CORINNE BERZIN

Surfaces aléatoires : approximation du temps local

Thèses d'Orsay, 1989

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1989__0241__A1_0>

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir

Le titre de Docteur en Sciences
de l'Université Paris XI

PAR

Mademoiselle Corinne BERZIN

SUJET: Surfaces aléatoires: approximation du temps local

Soutenue le 14 décembre 1989 devant la commission d'examen

MM. D. DACUNHA-CASTELLE Président
J. BRETAGNOLLE
D. FLORENS-ZMIROU
X. GUYON
J. LABEYRIE

Invité d'honneur: M. WSCHEBOR

RANDOM FIELDS: APPROXIMATION OF LOCAL TIME

Abstract: Let $\{ X(t,\omega), t \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega \}$, $d \geq 2$, be a real stationary gaussian field, defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. We look at the asymptotic behavior of a particular stochastic integral, with respect to the geometric measure of the u-level sets, $u \in \mathbb{R}$, of the regularized field, obtained by composition of a convolution of X, say X_ε, with a matrix normalization which contains part of the information contained in the spectral moments matrix of second order of X_ε.

Under the condition that the covariance function is twice continuously differentiable out of a set of zero Lebesgue's measure, this functional converges in $L^2(\Omega)$ to the local time of X at the level u.

Furthermore, we give a bound for the speed of convergence.

KEYWORDS: Random fields - Gaussian processes - Stationary processes - Random measures - Local time and additive functional - Smoothing, curve fitting - L^p-limit theorems - Geometric probability, stochastic geometry, random sets - Infinitely divisible distributions; stable distributions - Sums of independent random variables.

A.M.S. Codes: 60 G 60 - 60 G 15 - 60 G 10 - 60 G 57 - 60 J 55 - 65 D 10 - 60 F 25 - 60 D 05 - 60 E 07 - 60 G 50

REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à Mario WSCHEBOR pour m'avoir permis grâce à ses conseils et ses encouragements de mener à bien cette thèse.
Je ne saurais trop le remercier de l'opportunité qu'il m'a donnée de travailler à ses côtés et de m'avoir intégrée dans l'équipe de recherches de l'Instituto de Matemática y Estadística (IME) de MONTEVIDEO.

Je remercie également Didier DACUNHA-CASTELLE de m'avoir accueillie dans l'équipe de Statistiques d'ORSAY, d'avoir suivi les diverses étapes de l'élaboration de mon travail et de m'avoir appuyée de ses conseils et de sa confiance.
Je le remercie également d'avoir bien voulu accepter la présidence du jury de ma thèse.

Danielle FLORENS-ZMIROU et Jean BRETAGNOLLE ont accepté d'être mes rapporteurs. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je remercie Xavier GUYON et Jacques LABEYRIE d'avoir bien voulu faire partie de mon jury. Je voudrais qu'ils trouvent ici, l'expression de la plus vive reconnaissance de leur ancien élève et stagiaire de DEA.

Je remercie également Jean-Marc AZAIS et Paul DOUKHAN de m'avoir accordé leur attention durant les conversations que j'ai eues avec eux, lors de difficultés rencontrées dans mes recherches.

Je tiens enfin à remercier tous mes amis de l'IME et plus particulièrement Ernesto MORDECKI et Gonzalo PERERA, auprès desquels j'ai toujours pu trouver l'aide nécessaire qui m'a permis de surmonter les difficultés auxquelles j'étais confrontée.

AVERTISSEMENT

Cet ouvrage est composé de trois travaux indépendants.
Nous n'exposerons ici que l'un d'entre eux, le plus récent et le plus conséquent; nous nous contenterons d'ajouter à sa suite les deux premiers sans commentaires.
L'exposé de la partie principale est précédé de plusieurs pages visant à faciliter la compréhension du lecteur.
L'introduction rappelle certains résultats étroitement liés au sujet et explique les motivations de l'auteur.
Suivent ensuite une série de notations et hypothèses et la présentation des résultats.

