits_p \beta^\tau_p(\varphi) < +\infty$; ce qui prouvera que φ est analytique sur $\mathscr{C}'$, et de montrer parallèlement que : $\sup\limits_p \psi^{s-3}_p(u_3) < +\infty$, ce qui prouvera que $u_3 \in H^{s-3}_a(\Sigma)$ sur $\mathscr{C}$, donc que $u \in H^s_a(\Sigma)$ sur $\mathscr{C}$.

3.6. Dérivation du système.

Lemme 3.6. : Sous les hypothèses du paragraphe 3.2, il existe $\varepsilon_o > 0$, $\lambda_o > 0$, $\delta > 0$ *tels que, pour tout* p, *pour tout* $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_o]$, *pour tout* $\lambda \geqslant \lambda_o$, *la relation*

$$\varepsilon \max\left(\psi^\sigma_p(u_3)\,,\, \tilde{\beta}^\sigma_{p+3}(\varphi)\right) \leqslant \delta \tag{3.6.1}$$

où $\frac{n}{2} < \sigma \leqslant s - 3$, *entraîne l'estimation suivante :*

$$\phi^\sigma_{p+1}(u_3) \leqslant L\,M_{p+1}\left\{1 + \frac{(\psi^\sigma_p(u_3) + 1)(\tilde{\beta}^\sigma_{p+3}(\varphi) + 1)}{\lambda}\right\} \tag{3.6.2}$$

où L *est une constante* > 0, *indépendante de* p, ε, λ.

Preuve : On utilise le système sous sa forme dérivée (3.4.3). Rappelons que L est de la forme

$$L = \partial_t + \sum_{i=1}^{n-1} B_i(t,x,u,\varphi,\nabla\varphi)\,\partial_i \tag{3.6.3}$$

et $\det B_1 = 0$ pour $x_1 = 0$. Pour utiliser cette dernière hypothèse, nous allons diagonaliser la matrice B_1 :

$$B_1 = P^{-1}\,\Delta P\,, \quad \text{où} \quad P = P(t,x,u,\varphi,\nabla\varphi) \tag{3.6.4}$$

est inversible, fonction analytique de ses arguments.

Posons alors :

$$v_\alpha = P\,\nabla^\alpha u \qquad \text{pour} \qquad |\alpha| = 3\,. \tag{3.6.5}$$

Alors la proposition 1.3.2 et le lemme 3.5 (ii) appliqué aux u_k, $0 \leqslant k \leqslant 2$, entraînent immédiatement que, sous l'hypothèse (3.6.1) :

$$\phi^\sigma_{p+1}(v) \leqslant L\left(\phi^\sigma_{p+1}(u_3) + M_{p+1}\left(1 + \frac{\psi^\sigma_p(u_3)}{\lambda}\right)\right) \tag{3.6.6}$$

le terme en $\frac{1}{\lambda}$ majorant un terme du type h^λ obtenu en tenant compte de la remarque 1.3.3. Notons que les semi-normes en φ n'apparaissent pas, puisque

$$\phi^\sigma_{p+1}(\nabla\varphi) \leqslant \tilde{\alpha}^\sigma_{p+2}(\varphi) \leqslant M_p\,\tilde{\beta}^\sigma_{p+2}(\varphi) \tag{3.6.7}$$

qui se majore par $2\,\delta M_{p+1}$, d'après la condition (3.6.1).

Ecrivant inversement $\nabla^\alpha u = P^{-1} v_\alpha$, on obtient de même :

$$\phi^\sigma_{p+1}(u_3) \leqslant L\left(\phi^\sigma_{p+1}(v) + M_{p+1}\left(1 + \frac{\psi^\sigma_p(v)}{\lambda}\right)\right) \tag{3.6.8}$$

et, en utilisant (3.6.6) au rang $q \leqslant p-1$:

$$\psi^\sigma_p(v) \leqslant L\left(1 + \psi^\sigma_p(u_3)\right)\,. \tag{3.6.9}$$

Il nous suffit donc de démontrer la nouvelle estimation

$$(3.6.2)' \qquad \phi^{\sigma}_{p+1}(v) \leq L\, M_{p+1} \left\{ 1 + \frac{(\psi^{\sigma}_{p}(v)+1)(\tilde{\beta}^{\sigma}_{p+3}(\varphi)+1)}{\lambda} \right\} .$$

L'intérêt est que v_α est solution du système :

$$(3.6.10) \qquad \tilde{L}\, v_\alpha = h_\alpha \quad , \qquad \text{où}$$

$$(3.6.11) \qquad \tilde{L} = \partial_t + \Delta\, \partial_1 + \sum_{j=2}^{n-1} P\, B_j\, P^{-1}\, \partial_j \quad ,$$

Δ étant diagonale, de première valeur propre nulle, les autres étant non nulles. En revanche $h_\alpha = h_\alpha(t,x,u_k,v,\nabla^\ell \varphi)_{\substack{0\leq k\leq 2\\ 0\leq \ell\leq 2}}$, ce qui fait perdre une dérivée en φ par rapport à l'équation 3.4.3. (C'est pour cette raison que nous avons dû dériver 3 fois le système (3.2.1)', et non deux fois).
Remarquons maintenant que les coefficients de $\tilde{L}$ sont H^s, donc (puisque $s > \frac{n}{2}+1$) on peut utiliser le lemme 3.3, avec $r=\sigma$. En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 2.1.7 (à ceci près que l'inégalité a priori ne fournit pas de second terme, en raison de la stricte hyperbolicité) on est ramené à démontrer l'estimation suivante : si $|\beta| = p+1$,

$$(3.6.12) \qquad \| (T-t)^{\lambda p}\, \tilde{L}\, Z^\beta v_\alpha \|_\sigma \leq Lp \left\{ \phi^{\sigma}_{p+1}(v) + M_{p+1} \left(1+\psi^{\sigma}_{p}(v)\right)\left(1+\tilde{\beta}^{\sigma}_{p+3}(\varphi)\right)\right\}.$$

Pour cela, remarquons que, d'après (3.6.10) :

$$(3.6.13) \qquad \tilde{L}\, Z^\beta v_\alpha = [\tilde{L}, Z^\beta]\, v_\alpha + Z^\beta h_\alpha \; .$$

En tenant compte de :

$$(3.6.14) \qquad \phi^{\sigma}_{p+1}(\nabla^2 \varphi) = \tilde{\alpha}^{\sigma}_{p+3}(\varphi) \leq M_{p+1}\, \tilde{\beta}^{\sigma}_{p+3}(\varphi)$$

et en appliquant la proposition 1.3.2, on a :

$$(3.6.15) \qquad \| (T-t)^{\lambda p}\, Z^\beta h_\alpha \|_\sigma \leq L \left(\phi^{\sigma}_{p+1}(v) + M_{p+1} \left(\psi^{\sigma}_{p}(v) + \tilde{\beta}^{\sigma}_{p+3}(\varphi)\right)\right).$$

Pour estimer la contribution du commutateur intervenant dans (3.6.13), on écrit :

(3.6.16) $$[\tilde{L},Z^\beta]v_\alpha = [\Delta,Z^\beta]\partial_1 v_\alpha + \Delta[\partial_1,Z^\beta]v_\alpha + \sum_{j\geq 2} [C_j,Z^\beta]Z_j v_\alpha$$

où $$C_j = P B_j P^{-1} = C_j(t,x,u,\varphi,\nabla\varphi) .$$

Pour majorer le troisième terme de (3.6.16), on procède exactement comme dans le lemme 2.1.6 :

(3.6.17) $$[C_j,Z^\beta] = - \sum_{\gamma<\beta} \binom{\beta}{\gamma} Z^{\beta-\gamma} C_j Z^\gamma$$

et la contribution de $Z^{\beta-\gamma} C_j$ se majore par M_{p+1-q} si $|\gamma| = q$, d'après le lemme 3.5 (ii) et l'inégalité (3.6.7). On obtient comme majorant :

$$Lp \left(\phi^\sigma_{p+1}(v) + M_{p+1} \left(1 + \psi^\sigma_p(v)\right)\right) .$$

• Passons à l'estimation des deux premiers termes de (3.6.16): On écrit comme d'habitude

(3.6.18) $$[\Delta,Z^\beta]\partial_1 v_\alpha = - \sum_{\gamma<\beta} \binom{\beta}{\gamma} Z^{\beta-\gamma} \Delta Z^\gamma \partial_1 v_\alpha$$

(3.6.19) $$\Delta[\partial_1,Z^\beta]v_\alpha = \sum_{\gamma<\beta} \binom{\beta}{\gamma} a_{\beta,\gamma} \Delta Z^\gamma \partial_1 v_\alpha$$

où $|a_{\beta,\gamma}| \leq 1$. Il faut "changer ∂_1 en Z". Pour cela, estimons la contribution de chaque composante de v_α.

