

THÈSES D'ORSAY

JEAN-CLAUDE SIKORAV

Points fixes de difféomorphismes symplectiques, intersection de sous-variétés lagrangiennes, et singularités de un-formes fermées

Thèses d'Orsay, 1987

http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1987__0220__P0_0

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

par

Jean-Claude SIKORAV

Sujet de la Thèse : Points fixes de difféomorphismes symplectiques,
intersections de sous-variétés lagrangiennes, et
singularités de un-formes fermées

Soutenue le 3 février 1987 devant le Jury composé de :

Jean CERF, Président

Daniel BENNEQUIN

Etienne FOUVRY

Mikhael GROMOV

François LAUDENBACH

Alexis MARIN

Remerciements

C'est avec plaisir que j'exprime ici ma gratitude envers François Laudenbach ; c'est lui qui depuis le début a dirigé puis orienté mes recherches. Son soutien moral m'a été précieux lors des périodes de doute ou de découragement, et surtout c'est à lui que je dois d'avoir connu les joies de la découverte mathématique.

Mes remerciements vont également

- à Jean Cerf, le Président, Mikhael Gromov et Alexis Marin, pour l'honneur qu'ils me font de participer au jury ;
- à Daniel Bennequin, dont l'enthousiasme communicatif m'a souvent stimulé depuis la lointaine période de l'École Normale ;
- à Etienne Fouvry, directeur de la seconde thèse, qui n'a épargné ni son temps ni ses efforts pour me guider dans les arcanes de la théorie analytique des nombres ;
- à Marc Chaperon, qui fut la source d'inspiration pour une partie essentielle de cette thèse ;
- à Gilbert Levitt, sans qui la dernière partie n'aurait pu voir le jour ;
- aux membres de l'équipe de Topologie d'Orsay, et plus particulièrement à Michèle Audin et Albert Fathi, dont le dynamisme et les discussions passionnantes m'ont été très profitables ;
- enfin à Bernadette Barbichon, pour la compétence, la gentillesse et la patience à toute épreuve qu'elle a mises à dactylographier mes travaux.

Abstract. Fixed points of symplectic diffeomorphisms, intersections of Lagrangian submanifolds, and singularities of closed one-forms.

This thesis consists of four distinct parts.

In the first part, we give a proof of the Arnold conjecture for surfaces and a generalisation to some other symplectic manifolds, using the variational approach introduced by Conley and Zehnder for tori.

In the second part, we show that the zero-section $M \subset T^*M$, the cotangent bundle, can never be disconnected from itself by a Hamiltonian isotopy, and give a lower bound for the number of intersection points; the proof, which is elementary, uses generating functions for Lagrangian submanifolds. As an application, we give a much simpler proof of the Arnold conjecture.

In the third part, we extend the problem studied in the second part to symplectic isotopies, using results on the Novikov homology associated to a cohomology class of degree one; in particular, we show that if disconnection is possible with $\dim M \geq 6$, $\pi_1 M = \mathbb{Z}$, then M carries a nonsingular closed one-form, and thus fibers over S^1 .

In the fourth part, we study some properties of the Novikov homology, and prove the same result as in the third part for irreducible manifolds of dimension three.

Key-words. Symplectic diffeomorphisms, Hamiltonian isotopies, Lagrangian submanifolds, Closed one-forms.

TABLE DES MATIERES

Introduction.....	1
I – Points fixes d’une application symplectique homologue à l’identité.....	17
II – Problèmes d’intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne.....	48
III – Un problème de disjonction par isotopie symplectique dans un fibré cotangent.....	60
IV – Homologie de Novikov associée à une classe de cohomologie réelle de degré un.....	70

INTRODUCTION

A. ENONCE DES PROBLEMES.

1. Les problèmes évoqués dans le titre de cette thèse sont issus d'une série de conjectures formulées par V.I. Arnold dans les années 60 (nous donnerons quelques précisions à ce sujet dans la partie B, section 7, à la fin de cette Introduction). L'origine de celles-ci est la recherche de généralisation du fameux "dernier théorème géométrique de Poincaré" (conjecturé par ce dernier en 1912, et démontré par G.D. Birkhoff en 1913) : ceci est expliqué dans la note [A1] d'Arnold aux Comptes Rendus en 1965 (voir aussi l'appendice 9 de son livre "Méthodes mathématiques de la mécanique classique" [A5]).

Les principales définitions de la géométrie symplectique que nous utiliserons sont données dans l'Appendice de cette Introduction.

2. Formulons maintenant les problèmes que nous allons considérer.

Problème 1 "Conjecture d'Arnold pour les points fixes de difféomorphismes hamiltoniens".

Soit (V, ω) une variété symplectique compacte sans bord, et soit ψ_t ($0 \leq t \leq 1$) une isotopie hamiltonienne ; peut-on minorer le nombre de points fixes de ψ_1 ? Plus précisément, ce nombre est-il au moins égal

- dans tous les cas, au nombre minimal $c(V)$ de points critiques d'une fonction quelconque sur V ;

- si ces points fixes sont non dégénérés (cas générique), au nombre minimal $c_g(V)$ de points critiques d'une fonction de Morse sur V ?

Cas particulier "Conjecture d'Arnold pour les surfaces".

Soient V une surface orientée de genre g munie d'une forme d'aire et (ψ_t) une isotopie formée de difféomorphismes conservant l'aire ; si V n'est pas une sphère, soit $g \geq 1$, on demande en plus que, pour tout lacet γ tracé sur V , l'aire algébrique balayée par $(\psi_t(\gamma))$ soit nulle. Alors, le nombre des points fixes de ψ_1 est-il minoré par

- 2 si V est une sphère, 3 sinon ;
- $2+2g$ si ces points sont non dégénérés ?

Commentaires. a) Il est classique que les propriétés de (ψ_t) énoncées dans ce cas particulier équivalent au caractère hamiltonien ; dans le cas du tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ muni de la forme symplectique standard, l'existence, pour un ψ_1 donné, d'une isotopie ayant la propriété de nullité pour les aires balayées se traduit par la "préservation du centre de gravité" ([A5] app.9, p.426) : on a $\psi_1(x,y) = (x+f(x,y), y+g(x,y))$, où f et g sont des fonctions de moyenne nulle.

b) Sur le fait que $c(V)$ et $c_g(V)$ ont les valeurs implicitement indiquées, voir les explications données dans la partie B, section 4.

c) Ce cas particulier a fréquemment reçu dans la littérature le nom de "conjecture d'Arnold" sans autre précision.

Problème 2 "Problème d'intersection dans le cotangent".

Soit M une variété différentiable compacte sans bord quelconque ; on considère son fibré cotangent T^*M , muni de sa structure symplectique canonique : il contient l'image de la section nulle, encore notée M , comme sous-variété lagrangienne. Soit (ψ_t) une isotopie hamiltonienne de (T^*M, ω_M) ; peut-on minorer le nombre de points d'intersection de $\psi_1(M)$ et de M ? Plus précisément, ce nombre est-il au moins égal à $c(M)$ dans tous les cas, et à $c_g(M)$ dans le cas (générique) où l'intersection est transversale ?

Commentaires. a) Les problèmes 1 et 2 peuvent être considérés comme des cas particuliers d'une "théorie d'intersection des sous-variétés lagrangiennes" (encore à naître à ce jour) évoquée par Arnold [A2] (voir la partie B, section 7) et de façon plus précise par A. Weinstein ([W2], Lecture 7).

b) Nous nous intéresserons aussi à ce qui se passe quand on remplace "isotopie hamiltonienne" par "isotopie symplectique" dans les problèmes 1 et 2 : d'après Weinstein (ibid.), il faut alors remplacer "points critiques d'une fonction (resp. de Morse)" par "singularités d'une 1-forme

fermée (resp. de Morse)”. En fait, nous ne transformerons que le problème 2, obtenant ainsi le

Problème 3 “Problème d’intersection généralisé”.

On reprend les hypothèses du problème 2, sauf que l’on suppose seulement (ψ_t) symplectique ; alors la 1-forme sur M , $\alpha_t = (\psi_t|_M)^*(\lambda_M)$ est fermée mais pas nécessairement exacte. Est-il vrai que le nombre de points d’intersection entre M et $\psi_1(M)$ est au moins égal au nombre minimal de singularités d’une forme cohomologue à α_1 (de Morse si l’intersection est transverse) (noté $c(M, \alpha_1)$, resp. $c_g(M, \alpha_1)$) ?

Le cas particulier où l’on peut disjointre M de $\psi_1(M)$ donne naissance au

Problème 3’ “Problème de disjonction symplectique”.

Si l’on peut disjointre la section nulle $M \subset T^*M$ par une isotopie symplectique, est-il vrai que M fibre sur le cercle ?

B. LES RESULTATS.

1. Depuis le milieu des années 60 jusqu’à la fin de l’année 1982, on peut dire –avec une réserve que nous expliquerons plus loin– qu’aucun progrès ne fut fait vers la solution de ces conjectures d’Arnold.

Il est vrai que la description par Weinstein en 1971 [W1] du voisinage d’une sous-variété lagrangienne L quelconque comme isomorphe à un voisinage de L dans T^*L lui permit, en l’appliquant à la diagonale $\Delta_V \subset (V \times V, \omega \oplus (-\omega))$, de ramener le cas “ C^0 -proche de l’identité” du problème des points fixes au cas analogue du problème d’intersection : en particulier, le cas “ C^1 -local” de ce dernier étant trivial, il en était de même pour le problème des points fixes. Mais l’intérêt de ces conjectures d’Arnold résulte précisément de leur caractère global. Ceci ne diminue en rien l’importance du résultat de Weinstein, qui donne la première approche générale du problème d’intersection des sous-variétés lagrangiennes.

Il est vrai aussi qu'en 1974, N. Nikichine [N] (cf. aussi [A3]) démontra la conjecture des points fixes pour la sphère S^2 (ce résultat fut retrouvé par C.P. Simon [Sim]) ; mais ce cas est très particulier pour les deux raisons suivantes :

a) Le caractère symplectique – qui se traduit en dimension deux par la préservation de l'aire – entraîne que l'indice de chaque point fixe isolé est celui du gradient d'une fonction en un point critique ; en dimension deux ce dernier indice est toujours ≤ 1 , mais à partir de la dimension trois il peut prendre toutes les valeurs entières.

b) Parmi les surfaces orientables, la sphère est la seule à avoir une caractéristique d'Euler positive ; donc la formule de Lefschetz donne le résultat grâce au a), mais pour les autres surfaces on n'obtient qu'un point fixe (dans le cas général) et même aucun pour le tore.

Notons aussi que, dans le cas générique, la formule de Lefschetz donne directement le résultat.

Nous en arrivons maintenant à la réserve annoncée plus haut : en 1978, Ya.M. Eliachberg [E] annonça la solution complète de la conjecture d'Arnold pour les surfaces. Mais la preuve qu'il en donnait – qui reposait sur l'étude d'un certain graphe issu de l'examen d'un front d'onde, et utilisait essentiellement les outils classiques de la topologie de dimensions deux et trois – n'a pu jusqu'à ce jour être comprise (du moins dans l'état du texte dont nous disposons à Orsay en 1978–79 ; au Congrès International de Berkeley (août 1986), Eliachberg a annoncé un travail, à paraître dans *Funkt. Anal.*, qui semble inclure une nouvelle preuve du résultat sur les surfaces). Elle offre malgré tout, indépendamment de sa validité, la seule méthode d'approche purement topologique depuis le travail de Birkhoff en 1913.

2. Il y eut donc un grand choc dans la communauté symplectique quand, en novembre 1982, C.C. Conley et E. Zehnder firent connaître une preuve très simple de la conjecture d'Arnold pour les tores $(T^{2n}, \text{standard})$ [CoZ]. Elle résulte de l'étude du problème variationnel associé (principe de moindre action de Hamilton) : par la méthode de Liapounoff–Schmidt, on le réduit à la dimension finie, plus précisément à l'étude des points critiques d'une certaine fonction sur $T^{2n} \times \mathbb{R}^{2N}$. Pour conclure, on utilise l'indice de Conley ; en fait, comme le fait remarquer M. Chaperon ([Ch1] p.241), on peut tout aussi bien utiliser les méthodes classiques de Lusternik–Schnirelmann dans le cas général, et de Morse dans le cas générique.

Le résultat exact de Conley–Zehnder est le suivant : si (ψ_t) est une isotopie hamiltonienne de $(T^{2n}, \text{standard})$, le nombre des points fixes de ψ_1 est minoré par $2n+1$, et par 2^{2n} si ceux-ci sont non dégénérés ; or ces deux nombres sont respectivement égaux à $c(T^{2n})$ et $c_g(T^{2n})$, donc on obtient bien la solution de la conjecture d’Arnold pour $(T^{2n}, \text{standard})$.

Peu après avoir pris connaissance de ce résultat, M. Chaperon vit que la même méthode permettait d’obtenir la solution du problème 2 pour les tores T^n ([Ch1], p.239–241, [ChZ]), et il indiqua comment ce résultat permettait de retrouver celui de Conley–Zehnder. Il remarqua aussi ([Ch1] p.242) que la méthode s’étendait sans difficulté

- pour le problème 2, à toute variété admettant une métrique riemannienne plate ;
- pour le problème 1, à toute variété admettant une métrique riemannienne plate pour laquelle ω est représentée par une structure presque complexe.

Mais, pour ces variétés, le minorant obtenu n’était plus $c(M)$ ou $c_g(M)$, mais $CL(M)+1$ ou $SB(M)$, où

- $CL(M)$ (“cup-length”) est le plus grand entier ℓ tel qu’il existe un anneau commutatif A et des classes de cohomologie $\omega_1, \dots, \omega_\ell$ dans $H^*(M; A)$, vérifiant $\omega_1 \cup \dots \cup \omega_\ell \neq 0$;

- $SB(M)$ (“somme des nombres de Betti”) est défini par

$$\begin{aligned} SB(M) &= \sup \{ \sum_i \dim_k H_i(M; k) \mid k \text{ corps commutatif} \} \\ &= \text{rg } H_*(M; \mathbb{Z}) + 2 \sum_i q(\text{Tors } H_i(M; \mathbb{Z})), \end{aligned}$$

où $q(A)$ est le nombre minimal de générateurs du groupe abélien A .

Ces nombres $CL(M)+1$ (resp. $SB(M)$) sont justement les minorants classiques pour le nombre de points critiques d’une fonction (resp. de Morse) sur M , trouvés par L. Lusternik et L. Schnirelmann dans le cas général, et par M. Morse dans le cas générique. Il se trouve que pour

les tores T^n –et aussi pour les surfaces et les espaces projectifs réels ou complexes– ces minorants sont optimaux (c'est-à-dire qu'on a $C(M) = CL(M) + 1$ et $c_g(M) = SB(M)$). Mais ce n'est plus le cas en général ; d'ailleurs, le calcul de $c(M)$ semble un problème pratiquement inabordable, et $c_g(M)$ en dimension 3 met en jeu la conjecture de Poincaré. Dans la section 4, nous reviendrons sur le point de savoir quels minorants on peut raisonnablement espérer trouver.

3. Nous en arrivons maintenant à la partie I de cette thèse : "Points fixes d'une application symplectique homologue à l'identité" (le terme "application homologue à l'identité" est ici utilisé (à tort) dans le sens "difféomorphisme hamiltonien") ; il s'agit d'un article ([Sik2]) paru dans le Journal of Differential Geometry en 1985.

Dans cette partie, nous étudions le problème 1 (problème des points fixes) pour une variété symplectique (V, ω) admettant une métrique de courbure négative ou nulle pour laquelle ω est représentée par une structure presque complexe, et satisfaisant de plus à une certaine condition technique (H2). Comme exemples de telles variétés, on peut citer toutes les surfaces de genre ≥ 1 ; plus généralement, toute variété dont le revêtement universel est un espace symétrique hermitien de type non compact, par exemple l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{H}^n(\mathbb{C})$, ou un produit de tels espaces.

Les hypothèses faites sur (V, ω) nous permettent de lui appliquer la méthode de Conley-Zehnder, obtenant ainsi pour le problème 1 les minoration par $CL(V) + 1$ et $SB(V)$. En particulier, on en déduit une preuve de la conjecture d'Arnold pour les surfaces.

Signalons enfin que, indépendamment et simultanément, A. Floer [F1] a démontré par une méthode analogue ces mêmes minoration pour une classe de variétés symplectiques comprenant aussi les surfaces.

4. La partie II de cette thèse est un article : "Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne", à paraître [Sik5] en 1986 dans les Comment. Math. Helv. Nous allons d'abord en décrire sa genèse, qui comme on le verra est assez complexe.

Au début de 1984, Chaperon ([Ch2], [Ch3]) donna une nouvelle et très élégante solution du problème 2 dans le cas des tores : la méthode

utilisée, qu'il compara à celle des "géodésiques brisées" utilisée en géométrie riemannienne, ramenait directement le problème à l'étude des points critiques d'une fonction sur une variété de dimension finie. A cette époque, F. Laudenbach exprima sa confiance en la possibilité de généraliser cette méthode à une variété quelconque ; je ne le crus pas, à tort comme nous allons le voir aussitôt. Malgré tout, nous nous attaquâmes à cette généralisation à la fin de l'été 1984. Au cours de ce travail, nous prîmes connaissance d'un texte de H. Hofer [H] : pour le problème 2 sur une variété M quelconque, celui-ci obtenait les minorations par $CL(M)+1$ et $SB(M)$ en étendant la méthode de Conley-Zehnder –ou plutôt de [Ch]. Aiguillonnés par cette nouvelle, nous obtînmes la généralisation de la méthode des géodésiques brisées à la fin de l'automne 1984 : le résultat en est l'article [LS], où l'on trouve pour le nombre de points d'intersection les minorants "raisonnables" annoncés plus haut :

$\tilde{c}(M)$ = nombre minimal de points critiques d'une fonction définie sur un fibré vectoriel E de base M , et coïncidant hors d'un compact avec une forme quadratique non dégénérée sur les fibres (une telle fonction sera dite quadratique).

$\tilde{c}_g(M)$ = analogue en se limitant aux fonctions de Morse.

Remarques. a) Ces nombres ne sont pas changés si l'on se restreint à des fibrés triviaux $E = M \times \mathbb{R}^{2N}$ et à des formes de signature (N, N) .

b) C'est surtout le cas générique qui est intéressant : il n'est en effet pas déraisonnable de penser qu'on a $\tilde{c}_g(M) = c_g(M)$ si $\dim M \geq 6$, tout au moins si $\pi_1 M$ n'est pas trop compliqué.

Alors que nous venions de terminer ce travail, M. Gromov fit connaître un texte [G] démontrant une foule de résultats de géométrie symplectique ; parmi ceux qui concernent les problèmes 1 et 2, j'en citerai deux :

– pour le problème 1, l'existence d'un point fixe sous l'hypothèse $[\omega] | \pi_2 Y = 0$;

– pour le problème 2, ou plutôt dans un contexte voisin, le fait que toute sous-variété lagrangienne plongée exacte dans T^*M doit rencontrer la section nulle (comparer à la première conjecture d'Arnold évoquée dans la section B, partie 7).

Ce dernier résultat m'intrigua quelque peu car je ne connaissais –et ne connais toujours– aucune sous-variété de ce type qui ne soit pas de la forme $\Psi_1(M)$. En revanche, on sait fabriquer beaucoup d'immersions lagrangiennes exactes à l'aide de phases génératrices définies sur un fibré vectoriel E de base M (voir la fin de l'Appendice). Mais ces immersions ne rencontrent pas forcément la section nulle, sauf si l'on impose à la fonction génératrice d'être quadratique, auquel cas le nombre de points d'intersection est de nouveau minoré par $\tilde{c}(M)$ ou $\tilde{c}_g(M)$. Ceci, joint à l'interprétation donnée par Weinstein de la fonctionnelle de Hamilton–Conley–Zehnder comme phase génératrice, me permit de déduire de [LS] le résultat suivant [Sik3] : la propriété, pour une immersion lagrangienne, d'être engendrée par une phase quadratique, persiste après isotopie hamiltonienne de T^*M .

De façon surprenante (pour moi), le rapporteur de [Sik3] suggéra de déduire [LS] de cette propriété sur les immersions lagrangiennes. Ceci supposait de démontrer cette dernière directement ; je m'aperçus que cela pouvait en effet se faire de façon très simple : en effet, il suffisait de la prouver pour des isotopies assez C^1 -petites, et pour celles-ci la méthode des géodésiques briées s'appliquait avec une seule brisure, ce qui apportait une simplification notable à [LS].

Par ailleurs, à la même époque (automne 1985), j'entendis un exposé de M. Audin sur la théorie des feuilletages lagrangiens (travaux remontant à J. Duistermaat, et continués par P. Dazord et T. Delzant) ; ceci me donna l'idée d'appliquer celle-ci à la preuve de l'isomorphisme symplectique de $(\tilde{V} \times \tilde{V}, \Delta \tilde{\varphi})$ et de $(T^* \tilde{V}, \tilde{V})$ si \tilde{V} est un espace symétrique hermitien de type non compact.

Les deux derniers paragraphes résument le contenu de la partie II. Mis bout à bout, ils donnent en particulier la preuve la plus simple à ce jour de la conjecture d'Arnold pour les surfaces (et ne laissent pratiquement plus qu'un intérêt historique à la partie I de cette thèse I).

5. La partie III : "Un problème de disjonction symplectique dans un fibré cotangent" est un article [Sik4] à paraître en 1986 aux Annales de l'École Normale Supérieure. Le problème 3 (et le cas particulier 3') y est abordé pour la première fois. Il n'est vraiment raisonnable que dans le cas générique, puisque (à ma connaissance) rien n'est connu en général sur $c(M, \alpha)$, alors qu'en revanche on dispose pour $c_g(M, \alpha)$ de minorations généralisant les inégalités de Morse, dues à S.P. Novikov [N] en 1981,

minorations dont M.Ch. Farber [Fa] prouva en 1985 qu'elles étaient optimales dans un cas particulier qui sera décrit plus loin. Ce sont ces résultats qui – joints à une conversation avec C. Viterbo sur la possibilité d'appliquer [LS] au problème de disjonction symplectique – me donnèrent l'idée de [Sik4].

Les résultats les plus "parlants" de cette partie sont ceux qu'on obtient quand on se restreint au cas particulier de Farber, à savoir quand $\pi_1 M \approx \mathbb{Z}$ et $\dim M \geq 6$; dans ces conditions, on a une réponse positive pour le cas générique du problème 3 et en particulier pour le problème de disjonction :

a) Si $\psi_1(M)$ est transverse à M , le nombre de points d'intersection de $\psi_1(M)$ et de M est au moins égal à celui des zéros d'une forme de Morse cohomologue à $\alpha_1 = (\psi_1|_M)^* \lambda_M$.

b) Si l'on peut disjoindre M d'elle-même par une isotopie symplectique de T^*M , alors M fibre sur le cercle.

6. La partie IV : "Homologie de Novikov associée à une classe de cohomologie réelle de degré un" étudie l'outil introduit par Novikov pour généraliser les inégalités de Morse. Elle étudie essentiellement le problème de la représentation d'une classe de cohomologie donnée par une forme fermée non singulière ; ce problème avait déjà reçu beaucoup d'attention dans les années 60–70 (voir l'introduction de cette partie), mais l'approche nouvelle rendue possible par Novikov est à mon avis pleine d'avenir. Je ne citerai de cette partie que le résultat qui a un rapport direct avec les parties précédentes, à savoir la solution du problème de disjonction symplectique pour une variété M de dimension trois irréductible :

Si M peut être disjointe d'elle-même par une isotopie symplectique de T^*M , alors elle fibre sur le cercle.

La preuve de ce résultat utilise la partie III et la notion de "forme complète" développée par G. Levitt dans un cours à Paris VII en 1984–85 (repris pour l'essentiel dans [Le]).

7. Un peu d'histoire sur les conjectures d'Arnold.

Dans une Note aux Comptes Rendus de 1965 [A1], Arnold indique comment, pour trouver des solutions périodiques aux problèmes de la mécanique, on est amené à un problème d'intersection entre le tore $T^n \subset T^*T^n$ et son image AT^n par une application (pas nécessairement un difféomorphisme) "globalement canonique" : cette dernière condition, qui équivaut à dire que la sous-variété lagrangienne immergée AT^n est exacte, est en particulier vérifiée si A est un difféomorphisme hamiltonien. Il remarque que, si AT^n est un graphe sur T^n , on peut appliquer les inégalités de Morse ou de Lusternik-Schnirelmann pour minorer le nombre de points d'intersection, et il conjecture (remarque C, p.3722) que les mêmes minoration restent valables pourvu que A soit un difféomorphisme : il s'agit d'une version renforcée de notre problème 2 pour les tores. Il énonce aussi (remarque D) une conjecture sur les points fixes de certains difféomorphismes "globalement canoniques" de $T^n \times B^n$. Ces conjectures sont encore ouvertes aujourd'hui ; la contribution de M. Gromov à la première a été mentionnée plus haut.

Au Congrès International de Moscou en 1966, il revient sur ces problèmes [A2] et énonce la conjecture des points fixes pour le tore T^2 .

En 1972, à l'occasion de la traduction en russe d'oeuvres de Poincaré, il écrit un commentaire [A3] sur le "dernier théorème géométrique" dont nous citerons le passage suivant (page 987, traduction libre) : "Le "théorème de géométrie" de Poincaré est lié à une série de propositions, démontrées ou non, concernant les points fixes des difféomorphismes symplectiques ou, de façon encore plus générale, concernant les intersections des sous-variétés lagrangiennes d'une variété symplectique."

En 1974, dans une contribution [A4] à "Mathematical developments arising from Hilbert's problems", il énonce la conjecture suivante : étant donné une variété symplectique compacte sans bord et un difféomorphisme "homologue à l'identité", le nombre des points fixes est minoré par le nombre des points critiques d'une fonction, "à la fois algébriquement et géométriquement". Tout difféomorphisme hamiltonien est homologue à l'identité, donc il s'agit d'une version renforcée du problème 1 : à ce jour, le seul résultat sur cette version forte est celui de Gromov mentionné plus haut.

Comme le suggère le texte [A3], ces conjectures font partie d'une vision d'ensemble sur l'existence d'une "topologie symplectique" ; en fait, c'est surtout oralement qu'Arnold a exprimé ses idées à ce sujet, les textes écrits ne composant que la partie émergée de l'ensemble.

Notons enfin que, dans les vingt dernières années, il s'est effectué en géométrie symplectique, et également dans le domaine connexe de la géométrie de contact, une grande quantité de travaux –non directement liés aux conjectures d'Arnold telles que nous les avons énoncées, mais parfois liés à la partie immergée– dont nous n'avons pas dit un mot : citons entre autres, par ordre chronologique, les noms de Gromov, Weinstein, Banyaga, Eliachberg et Bennequin.

APPENDICE. PRINCIPALES DEFINITIONS DE LA GEOMETRIE SYMPLECTIQUE.

1. Une *variété symplectique* est une variété différentiable V (de classe C^∞ comme tous les objets que nous considérerons) munie d'une 2-forme ω fermée et non dégénérée, appelée *forme symplectique*. Notons tout de suite que la non-dégénérescence de ω implique que V est de dimension paire $2n$, et que ω^n est une forme-volume donc que V est orientée.

Exemples. a) Si M est une variété différentiable quelconque, le fibré cotangent T^*M admet une structure symplectique canonique définie de la façon suivante : soit λ_M la 1-forme de Liouville sur T^*M , définie par:

$$\lambda_M(X) = \alpha(\pi_*X), \quad \alpha \in T^*M, \quad X \in T_\alpha(T^*M), \quad \pi : T^*M \rightarrow M$$

(on note souvent $\alpha = p.dq$, où $q \in M$ et $p \in T_q^*M$) ; on pose alors $\omega_M = d\lambda_M$.

Cas particulier. Si $M = \mathbb{R}^n$ ou si $M = T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, alors T^*M est canoniquement isomorphe à $M \times (\mathbb{R}^n)^*$; notant $q = (q_1, \dots, q_n)$ les coordonnées sur M et $p = (p_1, \dots, p_n)$ celles sur $(\mathbb{R}^n)^*$, on retrouve l'expression bien connue en substance depuis Lagrange :

$$\omega = dp \wedge dq = \sum_1^n dp_i \wedge dq_i .$$

Par passage au quotient, on en déduit une structure symplectique (dite standard) sur le tore T^{2n} .

b) Si V est une surface, alors une forme symplectique n'est autre qu'une forme d'aire ou ce qui revient au même de volume ; d'après un résultat de J. Moser, on en déduit que si V est compacte, sans bord et orientée, il n'existe à isotopie près qu'une seule forme symplectique ω pour laquelle le volume total $\int_V \omega$ est donné (positif pour que la forme ω soit compatible avec l'orientation).

c) Toute variété kählérienne, munie de sa forme de Kähler, est une variété symplectique.

2. Si (V, ω) est une variété symplectique, la non-dégénérescence de ω se traduit en tout point v de V par un isomorphisme

$T_v V \longrightarrow T_v^* V$, $X \longrightarrow \alpha$ caractérisé par $i(X)\omega = \alpha$; la même équation

définit un isomorphisme entre champs de vecteurs et 1-formes. En particulier, si H est une fonction de V dans \mathbb{R} , le champ X_H défini par : $i(X_H)\omega = -dH$ est appelé *champ hamiltonien* associé à H (pour expliquer le signe, considérons le cas où $V = T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, avec les coordonnées $(q_1, \dots, q_n ; p_1, \dots, p_n)$; alors on a :

$$X_H = \sum_i (\partial H / \partial p_i) (\partial / \partial q_i) - \sum_i (\partial H / \partial q_i) (\partial / \partial p_i)$$

donc les lignes de champ sont définies par

$$\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i, \quad i=1, \dots, n,$$

c'est-à-dire les équations de Hamilton).

Plus généralement, on dit que X est *localement hamiltonien* si la 1-forme qui lui est associée est fermée sans être nécessairement exacte.

3. On définit de façon évidente les notions de difféomorphisme et d'isotopie symplectiques. Il est aisé de voir qu'une isotopie (ψ_t) est

symplectique si et seulement si la famille de champs associés, $X_t = \partial\psi_t/\partial t \circ \psi_t^{-1}$, est formée de champs localement hamiltoniens. Si ceux-ci sont en fait (globalement) hamiltoniens, on dira que l'isotopie est hamiltonienne, et que chaque ψ_t est hamiltonien ; on peut alors associer à (ψ_t) une famille de fonctions (H_t) de V dans \mathbb{R} , définies à l'addition près d'une fonction ne dépendant que de t . Réciproquement, si l'on se donne une famille de fonctions (H_t) , alors on peut lui associer des "équations de Hamilton dépendant du temps" : $\partial\psi_t/\partial t = X_{H_t} \circ \psi_t$; sous des hypothèses d'intégrabilité (par exemple si les H_t sont à support dans un compact fixe), on obtient ainsi une isotopie hamiltonienne.

4. Si (V, ω) est une variété symplectique de dimension $2n$ et si L est une variété de dimension n , une immersion i de L dans V est dite *lagrangienne* si la forme $i^*\omega$ est nulle ; on définit de même un plongement lagrangien et une sous-variété lagrangienne.

Exemple. Si $(V^{2n}, \omega) = (T^*M^n, \omega_M)$, une 1-forme α est une section du fibré T^*M et en particulier un plongement de M^n dans V^{2n} : il est lagrangien si et seulement si α est fermée ; en particulier l'image de la section nulle $M \subset T^*M$ est une sous-variété lagrangienne. Notons plus généralement qu'une immersion $i : L \rightarrow T^*M$ est lagrangienne si et seulement si $i^*\lambda_M$ est fermée ; on dira que i est *exacte* si $i^*\lambda_M$ l'est.

La construction suivante fournit beaucoup d'exemples d'immersions lagrangiennes exactes sur T^*M : étant donné un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} M$ et S une fonction définie sur un ouvert de E , on dit qu'elle est une *phase* (ou fonction) *génératrice* si $dS : E \rightarrow T^*E$ est transverse à π^*T^*M ; alors $\Sigma_S = dS^{-1}(\pi^*T^*M)$ (points critiques de S le long des fibres) est une variété de même dimension que M , et l'application $i_S : \Sigma_S \rightarrow T^*M$ définie par $i_S(e) = \pi_e^*^{-1}(dS_e)$ est une immersion lagrangienne exacte, que l'on dit être engendrée par S . Si de plus S est définie sur E tout entier et coïncide hors d'un compact avec une forme quadratique non dégénérée le long des fibres, on dit que S est *quadratique*.

