

THÈSES D'ORSAY

LEI TAN

Accouplements des polynômes complexes

Thèses d'Orsay, 1987

http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1987__0222__P0_0

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

ORSAY
n° d'ordre :

6388)

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

le titre de DOCTEUR en MATHEMATIQUES

PAR

TAN Lei

SUJET : Accouplements des polynômes complexes

soutenu le 25 septembre 1987 devant la Commission d'examen

MM. F. LAUDENBACH..... Président

A. DOUADY

J.H. HUBBARD

M. REES

J.-C. YOCCOZ

English title : Matings of complex polynomials.

Abstract.

Let f and g be two monic quadratic complex polynomials. Take two copies of the complex plane \mathbb{C} and compactify them by adding a circle at the infinity, then sew up these two circles to make a topological sphere S^2 . Get f and g mapping on each hemisphere of S^2 . We obtain a mapping F from S^2 to its self. It's a branched covering and we call it a topological mating of f and g .

The union of the orbits by F of the critical points of F is defined to be the postcritical set of F . Thurston defined an equivalence between postcritically finite branched coverings of S^2 . Suppose that f and g are postcritically finite. We say that f and g can be mated if F (modified in some cases) is equivalent to a rational function. If f and g can be mated, then we can obtain the sphere S^2 by sewing up the boundaries of the filled in Julia sets of f and g .

Quadratic polynomials with bounded postcritical set are parameterized by the Mandelbrot set M . Let \bar{W} be the closure of the principal component of the interior of M . If the parameters of f and g are in conjugate components of $M - \bar{W}$, then f and g cannot be mated. Douady and Hubbard conjectured that they can be mated in all other cases. We prove this conjecture in this thesis by using a criterion of Thurston, and by supporting on the works of Silvio Levy and of Mary Rees.

This result can be generalized to polynomials of greater degree but having only one critical point.

Key-words: complex polynomial, rational function, iteration, Julia set, Mandelbrot set, lamination, mating, analytic dynamical system

Remerciements

Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à Adrien DOUADY, mon directeur de thèse, qui m'a appris à faire la recherche dès le début, et m'a encouragé et soutenu tout au long de ce travail. Je suis reconnaissante de l'attention qu'il a pris, pour m'écouter et m'aider, à tout moment où j'ai eu une difficulté, même si parfois celle-ci ne concernait pas seulement du travail mathématique. J'apprécie surtout son sens de humour qui a fait une ambiance de recherche très chaleureuse et très agréable. C'est aussi grâce à lui que j'ai pu pénétrer dans le monde des mathématiciens du système dynamique holomorphe, et rencontrer, par exemple, John H. Hubbard et Mary Rees.

Je exprime également mes remerciements sincères

-à François LAUDENBACH, pour son intérêt à ma thèse et l'honneur qu'il m'a fait de présider le Jury;

-à John Hamal HUBBARD, qui a montré un intérêt constant à mes travaux, et a accepté de venir de Bonn pour faire partie du Jury, grâce à lui, j'ai pu faire un voyage inoubliable à l'Université de Cornell;

-à Mary REES, dont le travail m'a sans doute servi comme un point clé pour terminer cette thèse, pour qu'elle a accepté avec gentillesse d'être rapporteur de cette thèse, et pour son hospitalité sympathique, son encouragement et les discussions favorables pendant la période que je travaillais à Liverpool;

-à Jean-Christophe YOCCOZ, pour avoir accepté d'être membre du Jury;

-à Pierrette SENTENAC et Pierre LAVAUERS, qui ont consacré beaucoup de temps à la lecture d'une première version, leurs conseils m'ont été très remarquables pour améliorer la rédaction;

-à tous ceux qui ont participé à la manifestation à Ithaca pour mon refus de visa, leur sens de justice m'a profondément impressionné;

-aux personnels du département de mathématique de l'Université de Paris-Sud et du centre mathématique à l'Ecole Normale Supérieure, leurs travaux m'ont simplifié la vie;

-aux étudiants chinois à Orsay, et de plus Anne DEJEAN et Françoise EMERY, leur amitié m'a été reconnaissable et m'a enrichie la vie.

Chapitre 1. Introduction

1.1. Introduction

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme monique de degré $d > 1$. Au voisinage de ∞ , ce polynôme est analytiquement conjugué à $z \rightarrow z^d$. On compactifie \mathbb{C} à $\tilde{\mathbb{C}}$ en ajoutant un cercle à l'infini:

$$\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{ \infty \cdot e^{2i\pi\theta} \mid \theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \}$$

et on prolonge f en $\tilde{f} : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ en posant

$$\tilde{f}(\infty \cdot e^{2i\pi\theta}) = \infty \cdot e^{2i\pi d\theta},$$

on obtient ainsi une application continue \tilde{f} , qui est aussi un revêtement ramifié de degré d de $\tilde{\mathbb{C}}$ sur $\tilde{\mathbb{C}}$ avec les mêmes points de ramification que f . On prend maintenant deux polynômes moniques f, g de degré d , et on les "accouple" de façon topologique: on identifie S^2 à

$$\tilde{\mathbb{C}} \times \{+, -\} / (\infty \cdot e^{2i\pi\theta}, +) \sim (\infty \cdot e^{-2i\pi\theta}, -)$$

et l'équateur E à \mathbb{T} par

$$(\infty \cdot e^{2i\pi\theta}, +) \longrightarrow \theta$$

et on définit $f \perp g : S^2 \rightarrow S^2$ par

$$f \perp g |_{\tilde{\mathbb{C}} \times \{+\}} = \tilde{f} \quad \text{et} \quad f \perp g |_{\tilde{\mathbb{C}} \times \{-\}} = \tilde{g}$$

Comme $\tilde{f}(\theta) = -\tilde{g}(-\theta)$ pour tout $\theta \in E$, les actions de f et g sur E sont compatibles. Donc $f \perp g$ est bien défini. Comme $f \perp g|_E : \theta \rightarrow d\theta$ est un revêtement non ramifié de E , l'application $f \perp g$ est un revêtement ramifié de degré d de S^2 sur S^2 avec les points de ramifications dans $S^2 - E$.

Soit f un revêtement ramifié de S^2 sur S^2 (resp. un polynôme de \mathbb{C} sur \mathbb{C}). On note f^n la n -ième itérée $f \circ f \circ \dots \circ f$ de f . On note P_f l'ensemble postcritique de f , réunion des orbites directes par f des valeurs critiques de f dans S^2 (resp. des valeurs critiques de f dans \mathbb{C}). Alors $P_{f \perp g} = P_f \cup P_g$ (réunion disjointe).

Thurston a défini une relation d'équivalence dans l'ensemble des revêtements ramifiés de S^2 sur S^2 à ensemble postcritique fini. Les fractions rationnelles sont en particulier des revêtements ramifiés de S^2 sur S^2 , de plus, elles sont analytiques pour la structure complexe standard sur S^2 . Thurston a donné un critère (une condition nécessaire et suffisante) pour qu'un revêtement ramifié soit équivalent (au sens de Thurston) à une fraction rationnelle ([DH3] et [Th]).

Nous dirons que deux polynômes f et g sont strictement accouplables si $f \perp g$ est équivalent (au sens de Thurston) à une fraction rationnelle. On donnera au chapitre 6 une définition d'accouplements dégénérés.

On étudie ici particulièrement les conditions d'accouplements des polynômes ayant un seul point critique (ce qui est le cas en degré deux). Le critère de Thurston est souvent difficile à vérifier. Le but de ce travail est de démontrer une conjecture de Douady et Hubbard d'un critère simple et

direct pour que deux polynômes de même degré ayant chacun un seul point critique soient accouplables (strictement ou de façon dégénérée).

Tout polynôme monique de degré d ayant un seul point critique est conjugué par une translation à un polynôme de la forme:

$$f_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \rightarrow z^d + c .$$

L'unique point critique de f_c est 0 et la valeur critique est c . Le degré de ramification de f_c en 0 est d . On pose $P_c = P_{f_c}$.

On note M_d l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'orbite de 0 par f_c est bornée (l'ensemble M_2 est connu comme l'ensemble de Mandelbrot), et \mathcal{D} l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels P_c est fini. Alors $\mathcal{D} \subset M_d$, l'ensemble M_d est compact, plein, connexe, et symétrique par rapport à l'axe réel (Figure 1). On note W_0 la composante de \tilde{M}_d contenant 0 . Les fermetures des composantes connexes de $M_d - \bar{W}_0$ sont deux à deux conjuguées sauf éventuellement une (quand d est pair) qui intersecte l'axe réel, qui est conjuguée à elle-même.

Soient f_c et $f_{c'}$ deux polynômes à ensembles postcritiques finis. Pour $c \in \mathcal{D} \cap W_0$ (ceci entraîne $c=0$ d'après le chapitre 4), les deux polynômes sont toujours accouplables. En effet $f_c \perp f_{c'}$ est équivalent au sens de Thurston à $f_{c'}$. D'autre part, si c et c' sont dans des composantes conjuguées de $M_d - \bar{W}_0$, on montre facilement que f_c et $f_{c'}$ sont non accouplables ([Le] et chapitre 7). En degré 2, Douady et Hubbard ont conjecturé la réciproque ([D1]).

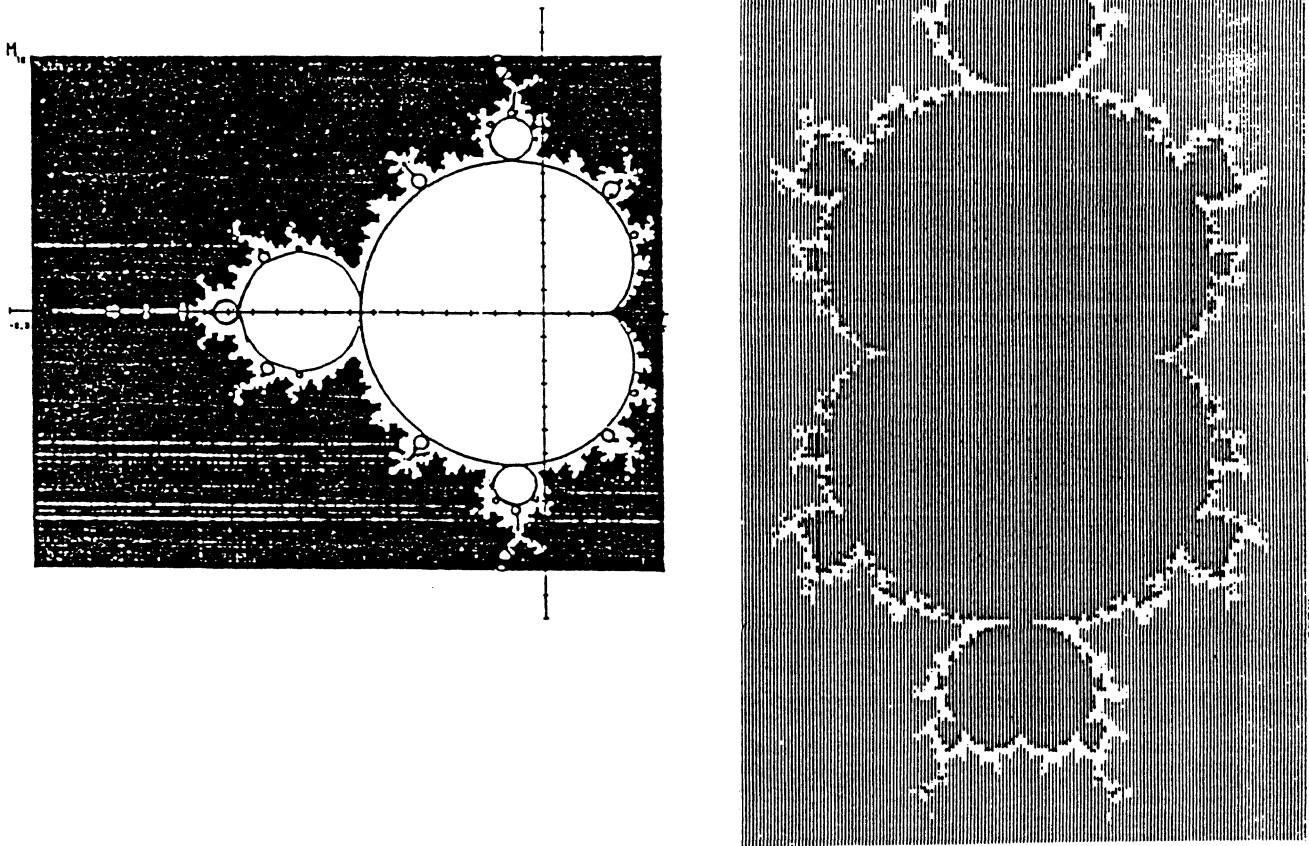


Figure 1.1 M_2 (l'ensemble de Mandelbrot) et M_3

En utilisant le critère de Thurston, S. Levy a fait une première réduction de cette conjecture ([Le]). Nous avons obtenu ensuite des résultats partiels ([Ta]). Une démonstration complète (présentée dans le cas de degré deux) a été récemment donnée par M. Rees ([R1]), mais celle-ci est un peu longue. En combinant ce que nous avons obtenu avec des idées extraites de M. Rees, nous présentons au chapitre 7 une démonstration relativement courte et valable pour un degré d quelconque. Notre résultat principal est le suivant:

Théorème 1. Soient $f_c : z \rightarrow z^d + c$, $f_{c'} : z \rightarrow z^d + c'$ ($d \geq 2$) à ensembles postcritiques finis. Alors f_c et $f_{c'}$ sont accouplables (strictement ou de

façon dégénérée) si et seulement si c et c' ne sont pas dans des composantes conjuguées de $M_d - \bar{W}_0$.

1.2. Préliminaires

On utilisera le théorème d'uniformisation de Riemann: toute surface de Riemann U (i.e. variété \mathbb{C} -analytique de dimension 1 sur \mathbb{C}) simplement connexe est isomorphe à D , \mathbb{C} ou $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, où D est le disque unité ouvert. Un tel isomorphisme est appelé une représentation conforme de la surface U .

On extrait ici quelques notations et résultats élémentaires.

Soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme de degré $d > 1$. On appelle ensemble de Julia rempli de f , qu'on note K_f , l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $f^n(z) \not\rightarrow \infty$, et on appelle ensemble de Julia de f , qu'on note J_f , la frontière de K_f .

Proposition 1.1 (DH21.III). Soit f un polynôme monique de degré d . On suppose K_f connexe. Alors il existe une représentation conforme de Riemann

$$\Phi: \mathbb{C} - K_f \xrightarrow{\approx} \mathbb{C} - \bar{D},$$

tangente à l'identité en ∞ (i.e. $\Phi(z)/z \rightarrow 1$ quand $|z| \rightarrow \infty$), qui conjugue f à $z \rightarrow z^d$. Si de plus K_f est localement connexe, alors

$$\psi_f = \Phi^{-1}: \mathbb{C} - \bar{D} \longrightarrow \mathbb{C} - K_f$$

admet un prolongement continu de $\mathbb{C} - D$ à $\mathbb{C} - \hat{K}_f$; l'application

$$\gamma_f: \theta \rightarrow \gamma_f(\theta) = \psi_f(e^{2i\pi\theta})$$

de $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sur ∂K_f vérifie

$$\gamma_f(d\theta) = f(\gamma_f(\theta))$$

(formule de semi-conjugaison).

Si K_f est connexe et localement connexe, on peut définir d'après cette proposition les notations suivantes (en négligeant l'indice f lorsque ce n'est pas ambigu):

a) le potentiel $G_f(z) = \text{Log} |\psi^{-1}(z)|$ pour $z \in \mathbb{C} - \hat{K}_f$;

b) les équipotentiels

$$N_f(s) = \{\psi(e^{s+2i\pi\theta}) \mid \theta \in \mathbb{T}\} = \{z \mid G_f(z) = s\};$$

c) les rayons externes $R_f(\theta) = \{\psi(e^{s+2i\pi\theta}) \mid 0 \leq s < \infty\}$ avec les points d'aboutissement $\gamma_f(\theta)$;

d) $\text{Arg}(z)$ l'ensemble des arguments externes de $z \in \mathbb{C} - \hat{K}_f$, i.e. des θ tels que $z \in R_f(\theta)$.

Si $z \in \mathbb{C} - K_f$, l'ensemble $\text{Arg}(z)$ admet un unique élément; si $z \in J_f$, cet ensemble peut avoir plusieurs éléments.

Soient $\Sigma = \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère riemannienne et $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ une fonction holomorphe. L'orbite d'un point $z \in \Sigma$ par f , notée $Or(z)$, est l'ensemble des points $f^n(z)$, $n \geq 0$. Un point périodique pour f est un point x de \mathbb{C} tel qu'il existe un entier $n > 0$ pour lequel $f^n(x) = x$. Le plus petit n ayant cette propriété est la période k de x . Le cycle de x est alors $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$, où $x_i = f^i(x)$, et le multiplicateur de ce cycle est $\rho = \prod_i f'(x_i)$. On dit que x est un point périodique attractif (resp.

répulsif, resp. indifférent) si $|\rho| < 1$ (resp. $|\rho| > 1$, resp. $|\rho| = 1$). Un point périodique est dit superattractif si $\rho = 0$; cela équivaut à l'existence d'un point critique dans le cycle. On dit que x est un point prépériodique s'il existe un entier non négatif j tel que $f^j(x)$ soit périodique. Un tel j minimal est appelé prépériode de x . Si x est prépériodique mais non périodique, on dit que x est strictement prépériodique. Dans ce cas là, la prépériode de x est strictement positive.

Par exemple, pour $f = f_i : z \rightarrow z^2 + i$, on a

$$0 \xrightarrow{f} i \xrightarrow{f} i-1 \xrightarrow{f} -i \xrightarrow{f} i-1,$$

donc 0 est prépériodique de prépériode 2 et $\{i-1, -i\}$ est un cycle périodique répulsif, et $P_f = \{i, i-1, -i\}$. Pour $g = f_{-1} : z \rightarrow z^2 - 1$, on a

$$0 \xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{g} 0,$$

donc $P_g = \{0, -1\}$ et le cycle $\{0, -1\}$ est superattractif.

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On note $\tilde{d} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, $t \rightarrow dt$ la multiplication par d . Supposons que t est prépériodique pour \tilde{d} , i.e. il existe j et k tels que $d^{j+k}t = d^k t$. Alors pour j, k minimaux t est de la forme $p/d^j(d^k - 1)$. Le dénominateur de t est premier à d si et seulement si $j=0$, i.e. si et seulement si t est périodique.

Lemme 1.2. Dans $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, soit A un fermé tel que \tilde{d} induise une injection continue q de A dans A . Alors A est fini, et les éléments de A sont des rationnels à dénominateur premier à d . En particulier q est

une bijection de A sur A .

Démonstration. Ce lemme est démontré dans [D1] pour $d=2$ et q bijective. La démonstration s'étend au cas de d quelconque et q injective. Comme A et $q(A)$ sont compacts, $q^{-1}: q(A) \rightarrow A$ est uniformément continue. Il existe donc $\alpha (< \frac{1}{2})$ tel que $|t-t'| < \alpha$ entraîne

$$|q^{-1}(t) - q^{-1}(t')| < 1/(2d),$$

ceci entraîne en fait $|q^{-1}(t) - q^{-1}(t')| < \alpha/d$: soient

$$q^{-1}(t) = t/d + i/d, \quad q^{-1}(t') = t'/d + j/d,$$

alors

$$d \cdot |q^{-1}(t) - q^{-1}(t')| = |t - t' + i - j| < \frac{1}{2},$$

mais

$$|t - t'| < \alpha < \frac{1}{2},$$

on a donc $i=j$ et $|q^{-1}(t) - q^{-1}(t')| = |t - t'|/d < \alpha/d$.

On peut recouvrir $q(A)$ par des ensembles ouverts V_1, \dots, V_k de diamètre $< \alpha$. Alors $q^{-n}(V_i)$ est de diamètre $< \alpha/d^n$, et par suite $q(A)$ a au plus k éléments. Donc A est fini, q est bijective et chaque élément de A est périodique pour q , c'est-à-dire à dénominateur premier à d .

Cqfd.

Proposition 1.3. Soit f polynôme de degré d tel que K_f soit connexe et localement connexe.

Pour $z \in J_f$ périodique, l'ensemble $\text{Arg}(z)$ est constitué d'un nombre fini de rationnels à dénominateur premier à d .

Pour $z \in J_f$ strictement prépériodique, l'ensemble $\text{Arg}(z)$ est constitué d'un nombre fini de rationnels à dénominateur non premier à d .

Et comme complément, pour z prépériodique, chaque argument de z est de la même prépériode pour la multiplication par d que la prépériode de z pour f .

Preuve. Supposons d'abord $y \in J_f$ et le degré de ramification de f en y est d' (qui est 1 si y n'est pas un point critique). Alors f est conjugué à $z \rightarrow z^d$ au voisinage de y . Comme l'image par f d'un rayon externe est encors un rayon externe, l'application f induit un revêtement de degré d' sur les rayons externes de y . Par la formule de semi-conjugaison dans la proposition 1.1, l'application \tilde{d} induit un revêtement de degré d' sur $\text{Arg}(y)$.

D'après Fatou et Julia ([D1]), l'ensemble de Julia J_f est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs. En particulier, pour $z \in J_f$ périodique, le cycle $\{z_0 = z, z_1, \dots, z_{k-1}\}$ de z n'est pas superattractif donc ne contient pas de point critique. Ainsi \tilde{d} induit une application injective de $A = \bigcup_i \text{Arg}(z_i)$ à A lui-même. Par le lemme 1.2, l'ensemble A est fini, les éléments de A sont à dénominateur premier à d et $\# \text{Arg}(z_i) = \# \text{Arg}(z_j)$ pour tous $i, j: 0 \leq i, j \leq k-1$.

Pour $z \in J_f$ strictement prépériodique, z tombe en un temps fini dans un cycle périodique $\{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$ avec $\# \text{Arg}(z_i) = n$ fini. Alors $\# \text{Arg}(z)$ est un multiple de n et tout élément de $\text{Arg}(z)$ est strictement prépériodique pour \tilde{d} donc est à dénominateur non premier à d .

Café.

Proposition 1.4 (IDH2].III). Pour $f=f_c : z \rightarrow z^d + c$, l'ensemble de Julia rempli K_f est compact et plein (i.e. $\mathbb{C}-K_f$ est connexe). De plus

a) si $0 \in K_f$, l'ensemble K_f est connexe;

b) si $0 \notin K_f$, l'ensemble K_f est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

L'ensemble postcritique P_f de f est l'orbite de $c=f(0)$. Il est fini si et seulement si 0 est prépériodique.

Proposition 1.5 (IDH2].III). Supposons P_f fini.

a) Si 0 est périodique, alors $0 \in \tilde{K}_f$. Pour tout $a \in P_f$, il existe un disque ouvert $\Delta_a \subset \tilde{K}_f$ contenant a vérifiant $f(\bar{\Delta}_a) \subset \Delta_{f(a)}$; on pose

$$A_f = \bigcup_{a \in P_f} \Delta_a.$$

b) Si 0 est strictement prépériodique, alors $0 \in \partial K_f = K_f$; on pose $A_f = P_f$.