Notons $\Delta = \mathrm{diag}\ (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, avec $\lambda_1 = 0$ si $x_1 = 0$ et $\lambda_k \neq 0$ pour $k \in \{2,\dots,m\}$.

a) Pour $k \geq 2$, l'équation (3.6.10) permet alors d'exprimer $\partial_1 v^k_\alpha$ en fonction de h_α et des $Z_j v_\alpha$, et la contribution correspondante dans (3.6.12) est majorée par

$$Lp \left(\phi^\sigma_{p+1}(v) + M_{p+1} \left(1 + \psi^\sigma_p(v) + \tilde{\beta}^\sigma_{p+3}(\varphi)\right)\right) .$$

b) Pour la première composante, on remarque que, puisque λ_1 s'annule lorsque $x_1 = 0$, c'est le cas aussi de $Z^{\beta-\gamma}\lambda_1$. On utilise alors l'inégalité élémentaire suivante :

(3.6.20) $$\| a\,b \|_{\sigma} \leq \| a \|_{\sigma+1} \; \| x,b \|_{\sigma}$$

si $a = 0$ pour $x_1 = 0$, $\sigma > \frac{n}{2}$. (Il suffit d'écrire

$$a(x_1,y') = x_1 \int_0^1 \partial_1 a(\theta x_1,y')d\theta) \;.$$

On applique (3.6.20) à $a = Z^{\beta-\gamma}\lambda_1 \times (T-t)^{\lambda(p-|\gamma|)}$ et $b = Z^{\gamma}\,\partial_1 v \times (T-t)^{\lambda(|\gamma|-1)}$.

Il reste alors à estimer les $\phi_q^{\sigma+1}(\lambda_1)$ pour $1 \leq q \leq p+1$, avec $\lambda_1 = \lambda_1(t,x,u,\varphi,\nabla\varphi)$, ce que l'on fait à l'aide de la proposition 1.3.2, puis du lemme 3.5 (iii). La contribution dans (3.6.12) se majore finalement par :

$$Lp\left(\phi_{p+1}^{\sigma}(v) + M_{p+1}\left(1+\psi_p^{\sigma}(v)\right)\left(1+\tilde{\beta}_{p+3}^{\sigma}(\varphi)\right)\right)$$

et (3.6.12) est démontrée.

q.e.d.

3.7. Dérivation de l'équation caractéristique.

Lemme 3.7 : Soit $\tau \in \left]\frac{n-1}{2}, s-\frac{7}{2}\right]$. *Sous les hypothèses du paragraphe 3.2, il existe* $\varepsilon_o > 0$, $\lambda_o > 0$, $\delta > 0$, *tels que, pour tout* $\varepsilon \in]0,\varepsilon_o]$, *pour tout* $\lambda \geq \lambda_o$, *pour tout* p, *la relation*

(3.7.1) $$\varepsilon \; max\left(\psi_p^{\tau+1/2}(u_3)\,,\,\beta_{p+3}^{\tau}(\varphi)\right) \leq \delta$$

entraîne l'estimation suivante :

(3.7.2) $$\alpha_{p+4}^{\tau}(\varphi) \leq L\left\{\frac{1}{\lambda}\,\phi_{p+1}^{\tau+1/2}(u_3) + M_{p+1}\left[1+\frac{1}{\lambda}\left(\psi_p^{\tau+1/2}(u_3) + \beta_{p+3}^{\tau}(\varphi)\right)\right]\right\}$$

où L *est une constante positive, indépendante de* p, ε, λ.

Preuve : C'est celle des lemmes 3.2 et 3.3 de [5], à partir des équations (3.4.4), avec la simplification dûe à la stricte hyperbolicité (équations scalaires quasi-linéaires d'ordre 1, à coefficients réels), mais en tenant compte de la présence du "contrôle" $(u_k)_{0\leq k\leq 3}$. Ainsi, le champ M étant à coefficients H^s d'après (3.4.5), on doit utiliser l'inégalité (3.3.1) plutôt que le lemme 2.1 de [5].

L'estimation des dérivées de u tient compte de ce que :

$$\nabla_j \left(w_{|x_1=0}\right) = (Z_j\, w)_{|x_1=0} \quad , \qquad \text{et :}$$

$$|w_{|x_1=0}|_\tau \leqslant C \; \|w\|_{\tau+1/2} \quad .$$

Enfin, pour ramener les semi-normes de u_o , u_1 , u_2 à celle de u_3, on utilise comme d'habitude le lemme 3.5 (ii).

q.e.d.

Notons dans le second membre de (3.7.2) l'absence de termes quadratiques par rapport à ψ_p ou β_{p+3} : en effet, de tels termes ne pourraient provenir que de l'estimation du crochet $[M,\nabla^\beta]\,\nabla^\alpha\varphi$, pour $|\beta| = p+1$; or le lemme 3.5 (ii) et l'inégalité (3.7.1) montrent que les coefficients de M (voir (3.4.5)) se comportent à ce niveau comme des fonctions analytiques. (Voir aussi la démonstration du lemme 3.6, où les termes quadratiques n'interviennent que dans la dernière partie de la preuve (b) à cause des estimations en norme $H^{\sigma+1}$, pour lesquelles λ_1 ne se comporte plus comme une fonction conormale analytique). Une telle simplification (qui n'est d'ailleurs pas essentielle dans la preuve) est dûe au fait qu'on a dérivé suffisamment l'équation au paragraphe 3.4.

3.8. Formule de récurrence et conclusion.

Lemme 3.8 : On se place sous les hypothèses du paragraphe 3.2. Alors il existe $\varepsilon_o > 0$, $\lambda_o > 0$, $\delta_o > 0$, $L_o > 0$, *tels que, pour tout* $\varepsilon \in]0,\varepsilon_o]$, *pour tout* $\lambda \geqslant \lambda_o$, *pour tout* $p \geqslant 1$, *la relation*

$$(3.8.1) \qquad \varepsilon \max\left(\psi_p^{s-3}(u_3)\,,\, \beta_{p+3}^{s-7/2}(\varphi)\right) \leqslant \delta_o$$

entraîne l'inégalité suivante :

$$(3.8.2) \quad \max\left(\phi_{p+1}^{s-3}(u_3)\,,\, \alpha_{p+4}^{s-7/2}(\varphi)\right) \leqslant L_o\, M_{p+1} \left\{1 + \frac{\psi_p^{s-3}(u_3)^2 + \beta_{p+3}^{s-7/2}(\varphi)^2}{\lambda}\right\}.$$

• Supposons un instant ce lemme démontré et voyons comment on achève la démonstration du théorème 3.1 : on montre que

$$\sup_{p\geq 1}\left(\max\left(\psi_p^{s-3}(u_3)\,,\,\beta_{p+3}^{s-7/2}(\varphi)\right)\right) < +\infty \quad ,$$

ce qui est suffisant, comme on l'a remarqué à la fin du paragraphe 3.5.

Notons $s_p = \max\left(\psi_p^{s-3}(u_3)\,,\,\beta_{p+3}^{s-7/2}(\varphi)\right)$, et soit H tel que : $H \geq 2\,L_o$, $H \geq s_1$ (remarquons que s_1 ne dépend ni de λ, ni de ε).

Fixant alors ε tel que $\varepsilon H \leq \delta_o$, $\varepsilon \in]0,\varepsilon_o]$, et λ tel que $\lambda \geq \lambda_o$, $\lambda \geq 4\,L_o H$.

Alors, si $s_p \leq H$, on a, d'après (3.8.2) :

$$s_{p+1} \leq \max\left[s_p\,,\,L_o\left(1+\frac{2\,s_p^2}{\lambda}\right)\right] \leq \max\left[H\,,\,L_o\left(1+\frac{2\,H^2}{\lambda}\right)\right] \leq H \quad ,$$

et le résultat est démontré par récurrence sur p.

Preuve du lemme 3.8 : On considère ε_o, λ_o, δ, L mis en évidence aux lemmes 3.6 et 3.7. Soit $\delta_o \leq \delta$.

1ère étape : (3.8.1) entraîne (3.6.1) avec $\sigma = s-\frac{7}{2}$ ($> \frac{n}{2}$ par hypothèse).
De plus, d'après (3.5.1)', on a alors :

$$\tilde{\beta}_{p+3}^{s-7/2} \leq \delta_o \quad , \tag{3.8.3}$$

et, en appliquant le lemme 3.6, avec $\sigma = s-\frac{7}{2}$, on obtient, en ne tenant pas compte de λ :

$$\phi_{p+1}^{s-7/2} \leq L\,M_{p+1}\left[1+\psi_p^{s-7/2}\right] \quad , \tag{3.8.4}$$

quitte à augmenter L (ce que nous nous réservons de faire à chaque inégalité à venir si nécessaire, de manière indépendante de ε, λ, p, bien sûr !).