Bibliographie

- [AM] R. ABRAHAM and J. MARSDEN, Foundations of Mechanics, Benjamin/Cummings, Reading (MA) 1978.
- [A1] V.I. ARNOLD, Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique, C.R. Acad. Sci. Paris, t.261 (1965), Groupe 1, 3719–3722.
- [A2] V.I. ARNOLD, Problème de stabilité et propriétés ergodiques des systèmes de la mécanique classique, Actes du Cong. Int. Math. Moscou 1966, p.387–392, Mir, Moscou 1968 (en russe).
- [A3] V.I. ARNOLD, Commentaire sur le "théorème de géométrie" de Poincaré, Oeuvres choisies d'Henri Poincaré, vol.II, p.987–989, Nauka, Moscou, 1972 (en russe).
- [A4] V.I. ARNOLD, Fixed points of symplectic diffeomorphisms, Mathematical developments arising from Hilbert's problems, Proc. Symp. Pure Math. XXVIII (1974), vol.I, p.66, Amer. Math. Soc., Providence (RI) 1976.
- [A5] V.I. ARNOLD, Méthodes mathématiques de la mécanique classique Mir, Moscou 1976 (traduction d'un livre paru en russe en 1974 ; traduction américaine dans le n°60 des Graduate Texts in Maths, Springer, New York–Heidelberg–Berlin 1978).
- [Ch1] M. CHAPERON, Quelques questions de géométrie symplectique, Séminaire Bourbaki n°610 (juin 1983), Astérisque 105–106, p.231–249, Soc. Math. France, Paris 1983.
- [Ch2] M. CHAPERON, Une idée de "géodésiques brisées" pour les systèmes hamiltoniens, C.R. Acad. Sci. Paris, t.298, Série I, (1984), 293–296.
- [Ch3] M. CHAPERON, An elementary proof of the Conley–Zehnder theorem in symplectic geometry, Dynamical Systems and bifurcations (Groningen 1984), p.1–8, Springer Lect. Notes in Math. 1125 (1985).

- [ChZ] M. CHAPERON et E. ZEHNDER, Quelques résultats globaux en géométrie symplectique, Séminaire sud-rhodanien de géométrie III (juin 1983), Travaux en cours, p.51–121, Hermann, Paris 1984.
- [CoZ] C.C. CONLEY and E. ZEHNDER, The Birkhoff–Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I. Arnold, *Invent. Math.* 73 (1983), 33–49.
- [E] Ya.M. ELIACHBERG, Estimations du nombre de points fixes des applications préservant l’aire, prépublication, Université de Syktyvkar, 1978 (en russe).
- [Fa] M. Ch. FARBER, Exactitude des inégalités de Novikov, *Funkt. Anal. i ego Pril.* 19 (1985), 49–59 ; p. 40–49 dans la traduction américaine.
- [Fl] A. FLOER, Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations to certain Kähler manifolds, *Duke Math. J.* 51 (1986), 1–32.
- [G] M. GROMOV, Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* 82 (1985), 307–347.
- [H] H. HOFER, Lagrangian embeddings and critical point theory, *Ann. de l’Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, vol.2 (1985), 407–462.
- [LS] F. LAUDENBACH et J.–C. SIKORAV, Persistance d’intersection avec la section nulle au cours d’une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent, *Invent. Math.* 82 (1985), 349–357.
- [Le] G. LEVITT, 1–formes fermées singulières et groupe fondamental, à paraître aux *Invent. Math.* en 1987.
- [Ni] N. NIKICHINE, Points fixes de difféomorphismes sur la deux-sphère qui préservent l’aire, *Funkt. Anal. i ego Pril.* 8 (1974), 84–86 ; p. 77–79 dans la traduction américaine.

- [No] S.P. NOVIKOV, Fonctions et fonctionnelles multivaluées. Un analogue de la théorie de Morse, Dokl.Akad.Nauk.SSSR.260 (1981), 31–35 ; p. 222–226 dans la traduction américaine.
- [Sik1] J.-C. SIKORAV, Points fixes d'un symplectomorphisme homologue à l'identité, C.R. Acad. Sci. Paris, t.299, Série I, n°8 (1984), 343–346.
- [Sik2] J.-C. SIKORAV, Points fixes d'une application symplectique homologue à l'identité, J. Diff. Geom. 22 (1985), 49–79.
- [Sik3] J.-C. SIKORAV, Sur les immersions lagrangiennes dans un fibré cotangent admettant une phase génératrice globale, C.R. Acad. Sci. Paris, t.302, Série I, n°3 (1985), 119–122.
- [Sik4] J.-C. SIKORAV, Un problème de disjonction par isotopie symplectique dans un fibré cotangent, à paraître aux Ann. Ec. Norm. Sup., 4e série, t.19 (1986).
- [Sik5] J.-C. SIKORAV, Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne, à paraître aux Comment. Math. Helv. en 1986.
- [Sim] C.P. SIMON, A bound for the fixed-point index of an area-preserving map with applications to mechanics, Invent. Math. 26 (1974), 187–200.
- [W1] A. WEINSTEIN, Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds, Adv. in Math. 6 (1971), 329–349.
- [W2] A. WEINSTEIN, Lectures on symplectic manifolds, C.B.M.S. Reg. Conf. Ser. Math. 29, Amer. Math. Soc., Providence (RI) 1977.

POINTS FIXES D'UNE APPLICATION SYMPLECTIQUE HOMOLOGUE A L'IDENTITE

JEAN-CLAUDE SIKORAV

0. Introduction—énoncé du résultat et résumé de la démonstration

Dans ce travail, toutes les variétés (de dimension finie ou non) et les applications seront de classe C^∞ . On considère une variété symplectique fermée (M, σ) munie d'un automorphisme φ . Suivant V. I. Arnold [2, p. 427], on dit que φ est homologue à l'identité s'il s'obtient en intégrant un champ de vecteurs hamiltonien dépendant du temps. De façon explicite, il existe $h_t: M \rightarrow \mathbf{R}$, $0 \leq t \leq 1$, chemin lisse dans $C^\infty(M, \mathbf{R})$, tel que, si l'on définit $\varphi_t \in \text{Diff } M$ par:

$$\varphi_0 = \text{id}, \quad \dot{\varphi}_t = X_{h_t} \circ \varphi_t,$$

où X_h est le gradient symplectique de $h \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, on ait $\varphi_1 = \varphi$. Arnold (ibid.) remarque que si φ est C^1 -proche de id, alors il admet une "fonction génératrice" $S: M \rightarrow \mathbf{R}$ telle qu'en particulier les points fixes de φ soient les points critiques de S . Donc, φ a au moins autant de points fixes qu'une fonction sur M a de points critiques. On peut se demander si c'est encore vrai sans l'hypothèse de C^1 -proximité: c'est ce que conjecture Arnold dans [1] et [3].

Une percée décisive sur cette question est intervenue en 1982–83: C. C. Conley et E. Zehnder [9] prouvent que tout automorphisme de $(T^{2n}, \text{standard})$, homologue à l'identité, a au moins $2n + 1$ points fixes, ce qui prouve dans ce cas la conjecture d'Arnold. Leur méthode a été ensuite utilisée par A. Weinstein [23] pour le cas où φ est C^0 -proche de id, par B. Fortune et A. Weinstein [12] pour $(M, \sigma) = (\mathbf{CP}^n, \text{standard})$, et par M. Chaperon [8] pour minorer le nombre de points d'intersection avec la section nulle de certains plongements lagrangiens $V \rightarrow T^*V$, V étant une variété riemannienne plate.

Tous ces résultats donnent des minoration utilisant la notion de “cup-length” que nous allons maintenant définir: X étant un espace topologique, on désigne par $CL(X)$ le plus grand entier l tel qu’il existe un anneau A et des classes de cohomologie $\omega_1, \dots, \omega_l \in \check{H}^*(X; A)$; vérifiant $\omega_1 \cup \dots \cup \omega_l \neq 0$. La théorie de Lusternik-Schnirelmann dit que si X est une variété fermée, alors toute fonction sur X a au moins $CL(X) + 1$ points critiques. D’autre part, il est aisé de voir que ce minorant est optimal si $X = T^{2n}$ ($\rightarrow 2n + 1$), $X =$ surface de genre g ($\rightarrow 2$ si $g = 0$, 3 si $g \geq 1$), ou $X = \mathbf{CP}^n$ ($\rightarrow n + 1$).

Nous allons faire sur (M, σ) les hypothèses suivantes:

(H1) Il existe sur M une métrique riemannienne, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de courbure sectionnelle ≤ 0 et “adaptée à σ ” au sens suivant: on a $\sigma(X, Y) = \langle \mathcal{J}X, Y \rangle$, où $\mathcal{J}: TM \rightarrow TM$ est une structure presque complexe ($\mathcal{J}^2 = -\text{id}$) et une isométrie. (D’après [21], il y a toujours une métrique adaptée à σ , mais évidemment pas toujours une à courbure ≤ 0 .)

Le gradient symplectique est alors relié au gradient métrique par $X_h = \mathcal{J} \nabla h$.

(H2) Si $p \in M$ et $X, Y \in T_p M$, et si l’on note $(d \exp_p)_X: T_p M \rightarrow T_{\exp_p X} M$ la différentielle de \exp_p au point X , on a l’inégalité:

$$\langle \mathcal{J}(d \exp_p)_X(Y), (d \exp_p)_X(\mathcal{J}Y) \rangle \geq \alpha |Y|^2, \quad \alpha \text{ constante} > 0.$$

De façon équivalente, en notant $(\exp_p^* \sigma)_X$ la valeur en X de la 2-forme $\exp_p^* \sigma$ sur $T_p M$:

$$(\exp_p^* \sigma)_X(Y, \mathcal{J}Y) \geq \alpha |Y|^2 = \alpha \sigma(Y, \mathcal{J}Y).$$

La classe des variétés vérifiant (H1) et (H2) est stable par produits et quotients et contient par exemple:

–les surfaces de genre ≥ 1 : en effet d’après Moser [16], il n’y a, à isotopie près, qu’une seule forme symplectique (= forme-volume) à volume total donné, donc il y a toujours une métrique adaptée de courbure constante ≤ 0 . L’application $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ augmente alors le volume, donc (H2) est satisfaite avec $\alpha = 1$ (et égalité bien sûr dans le cas plat);

–les variétés kählériennes compactes de courbure holomorphe constante < 0 , c’est-à-dire les quotients compacts de l’espace hyperbolique complexe $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^n$: on sait qu’il en existe pour tout n (cf. [15, p. 121]), ce qui donne un exemple qu’on ne peut obtenir à partir des surfaces;

–plus généralement, les quotients compacts des espaces symétriques hermitiens de type non compact.

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat.

Théorème. Soit (M, σ) une variété symplectique fermée vérifiant (H1) et (H2). Alors, tout automorphisme homologue à l'identité a au moins $CL(M) + 1$ points fixes.

Corollaire. La conjecture d'Arnold est vraie si M est une surface de genre $g \geq 1$.

Remarque. Le cas $g = 0$ est prouvé dans [20], [17], et $g = 1$ est un cas particulier de [9]. D'autre part, Ya M. Eliashberg [10] donne une preuve de ce corollaire mais par une méthode géométrique très délicate.

Notre démonstration utilise elle aussi la méthode de [9]. Donnons-en maintenant un résumé.

1. Problème variationnel. Par le principe de moindre action de Hamilton-Jacobi on montre qu'il suffit de minorer le nombre des points critiques d'une fonction $S: \Lambda \rightarrow \mathbf{R}$, où Λ est la variété hilbertienne des H^1 -lacets $c: S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow M$ homotopes à zéro. On a:

$$S(c) = A(c) - \int_0^1 h_t(c(t)) dt,$$

où A est l'action "non perturbée"

$$\left(A(c) = \int_c p dq \quad \text{si } M = T^*\mathbf{R}^n \right).$$

2. Centre de gravité d'un lacet et description de Λ comme fibré sur M . Le fait que la courbure est ≤ 0 implique que tout lacet $c \in \Lambda$ s'écrit de façon unique $c(t) = \exp_p a(t)$, avec $a \in H^1(T_p M)$ et $\int_0^1 a(t) dt = 0$. Ceci définit un difféomorphisme de Λ sur un fibré L en espaces de Hilbert sur M . On obtient donc deux fonctions $\mathcal{S}, \mathcal{A}: L \rightarrow \mathbf{R}$, \mathcal{S} étant une "perturbation" de \mathcal{A} , et l'on veut minorer le nombre de points critiques de \mathcal{S} .

3. Champ de quasi-gradient. On définit un champ de vecteurs Z sur L vérifiant

(QG1) $d\mathcal{S}(Z) > 0$ hors des points critiques de \mathcal{S} .

(QG2) Z a pour zéros ces points critiques

(autrement dit, \mathcal{S} est une fonction de Liapounoff pour Z).

La propriété (QG1) est une conséquence de la condition (H2).

On compare ensuite Z et le champ "non perturbé" \mathcal{J} à (inégalité (3.2) et proposition 4), ce qui servira en 4. Enfin, on donne des inégalités supplémentaires (3.4) à (3.7) qui serviront en 5.

4. Réduction à la dimension finie (début). Utilisant la décomposition en série de Fourier dans $H^r(T_p M)$ ($r = 0, 1$), on écrit l'équation "annulant les harmoniques d'ordre $> N$ " de $Z(a)$: comme dans [9], on peut la mettre sous la forme $a_N^\perp = \varphi_N(a_N + a_N^\perp)$, où $a = a_N + a_N^\perp$ est la décomposition de $a \in L$ en harmoniques \leq et $> N$. Par un théorème de point fixe pour une contraction, on paramètre les solutions par a_N , élément du sous-fibré de dimension finie $L_N \subset L$ (Proposition 5); mais à la différence de [9], on n'a pas de contraction globale, ce qui fait que le résultat n'est prouvé que pour les solutions qui vérifient de plus une inégalité du type $\|a_N\|_\infty < \text{Log } N/R$, R constante dépendant de la métrique. On note $U_N \subset L_N$ le fibré en boules ainsi défini.

5. Réduction à la dimension finie (fin). On définit sur U_N une fonction \mathcal{S}_N et un champ Z_N , et on prouve une minoration de $d\mathcal{S}_N(Z_N)$ (inégalité 5.2) qui implique en particulier que les points critiques de \mathcal{S}_N sont en bijection avec ceux de \mathcal{S} et que Z_N est de quasi-gradient pour \mathcal{S}_N . Ensuite, on prouve des inégalités ((5.4) à (5.8)) comparent \mathcal{S}_N et \mathcal{A}_N , la restriction à L_N de la fonctionnelle "non perturbée" \mathcal{A} . Cette dernière fonction a pour points critiques l'image de la section nulle $M \rightarrow L_N$, qui est une variété non dégénérée au sens de Bott.

6. Minoration du nombre de points critiques en dimension finie. Dans cette dernière partie, on utilise les propriétés de \mathcal{S}_N , Z_N démontrées en 5. pour construire une paire (v, v^-) analogue au "bloc isolant" de [9]. Par la méthode de Lusternik-Schnirelmann, on en déduit la minoration cherchée du nombre de points critiques de \mathcal{S}_N , ce qui prouve le théorème.

Une version abrégée de ce travail est parue aux C. R. A. S. [19].

Alors que je mettais la dernière main à la présente version, j'ai pris connaissance d'une prépublication de A. Floer [11] sur le même sujet. Précisément, celui-ci démontre le même théorème avec deux différences dans les hypothèses:

- La variété M est kählérienne, c'est-à-dire que \mathcal{J} est intégrable;
- La condition (H2) est remplacée par:

(H'2) Les groupes d'holonomie de la connexion de Levi-Civita sur \tilde{M} sont abéliens.

A l'aide d'un théorème de De Rham [15, Vol. I, p. 192 et Vol. II, p. 172], on peut montrer que les seules variétés satisfaisant à ces hypothèses sont obtenues par produits et quotients à partir des surfaces.

Je remercie F. Laudenbach pour avoir attiré mon attention vers ce sujet et pour l'aide et les conseils qu'il n'a cessé de m'apporter tout au long de ce

travail. Parmi les nombreuses personnes dont les remarques m'ont été profitables, je remercie particulièrement D. Bennequin, M. Chaperon et A. Fathi.

1. Problème variationnel

Dans cette partie, on utilise les résultats de ([14, Chapitre 1]) sur la variété $H^1(S, M)$ des H^1 -lacets; la variété Λ définie dans l'introduction est la composante connexe des lacets constants. L'espace tangent $T_c\Lambda$ s'identifie à $H^1(c^*TM) = \{\text{champs de vecteurs de classe } H^1 \text{ le long de } c\}$, espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par:

$$(X, Y)_1 = \int_0^1 \langle X(t), Y(t) \rangle dt + \int_0^1 \langle \nabla_c X(t), \nabla_c Y(t) \rangle dt,$$

où $\nabla_c X$ désigne la dérivée covariante le long de c (définie presque partout).

On notera $\hat{T}_c\Lambda = H^0(c^*TM) = \text{complété de } T_c\Lambda$ pour le produit scalaire

$$(X, Y)_0 = \int_0^1 \langle X(t), Y(t) \rangle dt.$$

La réunion des $\hat{T}_c\Lambda$ donne un fibré hilbertien $\hat{T}\Lambda$ (noté α^0 dans [14]). Par abus de langage, les sections de $\hat{T}\Lambda$ seront appelées champs de vecteurs sur Λ .

Action. (cf. [22, p. 236–237]). Soit $c \in \Lambda$, on choisit un relèvement $\tilde{c}: S^1 \rightarrow \tilde{M}$ (revêtement universel). Comme $\tilde{M} \approx \mathbf{R}^{2n}$ à cause de la courbure ≤ 0 , la forme symplectique relevée $\tilde{\sigma}$ admet une primitive λ , et l'on pose: $A(c) = \int_{\tilde{c}} \lambda$. Pour voir que ceci est bien défini, choisissons une extension $\bar{c}: D^2 \rightarrow \tilde{M}$ de \tilde{c} ; alors par Stokes, on a: $\int_{\tilde{c}} \lambda = \int_{\bar{c}} \tilde{\sigma}$ ce qui prouve l'indépendance par rapport au choix de λ . De plus, soit $\tau \circ \bar{c}, \tau \in \pi_1(M) = \text{Aut}(\tilde{M}/M)$ un autre relèvement de c ; alors:

$$\int_{\tau \circ \bar{c}} \lambda = \int_{\tau \circ \bar{c}} \tilde{\sigma} = \int_{\bar{c}} \tau^* \tilde{\sigma} = \int_{\bar{c}} \tilde{\sigma} \quad \text{car } \tau^* \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma};$$

d'où l'indépendance par rapport au choix du relèvement.

Posant ensuite $S(c) = A(c) - \int_0^1 h_t(c(t)) dt$, on définit ainsi une fonction C^∞ de Λ dans \mathbf{R} , et l'on a:

$$(0.1) \quad dS(X) = (\nabla S(c), X)_0, \quad X \in T_c\Lambda,$$

$$(0.2) \quad \nabla S(c) = -\mathcal{J}\dot{c} - (\nabla h_t \circ c(t)) \in \hat{T}_c\Lambda.$$

L'application ∇S ("gradient de S ") est un champ de vecteurs C^∞ sur Λ .

Un point critique de S est donc un lacet c tel que $\nabla S(c) = 0$, soit $\dot{c} = (\mathcal{J} \nabla h_t \circ c(t)) = (X_{h_t} \circ c(t))$: cela équivaut à la donnée de $p = c(0)$, point fixe de φ_1 tel que $(t \mapsto \varphi_t(p))$ est homotope à zéro. Donc, pour prouver le théorème, il suffit de minorer le nombre de points critiques de S .

Remarque importante. L'égalité (0.1) permet de définir $dS(X)$ pour $X \in \hat{T}_c \Lambda$.

2. Centre de gravité d'un lacet et description de Λ comme fibré sur M .

Dans cette section, nous travaillerons pour simplifier avec \tilde{M} plutôt que M ; en particulier, Λ désignera l'espace des lacets $c: S^1 \rightarrow \tilde{M}$ de classe H^1 . Comme tout ce que nous dirons sera invariant par $\pi_1(M)$, les résultats obtenus passeront immédiatement au quotient.

Préliminaires. Inégalités sur l'application exponentielle (voir Appendice).

La courbure étant ≤ 0 , l'application \exp_p est un difféomorphisme de $T_p \tilde{M}$ sur \tilde{M} . On notera $E: \tilde{M} \times \tilde{M} \rightarrow T\tilde{M}$ l'application définie par $E(p, q) = \exp_p^{-1} q$. La dérivée covariante en p du champ de vecteurs $E(\cdot, q)$ est un endomorphisme de $T_p \tilde{M}$ noté $D_1 E(p, q)$. De même, la différentielle en q de l'application partielle $E(p, \cdot) = \exp_p^{-1}: \tilde{M} \rightarrow T_p \tilde{M}$ est un élément de $\text{Hom}(T_q \tilde{M}, T_p \tilde{M})$ noté $d_2 e(p, q)$. On note $\lambda = \max_M \sqrt{|K|}$, K courbure sectionnelle, et $r = d(p, q)$.

On a alors les propriétés:

(E1) $D_1 E(p, q)$ est symétrique et $1 \leq -D_1 E(p, q) \leq 1 + \lambda r$ (c'est-à-dire: $|X|^2 \leq -\langle D_1 E \cdot X, X \rangle \leq (1 + \lambda r)|X|^2$);

(E2) $\|d_2 E(p, q)\| \leq 1$ ("exp $_p^{-1}$ diminue les distances");

(E3) $\|[d_2 E(p, q)]^{-1}\| \leq \text{sh } \lambda r / \lambda r$.

Ensuite, soit $c: S^1 \rightarrow \tilde{M}$ un élément de Λ . D'après un résultat de H. Karcher [13] qui remonte à E. Cartan [7, p, 267], cf. aussi [15, p. 109], comme la courbure est ≤ 0 , que c est continu et S^1 compact, il existe un unique $p \in \tilde{M}$, appelé centre de gravité de c , tel que

$$\int_0^1 E(p, c(t)) dt = 0.$$

Nous le noterons $\gamma(c)$. (Esquissons la preuve de ce résultat: pour q fixé, la fonction $p \mapsto \varphi_q(p) = \frac{1}{2} d(p, q)^2$ est propre et strictement convexe, donc il en est de même pour

$$\varphi_c: p \mapsto \int_0^1 \frac{1}{2} d(p, c(t))^2 dt.$$

La fonction φ_c a donc pour seul point critique son minimum absolu: c'est le point cherché car on a

$$\nabla\varphi_q(p) = -E(p, q), \text{ d'où } \nabla\varphi_c(p) = -\int_0^1 E(p, c(t)) dt.$$

Proposition 1. *L'application $\gamma: \Lambda \rightarrow \tilde{M}$ est C^∞ .*

Démonstration. Par définition, γ est donnée par l'équation implicite $E_0(\gamma(c), c) = 0$, où $E_0: \tilde{M} \times \Lambda \rightarrow T\tilde{M}$ est définie par

$$E_0(p, c) = [E(p, c)]_0 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_0^1 E(p, c(t)) dt.$$

La différentielle en c de l'application partielle $E_0(p, \cdot): \Lambda \rightarrow T\tilde{M}$ est alors égale à la moyenne $[d_2 E(p, c)]_0$ définie par:

$$[d_2 E(p, c)]_0 \cdot X = \int_0^1 d_2 E(p, c(t)) \cdot X(t) dt, \quad X \in T_c \Lambda = H^1(c^* T\Lambda).$$

De même, la dérivée covariante en p du champ de vecteurs $E_0(\cdot, c)$ est égale à

$$[D_1 E(p, c)]_0 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_0^1 D_1 E(p, c(t)) dt \in \text{End } T_p \tilde{M}.$$

D'après (E1), $D_1 E(p, q)$ est un endomorphisme symétrique ≤ -1 de $T_p \tilde{M}$: il en est donc de même de $[D_1 E(p, c)]_0$. En particulier, cet opérateur est inversible et le théorème des fonctions implicites entraîne la proposition. L'application tangente $T_c \gamma \in \text{Hom}(T_c \Lambda, T_{\gamma(c)} \tilde{M})$ est donnée par:

$$T_c \gamma = -[D_1 E(\gamma(c), c)]_0^{-1} \circ [d_2 E(\gamma(c), c)]_0.$$

En utilisant (E1) et (E2), on voit que $T_c \gamma$ s'étend en une application linéaire continue $\hat{T}_c \gamma: \hat{T}_c \Lambda \rightarrow T_{\gamma(c)} \tilde{M}$, vérifiant:

$$(2.1) \quad \|\hat{T}_c \gamma\| \leq 1.$$

Nous avons besoin maintenant d'introduire quelques définitions.

Définitions. Soit H^r ($r = 0, 1$) le fibré sur \tilde{M} en espaces de Hilbert, associé à $T\tilde{M}$, tel que $H^r_p = H^r(T_p \tilde{M}) = \{a: S^1 \rightarrow T_p \tilde{M} \text{ de classe } H^r\}$. Les produits scalaires sont donnés par:

$$(a, b)_0 = \int_0^1 \langle a(t), b(t) \rangle dt, \quad (a, b)_1 = (a, b)_0 + (\dot{a}, \dot{b})_0.$$

Comme H^0 est associé à $T\tilde{M}$, il est muni d'une connexion canonique pour laquelle H^1 est totalement géodésique. On en déduit des métriques hilbertiennes $(\cdot, \cdot)_0$ et $(\cdot, \cdot)_1$ sur TH^0 et TH^1 . Notons L^0 le sous-fibré totalement géodésique de H^0 défini par la condition $\int_0^1 a(t) dt = 0$, et $L = H^1 \cap L^0$ le sous-fibré de H^1 correspondant. Définissons $e: L \rightarrow \Lambda$, $a \in L_p \mapsto \exp_p a$. Alors, l'existence

et l'unicité du centre de gravité, jointes à la proposition 1, traduisent le fait que e est un C^∞ -difféomorphisme de L sur Λ , son inverse étant donné par $e^{-1}(c) = E(\gamma(c), c)$. Dans la suite, un élément c de Λ sera toujours donné sous la forme $c = e(a)$, $a \in L_{\gamma(c)}$.

Soit $c = e(a) \in \Lambda$, notons Δ_c l'application linéaire de $H_{\gamma(c)}^0$ dans $\hat{T}_c\Lambda$ donné par $\Delta_c(X)(t) = [d \exp_{\gamma(c)}]_{a(t)} \cdot X(t)$, soit en abrégé $\Delta_c = [d \exp_{\gamma(c)}]_a = [d_2 E(\gamma(c), c)]^{-1}$. On a évidemment $\Delta_c(\dot{a}) = \dot{c}$, et d'autre part les inégalités (E2) et (E3) entraînent:

$$(2.2) \quad \|\Delta_c\| \leq \frac{\text{sh}(\lambda \|a\|_\infty)}{\lambda \|a\|_\infty}, \quad \|a\|_\infty = \max_t |a(t)|;$$

$$(2.3) \quad \Delta_c \text{ est un isomorphisme et } \|\Delta_c^{-1}\| \leq 1.$$

Proposition 2. Soit $c = e(a) \in \Lambda$. L'isomorphisme $T_a e: T_a L \rightarrow T_c \Lambda$ s'étend en un isomorphisme $\hat{T}_a e: T_a L^0 \rightarrow \hat{T}_c \Lambda$, d'inverse $\hat{T}_c e^{-1}$, vérifiant:

$$(2.4) \quad \|\hat{T}_c e^{-1}(X)\|_0 \leq (1 + \lambda \|a\|_0) \|\Delta_c^{-1}(X)\|_0;$$

$$(2.5) \quad \|\hat{T}_a e\| \leq e^{\lambda \|a\|_\infty}.$$

Démonstration. Soit $X \in T_x \Lambda$: d'après l'égalité $e^{-1}(c) = E(\gamma(c), c)$, le vecteur $Z = T_c e^{-1}(X) \in T_a L$ a pour composantes horizontale et verticale:

$$h(Z) = h(T_c e^{-1}(X)) = T_c \gamma(X) = -[D_1 E(\gamma(c), c)]_0^{-1} \circ [d_2 E(\gamma(c), c)]_0 \cdot X;$$

$$v(Z) = v(T_c e^{-1}(X)) = D_1 E(\gamma(c), c) \circ T_c \gamma(X) + d_2 E(\gamma(c), c) \cdot X.$$

Comme $d_2 E(\gamma(c), c) = \Delta_c^{-1}$, on en déduit:

$$X = T_a e(Z) = \Delta_c(v(Z) - D_1 E(\gamma(c), c) \cdot h(Z)).$$

Ces formules permettent de prolonger $T_a e$, $T_c e^{-1}$ en $\hat{T}_a e$, $\hat{T}_c e^{-1}$. De plus, posant $\Delta_c^{-1}(X) = \xi = \xi_0 + \xi'$, il vient

$$(2.6) \quad h(Z) = h(\hat{T}_c e^{-1}(X)) = -[D_1 E(\gamma(c), c)]_0^{-1} \cdot \xi_0.$$

$$v(Z) = v(\hat{T}_c e^{-1} \circ \Delta_c(\xi)) = \xi - D_1 E(\gamma(c), c) \circ [D_1 E(\gamma(c), c)]_0^{-1} \cdot \xi_0.$$

D'après (E1), on a: $|h(Z)| \leq |\xi_0|$. D'autre part:

$$\begin{aligned} & \left\| \text{id} - D_1 E(\gamma(c), c(t)) \circ [D_1 E(\gamma(c), c)]_0^{-1} \right\| \\ & \leq \|D_1 E(\gamma(c), c(t)) - [D_1 E(\gamma(c), c)]_0\| \cdot \|[D_1 E(\gamma(c), c)]_0^{-1}\| \\ & \leq \lambda |a(t)| \cdot 1 \quad \text{d'après (E1)}. \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité (2.4):

$$\begin{aligned} \|Z\|_0 &= \left[|h(Z)|^2 + \|v(Z)\|_0^2 \right]^{1/2} \leq \left[|\xi_0|^2 + (\|\xi'\|_0 + \lambda \|a\|_0 |\xi_0|)^2 \right]^{1/2} \\ &\leq (1 + \lambda \|a\|_0) \|\xi\|_0. \end{aligned}$$

De même, les inégalités (E1) et (2.2) entraînent (2.5):

$$\|\hat{T}_a e(Z)\|_0 \leq \frac{\text{sh}(\lambda \|a\|_\infty)}{\lambda \|a\|_\infty} \cdot (\|v(Z)\|_0 + \lambda \|a\|_0 |h(Z)|) \leq e^{\lambda \|a\|_\infty} \|Z\|_0.$$

Notons que si $X \in \hat{T}_c \Lambda$ et si $\Delta_c^{-1}(X) = \xi$ a une moyenne nulle, alors $\hat{T}_c e^{-1}(X)$ est vertical et s'identifie à $\xi \in L_{\gamma(c)}^0 \hookrightarrow T_{\gamma(c)} L^0$. En particulier,

$$(2.7) \quad \hat{T}_c e^{-1} \circ \Delta_c(\mathcal{J}\dot{a}) = \mathcal{J}\dot{a}.$$

Définissons maintenant: $\Delta = \bigcup_c \Delta_c: \gamma^* H^0 \rightarrow \hat{T}\Lambda$, $H_{\gamma(c)}^0 \rightarrow T_c \Lambda$,

$$\hat{T}L' = TL^0|L,$$

$$\hat{T}e = \bigcup_a \hat{T}_a e: \hat{T}L \rightarrow \hat{T}\Lambda, \quad T_a L^0 \rightarrow \hat{T}_c \Lambda.$$

Nous savons déjà que Δ et $\hat{T}e$ sont des isomorphismes fibre à fibre. En fait, on peut être plus précis.