En tout cas pour R assez grand tel que $f^{-1}(\bar{D}_R) \subset D_R$ (où D_R est le disque ouvert centré en 0 de rayon R), il existe une métrique infinitésimale μ_f (métrique Riemannienne) sur $D_R - A_f$ pour laquelle f est fortement dilatant ($\|Tf\| > 1$); elle induit une métrique qu'on note aussi μ_f sur $D_R - \tilde{A}_f$ qui définit la même topologie que la topologie ordinaire et qui vérifie

$$\exists \tau_f > 1, \forall x \in D_R - \tilde{A}_f, \exists V \text{ voisinage de } x, \forall y \in V, \\ \mu_f(f(x), f(y)) \geq \tau_f \mu_f(x, y).$$

Proposition 1.6 (IDH2]. Si P_f est fini, alors K_f est connexe et localement connexe, et toute composante connexe de \tilde{K}_f est prépériodique pour f .

Chapitre 2. Résultats de Thurston et de Levy

2.1. Critère de Thurston

Soit F un revêtement ramifié de S^2 sur S^2 à ensemble postcritique fini. Soit X un espace topologique compact; on dit que deux applications

$$\zeta : X \longrightarrow S^2, \quad \zeta' : X \longrightarrow S^2$$

sont homotopes (rel P_F) si il existe (ζ_s) une homotopie vérifiant $\zeta_0 = \zeta$, $\zeta_1 = \zeta'$, et $\zeta_s^{-1}(P_F)$ indépendant de s . On dit que deux fermés Y, Y' de S^2 sont homotopes (rel P_F) s'il existe un compact X et deux équivalences d'homotopie $\zeta : X \rightarrow Y$ et $\zeta' : X \rightarrow Y'$ telles que ζ et ζ' soient homotopes (rel P_F).

Dans le texte suivant, sans qu'on le précise chaque fois, toutes les homotopies concernées seront des homotopies (rel P_F).

Il existe une fonction minimale

$$\nu : S^2 \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

telle que $\nu = 1$ sur $S^2 - P_F$, et $\nu(x)$ pour $x \in P_F$ soit un multiple de $\nu(y) \cdot \deg_y F$ pour tout $y \in F^{-1}(x)$. Par conséquent, pour un ensemble de points x_1, \dots, x_n qui forme un cycle périodique de F (i.e. $F(x_i) = x_{i+1}$ et $F(x_n) = x_1$), l'entier $\nu(x_i)$ est constant pour tout i , de plus, s'il existe un point critique dans ce cycle, $\nu(x_i) = \infty$ pour tout i . On dit que l'orbifold $O_F = (S^2, \nu)$ de F est hyperbolique si sa caractéristique d'Euler

$$\chi(O_F) = 2 - \sum_{x \in P_F} (1 - 1/\nu(x))$$

vérifie $\chi(O_F) < 0$. Par exemple, pour $g : z \rightarrow z^2 - 1$ et $F = g \circ g$ l'ensemble postcritique P_F a quatre points et $\nu(x) = \infty$ pour tout $x \in P_F$, et $\chi(O_F) = -2 < 0$.

Définition 2.1 (équivalence au sens de Thurston). Soient F et G deux revêtements ramifiés de degré d de S^2 sur S^2 à ensemble postcritique fini. On dit que F et G sont équivalents (au sens de Thurston) s'il existe deux homéomorphismes θ et θ' de S^2 sur S^2 tels que: $\theta(P_F) = \theta'(P_F) = P_G$, que θ et θ' soient isotopes (rel P_G), et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (S^2, P_F) & \xrightarrow{F} & (S^2, P_F) \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta' \\ (S^2, P_G) & \xrightarrow{G} & (S^2, P_G) \end{array}$$

commute.

En particulier si F et G sont topologiquement conjugués, (i.e. $\exists \theta$ homéomorphisme de S^2 avec $\theta \circ F \circ \theta^{-1} = G$), alors F et G sont équivalents au sens de Thurston.

Comme précédemment, on s'intéresse ici si un accouplement topologique, étant un revêtement ramifié, est équivalent à une fraction rationnelle. Avec la théorie de l'espace de Teichmüller, Thurston a ramené ce problème d'équivalence à une fraction rationnelle à un objet combinatoire et algébrique: la valeur propre dominante d'une matrice positive qu'on associe à une multicourbe F -invariante définie ci-dessous.

On dit qu'une matrice $A=(a_{ij})$ est positive si $a_{ij} \geq 0$ pour tout i et j . En vertu d'une théorie classique ([G]), pour toute matrice positive A il existe une valeur propre $\lambda(A)$ de A dans \mathbb{R}_+ qu'on appelle valeur propre dominante de A telle que toute valeur propre μ de A vérifie $|\mu| \leq \lambda$.

Une courbe fermée simple $\gamma \subset S^2 - P_F$ est dite non périphérique si chacune des deux composantes de $S^2 - \gamma$ contient au moins deux points postcritiques. Un système des courbes $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ est appelé une multicourbe si les γ_i sont non périphériques, deux à deux disjointes et deux à deux non homotopes (rel P_F). A chaque multicourbe Γ , on associe une matrice positive

$$F_\Gamma = (f_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

de la façon suivante: si aucune composante de $F^{-1}(\gamma_j)$ n'est homotope à γ_i (rel P_F), on pose $f_{ij} = 0$; s'il existe k composantes $\delta_{1j}, \dots, \delta_{kj}$ de $F^{-1}(\gamma_j)$ homotopes à γ_i (rel P_F), on pose $f_{ij} = \sum_{p=1}^k (1/d_p)$, où d_p est le degré de $F|_{\delta_{pj}} : \delta_{pj} \rightarrow \gamma_j$. Une multicourbe Γ est dite F-invariante si pour $\gamma_j \in \Gamma$, chaque composante de $F^{-1}(\gamma_j)$ est soit périphérique, soit homotope à une courbe dans Γ (rel P_F). On peut alors énoncer le critère suivant:

Critère de Thurston. Un revêtement ramifié F à P_F fini et à orbifold hyperbolique est équivalent à une fraction rationnelle si et seulement s'il n'existe pas de multicourbe F-invariante Γ telle que $\lambda(F_\Gamma) \geq 1$.

Pour une démonstration, voir [DH3] ou [Th]. Ce critère efficace,

est pourtant souvent difficile à vérifier ([DH3]). Un étudiant de W. Thurston, Silvio Levy, a fait une première simplification de ce critère dans sa thèse de Ph. D. ([Le]). Le théorème de Levy utilise comme critère des multicourbes composées de courbes sur lesquelles le degré de F est 1 (ce qu'on appellera des cycles de Levy). Son résultat s'applique tout particulièrement aux revêtements ramifiés de degré deux, mais nous montrons avec une démonstration de Mary Rees et John H. Hubbard qu'il se prolonge aux revêtements ramifiés de degré quelconque ayant seulement deux valeurs critiques.

Remarque 2.2. Si une multicourbe F -invariante $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ contient une sous-multicourbe F -invariante $\Gamma' = \{\gamma_{s+1}, \dots, \gamma_n\}$, $s \geq 1$, autrement dit pour chaque $\gamma_i \in \Gamma'$, aucune composante de $F^{-1}(\gamma_i)$ n'est homotope à une courbe de $\Gamma - \Gamma'$, alors la matrice F_Γ est sous la forme

$$F_\Gamma = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & F_{\Gamma'} \end{pmatrix}$$

où $F_{\Gamma'}$ est la matrice associée à Γ' , A est la matrice $F_{\Gamma - \Gamma'}$, et 0 est la matrice nulle de $s \times (n-s)$. Les valeurs propres de F_Γ sont la réunion des valeurs propres de $F_{\Gamma - \Gamma'}$ et de $F_{\Gamma'}$, et

$$\lambda(F_\Gamma) = \max\{\lambda(F_{\Gamma - \Gamma'}), \lambda(F_{\Gamma'})\}.$$

2.2. Critère de Levy

Soit F un revêtement ramifié de degré d ayant seulement deux valeurs critiques (ce qui est le cas en degré deux). Alors F a exactement deux points critiques distincts, et le degré de ramification de F en chacun de ces points est d .

On dit qu'une multicourbe $\hat{\Gamma} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ est un cycle de Levy si aucune des γ_j ne sépare les deux valeurs critiques, et si les $(\gamma_j)_{1 \leq j \leq n}$ forment un cycle périodique à homotopie près, c'est-à-dire que pour chaque j , il existe une composante δ_j de $F^{-1}(\gamma_j)$ qui est homotope à γ_{j-1} (ou à γ_n si $j=1$) (rel P_F). On voit bien que sous ces conditions, l'application $F|_{\delta_j} : \delta_j \rightarrow \gamma_j$ est un homéomorphisme de degré 1 pour tout j . Dans $F\hat{\Gamma} = (\hat{f}_{ij})$, on a alors $\hat{f}_{i,i+1} \geq 1$, $0 \leq i < s$ et $\hat{f}_{s1} \geq 1$.

Propriété 2.3. Si une multicourbe F -invariante $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ contient un cycle de Levy $\hat{\Gamma} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$, alors $\lambda(F_\Gamma) \geq 1$.

Ceci résulte du théorème suivant ([G]): si deux matrices carrées $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ vérifient $b_{ij} \geq a_{ij} \geq 0$ pour tous i et j , alors $\lambda(B) \geq \lambda(A)$. Dans notre cas, on prend $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ avec $a_{i,i+1} = 1$, $0 \leq i < s$, $a_{s1} = 1$ et $a_{ij} = 0$ pour tous autres i et j , alors $\lambda(A) = 1$ et $b_{ij} \geq a_{ij}$ pour tous i et j , donc $\lambda(F_\Gamma) \geq \lambda(A) = 1$.

L'énoncé du théorème suivant est une version plus générale du théorème 4.1 de la thèse de Levy ([Le]), mais la démonstration est due Mary Rees et John H. Hubbard.

Théorème 2. Soit F un revêtement ramifié de degré d ayant seulement deux valeurs critiques et à ensemble postcritique P_F fini. Alors il existe une multicourbe F -invariante Γ avec $\lambda(F_\Gamma) \geq 1$ si et seulement s'il existe un cycle de Levy $\hat{\Gamma}$ pour F .

Démonstration. \Leftarrow . Quitte à modifier F dans sa classe de Thurston, on peut supposer le cycle de Levy invariant. Alors les composantes des

$F^{-n}(\gamma)$, $\gamma \in \hat{\Gamma}$ sont disjointes. Elles forment donc un nombre fini de classes d'homotopie dans $S^2 - P_F$. Les classes qui sont non périphériques forment une multicourbe F -invariante Γ contenant $\hat{\Gamma}$. On a donc $\lambda(F_\Gamma) \geq 1$ par la propriété 2.3.

\Rightarrow . Quitte à se restreindre à une sous-multicourbe F -invariante on peut supposer que la multicourbe $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ avec $\lambda(F_\Gamma) \geq 1$ dans l'hypothèse du théorème est minimale, c'est-à-dire qu'elle vérifie que chaque $\gamma \in \Gamma$ figure dans $F^{-1}(\gamma')$ pour une certaine $\gamma' \in \Gamma$.

Pour Γ' une sous multicourbe de Γ , on note $F^{-1}\Gamma'$ l'ensemble des courbes de Γ représentant les classes d'isotopie (rel P_F) des composantes connexes de $\bigcup_{\gamma' \in \Gamma'} F^{-1}(\gamma')$. Ainsi, dire que Γ est minimale est équivalent à dire $F^{-1}\Gamma = \Gamma$.

Posons $A = F_\Gamma$, et notons \mathfrak{K} l'espace linéaire à base $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Pour $\gamma = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \dots + a_n\gamma_n \in \mathfrak{K}$, on définit

$$\|\gamma\| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

Décomposons Γ en $\Gamma' \cup \Gamma''$ avec

$$\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma \mid \|A^n \gamma\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty\}.$$

On a les propriétés suivantes:

1) $F^{-1}\Gamma' \subset \Gamma'$ donc $\Gamma'' \subset F^{-1}\Gamma''$.

Preuve. Soit $\gamma \in \Gamma'$. On a $A\gamma = a_{j_1}\gamma_{j_1} + a_{j_2}\gamma_{j_2} + \dots + a_{j_m}\gamma_{j_m}$ avec $a_{j_i} > 0$,

$1 \leq i \leq m$. Alors $F^{-1}\{\gamma\} = \{\gamma_{j_1}, \gamma_{j_2}, \dots, \gamma_{j_m}\}$, et $\|A^{n+1}\gamma\| \geq a_{j_i} \|A^n \gamma_{j_i}\|$ pour tout i . D'où le résultat.

2) $\Gamma'' \neq \emptyset$ (car $\lambda(F_{\Gamma'}) < 1$).

3) $\forall \gamma \in \Gamma''$, on a $F^{-1}\{\gamma\} \cap \Gamma'' \neq \emptyset$ (sinon $F^{-1}\{\gamma\} \subset \Gamma'$ et puis $\gamma \in \Gamma'$).

Définition. Une courbe $\gamma \in S^2 - P_F$ non périphérique est dite séparante si les deux valeurs critiques se trouvent dans les différentes composantes de $S^2 - \gamma$.

Si Γ'' ne contient pas de courbe séparante, on peut extraire un cycle de Levy dans Γ'' de la façon suivante: on commence par une courbe $\beta_0 = \gamma_i \in \Gamma''$, on prend β_1 une courbe dans Γ'' telle que $\beta_0 \in F^{-1}(\beta_1)$, et β_2 une courbe de Γ'' telle que $\beta_1 \in F^{-1}(\beta_2)$, et ainsi de suite. Les β_i existent car par la propriété 1) l'on a $\Gamma'' \subset F^{-1}\Gamma''$. Comme Γ'' ne contient qu'un nombre fini de courbes, on aura $\beta_{i+p} = \beta_i$ pour certains i et p , et l'ensemble $\hat{\Gamma} = \{\beta_i, \dots, \beta_{i+p}\}$ forme un cycle de Levy.

Supposons maintenant qu'il existe des courbes séparantes dans Γ'' . Notons \mathcal{D} l'ensemble des composantes-disques de

$$S^2 - \bigcup_{\gamma_i \in \Gamma''} \gamma_i.$$

4) $\mathcal{D} \neq \emptyset$, et un disque D est dans \mathcal{D} si et seulement si $\partial D \subset \bigcup_{\gamma_i \in \Gamma''} \gamma_i$ et $D \cap \bigcup_{\gamma_i \in \Gamma''} \gamma_i = \emptyset$.

5) Si $D \in \mathcal{D}$, toutes les composantes de $F^{-1}D$ sont des disques. Sinon D contient les deux valeurs critiques de F donc D contient aussi une courbe

séparante de Γ'' , ce qui contredit la définition de D .

6) Soit D' une composante de $F^{-1}D$, $D \in \mathcal{D}$, avec $\partial D'$ isotope à $\gamma_i \in \Gamma$, alors la composante B de $S^2 - \gamma_i$ isotope à D' ne contient pas de courbe de Γ'' .

Preuve. Supposons qu'il existe $\gamma \in \Gamma''$, $\gamma \subset B$. Par la propriété 1) il existe $\delta \in \Gamma''$ telle que $\gamma \in F^{-1}\{\delta\}$. Comme B est isotope à D' , la courbe γ est isotope à une courbe non périphérique dans D' . D'autre part, comme $\delta \cap D = \emptyset$, on a $F^{-1}\{\delta\} \cap D' = \emptyset$, c'est-à-dire que γ est aussi isotope à une courbe non périphérique dans $S^2 - D'$. Impossible.

7) Par 5) et 6), pour $D \in \mathcal{D}$ et $\gamma = F^{-1}(D)$, chaque élément de $F^{-1}\{\gamma\}$ est une courbe qui entoure un disque isotope à une composante de $F^{-1}D$ et ne contenant pas de courbe de Γ'' .

8) Par 3) et 7), si $D \in \mathcal{D}$, il existe au moins une composante D' de $F^{-1}D$ homotope à un disque B avec $\partial B \in \Gamma''$, et $B \cap \bigcup_{\gamma_i \in \Gamma''} \gamma_i = \emptyset$, et par 4), $B \in \mathcal{D}$.

9) Si $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, $D_1 \neq D_2$, alors $F^{-1}D_1 \cap F^{-1}D_2 = \emptyset$. Et pour toute composante D'_1 de $F^{-1}D_1$ et toute composante D'_2 de $F^{-1}D_2$, si $\partial D'_1$ et $\partial D'_2$ sont isotopes à $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2} \in \Gamma$ respectivement, alors la composante B_1 de $S^2 - \gamma_{i_1}$ qui est isotope à D'_1 et la composante B_2 de $S^2 - \gamma_{i_2}$ qui est isotope à D'_2 sont disjointes, car sinon $P_F \cap B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ et ensuite $P_F \cap D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, absurde.

10) Par 8) et 9), il existe une application injective multivaluée $\tau: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ donné par les images de $D \in \mathcal{D}$ sont les éléments de \mathcal{D} qui sont isotopes à

une composante de $F^{-1}D$. Comme \mathcal{D} est fini, l'application τ est en effet bijective.

11) Posons $\Delta = \{\partial D \mid D \in \mathcal{D}\}$. Si on définit $\tau(\partial D) = \partial(\tau D)$, alors $\tau : \Delta \rightarrow \Delta$ est aussi une bijection, et par 7), l'ensemble $F^{-1}\{\delta\}$ ($\delta \in \Delta$) a exactement un élément dans Γ'' . On peut donc extraire un cycle de courbes $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}$ dans Γ'' périodiques pour τ donc périodiques pour F^{-1} (i.e. $\tau(\delta_i) = \delta_{i+1}$, et $\tau(\delta_{p-1}) = \delta_0$). Notons k_i le degré de $F: \delta'_i \rightarrow \delta_i$, où δ'_i est la composante de $F^{-1}(\delta_i)$ isotopie à δ_{i+1} . On a

$$A\delta_i = (1/k_i)\delta_{i+1} + \sum_{\gamma \in \Gamma', x_i(\gamma)} \gamma, \quad \forall i.$$

En particulier,

$$A^2\delta_0 = (1/k_0)A\delta_1 + \sum_{\gamma \in \Gamma', x_0(\gamma)} A\gamma = (1/k_0k_1)\delta_2 + \sum_{\gamma \in \Gamma', y_2(\gamma)} \gamma, \dots,$$

$$A^p\delta_0 = (1/k)\delta_0 + \sum_{\gamma \in \Gamma', y(\gamma)} \gamma, \quad \text{où } k = k_0k_1 \dots k_{p-1}.$$

Donc

$$A^{np}\delta_0 = (1/k^n)\delta_0 + \sum_{\gamma \in \Gamma', y(\gamma)} (\gamma/k^{n-1} + A^p\gamma/k^{n-2} + \dots + A^{(n-1)p}\gamma).$$

Comme $\lambda(F_{\Gamma'}) < 1$, il existe $\mu < 1$ et $C > 0$ tels que $\|A^p\gamma\| \leq C\mu^i$ pour tout $\gamma \in \Gamma'$. On a alors

$$\begin{aligned} \|A^{np}\delta_0\| &\leq (1/k^n)\|\delta_0\| + C\left(\sum_{\gamma \in \Gamma', y(\gamma)}\right) (1/k^{n-1} + \mu/k^{n-2} + \dots + \mu^{n-1}) \\ &= (1/k^n)\|\delta_0\| + C\left(\sum_{\gamma \in \Gamma', y(\gamma)}\right) ((1 - \mu^n k^n) / k^{n-1}(1 - \mu k)). \end{aligned}$$

Si $k > 1$, alors $\|A^{np}\delta_0\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Mais cela contredit l'hypothèse $\delta_0 \in \Gamma''$, on en déduit donc $k=1$, i.e. $k_0 = k_1 = \dots = k_{p-1} = 1$. Autrement dit, $\{\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{p-1}\}$ est un cycle de Levy.

Caqd.

Chapitre 3. Arguments externes des points fixes et des points périodiques dans l'ensemble de Julia

3.1. Ensembles de Julia

Soit $f = f_c : z \rightarrow z^d + c$ à ensemble postcritique fini.

Rappelons que K_c est connexe et localement connexe. Comme f_c est monique, il existe une unique représentation conforme

$$\Phi : \mathbb{C} - K_c \xrightarrow{\approx} \mathbb{C} - \bar{D}$$

tangente à l'identité en ∞ conjuguant f_c à $z \rightarrow z^d$ (Proposition 1.1), et pour tout $\theta \in \mathbb{T}$ un point d'aboutissement $\gamma(\theta)$ du rayon externe $R_c(\theta)$ avec $f_c(\gamma(\theta)) = \gamma(d\theta)$ (chapitre 1). Pour $z \in \partial K_c = J_c$, l'ensemble $\text{Arg}(z)$ est l'ensemble des arguments externes de z .

Il existe un algorithme simple pour calculer $d\theta$ à partir de θ : développons θ en base d :

$$\theta = 0, s_1 s_2 s_3 \dots s_n \dots$$

alors

$$d\theta = 0, s_2 s_3 \dots s_{n+1} \dots ,$$

qui est un shift à droite du développement de θ . Pour θ, η deux arguments vérifiant $\eta < \theta$, il existe un entier k et un δ de la forme i/d tels que $d^{k-1}\eta < \delta < d^{k-1}\theta$: soient

$$\theta = 0, s_1 s_2 s_3 \dots s_n \dots$$

$$\eta = 0, t_1 t_2 t_3 \dots t_n \dots ,$$

alors $\exists k$ minimal tel que $s_{k+1} > t_{k+1}$, donc pour $\delta = 0, s_{k+1} 00 \dots$ qui est en fait s_{k+1}/d , on a $d^k \eta < \delta < d^k \theta$. Notons

$$B = \{z \in J_c \mid \exists \theta, \theta' \in \text{Arg}(z), \exists i, \text{ tels que } 0 \leq \theta \leq i/d \leq \theta' \leq 1\}.$$

Remarque 3.1. Pour tout point $z \in J_c$ avec $\# \text{Arg}(z) \geq 2$, il existe k tel que $f^k(z) \in B$.

Soient $x, y \in J_c$, $\theta_1, \theta_2 \in \text{Arg}(x)$, et $\eta_1, \eta_2 \in \text{Arg}(y)$. Les ensembles

$$R(\theta_1) \cup \{x\} \cup R(\theta_2) \quad \text{et} \quad R(\eta_1) \cup \{y\} \cup R(\eta_2)$$

ne se rencontrent pas sauf si $x=y$. En terme des arguments externes, si $x \neq y$, alors $\text{Arg}(x)$ est contenu dans un intervalle de \mathbb{T} limité par deux arguments consécutifs de y .

Notons $\beta = \gamma(0)$, c'est un pont fixe, et $\beta_i = \gamma(i/d)$, $i=0, 1, \dots, d-1$. Evidemment $f_c(\beta_i) = \beta$. En effet les β_i sont deux à deux distincts du fait que $\beta \neq c$ (sinon $f_c^{-1}(c) = 0$ est aussi un point fixe, i.e. $c=0$, mais dans ce cas là $K_c = \bar{D}$ et $\beta = 1 \neq 0$), donc $f_c^{-1}(\beta) = \{\beta_i\}$.

Rappelons que pour $z \in K_c$, on appelle orbite de z l'ensemble

$$\text{Or}(z) = \{f^n(z) \mid n \geq 0\};$$

et pour $\theta \in \mathbb{T}$ on appelle orbite de θ l'ensemble

$$\text{Or}(\theta) = \{d^n \theta \mid n \geq 0\}.$$

Si z (resp. θ) est prépériodique pour f_c (resp. pour \tilde{d} la multiplication par d), l'ensemble $Or(z)$ (resp. $Or(\theta)$) est fini. On pose $Arg(X)$ la réunion de $Arg(x)$ pour $x \in X$.