1. Introduction

Des techniques différentes ont été proposées par plusieurs auteurs pour approximer le temps local. Lorsque X est un processus de Wiener à d-paramètres, M. Wschebor [25] utilise les régularisées du processus X. Plus précisément, si $X_\varepsilon = \Psi_\varepsilon * X$ est une régularisation de X, obtenue à l'aide d'une C^∞-approximation de l'unité Ψ_ε, si T est un ensemble ouvert borné dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de $(\mathbb{R}^+)^d$, M.Wschebor montre la convergence dans tous les $L^p(\Omega)$ de $\varepsilon^{1/2}\ \|\Psi\|_2^{-1}\ \sigma_{d-1}(C_u(X_\varepsilon) \cap T)$ vers une renormalisation canonique du temps local usuel, où σ_{d-1} désigne la mesure d' aire (d-1)-dimensionnelle de $C_u(X_\varepsilon) = \{ t \in \mathbb{R}^d, X_\varepsilon(t) = u \}$ et u un niveau fixé, $u \in \mathbb{R}$. Dans le cas d=1, J.M Azaïs a étendu ce résultat, pour $u = 0$, aux processus stables à accroissements indépendants [1].

D. Florens-Zmirou et J.M Azaïs [2] ont établi une approximation du même type pour une certaine classe de processus gaussiens stationnaires, indexés par le temps. Ils ont établi sous un certain nombre de conditions techniques que si, $N_{\Psi,\varepsilon}]a,b[$ est le nombre de passages par zéro du processus X_ε durant l'intervalle de temps $]a,b[$, $\lambda_{2;\varepsilon}$ le moment spectral d'ordre deux de X_ε, et si X admet un temps local $L(u,]a,b[)$ continu en u au point $u = 0$ alors, $(\pi/2)^{1/2}\ \lambda_{2;\varepsilon}^{-1/2}\ N_{\Psi,\varepsilon}]a,b[$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $L(o,]a,b[)$.

[9] a généralisé ce dernier résultat au cas où le processus X est multiindexé dans $\mathbb{R}^d$. Plus exactement si T désigne un cube ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $c(\varepsilon) = (\Lambda_1(\varepsilon))^{-1}$, où $\Lambda_1(\varepsilon) \geq \Lambda_2(\varepsilon) \geq .....\geq \Lambda_d(\varepsilon)$ désignent les valeurs propres de la matrice des moments spectraux d'ordre deux de X_ε, $\lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon)\ \Lambda_i(\varepsilon) = \Lambda_i$, $i \in \{1, d\}$, $\theta = E\ \|\ Y\ \|$ où Y suit une loi normale dans $\mathbb{R}^d$, centrée et de variance $(\Lambda_i\ \delta_{i,j})_{i,j}$($\delta_{i,j}$ désignant le symbole de Kronecker), et si X admet un temps local continu $L(u,T)$ continu en $u = 0$, alors: $c^{1/2}(\varepsilon)\ \theta^{-1}\ \sigma_{d-1}(C_o(X_\varepsilon) \cap T)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $L(o,T)$.

L'objet de cet travail est de donner d'une part, une approximation du temps local en u, $u \in \mathbb{R}$, de X, et d'autre part, d'estimer la vitesse de convergence de cette approximation, lorsque X est multiindexé dans $\mathbb{R}^d$, utilisant une normalisation matricielle prenant en compte une partie de l'information de la matrice des moments spectraux d'ordre deux de X_ε.

La partie concernant l'approximation du temps local proprement dite améliore essentiellement [9]; en effet, cette matrice de normalisation nous dispense, contrairement à ce qui a été fait, de privilégier une de ses valeurs propres, ou encore, de supposer une *quasi-isotropie* sur X.

De plus ce type de résultat est sensiblement plus général que celui obtenu dans [2], d´une part, parce-qu´aucune hypothèse n´est demandée au processus X, mis à part le fait que la covariance R de X soit régulière en dehors d´un ensemble A, et en particulier aucune hypothèse *croisée* liant R et Ψ n´est requise, et d´autre part, parce-qu´il est montré que la limite obtenue est toujours le temps local, que celui-ci est de carré intégrable, et que lorsque $d \geq 3$ il est continu en tant que fonction de x.