Proposition 3. *Les applications Δ et $\hat{T}e$ sont des C^∞ -isomorphismes de fibrés.*

Démonstration. Nous ne traiterons que Δ , le cas de $\hat{T}e$ étant analogue. Choisisant $p \in \tilde{M}$, il vient des trivialisations globales de $\gamma^* L^0$ et de $\hat{T}\Lambda$:

$$\Lambda \times H_p^0 \xrightarrow{\cong} \gamma^* H^0;$$

$$(c, \xi) \mapsto \text{tr}_p^{\gamma(c)}(\xi) \in H_{\gamma(c)}^0 = (\gamma^* H^0)_c$$

(tr_p^q = transport parallèle le long de la géodésique de p à q);

$$\Lambda \times L_p^0 \xrightarrow{\cong} \hat{T}\Lambda;$$

$$(c, \xi) \mapsto [d \exp_p]_X \cdot \xi \in \hat{T}_c \Lambda, \quad X = \exp_p^{-1} c \in H_p^1.$$

L'application Δ s'écrit dans ces trivialisations

$$(c, \xi) \mapsto (c, [d \exp_p^{-1}]_c \circ [d \exp_{\gamma(c)}]_a \circ \text{tr}_p^{\gamma(c)}(\xi)) = (c, \varphi(c) \cdot \xi),$$

avec une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\varphi} & \text{End}(L_p^0) = \text{End}(H^0(T_p \tilde{M})) \\ & \searrow \bar{\varphi} & \nearrow i \\ & & H^1(\text{End}(T_p \tilde{M})), \end{array} \quad \bar{\varphi} \text{ étant } C^\infty.$$

Or, d'après [14, p. 10], l'inclusion i est une application linéaire continue: donc, φ est C^∞ et il en est de même pour Δ .

Remarque. Cette preuve est analogue à celle de la différentiabilité des changements de cartes de Λ ou de trivialisations de $\hat{T}\Lambda$ (cf. [14, p. 16]) (voir aussi la preuve de la Proposition 4 dans la section suivante).

Posons $\mathcal{S} = S \circ e: L \rightarrow \mathbf{R}$. C'est une fonction C^∞ dont on veut minorer le nombre de points critiques. Notons qu'à cause de la proposition 3, on a, pour $X \in T_a L$,

$$d\mathcal{S}(X) = (\nabla S(c), T_a e(X)) = (\hat{T}_a e)(\nabla S(c), X)_0 = (\nabla S(a), X)_0,$$

où $\nabla \mathcal{S}$ est une section C^∞ de $\hat{T}L$ (par le même abus de langage que plus haut, une section de $\hat{T}L$ sera appelée champ de vecteurs). Comme pour S , on peut donc définir $d\mathcal{S}(X)$ pour $X \in \hat{T}_a L$. De plus, l'inégalité (2.5) entraîne

$$(2.8) \quad \|\nabla \mathcal{S}(a)\|_0 \leq e^{\lambda \|a\|_\infty} \|\nabla S(c)\|_0.$$

On notera $\mathcal{A} = A \circ e$ l'action "non perturbée" sur L .

3. Champ de quasi-gradient

Pour appliquer la méthode de [9], il nous faudrait un champ sur L dont le terme principal soit le champ vertical $-\mathcal{J}\dot{a}$. Pour le champ $\nabla \mathcal{S}$, ce terme est $(\hat{T}_a e)(-\mathcal{J}\dot{c})$ ce qui est trop compliqué pour en tirer quoi que ce soit. On essaie ensuite le champ correspondant à ∇S , c'est-à-dire $\hat{T}e^{-1} \circ \nabla S \circ e$. Son terme principal est $\hat{T}e^{-1}(-\mathcal{J}\dot{c}) = -\hat{T}e^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \Delta(\dot{a})$ (d'après (2.1)). Or, d'après (2.6), $-\mathcal{J}\dot{a} = -\hat{T}e^{-1} \circ \Delta \circ \mathcal{J}(\dot{a})$. On est donc naturellement amené à définir $\nabla' S = -\Delta \circ \mathcal{J} \circ \Delta^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \nabla S$ et $Z = \hat{T}e^{-1} \circ \nabla' S \circ e$.

Montrons d'abord que Z vérifie les propriétés (QG1) et (QG2) de l'introduction. La seconde condition est clairement vérifiée, quant à la première:

$$\begin{aligned} d\mathcal{S}[Z(a)] &= dS[\nabla' S(c)] \\ &= (\nabla S(c), -\Delta \circ \mathcal{J} \circ \Delta^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \nabla S(c))_0 \\ &= (\mathcal{J} \circ \Delta(\Delta^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \nabla S(c)), \Delta \circ \mathcal{J}(\Delta^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \nabla S(c)))_0. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H2), cela implique:

$$(3.1) \quad d\mathcal{S}[Z(a)] \geq \alpha \|\Delta^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \nabla S(c)\|_0^2,$$

d'où le résultat.

Estimons maintenant la valeur de la "perturbation" $G(a) = Z(a) - (-\mathcal{J}\dot{a})$, soit $G = -\hat{T}e^{-1} \circ \Delta \circ \mathcal{J} \circ \Delta^{-1} \circ \mathcal{J} \circ (\nabla h_i) \circ e$, champ de vecteurs sur L .

On a d'abord:

$$\begin{aligned} \|G(a)\|_0 &\leq (1 + \lambda \|a\|_0) \|\Delta^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \nabla h_i(c)\| \quad \text{d'après (2.4)} \\ &\leq (1 + \lambda \|a\|_0) \|\nabla h_i(c)\|_0 \quad \text{d'après (2.3)}. \end{aligned}$$

D'où, en posant $C_1 = \max_{V \times I} |\nabla h_i(p)|$:

$$(3.2) \quad \|G(a)\|_0 \leq C_1 (1 + \lambda \|a\|_0).$$

Remarques. (a) Dans la suite, on désignera par C_2, \dots des constantes, dépendant de la métrique, de \mathcal{J} et de h .

(b) Il est essentiel d'avoir une majoration linéaire en a ($C(1 + \|a\|_\infty)$ suffirait, mais pas $C(1 + \|a\|_0)^{1-\epsilon}$, $\epsilon > 0$); pour cela, l'ingrédient crucial est l'inégalité (2.4), elle-même conséquence de la seconde inégalité de (E1).

Estimons ensuite la différentielle de G , ou plutôt de sa composante verticale $g = v \circ G: L \rightarrow L^0$.

Proposition 4. *L'application tangente $Tg: TL \rightarrow TL^0$ s'étend par continuité pour la métrique H^0 en une application $\hat{T}g: \hat{TL} \rightarrow TL^0$, qui est de classe C^∞ et vérifie:*

$$(3.3) \quad \|\hat{T}_a g\| \leq C_2 e^{4\lambda \|a\|_\infty}.$$

Démonstration. Nous nous contenterons d'indiquer les grandes lignes de celle-ci, les détails omis n'offrant aucune vraie difficulté. L'application g est la composée:

$$L \xrightarrow{v} \Lambda \xrightarrow{j} \hat{T}\Lambda \xrightarrow{\Delta^{-1}} \gamma^* H^0 \xrightarrow{\mathcal{J}} \gamma^* H^0 \xrightarrow{v} L^0,$$

où l'on a noté $j = \mathcal{J} \circ (\nabla h)$, champ de vecteurs sur Λ , et $v = v \circ \hat{T}e \circ \Delta^{-1}$, application fibrée au-dessus de γ . Donc Tg est la composée:

$$TL \xrightarrow{Tv} T\Lambda \xrightarrow{Tj} T(\hat{T}\Lambda) \xrightarrow{T\Delta^{-1}} T(\gamma^* H^0) \xrightarrow{T\mathcal{J}} T(\gamma^* H^0) \xrightarrow{Tv} TL^0.$$

Chacun des fibrés tangents TL , $T\Lambda$, $T(\hat{T}\Lambda)$ et $T(\gamma^* H^0)$ est muni, outre sa métrique de type H^1 naturelle, d'une métrique de type H^0 invariante par transport parallèle: Pour TL et $T\Lambda$, il s'agit des métriques induites par $\hat{T}L$ et $\hat{T}\Lambda$; pour $T(\hat{T}\Lambda)$ par exemple, on a, si $Y \in T_X(\hat{T}\Lambda)$, $X \in \hat{T}_c \Lambda$:

$$\begin{aligned} \|Y\|_1^2 &= \|h(Y)\|_1^2 + \|v(Y)\|_0^2, \\ h(Y) &= \text{composante horizontale} \in T_c \Lambda \text{ et} \\ v(Y) &= \text{composante verticale} \in \hat{T}_c \Lambda, \end{aligned}$$

$$\|Y\|_0^2 = \|h(Y)\|_0^2 + \|v(Y)\|_0^2.$$

On peut donc définir le fibré complété $\hat{T}(\hat{T}\Lambda)$ pour $\|\cdot\|_0$, et l'on voudrait le munir d'une structure différentiable. Or, les trivialisations naturelles de $\hat{T}\Lambda$ (voir [14]):

$$\varphi_c: \Lambda \times \hat{T}_c \Lambda \rightarrow \hat{T}\Lambda, \quad c \in C^\infty(S^1, M),$$

donnent des trivialisations de $T(\hat{T}\Lambda)$:

$$\psi_c: \hat{T}\Lambda \times (T_c \Lambda \times \hat{T}_c \Lambda) \rightarrow T(\hat{T}\Lambda),$$

et des applications de changement de cartes:

$$\begin{aligned} \psi_d^{-1} \circ \psi_c: \hat{T}\Lambda \times (T_c\Lambda \times \hat{T}_c\Lambda) &\rightarrow \hat{T}\Lambda \times (T_d\Lambda \times \hat{T}_d\Lambda), \\ (X, Y, Z) &\mapsto (X, \psi_{cd}(X) \cdot \gamma, \psi'_{cd}(X) \cdot Z), \end{aligned}$$

où $\psi_{cd}: \hat{T}\Lambda \rightarrow \text{Hom}(T_c\Lambda, T_d\Lambda) = \text{Hom}(H^1(c^*TM), H^1(d^*TM))$ se factorise:

$$\begin{array}{ccc} \hat{T}\Lambda & \longrightarrow & \text{Hom}(H^1(c^*TM), H^1(d^*TM)) \\ & \searrow \bar{\psi}_{cd} & \uparrow i_1 \\ & & H^1(\text{Hom}(c^*TM, d^*TM)), \end{array}$$

$\bar{\psi}_{cd}$ étant C^∞ (vérification fastidieuse mais aisée).

D'après ([14, p. 10]), l'injection

$$i_0: H^1(\text{Hom}(c^*TM, d^*TM)) \hookrightarrow \text{Hom}(H^0(c^*TM), H^0(d^*TM))$$

est une application linéaire continue, donc $i_0 \circ \bar{\psi}_{cd}$ est C^∞ ce qui permet de munir $\hat{T}(\hat{T}\Lambda)$ d'une structure de variété hilbertienne C^∞ . On peut faire de même pour $\hat{T}(\gamma^*H^0)$, et aussi prouver que Tj , $T\Delta^{-1}$, $T\mathcal{J}$, et $T\nu$ s'étendent en des applications $\hat{T}j$, $\hat{T}\Delta^{-1}$, $\hat{T}\mathcal{J}$, et $\hat{T}\nu$ de classe C^∞ (le cas de Te est déjà connu), d'où la première partie de la proposition.

Ensuite, on écrit:

$$\|\hat{T}_a g\| \leq \|\hat{T}_a e\| \cdot \|\hat{T}_c j\| \cdot \|\hat{T}_Y \Delta^{-1}\| \cdot \|\hat{T}_\eta \mathcal{J}\| \cdot \|\hat{T}_\xi \nu\|,$$

où $Y = j(c)$, $\eta = \Delta^{-1}(Y)$, et $\xi = \mathcal{J}\eta$, et l'on va majorer chaque terme à droite.

On sait déjà que $\|\hat{T}_a e\| \leq e^{\lambda \|a\|_\infty}$, et il est clair que

$$\|\hat{T}_c j\| \leq \max_{M \times I} \|T_p(\mathcal{J} \nabla h_t)\|$$

et que

$$\|\hat{T}_\eta \mathcal{J}\| \leq 1 + \max_M \|D\mathcal{J}\| \cdot \|\eta\|_0 \leq 1 + C_1 \max_M \|D\mathcal{J}\|.$$

Ensuite, du fait que Δ^{-1} est fibrée au-dessus de id , avec $\Delta_c^{-1} = d_2 E(\gamma(c), c)$, on déduit:

$$\|\hat{T}_Y \Delta^{-1}\| \leq 1 + \|\Delta_c^{-1}\| + \|D(d_2 E(\gamma(c), c))\|_\infty \cdot (1 + \|\hat{T}_c \gamma\|) \|Y\|_0,$$

où $D(d_2 E)$ est la dérivée covariante de $d_2 E$, considérée comme une section du fibré \mathcal{H} au-dessus de $\tilde{M} \times \tilde{M}$ de fibre $\mathcal{H}_{p,q} = \text{Hom}(T_q \tilde{M}, T_p \tilde{M})$.

On a les propriétés (voir Appendice):

$$(E4) \quad \|D(d_2 E)(p, q)\| \leq C e^{\lambda r};$$

$$(E5) \quad \|D(D_1 E)(p, q)\| \leq C' e^{\lambda r} (1 + \lambda r)$$

(où de même $D_1 E$ est considérée comme une section du fibré \mathcal{E} de fibre $\mathcal{E}_{p,q} = \text{End}(T_p \tilde{M})$).

Pour $Y = j(c) = j \circ e(a)$, il vient, en utilisant (2.1), (2.2), et (E4):

$$\|\hat{T}_Y \Delta^{-1}\| \leq 1 + 1 + C e^{\lambda \|a\|_\infty} (1 + 1) \|Y\|_0 \leq 2 + C C_1 e^{\lambda \|a\|_\infty}.$$

De façon analogue, comme ν est fibrée au-dessus de γ , avec $\nu_c(\xi) = \xi - D_1 E(\gamma(c), c) \circ [D_1 E(\gamma(c), c)]_0^{-1} \cdot \xi_0$ (cf. (2.67)), on a:

$$\begin{aligned} \|\hat{T}_\xi \nu\| &\leq \|\hat{T}_c \gamma\| + \|\nu_c\| + \left[2 \|D(D_1 E)(\gamma(c), c)\|_\infty \cdot \|D_1 E(\gamma(c), c)\|_\infty \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\| [D_1 E(\gamma(c), c)]_0^{-1} \right\|^2 \cdot (1 + \|\hat{T}_c \gamma\|) \cdot \|\xi\|_0 \right]. \end{aligned}$$

Pour $\xi = \Delta^{-1} \circ j(c)$, on en déduit d'après (E1), (2.1), (2.4), (E5) et le fait que $\|\xi\|_0 \leq C_1$:

$$\|\hat{T}_\xi \nu\| \leq 1 + 1 + \lambda \|a\|_0 + 2C' e^{\lambda \|a\|_\infty} (1 + \lambda \|a\|_\infty)^2 \cdot 2C_1.$$

L'inégalité (3.3) est alors une conséquence immédiate des inégalités déjà écrites.

Autres inégalités.

$$(3.4) \quad \|\nabla \mathcal{S}(a)\|_0 \leq e^{3\lambda \|a\|_\infty} \|Z(a)\|_0.$$

$$(3.5) \quad \|\dot{a}\|_0 > 2C_1 \Rightarrow d\mathcal{S}[Z(a)] > \frac{\alpha}{4} \|\dot{a}\|_0^2.$$

$$(3.6) \quad \|Z(a)\|_0 \leq C_3 (1 + \|\dot{a}\|_0).$$

$$(3.7) \quad d\mathcal{S}[Z(a)] \geq C_4 \|Z(a)\|_0^2, \quad C_4 > 0.$$

Démonstration. (3.4) Cela s'obtient aisément à l'aide de (2.2), (2.5), et (2.8).

(3.5) On utilise (3.1) et le fait que $\Delta^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \nabla S(c) = \dot{a} - \Delta^{-1} \circ \mathcal{J}(\nabla h_r(c(t)))$, donc $\|\Delta^{-1} \circ \mathcal{J} \circ \nabla S(c)\|_0 \geq \|\dot{a}\|_0 - C_1$.

(3.6) D'après (3.2), on a $\|Z(a)\|_0 \leq \|\dot{a}\|_0 + C_1(1 + \lambda \|a\|_0)$, ce qui implique (3.6) puisque $\|a\|_0 \leq \|\dot{a}\|_0 / 2\pi$. (Cela se prouve par exemple en décomposant a en série de Fourier comme au Chapitre 4, et en se rappelant que a est à moyenne nulle.)

(3.7) D'après (3.1) et (2.7), on a:

$$[d\mathcal{S}(Z)](a) \geq \alpha \|\mathcal{J} \circ \Delta^{-1} \circ \hat{T}e \circ Z(a)\|_0^2 \geq \frac{\alpha}{(1 + \lambda \|a\|_0)^2} \|Z(a)\|_0^2.$$

Donc, si $\|a\|_0 < 2c_1$, on a

$$d\mathcal{J}[Z(a)] \geq \frac{\alpha}{(1 + 2\lambda C_1)^2} \cdot \|Z(a)\|_0^2,$$

et si $\|a\|_0 \geq 2C_1$, alors a fortiori $\|\dot{a}\|_0 \geq 2C_1$, donc (3.7) résulte de la comparaison entre (3.5) et (3.6).

4. Réduction à la dimension finie (début)

Soit N un entier > 0 . Le fibré H^s se décompose en une somme orthogonale invariante par la connexion:

$$H^s = H_N^s \oplus H_N^{s\perp};$$

$$H_N^s = \left\{ a \in H^s \mid \int_0^1 \cos 2\pi nt \cdot a(t) dt = \int_0^1 \sin 2\pi nt \cdot a(t) dt = 0, n > N \right\};$$

on note $P_N: H^s \rightarrow H_N^s$ la projection;

$$H_N^{s\perp} = \left\{ a \in H^s \mid \int_0^1 (\cos 2\pi nt) a(t) dt = \int_0^1 (\sin 2\pi nt) a(t) dt = 0, n \leq N \right\};$$

on note $P_N^\perp: H^s \rightarrow H_N^{s\perp}$ la projection.

Rappelons que tout élément de a de H_p^s a une décomposition

$$a(t) = x_0 + \sum_1^\infty (\cos 2\pi nt \cdot x_n + \sin 2\pi nt \cdot y_n),$$

avec $\|a\|_0^2 = |x_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\infty (|x_n|^2 + |y_n|^2)$,

$$\|a\|_1^2 = |x_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\infty (1 + 4\pi^2 n^2) (|x_n|^2 + |y_n|^2) \cdot H_N^s$$

(resp. $H_N^{s\perp}$) est défini par $x_n = y_n = 0$ pour $n > N$ (resp. $\leq N$).

Autres notations. ● $H_N^0 = H_N^1 =$ fibré de dimension finie $(2N + 1) \cdot \dim M$: on le notera H_N , et on pose $L_N = H_N \cap L$.

● On notera $L_N^\perp = H_N^{1\perp}$, d'où $L = L_N \oplus L_N^\perp$.

Soit $V = v \circ Z: L \rightarrow L^0$ la composante verticale de Z . On considère l'équation:

$$(E) \text{ (1ère forme)} \quad P_N^\perp(V(a)) = 0,$$

soit $-\mathcal{J}P_N^\perp(a) + P_N^\perp \circ g(a) = 0$; en notant δ l'isomorphisme $a \mapsto \dot{a}$ de L sur L^0 , cette équation s'écrit:

$$(E) \text{ (2e forme)} \quad P_N^\perp(a) = -\delta^{-1} \circ \mathcal{J} \circ P_N^\perp \circ g(a).$$

Notons $\varphi_N(a)$ le second membre: φ_N est une application C^∞ de L dans L_N^\perp , fibrée au-dessus de M . De plus:

(a) $\|\delta \circ \varphi_N(a)\|_0 \leq C_1(1 + \lambda\|a\|_0)$;

(b) $\|\varphi_N(a)\|_\infty \leq C_1(1 + \lambda\|a\|_0)/\pi\sqrt{2N}$;

(c) $\|\varphi_N(a)\|_0 \leq C_1(1 + \lambda\|a\|_0)/2\pi N$;

(d) $D\varphi_N \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \iota \circ T\varphi_N: TL \rightarrow L_N^\perp$ s'étend par continuité en $\bar{D}\varphi_N: \hat{TL} \rightarrow L_N^\perp$; qui est de classe C^∞ et vérifie:

$$\|\bar{D}_a\varphi_N\| \leq C_5 e^{5\lambda\|a\|_\infty}.$$

(e) Notant $\hat{D}\varphi_N$ la composée $\hat{TL} \rightarrow \bar{D}\varphi_N L_N^\perp \hookrightarrow H_N^{0\perp}$, on a:

$$\|\hat{D}_a\varphi_N\| \leq \frac{C_5}{2\pi N} e^{5\lambda\|a\|_\infty}.$$

Démonstration. (a) C'est une conséquence immédiate de (3.2).

(b) Cela résulte du a) et du fait que, si $a \in H_N^{0\perp}$,

$$a(t) = \sum_{N+1}^{\infty} (\cos 2\pi nt \cdot x_n + \sin 2\pi nt \cdot y_n),$$

on a

$$(\delta^{-1}(a))(t) = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n} (\sin 2\pi nt \cdot x_n - \cos 2\pi nt \cdot y_n);$$

donc:

$$\begin{aligned} \|\delta^{-1}(a)\|_\infty &\leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n} (|x_n|^2 + |y_n|^2)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{N+1}^{\infty} |x_n|^2 + |y_n|^2 \right]^{1/2} \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{N}} \cdot \sqrt{2} \|a\|_0. \end{aligned}$$

(c) De même, ceci résulte de a) et du fait que, si $a \in H_N^{0\perp}$, alors

$$\|\delta^{-1}(a)\|_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^2} (|x_n|^2 + |y_n|^2) \right]^{1/2} \leq \frac{1}{2\pi N} \|a\|_0.$$

(d) $D\varphi_N$ est la composée:

$$TL \xrightarrow{Tg} TL^0 \xrightarrow{Tf} TL^0 \xrightarrow{TP_N^\perp} TH_N^{0\perp} \xrightarrow{D\delta^{-1}} L_N^\perp;$$

donc l'existence de $\hat{T}g$ (Proposition 4) prouve celle de $\bar{D}\varphi_N$.

On sait déjà $\|\hat{T}_a g\| \leq C_2 e^{4\lambda \|a\|_\infty}$ ((3.3)). De plus, posant $X = g(a)$, on a $\|T_X \mathcal{J}\| \leq 1 + \max_M \|D\mathcal{J}\| \cdot \|X\|_0 \leq 1 + C_1 \max_M \|D\mathcal{J}\| \cdot (1 + \lambda \|a\|_0)$ d'après (3.2). Enfin l'invariance de P_N^\perp et de δ par transport parallèle entraîne

$$\|T_{X^\perp} P_N^\perp\| = 1 \quad (X^\perp = P_N^\perp X), \quad \|D_Y \delta^{-1}\| = \|\delta_p^{-1}\| = \frac{\sqrt{1 + (2\pi)^2}}{2\pi}$$

$$(Y = \mathcal{J}X^\perp, p = \gamma(c)).$$

On en déduit aisément le (d).

(e) Cela résulte du (d) et du fait que la norme de l'inclusion $(L_N^\perp)_p \hookrightarrow (H_N^{0\perp})_p$ est $1/\sqrt{1 + (2\pi N)^2}$ (cf. aussi le (c)).

Posons maintenant $R = 8\lambda + 1$ ($R > 5\lambda$ suffirait pour la proposition suivante, mais plus tard il nous faudra $R > 8\lambda$) et définissons:

$$U_N = \left\{ a_N \in L_N \mid \|a_N\|_\infty < \frac{\text{Log } N}{R} \right\}.$$

Proposition 5. *Choisissons N assez grand. Alors, pour chaque a_N dans U_N , il existe une unique solution a de (E) telle que $P_N(a) = a_N$. Notant $P_N^\perp(a) = v_N(a_N)$, on définit ainsi une application $v_N: U_N \rightarrow L_N^\perp$ fibrée au-dessus de M . Cette application est C^∞ et vérifie:*

$$(4.1) \quad \|v_N(a_N)\|_\infty < 1;$$

$$(4.2) \quad \|D_{a_N} v_N\|_{0,0} \leq C_6 N^{5\lambda/R-1};$$

où $Dv_N = v \circ Tv_N: TL_N \rightarrow L_N^\perp$ et $\|\cdot\|_{0,0}$ désigne la norme de l'application linéaire quand les deux espaces sont munis des normes H^0 .

$$(4.3) \quad \|v_N(a_N)\|_0 \leq C_7 \frac{\text{Log } N}{N};$$

$$(4.4) \quad \|\overline{v_N(a_N)}\|_0 \leq C_8(1 + \|a_N\|_0) \leq C_8(1 + \|\dot{a}_N\|_0).$$

Démonstration. Dans chacun des lemmes suivants, on sous-entend "Pour N assez grand".

Lemma 1. *Si a est une solution de (E) telle que $P_N(a) \in U_N$, alors $\|P_N^\perp(a)\|_\infty < 1$, et a fortiori $\|a\|_\infty < \text{Log } N/R + 1$.*

Démonstration. D'après (b), on a, en posant $P_N(a) = a_N$, $P_N^\perp(a) = a_N^\perp$:

$$\|a_N^\perp\|_\infty = \|\varphi_N(a)\|_\infty \leq \frac{C_1}{\pi\sqrt{2N}} (1 + \lambda \|a_N\|_\infty + \lambda \|a_N^\perp\|_\infty);$$

d'où, en supposant N assez grand pour que $\lambda C_1/\pi\sqrt{2N} < \frac{1}{2}$:

$$\|a_N^\perp\|_\infty \leq \frac{2C_1}{\pi\sqrt{2N}} (1 + \lambda \|a_N\|_\infty) \leq \frac{2C_1}{\pi\sqrt{2N}} \left(1 + \frac{\lambda \text{Log } N}{R}\right) = o(1), \quad N \rightarrow \infty,$$

d'où le résultat.

Lemme 2. Soit $a \in L$, $a = a_N + a_N^\perp$, tel que $a_N \in U_N$ et $\|a_N^\perp\|_\infty < 1$. Alors, $\|\varphi_N(a)\|_\infty < 1$.

Corollaire. $\|\hat{D}_a \varphi_N\| < C_5 N^{5\lambda/R-1}/2\pi < \frac{1}{2}$.

Démonstration. Comme pour le Lemme 1, on a :

$$\begin{aligned} \|\varphi_N(a)\|_\infty &\leq \frac{C_1}{\pi\sqrt{2N}} (1 + \lambda\|a_N\|_\infty + \lambda\|a_N^\perp\|_\infty) \\ &< \frac{C_1}{\pi\sqrt{2N}} \left(1 + \frac{\lambda \text{Log } N}{N} + \lambda\right) = o(1), \end{aligned}$$

d'où le résultat. La première inégalité du corollaire est alors une conséquence de e), la seconde est vraie pour N assez grand puisque $R > 5\lambda$.

Lemme 3. Soit a_N un élément de U_N : il existe alors au plus une solution a de (E) telle que $P_N(a) = a_N$.

Démonstration. Si a et a' sont deux telles solutions, on a $\|P_N a\|_\infty < 1$ et $\|P_N(a')\|_\infty < 1$ (Lemme 1), donc le corollaire du Lemme 2 entraîne :

$$\|a - a'\|_0 = \|P_N(a) - P_N(a')\|_0 = \|\varphi_N(a) - \varphi_N(a')\|_0 \leq \frac{1}{2}\|a - a'\|_0,$$

d'où le résultat.

Définissons maintenant une suite d'applications fibrées $\psi_n: U_N \rightarrow L_N^\perp$:

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_{n+1}(a_N) = \varphi_N(a_N + \psi_n(a_N)).$$

Lemme 4. La suite (ψ_n) converge uniformément vers une application continue v_N .

Corollaire. Pour $a_N \in U_N$, il existe une unique solution a de (E) telle que $P_N(a) = a_N$, à savoir $a = a_N + v_N(a_N)$.

Démonstration. D'après les Lemmes 1 et 2, on a :

$$\begin{aligned} \|\psi_{n+1}(a_N) - \psi_n(a_N)\|_0 &\leq \frac{1}{2}\|\psi_n(a_N) - \psi_{n-1}(a_N)\|_0; \\ \|\psi_n(a_N) - \psi_{n-1}(a_N)\|_0 &\leq \frac{1}{2^{n-1}}\|\varphi_N(a_N)\|_0 < \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\text{Log } N}{R}. \end{aligned}$$

Puis, à l'aide de l'inégalité (d)

$$\|\psi_{n+1}(a_N) - \psi_n(a_N)\|_1 \leq C_5 N^{5\lambda/R} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\text{Log } N}{R}$$

d'où le résultat. Par passage à la limite, on a $v_N(a_N) = \varphi_N(a_N + v_N(a_N))$, et l'unicité a été démontrée au lemme 3.

Lemme 4. L'application v_N est C^∞ et vérifie (4.2).

Démonstration. Soit $a = a_N + v_N(a_N)$, $a_N \in U_N$. On a une décomposition orthogonale naturelle $T_a L = T_{a_N} L_N \oplus (L_N^\perp)_p$. Notons $D_1 \varphi_N = D_a \varphi_N|_{T_{a_N} L_N}$ et

$D_2\varphi_N = D_a\varphi_N|_{(L_N^\perp)_p}$. Pour appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation $a_N^\perp = \varphi_N(a_N + a_N^\perp)$, il faut montrer que l'application $\text{id} - D_2\varphi_N$ est inversible. D'après la propriété (d) et les Lemmes 1 et 2, on a le diagramme commutatif d'applications linéaires continues:

$$\begin{array}{ccc} (L_N^\perp)_p & \xrightarrow{D_2\varphi_N} & (L_N^\perp)_p \\ \downarrow i & \nearrow \bar{D}_2\varphi_N & \downarrow i \\ (H_N^{0\perp})_p & \xrightarrow{\hat{D}_2\varphi_N} & (H_N^{0\perp})_p \end{array}$$

avec $\|\hat{D}_2\varphi_N\| < C_5 e^{5\lambda N^{5\lambda} R^{-1}} / 2\pi < \frac{1}{2}$. On en déduit d'abord que $\text{id} - \hat{D}_2\varphi_N$ est inversible, puis qu'il en est de même pour $\text{id} - D_2\varphi_N$, avec $(\text{id} - D_2\varphi_N)^{-1} = \text{id} - \bar{D}_2\varphi_N \circ (\text{id} - \hat{D}_2\varphi_N)^{-1} \circ i$ (vérification immédiate). Donc, v_N est bien de classe C^∞ et la composante verticale de $T_{a_N}v_N$ est donnée par

$$D_{a_N}v_N = D_1\varphi_N \circ (\text{id} - D_2\varphi_N)^{-1}.$$

L'inégalité (4.2) est une conséquence immédiate de cette égalité et du corollaire du Lemme 2.

Pour achever la preuve de la Proposition 4, il reste:

- L'inégalité (4.3): elle résulte de (c) et de (4.1).
- L'inégalité (4.4): on a

$$\begin{aligned} \|\hat{a}_N^\perp\|_0 &= \|\delta \circ \varphi_N(a)\|_0 \leq C_1(1 + \lambda\|a\|_0) \quad (\text{d'après a}) \\ &\leq C_1(1 + \lambda\|a_N\|_0 + \lambda) \quad (\text{d'après le lemme 1}). \end{aligned}$$

5. Réduction à la dimension finie (fin)

Soit N assez grand pour pouvoir appliquer la Proposition 5. Posons:

$$\begin{aligned} u_N: U_N &\rightarrow L, & a_N &\rightarrow a_N + v_N(a_N); \\ \mathcal{S}_N &= \mathcal{S} \circ u_N: U_N &\rightarrow \mathbf{R}; \\ Z_N &= \hat{TP}_N \circ Z \circ u_N, & \text{champ de vecteurs sur } U_N. \end{aligned}$$

L'équation (E) implique $Z(u_N(a_N)) \in TL$, donc $Z_N = TP_N \circ Z \circ u_N$, et aussi:

$$(5.1) \quad \|Z_N(a_N)\|_0 = \|Z(a)\|_0, \quad a = u_N(a_N).$$

Proposition 6. Pour N assez grand, on a:

$$(5.2) \quad d\mathcal{S}_N[Z_N(a_N)] \geq \frac{1}{2} [d\mathcal{S}(Z)](a), \quad a = u_N(a_N).$$

Démonstration. Puisque $\mathcal{S}_N = \mathcal{S} \circ u_N$, il vient:

$$d\mathcal{S}_N [Z_N(a_N)] = d\mathcal{S} [(Tu_N(Z_N))(a)];$$

$$|d\mathcal{S}_N [Z_N(a_N)] - d\mathcal{S} [Z(a)]| \leq \|\nabla \mathcal{S}(a)\|_0 \cdot \|Tu_N(Z_N(a_N)) - Z(a)\|_0.$$

D'autre part, $Tu_N(Z_N(a_N)) = T(u_N \circ P_N)(Z(a))$ a la même composante horizontale que $Z(a)$ et sa composante verticale est:

$$\begin{aligned} Du_N(Z_N(a_N)) &= v \circ TP_N(Z(a)) + Dv_N(Z_N(a_N)) \\ &= P_N(V(a)) + Dv_N(Z_N(a_N)) \\ &= V(a) + Dv_N(Z_N(a_N)) \quad (\text{équation E}). \end{aligned}$$

D'où, à l'aide de (4.2):

$$\|Tu_N(Z_N(a_N)) - Z(a)\|_0 = \|Dv_N(Z_N(a_N))\|_0 \leq C_6 N^{5\lambda/R-1} \|Z_N(a_N)\|_0.$$

Comme par ailleurs, (3.4) et (4.1) entraînent:

$$(5.3) \quad \|\nabla \mathcal{S}(a)\|_0 \leq e^{3\lambda} N^{3\lambda/R} \|Z(a)\|_0,$$

il vient, en tenant compte de (5.1):

$$|d\mathcal{S}_N [Z_N(a_N)] - d\mathcal{S} [Z(a)]| \leq C_6 e^{3\lambda} N^{3\lambda/R-1} \|Z(a)\|_0^2.$$

En comparant avec (3.7), on voit que pour obtenir (5.2), il suffit que N soit assez grand pour que $C_6 e^{3\lambda} N^{8\lambda/R-1} < C_4/2$, ce qui est possible puisque $R > 8\lambda$.