Dans [DH2], Douady et Hubbard ont construit un objet combinatoire pour chaque polynôme f_c : l'arbre de Hubbard H_c . On rappelle ici les définitions et quelques résultats essentiels.

Si 0 est strictement prépériodique, $\tilde{K}_c = \emptyset$; si 0 est périodique, $\tilde{K}_c \neq \emptyset$, chaque composante connexe U de \tilde{K}_c contient un unique point x_U tombant en un temps fini par f_c dans le cycle de 0 . Le point x_U détermine à multiplication par un nombre complexe de module 1 près un homéomorphisme

$$\psi_U : \bar{U} \rightarrow \bar{D}$$

induisant un isomorphisme \mathbb{C} -analytique de U sur D et vérifiant $\psi_U(x_U) = 0$. Nous appelons arc réglementaire tout arc $\ell_c \subset K_c$ ayant la propriété que pour toute composante U de \tilde{K}_c , $\psi_U(\ell_c \cap \bar{U})$ est contenu dans la réunion de deux rayons de \bar{D} . Pour x, y deux points quelconques de K_c , il existe un unique arc réglementaire γ de x à y . Nous appelons arbre de Hubbard de f_c l'enveloppe réglementairement convexe H_c de l'ensemble postcritique P_c , et arbre de Hubbard augmenté \hat{H}_c l'enveloppe réglementaire de $P_c \cup \bigcup_i \{\beta_i\}$. Ces enveloppes sont des arbres topologiques finis.

On a les propriétés suivantes:

1) ([DH2], IV). Notons (H_σ) (resp. (\hat{H}_σ)) les fermetures des composantes connexes de $H_c - \{0\}$ (resp. de $\hat{H}_c - \{0\}$), alors f_c induit

une application continue de H_c (resp. de \hat{H}_c) dans lui-même, dont la restriction à chacun des H_σ (resp. \hat{H}_σ) est injective.

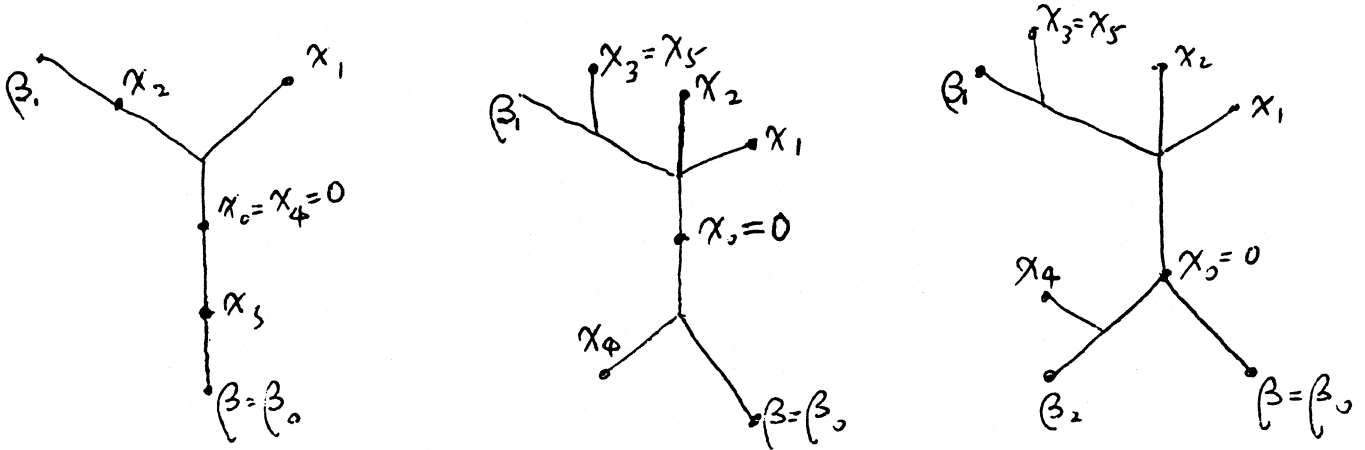


Figure 3.1. Exemples d'arbres de Hubbard

2) La valeur critique c est une extrémité de \hat{H}_c ([DH2],IV).

3) Supposons 0 périodique de période p pour $f=f_c$. Alors $0 \in \hat{K}_c$. Pour $i=0, 1, 2, \dots, p-1$, on note U_i la composante de \hat{K}_c contenant $f^i(0)$. En particulier, $0 \in U_0$, $c \in U_1$.

(3.1). Il existe dans (∂U_1) $d-1$ points $\tau_0, \dots, \tau_{d-2}$ de période divisant p , parmi lesquels un seul est dans $\partial U_1 \cap H_c$ qu'on note τ_0 . Preuve: Par [DH2],IV, $f^p : U_1 \rightarrow U_1$ est conjugué à $z \rightarrow z^d$, d'où l'existence de τ_0 . Par 2), τ_0 est unique.

(3.2). Le point τ_0 a au moins deux arguments externes (par (3.1)), et les $\tau_1, \dots, \tau_{d-2}$ ont un seul argument externe ([DH2],VII).

(3.3). Soient θ_0, θ_{d-1} les deux arguments externes de τ_0 adjacents à U_1 , et θ_i l'argument externe de τ_i ; on peut numérotter les $\tau_1, \dots, \tau_{d-1}$ de façon que (Figure 3.2) :

$$0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_{d-2} \leq \theta_{d-1} \leq 1.$$

Preuve. Par 2), l'argument 0 n'est pas dans l'intervalle $[\theta_0, \theta_{d-1}]$.

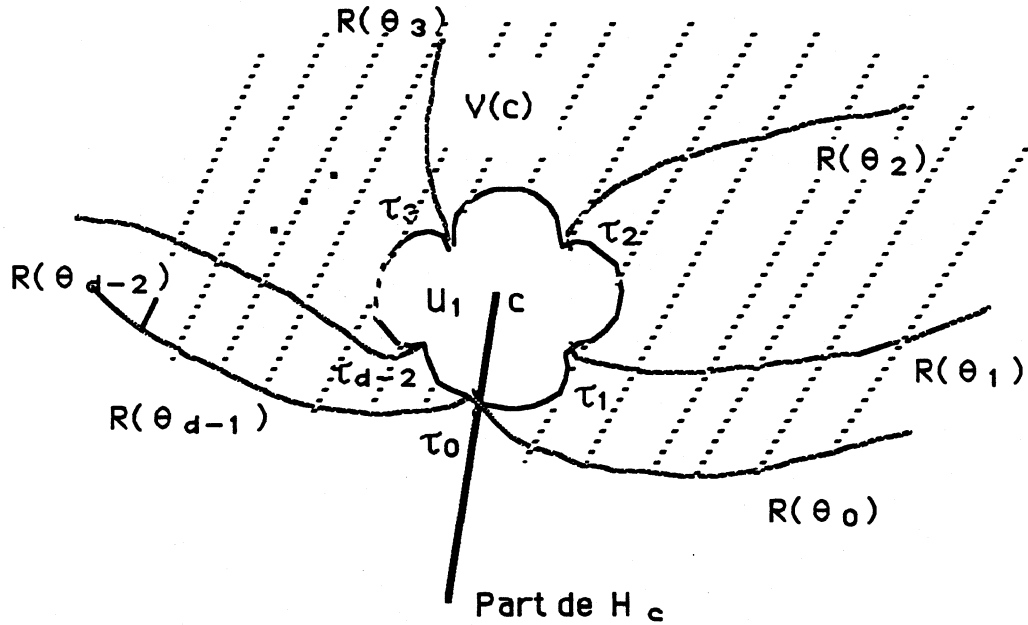


Figure 3.2. \bar{U}_1

(3.4). On appelle $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{d-2}, \theta_{d-1}$ les arguments associés à f_c . Ils sont périodiques de période p (la période de c) pour la multiplication par d ([DH2], VII).

(3.5). $0 \in [\beta, c]$. Preuve. Prenons $y \in \partial U_1 - \{\tau_0\}$ et η un argument externe de y , les points d'aboutissement y', y'' de $R(\eta/d)$ et $R(\eta/d + (d-1)/d)$ sont des images réciproques de y , ils appartiennent à $\partial U_0 - \hat{H}_c$. Comme

$$\eta/d < \eta < \eta/d + (d-1)/d,$$

les courbes $R(\eta) \cup [y, \beta] \cup R(0)$ et $R(\eta/d) \cup [y', y''] \cup R(\eta/d + (d-1)/d)$ se croisent nécessairement à cause de la disposition de leurs asymptotes, et ne peuvent se rencontrer qu'en 0, d'où $0 \in [\beta, y]$, et $0 \in [\beta, c]$.

(3.6). Prenons $\ell_c = f^{-1}([\beta, c])$. Alors $\ell_c = \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} [0, \beta_i]$ (où $\{\beta_i\} = f^{-1}(\beta)$), $[0, \beta_i] \cap [0, \beta_j] = \{0\}$ (si $i \neq j$), et ℓ_c est l'enveloppe réglémentaire de $\bigcup_i \beta_i$ et $\ell_c \cap J_c = B$. Preuve. L'ensemble ℓ_c est un revêtement de degré d de $[\beta, c]$ ramifié au dessus de 0 , ayant comme extrémités $\{\beta_i\}$, $0 \leq i \leq d-1$, et $f_c : [0, \beta_i] \rightarrow [c, \beta]$ est un homéomorphisme, d'où $\ell_c = \bigcup [0, \beta_i]$. Comme $\text{Arg}(\beta_i) = \{i/d\}$, par la définition de B , un point z appartient à B si et seulement si

$$z \in (\bigcup [0, \beta_i] \cap J_c) = \ell_c \cap J_c.$$

(3.7). On note $\{v_0, v_1, \dots, v_{d-1}\}$ les images inverses de τ_0 par f_c .

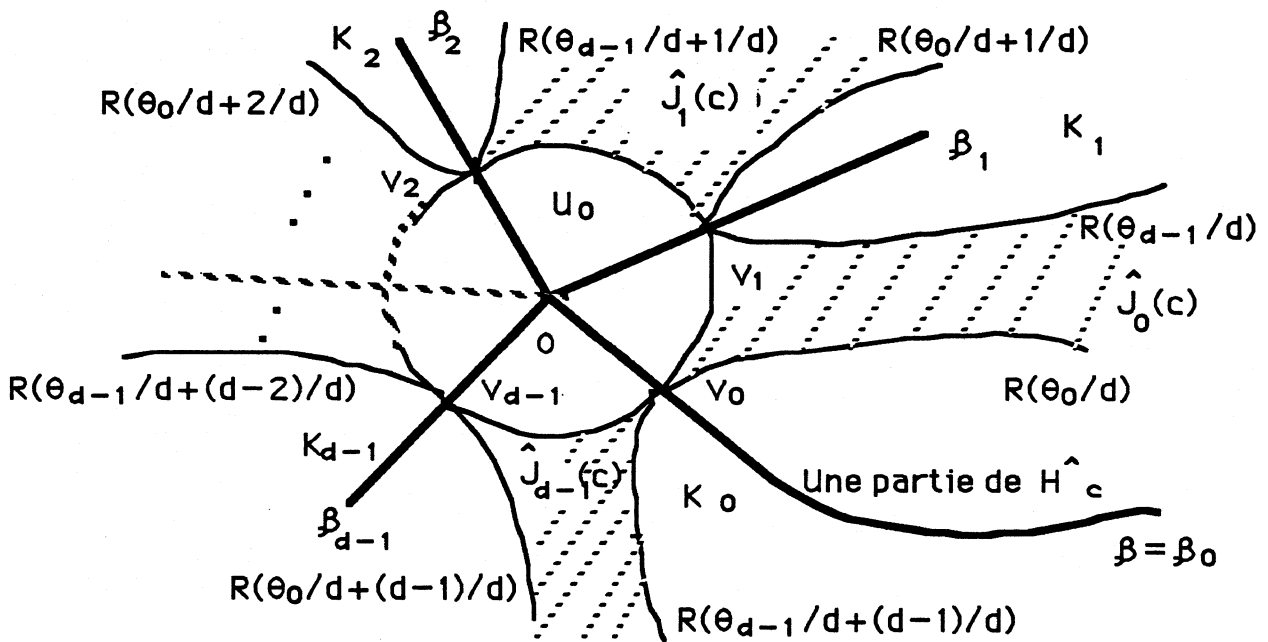


Figure 3.3. \bar{U}_0

(3.8). $\{v_i\} \subset \partial U_0 \cap H_c$ et quitte à renuméroter, on peut supposer $v_i \in [0, \beta_i]$, $i=0, 1, \dots, d-1$. Preuve. $\tau_0 \in \partial U_1 \cap H_c$, donc $\{v_i\} \subset \partial U_0 \cap H_c$.

De plus $\tau_0 \in [c, \beta]$, par 3.6, $\{v_i\} \subset \mathcal{L}_c \subset \hat{H}_c$, et chaque $[0, \beta_i]$ contient exactement un point des v_0, v_1, \dots, v_{d-1} .

$$(3.9). \quad \gamma(\theta_{d-1}/d + (i-1)/d) = \gamma(\theta_0/d + i/d) = v_i.$$

Preuve. Pour tout i , les deux arguments externes ξ_i, η_i de v_i adjacents à $[v_i, 0]$ vérifient $(i-1)/d < \xi_i < i/d < \eta_i < (i+1)/d$, et leurs images par f_c sont θ_0, θ_{d-1} (les deux arguments externes de τ_0 adjacents à $[\tau_0, c]$). En comptant le tour sur ∂U_0 (Figure 3.3) on obtient le résultat.

4) Supposons que 0 est strictement prépériodique pour f_c , alors $\hat{K}_c = \emptyset$, $c \in \partial K_c$ et $\text{Arg}(c)$ est fini non vide (proposition 1.3).

(4.1). On appelle les arguments externes de c arguments associés à f_c .

$$(4.2). \quad \text{Soit } \text{Arg}(c) = \{\theta_j\}; \text{ on a } \text{Arg}(0) = \bigcup_j \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} \{(\theta_j + i)/d\}.$$

(4.3). $0 \in [\beta, c]$. Preuve. Comme $R(\theta_j/d)$ et $R(\theta_j/d + (d-1)/d)$ aboutissent en 0 , et

$$\theta_j/d < \theta_j < \theta_j/d + (d-1)/d,$$

les courbes $R(0) \cup [\beta, c] \cup R(\theta_j)$ et $\bar{R}(\theta_j/d) \cup \bar{R}(\theta_j/d + (d-1)/d)$ sont obligées de se couper à cause de la disposition des asymptotes, et elles ne peuvent se couper qu'en 0 , d'où le résultat.

(4.4). Comme dans (3.6), pour \mathcal{L}_c l'enveloppe réglementaire de $\{\beta_i\}$, on a

$$\mathcal{L}_c = f^{-1}([\beta, c]) = \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} [0, \beta_i]$$

avec $[0, \beta_i] \cap [0, \beta_j] = \{0\}$ (si $i \neq j$) et $\mathcal{L}_c \cap \partial K_c = B$.

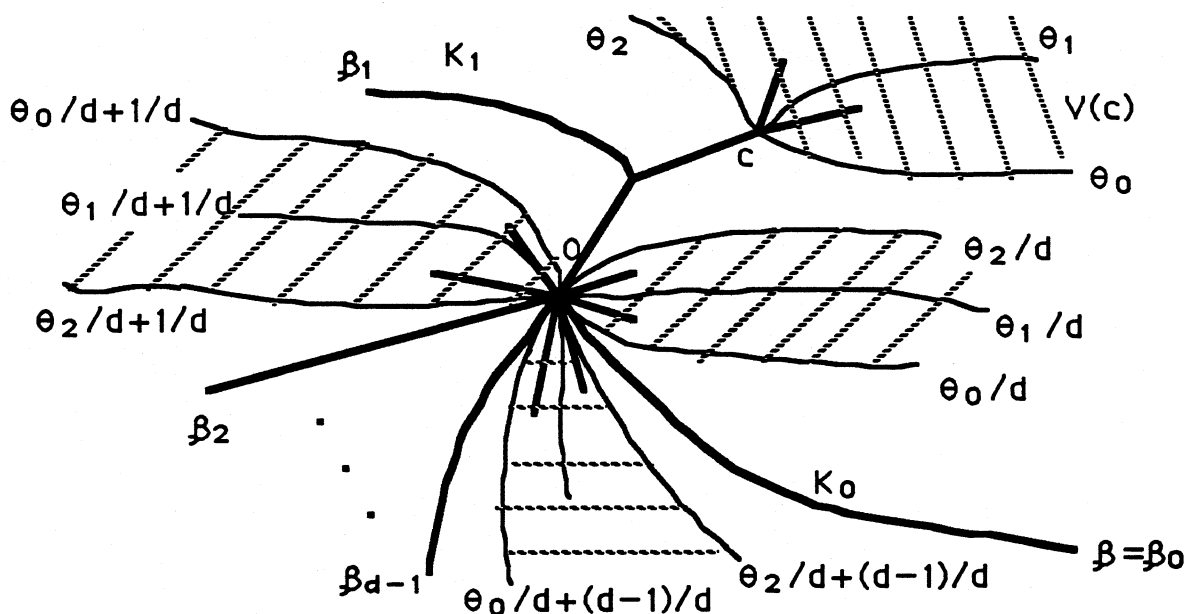


Figure 3.4. Une partie de \hat{H}_c pour c tel que $\hat{K}_c = \emptyset$.

Notation. Pour simplifier, quoique 0 soit périodique ou prépériodique pour f_c , on note $\theta, \tilde{\theta}$ le plus petit et le plus grand argument associé à f_c .

5) Pour tout i , le point β_i n'a pas d'autre argument externe que i/d , et par conséquent β_i est une extrémité de \hat{H}_c . Preuve. Comme $f_c \beta_i \rightarrow \beta$ est un homéomorphisme local, il suffit de montrer que β n'a que l'argument externe 0 . Soit $t \neq 0$ un autre argument de β . Alors pour tout n , l'argument $d^n t$ est aussi un argument externe de β , et

$$0 < d^n t < \theta/d \quad \text{ou} \quad \tilde{\theta}/d + (d-1)/d < d^n t < 1$$

(3) et 4)). Supposons $0 < t < \theta/d$. Il existe k tel que pour $n \leq k$

$$0 < d^n t < \theta/d,$$

mais $\tilde{\theta}/d + (d-1)/d < d^{k+1}t < 1$. Posons $s = d^k t$, on a donc $0 < s < \theta/d$, mais $ds > \tilde{\theta}/d + (d-1)/d$ entraîne

$$s > \tilde{\theta}/d^2 + (d-1)/d^2 > \theta/d,$$

absurde.

6) On note $V(c)$ la région de \mathbb{C} limité par $R(\theta)$, $R(\tilde{\theta})$ et ∂U_1 (si ceci existe) ne contenant pas 0, et on pose (Figures 3.2 et 3.4)

$$I_i(c) = [\tilde{\theta}/d + (i-1)/d, \theta/d + i/d], J_i(c) = \{z \in J_c \mid \text{Arg}(z) \subset I_i(c)\}$$

$$\hat{I}_i(c) =]\theta/d + i/d, \tilde{\theta}/d + i/d[, \hat{J}_i(c) = \{z \in J_c \mid \text{Arg}(z) \subset \hat{I}_i(c)\}$$

$i = 0, 1, \dots, d-1$.

(6.1). Par 3) et 4), et les figures 3.3, 3.4, si un argument externe d'un point $z \in K_c$, $z \neq 0$ est dans $I_i(c)$ (resp. $\hat{I}_i(c)$), alors tout argument externe de z est dans le même intervalle.

(6.2). Par 2),

$$V(c) \cap (H_c \cap \partial K_c) = \emptyset, \text{ donc}$$

$$\hat{J}_i(c) \cap H_c = f^{-1}(V(c) \cap \partial K_c) \cap H_c = \emptyset,$$

en terme des arguments externes: $\text{Arg}(H_c \cap \partial K_c) \cap \hat{I}_i(c) = \emptyset$.

(6.3). Soit $z \in J_c$; si $z \in V(c)$, l'ensemble $f^{-1}(z)$ a d points et chaque $\hat{J}_i(c)$ en contient un; si $z \in \mathbb{C} - \bar{V}(c)$, l'ensemble $f^{-1}(z)$ a d points et chaque $J_i(c)$ en contient un.

(6.4). Par (6.3), pour $\tilde{d} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} : \theta \rightarrow d\theta$ et $z \in J_c$ avec θ, θ' deux arguments externes distincts de z , l'ensemble $\tilde{d}^{-1}(\{\theta, \theta'\})$ a $2d$ éléments regroupés en d classes, chaque classe est constituée de deux arguments externes consécutifs de z , et ces deux arguments sont tous les deux dans $\text{Arg}(x)$ pour un certain $x \in f^{-1}(z)$.

7) Notons $\theta(c)$, $\tilde{\theta}(c)$ le plus petit et le plus grand argument associé à f_c et $m(c)=[\theta(c), \tilde{\theta}(c)]$. Si $c \neq c'$, alors soit $m(c) \cap m(c') = \emptyset$ soit l'un des $m(c)$, $m(c')$ est contenu dans l'intérieur de l'autre. Si $m(c') \subset \overset{\circ}{m}(c)$, alors $m(c')$ est contenu dans l'intervalle ouvert limité par deux arguments consécutifs associés à f_c , par suite $I_i(c) \subset I_i(c')$ et $\hat{I}_i(c') \subset \hat{I}_i(c)$.

8) Soit $\{\theta_j\}$ l'ensemble des arguments associés à f_c . Il existe $i(c) \in \{1, 2, \dots, d-1\}$ tel que pour tout j

$$(i(c)-1)/(d-1) < \theta_j < i(c)/(d-1).$$

On montrera ce résultat dans le chapitre 4.

9) Pour $c \neq 0$, et P_c fini, le polynôme f_c a d points fixes distincts. Parmi ces points fixes il existe $d-1$ qui ont un argument externe de la forme $i/(d-1)$, ils sont notés par

$$\varepsilon_i = \gamma(i/(d-1)), \quad i=0, 1, \dots, d-2,$$

et l'autre point fixe, noté α_c , admet plus d'un argument externe et $\alpha_c \in [c, \beta] \cap B$. Preuve. Le fait que chaque ε_i a un seul argument externe est parce que le point $\varepsilon_0 = \beta$ n'en a qu'un (5)). Quant à α_c , on montre d'abord $\alpha_c \in J_c = \partial K_c$: pour 0 strictement prépériodique, $\alpha_c \in K_c = \partial K_c$; pour 0 périodique et $c \neq 0$, le point α_c se situe également au bord de K_c car sinon il doit être attiré par le cycle attractif de 0 dont la période est supérieure à 1. Ainsi $\text{Arg}(\alpha_c)$ est non vide et $\#\text{Arg}(\alpha_c) \geq 2$ (sinon α_c serait l'un des ε_i). Pour tout $\theta \in \text{Arg}(\alpha_c)$, on a $d\theta \in \text{Arg}(\alpha_c)$ et $\theta \neq d\theta$. Par la remarque 3.1, on a $\{\alpha_c\} = \text{Or}(\alpha_c) \cap B \neq \emptyset$, d'où $\alpha_c \in B \subset \ell_c$. Mais $f(\ell_c) = [c, \beta]$, et $f_c(\alpha_c) = \alpha_c$, on a $\alpha_c \in [c, \beta]$.