2ème étape : (3.8.1) entraîne (3.7.1) avec $\tau = s-4$ ($>\frac{n-1}{2}$ par hypothèse).
En appliquant le lemme 3.7 avec cette valeur de τ, on obtient, sans tenir compte de λ, et compte tenu de (3.8.4) :

(3.8.5) $$\alpha^{s-4}_{p+4} \leqslant L\, M_{p+1} \left[1 + \psi^{s-7/2}_{p} + \beta^{s-4}_{p+3} \right].$$

On en déduit

(3.8.6) $$\beta^{s-4}_{p+4} \leqslant L \left(1 + \psi^{s-7/2}_{p} + \beta^{s-4}_{p+3} \right) ,$$

puis, par l'inégalité (3.5.2)' du lemme 3.5 :

(3.8.7) $$\tilde{\beta}^{\,s-3}_{p+3} \leqslant L \left(1 + \psi^{s-7/2}_{p} + \beta^{s-4}_{p+3} \right) .$$

(3.8.7) entraîne en particulier :

(3.8.8) $$\varepsilon\, \tilde{\beta}^{\,s-3}_{p+3} \leqslant L\, (\varepsilon_o + 2\, \delta_o) ,$$

d'après (3.8.1).

Choisissant ε_o assez petit $(\leqslant \frac{\delta}{2L})$ et $\delta_o \leqslant \frac{\delta}{4L}$, on en déduit que (3.6.1) est vérifiée cette fois pour $\sigma = s - 3$.

3ème étape : On applique le lemme 3.6 avec $\sigma = s - 3$:

(3.8.9) $$\phi^{s-3}_{p+1} \leqslant L\, M_{p+1} \left\{ 1 + \frac{(\psi^{s-3}_{p})^2 + (\beta^{s-4}_{p+3})^2}{\lambda} \right\} ,$$

compte tenu de (3.8.7).

4ème étape : On applique le lemme 3.7 avec $\tau = s - \frac{7}{2}$, et en utilisant (3.8.9) :

(3.8.10) $$\alpha^{s-7/2}_{p+4} \leqslant L\, M_{p+1} \left\{ 1 + \frac{(\psi^{s-3}_{p})^2 + (\beta^{s-7/2}_{p+3})^2}{\lambda} \right\}$$

et (3.8.9), (3.8.10) donnent l'inégalité (3.8.2) annoncée, ce qui achève la démonstration.

q.e.d.

APPENDICE 1 : SUR LA PROPAGATION DU FRONT D'ONDE ANALYTIQUE.

Théorème : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant :*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad , \quad \partial_1^k u \in H^s_{loc}(\Omega) \quad (s \in \mathbb{R}) , \qquad et :$$

(1) $$\forall \omega \subset\subset \Omega , \exists C > 0 , \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\partial_1^k u\|_{H^s(\overline{\omega})} \leqslant C^{k+1} k!.$$

Alors $WF_a(u)$ se propage le long des lignes de champ de ∂_1, en d'autres termes :

si $(x_o, \xi^o) \in WF_a(u)$, alors $(x_o + t\, e_1, \xi^o) \in WF_a(u)$ pour tout t dans la composante connexe de 0 de l'ensemble $\{\tau \in \mathbb{R},\ (x_o + \tau\, e_1) \in \Omega\}$.

Preuve : On va plutôt montrer la contraposée de l'assertion ci-dessus, qui revient exactement à y remplacer $\in$ par $\notin$. D'autre part, on peut remplacer Ω par $\Omega' \subset\subset \Omega$. Enfin, on peut imposer en plus $|t| < \delta$, si bien sûr $\delta > 0$ ne dépend que de Ω' et pas de x_o.

Finalement, on se ramène à prouver ce qui suit :

Soit $\Omega' \subset\subset \Omega$. Il existe $\delta > 0$ tel que, si $(x_o, \xi^o) \notin WF_a(u)$ avec $x_o \in \Omega'$, alors $(x_o + t\, e_1, \xi^o) \notin WF_a(u)$ pour $|t| < \delta$, t étant dans la composante connexe de 0 de l'ensemble $\{\tau \in \mathbb{R},\ x_o + \tau\, e_1 \in \Omega'\}$.

En fait, si C est la constante associée à Ω' par (1), on va voir que $\delta = \frac{1}{C}$ convient.

Quitte à tronquer u entre Ω' et Ω, on peut maintenant supposer $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$.

Par hypothèse, il existe un voisinage complexe W de $z_o = x_o - i\,\xi^o$ et $\rho > 0$ tels que :

(2) $$\forall z \in W \quad , \quad |Tu(z,\lambda)| \leqslant C_1\, e^{\frac{\lambda}{2}(|\xi|^2 - \rho)}$$

où

$$(3)\qquad \begin{cases} Tu(z,\lambda) = \int e^{-\frac{\lambda(z-y)^2}{2}} u(y)\,dy \\ \xi = \operatorname{Im} z \quad , \quad \lambda \geqslant 1 \ . \end{cases}$$

Soit maintenant $t \in \mathbb{R}$ tel que $[x_0, x_0 + t\,e_1] \subset \Omega'$, $|t| < \delta$. On note $W^t = W + t\,e_1$. Quitte à restreindre W, on peut supposer que $\operatorname{Re} W^\tau \subset \Omega'$ pour $\tau \in [0,t]$.
Pour $z \in W^t$, on a, en posant $z - t\,e_1 = \tilde{z}\ (\in W)$:

$$(4)\qquad \begin{aligned} Tu(z,\lambda) &= \int e^{-\frac{\lambda(\tilde{z}-y)^2}{2}} u(y + t\,e_1)\,dy \\ &= \sum_{k=0}^{N} T(\partial_1^k u)\,(\tilde{z},\lambda)\,\frac{t^k}{k!} + R_N(\tilde{z},\lambda) \end{aligned}$$

où :

$$(5)\qquad R_N(\tilde{z},\lambda) = \frac{1}{N!}\int_0^t \int e^{-\frac{\lambda(\tilde{z}-y)^2}{2}} \partial_1^{N+1} u\,(y + \tau\,e_1)\,(t-\tau)^N\,d\tau\,dy \ .$$

Appliquant (1) avec $k = N + 1$, on obtient, quitte à restreindre W :

$$(6)\qquad |R_N(\tilde{z},\lambda)| \leqslant C_2\,\lambda^p\,(C|t|)^{N+1}\,e^{\frac{\lambda}{2}\times|\xi|^2}\left(1 + C_2^N\,e^{-\frac{b\lambda}{2}}\right)$$

où p est un entier fixe, dépendant du réel s, et où $b > 0$.
D'autre part, en remarquant que T est un opérateur de convolution, on a :

$$T(\partial_1^k u) = \frac{\partial^k T(u)}{\partial z_1^k}$$

et donc, d'après les inégalités de Cauchy et la relation (2) :

$$(7)\qquad |T(\partial_1^k u)\,(z,\lambda)| \leqslant C_1\,C_3^k\,k!\,e^{\frac{\lambda}{2}[|\xi|^2 - \rho]}$$

$$\text{pour tout } \tilde{z} \in \tilde{W} \subset\subset W .$$

De (4), (6), (7), on tire, quitte à augmenter C_3 et à diminuer ρ :

$$(8)\qquad \forall z \in \tilde{W}^t \ , \quad |Tu(z,\lambda)| \leqslant C_4\,\lambda^p\,e^{\frac{\lambda}{2}|\xi|^2}\left(\sum_{k=0}^{N}\left(C_3|t|\right)^k e^{-\frac{\rho\lambda}{2}} + (C|t|)^{N+1}\right) .$$

Prenant $|t| < \frac{1}{C}$, on a $\beta \equiv C\,|t| \in]0,1[$.

D'autre part : $\sum_{k=0}^{N} (C_3|t|)^k \leq \alpha^{N+1}$ où $\alpha > 0$. Dès lors :

(9) $$\forall\, z \in \tilde{W}^t \quad , \quad |Tu(z,\lambda)| \leq C_4\, \lambda^p\, e^{\frac{\lambda}{2}|\xi|^2} \left(\alpha^{N+1}\, e^{-\frac{\rho\lambda}{2}} + \beta^{N+1} \right).$$

<u>*Lemme*</u> *: Si $\alpha > 0$ et $\beta \in]0,1[$, on a :*

$$\underset{N \in \mathbb{N}}{Min} \left(\alpha^N \varepsilon + \beta^N \right) \leq C_0\, \varepsilon^{1/r} ,$$

où $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, pour tout $\varepsilon > 0$.

<u>Preuve</u> : Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha \leq \beta^{-p}$ (car $\beta < 1$). D'autre part $\beta^N \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$, soit N le plus petit entier tel que :

$$\beta^N \leq \varepsilon^q \qquad \text{où} \qquad q \in \mathbb{Q}_*^+ \quad \text{est à préciser plus loin.}$$

Alors $\alpha^N \varepsilon \leq \beta^{-pN} \varepsilon = (\beta^N)^{-p}\, \varepsilon$.