Corollaires de la Proposition 6.

(a) Z_N est de quasi-gradient pour \mathcal{S}_N .

(b) Si $Z_N(a_N) = 0$, alors $Z(a) = 0$.

Remarque. La réciproque de (b) est également vraie pour N assez grand, au sens suivant: si $Z(a) = 0$, alors $P_N(a) = a_N \in U_N$, d'où $Z_N(a_N) = 0$. En effet:

$$\begin{aligned} -\mathcal{J}\dot{c} - (\nabla h_t)(c) = 0 &\Rightarrow \|\dot{c}\|_0 \leq C_1 \Rightarrow \|\dot{a}\|_0 \leq C_1 \Rightarrow \|\dot{a}_N\|_0 \leq C_1 \\ &\Rightarrow \|a_N\|_\infty \leq \frac{C_1}{2\sqrt{3}} \quad (\text{cf. la preuve de (b) au Chapitre 4}). \end{aligned}$$

Définissons l'application $F_N: L_N \rightarrow \mathbf{R}$: $F_N(a_N) = \sum_1^N n(|x_n|^2 + |y_n|^2)$ (c'est à peu de chose près le carré de la norme $H^{1/2}$). Il est clair que F_N est invariante par transport parallèle et son gradient pour la métrique H^0 est le vecteur vertical donné par:

$$\nabla F_N(a_N)(t) = 2 \sum_1^N n(\cos 2\pi nt \cdot x_n + \sin 2\pi nt \cdot y_n),$$

donc:

$$\|\nabla F_N(a_N)\|_0 = \frac{1}{\pi} \|\dot{a}_N\|_0.$$

L'inégalité suivante est capitale:

$$(5.4) \quad F_N(a_N) \geq C_9 \Rightarrow |dF_N[Z_N(a_N)]| < C_{10} d\mathcal{S}_N[Z_N(a_N)].$$

Remarque. Cette inégalité joue le rôle de la condition (C) de Palais-Smale: plus précisément, elle servira à majorer la croissance de F_N le long des orbites de Z_N , ce qui permettra de les maintenir dans des compacts convenables. De plus, elle entraîne que chaque point critique de \mathcal{S}_N vérifie $F_N(a_N) < C_9$.

Démonstration de (5.4). D'une part:

$$\begin{aligned} |dF_N[Z_N(a_N)]| &\leq \|\nabla F_N(a_N)\|_0 \|Z_N(a_N)\|_0 \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|\dot{a}_N\|_0 \cdot C_3(1 + \|\dot{a}\|_0) \quad (\text{d'après (5.1) et (3.6)}) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|\dot{a}_N\|_0 \cdot C_3(2 + C_8(1 + \|\dot{a}_N\|_0)) \quad (\text{d'après (4.4)}), \end{aligned}$$

donc:

$$\|\dot{a}_N\|_0 > 1 \Rightarrow |dF_N[Z_N(a_N)]| \leq \frac{1}{\pi} C_3(2 + 2C_8) \|\dot{a}_N\|_0^2.$$

D'autre part, d'après (3.5) et (5.2):

$$\|\dot{a}_N\|_0 > 2C_1 \Rightarrow d\mathcal{S}_N[Z_N(a_N)] > \frac{\alpha}{8} \|\dot{a}_N\|_0^2.$$

Enfin:

$$\|\dot{a}_N\|_0^2 = 2\pi^2 \sum_1^N n^2 (|x_n|^2 + |y_n|^2) \geq 2\pi^2 F_N(a_N),$$

donc:

$$F_N(a_N) > \frac{1}{2\pi^2} \sup(1, (2C_1)^2) \Rightarrow \|\dot{a}_N\|_0 > \sup(1, 2C_1),$$

d'où l'on déduit (5.4).

Proposition 7. Soit $W_N = \{a_N \in L_N | F_N(a_N) < \text{Log } N / 2R^2\}$.

(a) Pour $N \geq 3$, $W_N \subset U_N$.

(b) Pour N assez grand.

$$a_N \in W_N \Rightarrow |\mathcal{A}(a) - \mathcal{A}(a_N)| < 1, \quad a = u_N(a_N).$$

Démonstration.

(a)

$$\begin{aligned} \|a_N\|_\infty &\leq \sum_1^N (|x_n|^2 + |y_n|^2)^{1/2} \leq \left[\left(\sum_1^N \frac{1}{n} \right) \cdot \left(\sum_1^N n(|x_n|^2 + |y_n|^2) \right) \right]^{1/2} \\ &\leq [2 \log N \cdot F_N(a_N)]^{1/2} < \left[2 \operatorname{Log} N \cdot \frac{\operatorname{Log} N}{2R^2} \right]^{1/2} = \frac{\operatorname{Log} N}{R} \quad (a_N \in W_N). \end{aligned}$$

(b) Par le théorème des accroissements finis et en se rappelant que $\nabla A(c) = -\mathcal{J}c = -\mathcal{J}\Delta a$, on obtient:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(a) - \mathcal{A}(a_N)| &\leq \max_{0 \leq s \leq 1} \|\nabla \mathcal{A}(a_s)\|_0 \cdot \|v_N(a_N)\|_0, \quad a_s = a_N + sv_N(a_N) \\ &\leq \max_s \|\hat{T}_{a_s} e\| \cdot \|\nabla A(c_s)\|_0 \cdot C_7 \frac{\operatorname{Log} N}{N} \quad (\text{d'après (4.3)}) \\ &\leq e^{\lambda N^{\lambda/R}} \cdot e^{\lambda N^{\lambda/R}} (\|\dot{a}_N\|_0 + \|\dot{v}_N(a_N)\|_0) \cdot C_7 \frac{\operatorname{Log} N}{N} \\ &\quad (\text{d'après (2.2), (2.5) et (4.1)}) \\ &\leq e^{2\lambda N^{2\lambda/R}} (\|a_N\|_0 + C_8(1 + \|\dot{a}_N\|_0)) \cdot C_7 \frac{\operatorname{Log} N}{N} \\ &\quad (\text{d'après (4.4)}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\|\dot{a}_N\|_0^2 \leq 2\pi^2 N F_N(a_N) < \frac{\pi^2 N \operatorname{Log} N}{R^2};$$

on en déduit:

$$|\mathcal{A}(a) - \mathcal{A}(a_N)| < \frac{C'_8}{R} N^{-1/2+2\lambda/R} (\operatorname{Log} N)^{3/2},$$

d'où le (b) puisque $-\frac{1}{2} + 2\lambda/R < 0$.

Enfin, notons $\mathcal{A}_N = \mathcal{A}|_{L_N}$ et Z_N^0 le champ vertical $-\mathcal{J}\dot{a}_N$ sur L'_N . Il est aisé de voir que si $\|a\|_\infty \rightarrow 0$, on a $\mathcal{A}(a) = -\frac{1}{2}(a, \mathcal{J}\dot{a})_0 + O(\|a\|_\infty^2 \|\dot{a}\|_0)$ (comparaison avec "l'aire euclidienne"). En particulier on a:

$$\mathcal{A}_N(a_N) = \sum_1^N \pi n(x_n \cdot y_n) + O(\|a_N\|_0^3), \quad \|a_N\|_0 \rightarrow 0.$$

Donc, l'image de la section nulle $M \subset L_N$ forme une variété critique non dégénérée au sens de Bott [4] pour \mathcal{A}_N , d'indice $\frac{1}{2} \dim(L_N)_p = N \cdot \dim M$.

D'autre part, (H2) entraîne:

$$d\mathcal{A}_N[Z_N^0(a_N)] \geq \alpha \|\dot{a}_N\|_0^2 = \alpha \|Z_N^0(a_N)\|_0^2.$$

- Conséquences.** ● \mathcal{A}_N n'a pas de points critiques hors de M ;
 ● Z_N^0 est de quasi-gradient pour \mathcal{A}_N .

$$(5.5) \quad |dF_N(Z_N^0)| \leq \frac{1}{\pi\alpha} d\mathcal{A}_N(Z_N^0).$$

Dernières propriétés.

$$(5.6) \quad |\mathcal{S}_N - \mathcal{A}_N| < C_{11} \quad \text{sur } W_N \left(C_{11} = \max_{M \times I} |h_t| + 1 \right)$$

Cela résulte de la Proposition 7.

$$(5.7) \quad Z_N(a_N) = 0 \Rightarrow |\mathcal{A}_N(a_N)| < C_{12}.$$

En effet $\|\dot{a}_N\|_0 \leq C_1$ et $\|a_N\|_\infty \leq C_1/2\sqrt{3}$ (cf. remarque après la Proposition 6), et d'autre part $|\mathcal{A}(a)| \leq e^{\lambda\|a\|_\infty} \|\dot{a}\|_0 \|a\|_0$ (par accroissements finis comme pour la preuve de la Proposition 7).

A fortiori, on a:

$$(5.8) \quad Z_N(a_N) = 0 \Rightarrow |\mathcal{S}_N(a_N)| < C_{13} \quad (C_{13} = C_{11} + C_{12}).$$

6. Minoration du nombre de points critiques en dimension finie

On va construire (v, v^-) , $v^- \subset v \subset W_N$ avec les propriétés:

(B1) v est compact.

(B2) $\text{Fr } v$ ne contient aucun point critique de \mathcal{S}_N (= zéro de Z_N).

(B3) Soit (φ_t) le flot de Z_N :

(i) si $x \in v^-$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(\varphi_t(x) \notin v$ si $-\varepsilon < t < 0$) et $(\varphi_t(x) \in v$ si $0 < t < \varepsilon)$;

(ii) si $x \in v \setminus v^-$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(\varphi_t(x) \in v$ si $-\varepsilon < t < 0)$.

(B4) (v, v^-) a une "cup-length relative" $\text{CL}_{\text{rel}}(v, v^-) \geq \text{CL}(M) + 1$, au sens suivant: il existe $\omega_1, \dots, \omega_l$ ($l = \text{CL}(M)$) dans $\tilde{H}^*(v; A)$ et ω dans $H^*(v, v^-; A)$ tels que $\omega_1 \cup \dots \cup \omega_l \cup \omega \neq 0$ dans $H^*(v, v^-; A)$.

Montrons d'abord comment en déduire le théorème. Supposons que \mathcal{S}_N n'ait qu'un nombre fini de points critiques c_1, \dots, c_k dans v ; les c_i sont dans \dot{v} d'après (B2). Alors, d'après [5, p. 342], chaque c_i admet un voisinage u_i contractile dans v et contenant les orbites de Z_N dans v ayant c_i pour point limite. D'autre part, la réunion des orbites de Z_N dans v issues de v^- forme un ouvert u qui se rétracte par déformation sur v^- . Les conditions (B1) et (B3)

entraînent $v = u \cup (\bigcup_{i=1}^k u_i)$, d'où un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^*(v, u_1) \otimes \cdots \otimes H^*(v, u_k) \otimes H^*(v, u) & \xrightarrow{\cup \omega} & H^*(v, v) = 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \\ \underbrace{\tilde{H}^*(v) \otimes \cdots \otimes \tilde{H}^*(v)}_{k \text{ termes}} \otimes H^*(v, v^-) & \xrightarrow{\cup \omega} & H^*(v, v^-) \end{array}$$

donc la condition (B4) entraîne $k > l$.

Donc, \mathcal{S}_N a au moins $\text{CL}(M) + 1$ points critiques, ce qu'il fallait démontrer.

Construction de (v, v^-) . Donnons d'abord une définition: Soient W une variété de dimension finie, Z un champ de vecteurs sur W de flot (φ_t) , et A, B deux parties fermées de W , $A \subset B$. Le saturé total de A dans B pour Z est la plus petite partie fermée F de B contenant A telle que:

- Si $x \in F$ et $\varphi_s(x) \in B$ pour s entre 0 et t , alors $\varphi_t(x) \in F$;
- Si $\varphi_t(x) \in B$ pour $0 \leq t \leq +\infty$ (resp. $-\infty < t \leq 0$) et si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x) \in F$ (resp. $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) \in F$), alors $x \in F$.

Ensuite, on pose, pour $a < b$ et $K > 0$:

$$B(\mathcal{S}_N, a, K) = \mathcal{S}_N^{-1}(a) \cap F_N^{-1}([0, K]);$$

$$V(\mathcal{S}_N, a, K, b) = \text{saturé total de } B(\mathcal{S}_N, a, K) \text{ dans } \mathcal{S}_N^{-1}([a, b]) \text{ pour } Z_N.$$

Nous allons voir que pour un choix judicieux de a, b et K , la paire $(v, v^-) = (V(\mathcal{S}_N, a, K, b), B(\mathcal{S}_N, a, K))$ satisfait (B1) à (B4). Pour cela, nous devons auparavant voir ce qui se passe avec la fonction non perturbée \mathcal{A}_N .

(A) *Voisinages de Morse généralisés (VMG).*

On définit $B(\mathcal{A}_N, a, K)$ et $V(\mathcal{A}_N, a, K, b)$ avec \mathcal{A}_N, Z_N^0 au lieu de \mathcal{S}_N, Z_N . La propriété (5.5) implique $F_N|V(\mathcal{A}_N, a, K, b) \leq K + (b - a)/\pi\alpha$, donc $V(\mathcal{A}_N, a, K, b)$ est compact. On dira que $V(\mathcal{A}_N, a, K, b)$ est un VMG (pour (\mathcal{A}_N, M)) s'il contient M dans son intérieur. Pour cela, il suffit que:

- $a < 0 < b$;
- $K > 1/\pi\alpha \cdot |a|$.

En effet, d'après (5.5), la deuxième condition implique que toute orbite de Z_N^0 qui aboutit à un point de M intersecte $\mathcal{A}_N^{-1}(a)$ sur $B(\mathcal{A}_N, a, K)$, donc est contenue dans $V(\mathcal{A}_N, a, K, b)$ d'après la première condition.

Soit $V = V(\mathcal{A}_N, a, K, b)$ un VMG, et posons $V^- = V \cap \mathcal{A}_N^{-1}(a)$ ($= B(\mathcal{A}_N, a, K)$ comme on le voit facilement). Soient $V(v^-)$ l'espace total de la "composante négative" du fibré normal à M , et $E^0(v^-) = E(v^-) \setminus M$. D'après la généralisation par Bott de la théorie de Morse au cas des variétés critiques non dégénérées [4], il existe $i: (E(v^-), E^0(v^-)) \rightarrow (V, V^-)$ commutant avec les projections $\pi: E(v^-) \rightarrow M$ et $\tau: V \subset L_N \rightarrow M$, et telle que $i^*: H^*(V, V^-) \rightarrow H^*(E(v^-), E^0(v^-))$ soit un isomorphisme (coefficients quelconques).

Notons $e(\nu^-)$ la classe d'Euler de ν^- et ω l'élément correspondant de $H^*(V, V^-)$. On a alors un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{H}^*(V) & \xrightarrow{\cup \omega} & H^*(V, V^-) \\
 & \nearrow \tau^* & \downarrow i^* & & \downarrow i^* \cong \\
 \tilde{H}^*(M) & \xrightarrow[\pi^*]{\cong} & \tilde{H}^*(E(\nu^-)) & \xrightarrow[\cong]{\cup e(\nu)} & H^*(E(\nu), E^0(\nu^-))
 \end{array}$$

ce qui implique $CL_{\text{rel}}(V, V^-) \geq CL(M) + 1$.

Notons aussi que si $a < a' < 0$, alors en suivant les orbites de Z_N^0 paramétrées par \mathcal{A}_N , on obtient un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 V(\mathcal{A}_N, a, K, a') & \xrightarrow{\cong} & B(\mathcal{A}_N, a, K) \times [a, a'] \\
 \searrow \mathcal{A}_N & & \swarrow \text{pr}_2 \\
 & & [a, a']
 \end{array}$$

donc $V(\mathcal{A}_N, a, K, a')$ est un "voisinage collier" de $B(\mathcal{A}_N, a, K)$.

Enfin, supposons que nous ayons deux VMG, V_1 , et V_2 , et un voisinage collier $C(V_2^-) \subset V_2$ tels que $(V_1, V_1^-) \subset (V_2, C(V_2^-))$, alors cette inclusion induit un isomorphisme de $H^*(V_2, V_2^-)$ sur $H^*(V_1, V_1^-)$ (coefficients quelconques).

(B) Réalisation des propriétés (B1) à (B4).

(1) La propriété (B1) sera satisfaite sous l'hypothèse:

$$(6.1) \quad \sup(K, C_9) + C_{10}(b - a) < \frac{\text{Log } N}{2R^2}.$$

En effet, soit $x \in \nu$: alors quant on considère l'orbite de Z_N passant par x , la définition du saturé total implique qu'une au moins des deux propriétés suivantes est satisfaite:

- l'orbite passe par un point de ν^- ;
- elle a pour point limite un point critique de \mathcal{S}_N dans $\mathcal{S}_N^{-1}([a, b])$.

D'après (5.4), on en déduit:

$$\nu \subset F_N^{-1}([0, \sup(K, C_9) + C_{10}(b - a)]),$$

qui est compact d'après (6.1) et la proposition 7(a).

(2) La propriété (B2) sera satisfaite si on a de plus:

$$(6.2) \quad a \leq -C_{13}, \quad b \geq C_{13};$$

$$(6.3) \quad C_9 + C_{10}(b - a) \leq K.$$

En effet, soit x un point critique de \mathcal{S}_N : alors, d'après (5.8) et (6.2), on a $a < \mathcal{S}_N(x) < b$, et d'après (5.4), on a $F_N(x) < C_9$: ces inégalités persistent pour y voisin de x . Considérons ensuite la demi-orbite de $-Z_N$ issue de y : d'après (5.5) et (6.3), tant qu'elle reste dans $\mathcal{S}_N^{-1}([a, b])$ elle reste dans $F_N^{-1}([0, K])$ donc (6.1) l'empêche de "partir à l'infini"; elle aboutit donc ou bien à un point critique de \mathcal{S}_N ou bien à un point de $\mathcal{S}_N^{-1}(a) \cap F_N^{-1}([0, K]) = v^-$. D'après la définition du saturé total, on en déduit que $y \in v$, donc $x \in \hat{v}$: ainsi \hat{v} contient tous les points critiques de \mathcal{S}_N , et a fortiori (B2) est satisfaite.

(3) (B3)(i) est évidemment toujours satisfaite. Quant à (B3)(ii) il sera satisfaite sous l'hypothèse (6.3). En effet, soit $x \in v \setminus v^-$:

- si $\mathcal{S}_N(x) > a$, alors $\varphi_t(x) \in v$ pour $t < 0$, $|t|$ assez petit d'après la définition du saturé total;

- si $\mathcal{S}_N(x) = a$, alors $x \in \mathcal{S}_N^{-1}(a) \setminus v^-$; soit $y \in \mathcal{S}_N^{-1}(a) \setminus v^-$, alors $F_N(y) > K$, donc (6.3) empêche l'orbite de y pour Z_N d'aboutir à un point critique de \mathcal{S}_N dans $\mathcal{S}_N^{-1}([a, b])$: mais alors la considération de $W = v \setminus \{Z_N\text{-orbites issues de } \mathcal{S}_N^{-1}(a) \setminus v^-\} \cap \mathcal{S}_N^{-1}([a, b])$ contredit la minimalité de v dans la définition du saturé total.

(4) Pour obtenir (B4), nous allons montrer qu'outre a, b, K , on peut choisir a', a_i, b_i, K_i ($i = 1, 2$), a'_2 de sorte que, si l'on pose:

$$V_i = V(\mathcal{A}_N, a_i, K_i, b_i), \quad V_i^- = B(\mathcal{A}_N, a_i, K_i),$$

$$C(v^-) = V(\mathcal{S}_N, a, K, a'), \quad C(V_2^-) = V(\mathcal{A}_N, a_2, K_2, a'_2),$$

on ait:

$$(6.4) \quad (V_1, V_1^-) \subset (v, C(v^-)) \subset (V_2, C(V_2^-));$$

$$(6.5) \quad a' \leq -C_{13};$$

$$(6.6) \quad a_i < 0 < b_i;$$

$$(6.7) \quad K_i > \frac{1}{\pi\alpha} |a_i|;$$

$$(6.8) \quad a'_2 < 0.$$

Supposant (6.1) à (6.8) satisfaites, montrons comment en déduire (B4) (6.6) et (6.7) entraînent que les (V_i, V_i^-) sont des (VMG). D'autre part, (6.5) implique que $C(v^-)$ ne contient aucun point critique de \mathcal{S}_N . Comme il est

compact car contenu dans v , on a:

$$\begin{array}{ccc} C(v^-) & \xrightarrow{\cong} & v^- \times [a, a'] \\ \mathcal{S}_N \searrow & & \swarrow \text{pr}_2 \\ & & [a, a'] \end{array}$$

Ceci, joint à (6.8) et aux propriétés des (VMG), permet de déduire de (6.4):

$$H^*(V_2, V_2^-) \xrightarrow{i^*} H^*(v, v^-) \xrightarrow{j^*} H^*(V_1, V_1^-),$$

la composée $j^* \circ i^*$ étant un isomorphisme.

Donc i^* est injective, ce qui implique $\text{CL}_{\text{rel}}(v, v^-) \geq \text{CL}_{\text{rel}}(V_2, V_2^-) \geq \text{CL}(M) + 1$.

Choix de a, b, K, a' ... Posons d'abord:

$$a_1 = -C_{11} - C_{13} = -2C_{11} - C_{12};$$

$$b_1 = C_{11};$$

$$K_1 = \frac{1}{\pi\alpha} |a_1| + 1.$$

Alors, (6.6) et (6.7) seront satisfaites.

Ensuite, soient:

$$a = a_1 - C_{11} = -2C_{11} - C_{13};$$

$$b = b_1 + C_{11} = 2C_{11};$$

$$K = \sup\left(K_1 + \frac{1}{\pi\alpha}(b_1 - a_1), C_9\right) + C_{10}(b - a);$$

alors (6.2) et (6.3) seront satisfaites.

Enfin, soient:

$$a' = a_1 + C_{11} = -C_{13};$$

$$a_2 = a - C_{11} = -3C_{11} - C_{13};$$

$$b_2 = b + C_{11} = 3C_{11};$$

$$K_2 = \sup(K, C_9) + C_{10}(b - a) + \frac{1}{\pi\alpha}(b_2 - a_2) + 1;$$

$$a'_2 = a' + C_{11} = -C_{12};$$

alors (6.5) et (6.8) seront satisfaites.

Reste à prouver (6.1) et (6.4): la première s'écrit:

$$L(\alpha, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}) < \frac{\text{Log } N}{2R^2},$$

et sera donc satisfaite pour N assez grand. Enfin, nous allons montrer qu'on a $V_1 \subset v$, les autres inclusions de (6.4) ayant une preuve tout à fait analogue.

Soit $x \in V_1$; alors $a_1 \leq \mathcal{S}_N(x) \leq b_1$ entraîne $a \leq \mathcal{S}_N(x) \leq b$, de plus on a $F_N(x) \leq K_1 + (b_1 - a_1)/\pi\alpha$. Suivons l'orbite de $-Z_N$ issue de x jusqu'à sortir (éventuellement) de $\mathcal{S}_N^{-1}([a, b])$:

● ou bien elle aboutit à un point critique de \mathcal{S}_N : on sait que ce point est dans v , donc x lui-même est dans v d'après la définition du saturé total;

● ou bien elle aboutit à un point y de $\mathcal{S}_N^{-1}(a)$, et l'on a:

$$F_N(y) \leq \sup\left(K_1 + \frac{1}{\pi\alpha}(b_1 - a_1), C_9\right) + C_{10}(b - a) < K,$$

donc $y \in v^-$ et $x \in v$, ce qui achève la démonstration.

7. Complément. Cas où les points fixes sont non dégénérés

Notons $\text{SB}(M) = \max_{K \text{ corps}} \sum_i \dim H^i(M; K)$. La théorie de Morse (cf. [5, p. 338]) dit que toute fonction de Morse sur M a au moins $\text{SB}(M)$ points critiques. Ce minorant est optimal si $M = T^{2n}$ ($\rightarrow 2^{2n}$), $M =$ surface de genre g ($\rightarrow 2g + 2$), $M = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ($\rightarrow n + 1$, pas mieux que pour une fonction quelconque).

Théorème complémentaire. *Soit (M, φ) vérifiant les hypothèses du théorème principal, plus le fait que les points fixes de φ sont non dégénérés. Alors, φ a au moins $\text{SB}(M)$ points critiques.*

Démonstration. Rappelons qu'un point fixe p est dit non dégénéré si $T_p\varphi$ ($\in \text{End } T_pM$) n'a pas 1 pour valeur propre. De façon équivalente, l'équation linéarisée de $\dot{\varphi}_t = X_{h_t} \circ \varphi_t$, à savoir:

$$\dot{\xi}_t = DX_{h_t} \circ \xi_t, \quad \xi_t \in T_{\varphi_t}(p),$$

n'a pas de solution non nulle telle que $\xi(1) = \xi(0)$.

On en déduit (exercice) que si $\xi \in \hat{T}_c\Lambda$, ($c(t) = \varphi_t(p)$), alors

$$\int |\dot{\xi}_t - DX_{h_t} \circ \xi_t|^2 dt \geq C \cdot \|\xi\|_1^2, \quad C > 0$$

(C dépend du choix du point fixe). Donc si $c' \in \Lambda$ est proche de c , c'est-à-dire $c' = \exp_c \xi$, avec $\|\xi\|_1$ petit, on a, en tenant compte de ($\dot{c} - X_{h_t} \circ c = 0$):

$$\begin{aligned} \|\nabla S(\exp_c \xi)\|_0 &= \|(\overline{\exp_c \xi}) - X_{h_t} \circ (\exp_c \xi)\|_0 \sim \|\dot{\xi} - DX_{h_t} \circ \xi\|_0; \\ \|\nabla S(\exp_c \xi)\|_0 &\geq C\|\xi\|_1, \quad C > 0, \|\xi\|_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Cette inégalité traduit le fait que le point critique c est faiblement non dégénéré au sens de [22, p. 241]. Comme par hypothèse il en est ainsi pour tous les points critiques de S , on peut dire que S est "faiblement de Morse". La même propriété est vraie pour \mathcal{S} , c'est-à-dire que si $\chi_a: T_a L \rightarrow L$ est une carte locale près d'un point critique, on a:

$$\|\nabla \mathcal{S}(\chi_a(\xi))\|_0 \geq C\|\xi\|_1, \quad \|\xi\|_1 \rightarrow 0.$$

D'après l'inégalité (3.4), on a de même:

$$\|Z(\chi_a(\xi))\|_0 \geq C\|\xi\|_1, \quad \|\xi\|_1 \rightarrow 0.$$

Nous allons en déduire que \mathcal{S}_N est une "vraie" fonction de Morse (en fait une minoration par $C\|\xi\|_0$ suffira). En effet, soit a_N un point critique de \mathcal{S}_N . Notons $a = u_N(a_N)$ et:

$$\begin{aligned} \chi_{a_N}: U(\subset T_{a_N} L_N) &\rightarrow L_N, & T_{a_N} \chi_{a_N} &= \text{id}; \\ \chi_a: U'(\subset T_a L) &\rightarrow L, & T_a \chi_a &= \text{id} \end{aligned}$$

des cartes locales. Soit $\xi_N \in U$, alors, d'après (5.2), on a:

$$\|Z_N(\chi_{a_N}(\xi_N))\|_0 = \|Z(u_N \circ \chi_{a_N}(\xi_N))\|_0.$$

De plus, si $\xi_N \rightarrow 0$ (pour n'importe quelle norme), alors $u_N \circ \chi_{a_N}(\xi_N) \rightarrow a$, donc:

$$\begin{aligned} \|Z(u_N \circ \chi_{a_N}(\xi_N))\|_0 &\geq C\|\chi_a^{-1} \circ u_N \circ \chi_{a_N}(\xi_N)\|_0 \\ &\geq C'\|Tu_N(\xi_N)\|_0 \\ &\geq C'\|\xi_N\|_0. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (5.2), (3.7) et (5.1), on a:

$$\|\nabla \mathcal{S}_N(a'_N)\|_0 \geq \frac{C_4}{2} \|Z_N(a'_N)\|_0, \quad a'_N \in U_N;$$

d'où finalement:

$$\|\nabla \mathcal{S}_N(\chi_{a_N}(\xi_N))\|_0 \geq C''\|\xi_N\|_0, \quad \|\xi_N\|_0 \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire que a_N est un point critique non dégénéré pour \mathcal{S}_N , ce qu'on voulait démontrer.

Pour achever la démonstration, on reprend le v trouvé au §6, et on applique la théorie de Morse relative (cf. [5, p.341]); le fait que v n'est pas une variété n'est pas gênant, on peut d'ailleurs y remédier en remplaçant $B(\mathcal{S}_N, a, K)$ par une sous-variété de $\mathcal{S}_N^{-1}(a)$ (niveau régulier de \mathcal{S}_N) comprise entre $B(\mathcal{S}_N, a, K)$ et $B(\mathcal{S}_N, a, K + 1)$: le résultat est que \mathcal{S}_N a au moins $SB(v, v^-)$ points critiques dans v . Comme d'autre part, on a:

$$\tilde{H}^*(M) \simeq H^*(V_2, V_2^-) \hookrightarrow H^*(v, v^-)$$

(coefficients quelconques). on en déduit que $SB(v, v^-) \geq SB(M)$, ce qui achève la preuve du théorème complémentaire.

Appendice. Inégalités sur l'application exponentielle

La méthode de preuve est celle de [6, pp. 94–101] et [13] appendices: cette dernière référence est moins facile à lire que la première, mais est la seule à donner l'inégalité cruciale $-D_1 E \leq \lambda r / \text{th } \lambda r$, alors que [6] (6.4.6(i)) donne $1 + \frac{1}{2}\lambda^2 r^2$ (cf. la remarque (b) qui suit (3.2)). Nous indiquerons seulement le principe de la méthode et comment l'étendre aux dérivées secondes.

On note $\gamma = \gamma(s)$, $0 \leq s \leq 1$ la géodésique de p à q parcourue à vitesse constante $|\gamma'(s)| = r$. L'équation des champs de Jacobi le long de γ s'écrit:

$$J''(s) + \rho(s) \cdot J(s) = 0,$$

où $\rho(s) = R(\gamma'(s), \cdot) \cdot \gamma'(s) \in \text{End}(T_{\gamma(s)}\tilde{M})$.

Propriété. $\rho(s)$ est symétrique avec $-(\lambda r)^2 \leq \rho(s) \leq 0$.