2. Présentation des résultats

2.1 Définitions et notations

On notera dt la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$-pour laquelle on employera parfois la notation $\mu_n(dt)$- $< . , . >_n$ le produit scalaire habituel dans $\mathbb{R}^n$ et $\| . \|_n$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note $B_n(x,r)$, $B_n(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^n , \|y-x\|_n < r \}$ et S^{n-1}, $S^{n-1} = \{ y \in \mathbb{R}^n, \|y\|_n = 1 \}$. Diam notera le diamètre.

Si E est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$, et si $x \in \mathbb{R}^n$, on note $d_n(x,E)$, $d_n(x,E) = \inf\{ \| y-x\|_n, y \in E \}$; card désignera le cardinal de E.

∂E note le bord de E, $\overset{\circ}{E}$ l'intérieur de E. Si $y \in \mathbb{R}^m$, $m < n$, on notera E_y la section de E en y, soit: $E_y = \{ z \in \mathbb{R}^{n-m}, (y,z) \in E \}$, avec la convention que si m=o, $E_y = E$.

$\mathcal{R}^n$ désignera la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ et le symbole $\otimes$ celui du produit de deux tribus.

Si A est une matrice carrée de $\mathbb{R}^n$: soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,n}$, on note $\|A\|$, $\|A\| = \sup \{|a_{i,j}|; i,j = 1,n\}$, A' la transposée de A. On notera supp le support.

I_n désignera la matrice carrée identité d'ordre n et $\theta_{p,q}$ la matrice pxq identiquement nulle.

$\| \ \|_{a,n}$désigne la norme des applications linéaires continues de $(\mathbb{R}^n , \| \ \|_n)$ dans $(\mathbb{R} , \| \ \|_1)$: soit $L^c((\mathbb{R}^d , \| \ \|_n) ; (\mathbb{R} , \| \ \|_1)) = L$ et $\| \ \|_b$ celle des applications linéaires continues de $(\mathbb{R}^n , \| \ \|)$ dans $(L , \| \ \|_{a,n})$.

C^n(respectivement C^∞) désignera l'ensemble des fonctions de classe C^n(respectivement C^∞).

Nous travaillerons avec le *périmètre relatif* qui généralise la notion d'aire (n-1)-dimensionnelle, soit $Q_{\bullet}(.)$, qui est défini de la façon suivante (cf [19] à [21] et [25]): Si B et V sont respectivement borélien et ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $B \cap V$ est suffisamment régulier topologiquement pour pouvoir appliquer la formule de Green, nous avons avec les hypothèses et notations précédentes:

$$\sigma_{n-1}(\partial B \cap V)=\sup\{ \int_{\partial B\cap V} < v(t), n(t) >_n d\sigma_{n-1}(t), v \in (C_K^\infty(V))^n , \|v(t)\|\leq 1, t \in \mathbb{R}^n\}$$

où n(t) est le vecteur unitaire normal à $\partial B \cap V$ orienté vers l'extérieur de $B \cap V$ et $(C_K^\infty(V))^n$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^∞ et à support compact inclus dans V (on le normera avec la norme sup, symbolisée par $\| \ \|_\infty$).

On notera $\mathcal{P}_{V,n}$,

$\mathcal{P}_{V,n} = \{ v \in (C_K^\infty(V))^n, \|v\|_\infty \le 1\}$. D'après la formule de Green, nous avons:

$\int_B \text{div } v(t)\, dt = \int_{\partial B \cap V} <v(t),n(t)>\, d\sigma_{n-1}(t)$. Une extension naturelle de la mesure σ_{n-1} est alors: $Q_V(B) = \sup \{\int_B \text{div } v(t)\, dt,\ v \in \mathcal{P}_{V,n}\}$.

$Q_V(B)$ est appelé *périmètre relatif de B par rapport à V* (fini ou infini) [19].

Cette extension est notamment utile dans le cas où pour un processus stochastique donné, soit $\{ Y(t,\omega), t \in \mathbb{R}^n, \omega \in \Omega \}$, et pour chaque réalisation de la surface aléatoire Y(.), l'ensemble $C_u(Y)$, $C_u(Y) = \{t \in \mathbb{R}^n / Y(t) = u\}$, $u \in \mathbb{R}$, est très irrégulier topologiquement. Si nous considérons $A_u(Y)$, $A_u(Y) = \{t \in \mathbb{R}^n / Y(t) < u\}$ et si nous supposons que Y est gaussien stationnaire et à trajectoires de classe C^2, le théorème de Belyaiev ([3] et [25]) nous permet de conclure que Y n'a pas de points critiques de valeurs u, ceci P.ps et $Q_V(A_u(Y))$ n'est alors que la mesure d'aire (n-1)-dimensionnelle de $C_u(Y) \cap V$.