Or par définition de N $\beta^N \geq \varepsilon^q\, \beta$. Donc :

$$\alpha^N\, \varepsilon \leq \beta^{-p}\, \varepsilon^{1-pq} .$$

Prenant q tel que $1 - pq = q$, i.e. $q = \frac{1}{1+p}$, on obtient $\alpha^N \varepsilon + \beta^N \leq (\beta^{-p}+1)\,\varepsilon^q$, d'où le résultat avec $r = 1 + p$.

Revenant à (9) et choisissant un N approprié, on obtient :

$$|Tu(z,\lambda)| \leq C_4\, \lambda^p\, e^{\frac{\lambda}{2}[|\xi|^2 - \sigma]} \qquad \text{où} \qquad \sigma > 0$$

$$\leq C_5\, e^{\frac{\lambda}{2}[|\xi|^2 - c]} \qquad \text{avec} \qquad c > 0$$

et ceci pour tout $z \in \tilde{W}^t$ $(\ni x_0 + t e_1 - i\, \xi^0)$.

C.Q.F.D.

On peut maintenant donner une version invariante du théorème.

<u>*Théorème*</u> : *Soit Z un champ de vecteurs analytiques sur Ω et soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifiant :*

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad , \quad Z^k u \in H^s_{loc}(\Omega) \qquad et :$$

$$\forall \omega \subset\subset \Omega \quad , \quad \exists\, C > 0 \quad , \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad , \quad \| Z^k u \|_{H^s(\bar{\omega})} \leqslant C^{k+1}\, k! \; .$$

Alors $WF_a(u)$ se propage le long des bicaractéristiques de Z.

<u>Preuve</u> : On peut bien sûr raisonner localement.

Si $Z(x_o) \neq 0$, alors il existe des coordonnées analytiques telles que $Z = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Or, dans les coordonnées correspondantes dans $T^*\Omega$, les bicaractéristiques de Z sont exactement les droites dirigées par e_1 . On se ramène donc immédiatement au théorème précédent.

Si $Z(x_o) = 0$ (le théorème n'a alors d'intérêt que lorsque le zéro est simple ; il y a propagation dans la fibre $T^*_{x_o}\Omega$) on se ramène au cas précédent en se plaçant dans $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}$ avec $\tilde{u}(x,t) = u(x)$, et $\tilde{Z} = \partial_t + Z$, qui est non singulier.

C.Q.F.D.

<u>Remarque</u> : En utilisant la même méthode, on montre un théorème analogue pour $WF(u)$.

En conséquence, les corollaires 1.2.2, 1.2.3 et 2.3 restent vrais pour les singularités <u>C^∞</u> des distributions conormales analytiques.

APPENDICE 2 : REPRESENTATION INTEGRALE DES DISTRIBUTIONS CONORMALES ANALYTIQUES.

Rappelons d'abord deux définitions, pour lesquelles nous suivons F. Treves [18].

Définitions : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Une fonction $a = a(x,\xi)$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^\nu$ est un symbole analytique d'ordre m si elle est C^∞ et si, pour tout compact K de Ω, il existe un voisinage ouvert $\tilde{K}$ de K dans $\mathbb{C}^n$ et $\varepsilon > 0$ tels que :

- *a se prolonge à l'ouvert $\tilde{K} \times \{\zeta \in \mathbb{C}^\nu, |Im\,\zeta| < \varepsilon |Re\,\zeta|\}$ de façon holomorphe*
- $$\sup_{z \in \tilde{K},\ |Im\,\zeta| < \varepsilon |Re\,\zeta|} |a(z,\zeta)|\ (1+|\zeta|)^{-m} < +\infty .$$

On note $S_a^m(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ l'espace des symboles analytiques d'ordre m sur $\Omega \times \mathbb{R}^\nu$.

2. Une fonction $a = a(x,\xi)$ sur $\Omega \times \mathbb{R}^\nu$ est un symbole pseudo-analytique d'ordre m si elle est C^∞ et si, pour tout compact K de Ω, il existe des constantes $C > 0$ et $R \geqslant 0$ telles que :

$$\forall\, x \in K,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \forall \beta \in \mathbb{N}^\nu,\ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leqslant C^{|\alpha|+|\beta|+1}\ \alpha!\ \beta!\ (1+|\xi|)^{m-|\beta|}$$
$$\text{pour } |\xi| \geqslant R\,|\beta| .$$

On note $\tilde{S}_a^m(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ l'espace de tels symboles.

Remarque : On a bien sûr $S_a^m \subset \tilde{S}_a^m$ ($a \in S_a^m$ si et seulement si a vérifie les inégalités ci-dessus avec $R = 0$).

Enonçons maintenant le résultat de ce paragraphe :

Théorème : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit Σ la surface $\{x_1 = 0\}$.*

a) Soit $a = a(x, \xi_1) \in \tilde{S}^m_a(\Omega, \mathbb{R})$. Alors la distribution

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i x_1 \xi_1} a(x, \xi_1)\, d\xi_1$$

appartient à $H^s_a(\Sigma)$ sur Ω pour tout $s < -m - \frac{1}{2}$.

b) Soit $u \in H^s_a(\Sigma)$ sur Ω. Alors tout point x_0 de Ω a un voisinage ouvert $\omega \subset\subset \Omega$ tel qu'il existe $a \in \tilde{S}^m_a(\omega, \mathbb{R})$ et f analytique sur ω vérifiant

$$\forall x \in \omega \quad , \quad u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i x_1 \xi_1} a(x, \xi_1)\, d\xi_1 + f(x) \ .$$

Ici $m = -s$ si $s < 0$, $m = -\frac{s}{2}$ si $s \geq 0$.

Corollaire : *Le théorème ci-dessus est encore vrai en remplaçant $\tilde{S}^m_a$ par S^m_a.*

Preuve : Ceci n'a d'intérêt que pour le b). Or si $a \in \tilde{S}^m_a(\omega, \mathbb{R})$, il existe, pour tout $\omega' \subset\subset \omega$, un élément b de $S^m_a(\omega', \mathbb{R})$ tel que : (voir [18]) pour x dans un voisinage complexe de ω' :

$$|b(x,\xi_1) - a(x,\xi_1)| \leq C\, e^{-|\xi_1|/C} \qquad \text{où} \qquad C > 0 \ .$$

On en déduit que l'intégrale de Fourier associée à b-a est une fonction analytique.

Remarque : Sans la spécification analytique, le théorème ci-dessus est bien connu. Ici, nous utilisons des techniques de Baouendi-Goulaouic-Métivier [6].

1. Démonstration du a).

Soit u définie par (1), et soit $\omega \subset\subset \Omega$.

Soit $s \in \mathbb{R}$. On va montrer que, sous l'hypothèse $s + m < -\frac{1}{2}$, il existe $C > 0$ telle que :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, $(x_1\,\partial_1)^k\,\partial^\alpha_{x'}\,u \in H^s(\overline{\omega})$, avec l'estimation :

(2) $$\|(x_1\,\partial_1)^k\,\partial^\alpha_{x'}\,u\|_{H^s(\overline{\omega})} \leqslant C^{k+|\alpha|+1}\,k!\,\alpha!\ .$$

Posons $v=(x_1\,\partial_1)^k\,\partial^\alpha_{x'}\,u$. D'après (1), on a :

$$v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1\,\partial_1)^k\,(e^{i\,x_1\,\xi_1}\,\partial^\alpha_{x'}\,a(x,\xi_1))\,d\,\xi_1\ ,$$

donc v est somme de 2^k termes du type :

$$w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1\,\partial_1)^h\,(e^{i\,x_1\,\xi_1})\,(x_1\,\partial_1)^{k-h}\,\partial^\alpha_{x'}\,a(x,\xi_1)\,d\,\xi_1\ .$$

Il suffit donc de montrer une estimation du type (2) pour $\|w\|_{H^s(\overline{\omega})}$. Notons $a_{k-h,\alpha}=(x_1\,\partial_1)^{k-h}\,\partial^\alpha_{x'}\,a$.

Nous allons développer $(x_1\,\partial_1)^h\,(e^{i\,x_1\,\xi_1})$. Pour cela montrons le lemme suivant :

Lemme :

(3) $$(x_1\,\partial_1)^h = \sum_{j=1}^{h} \mu_{h,j}\,x_1^j\,\partial_1^j\ , \qquad \text{où :}$$

(3)' $$|\mu_{h,j}| \leqslant j^{h-j}\binom{h}{j} \qquad \text{pour } j\leqslant h\ .$$

Preuve : On procède par récurrence sur h.

$$(x_1\,\partial_1)^{h+1} = \sum_{j=1}^{h} \mu_{h,j}\,x_1^j\,\partial_1^j\,(x_1\,\partial_1) = \sum_{j=1}^{h} \mu_{h,j}\,(x_1^{j+1}\,\partial_1^{j+1} + x_1^j\,\partial_1^j)\ .$$

On en déduit :

(4) $$\mu_{h+1,j} = \mu_{h,j-1} + j\,\mu_{h,j}\ ,$$

avec la convention : $\mu_{h,0}=0$, $\mu_{h,h+1}=0$.