10) Soient $\{\theta_j\}$ et $i(c)$ comme dans 8). Pour 0 périodique, notons K' l'adhérence de la composante de $K_c - \{\tau_0\}$ contenant 0 , et K_i l'adhérence de la composante de $K_c - \{v_i\}$ contenant $J_i(c)$, $i=0, 1, \dots, d-1$; pour 0 strictement prépériodique, notons K' l'adhérence de la composante de $K_c - \{c\}$ contenant 0 , et K_i l'adhérence de la composante de $K_c - \{0\}$ contenant $J_i(c)$, $i=0, 1, \dots, d-1$.

Alors dans tous les cas chaque K_i sauf $i=i(c)$ contient un des ε_j , et $K_{i(c)}$ contient α_c , de plus, $c \in K_{i(c)}$.

Preuve. On remarque d'abord par 8) et pour $k=i(c)$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &> (k-1)/(d-1) \text{ donc } \tilde{\theta} > \tilde{\theta}/d + (k-1)/d \\ \theta &< k/(d-1) \text{ donc } \theta < \theta/d + k/d, \end{aligned}$$

mais par 3) et 4) les points

$$\chi(\theta) = \chi(\tilde{\theta}) \text{ et } \chi(\tilde{\theta}/d + (k-1)/d) = \chi(\theta/d + k/d)$$

sont distincts, donc pour tout j

$$(k-1)/(d-1) < \tilde{\theta}/d + (k-1)/d < \theta_j < \theta/d + k/d < k/(d-1),$$

et par suite $c \in K_{i(c)}$ et pour tout j , on a $\varepsilon_j = \chi(j/d-1) \in K_{i(c)}$. Par conséquent $K - K' \subset K_{i(c)}$, et $K_i \subset K'$ pour $i \neq i(c)$. Chaque K_i est connexe et contractile, et

$$f_c : K_i \longrightarrow K'$$

est un homéomorphisme, donc par le théorème de Lefschetz il existe au

moins un point fixe de f_c dans K_i , $i \neq i(c)$. Quant à $K_{i(c)}$, posons $H_{i(c)} = H_c \cap K_{i(c)} \cap K'$ qui est connexe et contractile, alors f_c induit une application injective de $H_{i(c)}$ à H_c . Soit $\pi : H_c \rightarrow H_c$ l'application vérifiant $\pi|_{H_{i(c)}} = \text{identité}$ et $\pi(H_c - H_{i(c)}) = \{0\}$, alors l'application $\pi \circ f_c|_{H_{i(c)}}$ admet un point fixe, et ce point n'est pas 0, il est donc un point fixe de f_c . Dans le cas où 0 est périodique, les K_i sont disjoints, et dans le cas où 0 est strictement prépériodique, l'unique point dans $\bigcap_i K_i$ est 0 qui est non périodique donc non fixe. Donc les points fixes dans K_i et ceux dans $K_{i'}$ sont distincts lorsque $i \neq i'$. Comme f_c n'a que d points fixes, chaque K_i en contient exactement un. Comme aucun des ε_j n'est dans $K_{i(c)}$, on a $\alpha_c \in K_{i(c)}$. Par conséquent, chaque K_i pour $i \neq i(c)$ contient un des ε_j .

Comme $1 \leq i(c) \leq d-1$, $c \notin K_0$.

11) ([DH2], VII). Pour \mathcal{L}_c l'enveloppe réglementaire de $\{\beta_i\}$ défini dans 3) et 4), l'ensemble $\mathcal{L}_c \cup \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} R_c(i/d)$ divise le plan en d parties, on note C_i l'adhérence de la composante de $\mathbb{C} - \mathcal{L}_c \cup \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} R_c(i/d)$ qui contient $R_c(\theta)$ pour $i/d \leq \theta \leq (i+1)/d$. Il existe un algorithme pour calculer le développement en base d d'un argument externe θ d'un point $z \in \partial K_c$: $\theta = 0, s_0 s_1 s_2 \dots s_n \dots$, avec $s_n = i$ si $R_c(d^n \theta) \subset C_i$, $i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$; $n = 0, 1, 2, \dots$ (Précaution: le développement de i/d est soit $0, (i-1)(d-1)(d-1) \dots$ soit $0, i00 \dots$).

12) ([Ta]). Posons $PJ_c = \{z \in J_c \mid z \text{ périodique et } \# \text{Arg}(z) \geq 2\}$. Par exemple, $\alpha_c \in PJ_c$; si 0 est périodique, le point τ_0 défini dans 3) est dans PJ_c .

Dans K_c (resp. dans \mathbb{T}), il existe des sous-ensembles qui ne

contiennent aucun point de PJ_c (resp. de $\text{Arg}(PJ_c)$), ce sont les régions interdites (resp. zones interdites); il existe aussi des sous-ensembles X (resp. I) tel que pour tout $z \in PJ_c$, $Or(z) \cap X \neq \emptyset$ (resp. pour tout $\theta \in \text{Arg}(PJ_c)$, $Or(\theta) \cap I \neq \emptyset$), ce sont les régions obligatoires (resp. zones obligatoires).

En particulier, $PJ_c \subset H_c$; et les ensembles ℓ_c , $[\alpha_c, c]$, $f^{-1}([\alpha_c, c])$ sont obligatoires, $V(c) \cap K_c$ et $\hat{J}_i(c)$ ($V(c)$ et $\hat{J}_i(c)$ sont définies dans 6)) sont interdites et $\hat{m}(c)$, $\hat{I}_i(c)$ (elles sont définies dans 6) et 7)) sont des zones interdites.

Preuve. Pour tout $z \in PJ_c$, on a $Or(z) \cap B \neq \emptyset$, et $B \subset \ell_c \subset \hat{H}_c$, donc B , ℓ_c , \hat{H}_c sont obligatoires. De plus, comme $f(\hat{H}_c) \subset \hat{H}_c$ et z périodique, on a $z \in \hat{H}_c$ et par suite $PJ_c \subset \hat{H}_c$. Comme

$$f(\ell_c) = [c, \beta] = [c, \alpha_c] \cup [\alpha_c, \beta]$$

($\alpha_c \in [c, \beta]$ par 9)), et il existe $x_n \in [\alpha_c, \beta]$, $x_n \rightarrow \beta$ tels que $f^n(x_n) = \alpha_c$ et $x_{n+1} \in [x_n, \beta]$, pour tout $x \in [\alpha_c, \beta]$, $x \in [x_n, x_{n+1}]$, on a

$$f^n(x) \in [x_0, x_1] = [\alpha_c, x_1] \text{ et } f^{n+1}(x) \in [\alpha_c, c],$$

ceci entraîne que $[\alpha_c, c]$ et donc $f^{-1}[\alpha_c, c]$ sont obligatoires. De plus, comme $[\alpha_c, c] \subset H_c$ et $f(H_c) \subset H_c$, l'arbre de Hubbard H_c est non seulement obligatoire mais $PJ_c \subset H_c$. Comme $H_c \cap (V(c) \cup \hat{J}_i(c)) = \emptyset$ (6)), $V(c) \cap K_c$ et $\hat{J}_i(c)$ sont des régions interdites et par suite $\hat{m}(c)$ et $\hat{I}_i(c)$ sont des zones interdites.

On définit une relation d'équivalence entre les arguments externes par $\eta \sim_c \eta' \Leftrightarrow \gamma_c(\eta) = \gamma_c(\eta')$. Il existe un algorithme pour déterminer si η et η' sont équivalents:

Lemme 3.2. a) $\eta \sim_c \eta'$ si et seulement si $\forall n$,

$$\exists i \in \{0, 1, \dots, d-1\} \text{ tel que } d^n \eta, d^n \eta' \in I_i(c)$$

ou

$$\exists j \in \{0, 1, \dots, d-1\} \text{ tel que } d^n \eta, d^n \eta' \in \hat{I}_j(c).$$

b) Si de plus η et η' sont périodiques par la multiplication par d (i.e. à dénominateur premier à d) et $\eta \neq \eta'$, alors $\eta \sim \eta'$ si et seulement si

$$\forall n, \exists i \in \{0, 1, \dots, d-1\} \text{ tel que } d^n \eta, d^n \eta' \in I_i(c).$$

La partie a) est démontrée dans le chapitre 8 de [W] en degré $d=2$, mais la démonstration s'étend en degré d quelconque pour les polynômes $f_c : z \rightarrow z^d + c$. La partie b) est une partie de 12) car sous notre hypothèse $\eta, \eta' \in \text{Arg}(PJ_c)$.

Lemme 3.3. Soient $c, c' \in \mathbb{C}$ à $P_c, P_{c'}$ finis avec

$$m(c') \subset \tilde{m}(c)$$

(où $m(c)$ est défini dans 7)). Alors $\forall z \in PJ_c$, il existe un unique $z' \in PJ_{c'}$ tel que $\text{Arg}(z) \subset \text{Arg}(z')$. En particulier,

$$\text{Arg}(\alpha_c) \subset \text{Arg}(\alpha_{c'}).$$

Démonstration. Par définition de $I_i(c)$ et de $I_i(c')$ dans 6), on voit que $I_i(c) \subset I_i(c')$ pour tout i . Prenons $\eta, \eta' \in \text{Arg}(z)$, ils sont périodiques par hypothèse $z \in PJ_c$. D'après le lemme 3.2,

$\forall n, \exists i$, tel que $d^n(\eta), d^n(\eta') \in I_i(c) \subset I_i(c')$.

Donc $\eta \sim_{c'} \eta'$ par le même lemme. Posons $z' = \gamma_{c'}(\eta)$, on a

$$\text{Arg}(z) \subset \text{Arg}(z').$$

En particulier, pour $\eta, d\eta \in \text{Arg}(\alpha_c)$, qui vérifient automatiquement $\eta \neq d\eta$, on a $\eta \sim_{c'} d\eta$, i.e. $\gamma_{c'}(\eta) = \gamma_{c'}(d\eta) = f_{c'}(\gamma_{c'}(\eta))$ (proposition 1.1). Le point $\gamma_{c'}(\eta)$ est donc un point fixe de $f_{c'}$ ayant plus d'un argument externe. Il est donc $\alpha_{c'}$.

Cafid.

Le corollaire du lemme suivant nous précise qu'en fait $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(z')$ sous la même condition.

Lemme 3.4. ([La1], [La2], [Th] et [Ta] en degré 2). Soient $c \in \mathbb{C}$ à P_c fini et $z \in P_{J_c}$ de période q . Alors

- a) tout élément de $\text{Arg}(z)$ est périodique d'une même période p par la multiplication par d , et $p = kq$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$;
- b) la ligne $\gamma = R(\xi) \cup \{z\} \cup R(\xi')$ pour $\xi, \xi' \in \text{Arg}(z)$ sépare P_c , i.e. chaque composante de $\mathbb{C} - \gamma$ rencontre P_c ; En particulier, pour $\eta, \eta' \in \text{Arg}(\alpha_c)$, $R(\eta) \cup \{\alpha_c\} \cup R(\eta')$ sépare P_c ;
- c) si $\#\text{Arg}(z) \geq 3$, tout élément de $\text{Arg}(z)$ est dans la même orbite par la multiplication par d , et f^q opère transitivement sur les rayons externes de z , donc k (défini dans a)) est le nombre des arguments externes de z , et m/k est irréductible et est le nombre de rotation combinatoire de f en z (cf. la preuve de a)); si $\#\text{Arg}(z) = 2$, les deux arguments de z peuvent être dans une même orbite (alors $p = 2q$) ou dans des orbites différentes (alors $p = q$).

Corollaire 3.5. Soient $c, c' \in \mathbb{C}$ à $P_c, P_{c'}$ finis avec $m(c') \subset \bar{m}(c)$, alors $\forall z \in PJ_c, \exists! z' \in PJ_{c'}$ tel que $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(z')$. En particulier,

$$\text{Arg}(\alpha_c) = \text{Arg}(\alpha_{c'}) .$$

Démonstration. D'après le lemme 3.3, il suffit de démontrer $\# \text{Arg}(z) = \# \text{Arg}(z')$. Soient q, q' les périodes de z, z' et k, k' les nombres des arguments externes de z, z' respectivement. Comme $f_{c'}^{q'}(z') = z'$, l'entier q est un multiple de la période q' de z' , il est donc premier à k' , autrement dit $f_{c'}^q$ opère transitivement sur les rayons externes de z' , d'où $\# \text{Arg}(z) = \# \text{Arg}(z')$.

Qfd.

Démonstration du lemme 3.4. a) On a f^q localement conjugué à $w \rightarrow \lambda w$ (où $\lambda = (f^q)'(z)$). On oriente chaque rayon externe R_i de z en mettant une flèche de z à l'infini. On dit que R_{i_2} suit R_{i_1} s'il existe une composante connexe U de $\mathbb{C} - \bigcup_i R_i$ telle que $\partial U = R_{i_2}^- \cup R_{i_1}$, où $R_{i_2}^-$ est R_{i_2} avec l'orientation inverse. Comme f^q préserve l'orientation de ∂U , on déduit que $f^q(R_{i_2})$ suit $f^q(R_{i_1})$ si R_{i_2} suit R_{i_1} . On peut donc numéroter les rayons externes de z en R_1, R_2, \dots, R_n de façon que $R_{i+1 \pmod n}$ suit R_i , et on a $f^q(R_i) = R_{i+m \pmod n}$ avec m ne dépendant pas de i . On dit que m/n est le nombre de rotation combinatoire de f en z . Pour k le dénominateur de m/n sous forme irréductible, on a $f^{kq}(R_i) = R_i$, i.e. $p = kq$ est la période de tous les arguments externes de z .

b) On a $z \in H_c$ ($PJ_c \subset H_c$ par 12)). Si z est une extrémité de H_c , alors $z \in P_c = \text{Or}(c)$ et tout point dans l'orbite de z est une extrémité de H_c , donc z n'a qu'un seul argument externe ([DH2], exposé VII, 4,

page 62~64), ceci contredit l'hypothèse que $z \in PJ_c$. Le point z n'est donc pas une extrémité de H_c , alors dans chacune des composantes de $\mathbb{C} - \gamma$ il existe au moins une extrémité de H_c et les extrémités de H_c sont tous postcritiques.

c) L'argument ci-dessous est analogue à l'argument de Thurston pour le cas de degré deux ([Th]). On définit d'abord une distance dans $[0,1]$ par

$$\mu(\theta, \theta') = \min\{|\theta - \theta'|, 1 - |\theta - \theta'|\}.$$

Si $\mu(\theta, \theta') \leq 1/(d+1)$, $\mu(d\theta, d\theta') \geq \mu(\theta, \theta')$; si $\mu(\theta, \theta') \geq 1/(d+1)$,

$$\mu(d\theta, d\theta') = 1 - d\mu(\theta, \theta') \leq 1/(d+1) \leq \mu(\theta, \theta').$$

Pour θ, θ' distincts, il existe k tel que $\mu(d^k\theta, d^k\theta') > 1/(d+1)$.

Soit $x \in J_c \cap H_c$. Parmi les couples d'arguments externes de x il existe un couple $\{\theta(x), \theta'(x)\}$ tel que $\mu(\theta(x), \theta'(x))$ soit maximal. Comme les extrémités de H_c sont dans l'orbite de c , dans l'ensemble $\{\mu(\theta(x), \theta'(x)) \mid x \in J_c \cap H_c\}$, si c est strictement prépériodique, $\mu(\theta(c), \theta'(c))$ (qui peut être nul) est minimal et $\mu(\theta(0), \theta'(0))$ est maximal; si 0 est périodique, alors $\mu(\theta(\tau_0), \theta'(\tau_0))$ est minimal et $\mu(\theta(v_i), \theta'(v_i))$ est maximal (il est constant pour tout i) (3) ([Th]).

Soit $z \in J_c \cap H_c$, $z \neq c$. Notons $z_0 = z$, z_1, \dots, z_{d-1} les d points distincts tels que $f(z_i) = f(z)$ (6). Alors

$$f^{-1}([c, f(z)]) = \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} [0, z_i]$$

avec $[0, z_i] \cap [0, z_j] = \{0\}$ (si $i \neq j$) et $\theta(z_i), \theta'(z_i)$ sont les deux

arguments de z_i adjacents à $[0, z_i]$, avec

$$\mu(\theta(z_i), \theta'(z_i)) = \mu(\theta(z), \theta'(z)).$$

On note $\mathfrak{C}(z)$ la fermeture de la composante de $H_c - \{z_0, \dots, z_{d-1}\}$ contenant 0.

Supposons maintenant que $\mu(\theta(z), \theta'(z)) \geq 1/(d+1)$. Il existe au plus un autre couple $\{\eta(z), \eta'(z)\}$ d'arguments externes consécutifs de z vérifiant $\mu(\eta(z), \eta'(z)) \geq 1/(d+1)$. Pour $\xi, \xi' \in \text{Arg}(\mathfrak{C}(z))$ avec $\xi \sim_c \xi'$, on a soit

$$\mu(\xi, \xi') \geq \mu(\eta(z), \eta'(z)) \geq 1/(d+1)$$

soit

$$\mu(\xi, \xi') \leq (1 - \mu(\eta(z), \eta'(z))) / d;$$

pour $\xi, \xi' \in \text{Arg}(J_c - \mathfrak{C}(z))$ avec $\xi \sim_c \xi'$, on a $\mu(\xi, \xi') \leq \mu(\eta(z), \eta'(z))$.

Remarque 3.6. Soient z tel que $\mu(\eta(z), \eta'(z)) \geq 1/(d+1)$, $k \geq 0$ minimal tel que $f^k(z) \in \mathfrak{C}(z)$ et ζ, ζ' deux arguments consécutifs de z tels que $\mu(\zeta, \zeta') \geq 1/(d+1)$, alors

$$\mu(d^k \zeta, d^k \zeta') \geq \mu(\eta(z), \eta'(z)) \geq 1/(d+1).$$

Parce que

$$\mu(d\zeta, d\zeta') = 1 - d\mu(\zeta, d\zeta') \geq 1 - d\mu(\eta(z), \eta'(z))$$

et pour $0 < n < k$, $f^n(z) \in J_c - \mathfrak{C}(z)$,

$$\mu(\eta(z), \eta'(z)) \geq \mu(d^n \zeta, d^n \zeta') \geq 1 - d\mu(\eta(z), \eta'(z))$$

donc

$$\mu(d^k \zeta, d^k \zeta') \geq 1 - d\mu(\eta(z), \eta'(z))$$

d'où le résultat.

Supposons $z \in PJ_c$ de période q . On peut même supposer que z vérifie $\mathcal{C}(z) \cap Or(z) = \{z\}$, i.e. z est le point dans $Or(z)$ le plus proche de 0 (donc $f(z)$ le point le plus proche de c), évidemment $\mu(\theta(z), \theta'(z)) > 1/(d+1)$. Soit $x \in Or(z)$, $x \neq z$, ζ, ζ' deux arguments externes consécutifs de x tels que $\mu(\zeta, \zeta') \geq 1/(d+1)$, alors en appliquant si nécessaire plusieurs fois le résultat de la remarque ci-dessus, pour k minimal tel que $f^k(x) = z$, on a $\mu(d^k \zeta, d^k \zeta') \geq 1/(d+1)$, donc $\{d^k \zeta, d^k \zeta'\} = \{\theta(z), \theta'(z)\}$ ou $\{\eta(z), \eta'(z)\}$.

Soit $\#Arg(z) \geq 3$, il existe ξ, ξ' arguments externes consécutifs de z tel que $\mu(\xi, \xi') \leq 1/(d+1)$, il existe m tel que

$$\mu(d^m \xi, d^m \xi') \geq 1/(d+1).$$

Posons $x = f^m(z)$ et $\zeta = d^m \xi, \zeta' = d^m \xi'$, il existe k tel que $f^k(x) = z$, donc $\{d^{k+m} \xi, d^{k+m} \xi'\}$ est un autre couple d'arguments externes consécutifs de z , ceci veut dire que f^q n'est pas une rotation triviale sur les rayons externes de z , si de plus $\eta(z), \eta'(z)$ existent, alors

$$\{d^q \eta(z), d^q \eta'(z)\} \neq \{\eta(z), \eta'(z)\}$$

donc

$$\{d^q \eta(z), d^q \eta'(z)\} = \{\theta(z), \theta'(z)\},$$

par conséquent, f^q opère transitivement sur les rayons externes de z .

Le résultat pour le cas où $\#Arg(z) = 2$ est évident.

Café.

Chapitre 4. Arguments externes et internes dans l'espace de paramètres

4.1. Composantes hyperboliques

Soit $f = f_c : z \rightarrow z^d + c$. On note K_c l'ensemble de Julia de f_c et P_c l'ensemble postcritique de f_c .

Notation. On note M_d l'ensemble des c tels que K_c soit connexe, et \mathcal{D} l'ensemble des c tels que P_c soit fini.

L'ensemble M_d est invariant par la rotation de $1/(d-1)$ tour du fait que le polynôme $f : z \rightarrow z^d + c$ est conjugué à $g : z \rightarrow \lambda^{1-d} z^d + \lambda c$ (i.e. $\exists \Phi : \mathbb{C} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}$ tel que $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1} = g$) donc $c \in M_d$ entraîne $\lambda c \in M_d$ pour λ racine $d-1$ de 1.

On rappelle ici quelques notations et résultats essentiels montrés dans [DH2] et [DGH].

1). Il existe une représentation conforme ψ_M de $\mathbb{C} - \bar{D}$ à $\mathbb{C} - M_d$, tangente à l'identité en ∞ . On ne sait pas si M_d est localement connexe, donc on ne sait pas si ψ_M se prolonge au bord, mais on sait que tous les rayons externes d'arguments rationnels aboutissent. On peut donc définir pour θ rationnel $R_M(\theta) = \{\psi_M(e^{s+2i\pi\theta}) \mid 0 \leq s < \infty\}$ le rayon externe d'argument θ , et $\gamma_M(\theta) = \psi_M(e^{2i\pi\theta})$ le point d'aboutissement.

2). Notons M' l'ensemble des c tels que f_c admette un cycle attractif à distance finie. Alors $M' \subset \tilde{M}_d$ et chaque composante de M' est une

composante de \tilde{M}_d . Les composantes connexes de M' sont appelées composantes hyperboliques de M_d .

3). Soit W une composante hyperbolique de M_d . La période du cycle attractif de f_c pour tout $c \in W$ est la même, c'est la période de W .

4). On note $p_W(c)$ le multiplicateur du cycle périodique attractif de f_c . L'application $p_W : c \rightarrow p_W(c)$ induit un revêtement de degré $d-1$ de W à D ramifié au dessus de 0 , et elle se prolonge continument au bord de W . Le point $c(W) = p^{-1}(0)$ est l'unique point de W tel que 0 soit périodique pour f_c , on l'appelle centre de W . Sur ∂W , il existe $d-1$ points $c_0(W), c_1(W), \dots, c_{d-2}(W)$ ayant comme image par p_W le même point $1 \in \partial D$, ce sont les racines de W . Ces racines ont chacune un unique argument externe, sauf une qu'on note $c_0(W)$ qui en a deux, c'est la racine principale de W . Les d arguments externes $\{\theta_0, \dots, \theta_{d-1}\}$ des racines de W avec l'ordre

$$0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_{d-2} \leq \theta_{d-1} \leq 1$$

sont appelés arguments-racines de W , ce sont exactement les arguments associés à $f_{c(W)}$ ([DH1], [DGH] et 3) de 3.1). Ainsi la période des θ_i est la même que celle de W (3) de 3.1). On peut numéroter les $c_i(W)$, $i \geq 1$ de façon que

$$\gamma_M(\theta_0) = \gamma_M(\theta_{d-1}) = c_0(W), \text{ et } \gamma_M(\theta_i) = c_i(W), \text{ } 1 \leq i \leq d-2.$$

5). On donne à $c_0(W)$ l'argument interne 0 dans W . Pour un point quelconque $x \in \partial W$ avec $p(x) = e^{2i\pi t}$, on définit l'argument interne de x dans W par

$$t/(d-1)+p/(d-1)=(t+p)/(d-1)$$

où p est un entier déterminé de façon qu'en comptant le tour sur ∂W les arguments internes sont compatibles avec l'argument interne de $c_0(W)$. En particulier, l'argument interne de $c_i(W)$ est $i/(d-1)$.