Nous noterons $c_n = \sigma_{n-1}(S^{n-1})$.

Quand il n'y aura pas de risque de confusion, nous supprimerons l'indice n.

δ et α étant > 0, $H_{\delta,\alpha}$ désigne la pré-mesure servant à définir la mesure de Hausdorff d'ordre α sur $\mathbb{R}^d$; plus précisément, on associe à δ l'ensemble des recouvrements de E par des boules B_i de diamètre inférieur ou égal à δ: Soit $E \subset \bigcup_i B_i$, diam $B_i \le \delta$; soit $H_{\alpha,\delta}(E)$ la borne inférieure des sommes $\sum_i (\text{diam} B_i)^\alpha$ pour les recouvrements précédents ([16] à [18], [22] et [23]).

$x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, nous dirons que $x \approx y$ si et seulement si x est équivalent à y.

$z \in \mathbb{C}$, Imz notera la partie imaginaire de z.

χ désignera la fonction indicatrice.

2.2 Hypothèses

Soit $\{ X(t,\omega), t \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega \}$, $d \geq 2$, un processus gaussien stationnaire et centré, à valeurs réelles sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où P est complète, à trajectoires continues et bi-mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{R}^d \otimes \mathcal{A}$, de covariance R continue, de classe C^2 en dehors d'un ensemble A et de mesure spectrale dF_X, que nous noterons dF, dont le support sera supposé non contenu dans un espace vectoriel de dimension strictement inférieure à d.

Soit X_ε une régularisation de X obtenue par convolution avec la C^1-approximation de l'unité Ψ_ε, soit $X_\varepsilon = \Psi_\varepsilon * X$, $\varepsilon > 0$. Nous supposerons que Ψ_ε est de la forme: $\Psi_\varepsilon(t) = (\frac{1}{\varepsilon})^d \, \Psi(\frac{t}{\varepsilon})$, $\forall\, t \in \mathbb{R}^d$, où Ψ est telle que:

$\Psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$, C^1, $\int_{\mathbb{R}^d} \Psi(u)\, du = 1$ et il existe $\beta_1 > 1$, $\beta_2 > 2$, $C > 0$ et $C' > 0$ tels que :

$$\forall\; u \in (\mathbb{R}^d)^*,\ \Psi(u) \leq C(\frac{1}{\|u\|})^{d+\beta_1},\quad \|\nabla\Psi(u)\| \leq C'(\frac{1}{\|u\|})^{d+\beta_2},$$

∇ symbolisant le gradient.

On notera $R_\varepsilon(\,.\,) = E(X_\varepsilon(.)\, X_\varepsilon(0))$ et $\Gamma_\varepsilon(\,.\,) = E(X_\varepsilon(.)\, X(0))$, $\forall\; \varepsilon > 0$.

Soit S l'espace vectoriel, $S = \{ v \in \mathbb{R}^d \,/\, \int_{\mathbb{R}^d} < v, x >^2 dF(x) < \infty \}$.

On supposera que la dimension de S est s, soit $\dim S = s$ et $0 \leq s < d$.

Le cas s=d ne sera pas traité; l'étude du temps local n'ayant alors que peu d'intérêt.

On se donne une base orthonormée de $S \times S^\perp$ (le symbole $\perp$ désigne l'orthogonal par rapport au produit scalaire de $\mathbb{R}^d$) et on travaillera désormais dans le nouveau système de coordonnées correspondant, soit $(u_1, u_2, \ldots, u_s, u_{s+1}, \ldots, u_d)$.

On appelera $B(\varepsilon)$, $B(\varepsilon) = (\frac{-\partial^2 R_\varepsilon}{\partial u_i \partial u_j}(0))_{i,j = s+1,\, d}$; $B(\varepsilon)$ étant diagonalisable, il existe $P(\varepsilon)$ matrice unitaire telle que: $B(\varepsilon) = P(\varepsilon)\, \Lambda(\varepsilon)\, P'(\varepsilon)$ où $\Lambda(\varepsilon)$ est la matrice formée des valeurs propres de $B(\varepsilon)$. On pose alors $c(\varepsilon)$,

$c(\varepsilon) = \Lambda^{-1/2}(\varepsilon)\, P'(\varepsilon)$.