Remarquons de plus que $\mu_{1,1}=1$.

Si on a (3)' pour $j\leqslant h$, alors d'après (4) :

$$\mu_{h+1,j} \leqslant (j-1)^{h-j+1} \binom{h}{j-1} + j^{h-j+1} \binom{h}{j} \leqslant j^{h-j+1} \binom{h+1}{j} . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On obtient ainsi :

$$(5) \qquad w(x) = \sum_{j=1}^{h} i^j \mu_{h,j} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^j \xi_1^j e^{i x_1 \xi_1} a_{k-h,\alpha}(x,\xi_1)\, d\xi_1 .$$

Nous allons estimer chacune des intégrales intervenant dans (5), au sens de la norme $H^s(\overline{\omega})$. Pour cela, démontrons le lemme suivant.

Lemme 2. :

i) Soit $m \in \mathbb{R}$, *et soit* s *tel que* $m+s < -\frac{1}{2}$. *Alors il existe une constante* A *et un entier* N *tels que si* $p = p(x,\xi_1)$ *est définie au voisinage de* $\overline{\omega} \times \mathbb{R}$ *et vérifie :*

$$(6) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad , \quad \sup_{x \in \overline{\omega}} |\partial_x^\alpha p(x,\xi_1)| \leqslant C_\alpha (1 + |\xi_1|)^m$$

alors q *définie par :*

$$(7) \qquad q(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i x_1 \xi_1} p(x,\xi_1)\, d\xi_1 , \quad \underline{\text{est}} \text{ dans } H^s(\overline{\omega})$$

et vérifie :

$$\|q\|_{H^s(\overline{\omega})} \leqslant A \sup_{|\alpha| \leqslant N} C_\alpha .$$

ii) Soit $s \in \mathbb{R}$. *Alors il existe une constante* A *et un entier* N *tels que : pour tout* $m \in \mathbb{R}$, *si* p *vérifie (6), et de plus :*

$$(8) \qquad p(x,\xi_1) = 0 \quad \text{si} \quad |\xi_1| > \rho$$

alors la fonction q *définie par (7) est dans* $H^s(\overline{\omega})$, *et on a :*

$$\|q\|_{H^s(\overline{\omega})} \leqslant A \sup_{|\alpha| \leqslant N} C_\alpha (1+\rho)^{m+s+1} .$$

Note : Le résultat du ii) est bien sûr plus fort que celui du i), puisqu'on a éliminé la dépendance des constantes A et N par rapport à m.

Preuve :

i) Soit χ C^∞ à support compact, valant 1 au voisinage de $\bar{\omega}$, $p(\cdot,\xi_1)$ étant définie au voisinage de supp χ. Il suffit d'estimer $\|\chi q\|_{H^s}$. On a :

$$\widehat{\chi q}\,(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\chi p}\,(\eta - \xi_1 e_1, \xi_1)\, d\xi_1 \quad ,$$

où $\widehat{\chi p}$ est la transformée de Fourier par rapport à x. Il existe une constante C telle que, pour tout N, on ait :

$$|\widehat{\chi p}(\zeta,\xi_1)| \leqslant \frac{C}{(1+|\zeta|)^N} \sup_{|\alpha|\leqslant N} |\partial_x^\alpha(\chi p)| \leqslant \frac{M_N}{(1+|\zeta|)^N} \sup_{|\alpha|\leqslant N} (C_\alpha)\ (1+|\xi_1|)^m \ .$$

On en déduit :

$$|\widehat{\chi q}(\eta)| \leqslant M_N \sup_{|\alpha|\leqslant N} (C_\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+|\xi_1|)^m}{(1+|\eta-\xi_1 e_1|)^N}\, d\xi_1 \ .$$

Mais :

$$1+|\eta-\xi_1 e_1| = 1+|\eta'|+|\eta_1-\xi_1| \geqslant (1+|\eta'|)^{1/2}(1+|\eta_1-\xi_1|)^{1/2}$$

donc :

$$(9) \qquad |\widehat{\chi q}(\eta)| \leqslant \frac{M_N \sup C_\alpha}{(1+|\eta'|)^{N/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+|\xi_1|)^m}{(1+|\eta_1-\xi_1|)^{N/2}}\, d\xi_1 \ .$$

Lemme 3. : Soit $\nu > 1$, et soit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que : $\nu-\mu>1$, $\mu > -\nu$. Alors

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+|t|)^\mu}{(1+|x-t|)^\nu}\, dt \leqslant C_{\mu,\nu}\,(1+|x|)^\mu \ .$$

Preuve : • si $\mu > 0$,

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+|x-t|)^{\mu}}{(1+|t|)^{\nu}}\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+|x|+|t|)^{\mu}}{(1+|t|)^{\nu}}\, dt$$

$$\leqslant (1+|x|)^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{|t|}{1+|x|}\right)^{\mu}}{(1+|t|)^{\nu}}\, dt$$

$$\leqslant (1+|x|)^{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+|t|)^{\mu}}{(1+|t|)^{\nu}}\, dt \ .$$

- si $\mu \leqslant 0$, alors $\mu = -\lambda$, $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda < \nu$

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+|x-t|)^{\lambda}(1+|t|)^{\nu}} = \int_{|x-t| < \frac{|x|}{2}} + \int_{|x-t| < \frac{|x|}{2}} \ .$$

Or :

$$\int_{|x-t| > \frac{|x|}{2}} \frac{dt}{(1+|x-t|)^{\lambda}(1+|t|)^{\nu}} \leqslant \left(\int \frac{dt}{(1+|t|)^{\nu}} \right) \frac{1}{\left(1+\frac{|x|}{2}\right)^{\lambda}}$$

et

$$\int_{|x-t| < \frac{|x|}{2}} \frac{dt}{(1+|x-t|)^{\lambda}(1+|t|)^{\nu}} \leqslant \int_{\frac{|x|}{2} < |t| < \frac{3|x|}{2}} \frac{dt}{(1+|t|)^{\nu}}$$

$$= C_{\nu} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{|x|}{2}\right)^{\nu-1}} - \frac{1}{\left(1+\frac{3|x|}{2}\right)^{\nu-1}} \right)$$

$$\leqslant C'_{\nu} \frac{1}{(1+|x|)^{\nu}} \ .$$

On en déduit le résultat, puisque $\lambda < \nu$. C.Q.F.D.

Du lemme 3 et de (9), on tire

$$|\widehat{Xq}(\eta)| \leqslant C_{m,N/2}\, M_N \sup_{|\alpha| \leqslant N} C_{\alpha} \frac{(1+|\eta_1|)^{m}}{(1+|\eta'|)^{N/2}}$$

si $N > \max(2,2(m+1),-m)$.

Le membre de gauche est dans $L^2((1+|\eta|^2)^s d\eta, \mathbb{R}^n)$ dès que $s+m < -\frac{1}{2}$, $s-\frac{N}{2} < -\frac{n-1}{2}$. N étant choisi ainsi, on obtient le résultat annoncé dans (i).

ii) De (6) et (8), on tire : $|\partial_x^\alpha p(x,\xi_1)| \leqslant C_\alpha (1+\rho)^m \quad \forall x \in \overline{\omega}$. En raisonnant comme dans (i), on obtient :

$$|\widehat{\chi p}(\zeta,\xi_1)| \leqslant \frac{M_N}{(1+|\zeta|)^N} \sup_{|\alpha|\leqslant N} C_\alpha (1+\rho)^m \quad , \qquad \text{puis :}$$

$$|\widehat{\chi q}(\eta)| \leqslant M_N \sup_{|\alpha|\leqslant N} C_\alpha (1+\rho)^m \int_{|\xi_1|\leqslant\rho} \frac{d\xi_1}{(1+|\eta-\xi_1 e_1|)^N}$$

$$\leqslant \frac{M_N \sup_{|\alpha|\leqslant N} C_\alpha (1+\rho)^m}{(1+|\eta'|)^{N/2}} \int_{|\xi_1|\leqslant\rho} \frac{d\xi_1}{(1+|\eta_1-\xi_1|)^{N/2}} \; .$$

En prenant la norme du membre de gauche dans $L^2((1+|\eta|^2)^s d\eta, \mathbb{R}^n)$, on obtient :

$$||\chi q||_{H^s} \leqslant (1+\rho)^m M'_N \sup_{|\alpha|\leqslant N} C_\alpha \int_{|\xi_1|\leqslant\rho} d\xi_1 \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta_1 (1+|\eta_1|)^{2s} (1+|\eta_1-\xi_1|)^{-N} \Big]^{1/2}$$

si $s-\frac{N}{2} < -\frac{n-1}{2}$.