Soit $J(s)$ une solution de cette équation telle que $J(0) = 0$: elle s'écrit: $J(s) = T(s)J'(0)$, où $T(s) \in \text{Hom}(T_p\tilde{M}, T_{\gamma(s)}\tilde{M})$, avec:

$$T''(s) + \rho(s) \circ T(s) = 0;$$

$$T(0) = 0, \quad T'(0) = \text{id}.$$

En appliquant Gronwall à cette équation linéaire du second ordre et à l'équation de Riccati qui s'en déduit, on montre:

- $\|T(s)\| \leq \text{sh}(\lambda r s) / \lambda r$ (cf. [6, 6.3.8(ii)] et [13, inégalité (A.4.2)]);
- Pour $s > 0$, $T(s)$ est inversible et $\|T(s)^{-1}\| \leq 1/s$ (cf. [6, 6.3.5(i)] et [13, inégalité (A.2.1)]);
- Pour $s > 0$, $T'(s)T(s)^{-1}$ est symétrique et $1/s \leq T'(s)T(s)^{-1} \leq \lambda r / \text{th}(\lambda r s)$ (cf. [13, Lemme p. 532 et inégalités (A.4.1) et (A.5.1)]).

D'autre part, on montre:

- $D_1 E(q, p) = -T'(1)T(1)^{-1}$ (cf. [6, 6.4.6(i)]);
 - $d_2 E(p, q) = (d \exp_p^{-1})_q = T(1)^{-1}$ (cf. [6, 6.3.2] et [13, corollaire (B.2.1)]).
- Les propriétés (E1) à (E3) en sont une conséquence immédiate, la seconde inégalité de (E1) résultant de $(x/\text{th } x) \leq 1 + x$.

Pour majorer les dérivées secondes de E , on écrit l'équation "aux variations"

$$W''(s) + \rho(s) \circ W(s) = -D(\rho(s)) \circ T(s),$$

$$W(0) = W'(0) = 0,$$

où

$$W(s) \in \text{Hom}(T_p \tilde{M} \oplus T_q \tilde{M}, \text{Hom}(T_p \tilde{M}, T_{\gamma(s)} \tilde{M})),$$

et

$$D(\rho(s)) \in \text{Hom}(T_p \tilde{M} \oplus T_q \tilde{M}, \text{End}(T_{\gamma(s)} \tilde{M}))$$

est la dérivée covariante de l'application $(p, q) \mapsto \rho(s)$, considérée comme section d'un fibré \mathcal{E}_s sur $\tilde{M} \times \tilde{M}$ de fibre $(\mathcal{E}_s)_{p,q} = \text{End}(T_{\gamma(s)} \tilde{M})$. On a alors:

$$D(d_2 E)(p, q) = -T(1)^{-1} W(1) T(1)^{-1};$$

$$D(D_1 E)(q, p) = -W'(1) T(1)^{-1} + T'(1) T(1)^{-1} W(1) T(1)^{-1}.$$

Se rappelant que $\rho(s) = R(\gamma'(s), \cdot) \gamma'(s)$, on majore:

$$\|D(\rho(s))\| \leq \max_M \|DR\| \cdot r^2 + 2\lambda^2 r \cdot \|D(\gamma'(s))\|;$$

$$\|D(\gamma'(s))\| \leq 1 + \lambda r \quad (\text{majoration analogue à celles de } \|D_1 E\| \text{ et } \|d_2 E\|);$$

$$\|D(\rho(s)) \circ T(s)\| \leq \text{cste} \cdot (1 + \lambda r)^2 \cdot \frac{\text{sh}(\lambda r s)}{\lambda r} \leq \text{cste} \cdot e^{\lambda r s} (1 + \lambda r).$$

Par Gronwall, on en déduit:

$$\|W'(s)\| \leq \text{cste} \cdot e^{\lambda r s} (1 + \lambda r);$$

$$\|W(s)\| \leq \text{cste} \cdot e^{\lambda r s};$$

d'où (E4) et (E5) résultent en combinant avec les inégalités sur $T(1)$ et $T'(1)$.

Bibliographie

- [1] V. I. Arnold, *Commentaires sur l'article de Poincaré "Sur un théorème de géométrie"*, Oeuvres choisies de Poincaré, Vol. 2, Moscou, 1972 (en russe), 987-989.
- [2] ———, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1976.
- [3] ———, *Fixed points of symplectic diffeomorphisms*, Mathematical developments arising from Hilbert problems, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 28, Amer. Math. Soc., 1976, 66.
- [4] R. Bott, *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. of Math. (2) **60** (1954) 248-261.
- [5] ———, *Lectures on Morse theory, old and new*, Bull. Amer. Math. Soc. **7** (1982) 331-358.
- [6] P. Buser & H. Karcher, *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque, Soc. Math. France **81** (1981).
- [7] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

- [8] M. Chaperon. *Quelques questions de géométrie symplectique*, Séminaire Bourbaki 1982-83, n° 610, Astérisque, Soc. Math. France **105, 106** (1983).
- [9] C. C. Conley & E. Zehnder. *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold*, Invent. Math. **73** (1983) 33–49.
- [10] Ya. M. Eliashberg, *Estimation du nombre de points fixes des applications préservant l'aire (en russe)*, Université de Syktyvkar, 1978.
- [11] A. Floer, *Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations for certain Kähler manifolds*, Ruhr-Universität Bochum, 1984.
- [12] B. Fortune & A. Weinstein, *A symplectic fixed point theorem for complex projective spaces*, Berkeley, 1984.
- [13] H. Karcher, *Riemannian center of mass and mollifier smoothing*, Comm. Pure Appl. Math. **30** (1977) 509–541.
- [14] W. Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*, Grundlehren Math. Wiss., Springer, Berlin **230** (1978).
- [15] S. Kobayashi & K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vols. I, II, Wiley, New York, 1963, 1969.
- [16] J. Moser, *On the volume elements of a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965) 286–294.
- [17] N. Nikishin, *Fixed points of diffeomorphisms on the two-sphere that preserve area*, Functional Anal. Appl. (1974) 77–79.
- [18] C. L. Siegel, *Topics in complex function theory*. III, Wiley, New York, 1973.
- [19] J.-C. Sikorav, *Points fixes d'un symplectomorphisme homologue à l'identité*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, **299** (1984) 343–346.
- [20] C. P. Simon, *A bound for the fixed point index of an area preserving map ...*, Invent. Math. **26** (1974) 187–200.
- [21] A. Weinstein, *Lectures on symplectic geometry*, Conf. Board Math. Sci., Reg. Conf. Series, Amer. Math. Soc. Vol. 29, 1977.
- [22] ———, *Bifurcations and Hamilton's principle*, Math. Z. **159** (1978) 235–248.
- [23] ———, *C^0 -perturbation theorems for symplectic fixed points and lagrangian intersections*, Univ. of California, Berkeley, 1983.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD, ORSAY

Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne

JEAN-CLAUDE SIKORAV

Introduction

Soit V une variété (compacte ou non) munie d'une forme symplectique ω . Toute fonction H sur V définit un champ hamiltonien X_H tel que $i(X_H)\omega = -dH$. Une isotopie $(\varphi_t, 0 \leq t \leq 1)$ de V est dite hamiltonienne si elle s'obtient en intégrant un champ hamiltonien X_t dépendant du temps. Nous nous intéressons aux deux problèmes suivants.

PROBLEME 1. Si L est une sous-variété lagrangienne fermée de V , minorer le nombre de points de $\varphi_1(L) \cap L$.

PROBLEME 2. Si V est fermée, minorer le nombre de points fixes de φ_1 .

Ces problèmes sont liés à un ensemble de conjectures énoncées par V. I. Arnold dans les années 60 (cf. [A1], [A2], [A3], [W2] Lecture 7, [Ch1 et [W4]).

Notons que la diagonale Δ_V est une sous-variété lagrangienne de $(V \times V, \omega \oplus (-\omega))$ et que les points fixes de φ_1 sont en bijection avec les points de $(id \times \varphi_1)(\Delta_V) \cap \Delta_V$. Comme $(id \times \varphi_t)$ est une isotopie hamiltonienne, le problème 2 est un cas particulier du problème 1.

On ne sait pas grand-chose sur le problème 1 sans hypothèse supplémentaire; contentons-nous de remarquer que l'intersection peut être rendue vide, par exemple si V est le plan, L une courbe et (φ_t) une translation. Nous allons nous limiter au problème local, c'est-à-dire le cas où $(\varphi_t(L))$ reste dans un voisinage assez petit de L . D'après [W1], ce voisinage est symplectiquement isomorphe à un voisinage de la section nulle $L \subset T^*L$, où le fibré cotangent est muni de la forme symplectique canonique ω_L . Changeons de notation et posons $M = L$, $(V, \omega) = (T^*M, \omega_M)$. Si (φ_t) est C^1 -petite, alors $\varphi_1(M)$ est la graphe de la différentielle d'une fonction sur M ; donc $\#(\varphi_1(M) \cap M)$ est minoré par $c(M)$, nombre minimal de points critiques d'une fonction sur M ; si l'intersection est transversale, le minorant est $c_g(M)$, nombre minimal de points critiques d'une fonction de Morse. La conjecture d'Arnold ([A1], [A2]) pour le problème 2 dit

que le minorant est $c(V)$, et $c_g(V)$ si les points fixes sont non dégénérés (cf. [A1], [A2]).

Notons $\bar{c}(M)$ (resp. $\bar{c}_g(M)$) le nombre minimal de points critiques d'une fonction (resp. de Morse) définie sur un fibré vectoriel de base M et coïncidant hors d'un compact avec une forme quadratique non dégénérée.

THEOREME 1. *Soient M une variété fermée et (φ_t) une isotopie hamiltonienne de (T^*M, ω_M) . Alors $\#(\varphi_1(M) \cap M)$ est minoré par $\bar{c}(M)$, et par $\bar{c}_g(M)$ si l'intersection est transversale.*

Ce résultat est prouvé dans [LS] par la méthode des "géodésiques brisées" de M. Chaperon ([Ch2], [Ch3]): nous allons en donner une nouvelle démonstration qui le fait apparaître comme corollaire d'un résultat sur les fonctions génératrices d'immersions lagrangiennes (proposition 1.2). Ce dernier résultat a été annoncé dans [S2] comme corollaire du théorème 1; la preuve directe que nous en donnons ici revient à ne considérer qu'une discontinuité à la fois.

COMMENTAIRE. On a $c(M) \geq CL(M) + 1$, où $CL(M)$ est la longueur de produit (cup-length) de l'anneau de cohomologie de M , et $\bar{c}_g(M) \geq SB(M)$, somme des nombres de Betti de M (cf. [ChZ], p. 90–94). Les minoration de $\#(\varphi(M) \cap M)$ par $CL(M) + 1$ ou $SB(M)$ avaient été prouvées antérieurement à [LS] par H. Hofer [H]. Notons que si M est une surface fermée, alors $c(M) = CL(M) + 1$ et $c_g(M) = SB(M)$.

Pour le problème 2, nous allons nous limiter à une classe spéciale de variétés symplectiques, que nous appellerons *symétriques à courbure négative ou nulle*, caractérisées par les propriétés suivantes:

(S1) Il existe sur V une métrique riemannienne de courbure négative ou nulle et une structure presque complexe J telles que

$$(*) \quad \omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle, \quad \text{si } X \in T_q V \text{ et } Y \in T_q V.$$

Si \tilde{V} est le revêtement universel et $q \in \tilde{V}$, l'application \exp_q est alors un difféomorphisme de $T_q(\tilde{V})$ sur \tilde{V} .

(S2) Pour tout $q \in \tilde{V}$, la symétrie par rapport à q , définie par

$$s_q: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}, \quad s_q(\exp_q(X)) = \exp_q(-X),$$

est un difféomorphisme *symplectique* pour la structure relevée.

EXEMPLES. a) Les surfaces de genre ≥ 1 : en effet, (S1) est vérifiée avec une courbure constante, et les s_q sont des isométries, donc conservent l'aire.

b) Plus généralement, les variétés kahlériennes compactes dont le revêtement universel est un espace symétrique hermitien de type non compact.

THEOREME 2. *Soit (V, ω) une variété symplectique symétrique à courbure négative ou nulle, et soit (φ_t) une isotopie hamiltonienne. Alors le nombre des points fixes de φ_1 est minoré par $c(V)$, et par $\bar{c}_g(V)$ si ces points sont non dégénérés.*

COROLLAIRE. *La conjecture d'Arnold est vraie pour les surfaces de genre ≥ 1 .*

Une preuve géométrique de ce corollaire a été proposée en 1978 par I. M. Eliashberg [E]. En 1983, le célèbre théorème de C. C. Conley et E. Zehnder [CoZ] prouve la conjecture d'Arnold pour le tore T^{2n} muni de sa structure standard, en résolvant le problème variationnel associé. Leur méthode a été étendue par A. Floer ([F]) et l'auteur ([S1]) à certaines variétés de courbure négative ou nulle, incluant les surfaces de genre ≥ 1 , et par A. Weinstein [W2] au cas où V est quelconque mais (φ_t) est C^0 -petite; le minorant est $CL(V) + 1$, et $SB(V)$ généralement. La même méthode est utilisée dans [H]. Enfin, signalons que M. Gromov [Gr2] obtient des résultats sur les problèmes 1 et 2 par une méthode totalement différente: par exemple, si dans le problème 1 on a $[\omega] \mid \pi_2(V, L) = 0$, alors $\varphi_1(L) \cap L$ n'est pas vide, pourvu que V satisfasse à certaines conditions très souvent vérifiées dans la pratique.

Nous déduisons le théorème 2 du théorème 1 en prouvant que le revêtement de $V \times V$ associé à la diagonale est symplectiquement isomorphe à T^*V (proposition 2.1); je remercie Michèle Audin pour avoir attiré mon attention sur la théorie des feuilletages lagrangiens, qui permet d'en donner une preuve très simple.

Je remercie aussi le rapporteur de [S2] pour avoir suggéré l'existence d'une preuve directe de la proposition 1.2, et François Laudenbach pour les simplifications qu'il y a apportées.

ADDENDUM. *Informations données par le rapporteur:*

1) K. Sekigawa et L. Vanhecke (prépublication) ont prouvé que *toute variété presque hermitienne où les symétries géodésiques locales préservent la forme de Kähler est nécessairement une variété kahlérienne localement symétrique*. Donc les variétés satisfaisant aux hypothèses du théorème 2 sont celles de l'exemple b).

2) L'idée de la proposition 2.1 semble remonter à Weinstein: en tous cas, sa version locale est un cas particulier de la description du voisinage d'une variété lagrangienne quelconque, (cf. [W1]), et J. P. Jacob ([Geom. Dedic. 10 (1981), 223–259]) lui attribue l'idée d'utiliser le milieu de deux points pour le prouver quand les symétries géodésiques sont symplectiques.

1.1. Préliminaires. Définitions et notations

Dans cette partie on considère le fibré cotangent T^*M d'une variété fermée; un point de T^*M est noté (q, p) , $q \in M$, $p \in T_q^*M$. Il est muni de la forme de Liouville $\lambda_M = p \cdot dq$ et de la forme symplectique $\omega_M = -d\lambda_M$. On choisit sur M une métrique riemannienne auxiliaire μ , ce qui définit des connexions sur TM et T^*M .

A) Pour $R > 0$, on note G_R le groupe des difféomorphismes $\{\varphi = \varphi_t, \text{ où } (\varphi_t) \text{ est une isotopie hamiltonienne de } T^*M \text{ définie par } (H_t) \text{ à support dans } \{\|p\| \leq R\}\}$.

ACTION. Soit $\varphi = \varphi_t$ un élément de G_R , on définit de façon classique une fonction A sur T^*M , à support dans $\{\|p\| \leq R\}$:

$$A(q, p) = \int_0^1 (p_t \cdot dq_t - H_t dt),$$

l'intégrale étant prise le long de la trajectoire $(q_t, p_t) = \varphi_t(q, p)$. Sa différentielle est donnée par

$$dA = \varphi^* \lambda - \lambda = p_1 \cdot dq_1 - p \cdot dq, \quad (q_1, p_1) = \varphi_1(q, p). \quad (1.1.1)$$

Donc A ne dépend que de φ_1 et la dépendance est continue pour les topologies C^1 .

B) Considérons ensuite un fibré vectoriel E sur M et une fonction S définie sur un ouvert de E .

1) Un point $e = (q, v)$ de E est *critique le long de la fibre* si la différentielle dS_e est dans l'image de $\pi_e^*: T_1^*M \hookrightarrow T_e^*E$, où π est la projection de E sur M . L'ensemble de ces points est noté Σ_S .

2) On dit que S est une phase (ou fonction) génératrice si dS est transverse à π^*T^*M : alors Σ_S est une sous-variété de dimension égale à celle de M , et l'on définit

$$i_S: \Sigma_S \rightarrow T^*M, \quad i_S(e) = \pi_e^{*-1}(dF_e).$$

D'après [W2] p. 26, i_S est une immersion lagrangienne, que l'on dit être *engendrée par* S ; cette définition s'étend au cas d'une immersion $i = i_S \circ \psi$, où ψ est un difféomorphisme.

3) Si de plus S est définie sur E tout entier et coïncide hors d'un compact avec une forme quadratique non dégénérée, on dit que S est une phase quadratique. Enfin, si de plus E est un fibré trivial $M \times \mathbb{R}^k$ et si la forme quadratique ne

dépend que de la seconde composante, on dit que S est une *phase quadratique spéciale*.

EXEMPLE. La section nulle $M \subset T^*M$ est engendrée par la phase quadratique spéciale $S = 0$ sur M .

AFFIRMATION. Si une immersion est engendrée par une phase quadratique, elle l'est aussi par une phase quadratique spéciale. La preuve de cette affirmation est laissée en exercice au lecteur: elle découle aisément de l'existence d'un fibre E tel que $E \oplus E$ soit trivial.

PROPRIETE. Les points critiques d'une phase génératrice S sont en bijection avec les points de Σ_S où λ_S rencontre la section nulle, les points de Morse correspondant aux intersections transverses. Donc, si S est une phase quadratique, on a:

$$\#i_S^{-1}(M) \geq \bar{c}(M), \quad \#i_S^{-1}(M) \geq \bar{c}_g(M) \text{ si } i_S \text{ est transverse à } M. \quad (1.1.2)$$

1.2. Enoncé du résultat clé

PROPOSITION. Soit (φ_t) une isotopie hamiltonienne de T^*M . Si l'immersion lagrangienne i dans T^*M est engendrée par une phase quadratique, alors $\varphi_1 \circ i$ l'est aussi.

Cette proposition entraîne le théorème 1 car $M \subset T^*M$ est engendrée par une phase quadratique: donc $\varphi_1(M)$ aussi, et il suffit d'appliquer (1.1.2).

La démonstration de la proposition repose sur le lemme 1.5, lui-même basé sur la construction suivante, inspirée par [Ch2].

1.3. Action avec un saut horizontal

Considérons le fibré $TM \oplus T^*M$; ses éléments seront notés (q, x, p) , où $q \in M$, $x \in T_qM$ et $p \in T_q^*M$. Il est muni d'une forme quadratique non dégénérée $S_0(q, x, p) = p \cdot x$.

Fixons $R > 0$, et soit $q \in G_R$, d'action A .

Supposons d'abord que M est le tore $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, d'où $TM = M \times \mathbb{R}^n$, $T^*M = M \times (\mathbb{R}^n)^*$. On définit alors $A_+(q, x, p) = A(q + x, p)$, d'où, d'après (1.1.1),

$$dA_+ = -p \cdot dq - p \cdot dx + p' \cdot dq', \quad (q', p') = \varphi(q + x, p).$$

Posons $F = S_0 + A_+$. Comme $dS_0 = p \cdot dx + x \cdot dp$, il vient

$$dF = -p \cdot dq + x \cdot dp + p' \cdot dq'.$$

Dans le cas général, on cherche une formule analogue avec

$$A_+(q, x, p) = A(q_+, p_+), \quad q_+ = \exp_q(x), p_+ \in T_{q_+}^*M,$$

$$(q', p') = \varphi(q_+, p_+).$$

La connexion permet de donner un sens à Dx , Dp , et l'on a $d(p \cdot x) = p \cdot Dx + x \cdot Dp$; elle permet aussi d'écrire, en posant $E(q, x) = \exp_q(x)$,

$$dq_+ = DE/\partial q \cdot dq + \partial E/\partial x \cdot Dx,$$

d'où

$$dA_+ = ['(DE/\partial q)(p_+)] \cdot dq - [(\partial E/\partial x)(p_+)] \cdot Dx + p' \cdot dq'.$$

Soit r le rayon d'injectivité; alors si $\|x\| < r$, $\partial E/\partial x$ est inversible. Si l'on pose:

$$p_+ = ('(\partial E/\partial x))^{-1}(p),$$

$$y = '(DE/\partial q)(p_+) \in T_{q_+}^*M,$$

on obtient la formule cherchée pour $F = S_0 + A_+$:

$$dF = -y \cdot dq + x \cdot Dp + p' \cdot dq', \quad \|x\| < r. \quad (1.3.1)$$

PROPRIÉTÉS. a) Si $\|p\|$ est assez grand, alors $q' = \exp_q(x)$.
b) Si $x = 0$, alors $y = p$.

Ensuite, on choisit $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ telle que $\rho(t) = 1$ si $t \leq 1$, $\rho(t) = 0$ si $t \geq 2$, et l'on pose

$$S(q, x, p) = p \cdot x + \rho(4\|x\|/r)A_+(q, x, p) \quad \text{si } \|x\| \leq r/2,$$

$$= p \cdot x \quad \text{si } \|x\| > r/2.$$

Il est clair que S est lisse et coïncide avec S_0 hors d'un compact. De plus, si $\|x\| \leq r/4$, alors S coïncide avec F .

1.4. LEMME Si φ est assez C^1 -proche de l'identité de G_R , les propriétés suivantes sont vérifiées.

a) Si $\|x\| \leq r/2$, alors les variables (q, p, q') sont indépendantes, c'est-à-dire

que l'égalité

$$\alpha \cdot dq + v \cdot Dp + \alpha' \cdot dq' = 0, \quad \alpha \in T_q^*M, \quad v \in T_qM, \quad \alpha' \in T_{q'}^*M,$$

entraîne $\alpha = 0$, $v = 0$ et $\alpha' = 0$.

b) Si $\|x\| \leq r/2$, alors $\|d(q, q') - \|x\|\| \leq r/32$.

c) Si $x \neq 0$, alors (q, x, p) n'est pas critique le long de la fibre pour S .

Démonstration. a) Si $\varphi = id$, on a $q' = \exp_q(x) = E(q, x)$, donc a) est vérifiée puisque $\partial E/\partial x$ est inversible. Comme on a aussi $q' = \exp_q(x)$ si $\|p\| > R$, par compacité la propriété a) est ouverte pour la topologie C^1 sur les applications q' : d'où le résultat puisque la dépendance de q' envers φ est continue pour les topologies C^1 .

b) C'est évident puisque $q' = \pi \circ \varphi(\exp_q(x), p_+)$: C^0 -proche suffit.

c) Si $\varphi = id$, on a $S = S_0$, donc c) est vérifiée. Supposant a) vérifiée, on peut se restreindre au compact $\{r/4 \leq \|x\| \leq r/2, \|p\| \leq R\}$: d'où le résultat puisque S dépend continûment de φ pour les topologies C^1 .

Pour la suite, notons U_R un C^1 -voisinage de l'identité dans G_R où les propriétés du lemme 1.4 sont vérifiées.

1.5. LEMME. Soit $\varphi \in U_R$: si l'immersion lagrangienne i dans T^*M est engendrée par une phase quadratique, alors $\varphi^{-1} \circ i$ l'est aussi.

Démonstration. On peut supposer $i = i_s$, où s est une phase quadratique spéciale, définie sur $E = M \times \mathbb{R}^k$ et vérifiant $s(q, v) = Q(v)$ hors d'un compact.

Nous allons montrer que $\varphi^{-1} \circ i_s$ est engendrée par une phase s' sur $TM \oplus T^*M \oplus E$ coïncidant avec $-S_0 \oplus Q$ hors d'un compact.

Posons d'abord

$$G(q, x, p, v) = -S(q, x, p) + s(q', v), \quad \|x\| < r/4. \quad (1.5.1)$$

Notons que le premier argument de s est le q' défini en 1.3. De la formule (1.3.1) on déduit

$$dG = y \cdot dq - x \cdot Dp + (\partial/\partial q')(s(q', v)) - p' \cdot dq' + \partial s/\partial v(q', v) \cdot dv.$$

Cherchons les points critiques le long des fibres: comme (q, p, q', v) sont des variables indépendantes, un tel point est caractérisé par

$$x = 0, \quad p' = (\partial/\partial q')(s(q', v)), \quad \partial s/\partial v(q', v) = 0. \quad (1.5.2)$$

Or, si $x = 0$, on a $(q', p') = \varphi(q, p)$; donc ceci équivaut à

$$x = 0, \quad (q', v) \in \Sigma_s, \quad (q, p) = \varphi^{-1} \circ i_s(q', v).$$

On en déduit aisément l'indépendance linéaire en un tel point des différentielles $Dx, D(p' - \partial s / \partial q'), d(\partial s / \partial v)$: donc les équations (1.5.2) sont de rang maximal et $(q, 0, p, v) \mapsto (q', v)$ définit un difféomorphisme ψ de Σ_G sur Σ_s . De plus, comme $y = p$, on vérifie $i_G = \varphi^{-1} \circ i_s \circ \psi$: donc $\varphi^{-1} \circ i_s$ est engendrée par G .

Ensuite, soient K et L assez grands pour que ($\|p\| \geq K \Rightarrow q' = \exp_q(x)$ et $S(q, x, p) = p \cdot x$), et ($\|v\| \geq L \Rightarrow s(q, v) = Q(v)$). Choisisant $\rho: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ telle que $\rho(t) = 1$ si $t \leq 1$, $\rho(t) = 0$ si $t \geq 2$, on pose

$$\begin{aligned} s'(q, x, p, v) &= -S(q, x, p) + Q(v) + [\rho(16d(q, q')/r)\rho(\|p\|/K) \\ &\quad \times (s(q', v) - Q(v))] \quad \text{si } \|x\| \leq r/4 \text{ et } \|v\| \leq L, \\ &= -S(q, x, p) + Q(v) \quad \text{si } \|x\| > r/4 \text{ et } \|v\| \leq L, \\ &= -p \cdot x + Q(v) + \rho(\|v\|/L) \\ &\quad \times (p \cdot x - S(q, x, p)) \quad \text{si } \|v\| > L. \end{aligned}$$

COMMENTAIRE. La formule naturelle pour rendre s' quadratique hors d'un compact utilise $\rho(\|x\|/C)$ plutôt que $\rho(d(q, q')/C)$; mais il se présente alors des difficultés pour vérifier qu'il n'y a pas de points parasites dans Σ_s .

Il est clair que s' coïncide avec $-S_0 \oplus Q$ hors d'un compact. De plus en utilisant ($|d(q, q') - \|x\|| \leq r/32$), on vérifie que s' est lisse et coïncide avec G sur $B = \{\|x\| \leq r/32, \|p\| \leq K \text{ et } \|v\| \leq L\}$. Enfin, Σ_G est contenu dans B donc, pour prouver le lemme, il suffit de voir que pour K et L assez grands Σ_s' est aussi contenu dans B .

1) Si $\|x\| \leq r/4$ et $\|v\| \leq L$, alors, en dérivant à (q, q', v) constant, on a

$$\|\partial s' / \partial p\| \geq \|x\| - \sup_t |\rho'(t)| \cdot \sup(q, v) |s(q, v) - Q(v)| / K.$$

Donc, si K est assez grand, cela ne peut s'annuler que si $\|x\| \leq r/32$. Si $\|p\| \leq K$, on est dans B ; sinon on a

$$s'(q, x, p, v) = -p \cdot x + Q(v) + \rho(\|p\|/K)(s(E(q, x), v) - Q(v')),$$

d'où, en dérivant à (q, p, v) constant,

$$\begin{aligned} \|\partial s' / \partial x\| &\geq \|p\| - \|\partial s / \partial q\| \cdot \|\partial E / \partial x\| \\ &\geq K - C(\mu) \sup(q, v) \|(\partial / \partial q)(s(q, v))\|, \end{aligned}$$

donc $\partial s' / \partial x \neq 0$ pour K assez grand.

2) Si $\|x\| > r/4$ et $\|v\| \leq L$, alors à (q, v) constant on a

$$\partial s'/\partial(x, p) = -\partial S/\partial(x, p) \neq 0.$$

3) Si $\|v\| > L$, alors à (q, x, p) constant on a

$$\|\partial s'/\partial v\| \geq \|\partial Q/\partial v\| - \sup_t |\rho'(t)| \cdot \sup_{TM \oplus T^*M} |S - S_0|,$$

donc $\partial s'/\partial v \neq 0$ pour L assez grand: ceci achève la preuve de $\Sigma_s \subset B$, donc du lemme 1.5.

1.6. Démonstration de la proposition 1.2.

Soit R assez grand pour que $\bigcup_i \varphi_i(i(L))$ soit contenu dans $\{\|p\| < R\}$: alors on peut supposer que (φ_i) est un chemin dans G_R . Fixons un entier $N \geq 1$ et posons

$$\psi_k = \varphi_{k/N} \circ \varphi_{(k-1)/N}^{-1}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Si N est assez grand, tous les ψ_k^{-1} seront dans U_R , donc le lemme 1.4 implique que $\psi_k \circ \dots \circ \psi_1 \circ i$ est engendrée par une phase quadratique pour $k = 1, \dots, N$: d'où le résultat puisque $\psi_N \circ \dots \circ \psi_1 = \varphi_1$.

1.7. Remarque. En introduisant un paramètre $t \in [0, 1]$ dans les constructions précédentes, et en passant à un fibré trivial comme dans l'affirmation de 1.1, on peut préciser la proposition 1.2 de la façon suivante.

PROPOSITION. Soit (φ_t) une isotopie hamiltonienne de T^*M , et soit i une immersion engendrée par la phase quadratique spéciale s définie sur $M \times \mathbb{R}^k$. Alors pour N assez grand, il existe un chemin $(S_t, 0 \leq t \leq 1)$ de fonctions définies sur $M \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{2N}$, avec les propriétés suivantes:

- $S_0(q, v, w) = s(q, v) + Q(w)$, où Q est une forme quadratique sur \mathbb{R}^{2N} de signature (N, N) ;
- $S_t = S_0$ hors d'un compact;
- S_t est une phase génératrice pour $\varphi_t \circ i$.

2. Dans cette partie, (V, ω) est une variété symplectique symétrique à courbure négative ou nulle. On note $\overline{V \times V}$ le revêtement de $V \times V$ associé à la diagonale: il est aussi défini comme le quotient de $\tilde{V} \times \tilde{V}$ pour l'action diagonale de $\pi_1 V$. On munit $\overline{V \times V}$ de la métrique somme et de la forme symplectique $\omega \oplus (-\omega)$, d'où sur $\overline{V \times V}$ une métrique et une forme symplectique notée Ω . On note $s: V \rightarrow \overline{V \times V}$ le plongement relevé du plongement diagonal: il est clairement lagrangien.

2.1. PROPOSITION. *Le plongement s se prolonge en un difféomorphisme symplectique χ de (T^*V, ω_V) sur $(\bar{V} \times \bar{V}, \Omega)$.*

Preuve du théorème 2 modulo la proposition 2.1.

L'isotopie $(id \times \varphi_t)$ de $V \times V$ se relève de façon unique en une isotopie (ψ_t) de $\bar{V} \times \bar{V}$, d'où l'on déduit une isotopie hamiltonienne de T^*V , $(\Phi_t) = (\chi^{-1} \circ \psi_t \circ \chi)$. Il y a alors une bijection entre $\Phi_1(V) \cap V$ et $\Psi_1(s(V)) \cap s(V)$, puis entre cet ensemble et l'ensemble des points fixes q de φ_1 tels que le lacet $(\varphi_t(q), 0 \leq t \leq 1)$ soit homotope à zéro; de plus, les intersections transverses correspondent aux points fixes non dégénérés. On en déduit $\#Fix(\varphi_1) \geq (\Phi_1(V) \cap V)$, et il suffit alors d'appliquer le Théorème 1.