Soit V un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ dont la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ de la frontière est nulle: soit $\mu_d(\partial V) = 0$.

On notera V_ε l'image de V par l'application :

$$\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{d-s} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$(x\ ,\ y) \longrightarrow (x, yc^{-1}(\varepsilon))$$

Pour $y \in \mathbb{R}^s$, $\varepsilon > o$, $u \in \mathbb{R}$, on désignera par $A_\varepsilon(u,y)$,

$A_\varepsilon(u,y) = A_u(X_\varepsilon(y\ ,\ .c(\varepsilon)))$, $C_\varepsilon(u) = C_u(X_\varepsilon(.\ ,\ .c(\varepsilon)))$, $\theta_\varepsilon(.)$ l'angle que forme $X_\varepsilon(.\ ,\ .c(\varepsilon))$ avec sa projection orthogonale sur $\mathbb{R}^{d-s}$, $\theta = E \| X \|$ où X suit une loi normale centrée et de variance I_{d-s}.

2.3 Résultats

Soit $u \in \mathbb{R}$, un niveau fixé.

Théorème 1: Si $\mu_d(\bar{A}) = o$ alors la variable aléatoire $\zeta_\varepsilon^*(V)$:

$$\zeta_\varepsilon^*(V) = \theta^{-1}\ |\text{dét } c(\varepsilon)| \int \chi_{V_\varepsilon \cap C_\varepsilon(u,.)}\ |\cos\theta_\varepsilon(t)|\ d\sigma_{d-1}(t)$$, converge

dans $L^2(\Omega)$ vers $L(u,V)$.

Remarque: La difficulté dans [9], de donner une normalisation ne favorisant pas une valeur propre de la matrice $\Lambda(\varepsilon)$, venait du fait que les éléments de la matrice de passage $P(\varepsilon)$ n'ont pas nécessairement de limite quand ε tend vers zéro.
Lorsque $S = \{o\}$, toutes les valeurs propres de $\Lambda(\varepsilon)$ tendent vers l'infini avec des vitesses qui sont à priori différentes et $c(\varepsilon)$ prend en compte chacune de ces vitesses.

Un exemple d'application de ce théorème peut être donné par:
$R(t) = \exp(-\|t\|^\alpha)$ (exp désignant la fonction exponentielle), où $o < \alpha < 2$; ce cas correspond à celui d'un processus stable symétrique d'indice α. La constante de normalisation $c(\varepsilon)$ est équivalente lorsque ε tend vers zéro à:
$c(\varepsilon) \approx c_\alpha \varepsilon^{1-\alpha/2} I_d$, c_α étant une constante dépendant uniquement de α.

La démonstration du théorème 1 nécessite entre autres deux propositions qui méritent d'être énoncées ici; la première concerne le temps local de X et ses propriétés; la deuxième, la formule de Rice à l'ordre deux d'un processus gaussien stationnaire, lorsque ses trajectoires sont supposées seulement continues et différentiables en moyenne quadratique.

Proposition 1: (i) Le temps local L(.,V) de X existe P.ps et appartient à $L^2(\mu_1 \times P)$.

(ii) Lorsque $d \geq 3$, P.ps le temps local admet une version continue en tant que fonction de x .

(iii) $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2\delta} \int_V \chi_{\{t / |X(t)-u| < \delta\}} dt$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers L(u,V) .

Il est à noter que l'existence d'une version continue du temps local en tant que fonction de x lorsque d=2, semble rester un problème ouvert. Avec une technique semblable à celle que nous avons utilisée pour la démonstration de cette proposition, et en supposant par exemple lorsque d=2, que X est *non localement-déterministe* , on prouve qu'il existe une version continue du temps local (pour la définition du *non local-déterminisme* voir par exemple [6]).