En choisissant N convenable par rapport à s, et en appliquant le lemme 3, on obtient le résultat. Le lemme 2 est ainsi complètement démontré.

Soit maintenant R la constante intervenant dans la définition de $a \in \tilde{S}^m_a$, et soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} (10) & \phi(\xi_1) = 1 \quad \text{pour} \quad |\xi_1| > 2Rk \\ (11) & \phi(\xi_1) = 0 \quad \text{pour} \quad |\xi_1| < Rk \\ (12) & |\partial^h \phi(\xi_1)| \leqslant M^h \quad \text{pour} \quad h \leqslant k \,, \end{cases}$$

M étant une constante ne dépendant que de R.

On écrit alors :

$$(13)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^j\,\xi_1^j\, e^{i x_1 \xi_1}\, a_{k-h,\alpha}(x,\xi_1)\, d\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi_1)[x_1^j\,\xi_1^j \dots]\, d\xi_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} [1-\phi(\xi_1)][x_1^j\,\xi_1^j \dots]\, d\xi_1 \,.$$

Estimons d'abord le premier terme dans le membre de gauche de (13) ; en remarquant que :

$$x_1^j\, e^{i x_1 \xi_1} = D_{\xi_1}^j\,(e^{i x_1 \xi_1})$$

et en intégrant par parties, on voit que ce terme est somme de 2^j intégrales du type :

$$(14)\qquad i^j \int_{-\infty}^{+\infty} \partial^{j-\ell}\,\phi(\xi_1)\; e^{i x_1 \xi_1}\; \partial_{\xi_1}^{\ell}\Big(\xi_1^j\, a_{k-h,\alpha}(x,\xi_1)\Big)\, d\xi_1 \quad , \quad \ell = 0,\dots,j \,.$$

Lemme 4 : Si $\ell \leqslant j \leqslant h \leqslant k$

$$\sup_{x\in\bar\omega} \left|\partial_x^\beta\, \partial_{\xi_1}^\ell\, (\xi_1^j\, a_{k-h,\alpha}(x,\xi_1))\right| \leqslant C_1^{k-h+|\alpha|+|\beta|+\ell}\; \alpha!\; \beta!\; (k-h)!\; j^\ell \times (1+|\xi_1|)^{m+j-\ell}$$

$$pour \quad |\xi_1| \geqslant R\,\ell \,.$$

Ce lemme s'appuie sur la formule de Leibniz, le lemme 1, et la définition de $a \in \tilde S_a^m$: sa démonstration ne présente aucune difficulté.

Pour $\ell = j$, on applique le lemme 2, i) à

$$p(x,\xi_1) = \phi(\xi_1)\; \partial_{\xi_1}^j\, (\xi_1^j\, a_{k-h,\alpha}(x,\xi_1)) \;;$$

le terme (14) est alors majoré en norme $H^s(\bar\omega)$ par :

$$(15)\qquad A_1\, C_1^{k-h+j+|\alpha|}\; \alpha!\; (k-h)!\; j! \,.$$

Pour $\ell < j$, on applique le lemme 2, ii) avec :

$$\begin{cases} p(x,\xi_1) = \partial^{j-\ell}\ \phi(\xi_1)\ \partial^{\ell}_{\xi_1} (\xi_1^j\ a_{k-h,\alpha}(x,\xi_1)) \\ \rho = 2Rk \quad \text{(ce qui est légitime en vertu de (10)).} \end{cases}$$

Le terme (14) est alors majoré en norme $H^s(\bar{\omega})$ par :

$$(16) \qquad A_2\ C_2^{k-h+j+|\alpha|}\ \alpha!\ (k-h)!\ j^{\ell}\ k^{m+j-\ell+s+1}\ .$$

Chaque terme (15), (16) est majoré par : $A_3\ C_3^{k-h+j+|\alpha|}\ \alpha!\ (k-h)!\ k^{m+j+s}$,

donc aussi le premier terme de (13).

Pour le second terme de (13), on applique le lemme 4 avec $\ell = 0$. On peut alors appliquer le lemme 2, ii) avec :

$$\begin{cases} p(x,\xi_1) = (1-\phi(\xi_1))\ x_1^j\ \xi_1^j\ a_{k-h,\alpha}(x,\xi_1) \\ \rho = 2Rk\ . \end{cases}$$

On obtient à nouveau un majorant du type :

$$A_3\ C_3^{k-h+j+|\alpha|}\ \alpha!\ (k-h)!\ k^{m+j+s+1}\ .$$

On en déduit que $w \in H^s(\bar{\omega})$ et que, d'après (5) :

$$\|w\|_{H^s(\bar{\omega})} \leqslant \sum_{j=1}^{h} \mu_{h,j}\ A_4\ C_3^{k-h+j+|\alpha|}\ \alpha!\ (k-h)!\ k^{m+j+s+1}\ ,$$

soit, d'après (3') :

$$\|w\|_{H^s(\bar{\omega})} \leqslant C_4^{k+|\alpha|+1}\ k!\ \alpha!\ .$$

q.e.d.

2. <u>Démonstration du b)</u>.

Soit $x_0 \in \Omega$.

Si $x_0 \notin \Omega$, u est analytique en x_0 donc la formule annoncée est vraie en prenant $a \equiv 0$!

Si $x_0 \in \Sigma$, soit $\varepsilon > 0$, et soit ω' voisinage de x'_0 (si $x_0 = (0, x'_0)$) tels que :

$$\omega =]-\varepsilon, \varepsilon[\times \omega' \subset\subset \Omega .$$

Compte tenu de la formule cherchée, il est tout indiqué de prendre la transformée de Fourier par rapport à x_1 , dont une estimation est obtenue dans le lemme suivant :

Lemme 5 : *Soit* $\varepsilon_1 > \varepsilon$ *tel que :*

$$\omega_1 =]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[\times \omega' \subset\subset \Omega .$$

Il existe alors une constante $C > 0$ *, un réel* $\sigma > 0$ *et un entier* $M_0 \geqslant 0$ *tels que :*

- *pour toute fonction* $\chi \in C_0^\infty(]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[)$
- *pour tout* $v \in H^s_{loc}(\Omega)$ *tel que* $\partial^\alpha_{x'} v \in H^s_{loc}$ *pour* $|\alpha| \leqslant M_0$

on ait l'inégalité (pour $x' \in \omega'$*)*

$$(17) \qquad |\widehat{\chi v}(x', \xi_1)| \leqslant C \; ||\chi||_{H^\sigma} \sup_{|\beta| \leqslant M_0} ||\partial^\beta_{x'} v||_{H^s(\overline{\omega}_1)} (1 + |\xi_1|)^m$$

où $m = \begin{cases} -s & si \quad s \leqslant 0 \\ -\frac{s}{2} & si \quad s \geqslant 0 \end{cases}$ *($\wedge$ désigne la transformation de Fourier par rapport à* x_1 *).*

<u>Preuve</u> : Soit $\theta \in C_0^\infty(-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ telle que $\theta = 1$ au voisinage de $\operatorname{supp} \chi$. Alors on a :

$$\widehat{\chi v}(x', \xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x_1)\, \chi(x_1)\, v(x)\, e^{-i x_1 \xi_1} \, d x_1$$

$$= \frac{1}{2\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(-\eta_1 + \xi_1)\; \widehat{\chi v}(x', \eta_1)\, d\eta_1 \; .$$

Soit $s' \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\| \widehat{\chi v}(\circ,\xi_1) \|_{H^{s'}(\overline{\omega}')} \leqslant$$

$$(18) \leqslant \frac{1}{2\Pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\theta}(-\eta_1+\xi_1)| \; \| \widehat{\chi v}(\circ,\eta_1) \|_{H^{s'}(\overline{\omega}')} \, d\eta_1$$

$$\leqslant \frac{1}{2\Pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\eta_1|)^{-2s'} |\hat{\theta}(-\eta_1+\xi_1)|^2 \, d\eta_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\eta_1|)^{2s'} \|\widehat{\chi v}(\circ,\eta_1)\|^2 \, d\eta_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

par l'inégalité de Schwarz.

De $|\hat{\theta}(\zeta)| \leqslant \dfrac{C_N}{(1+|\zeta|)^N}$ et du lemme 3, on tire le majorant suivant pour la première intégrale dans (18) :

$$C_1(1+|\xi_1|)^m \quad , \quad \text{où} \quad m = -s' \, .$$

Quant à la seconde intégrale, elle est majorée par :

$$\| \chi v \|_{H^{s'}(\overline{\omega}_1)} \quad , \text{ si } \; s' < 0 \quad , \text{ et } \quad \| \chi v \|_{H^{2s'}(\overline{\omega}_1)} \quad \text{si } \; s' > 0$$

car $\left[(1+|\eta_1|+|\eta'|)^2 \geqslant (1+|\eta_1|)(1+|\eta'|) \geqslant 1+|\eta_1|+|\eta'| \right]$.