Démonstration de la proposition 2.1. Comme deux points de $\bar{V} \times \bar{V}$ sont joints par une géodésique unique, on peut définir leur milieu, ce qui donne une application $\bar{\rho}$ de $\bar{V} \times \bar{V}$ sur \bar{V} . Cette application passe au quotient et définit une submersion ρ de $\bar{V} \times \bar{V}$ sur V . Soit $q \in V$, et $\bar{q} \in \bar{V}$ un relevé; alors la fibre $F_{\bar{q}} = \bar{\rho}^{-1}(\bar{q})$ est l'image de \bar{V} par le plongement $id \times s_{\bar{q}}$, et le passage au quotient induit un difféomorphisme de $F_{\bar{q}}$ sur $F_q = \rho^{-1}(q)$. De plus, la propriété (S2) dit que $F_{\bar{q}}$ est lagrangienne, donc aussi F_q . On peut donc appliquer au feuilletage correspondant la théorie de J. Duistermaat [Du] (voir aussi [GuS], p. 352–355) généralisant les variables action-angle; nous suivrons la version donnée par T. Delzant [De] dans sa thèse (p. 22–26).

Soit v dans T_q^*V et soit e dans F_q ; alors $\rho_e^*(v) \in T_e^*(\bar{V} \times \bar{V})$ est orthogonal à $T_e F_q$, donc, comme F_q est lagrangienne, le vecteur $X \in T_e(V \times V)$ défini par $i_X \Omega = \rho_e^*(v)$ est tangent à F_q . On définit ainsi un champ de vecteurs \hat{v} sur F_q , partout non nul puisque ρ est une submersion. Si v est la valeur en q d'une 1-forme α sur M , alors \hat{v} est la restriction d'un champ X_α tangent aux fibres; si $\alpha = df$, il s'agit du champ hamiltonien de $-f \circ \rho$.

PROPRIÉTÉS. a) Si v_1 et v_2 sont dans T_q^* , alors \hat{v}_1 et \hat{v}_2 commutent.

Démonstration. On peut trouver des fonctions f_1, f_2 telles que $v_i = (df_i)_q$; donc \hat{v}_i est la restriction d'un champ hamiltonien tangent aux fibres X_i . Alors $[X_1, X_2]$ est le champ hamiltonien associé à la fonction $\Omega(X_2, X_1)$, donc est nul puisque ces fibres sont lagrangiennes, et a fortiori $[\hat{v}_1, \hat{v}_2] = 0$.

b) Pour tout e dans F_q , on a $\|\hat{v}(e)\| \leq (1/\sqrt{2}) \|v\|$.

Démonstration. La propriété (*), jointe à l'antisymétrie de ω et au fait que $J^2 = -id$, entraîne que J est une isométrie, donc

$$\|\hat{v}(e)\| = \|\rho_e^*(v)\| \leq \|\rho_{e*}\| \cdot \|v\| = \|\rho_{e*}\| \cdot \|v\|,$$

et la convexité de la fonction distance sur $\bar{V} \times \bar{V}$ (cf. [Gr1] p. 118) entraîne que, pour (X, Y) dans $T_{\bar{e}}(\bar{V} \times \bar{V})$, on a

$$\|\rho_{\bar{e}*}(X, Y)\| \leq (1/2)(\|X\| + \|Y\|) \leq (1/\sqrt{2})(\|X\|^2 + \|Y\|^2)^{1/2}.$$

Donc le champ \hat{v} est *intégrable*, et d'après a) on définit une action localement libre de T_q^*V sur F_q en posant

$$v \cdot e = (\exp \hat{v})(e), \quad v \in T_q^*V, \quad e \in F_q.$$

Comme de plus F_q est difféomorphe à T_qV , elle est clairement transitive et libre: pour tout e dans F_q , l'application $v \mapsto v \cdot e$ est une bijection de T_q^*V sur F_q .

Soit α une 1-forme sur M . D'après b), le champ X_α est intégrable, donc définit un flot $(\varphi_{t,\alpha})$ tangent aux fibres; on note $\varphi_\alpha = \varphi_{1,\alpha}$.

PROPRIÉTÉ. On a $\varphi_\alpha^* \Omega = \Omega + \rho^* d\alpha$.

Démonstration. Par une méthode classique, on calcule

$$(d/dt)(\varphi_{t,\alpha}^* \Omega) = \varphi_{t,\alpha}^*(L_{X_\alpha} \Omega) = \varphi_{t,\alpha}^* d(\varphi^* \alpha),$$

et ceci vaut $\rho^* d\alpha$ puisque $\rho \circ \varphi_{t,\alpha} = \rho$.

On définit alors l'application χ de T^*V dans $\overline{(V \times V)}$:

$$\chi(v) = v \cdot s(q), \quad v \in T_q^*V.$$

Elle préserve les fibres et est un difféomorphisme sur chaque fibre, donc est un difféomorphisme global. Il ne reste plus qu'à prouver $\chi^* \Omega = \omega_V$:

D'abord, si α est une 1-forme sur M , c'est-à-dire une section de T^*M , la définition de χ entraîne $\chi \circ \alpha = \varphi_\alpha \circ s$, d'où

$$\alpha^* \chi^* \Omega = s^* \varphi_\alpha^* \Omega = s^*(\Omega + \rho^* d\alpha).$$

Comme s est lagrangienne, on a $s^* \Omega = 0$; de plus $\rho \circ s = id$, d'où

$$\alpha^* \chi^* \Omega = d\alpha = \alpha^* \omega_V.$$

La dernière égalité résulte de $\omega_V = d\lambda_V$ et $\alpha^* \lambda_V = \alpha$, où λ_V est la 1-forme de Liouville.

Ainsi la 2-forme $\chi^* \Omega - \omega_V$ a une restriction nulle sur chaque sous-espace horizontal de $T_\alpha(T^*V)$; comme $\dim V \geq 2$, ceci implique qu'elle est nulle, ce qui achève la preuve de la proposition 2.1 et donc du théorème 2.

REFERENCES

- [A1] V. I. ARNOLD, Commentaire sur le "théorème de géométrie" de Poincaré, Oeuvres choisies d'Henri Poincaré, vol. II (en russe), p. 987-989, Nauka, Moscou (1972).
 [A2] V. I. ARNOLD, Fixed points of symplectic diffeomorphisms, Mathematical developments

- arising from Hilbert's problems. Proc. Symp. Pure Math. XXVIII, p. 66, Amer. Math. Soc., Providence (1976).
- [Ch1] M. Chaperon, Quelques questions de géométrie symplectique, Séminaire Bourbaki 1982/3, n° 610, Astérisque 105-106, 231-249 (1983).
- [Ch2] M. CHAPERON, *Une idée de "géodésiques brisées" pour les systèmes hamiltoniens*, C.R. Acad. Sci. Paris t. 298, Serie I (1984), 293-296.
- [Ch3] M. CHAPERON, An elementary proof of the Conley-Zehnder theorem in symplectic geometry, Dynamical systems and bifurcations (Groningen 1984), p. 1-8, Springer Lect. Notes Math. 1125 (1985).
- [ChZ] M. CHAPERON et E. ZEHNDER, Quelques résultats globaux en géométrie symplectique, Séminaire sud-rhodanien de géométrie III, Travaux en cours, p. 51-121, Hermann, Paris (1984).
- [CoZ] C. C. CONLEY and E. ZEHNDER, *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold*, Invent. Math. 73 (1983), 33-49.
- [De] T. DELZANT, Variables action-angle non commutatives. . . , Thèse de Doctorat, Université Paris VI (1986).
- [Du] J. DUISTERMAAT, *On global action angle coordinates*, Comm. Pure and Appl. Math. 33 (1980), 687-706.
- [E] I. M. ELIACHBERG, Estimation du nombre de points fixes des applications préservant l'aire (en russe), Université de Syktyvkar (1978).
- [F] A. FLOER, *Proof of the Arnold conjecture for surfaces and generalizations to certain Kähler manifolds*, Duke Math. J. 51 (1986), 1-32.
- [Gr1] M. GROMOV, Structures métriques pour les variétés riemanniennes (rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu), CEDIC-Nathan, Paris (1981).
- [Gr2] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 307-347.
- [GuS] V. GUILLEMIN and S. STERNBERG, Symplectic techniques in physics, Cambridge Univ. Press (1984).
- [H] H. HOFER, *Lagrangian embeddings and critical point theory*, Ann. de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire, vol. 2, n° 6 (1985), 407-462.
- [LS] F. LAUDENBACH et J.-C. SIKORAV, *Persistence d'intersection avec la section nulle. . .*, Invent. Math. 82 (1985), 349-357.
- [S1] J.-C. SIKORAV, *Points fixes d'une application symplectique homologue à l'identité*, J. Diff. Geom. 22 (1985), 49-79.
- [S2] J.-C. SIKORAV, *Sur les immersions lagrangiennes dans un fibré cotangent. . .*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.302, série I, n° 3 (1986), 119-122.
- [W1] A. WEINSTEIN, *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*, Adv. in Math. 6 (1971), 329-349.
- [W2] A. Weinstein, Lectures on symplectic manifolds, C.B.M.S. Reg. Conf. Ser. Math. 29, Amer. Math. Soc., Providence (1977).
- [W3] A. WEINSTEIN, *C^0 -perturbation theorems for symplectic fixed points and lagrangian intersections*, Séminaire sud-rhodanien de géométrie III, Travaux en cours, p. 140-144, Hermann, Paris (1984).
- [W4] A. WEINSTEIN, Symplectic geometry and the calculus of variations, Marston Morse Memorial Lecture, IAS Princeton (1985) (à paraître).

IA 1169 du C.N.R.S.

"Topologie différentielle"

Université Paris-Sud

Mathématique, Bâtiment 425

F-91405 ORSAY cedex

FRANCE

Reçu le 6 février 1986

UN PROBLÈME DE DISJONCTION PAR ISOTOPIE SYMPLECTIQUE DANS UN FIBRÉ COTANGENT

PAR JEAN-CLAUDE SIKORAV

Introduction

Soit M une variété différentiable fermée; le fibré cotangent T^*M est muni de la 1-forme de Liouville $\lambda_M = p \cdot dq$, dont la différentielle ω_M définit sa structure symplectique canonique. On regarde M comme plongée dans T^*M par la section nulle.

Soit (φ_t) une isotopie symplectique de T^*M ; alors, pour tout t , la forme $\alpha_t = (\varphi_t | M)^*(\lambda_M)$ est fermée, et (φ_t) est hamiltonienne si et seulement si α_t est exacte pour tout t . D'autre part, si t est assez petit, $\varphi_t(M)$ est un graphe au-dessus de M , donc les zéros de α_t sont les points d'intersection de M et de $\varphi_t(M)$; les zéros du type de Morse (c'est-à-dire tels que l'on ait localement $\alpha_t = df$ où f a une singularité de Morse) sont les points où l'intersection est transverse.

Dans un article précédent de François Laudenbach [LS], le problème de minorer le nombre de points de $\varphi_1(M) \cap M$ est traité dans le cas où (φ_t) est hamiltonienne. Claude Viterbo m'a fait remarquer que la méthode pouvait s'étendre au cas où (φ_t) est symplectique et permettre ainsi d'aborder les conjectures suivantes.

CONJECTURE 1. — *Le nombre de points de $\varphi_1(M) \cap M$ est au moins égal à celui des zéros d'une forme fermée cohomologue à α_1 . En abrégé, $\#(\varphi_1(M) \cap M) \geq c(M; [\alpha_1])$.*

CONJECTURE 1' (générique). — *Si $\varphi_1(M)$ rencontre M transversalement, alors le nombre de points d'intersection est au moins égal au nombre des zéros d'une forme fermée de Morse cohomologue à α_1 (une forme fermée est dite de Morse si tous ses zéros sont de Morse) :*

$$\varphi_1(M) \bar{\cap} M \Rightarrow \#(\varphi_1(M) \cap M) \geq c_g(M; [\alpha_1]).$$

CONJECTURE 2. — *Si l'on peut disjoindre M d'elle-même par une isotopie symplectique (φ_t) de T^*M , alors il existe une 1-forme fermée non singulière cohomologue à $\alpha_1 = (\varphi_1 | M)^*(\lambda_M)$. En particulier, M doit fibrer sur le cercle (d'après D. Tischler [T]).*

Bien entendu, la conjecture 2 est une conséquence immédiate de la conjecture 1 ou de la conjecture 1'. La conjecture 1 est assez peu accessible car on ne sait pas grand chose sur $c(M; [\alpha_1])$ si $[\alpha_1]$ n'est pas nulle (si elle l'est, on verra qu'on est ramené au problème de [LS]), donc nous nous concentrerons sur les conjectures 1' et 2.

Notons que si $\dim M \leq 2$, les conjectures 1, 1' et 2 sont vraies, le seul cas difficile étant $[\alpha_1]=0$, $\dim M=2$, qui résulte de [LS]. Pour les dimensions supérieures, le cas où $\dim M \geq 6$ est *a priori* plus abordable grâce au théorème du s -cobordisme, ainsi que le cas où $\dim M=3$ et M est irréductible (pour contourner la conjecture de Poincaré).

Le résultat principal de ce travail est le théorème 1, qui associe aux points de $\varphi_1(M) \cap M$ les zéros d'une 1-forme fermée Ω sur une certaine variété produit $M \times V$, les intersections transverses étant associées aux zéros de Morse. Ce théorème est une conséquence facile du résultat de [LS] convenablement généralisé.

Dans la partie II, nous énonçons, pour une forme de Morse dans une classe de cohomologie rationnelle, des minoration du nombre de zéros analogues aux inégalités de Morse : ces minoration sont dues à S. P. Novikov [N]. Nous donnons aussi un cas où ces inégalités sont optimales, dû à M. C. Farber [F]. Dans la partie III, nous les utilisons pour déduire du théorème 1 une minoration de $\#(\varphi_1(M) \cap M)$ dans le cas où $\varphi_1(M)$ est transverse à M : voir le corollaire 1. Enfin, le résultat de Farber permet de prouver les conjectures 1' et 2 dans le cas où $\dim M \geq 6$ et $\pi_1(M) \approx \mathbb{Z}$: voir les corollaires 2 et 3.

Dans un travail ultérieur, j'essaierai d'étendre la conjecture 2 à des cas plus généraux : il me semble qu'on doit pouvoir la montrer pour $\dim M \geq 6$, tout au moins si $\text{Wh}_1(\pi_1 M)=0$ et si $[\alpha_1]$ est rationnelle. Un autre cas qui me paraît abordable est celui où M est de dimension 3 et irréductible, cette fois pour $[\alpha_1]$ quelconque, en utilisant des résultats de Thurston.

Outre Claude Viterbo, je remercie François Laudenbach pour les discussions que nous avons eues sur ces questions.

I. Énoncé et démonstration du résultat principal

LEMME PRÉLIMINAIRE. — Pour tout entier $k \geq 1$, il existe une variété V_{4k} munie d'une application $p_{4k} : V_{4k} \rightarrow S^1$ avec les propriétés suivantes :

- (1) V_{4k} est fermée et de dimension $4k$;
- (2) p_{4k} a un unique point critique, et celui-ci est de Morse et d'indice $2k$;
- (3) p_{4k} induit un isomorphisme de $\pi_1(V_{4k})$ sur $\pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$.

Démonstration. — Partons de l'exemple favori de Bott d'une fonction de Morse parfaite, c'est-à-dire la fonction f sur $\mathbb{P}^{2k} \mathbb{C}$ définie par

$$f([z_0, z_1, \dots, z_{2k}]) = \sum_0^{2k} j |z_j|^2,$$

où un point de $\mathbb{P}^{2k} \mathbb{C} \approx S(\mathbb{C}^{2k+1})/S^1$ est représenté par $(z_0, z_1, \dots, z_{2k}) \in \mathbb{C}^{2k+1}$ tel que $\sum_0^{2k} |z_j|^2 = 1$. Cette fonction est de Morse, avec un point critique pour chaque indice pair $0, 2, \dots, 2k, \dots, 4k$, le point d'indice $2j$ ayant pour valeur critique j . Notant s l'involution de $\mathbb{P}^{2k} \mathbb{C}$ définie par $s([z_0, z_1, \dots, z_{2k}]) = [z_{2k}, z_{2k-1}, \dots, z_0]$, on vérifie que l'on a $f \circ s = 2k - f$. On en déduit que, pour le cobordisme élémentaire d'indice $2k$: $W = f^{-1}([k - (1/2), k + (1/2)])$, le bord inférieur $F = f^{-1}(k - (1/2))$ est diffeomorphe au bord supérieur $f^{-1}(k + (1/2))$. La variété V_{4k} s'obtient à partir de $W \perp (F \times [1/2, 1])$ en recollant $F \times \{1/2\}$ à $f^{-1}(k + (1/2))$ et $F \times \{1\}$ à $f^{-1}(k - (1/2))$.

L'application p_{4k} est définie par :

$$p_{4k}|_W = \frac{1}{2} \left(f - \left(k - \frac{1}{2} \right) \right) \bmod 1$$

$$p_{4k}|_{F \times \left[\frac{1}{2}, 1 \right]} = pr_2 \bmod 1,$$

le recollement se faisant de façon à ce que p_{4k} soit C^∞ (fig. 1).

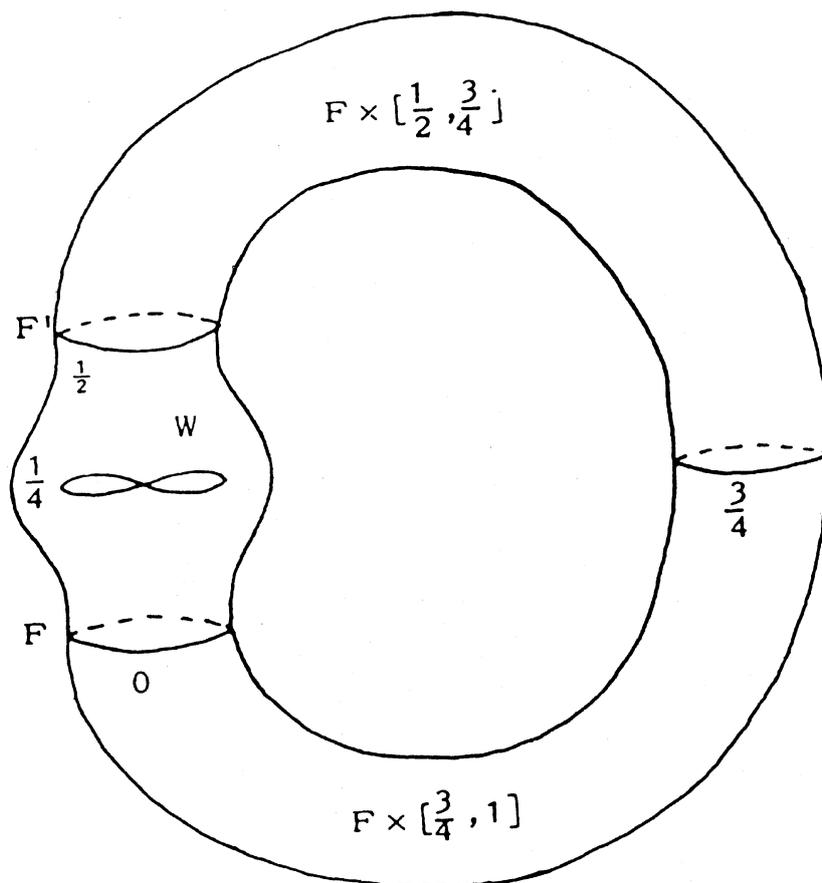


Fig. 1. — On a représenté quelques niveaux de p_{4k} .

La vérification des propriétés (1) et (2) est immédiate. La propriété (3) est laissée en exercice au lecteur.

Remarque. — Si l'on remplace $4k$ par $4k-2$ et $2k$ par $2k-1$, on peut encore construire (V_{4k-2}, p_{4k-2}) vérifiant les analogues de (1) et de (2) : par exemple à partir de $\mathbb{P}^{4k-2} \mathbb{R} \approx S^{4k-3}/S^0$ (pour $k=1$, on obtient la bouteille de Klein). Mais il ne semble pas qu'on puisse en outre obtenir (3). Il est vrai que cette dernière condition ne sera pas utilisée dans ce papier, mais elle pourrait jouer un rôle dans la généralisation éventuelle du corollaire 3 évoquée à la fin de l'introduction.

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal.

THÉORÈME 1. — *Sous les hypothèses de l'introduction, il existe un entier $k \geq 1$ et, pour tout nombre A assez grand, une 1-forme fermée Ω_A sur $M \times V_{4k}$, avec les propriétés suivantes :*

- Ω_A est cohomologue à $\alpha_1 \oplus A p_{4k}^* d\theta$;
- les zéros de Ω_A sont en bijection avec les points de $\varphi_1(M) \cap M$, les zéros de Morse correspondant aux points d'intersection transversale.

Démonstration. — Tout d'abord, nous allons « remplacer » l'isotopie symplectique par une isotopie hamiltonienne : précisément, soit (φ'_t) l'isotopie de T^*M définie par $\varphi'_t(q, p) = (q, p - \alpha_t(q))$; on a $\varphi'_t{}^* \lambda_M = \lambda_M - \pi^* \alpha_t$, où $\pi: T^*M \rightarrow M$ est la projection canonique, donc (φ'_t) est symplectique, ainsi que $(\psi_t) = (\varphi_t \circ \varphi'_t)$. En fait (ψ_t) est hamiltonienne; en effet, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_t^* \lambda_M &= \lambda_M + \pi^* \alpha_t + dH_t, \\ \psi_t^* \lambda_M &= \varphi'_t{}^* (\lambda_M + \pi^* \alpha_t + dH_t) \\ &= \lambda_M - \pi^* \alpha_t + \varphi'_t{}^* \circ \pi^* (\alpha_t) + d(H_t \circ \varphi'_t). \end{aligned}$$

Comme φ'_t est homotope à l'identité, $\psi_t^* \lambda_M - \lambda_M$ est exacte, donc (ψ_t) est hamiltonienne. D'autre part, on a :

$$\varphi_1(M) \cap M = \psi_1(\varphi_1^{-1}(M)) \cap M = \psi_1(\alpha_1(M)) \cap M.$$

Dans [LS], on étudie l'intersection de $\psi_1(M)$ et de M au moyen des trajectoires brisées issues de M pour le champ hamiltonien $X_t = \frac{d\psi_t}{dt} \circ \psi_t^{-1}$. En faisant une étude tout à fait analogue avec les trajectoires issues de $\alpha_1(M)$, on arrive à la généralisation suivante du résultat de [LS].

PROPOSITION. — *Pour N assez grand, il existe un $2N$ -fibré $E \xrightarrow{\pi} M$ muni d'une forme quadratique S_0 sur les fibres de signature (N, N) , et une fonction $S: E \rightarrow \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :*

- les zéros de $\pi^* \alpha_1 + dS$ sont en bijection avec les points de $\psi_1(\alpha_1(M)) \cap M$, les zéros de Morse correspondant aux intersections transversales;
- S coïncide avec S_0 hors d'un compact.

Remarque. — Si $[\alpha_1]=0$, cela implique les minoration de [LS] pour $\#(\varphi_1(M) \cap M)$; en particulier, $\varphi_1(M) \cap M$ ne peut être vide.

Moyennant une construction de « suspension » par une forme quadratique S_0 de signature $(2k-N, 2k-N)$ sur un $(4k-2N)$ -fibré E' tel que $E \oplus E'$ soit trivial, on peut supposer qu'on a :

$$\begin{aligned} E &= M \times \mathbb{R}^{4k}, & e \in E \text{ est noté } (q, v); \\ S_0(q, v) &= Q(v), & \text{ où } Q \text{ est une forme quadratique de signature } (2k, 2k); \\ S &= S_0 \text{ hors de } M \times D_K, & \text{ où } D_K = \{v : |v| \leq K\}. \end{aligned}$$

La propriété 2) de (V_{4k}, p_{4k}) et le lemme de Morse permettent alors de trouver, pour tout A assez grand, une carte $\chi_A : U_A \xrightarrow{\sim} D_{2K}$ au voisinage du point critique de p_{4k} , telle que l'on ait $A\tilde{p} = Q \circ \chi_A + \text{Cte}$, où \tilde{p} est un relevé à \mathbb{R} de $p_{4k} | U_A$.

On définit alors $F_A : M \times V_{4k} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_A | M \times U_A &= (S - S_0) \circ (\text{id} \times \chi_A) \\ F_A | M \times (V_{4k} \setminus U_A) &= 0. \end{aligned}$$

C'est une fonction C^∞ car sur $M \times (U_A \setminus \chi_A^{-1}(D_K))$, on a

$$S \circ (\text{id} \times \chi_A) = S_0 \circ (\text{id} \times \chi_A).$$

De plus, on a sur $M \times U_A$

$$S_0 \circ (\text{id} \times \chi_A) = Q \circ \chi_A \circ \text{pr}_2 = A(\tilde{p} \circ \text{pr}_2) + \text{Cte}.$$

Donc, si l'on pose $\Omega_A = (\alpha_1 \oplus A p_{4k}^* d\theta) + dF_A$, il vient :

$$\begin{aligned} \Omega_A | M \times U_A &= (\text{id} \times \chi_A)^*(\pi^* \alpha_1 + dS), \\ \Omega_A | M \times (V_{4k} \setminus U_A) &= \alpha_1 \oplus A p_{4k}^* d\theta, \end{aligned}$$

ce qui entraîne les propriétés annoncées. \square

II. Inégalités de Novikov (voir [N] et [F])

Soit $\xi \in H^1(M; \mathbb{R})$ une classe rationnelle, c'est-à-dire $\xi = \lambda \xi_1$ où $\xi_1 \in H^1(M; \mathbb{Z})$; si $\xi = 0$ on peut prendre $\lambda = 1$; sinon on suppose $\lambda > 0$ et ξ_1 primitive, ce qui définit λ et ξ_1 de façon unique. Si α est une forme représentant ξ , on a $\alpha = \lambda f^* d\theta$ où f est une application de M dans $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $d\theta$ la forme de Lebesgue.

On note $\hat{M} \xrightarrow{\pi} M$ le revêtement infini cyclique associé à $\xi_1 = [f] : \pi_1 M \rightarrow \pi_1 S^1 = \mathbb{Z}$, et $\hat{f} : \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$ un relèvement de f . Ensuite, on note Λ l'anneau du groupe \mathbb{Z} :

$$\Lambda = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}] = \left\{ \sum_{j_0}^{j_1} a_j t^j, a_j \in \mathbb{Z} \right\},$$

et $\hat{\Lambda}$ l'anneau complété de Λ pour la topologie t^{-1} -adique :

$$\hat{\Lambda} = \mathbb{Z}[t][[t^{-1}]] = \left\{ \sum_{-\infty}^{j_1} a_j t^j, a_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(Novikov et Farber posent $\hat{\Lambda} = \mathbb{Z}[[t]][t^{-1}]$, mais pour avoir les bons indices dans les inégalités (*) ils doivent prendre pour générateur préféré τ du groupe du revêtement celui qui vérifie $\hat{f} \circ \tau - \hat{f} = -1$, c'est-à-dire faire agir $g \in \pi_1 M$ sur Λ et $\hat{\Lambda}$ comme la multiplication par $t^{-\xi_1(g)}$.

Le morphisme $\xi_1 : \pi_1 M \rightarrow \mathbb{Z}$ définit des actions de $\pi_1 M$ sur Λ et $\hat{\Lambda}$: $g \in \pi_1 M$ agit comme la multiplication par $t^{\xi_1(g)}$. On définit ainsi des systèmes de coefficients locaux Λ_ξ et $\hat{\Lambda}_\xi$ (cf. [S], p. 282), donc des modules d'homologie $H_*(M; \Lambda_\xi)$ et $H_*(M; \hat{\Lambda}_\xi)$ dont voici les principales propriétés :

– comme M est compacte et que Λ et $\hat{\Lambda}$ sont noëthériens, ce sont des modules de type fini;

– $H_*(M; \Lambda_\xi) \approx H_*(\hat{M}; \mathbb{Z})$, qui est un Λ -module grâce à l'action de \mathbb{Z} comme groupe du revêtement (cf. [M], p. 116 sqq.);

– $H_*(M; \hat{\Lambda}_\xi) \approx H_*(\hat{M}, \hat{\infty}_-; \mathbb{Z})$ où $\hat{\infty}_-$ est le bout négatif (correspondant à $\hat{f} \rightarrow -\infty$) de \hat{M} (cf. [M], p. 124-126) : ceci est capital car on voit aisément que la nullité du module de droite est une condition nécessaire pour que ξ puisse être représentée par une forme non singulière;

– $\hat{\Lambda}_\xi = \Lambda_\xi \otimes_{\Lambda} \hat{\Lambda}$ et $\hat{\Lambda}$ est plat sur Λ , donc

$$H_*(M; \hat{\Lambda}_\xi) \approx H_*(M; \Lambda_\xi) \otimes_{\Lambda} \hat{\Lambda} \approx H_*(\hat{M}; \mathbb{Z}) \otimes_{\Lambda} \hat{\Lambda}.$$

C'est en fonction de $H_*(M; \xi) \stackrel{\text{def}}{=} H_*(M; \hat{\Lambda}_\xi)$ que Novikov exprime ses inégalités. Précisément, $\hat{\Lambda}$ est un anneau principal, donc tout $\hat{\Lambda}$ -module de type fini se décompose ainsi :

$$E \approx \hat{\Lambda}^r \oplus \hat{\Lambda}/\alpha_1 \oplus \dots \oplus \hat{\Lambda}/\alpha_q, \quad 0 \neq \alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \dots \subset \alpha_q \neq \hat{\Lambda},$$

où r, q et les idéaux α_i (facteurs invariants) sont définis de façon unique; $r = r(E)$ est le rang de E et $q = q(E)$ son nombre de torsion. Cela permet de définir, pour $0 \leq i \leq \dim M = n$,

$$b_i(M; \xi) = r(H_i(M; \xi))$$

$$q_i(M; \xi) = q(H_i(M, \xi)).$$

Le résultat de Novikov est le suivant :

THÉORÈME. — Si α est une forme de Morse représentant ξ , alors on peut construire un $\hat{\Lambda}$ -complexe \hat{C} , libre avec un générateur de degré i par zéro de α d'indice i , et tel que $H_*(\hat{C}) = H_*(M; \xi)$.

COROLLAIRE. — Si $c_i(\alpha)$ est le nombre de zéros d'indice i , on a :

$$(*) \quad c_i(\alpha) \geq b_i(M; \xi) + q_i(M; \xi) + q_{i-1}(M; \xi), \quad \xi = [\alpha].$$

En particulier, on a pour le nombre total de zéros $c(\alpha)$:

$$(**) \quad c(\alpha) \geq r(H_*(M; [\alpha])) + 2q(H_*(M; [\alpha])).$$

Remarques. — (1) On peut prouver que si $\xi \neq 0$, on a $H_0(M; \xi) = H_n(M; \xi) = 0$; les inégalités (*) permettent de retrouver ce résultat puisque ξ peut être représentée par une forme de Morse sans centre.

(2) Si au contraire $\xi = 0$, alors $\hat{M} \approx M \times \mathbb{Z}$ et $H_*(M; 0) \approx H_*(M; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\Lambda}$, d'où $b_i(M; 0) = \text{rg } H_i(M; \mathbb{Z})$ et $q_i(M; 0) =$ nombre de torsion sur \mathbb{Z} de $H_i(M; \mathbb{Z})$. On retrouve alors les inégalités de Morse usuelles.

(3) On a aussi, comme corollaire du théorème, les inégalités plus précises :

$$\sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} c_i(\alpha) \geq \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} b_i(M; \xi) + q_m(M; \xi), \quad 0 \leq m \leq n;$$

ainsi que les égalités :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i(\alpha) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(M; \xi) = \chi(M; \xi) = \chi(M),$$

mais nous ne nous en servons pas.

Voici maintenant des exemples du calcul de $H_*(M; \xi)$ à l'aide du complexe de Novikov.

(1) Si V_{4k} et p_{4k} satisfont aux conditions (1) et (2) du lemme préliminaire de I, alors pour tout $\lambda \neq 0$, le complexe de Novikov \hat{C} associé à $\lambda p_{4k}^* d\theta$ est nul sauf en degré $2k$, et $\hat{C}_{2k} \approx \hat{\Lambda}$; il en résulte :

$$\begin{aligned} H_i(V_{4k}; [\lambda p_{4k}^* d\theta]) &= 0 \quad \text{si } i \neq 2k \\ &= \hat{\Lambda} \quad \text{si } i = 2k. \end{aligned}$$

(2) Plus généralement, on obtient immédiatement $H_*(M; [\alpha])$ si la suite des indices de α est lacunaire. Par exemple, soit W^n un cobordisme élémentaire d'indice i de F à F' ; si W' est le cobordisme miroir de W , qui est d'indice $n-i$ et va de F' à F , on définit M par recollements à partir de $W \perp W' \perp (F \times I)$ comme l'indique la figure 2.