6). Un point $c \in \partial W$ a un argument interne rationnel non de la forme $i/(d-1)$ si et seulement si c est la racine principale d'une autre composante W' . Une composante hyperbolique W' est dite non primitive si sa racine principale $c=c_0(W')$ est au bord d'une autre composante W . Si ce point c a un argument interne rationnel $t=p/q$ irréductible dans W , alors pour k la période de W et q' minimal tel que $q'(d-1)$ soit un multiple de q , la période de W' est kq' . On donnera dans 4.3 un algorithme pour calculer les arguments-racines de W' en utilisant t et les arguments-racines de W . On verra que les arguments de $c_0(W')$ sont toujours dans une même orbite.

7). Rappelons que \mathcal{D} est l'ensemble des $c \in M_d$ tels que l'ensemble postcritique P_c soit fini, il est aussi l'ensemble des c tels que 0 soit prépériodique pour f_c . On décompose \mathcal{D} en $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$ en définissant \mathcal{D}_0 l'ensemble des $c \in M_d$ tels que 0 soit périodique pour f_c , qui est aussi l'ensemble des centres des composantes hyperboliques de M_d , et \mathcal{D}_2 l'ensemble des $c \in M_d$ tels que 0 soit strictement prépériodique pour f_c , (dans la terminologie de Douady et Hubbard \mathcal{D}_1 est réservé pour les racines principales des composantes hyperboliques de M_d , mais on ne s'en sert pas ici).

8). Pour $c \in \mathcal{D}$ on appelle les arguments associés à f_c arguments associés à c dans M_d : pour $c \in \mathcal{D}_0$, ce sont les arguments-racines de la

composante hyperbolique de M_d ayant c comme centre ; pour $c \in \mathcal{D}_2$ ce sont les arguments externes de c dans K_c , ce sont également les arguments externes de c dans M_d ([DH2] et [DGH]).

9). Notons W_0 la composante hyperbolique de M_d contenant 0 . C'est la composante principale de M_d . Les arguments 0 et 1 sont considérés comme deux arguments différents pour que la racine principale de W_0 ait aussi deux arguments externes. Par symétrie, le rayon externe $R_M(0)$ est une partie de l'axe réel et $\gamma_M(0) \in \partial W_0$. Comme W_0 est aussi invariant par la rotation de $1/(d-1)$ tour, on a $\gamma_M(i/(d-1)) \in \partial W_0$ pour tout i et ce sont les racines de W_0 . Ceci prouve la propriété 8) de 3.1.

10). Soit $\kappa(t)$ le point sur ∂W_0 d'argument interne t . Pour $t=p/q$ rationnel irréductible tel que $\kappa(t)$ non racine de W_0 , on note $W(t)$ la composante hyperbolique de M_d ayant $\kappa(t)$ comme racine principale, et $c(t)$ le centre de $W(t)$. On note également $q'=q'(t)$ la période de $W(t)$, il est donc l'entier minimal tel que $q'(d-1)$ soit un multiple de q .

11). Les d arguments-racines de $W(t)$ sont de la forme

$$\theta_i(t) = (p' + i)/(d^{q'} - 1), \quad 0 \leq i \leq d-1, \quad p' \in \mathbb{N}$$

avec $\gamma_M(\theta_0(t)) = \gamma_M(\theta_{d-1}(t)) = \kappa(t)$ et dans l'espace dynamique de $f_{c(t)}$, pour $\alpha_{c(t)}$ l'unique point fixe de $f_{c(t)}$ ayant plus d'un argument externe (9) de 3.1), on a

$$\text{Arg}(\alpha_{c(t)}) = \text{Or}(\theta_0(t)) = \text{Or}(\theta_{d-1}(t)),$$

et de plus $\theta_0(t)$ et $\theta_{d-1}(t)$ sont les deux arguments de $\alpha_{c(t)}$ adjacents à l'arc réglementaire $[\alpha_{c(t)}, c(t)]$.

12). Analysons maintenant les composantes hyperboliques de période 2 .
Notons successivement

$$t_{2,j} = 1/2(d-1) + j/(d-1) = (\frac{1}{2} + j)/(d-1) ,$$

$$c_{2,j} = c(t_{2,j}) , \kappa_{2,j} = \kappa(t_{2,j}) \text{ et } W_{2,j} = W(t_{2,j}) , j=0,1,\dots,d-2 .$$

Comme $f_c^2(0) = c^d + c$, l'équation $f_c^2(0) = 0$ a $d-1$ solutions non nulles, il existe donc exactement $d-1$ composantes hyperboliques de M_d de période 2 , ces composantes sont donc $W_{2,0} , W_{2,1} , \dots , W_{2,d-2}$, et tout argument de période deux pour la multiplication par d est un argument-racine d'une de ces composantes. Par un simple calcul on peut en déduire qu'en base d les arguments-racines de $W_{2,j}$ sont

$$\{ \theta_0(t_{2,j}) , \theta_1(t_{2,j}) , \dots , \theta_{d-1}(t_{2,j}) \} =$$

$$\{ 0, [j(j+1)] , 0, [j(j+2)] , \dots , 0, [(j+1)j] \}$$

(où $0, [s_1 s_2 \dots s_n] = 0, s_1 s_2 \dots s_n s_1 s_2 \dots s_n \dots s_1 s_2 \dots s_n \dots$), avec

$$\text{Arg}(\kappa_{2,j}) = \{ 0, [j(j+1)] , 0, [(j+1)j] \}$$

et

$$\theta_{d-1}(t_{2,j}) - \theta_0(t_{2,j}) = 1/(d+1) .$$

Par exemple, dans M_3 , il y a deux composantes hyperboliques de période deux, leur centre est i et $-i$ respectivement, leurs arguments-racines sont $\{ 0, [01] , 0, [10] \}$ et $\{ 0, [21] , 0, [12] \}$ respectivement.

4.2 Membres de l'espace de paramètres

Définition. On appelle $M(t)$ membre d'argument interne t de M_d ,

l'adhérence de la composante de $M - \{x(t)\}$ qui ne contient pas 0. On note $\mathcal{D}_t = M(t) \cap \mathcal{D}$ (qui est vide si t est irrationnel ([Y])).

Soient $c \in \mathcal{D}_t$ et $\theta, \tilde{\theta}$ le plus petit et le plus grand argument associé à c dans M_d donc associé à f_c ; alors $\theta_0(t) \leq \theta \leq \tilde{\theta} \leq \theta_{d-1}(t)$, et donc $m(c) \subset m(c(t))$. D'après le corollaire 3.5, on déduit $\text{Arg}(\alpha_c) = \text{Arg}(\alpha_{c(t)})$ pour tout $c \in \mathcal{D}_t$. De plus, on a

Lemme 4.1. Soient $t \in S^1$, $\theta_0(t) = p/(d^q - 1)$, $\theta_{d-1}(t) = (p + d - 1)/(d^q - 1)$, $c \in \mathcal{D}_t$, $f = f_c$, $z \in P_{J_c}$ et $\xi, \eta \in \text{Arg}(z)$ de période q' . Alors $q' \geq q$, et $q' = q$ si et seulement si $z = \alpha_c$.

Démonstration. Comme $[\alpha_c, c]$ est une région obligatoire (12 de 3.1), l'intervalle $[\theta_0(t), \theta_{d-1}(t)]$ est une zone obligatoire. On peut donc supposer $\xi, \eta \in [\theta_0(t), \theta_{d-1}(t)]$. Comme $[\theta_0(t), \theta_{d-1}(t)[$, $[d\theta_0(t), d\theta_{d-1}(t)[$, ..., $[d^{q-1}\theta_0(t), d^{q-1}\theta_{d-1}(t)[$ sont deux à deux disjoints, on a $q' \geq q$. L'ensemble Θ des arguments de période q dans $[\theta_0(t), \theta_{d-1}(t)[$ est $\{\theta_i = (p+i)/(d^q - 1), i=0, 1, \dots, d-2\}$. Soit ζ un argument associé à f_c . Les ensembles $S_i = \{z \in J_c \mid \text{Arg}(z) \subset [(\zeta+i)/d, (\zeta+i+1)/d[$, $i=0, 1, \dots, d-1$ forment une partition de $J_c - \{0\}$. Pour $j \geq 0, k > 0, j+k \leq q-2$, on a $d^{q-1}k/(d^q - 1) = d^{q-1}\theta_{j+k} - d^{q-1}\theta_j$ et $(d-1)/d > d^{q-1}k/(d^q - 1) > 1/d$. Donc $\gamma_c(d^{q-1}\theta_{j+k})$ et $\gamma_c(d^{q-1}\theta_j)$ ne sont pas dans un même S_i . On en déduit que les $\gamma_c(\theta_0), \gamma_c(\theta_1), \dots, \gamma_c(\theta_{d-2})$ sont deux à deux distincts. Donc $\xi \notin \Theta$ et $q' \neq q$. D'où $q' > q$.

Qqfd.

Si $t \neq t'$, alors les deux orbites $Or(\theta_0(t))$ et $Or(\theta_0(t'))$ sont disjointes. Comme M est symétrique par rapport à l'axe réel, M_t et M_{1-t} sont conjugués, et $\text{Arg}(\alpha_{c(1-t)}) = \{1 - \theta \mid \theta \in \text{Arg}(\alpha_{c(t)})\} = 1 - \text{Arg}(\alpha_{c(t)})$.

Il en résulte que:

Lemme 4.2. Deux points c et c' sont dans le même membre de M_d si et seulement si $\text{Arg}(\alpha_c) = \text{Arg}(\alpha_{c'})$. Ils sont dans des membres conjugués de M_d si et seulement $\text{Arg}(\alpha_c) = 1 - \text{Arg}(\alpha_{c'})$, si et seulement s'il existe η tel que $\eta \in \text{Arg}(\alpha_c)$ et $1 - \eta \in \text{Arg}(\alpha_{c'})$.

En particulier, les $M(t_{2,j})$ sont deux à deux conjugués sauf éventuellement un (quand d est pair) qui intersecte l'axe réel et qui est donc conjugué à lui-même.

Pour chaque membre $M(t)$ de M_d on note $\theta(t)$, $\tilde{\theta}(t)$ les deux arguments externes de $\chi(t) = M(t) \cap \bar{W}_0$, qui sont aussi le plus petit et le plus grand argument-racine de $W(t)$. Soit $c \in M_d$. Connaissant un couple d'arguments η , η' équivalents pour f_c : $\eta \sim_c \eta'$, $\eta \neq \eta'$, on a

Un algorithme pour détecter dans quel membre de M_d se situe la valeur c (sauf si $d > 2$ et c est dans l'un des $M(t_{2,j})$):

Développons η et η' en base d :

$$\eta = 0, u_1 u_2 \dots$$

$$\eta' = 0, u'_1 u'_2 \dots$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $d^p(\eta) \sim_c d^p(\eta')$. Posons $\delta_i = |u_i - u'_i|$. Si la série δ_i se termine par $j000\dots$, $j \neq 0$, i.e. $\exists k$ tel que $\delta_k = j \neq 0$ et $\delta_n = 0$ pour tout $n \geq k$, alors le point d'aboutissement de $R_c(d^k \eta)$ et $R_c(d^k \eta')$ est le point critique 0 , et $d^{k+1}(\eta) = d^{k+1}(\eta') = \theta$ est un argument externe de c , il existe t_0 tel que $\theta \in [\theta(t_0), \tilde{\theta}(t_0)]$, donc $c \in M(t_0)$. Dans tous les autres cas $\gamma_c(\eta)$ n'est pas une préimage de 0 , on a $\delta_i = 0, 1$ ou $d-1$

d'après la propriété 11 de 3.1 : deux composantes $C_i - \{0\}$ et $C_j - \{0\}$ sont disjointes sauf si C_i et C_j sont consécutifs, i.e. si $|j-i|=1$ ou $|j-i|=d-1$. Si la série δ_i se termine par 1111..., alors $c \in M(t)$ pour t l'un des $t_{2,j}$, mais on ne sait pas lequel à priori. La série ne se termine jamais par $(d-1)(d-1)(d-1)(d-1)\dots$: sinon ceci implique que la future orbite périodique de $\gamma_c(\eta)$ est complètement contenue dans l'arc réglementaire $[0, \beta] - \{\beta\}$, ce qui contredit que $[\alpha_c, c]$ qui est disjoint de $[0, \beta]$ est obligatoire (12 de 3.1). Dans le cas où il existe un entier k tel que $\delta_k \neq 0$ et $\delta_{k+1} = 0$, on prétend qu'il existe t_0 tel que

$$\theta(t_0) \leq d^{k+1}\eta, d^{k+1}\eta' \leq \tilde{\theta}(t_0) \text{ et } c \in M(t_0)$$

pour la raison suivante: Pour $z = \gamma_c(\eta)$ et $\mathcal{L}_c = \cup [0, \beta_i]$ défini comme dans 3) et 4) de 3.1, les rayons $\tilde{R}(d^k\eta)$ et $\tilde{R}(d^k\eta')$ sont dans des différentes zones de $(\mathbb{C} - \mathcal{L}_c) \cup \cup_i R(i/d)$, tandis que $\tilde{R}(d^{k+1}\eta)$ et $\tilde{R}(d^{k+1}\eta')$ sont dans une même zone de $(\mathbb{C} - \mathcal{L}_c) \cup \cup_i R(i/d)$, donc $f_c^k(z) \in \mathcal{L}_c$ et $f_c^{k+1}(z) \notin \mathcal{L}_c$. Mais

$$f_c(\mathcal{L}_c) = [\alpha_c, \beta] \cup [\alpha_c, c] \subset \mathcal{L}_c \cup [\alpha_c, c],$$

on a $f_c^{k+1}(z) \in [\alpha_c, c]$. Donc $d^{k+1}\eta$ et $d^{k+1}\eta'$ se trouvent dans l'intervalle limité par les deux arguments externes $\zeta, \tilde{\zeta}$ de α_c adjacents à $[\alpha_c, c]$, et $\zeta, \tilde{\zeta}$ sont exactement les deux arguments externes de $\kappa(t_0)$ où t_0 est tel que $c \in M(t_0)$.

4.3. Modulation et chemin combinatoire

On pose $M = M_d$. Soit W une composante hyperbolique de M avec $c = c(W)$ le centre de W . Il existe une copie M_W de M , située dans M ,

et dans laquelle W correspond à la composante principale W_0 . Précisément, il existe une injection continue $\Psi_w : M \rightarrow M$ telle que $\Psi_w(0) = c$, $\Psi_w(W_0) = W$, et pour $M_w = \Psi_w(M)$, $\partial M_w \subset \partial M$. Pour $x \in M$, le point $\Psi_w(x)$ est appelé un modulé de c par x , et est noté par

$$c \perp x .$$

Soient $x \in \partial M$ et ξ un argument externe de x dans M . Alors à ξ correspond un argument externe ξ' de $c \perp x$ dans M , qui peut être obtenu par l'algorithme suivant: rappelons que la multiplication par d d'un argument θ est un shift à droite du développement de θ en base d , donc si θ est de période k le développement de θ se répète au bout du k -ième chiffre, notons $\theta_0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_{d-1}$ les arguments-racines de W (donc $\chi_M(\theta_0) = \chi_M(\theta_{d-1})$), développons les θ_i et ξ en base d :

$$\begin{aligned} \theta_i &= 0, [u_1^i u_2^i \dots u_k^i] \\ &= 0, u_1^i u_2^i \dots u_k^i u_1^i u_2^i \dots u_k^i \dots u_1^i u_2^i \dots u_k^i \dots, \quad i=0,1,\dots,d-1 \end{aligned}$$

et

$$\xi = 0, s_1 s_2 \dots s_n \dots ,$$

où k est la période de θ_i , alors

$$\xi' = 0, u_1^{s_1} u_2^{s_1} \dots u_k^{s_1} u_1^{s_2} u_2^{s_2} \dots u_k^{s_2} \dots u_1^{s_n} u_2^{s_n} \dots u_k^{s_n} \dots .$$

Donc si ξ est de période q , l'argument ξ' est de période kq . On note

$$\xi' = \{\theta_i\} \perp \xi .$$

On s'intéresse surtout aux arguments-racines d'une composante hyperbolique W' non primitive. Si la racine principale $c_0(W')$ de W' est au bord d'une autre composante hyperbolique W de période k dont le centre est $c(W)$, et $c_0(W')$ admet un argument interne t dans W , alors

$$c_0(W') = c(W) \perp \chi(t).$$

Donc W' peut être considérée comme un modulé de $c(W)$ par $W(t)$. Soient $\{\theta_i\}$ les arguments-racines de W et $\{\theta_i(t)\}$ ceux de $W(t)$; alors les arguments-racines de W' sont

$$\eta_j = \{\theta_i\} \perp \theta_j(t), \quad j=0, 1, \dots, d-1,$$

avec toujours $\chi_M(\eta_0) = \chi_M(\eta_{d-1}) = c_0(W')$. Comme $\theta_0(t)$ et $\theta_{d-1}(t)$ sont dans une même orbite pour la multiplication par d (4.1), il existe p tel que $d^p(\theta_0(t)) = \theta_{d-1}(t)$, autrement dit si

$$\theta_0(t) = 0, [\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \varepsilon_{p+1} \dots \varepsilon_q]$$

alors

$$\theta_{d-1}(t) = 0, [\varepsilon_{p+1} \dots \varepsilon_q \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p],$$

et par l'algorithme décrit plus haut

$$d^{pk} \eta_0 = \eta_{d-1},$$

c'est-à-dire que les deux arguments de la racine principale d'une composante hyperbolique non primitive sont toujours dans une même orbite pour la multiplication par d .

Rappelons que $m(c)$ pour $c \in \mathcal{D}$ est l'intervalle limité par le plus

petit et le plus grand argument associé à c . On définit un semi-ordre dans \mathcal{D} par

$$c < c' \Leftrightarrow \tilde{m}(c) \supset m(c'),$$

et on définit le chemin combinatoire de $c' \in \mathcal{D}$ par

$$\text{ch}(c') = \{c \in \mathcal{D} \mid c \leq c'\}.$$

Alors $\text{ch}(c')$ est totalement ordonnée et le point $0 \in W_0$ est l'élément minimal de $\text{ch}(c')$ pour tout $c' \in \mathcal{D}$. Rappelons que $c(t)$ est le centre de la composante hyperbolique $W(t)$ de racine principale $\chi(t) \in \partial W_0$ qui est d'argument interne t dans W_0 . On appelle $c \in \text{ch}(c')$ un point de bifurcation dans $\text{ch}(c')$ si $c \perp c(t) \in \text{ch}(c')$ pour un t différent des $t_{2,j}$.

Pour $c \in \mathcal{D}_0$, i.e. pour c tel que 0 soit périodique pour f_c , on note $p(c)$ la période de 0 pour f_c , qui est aussi la période des arguments- racines de la composante hyperbolique ayant c comme centre. On a

Proposition 4.3. Soient c un point de bifurcation dans $\text{ch}(c')$ et $\hat{c} \in \mathcal{D}_0 \cap \text{ch}(c')$ vérifiant $c < \hat{c}$, alors $p(c) < p(\hat{c})$.

Démonstration. Posons $k = p(c)$. La période k est aussi la période des arguments associés $\theta_0, \dots, \theta_{d-1}$ à c . Soient

$$0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_{d-2} \leq \theta_{d-1} \leq 1$$

$$\theta_i = 0, [u_1^i \ u_2^i \ \dots \ u_k^i], \quad i = 0, 1, \dots, d-1.$$

Les arguments associés à \hat{c} sont dans un intervalle limité par deux

arguments consécutifs associés à c , supposons que c'est l'intervalle $]\theta_j, \theta_{j+1}[$. Notons $a_j = c \perp c_{2,j}$, et $\eta_j, \tilde{\eta}_j$ le plus petit et le plus grand argument associé à a_j dans M_d . Alors les arguments associés à \hat{c} sont dans une composante de

$$]\theta_j, \theta_{j+1}[- [\eta_j, \tilde{\eta}_j] .$$

Comme

$$\theta_0(t_j) = 0, [j(j+1)], \text{ donc}$$

$$\eta_j = \{ \theta_i \} \perp \theta_0(t_j) = 0, [u_1^j u_2^j \dots u_k^j u_1^{j+1} u_2^{j+1} \dots u_k^{j+1}] ;$$

comme

$$\theta_{d-1}(t_j) = 0, [(j+1)j], \text{ donc}$$

$$\tilde{\eta}_j = \{ \theta_i \} \perp \theta_{d-1}(t_j) = 0, [u_1^{j+1} u_2^{j+1} \dots u_k^{j+1} u_1^j u_2^j \dots u_k^j] .$$

D'où

$$\theta_j < \eta_j < \tilde{\eta}_j < \theta_{j+1}$$

$$\eta_j - \theta_j = 0,0\dots00**\dots \leq 0,0\dots01 = 1/d^k < 1/(d^k - 1) \text{ et}$$

$$\theta_{j+1} - \tilde{\eta}_j = 0,0\dots00**\dots \leq 0,0\dots01 = 1/d^k < 1/(d^k - 1) .$$

Donc dans les intervalles $]\theta_j, \eta_j[$ et $[\tilde{\eta}_j, \theta_{j+1}[$ il existe au plus un argument périodique pour la multiplication par d de période inférieure ou égale à k . Or le point \hat{c} a plus d'un argument associé, et ses arguments associés sont dans

$$]\theta_j, \eta_j[\cup [\tilde{\eta}_j, \theta_{j+1}[,$$

ils sont donc de période supérieure à k , autrement dit

$$k = p(c) < p(\hat{c}) .$$

Cqfd.