En posant donc $s' = s$ si $s < 0$ et $s' = +\frac{s}{2}$ si $s > 0$, on obtient :

$$(19) \qquad \| \widehat{\chi v}(\circ,\xi_1) \|_{H^{s'}(\overline{\omega}')} \leqslant C_2 \, \| \chi \|_{H^\sigma} \, \| v \|_{H^s(\overline{\omega}_1)} \, (1+|\xi_1|)^m$$

$$(\sigma > \max(\tfrac{1}{2}, |s|)).$$

L'inégalité (17) s'obtient en appliquant (19) à $\partial^\beta_{x'} v$ au lieu de v, et en utilisant les inégalités de Sobolev.

C.Q.F.D.

Avec les notations du lemme 5, soit $(\chi_\ell)_{\ell \geqslant 0}$ une suite de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ ayant les mêmes propriétés que χ, telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant :

(20) $$\forall \ell \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall k \leqslant \ell \quad , \quad \| \partial^k \chi_\ell \|_{H^\sigma} \leqslant M(M\ell)^k .$$

On va voir que les $\widehat{\chi_\ell u}$ sont des symboles "presque analytiques jusqu'à l'ordre ℓ":

<u>Lemme 6</u> : *Si $u \in H^s_a(\Omega,\Sigma)$, il existe $C>0$ telle que, avec les notations précédentes :*

(21) $$|\xi_1^k \, \partial_{\xi_1}^k \, \partial_{x'}^\alpha \, \widehat{\chi_\ell u}\,(x',\xi_1)| \leqslant C^{\ell+|\alpha|+1} \, \alpha! \; \ell! \; (1+|\xi_1|)^m$$

pour $x' \in \omega'$, $k \leqslant \ell$.

<u>Preuve</u> : $(i\,\xi_1)^k \, (i\,\partial_{\xi_1})^k \, \partial_{x'}^\alpha \, [\mathcal{F}_1(\chi_\ell u)] = \mathcal{F}_1 \, [\partial_1^k \, x_1^k \, \chi_\ell \, \partial_{x'}^\alpha \, u]$.

Or $\partial_1^k \, x_1^k \, \chi_\ell \, \partial_{x'}^\alpha u$ est somme de 2^k termes du type

$$\partial_1^{k-h} \chi_\ell \, \partial_1^h (x_1^k \, \partial_{x'}^\alpha u) \quad , \quad h \leqslant k .$$

Utilisant (17) et (20), on majore la contribution d'un tel terme au membre de droite de (21) par :

$$\sup_{|\beta| \leqslant M_0} M(M\ell)^{k-h} \, \| \partial_{x'}^\beta \, \partial_1^h \, (x_1^k \, \partial_{x'}^\alpha u) \|_{H^s(\overline{\omega}_1)} \, (1+|\xi_1|)^m .$$

Or, en développant :

$$\| \partial_1^h (x_1^k \, \partial_{x'}^\alpha u) \|_{H^s(\overline{\omega}_1)} \leqslant C_1^{k+|\alpha|+1} \, k^h \, \alpha!$$

d'après la définition de $H^s_a(\Omega,\Sigma)$, et le lemme est démontré.

Evidemment, si on impose de plus $\chi_\ell = 1$ au voisinage de $[-\varepsilon,\varepsilon]$, on aura :

$$\forall x \in \overline{\omega} \quad , \quad u(x) = \int e^{i\,x_1\,\xi_1} \, \widehat{\chi_\ell u}\,(x',\xi_1) \, \frac{d\xi_1}{2\pi} .$$

Cette hypothèse étant faite, on va construire $a = a(x',\xi_1)$ à partir de tous les $\widehat{\chi_\ell u}\,(x',\xi_1)$.

Pour cela, soit $(\phi_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$(22)\qquad \begin{cases} \phi_j(\xi_1) = 1 & \text{si} \quad |\xi_1| > 2j \\ \phi_j(\xi_1) = 0 & \text{si} \quad |\xi_1| < j \\ |\partial^h \phi_j(\xi_1)| \leqslant M_1^h & \text{si} \quad h \leqslant j+1 \,. \\ (M_1 \text{ étant indépendant de } j). \end{cases}$$

Soit $\lambda > 0$, que nous choisirons plus loin ; on considère

$$(23)\qquad a(x,\xi_1) = a(x',\xi_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\phi_j\left(\frac{\xi_1}{\lambda}\right) - \phi_{j+1}\left(\frac{\xi_1}{\lambda}\right)\right] \widehat{\chi_{j+1}u}(x',\xi_1) \,.$$

Pour étudier a , nous allons le comparer au $\widehat{\chi_\ell u}$. Posons donc :

$$b_\ell(x',\xi_1) = a(x',\xi_1) - \widehat{\chi_{\ell+1}u}(x',\xi_1) \,.$$

Alors

$$b_\ell(x',\xi_1) = b'_\ell(x',\xi_1) + b''_\ell(x',\xi_1) \quad , \qquad \text{avec:}$$

$$(24)\qquad b'_\ell(x',\xi_1) = \left(\phi_1\left(\frac{\xi_1}{\lambda}\right) - 1\right) \widehat{\chi_{\ell+1}u}(x',\xi_1) \,.$$

$$(25)\qquad b''_\ell(x',\xi_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\phi_j\left(\frac{\xi_1}{\lambda}\right) - \phi_{j+1}\left(\frac{\xi_1}{\lambda}\right)\right] \widehat{(\chi_{j+1} - \chi_{\ell+1})u}\,(x',\xi_1) \,.$$

Lemme 7 : *Avec les notations ci-dessus, on a :* $\forall k, \ell, j$:

$$(26)\qquad |\partial_{\xi_1}^k \partial_{x'}^\alpha \widehat{(\chi_{j+1} - \chi_{\ell+1})u}\,(x',\xi_1)| \leqslant C^k \left(\left(\frac{C(\ell+1)}{|\xi_1|}\right)^{\ell+1} + \left(\frac{C(j+1)}{|\xi_1|}\right)^{j+1}\right)$$

$$C^{|\alpha|}\ \alpha!\ (1+|\xi_1|)^m \,.$$

Preuve : On suppose $\alpha = 0$ pour alléger l'écriture.

Supposons par exemple $j \geqslant \ell$. Alors :

$$(27)\quad (i\,\xi_1)^{\ell+1} (i\,\partial_{\xi_1})^k \widehat{(\chi_{j+1} - \chi_{\ell+1})u}\,(x',\xi_1) = \mathcal{F}_1(\partial_1^{\ell+1} x_1^k (\chi_{j+1} - \chi_{\ell+1})u)(x',\xi_1).$$

On écrit alors :

$$\partial_1^{\ell+1}\, x_1^k (X_{j+1} - X_{\ell+1})u = (X_{j+1} - X_{\ell+1})\partial_1^{\ell+1}(x_1^k u) - [\partial_1^{\ell+1}, X_{\ell+1}]x_1^k u \tag{28}$$
$$+ [\partial_1^{\ell+1}, X_{j+1}]x_1^k u\,.$$

Chaque terme étant nul pour $|x_1| \leqslant \varepsilon$, on peut ajuster la puissance de x_1 à l'ordre de dérivation.

Ainsi, par exemple dans le premier terme du second membre de (28), si $k \leqslant \ell+1$, on écrit :

$$(X_{j+1} - X_{\ell+1})\partial_1^{\ell+1}\, x_1^k u = \frac{X_{j+1} - X_{\ell+1}}{x_1^{\ell+1-k}}\, x_1^{\ell+1-k}\, \partial_1^{\ell+1}\, x_1^k u$$

et, en appliquant le lemme 5, la transformée de Fourier de ce terme est majorée par :

$$\sup_{|\beta|\leqslant M} C\,(1+|\xi_1|)^m \left\|\frac{X_{j+1} - X_{\ell+1}}{x_1^{\ell+1-k}}\right\|_{H^\sigma} \left\|\partial_{x'}^\beta\, x_1^{\ell+1-k}\partial_1^{\ell+1}\, x_1^k u\right\|_{H^s(\overline{\omega}_1)}$$
$$\leqslant C_1^{k+\ell+1}\,(\ell+1)!\,(1+|\xi_1|)^m\,.$$

On raisonne de même pour le second terme, en utilisant les estimations (20). Pour le troisième terme, on peut appliquer $\partial_1^{j-\ell}$ grâce aux estimations (20). Sa transformée de Fourier sera donc, en vertu du lemme 5, majorée par :

$$C_2^{k+j+1}\,(j+1)!\,\frac{(1+|\xi_1|)^m}{|\xi_1|^{j-\ell}}\,.$$

Revenant à (27), on obtient finalement :

$$|\xi_1^{\ell+1}\,\partial_{\xi_1}^k\,\widehat{(X_{j+1} - X_{\ell+1})u}(x',\xi_1)| \leqslant C_4^k\left[\frac{(C_4(j+1))^{j+1}}{|\xi_1|^{j-\ell}} + (C_4(\ell+1))^{\ell+1}\right](1+|\xi_1|)^m.$$

ce qui donne l'estimation (26).