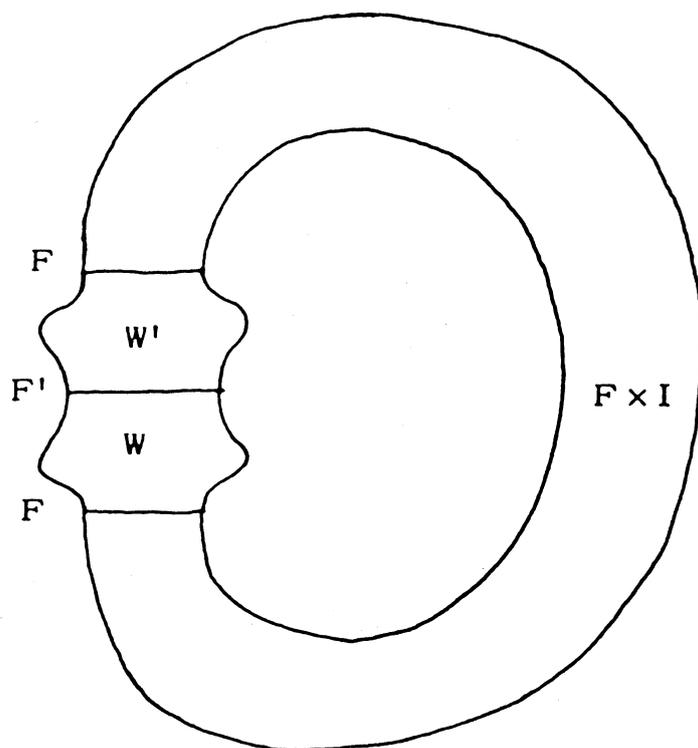


Fig. 2.

Cette variété admet une application $f: M \rightarrow S^1$ ayant un point critique d'indice i et un d'indice $n-i$. Si $|(n-i)-i| \geq 2$ soit $i \notin [(n/2)-1, (n/2)+1]$, il en résulte $H_j(M; [f^* d\theta]) = 0$, sauf $H_i = H_{n-i} = \hat{\Lambda}$. Notons que si n est impair, on a $\chi(M) = (-1)^i + (-1)^{n-i} = 0$, donc il n'était pas évident *a priori* que M ne fibrait pas sur le cercle dans la classe d'homotopie de f .

Résultat de Farber sur l'exactitude des inégalités de Novikov (voir [F]).

THÉORÈME. — On suppose $\dim M \geq 6$ et $\pi_1 M \approx \mathbb{Z}$. Alors, si $\xi \in H^1(M; \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$ est non nulle, elle est représentée par une forme de Morse α telle que l'on ait pour tout i :

$$c_i(\alpha) = b_i(M; \xi) + q_i(M; \xi) + q_{i-1}(M; \xi).$$

On a donc :

$$c(\alpha) = r(H_*(M; \xi)) + 2q(H_*(M; \xi)) = c_g(M; \xi).$$

COROLLAIRE. — Si $H_*(M; \xi) = 0$, alors ξ est représentée par une forme non singulière.

Remarque. — L'hypothèse $\xi \neq 0$ est évidemment inutile pour ce corollaire.

III. Minorations du nombre de points d'intersection dans le cas transverse

On revient à l'isotopie (φ_t) et l'on suppose dorénavant que $\varphi_1(M)$ est transverse à M .

La forme $\alpha_1 = (\varphi_1 | M)^*(\lambda_M)$ n'est peut-être pas de classe rationnelle, mais on peut déformer (φ_1) en ajoutant une petite forme fermée sur M pour qu'elle le devienne, en conservant la transversalité de $\varphi_1(M) \cap M$ donc le nombre de points d'intersection.

On supposera donc maintenant $[\alpha_1]$ rationnelle, ou ce qui revient au même entière. Appliquant le théorème 1, où l'on choisit A entier, et l'inégalité (**), on obtient une minoration de $\#(\varphi_1(M) \cap M)$ en fonction de $H_*(M \times V; [\alpha_1 \oplus Ap^* d\theta])$, où l'on a posé $V = V_{4k}$ et $p = p_{4k}$.

LEMME. — Les $\hat{\Lambda}$ -modules $H_i(M \times V; [\alpha_1 \oplus Ap^* d\theta])$ et $H_{i-2k}(M; [\alpha_1])$ sont isomorphes pour tout i .

Démonstration. — Notons $[\alpha_1] = \xi_1$, $[Ap^* d\theta] = \xi_2$. Le système de coefficients locaux $\hat{\Lambda}_{\xi_1 \oplus \xi_2}$ sur $M \times V$ est défini par l'action de $\pi_1(M \times V) \approx \pi_1 M \times \pi_1 V$ sur $\hat{\Lambda}$ donnée par : $(g_1, g_2) \cdot \lambda = t^{\xi_1(g_1) + \xi_2(g_2)} \lambda$.

Comme $\hat{\Lambda}$ est commutatif, on peut définir le produit tensoriel sur $\hat{\Lambda}$ des coefficients locaux $\hat{\Lambda}_{\xi_1}$ sur M et $\hat{\Lambda}_{\xi_2}$ sur V (voir [S], p. 282) : le module des coefficients est $\hat{\Lambda} \otimes_{\hat{\Lambda}} \hat{\Lambda} \approx \hat{\Lambda}$, et l'action de $\pi_1 M \times \pi_1 V$ est donnée par

$$(g_1, g_2) \cdot (\lambda \otimes \lambda') = t^{\xi_1(g_1)} \lambda \otimes t^{\xi_2(g_2)} \lambda' = t^{\xi_1(g_1) + \xi_2(g_2)} (\lambda \otimes \lambda'),$$

c'est-à-dire qu'on a :

$$\hat{\Lambda}_{\xi_1 \oplus \xi_2} \approx \hat{\Lambda}_{\xi_1} \otimes_{\hat{\Lambda}} \hat{\Lambda}_{\xi_2}.$$

Le lemme résulte alors de la formule de Künneth pour les coefficients locaux (*ibid.*) et du fait que $H_*(V; \xi_2) = H_{2k} = \hat{\Lambda}$.

On déduit immédiatement de ce lemme et de l'inégalité (**), le corollaire suivant du théorème 1.

COROLLAIRE 1. — On suppose $[\alpha_1]$ rationnelle. Alors, si $\varphi_1(M)$ est transverse à M , on a :

$$\#(\varphi_1(M) \cap M) \geq r(H_*(M; [\alpha_1])) + 2q(H_*(M; [\alpha_1])).$$

Remarque. — Si $[\alpha_1]$ n'est pas rationnelle, cette inégalité reste vraie si on remplace $[\alpha_1]$ dans le membre de droite par une classe rationnelle assez proche.

En utilisant le résultat de Farber, on en déduit les corollaires suivants.

COROLLAIRE 2. — On suppose $\pi_1 M \approx \mathbb{Z}$ et $\dim M \geq 6$. Alors si $[\alpha_1] \neq 0$ et si $\varphi_1(M)$ est transverse à M , le nombre de points de $\varphi_1(M) \cap M$ est au moins égal à celui des zéros d'une forme de Morse cohomologue à α_1 .

COROLLAIRE 3. — On suppose $\pi_1 M \approx \mathbb{Z}$ et $\dim M \geq 6$. Alors si $\varphi_1(M) \cap M = \emptyset$, il existe une forme non singulière cohomologue à α_1 , donc M fibre sur le cercle.

BIBLIOGRAPHIE

- [F] M. C. FARBER, *Exactitude des inégalités de Novikov* [*Funct. Anal. i ego Pril.*, vol. 19, 1985, p. 49-59 (en russe)]; [*Funct. Anal. and its Appl.*, vol. 19, p. 40-49 (en anglais)].
- [LS] F. LAUDENBACH et J.-C. SIKORAV, *Persistance d'intersection avec la section nulle...* (*Invent. Math.*, vol. 82, 1985, p. 349-357).
- [M] J. MILNOR, *Infinite cyclic coverings*. in *Conf. on the Topology of manifolds* (éditée par J. C. Hocking), Prindle, Weber & Schmidt, 1968, p. 115-133.
- [N] S. P. NOVIKOV, *Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory* (*Soviet. Math. Dokl.*, vol. 24, n° 2, 1981, p. 222-226).
- [S] E. SPANIER, *Algebraic Topology*, McGraw Hill, New York, 1966.
- [T] D. TISCHLER, *On fibering certain foliated manifolds over S^1* , (*Topology* 9, 1970, p. 153-154).

(Manuscrit reçu le 10 septembre 1985,
révisé le 3 juin 1986.)

J.-C. SIKORAV
U.A. n° 1169 du C.N.R.S.,
Université de Paris-Sud,
Mathématiques, bâtiment 425,
91405 Orsay Cedex.

HOMOLOGIE DE NOVIKOV ASSOCIEE A UNE CLASSE DE COHOMOLOGIE REELLE DE DEGRE UN

INTRODUCTION

On se donne une variété différentiable fermée M et une classe de cohomologie ξ non nulle dans $H^1(M; \mathbb{R})$, que l'on identifie à un morphisme de $\pi_1(M)$ dans \mathbb{R} . On cherche à quelles conditions ξ peut être représentée par une 1-forme fermée non singulière, ou en abrégé est non singulière.

D'après D. Tischler [Ti], si ω est une 1-forme fermée non singulière, on peut l'approcher par une forme voisine ω' qui est encore fermée non singulière et dont la classe $[\omega']$ est rationnelle, c'est-à-dire que le groupe des périodes $\text{im}[\omega']$ est de rang un ; alors $\omega' = \lambda p^* d\theta$, où p est une fibration de M sur le cercle S^1 . Dans ce cas, le problème est donc de savoir si une application de M dans S^1 est homotope à une fibration.

Le problème est trivial en dimension ≤ 2 ; par ailleurs, les deux cas suivants ont été étudiés à fond.

1) Si M est de dimension trois et irréductible (condition nécessaire pour qu'elle puisse fibrer sur le cercle, sauf les cas exceptionnels où la fibre est S^2 ou \mathbb{P}^2), [Stallings] prouve qu'une classe ξ rationnelle est non singulière si et seulement si $\ker \xi$ est de type fini ; [Thurston] prouve que l'ensemble des classes non singulières dans $H^1(M; \mathbb{R})$ est décrit par un nombre fini d'inéquations linéaires à coefficients entiers (par rapport au réseau $H_1(M; \mathbb{Z})/\text{Torsion}$ de l'espace dual) ; on dira qu'il a une structure polyédrale rationnelle (voir aussi l'exposé de D. Fried dans [Fathi-Laudenbach-Poénaru], p.251-266).

2) Si M est de dimension ≥ 6 et ξ est rationnelle, les travaux de [Browder–Levine], [Farrell] et [Siebenmann] donnent les conditions nécessaires et suffisantes suivantes pour que ξ soit non singulière :

- a) le revêtement infini cyclique \hat{M}_ξ associé a le type d'homotopie d'un complexe fini ; de façon équivalente, $H_*(\hat{M}_\xi; \mathbb{Z})$ est de type fini, $\ker \xi$ est de présentation finie et une certaine obstruction secondaire $\tau_0(\xi)$ dans $K_0\mathbb{Z}(\pi_1 M)$ est nulle ;
- b) une certaine obstruction secondaire $\tau_1(\xi)$ dans $Wh_1(\pi_1 M)$ est nulle.

La condition a) est nécessaire en toutes dimensions. En revanche, pour les classes irrationnelles en dimension ≥ 4 , on ne connaît pas de condition autre que le fait que toute classe rationnelle assez proche doit être non singulière (en dimension trois, la description de Thurston implique qu'alors ξ est non singulière, mais ceci pourrait bien ne plus être vrai en grande dimension, voir 2.7). D'autre part, la condition de finitude a) n'est pas commode à vérifier, surtout quand on fait varier ξ .

Dans ce travail, nous allons utiliser l'approche plus récente de [Novikov], continuée par [Farber], qui permet de traiter directement le cas irrationnel. Nous verrons aussi que cette méthode a un rapport avec des travaux de [Levitt] d'une part, et de [Bieri–Neumann–Strebel] d'autre part. Signalons aussi les travaux de [Geoghegan–Mihalik] et de [Dwyer–Fried].

Novikov associe à ξ des groupes d'homologie de la façon suivante : soit ω une forme représentant ξ ; sur le revêtement d'intégration \hat{M}_ξ caractérisé par $\pi_1 \hat{M}_\xi = \ker \xi$, elle se relève en une forme exacte $d\hat{f}$. On définit le complexe des chaînes singulières "modulo le bout négatif" (ce n'est un vrai bout que si ξ est rationnelle) :

$$C_*(\hat{M}_\xi, \infty^-) = \lim^0 C_*(\hat{M}_\xi, \hat{f} \leq c), \quad c \rightarrow -\infty,$$

où l'on note $(\hat{f} \leq c) = \hat{f}^{-1}(-\infty, c)$. On en déduit des groupes d'homologie

$H_*(\hat{M}_\xi, \infty^-)$. Ceux-ci ne dépendent que de ξ , et leur nullité est une condition nécessaire pour que ξ soit non singulière ; si $\dim M \geq 6$ et $\pi_1 M = \mathbb{Z}$ (donc ξ est rationnelle), Farber (op.cit.) montre que la réciproque est vraie.

Nous allons procéder de même avec le revêtement universel \tilde{M} , et définir ainsi des *groupes d'homologie de Novikov associés à ξ* , que nous noterons $H_*(\tilde{M}, \infty_\xi^-)$. Là encore, leur nullité est une condition nécessaire pour que ξ soit non singulière. Plus généralement, on a :

Propriété 1 (1.3). Si ξ est représentée par une forme de Morse sans singularité d'indice $\leq k$, alors $H_i(\tilde{M}, \infty_\xi^-) = 0$ pour $i \leq k$.

En particulier, comme ξ est non nulle, on peut la représenter par une forme de Morse sans singularité d'indice zéro (cf. [Levitt], théorème III.1), donc on a toujours $H_0(\tilde{M}, \infty_\xi^-) = 0$ (on donnera en 4.5, remarque 1, une autre démonstration de ce résultat homologique).

Questions. 1) Si $\dim M \geq 6$ et $k < (1/2) \cdot \dim M$, la réciproque de la propriété 1 est-elle vraie ?

2) La nullité de $H_*(\tilde{M}, \infty_\xi^-)$ implique-t-elle celle de $H_*(\tilde{M}, \infty_\xi^+)$ ($= H_*(\tilde{M}, \infty_{-\xi}^-)$) ?

3) Si $\dim M \geq 6$ et $K_0 \mathbb{Z}[\pi_1 M]$ et $\text{Wh}_1(\pi_1 M)$ sont nuls, la nullité de $H_*(\tilde{M}, \infty_\xi^-)$ et de $H_*(\tilde{M}, \infty_\xi^+)$ suffit-elle pour que ξ soit non singulière ?

Ensuite, on introduit les anneaux

$\Lambda = \mathbb{Z}[\pi_1 M] = \{ \text{sommes finies } \sum n_g g, g \in \pi_1 M, n_g \in \mathbb{Z} \},$

$\Lambda_\xi^- = \{ \text{séries formelles } \sum n_g g \text{ telles que, pour tout } c, \text{ le nombre des } g \text{ vérifiant } n_g \neq 0 \text{ et } \xi(g) > c \text{ est fini} \}.$

Alors $H_*(\tilde{M}; \mathbb{Z})$ est naturellement un Λ -module à gauche et de même $H_*(\tilde{M}, \infty_\xi^-)$ est un Λ_ξ^- -module.

Propriété 2 (1.4). Soit C_* un Λ -complexe libre dont l'homologie est isomorphe à $H_*(\tilde{M}; \mathbb{Z})$. On considère le Λ_ξ^- -complexe $\Lambda_\xi^- \otimes_\Lambda C_*$ obtenu par extension des scalaires ; alors son homologie ne dépend que de $H_*(\tilde{M}; \mathbb{Z})$ et de ξ et elle est isomorphe à $H_*(\tilde{M}, \infty_\xi^-)$.

Remarques. 1) On a un énoncé analogue pour $H_*(\hat{M}_\xi, \infty^-)$, l'anneau Λ_ξ^- étant remplacé par un quotient convenable A_ξ^- : on peut en déduire facilement que la nullité de $H_*(\tilde{M}, \infty_\xi^-)$ est une condition strictement plus forte que celle de $H_*(\hat{M}_\xi, \infty^-)$.

2) [Novikov] affirme que si ω est une forme de Morse représentant ξ , ses singularités engendrent librement sur A_ξ^- un complexe dont l'homologie est $H_*(\hat{M}_\xi, \infty^-)$; un tel énoncé (que je ne sais pas prouver) reste sûrement valable pour $H_*(\tilde{M}, \infty_\xi^-)$ si l'on remplace A_ξ^- par Λ_ξ^- .

Dans le reste du travail, on s'intéresse au module $H_1(\tilde{M}, \infty_\xi^-)$; en particulier, on cherche à quelles conditions il est nul. Pour cela, on représente ξ par une forme de Morse sans singularité d'indice zéro ; ceci a pour conséquence que, dans le revêtement d'intégration, les parties $(\hat{f} \leq c)$ sont connexes (cf. 0.3). S'inspirant de [Levitt], on obtient :

Théorème 3. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A1) $H_1(\tilde{M}, \infty_\xi^-)$ est nul ;
- A2) pour tout c , le morphisme $\pi_1(\hat{f} \leq c) \rightarrow \pi_1(\hat{M}_\xi)$ est surjectif ;
- A3) pour tout c , la partie $(\tilde{f} \leq c)$ dans le revêtement universel est connexe ;
- A4) le système projectif $(\pi_1(\hat{f} \leq c), c \rightarrow -\infty)$ vérifie la condition de Mittag-Leffler (ML) (cf. [Switzer], p. 131-132) : pour tout c_0 , il existe $c_1 \leq c_0$ tel que, pour tout $c \leq c_1$, l'image de $\pi_1(\hat{f} \leq c)$ dans $\pi_1(\hat{f} \leq c_0)$ est la même que celle de $\pi_1(\hat{f} \leq c_1)$.

Les propriétés A2 et A3 apparaissent chez [Levitt] ; on déduit du théorème 3 que la classe ξ est *complète* au sens de celui-ci (voir la définition en 2.2) si et seulement si $H_1(\tilde{M}, \infty \xi^-)$ et $H_1(\tilde{M}, \infty \xi^+)$ sont nuls. Par la méthode de Levitt, on obtient une propriété équivalente à celles du théorème 3 et portant sur les singularités d'indice 1 de ω (voir 2.2.b)). Nous espérons pouvoir utiliser cette caractérisation dans un travail ultérieur pour montrer qu'en dimension ≥ 5 la nullité de $H_1(\tilde{M}, \infty \xi^-)$ permet d'éliminer ces singularités d'indice 1 .

D'autre part, la propriété A2 apparaît dans [Bieri-Neumann-Strebel], d'où l'on déduit une propriété équivalente portant seulement sur $\pi_1 M$ et le morphisme ξ (voir 2.5). On en déduit :

Corollaire 4 (2.4). Si $\ker \xi$ est de type fini, alors $H_1(\tilde{M}, \infty \xi^-)$ et $H_1(\tilde{M}, \infty \xi^+)$ sont nuls. La réciproque est vraie si ξ est rationnelle.

Si M est de dimension trois et irréductible, [Bieri-Neumann-Strebel] utilise les résultats de Stallings et de Thurston pour prouver que ξ est non singulière si et seulement si A2 est vérifiée. De façon analogue mais plus simple, [Levitt] prouve (ξ non singulière $\Leftrightarrow \xi$ complète). La caractérisation homologique qui s'en déduit permet, en utilisant [Sikorav], de prouver un résultat de géométrie symplectique :

Théorème 5. On suppose que M est de dimension 3 et irréductible, et que la section nulle $M \subset T^*M$ peut être disjointe d'elle-même par isotopie symplectique . Alors M fibre sur le cercle.

Enfin, utilisant la propriété 2, on montre que $H_1(\tilde{M}, \infty \xi^-)$ ne dépend que de $\pi_1 M$ et du morphisme ξ , et l'on en donne la description suivante : étant donnée une présentation $\langle g_1, \dots, g_p \mid r_1, \dots, r_q \rangle$ de $\pi_1 M$, on lui associe la suite exacte de Lyndon ([Lyndon], p. 656) :

$$\Lambda^q \xrightarrow{d_2} \Lambda^p \xrightarrow{d_1} \Lambda ,$$

où d_1 et d_2 sont les applications Λ -linéaires à gauche données par

$$(1) \quad d_1(e_i) = g_i - 1, \quad 1 \leq i \leq p;$$

(2) d_2 est la multiplication à droite par la matrice $D = [\partial r_i / \partial g_j]$ (notation du calcul différentiel libre de [Fox]).

Proposition 6. On suppose $\xi(g_k) \neq 0$ et l'on note A la matrice obtenue en supprimant la k -ième colonne de D . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi^-})$ est nul ;
- b) A définit une application surjective de $(\Lambda_{\xi^-})^q$ dans $(\Lambda_{\xi^-})^{p-1}$;
- c) il existe une matrice \bar{X} à coefficients dans Λ_{ξ^-} telle que $\bar{X}.A = \text{id}_{p-1}$;
- d) il existe une matrice X à coefficients dans Λ telle que $X.A = \text{id}_{p-1} + B$, où B est ξ -négative, c'est-à-dire que chaque élément est une somme $\sum n_g \cdot g$, $\xi(g) < 0$.

En combinant ce résultat avec le corollaire 4, on obtient des propriétés caractérisant, pour un groupe G de présentation finie, les morphismes de G dans \mathbb{Z} dont le noyau est de type fini (voir 4.6).

Le plan de ce travail est le suivant :

- 0) Suivant [Levitt], on donne quelques définitions et propriétés générales sur les 1-formes fermées et en particulier les formes de Morse.
- 1) On définit $H_*(\tilde{M}, \infty_{\xi^-})$ et l'on prouve les propriétés 1 et 2.
- 2) On prouve le théorème 3 ; on en déduit le corollaire 4, puis une caractérisation homologique des classes non singulières en dimension 3.
- 3) S'appuyant sur cette caractérisation, on prouve le théorème 5.
- 4) On prouve la proposition 6 et sa conséquence en théorie des groupes.

0. PRELIMINAIRES.

On se donne M et ξ comme dans l'Introduction. Si ω est une forme représentant ξ , son intégration le long des lacets définit le morphisme de $\pi_1 M$ dans \mathbb{R} identifié à ξ . Son image est le groupe des périodes, noté $P(\xi)$ ou $P(\omega)$. La classe (ou la forme) est rationnelle s'il est de rang 1, irrationnelle sinon.

Par ailleurs, on note $\text{Sing } \omega$ l'ensemble des singularités (= zéros) de ω ; alors $\omega|_{M - \text{Sing } \omega}$ définit un feuilletage de codimension un.

0.1. Le revêtement d'intégration $\hat{p}_\xi : \hat{M}_\xi \rightarrow M$ (ou \hat{p} , \hat{M} s'il n'y a pas de confusion possible) est celui tel que $\pi_1 \hat{M}_\xi = \ker \xi$. Si ω représente ξ , c'est le plus petit revêtement tel que tout lacet γ dans M vérifiant $\int_\gamma \omega = 0$ se relève en un lacet dans \hat{M} . Donc $\hat{p}^* \omega$ est exacte, et l'on note \hat{f} une primitive globale (unique à constante additive près).

Ce revêtement est galoisien, de groupe $\text{Aut}(\hat{M}|M) = \pi_1 M / \ker \xi \approx P(\xi)$, et l'on a $\hat{f} \circ \bar{g} - \hat{f} = \xi(g)$ pour tout $\bar{g} \in \pi_1 \hat{M}$, \bar{g} désignant son image dans $\text{Aut}(\hat{M}|M)$. Si ξ est rationnelle, \hat{M} est le revêtement infini cyclique associé à l'application induite par \hat{f} de M dans $\mathbb{R}/P(\xi) \approx S^1$.

Sur le revêtement universel $\tilde{p} : \tilde{M} \rightarrow M$, on notera \tilde{f} la primitive de $\tilde{p}^* \omega$ correspondant à \hat{f} : on a de même $\tilde{f} \circ g - \tilde{f} = \xi(g)$.

Si $c, c' \in \mathbb{R}$, on notera $(c \leq \hat{f} \leq c') = \hat{f}^{-1}([c, c'])$, et de même $(\hat{f} \leq c) = \hat{f}^{-1}((-\infty, c])$, ainsi que pour \tilde{f} .

Soit ω' une autre forme représentant ξ , avec $\hat{p}^* \omega' = d\hat{f}'$. Alors, $\hat{f}' - \hat{f}$ est invariante par les transformations du revêtement, donc bornée: il en est de même pour $\tilde{f}' - \tilde{f}$.

0.2. Une forme de Morse est une 1-forme fermée ω telle qu'au voisinage de toute singularité, on ait $\omega = df$, où f a un point critique non dégénéré. Les singularités sont alors en nombre fini et ont un indice compris entre zéro et $n = \dim M$: une singularité d'indice zéro ou n

(extremum local de f) est un centre. Comme pour les fonctions, on montre que, dans toute classe de cohomologie ξ , les formes de Morse constituent un ouvert dense.

On appelle champ de *quasi-gradient* pour ω un champ de vecteurs X sur M tel que

a) $\omega(X) > 0$ sur $M - \text{Sing} \omega$;

b) près d'une singularité où $\omega = df$, on a $\omega = \text{grad} f$ pour une certaine métrique.

Un tel champ existe toujours, et permet d'associer à chaque singularité d'indice i une variété stable et une variété instable, qui sont les images de \mathbb{R}^1 et de \mathbb{R}^{n-1} par des immersions injectives.

Si $\xi = 0$, c'est-à-dire si ω est exacte, elle a nécessairement au moins un point d'indice zéro et un d'indice n . En revanche, on a :

Propriété (cf. [Levitt], théorème III.1). Si $\xi \neq 0$, on peut la représenter par une forme de Morse sans centre.

0.3. Propriété (cf. [Levitt]). Si ω est une forme de Morse sans singularité d'indice zéro, alors dans le revêtement d'intégration toute partie $(\hat{f} \leq c)$ est connexe.

Remarque. Cette propriété reste valable pour tout revêtement abélien de M (au-dessus de \hat{M}), en particulier le revêtement abélien maximal considéré en 2.5. En revanche, elle est fautive en général pour le revêtement universel : voir le théorème 3.

1. DEFINITION ET PREMIERES PROPRIETES.

1.1. Soient M, ξ, ω et \tilde{f} comme dans le §0, avec $\xi \neq 0$. Avec des complexes de chaînes singulières, on définit la limite projective

$$C_*(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-) = \lim^0 C_*(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c), \quad c \rightarrow -\infty.$$

Si l'on remplace ω, \tilde{f} par ω', \tilde{f}' , le fait que $\tilde{f}' - \tilde{f}$ est borné implique qu'on obtient un complexe canoniquement isomorphe, ce qui justifie la notation. Un élément de ce complexe peut se voir comme une chaîne localement finie $\sum n_i \sigma_i$ telle que, pour tout c , il n'y ait qu'un nombre fini de simplexes σ_i dont le support n'est pas contenu dans $(\tilde{f} \leq c)$: c'est donc naturellement un Λ_{ξ}^- -complexe. **L'homologie de Novikov** $H_*(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-)$ est par définition l'homologie de ce complexe.

Un résultat général sur l'homologie d'une limite projective de complexes où les applications sont surjectives (cf. [Massey] p.407) donne :

Propriété. On a pour tout k une suite exacte :

$$(1.2) \quad \lim^1 H_{k+1}(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c) \longrightarrow H_k(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-) \longrightarrow \lim^0 H_k(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c) .$$

1.3. Démonstration de la propriété 1.

Supposons \tilde{f} de Morse et sans point critique d'indice $\leq k$.

a) On a d'abord $\pi_i(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c) = 0$ pour $i \leq k$. Ceci se démontre
 - soit en notant qu'homotopiquement \tilde{M} s'obtient à partir de $(\tilde{f} \leq c)$ en ajoutant des cellules (en nombre peut-être infini), de dimension $> k$;
 - soit en notant que génériquement un objet de dimension $\leq k$ évite toutes les variétés instables donc peut être poussé vers le bas par le flot de $\hat{\lambda}$.

b) On a donc a fortiori $H_i(\tilde{M}, \tilde{f} \leq k) = 0$ pour $i \leq k$, et (1.1) entraîne $H_i(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-) = 0$ pour $i < k$. Enfin, $H_{k+1}(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c)$ est engendré par les points critiques d'indice $k+1$: donc, si $c < c'$, $(H_{k+1}(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c) \rightarrow H_{k+1}(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c'))$ est surjectif, d'où la nullité du terme \lim^1 dans (1.2). \square

1.4. Démonstration de la propriété 2.

Définissons d'abord un second complexe sur Λ_ξ^- donnant la même homologie : pour cela, on fixe une structure cellulaire sur M , donc une structure $\pi_1 M$ -équivariante sur \tilde{M} . Le complexe de chaînes cellulaires $C_*^c(\tilde{M})$ est alors un Λ -complexe libre de type fini sur les cellules de M .

Notant $K(c)$ la réunion des cellules contenues dans $(\tilde{f} \leq c)$, on définit le complexe de chaînes cellulaires

$$C_*^c(\tilde{M}, \infty_\xi^-) = \lim^0 C_*^c(\tilde{M}, K(c)), \quad c \rightarrow -\infty.$$

Là encore, un élément de ce complexe s'interprète comme une chaîne localement finie, donc on obtient un Λ_ξ^- -complexe. La preuve que les deux complexes ont la même homologie est laissée en exercice : c'est une conséquence facile du fait que l'homologie cellulaire de $(\tilde{M}, K(c))$ est égale à l'homologie singulière.

L'intérêt d'utiliser des chaînes cellulaires est que l'on a un isomorphisme naturel

$$C_*^c(\tilde{M}, \infty_\xi^-) \approx \Lambda_\xi^- \otimes_\Lambda C_*^c(\tilde{M}).$$

La propriété 2 est alors un cas particulier du théorème général des coefficients universels, cf. par exemple [Godement], p. 117 ; de la même référence on déduit l'existence d'une suite spectrale convergant vers $H_{p+q}(\tilde{M}, \infty_\xi^-)$ et telle que

$$E_{pq}^2 = \text{Tor}_p^\Lambda(\Lambda_\xi^-, H_q(\tilde{M}; \mathbb{Z})).$$

De la propriété 2 on déduit une nouvelle preuve de la nullité de $H_0(\tilde{M}, \infty_\xi^-)$, et aussi que l'on a

$$H_1(\tilde{M}, \infty_\xi^-) \approx \text{Tor}_1^\Lambda(\Lambda_\xi^-, \mathbb{Z}) = H_1(\Lambda_\xi^-, \Lambda)$$

(homologie du Λ -module Λ_ξ^-), ce qui prouve déjà que ce module ne dépend que de $\pi_1 M$ et du morphisme ξ .

2. CARACTERISATIONS DE LA NULLITE DE $H_1(\tilde{M}, \infty \xi^-)$.

2.1. Preuve du théorème 3. Nous allons prouver $A1 \Rightarrow A3$, $A3 \Leftrightarrow A2$, $A2 \Rightarrow A4$ et $A4 \Rightarrow A1$.