Dans [La1] et [La2], P. Lavaurs a montré qu'il y a une bijection

entre l'ensemble $ch(c') \cap \mathcal{D}_0$ et l'ensemble des cycles périodiques de K_c dont chaque point admet au moins deux arguments externes, et en particulier une bijection entre l'ensemble des points de bifurcation dans $ch(c')$ et l'ensemble des cycles périodiques dans K_c composés par des points de branchement dans l'arbre de Hubbard H_c , autrement dit des points ayant chacun plus de deux arguments externes. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points de branchement dans H_c , il n'y a qu'un nombre fini de points de bifurcation dans $ch(c')$. On a enfin

Corollaire 4.4. Supposons c_0, c_1, \dots, c_n les points de bifurcation dans $ch(c')$, à l'ordre $c_0 < c_1 < \dots < c_n$, alors

$$p(c_0) < p(c_1) < \dots < p(c_n).$$

Chapitre 5. Accouplements

5.1. Accouplement

Soient f et g deux polynômes moniques de degré d à K_f, K_g connexes. Pour pouvoir utiliser la métrique introduite dans la proposition 1.5, on va modifier la définition de l'accouplement topologique de f et g . On fixe un niveau de potentiel s positif, on pose

$$L_f = \{z \in \mathbb{C} \mid G_f(z) \leq s\},$$

$$L_g = \{z \in \mathbb{C} \mid G_g(z) \leq s\}$$

et on identifie S^2 à

$$L_f \amalg L_g / \psi_f(e^{s+2i\pi\theta}) \sim \psi_g(e^{s-2i\pi\theta}),$$

et \mathbb{T} avec l'équateur E par

$$\theta \longrightarrow \psi_f(e^{s+2i\pi\theta}).$$

On choisit ensuite un niveau $s' < s/d$ positif et on définit un difféomorphisme strictement croissant h de $[0, 2s]$ vers lui-même avec

$$h(t) = dt, \quad h(2s-t) = 2s-dt \quad \text{pour } t \in [0, s'], \quad \text{et } h(s) = s$$

(Figure 5.1). On définit l'accouplement topologique $F = f \amalg g$ de f et g par

$$F|_{K_f} = f, \quad F|_{K_g} = g$$

$$F(\psi_f(e^{t+2i\pi\theta})) = \psi_f(e^{h(t)+2i\pi d\theta}), \quad \text{et}$$

$$F(\psi_g(e^{t+2i\pi\theta})) = \psi_g(e^{h(2s-t)+2i\pi d\theta}).$$

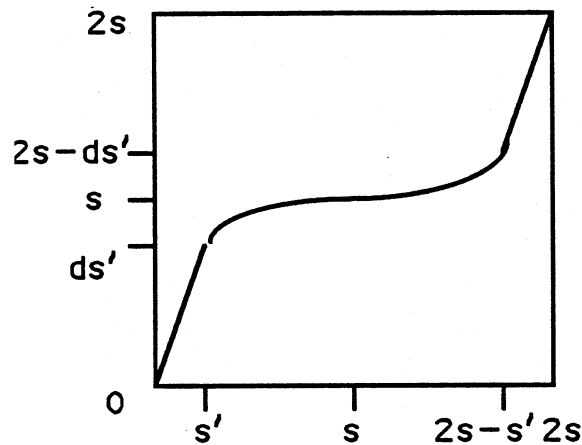


Figure 5.1. L'application h

F coincide par définition de h avec f (resp. avec g) pour $z \in L_f$ et $G_f(z) \leq s'$ (resp. pour $z \in L_g$ et $G_g(z) \leq s'$). On a

$$F(\theta) = d\theta$$

pour $\theta \in E$. L'application F est topologiquement conjuguée à $f \amalg g$ définie en 1.1. En particulier, l'équivalence au sens de Thurston de F à une fraction rationnelle ne dépend pas de choix de s , s' et h. On peut donc donner la définition suivante: f et g sont strictement accouplables si F est équivalent (au sens de Thurston) à une fraction rationnelle. Dans $S^2 = L_f \amalg L_g / \sim$, on pose

$$J = J_f \cup J_g ; K = K_f \cup K_g ;$$

$$N(t) = N_f(t) \text{ et } \Psi(t, \theta) = \psi_f(e^{t+2i\pi\theta}) \text{ pour } 0 < t \leq s ;$$

$$N(t) = N_g(2s-t) \text{ et } \Psi(t, \theta) = \psi_g(e^{2s-t-2i\pi\theta}) \text{ pour } 2s > t \geq s .$$

L'ensemble $(L_f \amalg L_g / \sim) - \tilde{K}$ est réunion des rayons externes de f et de g, (en effet $R_f(\theta) \cap L_f$ et $R_g(-\theta) \cap L_g$ se coincident au point θ de

l'équateur). On appelle rayon externe d'argument θ de F l'ensemble

$$R_F(\theta) = R(\theta) = (R_f(\theta) \cap L_f) \cup (R_f(-\theta) \cap L_g) / \sim .$$

Une réunion finie de rayons externes d'arguments rationnels de F forme un graphe. On note Q l'ensemble des graphes ainsi obtenus admettant chacun un nombre fini de composantes connexes, et PQ le sous-ensemble des éléments de Q périodiques par F .

Soient $f: z \rightarrow z^d + c$ et $g: z \rightarrow z^d + c'$ à P_f, P_g finis et $F = f \cup g$. Alors F est un revêtement ramifié de degré d à P_F fini, et F admet seulement deux valeurs critiques. Avec les notations de la proposition 1.5 on pose

$$A = A_f \cup A_g, \mu = \mu_f \cup \mu_g \text{ et } \tau = \min(\tau_f, \tau_g).$$

Pour la métrique μ , le revêtement F est fortement dilatant au voisinage de $K - \tilde{A}$. Dans le théorème 2 un cycle de Levy est toujours composé de courbes à homotopie près. Mais en utilisant cette métrique μ , on verra comme complément de la proposition ci-dessous qu'on peut déduire un cycle de Levy à un cycle de graphes de PQ . On dit qu'un ensemble $X \subset S^2$ est mono-invariant par F si $F|_X: X \rightarrow X$ est un homéomorphisme, ceci entraîne que $X \subset F^{-1}(X)$. On pose

$$E_0 = \bigcup_{s' \leq t \leq 2s - s'} N(t) = \Psi(E \times [s', 2s - s'])$$

et on note

$$\mathcal{R} = \left\{ \gamma \text{ courbe fermée dans } S^2 - A \mid \gamma \cap E_0 = \Psi(Y \times [s', 2s - s']) \right. \\ \left. \text{avec un } Y \subset E \text{ fini} \right\} .$$

On munit dans l'ensemble des fermés de $S^2 - \tilde{A}$ la distance de Hausdorff D .

On a

Proposition 5.1. Soit $X=X_0$ une réunion de sous-ensembles connexes fermés disjoints de S^2 où ∂X est une réunion finie de courbes de \mathfrak{R} . Supposons qu'une partie X_1 de $F^{-1}(X_0)$ est isotope à X_0 (rel P_F) avec $F: X_1 \xrightarrow{\approx} X_0$ un homéomorphisme. On peut donc relever l'isotopie par cette branche de F^{-1} et obtenir une suite $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ telle que $F: X_{n+1} \xrightarrow{\approx} X_n$ soit un homéomorphisme ($n=0, 1, 2, \dots$) avec X_{n+1} isotope à X_n . Alors l'ensemble $X_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ existe, il est compact, mono-invariant par F , et

$$X_\infty = G_f \cup G_g \cup \Psi(Y \times [0, 2s])$$

avec $G_f \subset K_f$, $G_g \subset K_g$, $Y \subset E$, et G_f, G_g et Y finis.

Complément 1. L'ensemble $Y = X_\infty \cap E$ est composé par des arguments rationnels à dénominateur premier à d , et X_∞ est un graphe de PQ .

C'est immédiat par le lemme 1.2 et par la forme de X_∞ .

Complément 2. Tout ensemble X fermé dans S^2 mono-invariant par F et à bord dans \mathfrak{R} , est d'intérieur vide.

On peut appliquer la proposition 5.1 à X et on obtient $X_\infty = X$.

Complément 3. Soient $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ un cycle de Levy, et $X = \bigcup_i \gamma_i$. Alors l'ensemble X_∞ obtenu par la proposition 5.1 est un graphe de PQ .

Démonstration de la proposition 5.1. Par hypothèse, on voit d'abord $X \cap \tilde{A} = \emptyset$, car si $z \in X \cap \tilde{A} \cap P_F$, alors z est dans l'orbite d'une des deux valeurs critiques de F et cette orbite est périodique. Comme $z \in X_1$, on a $F(z) \in X \cap \tilde{A} \cap P_F$, ainsi toute l'orbite de z est dans X , donc il existe une valeur critique dans X , ce qui est impossible par hypothèse que X_1 est isotope à X .

On pose $Y_n = X_n \cap E$,

$$E_n = F^{-n}(E_0) = \Psi(E \times [(1/d^n)s', 2s - (1/d^n)s']),$$

et

$$B_n = X_n \cap (S^2 - \tilde{E}_n).$$

Par hypothèse,

$$X_0 = (X_0 \cap E_0) \cup B_0 = \Psi(Y_0 \times [s', 2s - s']) \cup B_0,$$

donc

$$X_n = (X_n \cap E_n) \cup B_n = \Psi(Y_n \times [(1/d^n)s', 2s - (1/d^n)s']) \cup B_n.$$

Comme $\partial X_0 \cap N(t)$ est fini pour tout t , les nombres des composantes connexes de Y_n et de B_n sont finis et constants. On a

$$D(Y_{n+1}, Y_n) \leq D(Y_n, Y_{n-1})/d$$

et

$$D(B_{n+1}, B_n) \leq D(B_n, B_{n-1})/\tau$$

et par conséquent $Y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n$ et $B_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ existent (car l'ensemble des fermés de $S^2 - \tilde{A}$ est complet par rapport à la métrique D), et $B_\infty \subset K_f \cup K_g$. Il en résulte que $X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ existe, et

$$X_\infty = \Psi(Y_\infty \times [0, 2s]) \cup B_\infty.$$

Si on note λ_n (resp. ρ_n) le diamètre maximal des composantes connexes de Y_n (resp. de B_n), alors

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1}/d \quad \text{et} \quad \rho_n \leq \rho_{n-1}/\tau,$$

donc $\lambda_n \rightarrow 0$ et $\rho_n \rightarrow 0$. Par conséquent, $Y=Y_\infty$ et $G_f \cup G_g = B_\infty$ sont finis.

Cafd.

5.2. Classes d'équivalences des points fixes dans l'accouplement

Soient $f_c : z \rightarrow z^d + c$ et $f_{c'} : z \rightarrow z^d + c'$ avec $c \in \mathcal{D}_t$ et $c' \in \mathcal{D}_{t'}$; $S^2 = L_c \amalg L_{c'} / \sim$, $F = f_c \amalg f_{c'}$. Notons $\omega = F^{-1}(c)$ et $\omega' = F^{-1}(c')$ (points critiques).

Définition. On définit " \approx " la relation d'équivalence algébrique engendrée par $x \approx y$ s'il existe θ tel que $x, y \in R_F(\theta)$. On note $[x]$ la classe de x .

Si $x \in Q$, alors $[x]$ est le graphe maximal de Q contenant x , et toute extrémité de $[x]$ est un point de $J = J_c \cup J_{c'}$ ayant un seul argument externe, et $[x] \cap E$ est fini. Rappelons que la prépériode d'un point x est l'entier j minimal tel que $F^j(x)$ soit périodique. Comme P_F est la réunion de l'orbite de ω et de l'orbite de ω' par F , pour tout entier $j > 0$ donné, il existe au plus un point dans chacune de ces deux orbites, donc au plus deux points dans P_F ayant j comme prépériode. Par conséquent, si $x \in J$ est strictement prépériodique, la classe $[x]$ est aussi strictement prépériodique et $\# [x] \cap P_F \leq 2$. Comme ω et c (resp. ω' et c') ont des différentes prépériodes, on a $[\omega] \cap [c] = \emptyset$ (resp. $[\omega'] \cap [c'] = \emptyset$). Si $[c] \neq [c']$, alors $[\omega]$ et $[\omega']$ sont des revêtements de degré d de $[c]$ et de

$[c']$ ramifiés au dessus de ω et de ω' respectivement. Si $[c]=[c']$, alors $[\omega]=[\omega']$ est un revêtement de $[c]$ de degré d ramifié au dessus de ω et ω' . L'application F préserve la relation d'équivalence, i.e. si $F(x)=y$, $F([x])=[y]$, de plus, $[x]$ est une composante connexe de $F^{-1}([y])$, et si $\omega, \omega' \in [x]$, alors

$$F|_{[x]} : [x] \longrightarrow [y]$$

est un homéomorphisme et $[x]$ est l'une des d composantes connexes de $F^{-1}([y])$.

On dit qu'une classe $[x]$ est non contractile si $[x]$ contient une courbe fermée. Autrement, $[x]$ est contractile. Par exemple, si $[x]$ est un arc contenant deux points de P_F , elle est contractile. Si $F(x)=y$ et si $[x]$ ne contient pas en même temps ω et ω' , (ou également si $[y]$ ne contient pas en même temps c et c'), alors $[x]$ est contractile si et seulement si $[y]$ est contractile. Si $[c]=[c']$, alors $[\omega]=[\omega']$ est toujours non contractile.

On s'intéresse ici surtout les classe d'équivalences contenant des points fixes de F . Pour $i=0, 1, \dots, d-2$, on note $\varepsilon_i(c)$ et $\varepsilon_i(c')$ les points fixes de f_c et de $f_{c'}$ ayant l'unique argument externe $i/(d-1)$, et α_c et $\alpha_{c'}$ les points fixes de f_c et de $f_{c'}$ ayant plus d'un argument externe (9) de 3.1). Dans $S^2 = L_c \amalg L_{c'} / \sim$, l'ensemble $\varepsilon_i = [\varepsilon_i(c)] = [\varepsilon_{d-1-i}(c')]$ est formé par un unique rayon externe de F , il est donc contractile, ($i=0, 1, \dots, d-2$). Quant à $[\alpha_c]$ et $[\alpha_{c'}]$, on a

Proposition 5.2. Soient $c \in \mathcal{D}_t$ et $c' \in \mathcal{D}_{t'}$. Alors $[\alpha_c] = [\alpha_{c'}]$, i.e. $\alpha_c \approx \alpha_{c'}$ si et seulement si $t+t'=1$, (qui est équivalent à

$$\text{Arg}(\alpha_c) = 1 - \text{Arg}(\alpha_{c'})$$

par le lemme 4.2).

Démonstration. \Rightarrow . Soit ℓ le chemin le plus court dans $[\alpha_c]$ joignant α_c et $\alpha_{c'}$. S'il existe $x \in J_c \cap \ell$ différent de α_c , alors $x \in PJ_c$ et les arguments externes de x ont une même période que les arguments de α_c . Ceci contredit le lemme 4.1, on déduit donc $\ell \cap J_c = \{\alpha_c\}$, et pareillement $\ell \cap J_{c'} = \{\alpha_{c'}\}$. Ainsi ℓ est formé par un unique rayon externe $R(\eta)$ de F , et on a $\eta \in \text{Arg}(\alpha_c)$ et $1 - \eta \in \text{Arg}(\alpha_{c'})$. D'après le lemme 4.2, on a $\text{Arg}(\alpha_c) = 1 - \text{Arg}(\alpha_{c'})$, d'où le résultat.

\Leftarrow . C'est évident par $\text{Arg}(\alpha_c) = 1 - \text{Arg}(\alpha_{c'})$.

Cqfd.

5.3. Araignées

Soient $f_c : z \rightarrow z^d + c$ et $f_{c'} : z \rightarrow z^d + c'$ avec $c \in \mathcal{D}_t$ et $c' \in \mathcal{D}_{t'}$; $F = f_c \perp f_{c'}$. On étudie ici les classes d'équivalence de F qui contiennent au moins un point périodique ayant plus de deux arguments externes.

Rappelons que $Or(z)$ est l'orbite de $z \in J = J_c \cup J_{c'}$ par F et $Or(\theta)$ est l'orbite de $\theta \in E$ (E l'équateur) par la multiplication par d , que dans $S^2 = L_c \perp L_{c'} / \sim$ le rayon externe de F d'argument θ est $R_F(\theta) = R(\theta)$, que Q est l'ensemble des graphes connexes obtenus par une réunion finie de rayons externes de F d'arguments rationnels, et que PQ est l'ensemble des éléments de Q périodiques par F . On pose successivement

$$PJ = PJ_c \perp PJ_{c'} = \{z \in J \mid z \text{ périodique et } \# \text{Arg}(z) \geq 2\};$$

$$S = \{z \in PJ \mid \text{les arguments de } z \text{ sont dans une même orbite}\};$$

$$S_1 = \{z \in S \mid \# \text{Arg}(z) = 2\};$$

$$S_2 = \{z \in S \mid \# \text{Arg}(z) \geq 3\} = \{z \in PJ \mid \# \text{Arg}(z) \geq 3\} \text{ (Lemme 3.4) ;}$$

$T = PJ - S = \{z \in PJ \mid \# \text{Arg}(z) = 2, \text{ les deux arguments de } z \text{ ne sont pas dans une même orbite}\}.$

Soit ℓ un graphe périodique de Q . Comme deux rayons externes de F ne se rencontrent pas sauf éventuellement à leurs extrémités, les points de branchement de ℓ sont dans J et par suite sont des points de S_2 . Soient $z_1, z_2 \in T$ d'un même côté de E avec $\text{Arg}(z_i) = \{\theta_i, \eta_i\}$, $i=1, 2$. Si $\text{Or}(\theta_1) = \text{Or}(\theta_2)$, alors $\text{Or}(z_1) = \text{Or}(z_2)$ et donc $\text{Or}(\eta_1) = \text{Or}(\eta_2)$.

Soit $z \in S$ de période p , et $(R_{z,1}, R_{z,2}, \dots, R_{z,n})$ les rayons externes de F aboutissant en z , ordonnés dans le sens que $R_{z,i+1}$ suit $R_{z,i}$ à partir de $R_{z,1}$ choisi arbitrairement (Lemme 3.4). Si l'on a $F^p(R_{z,i}) = R_{z,i+m} \pmod{n}$, alors d'après le lemme 3.4 c), l'entier m ne dépend pas de i et la fraction m/n est irréductible (i.e. m est premier à n), qui est nommée le nombre de rotation combinatoire de z . Il existe donc k qui est un multiple de p tel que $F^k(R_{z,i}) = R_{z,i+1} \pmod{n}$. On oriente $R_{z,1}$ en mettant une flèche de z vers l'équateur, et on prolonge $R_{z,1}$ dans PQ suivant cette direction jusqu'au premier moment qu'on rencontre un point de J qui n'est pas dans T , on note ce point $a_{z,1}$ et on note le chemin obtenu $\ell_{z,1}$. On pose $a_{z,i+1} = F^{ik}(a_{z,1})$ et $\ell_{z,i+1} = F^{ik}(\ell_{z,1})$, $i=1, 2, \dots, n-1$. Alors les $\ell_{z,i}$ sont deux à deux disjoints sauf éventuellement à leurs extrémités, et on définit l'araignée de z par

$$A(z) = \bigcup_{1 \leq j \leq n} \ell_{z,j}.$$

Par construction, les $a_{z,i}$ sont dans une même orbite, ils ne sont pas dans T (car $a_{z,1}$ ne l'est pas) et les autres points de $\ell_{z,i} \cap J$ sont dans T . Il en résulte que $A(z)$ ne dépend pas du choix de $R_{z,1}$. En effet $A(z)$

vérifie encore les propriétés suivantes:

a) Si $\exists 0 < u, v < n$ tels que $a_{z,u} = a_{z,u+v \pmod n}$, alors $a_{z,i} = a_{z,j} = x$ pour tous i, j , et $[z] = A(x) = A(z)$.

Preuve. Comme $F^{vk}(a_{z,u}) = a_{z,u}$, on a $F^{vk}(a_{z,i}) = a_{z,i}$ i.e. $a_{z,i} = a_{z,i+v \pmod n}$ pour tout i . Vu l'orientation des ℓ_i correspondante à celle des R_i , on déduit que $a_{z,i} = a_{z,j}$ pour tous i, j . Réappliquons le résultat à $x = a_{z,1} = a_{z,i}$, on a $[z] = A(x) = A(z)$.

Par conséquent, x et z ont le même nombre de rayons externes, même période, et des nombres de rotation opposés (i.e. la somme des nombres de rotation combinatoire de x et de y est 1).

b) Si $x = a_{z,1} \in S$, alors $[z] = A(x) = A(z)$.

Preuve. Posons $y = a_{z,2}$, il suffit de montrer $y = x$, le reste est démontré par a).

Regardons les araignées $A(x)$ et $A(y)$ en choisissant pour $R_{x,1}$ et $R_{y,1}$ les rayons externes de x et de y occupés par $\ell_{z,1}$ et $\ell_{z,2}$ respectivement, on a donc $a_{x,1} = a_{y,1} = z$ et les $a_{x,i}, a_{y,i}$ sont dans une même orbite. L'application $F^k: A(x) \rightarrow A(y)$ préserve l'orientation des rayons externes de x et de y , par suite $F^k(a_{x,i}) = a_{y,i}$ pour tout i . Or $F^k(a_{x,1}) = a_{y,1} = a_{x,1}$, c'est-à-dire que la période de l'orbite de $a_{x,1}$ divise k , on a $a_{x,i} = F^k(a_{x,i}) = a_{y,i}$ pour tout i . Vu l'orientation des rayons externes de x et de y , l'ensemble $\{a_{x,i}\}$ ne contient qu'en effet au plus deux points.

Supposons d'abord que $x \in S_2$, i.e. x admet au moins trois arguments externes. Alors il existe u, u' tels que $a_{x,u} = a_{x,u'}$. Appliquons le résultat a) à x avec $a_{x,u}, a_{x,u'}$, on déduit que $[x] \cap S = \{z, x\}$, en particulier, $y = a_{z,2} = x$.

Ainsi $x \in S_2$ entraîne $z \in S_2$. Si $z \in S_1$ alors $x, y \in S_1$. D'après le

lemme 3.4 , pour p la période de z , l'entier $2p$ est la période des arguments externes de z donc des arguments de x . Et par le même lemme p est la période de x . Mais $F^p(x)=y$ puisque $F^p(R_{z,1})=R_{z,2}$, d'où $x=y$.

On peut énoncer alors

Lemme 5.3. Soit γ un graphe connexe de PQ non contractile et contenant un point $z \in S_2$, alors γ contient un autre point unique $x \in S$, et x et z ont même période, même nombre d'arguments externes, des nombres de rotations combinatoires opposés. De plus, x et z ne sont pas d'un même côté de l'équateur E .

Démonstration. Les extrémités de $A(z)$ sont dans S sinon γ est contractile, donc par a) et b) le point x existe et vérifie toutes les conditions du lemme sauf la dernière: il reste donc à prouver que x et z ne sont pas d'un même côté de E . Supposons que x et z sont d'un même côté de E , par exemple, $x, z \in J_{c'}$. Si $Or(x)$ et $Or(z)$ sont disjointes, alors le cycle de x et le cycle de z représentent deux points de bifurcation dans le chemin combinatoire $ch(c')$ de c' (4.2), avec la période de x égale à la période de z , ceci contredit le corollaire 4.4 . Si $Or(x)=Or(z)$, alors pour $n (\geq 3)$ le nombre total des arguments externes de x (donc de z) , et $m(x)/n$, $m(z)/n$ les nombres de rotation combinatoire de x et de z respectivement, on a $m(x)=m(z)$ et $m(x)/n+m(z)/n=1$. Ceci est impossible car $m(x)$ est premier à n par le lemme 3.4 c) .

Qqfd.

Corollaire 5.4. Soient $\{\ell_1, \dots, \ell_u\}$ un cycle périodique (i.e.