<u>*Lemme 8*</u> : *Il existe $\lambda > 0$ et $C > 0$ tels que : $\forall \alpha$, $\forall k$, $\forall h$, $\forall \ell$ avec $k \leqslant \ell$, $h \leqslant \ell$*

(29) $\quad |\xi_1^k \partial_{\xi_1}^h \partial_{x'}^\alpha b_\ell(x',\xi_1)| \leq C^{|\alpha|+\ell+1}\ \ell!\ \alpha!\ (1+|\xi_1|)^m \quad pour \quad |\xi_1| \geq 2\lambda h$.

Preuve : Puisque $b'_\ell \equiv 0$ pour $|\xi_1| > 2\lambda$, la contribution de b'_ℓ à (29) n'est non nulle que pour $h=0$. Comme d'autre part $|\xi_1| \leq 2\lambda$ sur le support de b'_ℓ , l'estimation cherchée est conséquence immédiate de (21) pour $k=0$.

Il reste à démontrer (29) pour b''_ℓ au lieu de b_ℓ . La fonction à estimer est somme de 2^h termes de la forme :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \partial_{\xi_1}^{h-r}(\phi_j - \phi_{j+1})\ \xi_1^k \partial_{\xi_1}^r \partial_{x'}^\alpha \widehat{(\chi_{j+1}-\chi_{\ell+1})u}\ (x',\xi_1) \quad , \quad r \leq h\ .$$

Puisque $(\phi_j - \phi_{j+1})(\frac{\xi_1}{\lambda}) = 0$ en dehors de $\lambda_j \leq |\xi_1| \leq 2\lambda(j+1)$, et que $|\xi_1| \geq 2\lambda h$, on ne garde que les termes tels que $j+1 \geq h$ et $j \leq \frac{|\xi_1|}{\lambda}$. Alors, utilisant (22) et (26), on peut estimer cette somme par :

$$(30) \qquad |\xi_1|^k A^{\ell+|\alpha|+1} \sum_{\frac{|\xi_1|}{2\lambda}-1 \leq j \leq \frac{|\xi_1|}{2\lambda}} \left[\left(\frac{C(\ell+1)}{|\xi_1|}\right)^{\ell+1} \left(\frac{C(j+1)}{|\xi_1|}\right)^{j+1}\right] \alpha!\ (1+|\xi_1|)^m \ .$$

Remarquons que A dépend de λ , mais que C n'en dépend pas.

Maintenant, d'une part :

$$|\xi_1|^k \sum_{j \leq \frac{|\xi_1|}{\lambda}} \left(\frac{C(\ell+1)}{|\xi_1|}\right)^{\ell+1} \leq C_1^{\ell+1}\ \ell! \qquad (\text{car } k \leq \ell)\ .$$

D'autre part, si $\lambda j \leq |\xi_1| \leq 2\lambda(j+1)$, on a :

$$\frac{C(j+1)}{|\xi_1|} \leq \frac{C(j+1)}{\lambda j} \leq \frac{2C}{\lambda} < \frac{1}{2}$$

si λ est choisi $> 4C$.

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\frac{C(j+1)}{|\xi_1|} \leqslant \frac{1}{2}\, e^{-2\varepsilon\lambda} \quad , \qquad \text{donc}$$

$$\left(\frac{C(j+1)}{|\xi_1|}\right)^{j+1} \leqslant 2^{-j-1}\, e^{-2\varepsilon\lambda(j+1)} \leqslant 2^{-j-1}\, e^{-\varepsilon|\xi_1|} \; .$$

En sommant sur j , on obtient $e^{-\varepsilon|\xi_1|}$ comme majorant.

Le terme (30) est alors majoré par :

$$A^{\ell+|\alpha|+1}\, \alpha!\; (1+|\xi_1|)^m \left(C^{\ell+1}\, \ell! + |\xi_1|^k\, e^{-\varepsilon|\xi_1|}\right) . \tag{31}$$

Mais $|\xi_1|^k\, e^{-\varepsilon|\xi_1|} \leqslant k!\; \varepsilon^{-k}$, et le lemme 8 est démontré, puisque $k \leqslant \ell$.

On peut maintenant facilement terminer la démonstration du théorème :

Pour $k \in \mathbb{N}$, fixons $\ell = k$ et appliquons le lemme 6 et le lemme 8 ; de (21) et de (29) avec $h = k$ on tire :

$$|\xi_1^k\, \partial_{\xi_1}^k\, \partial_{x'}^\alpha\, a\,(x',\xi_1)| \leqslant C^{k+|\alpha|+1}\, \alpha!\; k!\; (1+|\xi_1|)^m \quad , \quad \text{pour} \quad |\xi_1| \geqslant 2\lambda\, k \; .$$

Ceci prouve que $a \in \tilde{S}_a^m(\omega',\mathbb{R}) \subset \tilde{S}_a^m(\omega,\mathbb{R})$.

Enfin, si on pose : $f(x) = u(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,x_1\,\xi_1}\, a(x',\xi_1)\, \frac{d\xi_1}{2\Pi}$, alors :

$$f(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,x_1\,\xi_1}\, b_\ell(x',\xi_1)\, \frac{d\xi_1}{2\Pi} \qquad \text{pour} \quad x \in \omega \quad , \quad \forall \ell \in \mathbb{N} . \tag{32}$$

Soit alors $k \in \mathbb{N}$ et soit $N \in \mathbb{N}$. Posons $\ell = k + N + [m] + 1$. On applique alors (29) avec $h = 0$:

$$|\xi_1^{k+N}\, \partial_{x'}^\alpha\, b(x',\xi_1)| \leqslant C_N^{|\alpha|+k+1}\, k!\; \alpha! \; .$$

En repartant dans (32) avec $N = 2$:

$$|\partial_1^k\, \partial_{x'}^\alpha\, f(x)| \leqslant C^{|\alpha|+k+1}\, k!\; \alpha! \qquad \text{pour} \qquad x \in \omega$$

donc f est analytique. q.e.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC : *Paracomposition et opérateurs paradifférentiels*, Prépublication Orsay, 1985, et article à paraître.

[2] S. ALINHAC : *Evolution d'une onde simple pour des équations non linéaires générales*, Prépublication Orsay, 1985, et article à paraître.

[3] S. ALINHAC : *Paracomposition et application aux équations non linéaires*, Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer, n° 11, 1984-85, Ecole Polytechnique, Paris.

[4] S. ALINHAC, G. METIVIER : *Propagation de l'analyticité des solutions de systèmes hyperboliques non linéaires*, Inventiones Mathematicse 75 (1984), pp. 189-204.

[5] S. ALINHAC, G. METIVIER : *Propagation de l'analyticité des solutions d'équations non linéaires de type principal*, Prépublication Orsay, 1983.

[6] M.S. BAOUENDI, C. GOULAOUIC, G. METIVIER : *Kernels and symbols of analytic pseudo-differential operators*, J. Diff. Eq., Vol. 48, (1983), pp. 227-240.

[7] J-M. BONY : *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Ann. Scient. de l'E.N.S., 14 (1981), pp. 209-246.

[8] J-M. BONY : *Propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, n° 22, 1979-1980, Ecole Polytechnique, Paris.

[9] J-M. BONY : *Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, n° 2, 1981-82, Ecole Polytechnique, Paris.

[10] J-M. BONY, P. SCHAPIRA : *Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles linéaires*, Annales de l'Institut Fourier, vol. 26, 1, 1976, pp. 81-140.

[11] B. HELFFER, C. MATTERA : *Analyticité et itérés réduits d'un système de champs de vecteurs*, Communications in Partial Differential Equations 5, 1980, pp. 1065-1072.

[12] L. HÖRMANDER : *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients*, Communications in Pure and Applied Mathematics, 24, pp. 671-704, (1971).

[13] L. HÖRMANDER : *Fourier integral operators I*, Acta Math. 127, pp. 79-183, (1971).

[14] B. LASCAR : *Singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, C.R.A.S. Paris, t. 287, série A, 1978, pp. 527-529.

[15] R. MELROSE, N. RITTER : *Interaction of non linear progressing waves*, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1983-84, n° 12, Ecole Polytechnique, Paris, et article à paraître.

[16] J. RAUCH : *Singularities of solutions to semi-linear wave equations*, J. Math. Pures et Appl., 1979.

[17] J. RAUCH, M. REED : *Ray-like solutions of semilinear wave equations*, article à paraître.

[18] F. TREVES : *Introduction to pseudo-differential and Fourier integral operators*, Ch. V, Plenum Press, New-York, 1980.