A1 \Rightarrow A3. Considérons la suite exacte (1.1) pour $k=1$. Comme \tilde{M} est simplement connexe, on a $H_1(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c) = \tilde{H}_0(\tilde{f} \leq c)$; de plus, de la suite exacte $H_2 \tilde{M} \rightarrow H_2(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c) \rightarrow H_1(\tilde{f} \leq c)$, on déduit $\lim^1 H_2(\tilde{M}, \tilde{f} \leq c) = \lim^1 H_1(\tilde{f} \leq c)$. Il vient donc la suite exacte

$$(2.2) \quad \lim^1 H_1(\tilde{f} \leq c) \rightarrow H_1(\tilde{M}, \infty \xi^-) \rightarrow \lim^0 H_0(\tilde{f} \leq c).$$

Supposons A1 vérifiée ; on a donc $\lim^0 H_0(\tilde{f} \leq c) = 0$. Or, comme ω n'a pas de singularité d'indice zéro, on sait que l'application $\tilde{H}_0(\tilde{f} \leq c) \rightarrow \tilde{H}_0(\tilde{f} \leq c')$ est surjective si $c < c'$. Donc tous les $\tilde{H}_0(\tilde{f} \leq c)$ sont nuls. \square

A3 \Leftrightarrow A2. Le revêtement universel $\tilde{M} \rightarrow \hat{M}$ induit un revêtement galoisien $(\tilde{f} \leq c) \rightarrow (\hat{f} \leq c)$ de groupe $\pi_1 \hat{M}$. Comme $(\hat{f} \leq c)$ est connexe, la suite exacte d'homotopie associée donne

$$(2.3) \quad \pi_1(\tilde{f} \leq c) \rightarrow \pi_1(\hat{f} \leq c) \xrightarrow{i} \pi_1 \hat{M} \rightarrow \pi_0(\tilde{f} \leq c),$$

où la flèche i est induite par l'inclusion : donc i est surjective si et seulement si $(\tilde{f} \leq c)$ est connexe. \square

Remarque. Il est clair que dans A3, on peut remplacer "pour tout c " par "il existe c tel que", donc aussi dans A2.

A2 \Rightarrow A4. a) Préliminaires. Soit $\tau > 0$ une période de ξ ; on peut supposer que 0 est une valeur régulière de \hat{f} , donc aussi $k\tau$, $k \in \mathbb{Z}$. Notons $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_p$ des relevés dans $(0 < \hat{f} < \tau)$ des singularités

d'indice 1. Alors tout point critique d'indice 1 de \hat{f} dans $(0 < \hat{f} < \tau)$ s'écrit $\hat{x} = \bar{g} \cdot \hat{x}_i$, où $\bar{g} \in \pi_1 M / \pi_1 \hat{M} = \text{Aut}(\hat{M}|M)$, et $|\xi(\bar{g})| < \tau$.

Choisissons un point base \hat{b} dans $(\hat{f} \leq 0)$. Alors $\pi_1(\hat{f} \leq \tau, \hat{b})$ est "engendré sur $\pi_1(\hat{f} \leq 0, \hat{b})$ par les points critiques d'indice 1 dans $(0 < \hat{f} < \tau)$ " : plus précisément, à chaque \hat{x} on associe un lacet $\gamma_{\hat{x}} = \theta_1 \cup \theta \cup \theta_2$, où θ est la partie de la variété stable de \hat{x} au-dessus du niveau 0, et θ_1, θ_2 des chemins dans $(\hat{f} \leq 0)$ joignant \hat{b} aux extrémités de θ (cf. figure 1). Alors $\pi_1(\hat{f} \leq \tau, \hat{b})$ est engendré par l'image de $\pi_1(\hat{f} \leq 0, \hat{b})$ et les $[\gamma_{\hat{x}}]$.

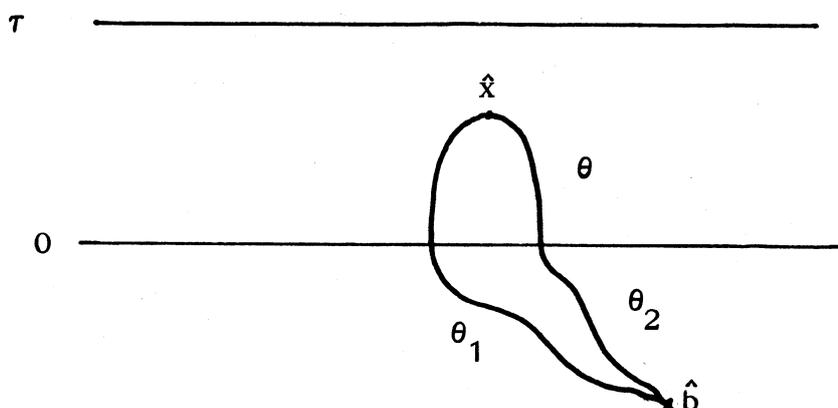


Figure 1

Prenons \hat{b} dans $(\hat{f} \leq -\tau)$ et, pour $\hat{x} = \hat{x}_i$, $1 \leq i \leq p$, imposons à θ_1 et θ_2 de coïncider avec la variété stable de \hat{x}_i entre 0 et $-\tau$ (cf. figure 2); on obtient ainsi des lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_p$. Soit $\hat{x} = \bar{g} \cdot \hat{x}_i$ un point d'indice 1 entre 0 et τ ; alors $\hat{f}(\bar{g} \cdot \hat{b}) \leq 0$, et il existe un chemin $\lambda_{\bar{g}}$ de \hat{b} à $\bar{g} \cdot \hat{b}$ dans $(\hat{f} \leq 0)$. On peut alors prendre $\gamma_{\hat{x}} = \lambda_{\bar{g}} \cdot \gamma_i \cdot \lambda_{\bar{g}}^{-1}$.

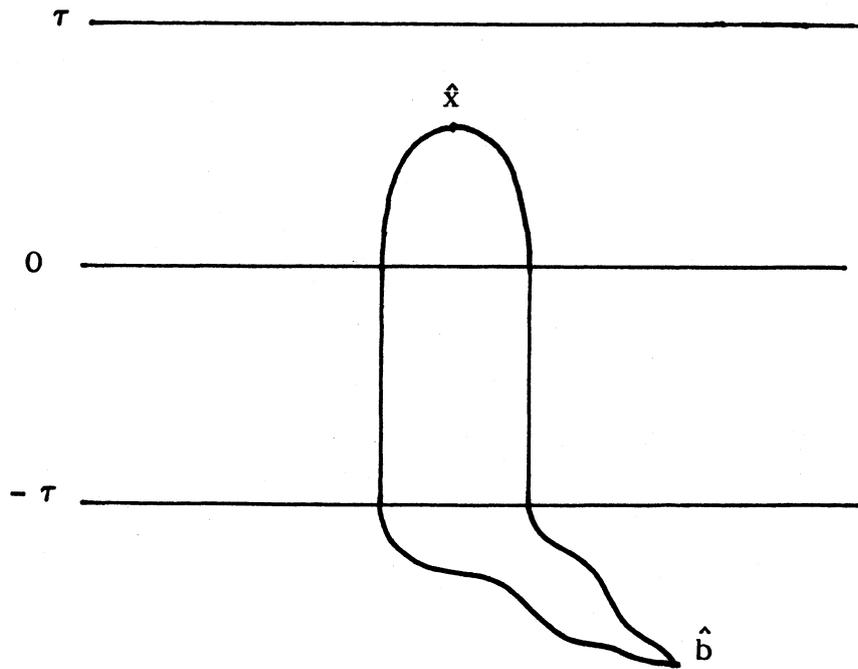


Figure 2

b) Supposons A2 vraie. Comme $\pi_1(\hat{f} \leq -\tau, \hat{b}) \rightarrow \pi_1(\hat{M}, \hat{b})$ est surjective, γ_i est homotope dans \hat{M} à $\gamma'_i \subset (\hat{f} \leq -\tau)$. Soit N assez grand pour que toutes les homotopies $\gamma_i \simeq \gamma'_i$, $1 \leq i \leq p$, aient lieu dans $(\hat{f} \leq (N+1)\tau)$; alors tout lacet $\gamma_{\hat{x}} = \lambda_{\hat{g}} \cdot \gamma_i \cdot \lambda_{\hat{g}}^{-1}$ est homotope dans $(\hat{f} \leq (N+1)\tau)$ à $\gamma'_{\hat{x}} = \lambda_{\hat{g}} \cdot \gamma_i \cdot \lambda_{\hat{g}}$, qui est contenu dans $(\hat{f} \leq 0)$: ceci prouve que $\pi_1(\hat{f} \leq 0, \hat{b})$ et $\pi_1(\hat{f} \leq \tau, \hat{b})$ ont même image dans $\pi_1(\hat{f} \leq (N+1)\tau, \hat{b})$; en utilisant la périodicité, on en déduit (ML). \square

A4 \Rightarrow A1. Supposons A4 vraie, et soit c_1 associé à $c_0 = 0$.

Montrons d'abord A2: soit g un élément de $\pi_1 \hat{M}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que g soit l'image de $\gamma \in \pi_1(\hat{f} \leq c_1 + k\tau)$; alors l'image de γ dans $\pi_1(\hat{f} \leq k\tau)$ provient de $\pi_1(\hat{f} \leq c)$ pour tout $c \leq c_1 + k\tau$, et c'est a fortiori vrai pour g , d'où A2.

Ensuite, comme $A2 \Leftrightarrow A3$, on a $\lim^0 \tilde{H}_0(\tilde{f} \leq c) = 0$; donc, d'après la suite exacte (2.1), il reste à prouver $\lim^1 H_1(\tilde{f} \leq c) = 0$. Or

(ML) entraîne $\lim^1 \pi_1(\hat{f} \leq c) = 1$ (cf. [Switzer], p.131-132), et d'après la suite exacte (2.3), on en déduit $\lim^1 \pi_1(\tilde{f} \leq c) = 1$, d'où le résultat. \square

2.2. Connexion avec les formes complètes de [Levitt].

a) Une forme de Morse ω sans centre est dite complète si tout chemin θ dans $M - \text{Sing} \omega$ tel que $\int_{\theta} \omega = 0$ est homotope à extrémités fixes à un chemin contenu dans une feuille de $\omega|_{M - \text{Sing} \omega}$. D'après [Levitt], la complétude est une propriété de la classe de cohomologie, et (ω complète $\Leftrightarrow \omega$ et $-\omega$ vérifient A2). Donc :

Propriété. La classe ξ est complète si et seulement si $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-)$ et $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi}^+)$ sont nuis.

b) Formes demi-complètes. [Levitt] démontre qu'une forme (de Morse sans centre) est complète si et seulement si, pour toute singularité s d'indice 1 ou $n-1$, les deux bouts singuliers issus de s sont situés sur la même feuille, et il existe un lacet de connexion γ ($\gamma - \{s\}$ est contenu dans cette feuille) homotope à zéro dans M (voir figure 3).

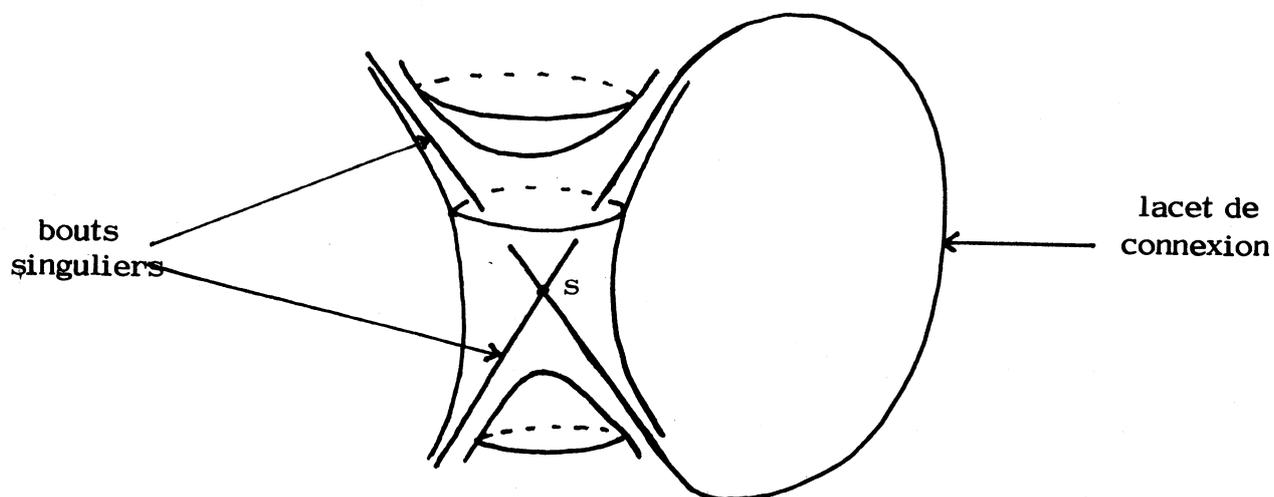


Figure 3

Ceci nous suggère d'appeler une forme de Morse sans singularité d'indice zéro semi-complète à gauche si un tel lacet existe pour toute singularité d'indice un. On adapte sans difficulté les méthodes de [Levitt] (preuve de la proposition II.2) pour prouver l'équivalence de cette propriété avec A3, donc la nullité de $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-)$. Notons que la stabilité par perturbation de la semi-complétude permet de prouver, comme dans [Levitt], que l'ensemble $\{\xi | H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-) = 0\}$ est ouvert dans $H^1(M; \mathbb{R})$; nous retrouverons ce résultat plus tard (voir 4.4, remarque 1).

2.3. Preuve du corollaire 4. C'est le théorème V.2 de [Levitt], où l'on a remplacé la complétude par sa caractérisation homologique; reproduisons sa démonstration, en rappelant que $\ker \xi = \pi_1(\hat{M}_{\xi})$:

a) Si $\pi_1(\hat{M}_{\xi})$ est de type fini, il est engendré par l'image de $\pi_1(K)$, où K est compact, donc par $\pi_1(c \leq \hat{f} \leq c')$: on en déduit que ξ et $-\xi$ vérifient A2.

b) Supposons rationnelle, alors tout niveau régulier ($\hat{f}=c$) est une variété compacte, donc $\pi_1(\hat{f}=c)$ est de présentation finie; si ξ est complète, alors la surjectivité de $(\pi_1(\hat{f}=c) \rightarrow \pi_1(\hat{M}_{\xi}))$ implique que $\pi_1(\hat{M}_{\xi})$ est de type fini. \square

2.4. Corollaire. Si M est de dimension trois et irréductible, il y a équivalence entre :

- a) ξ est non singulière ;
- b) $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-)$ et $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi}^+)$ sont nuls.

Démonstration (cf. [Levitt], partie V, preuve de $\mathfrak{C}(N)=U(N)$ pour les variétés de dimension trois irréductibles).

Notons N et C les sous-ensembles de $H^1(M, \mathbb{R})$ définis par a) et b); on sait déjà que $N \subset C$, et de plus C est ouvert (cf. 2.3). Le théorème de fibration de [Stallings] dit que, si ξ est rationnelle, elle est dans N si et seulement si $\ker \xi$ est de type fini, c'est-à-dire si elle est dans C d'après le corollaire 4.

Il ne reste plus qu'à voir que, si ξ est irrationnelle et n'est pas dans N , elle n'est pas dans C non plus ; or, la description de N par [Thurston] implique l'existence d'une suite de classes rationnelles tendant vers ξ et qui ne sont pas dans N , donc pas dans C : comme C est ouvert, ξ ne peut être dans C . \square

Remarque. En fait, la nullité de $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-)$ suffit d'après [Bieri-Neumann-Strebel] (voir ce qui suit et leur théorème E).

2.5. Connexion avec [Bieri-Neumann-Strebel].

Dans [Bieri-Neumann-Strebel], on considère un groupe G de type fini, de groupe des commutateurs G' ; pour un morphisme ξ de G dans \mathbb{R} , on pose $G_{\xi} = \{g \mid \xi(g) \geq 0\}$ puis

$$\Sigma(G) = \{ \xi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R}) - \{0\} \mid G' \text{ est de type fini sur un sous-monoïde de type fini de } G_{\xi} \}$$

(en fait, on prend le quotient par l'action multiplicative de \mathbb{R}_+^*).

Théorème ([Bieri-Neumann-Strebel], Théorème G (légèrement modifié)). On suppose G de présentation finie et l'on considère une variété fermée M telle que $\pi_1 M = G$; un morphisme $\xi : G \rightarrow \mathbb{R}$ est identifié à une classe de $H^1(M; \mathbb{R})$. Si ξ est non nulle, on la représente par une forme ω ; sur le revêtement \bar{M} défini par $\pi_1 \bar{M} = G'$, celle-ci se relève en une forme exacte $d\bar{f}$. Alors la partie $(\bar{f} \geq 0)$ de \bar{M} admet une unique composante non \bar{f} -bornée, notée $\bar{M}^+(\xi)$, et les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $\xi \in \Sigma(G) = \Sigma(\pi_1 M)$;
- b) Le morphisme $\pi_1(\bar{M}^+(\xi)) \rightarrow \pi_1 \bar{M}$ est surjectif.

On peut reprendre leur preuve mot à mot en remplaçant \bar{M} par \hat{M}_{ξ} et $\bar{M}^+(\xi)$ par $(\hat{f} \geq 0)$, ce qui compte étant l'abélianité des deux revêtements, d'où :

Corollaire. Si ξ est une classe dans $H^1(M; \mathbb{R}) - \{0\}$, il y a équivalence entre :

- a) $-\xi \in \Sigma(\pi_1 M)$;
- b) $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-) = 0$.

2.6. Du résultat précédent et du théorème B1 de [Bieri–Neumann–Strebel], on déduit la généralisation suivante du corollaire 4.

Corollaire. Soit ξ une classe non nulle quelconque dans $H^1(M; \mathbb{R})$; alors $\ker \xi$ est de type fini si et seulement si on a $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-) = 0$ pour toute forme η telle que $\ker \eta \supseteq \ker \xi$.

(Si ξ est rationnelle, une telle forme est un multiple $\lambda \xi$, donc l'homologie associée est celle de $\pm \xi$: on retrouve bien le corollaire 4.)

2.7. Commentaire sur un exemple de [Bieri–Neumann–Strebel].

Cet exemple (section 8) est celui d'un groupe G de présentation finie et tel que, dans $\text{Hom}(G; \mathbb{R})$, l'ensemble $\Sigma(G)$ est le complémentaire de deux demi-droites irrationnelles (par rapport au réseau $H_1(G; \mathbb{Z})/\text{torsion du dual}$) : on n'a donc plus la structure rationnelle polyédrale vraie si G est le groupe fondamental d'une variété de dimension trois. Or, en toutes dimensions ≥ 4 , on peut trouver une variété fermée M de groupe fondamental G ; donc, il existe une classe irrationnelle ξ telle que

- $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-) \neq 0$,
- $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi'}^-) = 0$ pour toute classe rationnelle ξ' assez proche.

Il ne paraît pas déraisonnable d'envisager un exemple semblable pour la propriété ($H_*(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-)$ et $H_*(\tilde{M}, \infty_{\xi}^+)$ sont nuls) ; ensuite, si l'on savait répondre positivement à la question 2 de l'Introduction, on pourrait peut-être trouver une classe ξ totale-ment irrationnelle telle que :

- a) ξ ne peut être représentée par une forme non singulière ;
- b) toute classe ξ' assez proche [et rationnelle ?] peut l'être.

3. PREUVE DU THEOREME 5. Elle résultera de la

Proposition. Soit M une variété fermée telle que la section nulle $M \subset T^*M$ puisse être disjointe d'elle-même par une isotopie symplectique (φ_t) ; on note λ la forme de Liouville et $\xi \in H^1(M; \mathbb{R})$ la classe de la forme fermée $(\varphi_1|_M)^*\lambda$. Alors on a $H_*(\tilde{M}, \infty_{\xi}^-) = 0$.

En effet, comme $[(\varphi_t^{-1}|_M)^*\lambda] = -\xi$, on a aussi $H_*(\tilde{M}, \infty_{\xi}^+) = 0$, donc le corollaire 2.4 implique que ξ est représentée par une forme non-singulière : donc M fibre sur le cercle.

Preuve de la proposition. D'après [Sikorav], on peut construire une variété fermée V^{2N} et une forme Ω non-singulière sur $M \times V$, avec les propriétés suivantes :

a) Il existe une application $p : V \rightarrow S^1$ à singularités de Morse ayant pour seule singularité un point d'indice N ; de plus, p induit un isomorphisme de $\pi_1 V$ sur $\pi_1 S^1 \approx \mathbb{Z}$;

b) La classe $[\Omega]$ est de la forme $\xi \oplus A\alpha$, où A est un nombre quelconque assez grand et $\alpha = [p^*d\theta]$.

Notant t le générateur de $\pi_1 V$ tel que $p_{\#}(t) = 1$, on pose

$$L = \mathbb{Z}[\pi_1 V] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}] .$$

$$L^- = L_{\alpha}^- = \mathbb{Z}[t][[t^{-1}]] (= L_{A\alpha}^-) .$$

Lemme 1. On a : $H_*(\tilde{V}; \infty_{\alpha}^-) = H_N = L^-$.

Démonstration (esquisse). Cela résulte de la suite (1.2) et du fait que, si c est une valeur régulière de l'application relevée \tilde{p} , alors $(\tilde{p} \leq c)$ s'obtient homotopiquement en attachant une N -cellule à $(\tilde{p} \leq c-1)$.

Remarque. Ce lemme est évidemment un cas particulier de la théorie du complexe de Novikov évoquée dans l'introduction.

Ensuite, on choisit A dans le groupe $\text{im } \xi$, et l'on fixe g_0 dans $\pi_1 V$ tel que $\xi(g_0) = A$. On pose $\Lambda = \mathbb{Z}[\pi_1 M], \Lambda^- = \Lambda_{\xi^-}$ et l'on regarde L (resp. L^-) comme un sous-anneau de Λ (resp. Λ^-) en identifiant t à g_0 .

Notons ensuite

$$B = \mathbb{Z}[\pi_1(M \times V)] \approx \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} L,$$

$$B^- = B_{[\Omega]}^- = \{ \sum n_{g,i} g \otimes t^i \mid \text{pour tout } c, \text{ il n'y a qu'un nombre fini de } (g,i) \text{ tels que } n_{g,i} \neq 0 \text{ et } \xi(g) + Ai \geq 0 \}.$$

On fait agir B à droite sur Λ en posant $g.(g' \otimes t^i) = g_0^i g g'$. Le fait que $\xi(g_0) = A$ dit que ceci s'étend en une action de B^- sur Λ^- .

Enfin, définissons les complexes de chaînes cellulaires

$$\begin{aligned} C_1 &= C_*^c(\tilde{M}), \quad \bar{C}_1 = C_1^c(\tilde{M}, \infty_{\xi^-}) \approx \Lambda^- \otimes_{\Lambda} C_1, \\ C_2 &= C_*^c(\tilde{V}), \quad \bar{C}_2 = C_2^c(\tilde{V}, \infty_{\alpha^-}) \approx L^- \otimes_L C_2, \\ C &= C_*^c(\tilde{M} \times \tilde{V}) \approx C_1 \otimes_{\mathbb{Z}} C_2, \\ \bar{C} &= C_*^c(\tilde{M} \times \tilde{V}, \infty_{[\Omega]}^-) \approx B^- \otimes_B C. \end{aligned}$$

Lemme 2. On a l'isomorphisme de Λ^- -complexes

$$\Lambda^- \otimes_B \bar{C} \approx \bar{C}_1 \otimes_L \bar{C}_2.$$

Démonstration. Le complexe de gauche est isomorphe à $\Lambda^- \otimes_B (C_1 \otimes_{\mathbb{Z}} C_2)$, et celui de droite à $(\Lambda^- \otimes_{\Lambda} C_1) \otimes_L C_2$; le lemme résulte alors de $B \approx \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} L$. \square

Fin de la preuve de la proposition. Comme Ω est non singulière, le complexe \bar{C} est acyclique; comme il est libre, $\Lambda^- \otimes_B \bar{C}$ est encore acyclique, soit $H(\bar{C}_1 \otimes_L \bar{C}_2) = 0$ d'après le lemme 2. Or, L^- est

évidemment un anneau euclidien donc principal ; d'autre part, $H(\bar{C}_2) \approx L^-$ d'après le lemme 1, donc la formule de Künneth implique $H(\bar{C}_1 \otimes_L \bar{C}_2) \approx H(\bar{C}_1)$, d'où $H(\bar{C}_1) = 0$. \square

4. CALCUL DE $H_1(\tilde{M}, \infty \xi^-)$.

4.1. Nous allons appliquer la méthode indiquée par la propriété 2. Comme nous nous limitons à H_1 , il suffit de se donner une suite exacte de Λ -modules libres

$$C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0, \quad \text{coker } d_1 \approx \mathbb{Z}.$$

Pour cela, nous nous donnons une présentation $\langle g_1, \dots, g_p | r_1, \dots, r_q \rangle$ de $\pi_1 M$ et lui associons la suite exacte de Lyndon évoquée dans l'introduction.

Soit maintenant ξ un élément non nul de $H^1(M; \mathbb{R})$, disons tel que $\xi(g_k) \neq 0$. On pose $\hat{\Lambda} = \Lambda_\xi^-$ et l'on considère la suite

$$\Lambda^q \xrightarrow{\hat{d}_2} \Lambda^p \xrightarrow{\hat{d}_1} \hat{\Lambda}$$

obtenue par extension des scalaires ; d'après la propriété 1, on a :

$$\begin{aligned} H_0(\tilde{M}, \infty \xi^-) &\approx \hat{\Lambda} / \text{im } \hat{d}_1, \\ H_1(\tilde{M}, \infty \xi^-) &\approx \ker \hat{d}_1 / \text{im } \hat{d}_2. \end{aligned}$$

D'abord, notons que $\hat{d}_1(e_k) = g_k - 1$ est inversible dans $\hat{\Lambda}$: si par exemple $\xi(g_k) > 0$, son inverse est $\sum_{\ell=1}^{\infty} g_k^{-\ell}$; donc \hat{d}_1 est surjective, ce qui donne une nouvelle preuve de la nullité de $H_0(\tilde{M}, \infty \xi^-)$.

Ensuite, on peut décrire le noyau de \hat{d}_1 :

$$(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_p) \in \ker \hat{d}_1 \Leftrightarrow \sum_1^p \hat{\lambda}_j (g_j - 1) = 0 \text{ d'après (4.2)}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\lambda}_k = \sum_{j \neq k} \hat{\lambda}_j (g_j - 1) (1 - g_k)^{-1}.$$

Notons $\hat{\pi}_k : \hat{\Lambda}^p \rightarrow \hat{\Lambda}^{p-1}$ la projection oubliant la k -ème coordonnée ; elle induit un isomorphisme de $\ker \hat{d}_1$ sur $\hat{\Lambda}^{p-1}$, d'où :

$$(4.4) \quad H_1(\tilde{M}, \infty \xi^-) \approx \hat{\Lambda}^{p-1} / \text{im}(\hat{\pi}_k \circ \hat{d}_2).$$

Remarquons que $\hat{\pi}_k \circ \hat{d}_2$ est représentée par la matrice A de la proposition 6, considérée comme ayant ses coefficients dans $\hat{\Lambda}$.

4.5. Preuve de la proposition 6. L'équivalence de a) et de b) résulte immédiatement de (4.4), et celle de b) et de c) est évidente. Reste à prouver c) \Leftrightarrow d).

c) \Leftrightarrow d). Soit \hat{X} vérifiant c). Notons K la valeur maximale de ξ sur les termes de A . Comme \hat{X} est à coefficients dans Λ_{ξ^-} , elle ne contient qu'un nombre fini de termes sur lesquels ξ prend une valeur $\geq -K$; soit $X \in M_{q, p-1}(\Lambda)$ la somme de ces termes, alors $(\hat{X} - X)A$ est clairement ξ -négative, donc XA a la forme voulue.

d) \Leftrightarrow c). Soient X et B vérifiant d). Alors $\text{id}_{p-1} + B$ est inversible dans $M_{p-1, p-1}(\Lambda_{\xi^-})$, son inverse étant $\sum_0^{\infty} (-1)^k B^k$. Donc, si l'on pose $\hat{X} = (\text{id}_{p-1} + B)^{-1} X$, on aura $\hat{X}A = \text{id}_{p-1}$. \square

Remarques. 1) La condition d) montre de nouveau que $\{\xi | H_1(\tilde{M}, \infty \xi^-) = 0\}$ est ouvert.

2) Comme l'anneau Λ_{ξ^-} admet un morphisme vers un corps, par

exemple $\sum n_g g \longmapsto \sum n_g t^{\xi(g)} \in \mathbb{Q}[t][[t^{-1}]]$, une application linéaire de $(\Lambda_{\xi^-})^q$ dans $(\Lambda_{\xi^-})^{p-1}$ ne peut être surjective que si $q \geq p-1$. Donc si $\pi_1 M$ admet une présentation de défaut $(= p-q) \geq 2$, $H_1(\tilde{M}, \infty_{\xi^-})$ n'est jamais nul : on retrouve ainsi un résultat de [Bieri-Neumann-Strebel] (théorème 7.2).

4.6. Comme tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'une variété fermée, le corollaire 4 et la proposition 6 entraînent immédiatement le

Corollaire. Soit G un groupe muni d'une présentation finie $\langle g_1, \dots, g_p \mid r_1, \dots, r_q \rangle$; on pose $\Lambda = \mathbb{Z}[G]$ et l'on note $D = [\partial r_i / \partial g_j]$ la matrice associée. Soit ξ un morphisme de G dans \mathbb{Z} ; on suppose $\xi(g_k) \neq 0$ et l'on note A la matrice obtenue en supprimant la k -ème colonne de D . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) $\ker \xi$ est de type fini ;
- b) A définit des applications surjectives de $(\Lambda_{\xi^-})^q$ dans $(\Lambda_{\xi^-})^{p-1}$ et de $(\Lambda_{\xi^+})^q$ dans $(\Lambda_{\xi^+})^{p-1}$;
- c) il existe X et Y dans $M_{p-1, p-1}(\Lambda)$ telles que

$$XA = \text{id}_{p-1} + (\text{matrice } \xi\text{-négative}) ,$$

$$YA = \text{id}_{p-1} + (\text{matrice } \xi\text{-positive}) .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [Arnoux–Levitt] P. ARNOUX et G. LEVITT, Sur l'unique ergodicité des 1-formes fermées singulières, *Invent. Math.* 84 (1986), 141–156.
- [Bieri–Neumann–Strebel] R. BIERI, W.D. NEUMANN and R. STREBEL, A geometric invariant for discrete groups, prépublication, Univ. de Francfort, Maryland et Heidelberg, 1986.
- [Browder–Levine] W. BROWDER and J. LEVINE, Fiberings manifolds over the circle, *Comment. Math. Helv.* 40 (1965), 95–100.
- [Dwyer–Fried] W.G. DWYER and D. FRIED, Homology of free abelian covers, Preprint (1986).
- [Farber] M.Sh. FARBER, Exactness of the Novikov inequalities, *Funct. Anal. and its Appl.* 19 (1985), 40–49.
- [Farrell] F.T. FARRELL, The obstruction to fibering a manifold over the circle, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967), 737–740 ; et aussi *Actes Cong. Int. Math. Nice (1970)*, vol.2, 69–72, Gauthier–Villars, Paris 1971.
- [Fathi–Laudenbach–Poénaru] A. FATHI, F. LAUDENBACH et V. POENARU, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque 66–67, Soc. Math. France, Paris 1979.
- [Fox] R.H. FOX, Free differential calculus I, *Ann. of Math.* 57 (1953), 547–560 ; II, *Ann. of Math.* 59 (1954), 196–210.
- [Geoghegan–Mihalik] R. GEOGEGHAN and M.ML. MIHALIK, Free abelian cohomology of groups and ends of abelian covers, *J. Pure Appl. Alg.* 36 (1985), 123–137.
- [Godement] R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris 1958.
- [Levitt] G. LEVITT, 1-formes fermées singulières et groupe fondamental, à paraître aux *Invent. Math.* en 1987.

- [Lyndon] R.C. LYNDON, Cohomology of groups, Ann. of Math. 52 (1950), 650–665.
- [Massey] W.S. MASSEY, Homology and cohomology theory, Marcel Dekker, New–York 1978.
- [Novikov] S.P. NOVIKOV, Multivalued functions and functionals ; an analogue of the Morse theory, Soviet Math. Dokl.24 (1981), 222–226.
- [Siebemann] L.C. SIEBEMANN, A total Whitehead obstruction to fibering over the circle, Comment. Math. Helv. 45 (1970), 1–48.
- [Sikorav] J.–C. SIKORAV, Un problème de disjonction par isotopie symplectique dans un fibré cotangent, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4e série, t.19 (1986).
- [Stallings] J. STALLINGS, On fibering certain 3–manifolds, Topology of 3–manifolds, Prentice–Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1962, p.95–100.
- [Switzer] R.M. SWITZER, Algebraic Topology – Homotopy and Homology, Grundlehren Math. Wiss. 212, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.
- [Thurston] W.P. THURSTON, A norm of the homology of 3–manifolds, Memoirs Amer. Math. Soc. 339 (1986) (appendice).
- [Tischler] D. TISCHLER, On fibering certain foliated manifolds over S^1 , Topology 9 (1970), 153–154.