$F(\ell_i) = \ell_{i+1} \pmod{u}$) de courbes fermées dans PQ , et G_1, \dots, G_s les
composantes connexes de $S^2 - \bigcup_i \ell_i$. Alors chaque G_i est une classe de la
relation d'équivalence " \approx " et pour toute composante B de $S^2 - \bigcup_i \ell_i$,
chaque composante γ de ∂B est aussi une génératrice du cycle , i.e.

$$\bigcup_n F^n(\gamma) = \bigcup_i \ell_i ,$$

et pour toute composante B' de $S^2 - \bigcup_i \ell_i$ et toute composante γ' de
 $\partial B'$, il existe n tel que

$$\gamma' = F^n(\gamma) .$$

Démonstration. Si $\ell_1 \cap S_2 = \emptyset$, alors tout point dans $\ell_1 \cap PJ$ admet
exactement deux arguments externes, donc $\ell_1 = [x]$ pour $x \in PJ \cap \ell_1$ et les
 ℓ_i sont deux à deux disjoints. Par conséquent, $s = u$ et $G_i = \ell_i = [F^{i-1}(x)]$.

S'il existe $z \in \ell_1 \cap S_2$, alors $\ell_1 \cap S = \{x, z\}$ par le lemme 5.3 , et
pour G_1, G_2, \dots, G_s les composantes connexes de $\bigcup_i \ell_i$, avec $\ell_1 \subset G_1$,
et $F(G_i) = G_{i+1} \pmod{s}$, on a

$$G_i = A(F^{i-1}(z)) = A(F^{i-1}(x)) = [F^{i-1}(z)] .$$

Le reste est évident par le même lemme.

Qfd.

Chapitre 6. Accouplements dégénérés et orbifold non hyperbolique

6.1. Accouplements dégénérés

Soient $f_c: z \rightarrow z^d + c$; $f_{c'}: z \rightarrow z^d + c'$; P_f, P_g finis et $F=f \cup g$. Notons $\omega = F^{-1}(c)$ et $\omega' = F^{-1}(c')$ (les points critiques). Rappelons que dans $S^2 = L_c \cup L_{c'} / \sim$, on note $J = J_c \cup J_{c'}$ et E l'équateur, et qu'un cycle de Levy est un ensemble de courbes fermées simples $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ dans $S^2 - P_F$, ces courbes sont non périphériques, deux à deux disjointes et deux à deux non homotopes rel P_F , aucune des γ_j ne sépare les deux valeurs critiques, et une composante de $F^{-1}(\gamma_j)$ est isotope à γ_{j-1} (ou à γ_n si $j=1$).

Définition. On dit qu'un cycle de Levy $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ est un cycle de Levy dégénéré pour F si en appliquant la proposition 5.1 à $X = \bigcup_i \gamma_i$ on obtient pour X_∞ une réunion disjointe de graphes connexes périodiques contractiles (i.e. ne contenant pas de courbe fermée).

Supposons qu'il existe $x \in P_F$ tel que $\# [x] \cap P_F \geq 2$ et $[x]$ contractile, on peut supposer que $x = F^k(c)$, $k \geq 0$. Alors pour le futur cycle périodique $F^j(x)$, ... , $F^{j+p-1}(x)$ de x , chaque classe $[F^{j+i}(x)]$ est contractile et contient au moins deux points de P_F , $0 \leq i \leq p-1$. La frontière γ_i d'un petit voisinage de $[F^{j+i}(x)]$ est une courbe non périphérique ($\{c, c'\}$ et $[F^{j+i}(x)]$ sont dans des composantes différentes de $S^2 - \gamma_i$), et $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{p-1}\}$ forme un cycle de Levy dégénéré. Par le théorème 2 le revêtement ramifié F n'est pas équivalent au sens de Thurston à une fraction rationnelle. Mais on peut encore "accoupler" f_c et $f_{c'}$ d'une façon dégénérée. Supposons $[c] \cap [c'] = \emptyset$, alors par 5.2 pour

tout x , la classe $[x]$ est contractile si et seulement si $[F(x)]$ est contractile. On construit un revêtement ramifié F' de la façon suivante:

Posons $P=P_F$ si $[c']$ (donc $[y']$ pour tout y' dans l'orbite directe de c') est contractile, ou P égale à l'orbite de c (avec c inclus) sinon. Alors pour tout $y \in F^{-1}(P)$, l'ensemble $[y]$ est contractile. Soient V_i un petit voisinage de $[x_i]$ pour $x_i \in P$ tel que

$$(V_i - [x_i]) \cap P_F = \emptyset ; V = \bigcup_i V_i \text{ et}$$

$$V' = F^{-1}(V) = \bigcup_j V'_j \text{ avec } x_j \in V'_j \cap F^{-1}(P).$$

Prenons une application continue ψ (resp. ψ') de S^2 dans S^2 vérifiant que ψ (resp. ψ') est l'identité sur $S^2 - V$ (resp. sur $S^2 - V'$), que $\psi([x_i]) = \{\tilde{x}_i\}$ (resp. $\psi'([x_j]) = \{\tilde{x}_j\}$) est un point unique, et que ψ (resp. ψ') est un homéomorphisme de $V_i - [x_i]$ à $V_i - \{\tilde{x}_i\}$ (resp. de $V'_j - [x_j]$ à $V'_j - \{\tilde{x}_j\}$) pour tout i (resp. pour tout j). On définit F' de $\psi'(S^2)$ à $\psi(S^2)$ par

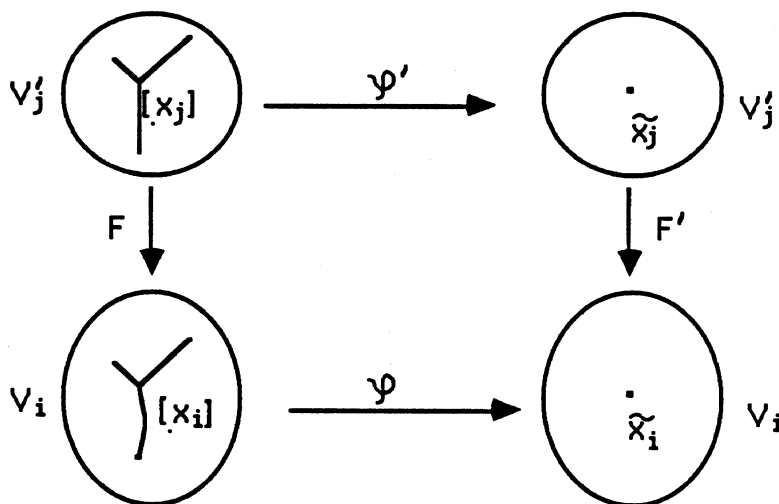


Figure 6.1.

$F'|_{\varphi'(S^2)-V'} = F$, et

$F'|_{V'_j} = \varphi \circ F \circ \varphi'^{-1}$ et particulier si $F([x_j]) = [x_i]$, $F'(\tilde{x}_j) = \tilde{x}_i$

pour tout j (Figure 6.1). On a $P_{F'} = (P_F - P) \cup \{\tilde{x}_i | x_i \in P\}$. On appelle F' l'accouplement dégénéré de f_c et $f_{c'}$.

Dans les autres cas, i.e. si chaque classe $[x]$ contient au plus un point postcritique, ou si chaque classe qui contient au moins deux points postcritiques est non contractile, ou si $[c] = [c']$, on peut aussi définir l'accouplement dégénéré F' en prenant simplement $F' = F$. Par exemple, si c et c' sont tous les deux périodiques pour F , ils sont dans l'intérieur de leur ensemble de Julia rempli, et on prend donc $F' = F$.

En tout cas l'accouplement dégénéré F' admet un cycle de Levy si et seulement si F admet un cycle de Levy non dégénéré, ou bien $[c] = [c']$ et $[c]$ est contractile pour F (donc $F' = F$).

Définition. Deux polynômes f_c et $f_{c'}$ à ensemble postcritique fini sont accouplables si l'accouplement dégénéré F' de f_c et $f_{c'}$ est équivalent à une fraction rationnelle au sens de Thurston.

Combinant le critère de Thurston et le critère de Levy, on a

Théorème 3. Soient $F = f_c \# f_{c'}$ et F' l'accouplement dégénéré de f_c et $f_{c'}$. Si F' est à orbifold hyperbolique, alors f_c et $f_{c'}$ sont non accouplables si et seulement si, ou bien il existe un cycle de Levy non dégénéré pour F , ou bien $[c] = [c']$ est contractile pour F (donc aussi pour $F' = F$).

6.2. Accouplements dégénérés à orbifold non hyperbolique

Soient $f_c : z \rightarrow z^d + c$, $f_{c'} : z \rightarrow z^d + c'$, $F = f_c \perp f_{c'}$ et F' l'accouplement dégénéré de f_c et $f_{c'}$. Par définition d'orbifold dans le chapitre 2, $\nu(x) \geq d$ pour tout $x \in P_{F'}$.

Lemme 6.1. Si $O_{F'}$ est non hyperbolique, alors ou bien c ou $c'=0$, ou bien c et c' sont tous les deux strictement prépériodiques pour F . Dans ce dernier cas, on a soit $\#P_{F'}=3$; soit $\#P_{F'}=4$ avec $O_{F'}$ ayant les poids $(2,2,2,2)$.

Démonstration. Supposons que c, c' sont non nuls et au moins un des c, c' par exemple c est périodique pour F donc pour F' , alors comme $\nu_{F'}(c)$ est un multiple de $d \cdot \nu_{F'}(0)$ et $\nu_{F'}(0)$ est un multiple de $\nu_{F'}(c)$, on a $\nu_{F'}(x) = \infty$ pour tout x dans l'orbite de c , mais cette orbite contient au moins deux points, donc

$$\chi(O_{F'}) \leq -\sum_{x \in O_{F'}(c')} (1 - 1/\nu_{F'}(x)) < 0$$

i.e. $O_{F'}$ est toujours hyperbolique.

Les deux valeurs critiques c, c' sont toujours distinctes pour F' et elles ne sont pas fixes, donc $\#P_{F'} \geq 3$. Si $\#P_{F'} \geq 5$, alors la caractéristique d'Euler de $O_{F'}$ vérifie

$$\chi(O_{F'}) \leq 2 - 5 \times (1 - 1/d) < 0,$$

donc $O_{F'}$ est toujours hyperbolique. Si $\#P_{F'}=4$, on a

$$\chi(O_{F'}) \leq 2 - 4 \times (1 - 1/d)$$

qui est négatif sauf si $d=2$ et $O_{F'}$ a les poids $(2,2,2,2)$.

Cqfd.

Il existe une méthode de construire quelques fractions rationnelles à orbifold non hyperbolique (exemples de Lattès généralisés): soient $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un sous groupe avec $\Gamma \approx \mathbb{Z}^2$, et $\Delta \subset S^1$ un sous groupe avec $\Delta \cdot \Gamma = \Gamma$. Posons $E = \mathbb{C}/\Gamma$ et $\Sigma = E/\Delta$. Supposons $\Sigma \approx \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (on peut démontrer que c' est automatique si $\Delta \neq \{1\}$). Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\lambda \Gamma \subset \Gamma$, le quotient f dans Σ de l'application $t \rightarrow \lambda t$ est une fraction rationnelle à orbifold non hyperbolique (car le revêtement universel de O_f est \mathbb{C} ([DH3])).

Proposition 6.2. Soient c, c' tels que $O_{F'}$ soit non hyperbolique. Alors F' n'est pas équivalent à une fraction rationnelle si et seulement si c et c' sont dans des membres conjugués de M_d .

Démonstration. Si l'un des c, c' est égale à 0, par exemple $c'=0$, alors F est équivalent au sens de Thurston à l'application $\hat{f}: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}: \hat{f}|_{\mathbb{C}} = f_c$ et $\hat{f}(\infty) = \infty$. L'application \hat{f} est une fraction rationnelle, on voit donc que f_c et f_0 sont accouplables et $F' = F$.

Dans le cas où $c, c' \neq 0$, par le lemme 6.1, on a $\#P_{F'} = 3$ ou 4. Si $\#P_{F'} = 3$, alors par la proposition 9.2 de [DH3] l'application F' est toujours équivalent à une fraction rationnelle. Deux cas sont possibles:

$$I.1. \quad \omega \xrightarrow{F} c \xrightarrow{F} \varepsilon \xrightarrow{F} \varepsilon \quad \text{et} \quad \omega' \xrightarrow{F} c' \xrightarrow{F} \varepsilon' \xrightarrow{F} \varepsilon'$$

avec $\varepsilon, \varepsilon'$ points fixes de F et $[\varepsilon] = [\varepsilon']$ mais $[c] \neq [c']$. Ceci n'est pas possible pour $d=2$ car le point $[\varepsilon]$ pour F' a trois préimages: $[\varepsilon], c$ et

c' . La caractéristique d'Euler $\chi(O_{F'})=2-3(1-1/d)$ est négative sauf si $d=3$. Pour $d=3$, il existe 4 valeurs de c dans M_3 vérifiant

$$\omega \xrightarrow{f_c} c \xrightarrow{f_c} \varepsilon \xrightarrow{f_c} \varepsilon$$

qui sont $\gamma_M(1/3)$, $\gamma_M(2/3)$, $\gamma_M(1/6)$, $\gamma_M(5/6)$, et dans notre cas $c=c'$ est l'un de ces quatre valeurs pour que F vérifie les hypothèses. En fait la fraction rationnelle équivalente à F' est sous la forme

$$z \longrightarrow (z^3 \pm j)/(1 \pm jz^3) \text{ où } j=e^{2i\pi/3}=(-1+i\sqrt{3})/2,$$

et elle peut être réalisée comme un exemple de Lattès généralisé avec

$$\Gamma=\mathbb{Z} \oplus j\mathbb{Z}, \Delta=\{1, j, j^2\} \text{ et } \lambda=i\sqrt{3}.$$

II. $\omega' \xrightarrow{F'} c' = \omega \xrightarrow{F'} c \xrightarrow{F'} \beta \xrightarrow{F'} \beta$, alors

$\chi(O_{F'})=2-(1-1/d)-2(1-1/d^2)$ qui est négatif sauf si $d=2$. Dans M_2 , on peut déterminer que $c=-2 \in M(1/2)$ et $c'=\gamma_M(1/4) \in M(1/3)$ ou bien $c'=\gamma_M(3/4) \in M(2/3)$, c et c' sont dans les membres non conjugués de M_2 , et F' est équivalent à une fraction rationnelle de la forme $1/(2z^2-1)$, et celle-ci peut être réalisée comme un exemple de Lattès généralisé avec

$$\Gamma=\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}, \Delta=\{1, -1, i, -i\} \text{ et } \lambda=1+i.$$

Supposons que $\#P_{F'}=4$, par la proposition 6.1, $d=2$ et c, c' sont tous les deux strictement prépériodiques pour F . Trois cas sont possibles:

III. $[c]=[c']$, alors $F'=F$ et pour que $\#P_{F'}=4$ il faut

$$\omega \xrightarrow{F} c \xrightarrow{F} \beta \xrightarrow{F} \beta \text{ et}$$

$$\omega' \xrightarrow{F} c' \xrightarrow{F} \beta' \xrightarrow{F} \beta'$$

avec β, β' points fixes de F et $[\beta]=[\beta']$, on détermine que

$$c=c'=-2 = \gamma_M(\frac{1}{2}) \in M(1/2), F=f_{-2} \perp f_{-2}.$$

Le revêtement ramifié F n'est pas équivalent à une fraction rationnelle par la raison suivante: F est équivalent au quotient de $h : (x,y) \rightarrow (2x,y) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dans l'espace $S^2 \approx \Sigma = E/\pm$ où $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})$, comme h n'est pas \mathbb{C} -linéaire, son quotient n'est pas \mathbb{C} -linéaire non plus, donc n'est pas une fraction rationnelle.

IV. $[c] \neq [c']$ et $\omega \xrightarrow{F} c \xrightarrow{F} a \xrightarrow{F} \beta \xrightarrow{F} \beta$ et

$$\omega' \xrightarrow{F} c' \xrightarrow{F} a' \xrightarrow{F} \beta' \xrightarrow{F} \beta'$$

avec β, β' points fixes de F et $[a]=[a']$ et $[\beta]=[\beta']$, donc

$$\omega \xrightarrow{F'} c \searrow$$

$$\omega' \xrightarrow{F'} c' \xrightarrow{F'} a \xrightarrow{F} \beta \xrightarrow{F} \beta,$$

on détermine que soit $c=c'=\gamma_M(1/4) \in M(1/3)$ soit $c=c'=\gamma_M(3/4) \in M(2/3)$ (donc c et c' sont dans un même membre de M_2 qui n'est pas

conjugué à lui-même) et F' est équivalent à une fraction rationnelle de la forme

$$z \rightarrow (z^2 \pm i) / (1 \pm iz)$$

qui est conjuguée à $z \rightarrow \pm(i/2)(z+1/z)$. Cette fraction rationnelle est en fait un exemple de Lattès typique avec

$$\Gamma = \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}, \Delta = \{1, -1\} \text{ et } \lambda = 1+i.$$

V. $[c] \neq [c']$ et $\omega \xrightarrow{F} c \xrightarrow{F} a \xrightarrow{F} b \xrightarrow{F} a$ et

$$\omega' \xrightarrow{F} c' \xrightarrow{F} b' \xrightarrow{F} a' \xrightarrow{F} b'$$

avec $[a]=[a']$ et $[b]=[b']$, alors pour F' :

$$\omega \xrightarrow{F'} c \xrightarrow{F'} a \searrow$$

$$\omega' \xrightarrow{F'} c' \xrightarrow{F'} b \xrightarrow{F'} a.$$

On détermine comme dans IV que soit $c=c'=i \in M(1/3)$ soit $c=c'=-i \in M(2/3)$ et F' est équivalent à une fraction rationnelle de la forme

$$(z^2+a)/(1+az^2) \text{ avec } a = (1 \pm i\sqrt{7})/4.$$

Mais on ne sait pas si cette fraction rationnelle peut être réalisée comme un exemple de Lattès.

Cqfd.

Mary Rees et Ben Wittner ont montré indépendamment dans leurs papiers ([R2] 4.3 et [W] 3.1) le théorème suivant:

Supposons $d=2$ et $c, c' \in M$ tels que 0 soit périodique pour f_c et $f_{c'}$. Supposons de plus que f_c et $f_{c'}$ sont accouplables et que G est une fraction rationnelle telle que $F' = F = f_c \perp f_{c'}$ soit équivalent à G au sens de Thurston. On note $J(G)$ la fermeture des points périodiques répulsifs de G . Alors la relation d'équivalence " \approx " est automatiquement fermées, et il existe une application continue

$$\Phi : S^2 \longrightarrow \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

qui vérifie que

1. Φ est surjective
2. $\Phi \circ F = G \circ \Phi$
3. $\Phi^{-1}(\bar{\mathbb{C}} - J(G)) = \check{K}_c \cup \check{K}_{c'}$
4. Φ est injective et analytique sur $\check{K}_c \cup \check{K}_{c'}$
5. Φ est une limite uniforme de homéomorphismes
6. $\Phi^{-1}(z)$ est une classe de la relation d'équivalence " \approx " pour tout $z \in \bar{\mathbb{C}}$.

Par la propriété 6, l'application Φ induit une conjugaison de $(S^2/\approx, [F])$ à $(\bar{\mathbb{C}}, G)$, où $[F]$ est l'application quotient de F sur S^2/\approx . Par suite S^2/\approx est une sphère. On peut donc réaliser l'accouplement de f_c et $f_{c'}$ en collant K_c et $K_{c'}$ le long leurs bords en identifiant $\gamma_c(\theta)$ à $\gamma_{c'}(-\theta)$.

Mary Rees affirme qu'il existe des résultats analogues pour le cas où 0 est strictement prépériodique pour au moins un des $f_c, f_{c'}$.

Chapitre 7. Démonstration du résultat principal

7.1 Réduction

Soient $f_c : z \rightarrow z^d + c$ et $f_{c'} : z \rightarrow z^d + c'$ avec $c \in \mathcal{D}_t$ et $c' \in \mathcal{D}_{t'}$; $F = f_c \natural f_{c'}$ et F' l'accouplement dégénéré de f_c et $f_{c'}$. On démontre d'abord un théorème intermédiaire:

Théorème 4. Supposons que F est à orbifold hyperbolique. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes:

- a) f_c et $f_{c'}$ sont non accouplables;
- b) ou bien $[c]=[c']$ est contractile (donc $[\omega]=[\omega']$ non contractile), ou bien il existe un cycle de Levy $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ non dégénéré pour F et chaque γ_i traverse l'équateur E au moins une (donc deux) fois;
- c) il existe une courbe fermée γ' dans Q ;
- d) ou bien $[c]=[c']$ est contractile (donc $[\omega]=[\omega']$ non contractile), ou bien il existe un cycle de courbes fermées $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ dans PQ vérifiant $F(\gamma_i)=\gamma_{i+1}$, $i < m$, $F(\gamma_m)=\gamma_1$, aucune des γ_i ne sépare les deux valeurs critiques, et pour toute composante B de $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$, chaque composante γ de ∂B est l'une des γ_i .

Démonstration. a) \Leftrightarrow b) est fait par le théorème 3. Une courbe dans un cycle de Levy traverse toujours l'équateur car sinon toute courbe du cycle serait homotope à une courbe complètement contenue dans une même demi-sphère de $S^2 = L_c \natural L_{c'} / \sim$ par exemple L_c , et le cycle réduit à un cycle de Levy non dégénéré pour le revêtement $\hat{f}_c : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec $\hat{f}_c(\infty)=\infty$, par suite \hat{f}_c ne devrait pas être équivalent à une fraction rationnelle au sens de Thurston, ce qui est absurde car \hat{f}_c est déjà une fraction rationnelle.

b) \Rightarrow c). Prenons $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ un cycle de Levy non dégénéré pour F . Appliquons la proposition 5.1 à $X = \bigcup_i \gamma_i$, on obtient X_∞ un graphe de PQ, et par hypothèse que le cycle de Levy soit non dégénéré au moins une composante de X_∞ est non contractile, il existe donc une courbe fermée dans PQ.

c) \Rightarrow d). S'il existe k tel que $F^{k-1}(\gamma)$ soit non contractile mais $F^k(\gamma)$ soit contractile, alors $c, c' \in F^k(\gamma)$ et donc $[c] = [c']$ est contractile.

Si $F^n(\gamma')$ est non contractile pour tout n , alors la future orbite périodique de γ' forme un cycle de courbes fermées $\{\lambda_1, \dots, \lambda_u\}$ dans PQ. Par le corollaire 5.4, ce cycle induit un autre cycle de courbes fermées $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ vérifiant que pour toute composante B de $S^2 - \bigcup_{1 \leq i \leq m} \gamma_i$, chaque composante γ de ∂B est l'une des γ_i .

Une courbe fermée périodique γ de PQ ne sépare jamais les deux valeurs critiques, car premièrement $c, c' \notin \gamma$ ($c, c' \notin PQ$); deuxièmement, si γ séparait les deux valeurs critiques, sa préimage $F^{-1}(\gamma)$ serait une seule courbe, elle devrait être dans Q et contenir tous les arguments de la forme $\theta/d + i/d$ pour un $\theta \in \gamma \cap E$ ($i=0, 1, \dots, d-1$), mais comme θ est périodique, l'un des $\{\theta/d + i/d\}$ est encore périodique et les autres sont strictement prépériodiques, ainsi la courbe $F^{-1}(\gamma)$ contient à la fois un argument à dénominateur premier à d et un argument à dénominateur non premier à d , ceci contredit la proposition 1.3.

d) \Rightarrow b). L'ensemble de la frontière d'un petit voisinage de chaque composante de $\bigcup_i \gamma_i$ forme une multicourbe Γ dont on peut extraire un cycle de Levy, car aucune courbe de Γ ne sépare les deux valeurs

critiques, et une courbe au voisinage γ_i figure dans la préimage par F d'une courbe au voisinage de $\gamma_{i+1} \pmod{m}$.

Cafd.

Lemme 7.1 (Mary Rees). S'il existe un cycle de courbes

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$$

dans PQ dont aucune des γ_i ne sépare les deux valeurs critiques, alors les composantes-disques de $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ forment une chaîne

$$R_1, R_2, \dots, R_v,$$

avec $v \geq 2$; de plus $c, c' \in R_1$ et $F(R_i) = R_{i+1}$, $1 \leq i < v$.

Démonstration. Comme aucune des γ_i ne sépare les deux valeurs critiques, les points c et c' sont dans une même composante de $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$. Un ensemble ouvert B est une composante de $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ si et seulement si $\partial B \subset \bigcup_i \gamma_i$ et $B \cap \bigcup_i \gamma_i = \emptyset$. Soit B une composante-disque de $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ qui ne contient pas c et c' (ceci existe car $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ admet au moins deux composantes-disques). Comme $\partial B \subset \bigcup_i \gamma_i$, une unique composante δ de $F^{-1}(\partial B)$ est encore dans $\bigcup_i \gamma_i$, et la composante B' de $F^{-1}(B)$ bornée par δ est encore une composante de $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ (car $B' \cap \bigcup_i \gamma_i = \emptyset$). Posons $B' = B_1$. Si $c, c' \notin B_1$, on peut continuer à prendre B_2 l'unique composante de $F^{-1}(B_1)$ qui est encore une composante-disque de $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$, et ainsi de suite. On prétend qu'il

existe un N tel que $c, c' \in B_N$. Car sinon il existe q et p tels que $B_q = B_{q+p}$ et $X = \bigcup_{q+1 \leq i \leq q+p} B_i$ est un ensemble mono-invariant par F à l'intérieur non vide, ceci contredit le complément 2 de la proposition 5.1. Prenons la chaîne la plus longue parmi les chaînes associées à chaque composante-disque de $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$, et renumérotons-les, nous aurons R_1, R_2, \dots, R_ν , $\nu \geq 2$.

Cqfd.

Remarque 7.2. S'il existe un cycle de courbes fermées périodiques $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, alors par le corollaire 5.4 on a $\bigcup_i \gamma_i = \bigcup_j [F^j(z)]$ pour un certain z , et pour tout $x \in S^2 - \bigcup_i \gamma_i$, la classe $[x]$ est contenue dans la même composante de $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ que x .

7.2. Démonstration finale

Soient $f_c : z \rightarrow z^d + c$, $f_{c'} : z \rightarrow z^d + c'$ ($d \geq 2$) à $P_c, P_{c'}$ finis $F = f_c \perp f_{c'}$ et F' l'accouplement dégénéré de f_c et $f_{c'}$. On rappelle que $M(t)$ est le membre d'argument interne t de M_d et $\mathcal{D}_t = M(t) \cap \mathcal{D}$.

Théorème 1. Les deux polynômes f_c et $f_{c'}$ sont non accouplables si et seulement s'il existe t tel que $c \in \mathcal{D}_t$ et $c' \in \mathcal{D}_{1-t}$.

Démonstration. Le cas où F' est à orbifold non hyperbolique est fait par la proposition 6.2. On suppose ici $O_{F'}$ hyperbolique. On peut donc appliquer le théorème 4.

\Leftarrow . D'après la proposition 5.2, $[\alpha_c] = [\alpha_{c'}]$ est non contractile, on peut tracer une courbe fermée là dedans, la condition c) du théorème 4 est donc

vérifiée. Le reste est fait par le même théorème.

⇒. Supposons que f_c et $f_{c'}$ sont non accouplables. D'après les discussions de la section 6.2, on a $c, c' \neq 0$. Donc $c \in \mathcal{D}_t$ et $c' \in \mathcal{D}_{t'}$ pour certains t et t' .

D'après le théorème 4, ou bien $[c]=[c']$ est contractile, ou bien il existe un cycle de courbes fermées périodiques $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ dans PQ dont aucune courbe ne sépare les deux valeurs critiques c et c' .

a) Si $m=1$, alors la courbe γ_1 est mono-invariante par F . Par le lemme 7.1, on a $S^2 - \gamma_1 = R_1 \cup R_2$, $c, c' \in R_1$ et $F(R_1) = R_2$. Ceci implique que $F: \gamma_1 \rightarrow \gamma_1$ renverse l'orientation de γ_1 , il existe donc au moins deux points fixes de F dans γ_1 . Comme ce sont des points fixes admettant plus d'un rayons externes, ce sont forcément α_c et $\alpha_{c'}$. Par la proposition 5.2, on a $t+t'=1$.

b) Pour le cas où $m>1$, on a deux démonstrations pratiquement différentes. Nous les notons $b1$ (avec $b1', b1'', b1'''$) et $b2$.

$b1)$ On définit d'abord une chaîne d'ensembles connexes R_1, R_2, \dots, R_ν de la façon suivante:

Cas 1. S'il existe un cycle périodique $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ dans PQ avec $m \geq 2$, on prend (R_1, R_2, \dots, R_ν) la chaîne des composantes-disques de $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$ décrite dans le lemme 7.1;

Cas 2. Si $[\omega]=[\omega']$ est non contractile avec $[c]=[c']$ contractile, prenons $[c], [F(c)], \dots, [F^{\nu-1}(c)]$ les classes disjointes de $Or(c)$, et prenons $R_1=[c]$ et $R_i=F^{i-1}(R_1)=[F^{\nu-1}(c)]$, $2 \leq i \leq \nu$.

Pour cette chaîne (R_i) dans les deux cas, notons successivement $I = F^{-1}(R_1)$ qui est connexe et disjoint de R_1 , et B_1, B_2, \dots, B_d les adhérences des d composantes de $S^2 - I$ avec B_1 contenant R_1 . Les B_i sont fermées.

Pour un ensemble connexe $U \subset S^2 - R_1$, l'ensemble $F^{-1}(U)$ a d composantes connexes, elles sont $F^{-1}(U) \cap B_1, F^{-1}(U) \cap B_2, \dots, F^{-1}(U) \cap B_d$, et pour tout i , l'application $F : F^{-1}(U) \cap B_i \rightarrow U$ est un homéomorphisme. De plus, si $x \in \mathring{B}_i$, alors $[x] \in \mathring{B}_i$.

$b1'$). Rappelons que les ensembles $\varepsilon_i = [\varepsilon_i(c)] = [\varepsilon_{d-1-i}(c')]$, $0 \leq i \leq d-2$ sont deux à deux disjoints et sont disjoints de $[\alpha_c]$ et de $[\alpha_{c'}]$, et $[\alpha_c] = [\alpha_{c'}]$ si et seulement si $t+t'=1$ (la section 5.2). Posons

$$Y = [\alpha_c] \cup [\alpha_{c'}] \cup \bigcup_{0 \leq i \leq d-2} \varepsilon_i.$$

L'ensemble Y a donc d composantes connexes si $t+t'=1$, et $d+1$ composantes connexes si $t+t' \neq 1$. Chaque composante de Y est un graphe de PQ connexe mono-invariant par F .

Soit $j \in \{2, 3, \dots, d\}$. Prenons successivement $U_0 = B_j$, et $U_n = F^{-1}(U_{n-1}) \cap B_j$. On a $U_n \subset U_{n-1}$ pour tout n car $U_1 \subset U_0 = B_j$. Comme $B_j \cap P_F$ est fini, il existe $k \geq 1$ tel que $U_{k+1} = F^{-1}(U_k) \cap B_j$ soit isotope à U_k rel P_F . Appliquons la proposition 5.1 à U_k ($F : U_{k+1} \rightarrow U_k$ est un homéomorphisme), on obtient $U_{\infty, j}$ un graphe de PQ connexe contractile mono-invariant par F , et qui contient tous les points fixes de F dans B_j . Ainsi, l'ensemble

$$B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_d$$

contient au plus $d-1$ composantes connexes de $Y = [\alpha_c] \cup [\alpha_c'] \cup \bigcup_i \varepsilon_i$.

Pour le cas 1, les ensembles I et R_1 sont disjoints (car $m \geq 2$); pour le cas 2, ceci est évident. Comme $F(I) = R_1$, $F(R_1) = R_2$, et I, R_1, R_2 sont deux à deux disjoints, l'ensemble $I \cup R_1$ ne contient pas de point fixe de F , ni leur classe d'équivalence (dans le cas 2 c'est évident, dans le cas 1 il faut utiliser la remarque 7.2). Donc les autres composantes connexes de Y sont contenues dans $B_1 - R_1$.

b1''). Posons successivement $B = B_1$, $V_0 = B - \tilde{R}_1$ et

$$V_n = \{z \mid z, F(z), F^2(z), \dots, F^n(z) \in V_0\} = V'_{n-1} - \tilde{R}_1$$

où $V'_{n-1} = F^{-1}(V_{n-1}) \cap B$, autrement dit

$$\begin{aligned} V'_{n-1} &= \{z \mid z \in B; F(z) \in V_{n-1}\} \\ &= \{z \mid z \in B; F(z), F^2(z), \dots, F^n(z) \in B - \tilde{R}_1\}. \end{aligned}$$

On a $V'_n \subset V'_{n-1}$ et $V_n \subset V_{n-1}$ pour tout n .

On montre d'abord qu'il existe au moins une composante parmi les R_i qui est contenue dans $S^2 - B$: dans le cas 1, comme une composante de $\partial I = F^{-1}(\partial R_1)$ est dans le cycle $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, on a $(S^2 - \tilde{B}) \cap \bigcup_i \gamma_i \neq \emptyset$, donc $S^2 - B$ contient des composantes-disques de $S^2 - \bigcup_i \gamma_i$; dans le cas 2, pour le premier point périodique $F^u(c)$ dans $Or(c)$, on a $F^u(c) \notin R_1$, et dans $F^{-1}(F^u(c))$ il existe deux points postcritiques, et B n'en contient qu'un, ceci implique $(S^2 - B) \cap P_F \neq \emptyset$ et donc $(S^2 - B) \cap \bigcup_i R_i \neq \emptyset$.

Ainsi il existe $s \geq 1$ tel que

$$R_1, R_2, \dots, R_s \subset \tilde{B} \text{ et } R_{s+1} \subset S^2 - B.$$

Comme les R_2, \dots, R_s sont disjoints de R_1 , pour $z \in R_1$, on a

$$F(z) \in R_2 \subset B - R_1, F^2(z) \in R_3 \subset B - R_1, \dots, F^{s-1}(z) \in R_s \subset B - R_1$$

et

$$F^s(z) \in R_{s+1} \subset S^2 - B.$$

Donc

$$R_1 \subset V_j \text{ pour } j \leq s-2 \text{ et } R_1 \cap V_j = \emptyset \text{ pour } j \geq s-1.$$

Par conséquent, si V_{n-1} est connexe alors V_n est connexe. Comme V_0 est connexe, on en déduit par récurrence que V_n est connexe pour tout n .

De plus, pour $n > s$, $V_n = V'_{n-1}$ et $F : V_n \xrightarrow{\approx} V_{n-1}$ est un homéomorphisme.

Comme $V_s \cap P_F$ est fini, il existe un $k > s$ tel que V_{k+1} soit isotope à V_k rel P_F . Mais V_{k+1} est une composante connexe de $F^{-1}(V_k)$, on peut donc appliquer la proposition 5.1 à V_k et obtenir V_∞ un élément de PQ connexe, mono-invariant par F (Figure 7.2), et qui contient tous les points fixes de F dans B .

Donc il existe au plus une composante connexe de l'ensemble $Y =$

$$[\alpha_c] \cup [\alpha_{c'}] \cup \bigcup_{0 \leq i \leq d-2} \varepsilon_i \text{ contenue dans } B - R_1.$$

$b1''''$). Combinant les résultats de $b1'$) et $b1''$) on déduit que Y a au plus d composantes connexes. Ceci n'est possible que quand $[\alpha_c] = [\alpha_{c'}]$. D'où $t+t'=1$.

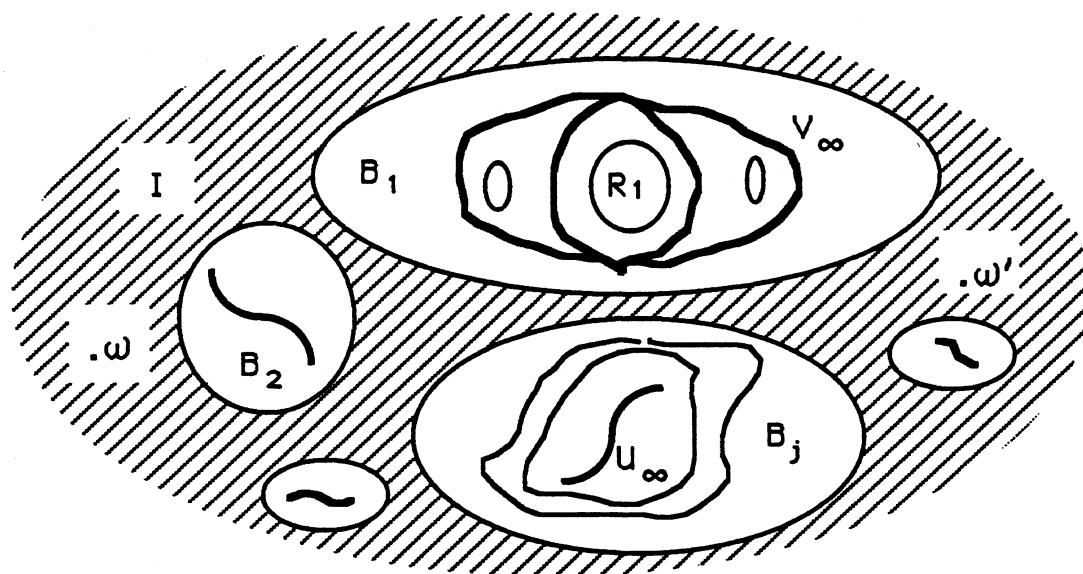


Figure 7.2

b2). On définit d'abord la même chaîne $\{R_1, \dots, R_s\}$ comme dans b1). Posons $I = F^{-1}(R_1)$ et B l'adhérence de la composante de $S^2 - I$ contenant R_1 .

Pour tout $U \subset S^2$, notons $U' = F^{-1}(U) \cap B$. Si $U \subset S^2 - R_1$, alors $F : U' \rightarrow U$ est un homéomorphisme. Remarquons $R'_1 = \emptyset$, et $R'_{i+1} = R_i$, $i = 2, 3, \dots, s$.

On définit comme dans b1'') la suite $V_0, V_1, \dots, V_n, \dots$. Alors on a pareillement les résultats qu'il existe s tel que $R_1, R_2, \dots, R_s \subset \tilde{B}$ et $R_{s+1} \subset S^2 - B$, et que l'ensemble $V_\infty = \bigcup_{n \rightarrow \infty}^i V_n$ existe, qui est un graphe de PQ, et est connexe, et mono-invariant par F .

On montre ici que V_∞ est de plus non contractile. On pose $R_{0,1} = \tilde{R}_1$ et $R_{0,s+1} = S^2 - B$. Alors on a $S^2 - V_0 = R_{0,s+1} \cup R_{0,1}$ avec $\tilde{R}_1 \subset R_{0,1}$ et $R_{s+1} \subset R_{0,s+1}$. Pour $k = 1, 2, \dots, s-1$, posons $R_{k,1} = \tilde{R}_1$, $R_{k,s+1} = S^2 - B$, et $R_{k,j} = R'_{k-1,j+1}$, $j = s, s-1, \dots, s-k+1$, alors

$$S^2 - V_k = (R_{k,s+1}UR_{k,s}U \dots UR_{k,s-k+1})UR_{k,1}$$

avec $R_j \subset R_{k,j}$, $j=s+1, s, s-1, \dots, s-k+1$, et $\tilde{R}_1 \subset R_{k,1}$. En particulier

$$S^2 - V_{s-1} = (R_{s-1,s+1}UR_{s-1,s}U \dots UR_{s-1,2})UR_{s-1,1}.$$

Posons $R_{s,s+1} = S^2 - B$, et $R_{s,j} = R'_{s-1,j+1}$, $j=s, s-1, \dots, 1$, alors $R_i \subset R_{s,i}$ et

$$S^2 - V_s = R_{s,s+1}UR_{s,s}U \dots UR_{s,2}UR_{s,1}.$$

Ainsi $S^2 - V_s$ admet $s+1$ composantes dont chacune contient un des R_i .

Soit U un ensemble connexe tel que $R_1 \subset U$, alors $F^{-1}(U)$ est connexe et $ICF^{-1}(U)$. Donc $(S^2 - B)UU'$ est connexe. Pour $n > s$, on pose $R_{n,s+1} = (S^2 - B)UR'_{n-1,1}$ et $R_{n,j} = R'_{n-1,j+1}$, $j=1, 2, \dots, s$. Alors on a

$$S^2 - V_n = R_{n,1}UR_{n,2}U \dots UR_{n,s+1}$$

les $R_{n,j}$ sont connexes, deux à deux disjoints, et $R_j \subset R_{n,j}$ pour tout j .

En ce qui concerne V_∞ , comme pour n assez grand, les ensembles $R_{n,1}, R_{n,2}, \dots, R_{n,s+1}$ sont dans des composantes distinctes de $S^2 - V_\infty$, l'ensemble V_∞ est bien non contractile.

Si V_∞ est une courbe, c'est-à-dire que V_∞ n'a pas de point de branchement, alors par la partie a) de ce théorème on déduit que $\alpha_c, \alpha_{c'} \in V_\infty$ et ensuite $t+t'=1$. Si V_∞ admet des points de branchements, alors par le lemme 5.3, il en a exactement deux et qui ne sont pas d'un même côté de l'équateur, ce sont donc α_c et $\alpha_{c'}$. D'après

la proposition 5.2, on a enfin $t+t'=1$.

Cqfd.

Remarque. On déduit par le fait $V_n \subset V_{n-1}$ qu'il existe $k > s$ tel que V_k soit isotope à V_{k-1} . On voit donc que ∂V_k est isotope à ∂V_{k-1} . Par la construction des $R_{k,i}$, on voit que ∂V_k , en temps qu'une partie des préimages du cycle de courbes originales $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$, forme un cycle de Levy, et l'unique composante non disque du complémentaire de ce nouveau cycle (elle est bien sûr V_k) admet une préimage isotope à elle-même.

Si on vérifie bien la démonstration du lemme 7.1 et de b) ci-dessus, on voit que les arguments utilisés sont aussi valables pour les cycles de Levy non dégénéré (avec bien sûr les R_i, V_i à isotopie près), on obtient donc un complément qui est peut-être utile pour les autres:

Complément. Soit F un revêtement ramifié de S^2 sur S^2 ayant seulement deux points critiques. Supposons qu'il existe un cycle de Levy $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ non dégénéré pour F . Alors dans l'ensemble

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{1 \leq i \leq m} F^{-n}(\gamma_i)$$

on peut extraire un autre cycle de Levy $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k\}$ qui vérifie que dans $S^2 - \bigcup_i \ell_i$ il existe une unique composante C qui n'est pas un disque topologique, et qu'on a $F^{-1}(C) = C' \cup C''$, $C' \cap C'' = \emptyset$, et que C' est isotope à C . Ainsi on peut toujours supposer qu'un cycle de Levy non dégénéré vérifie cette propriété.

Références Bibliographiques

- [BL] P. Blanchard, Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bulletin of the A.M.S., Volume 11 , n°1 , Juillet 1984 .
- [BR] H. Brolin, Invariant sets under iteration of rational functions, Arkiv för Matematik 6 (1965), 103~144 .
- [DGH] R.L. Devaney, L.R. Goldberg et J.H. Hubbard, A dynamical approximation to the exponential map by polynomials, Preprint, 1987 .
- [DH1] A. Douady et J.H. Hubbard, Itération des polynômes quadratiques complexes, C.R.A.S., t 294 (18 janvier 1984).
- [DH2] A. Douady et J.H. Hubbard, Etude dynamique des polynômes complexes, Publication d'Orsay, I et II, avec la collaboration de P. Lavaurs, Tan Lei et P. Sentenac, 1984~1985 .
- [DH3] A. Douady et J.H. Hubbard, A proof of Thurston's topological characterization of rational function, Preprint, Institut Mittag-Leffler.
- [D1] A. Douady, Systèmes dynamiques holomorphes, Séminaire Bourbaki, 35^e année, 1982-1983 , exposé n°599 , Novembre 1982 .
- [D2] A. Douady, Algorithms for computing angles in the Mandelbrot set, Proc. of the Conference on chaotic dynamics; Georgia Tech., Atlanta, U.S.A., avril 1985 .
- [G] Gantmacher, Matrix Theory, Chelsea Publishing Company, 1960 .

- [La1] P. Lavaurs, Les arbres de Hubbard périodiques sont concrets, Preprint.
- [La2] P. Lavaurs, Une description combinatoire de l'induction définie par M sur les rationnels à dénominateur impair, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 303, Série I, n°4, 1986.
- [Le] S. Levy, Critically finite rational maps, Thèse de Ph. D., Université de Princeton, Princeton, U.S.A., 1985.
- [R1] M. Rees, Realization of matings of polynomials as rational maps of degree two, manuscrit, 1986.
- [R2] M. Rees, Hyperbolic rational maps of degree two, Part I and II, Preprint de l'Université de Liverpool, 1986.
- [Ta] Tan lei, Accouplements des polynômes quadratiques complexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 302, Série I, n°17, 1986.
- [Th] B. Thurston, The combinatorics of iterated rational maps, Preprint de l'université de Princeton, Princeton, U.S.A., 1983.
- [W] B. Wittner, Thèse de Ph. D., Université de Cornell, Ithaca, U.S.A., 1986.
- [Y] J.-C. Yoccoz, Sur la taille des membres de l'ensemble de Mandelbrot, manuscrit, 1986.

Table des matières

Chapitre 1. INTRODUCTION.....	3
1.1. Introduction	3
1.2. Préliminaires.....	7
Chapitre 2. RESULTAT DE THURSTON ET DE LEVY.....	13
2.1 Critère de Thurston.....	13
2.2. Critère de Levy	16
Chapitre 3. ARGUMENTS EXTERNES DES POINTS FIXES	
ET DES POINTS PERIODIQUES DANS L'ENSEMBLE DE JULIA	22
3.1. Ensembles de Julia.....	22
Chapitre 4. ARGUMENTS EXTERNES ET INTERNES	
DANS L'ESPACE DE PARAMETRES.....	41
4.1. Composantes hyperboliques dans l'espace de paramètres	41
4.2. Membres de l'espace de paramètres.....	46
4.3. Modulation et chemin combinatoire.....	49
Chapitre 5. ACCOUPLEMENT.....	54
5.1. Accouplement	54
5.2. Classes d'équivalences des points fixes dans l'accouplement	59
5.3. Araignée	61
Chapitre 6. ACCOUPLEMENTS DEGENERES	
ET ORBIFOLD NON HYPERBOLIQUE.....	66
6.1. Accouplements dégénérés.....	66
6.2. Accouplements dégénérés à orbifold non hyperbolique	69
Chapitre 7. DEMONSTRATION DU RESULTAT PRINCIPAL	75
7.1. Réduction.....	75
7.2. Démonstration finale.....	78
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	86