Proposition 2:
Soit $\{ Y(t,\omega),\, t \in \mathbb{R}^d,\, \omega \in \Omega \}$, $d \geq 2$, un processus gaussien stationnaire et centré, à valeurs réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à trajectoires continues et bi--mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{R}^d \otimes \mathcal{A}$.
Soit T un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ dont la mesure de Lebesgue de la frontière est nulle: soit $\mu_d(\partial T) = o$ et soit Γ la covariance du processus Y, supposée continue et telle que: $\Gamma^2(o) - \Gamma^2(u) \neq o$ pour $u \neq o$ et $u \in \overline{T} - \overline{T}$.
Notons dF_Y la mesure spectrale de Y supposée telle que:

$\int_{\mathbb{R}^d} ||x||^2 \, dF_Y(x) < +\infty$ et F_Y non concentrée sur un espace vectoriel de dimension strictement inférieure à d.

Sous les conditions précédentes et si $\dot{Y}$ désigne la dérivée en moyenne quadratique, on a:

$$EQ_T^2 (A_u(Y)) = \int_{T\times T} E(\| \dot{Y}(t) \| \, \| \dot{Y}(s) \| / \, Y(t) = Y(s) = u) \; P_{Y(t),Y(s)}(u,u) \, dt \, ds < +\infty$$

La démonstration de cette proposition suit de très prés le livre de M.Wschebor[25].
Cette formule a l'avantage de ne pas exiger de propriétés presque sûres; seule l'existence de la dérivée en moyenne quadratique est demandée (si celle-ci n'existe pas, le premier moment de $Q_T(A_u(Y))$ vaut déjà $+\infty$) et donc elle permet de s'affranchir des hypothèses H_{12} et H_{22} de [25]. En effet, la formule de Rice à l'ordre deux peut être appliquée selon [25] sous les conditions suivantes:

1) Les trajectoires de Y sont de classe C^4
2) $\Gamma^2(o) - \Gamma^2(u) \neq o$ pour pp $u \in T - T$.
3) $\forall\, j \in \{1,d\}$, les densités jointes de $\frac{\partial Y}{\partial t_j}(o)$ et $\frac{\partial^2 Y}{\partial^2 t_j}(o)$ ne dégénèrent pas

Théorème 2: Soient Hi, i=0,3, les hypothèses suivantes:

H0 Il existe δ, $0 < \delta \leq 1$ tel que M_δ, $M_\delta = \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^\delta \, dF(u) < +\infty$

Soit $h(\varepsilon)$ une fonction qui tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro et telle que:

H1 $\varepsilon^\delta h^{-2}(\varepsilon)$ soit bornée

H2 $\|\Lambda^{-1/2}(\varepsilon)\|^2 l^2(\varepsilon) h^{-2}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} o$

H3 $\|\Lambda^{-1/2}(\varepsilon)\|^2 n(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} o$

Alors sous les hypothèses Hi, i=0,3, nous avons:

$$E(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V))^2 \leq c_h \Big[\big(\varepsilon^\delta h^{\gamma-2}(\varepsilon) + c_1(\varepsilon) h^{1-\gamma/2}(\varepsilon) + c_1^2(\varepsilon) + c_2(\varepsilon)\big) + H_{d-1,\, f(\varepsilon)}(A_{2h(\varepsilon)})\,(\chi_{s=d-1}\, G(g^{1/2}(f^{-1}(\varepsilon))) + \chi_{s\neq d-1}\, g^{-1/2}(f^{-1}(\varepsilon)))\Big]$$

Ceci pour tout $o < \gamma < d-1$, $\gamma \leq 2$; nous avons posé:

$c_1(\varepsilon) = l(\varepsilon)\, \|\Lambda^{-1/2}(\varepsilon)\|\, h^{\gamma/2-1}(\varepsilon)$, $c_2(\varepsilon) = n(\varepsilon)\, \|\Lambda^{-1/2}(\varepsilon)\|^2$

$$l(\varepsilon) = \sup_{\tau/d(\tau,A)\geq h(\varepsilon)} (\|\nabla R_\varepsilon(\tau)\|_a, \|\nabla \Gamma_\varepsilon(\tau)\|_a)$$

$$n(\varepsilon) = \sup_{\tau/d(\tau,A)\geq h(\varepsilon)} \|D^2 R_\varepsilon(\tau)\|_b$$

$$G(z) = \int_z^{+\infty} x^{-2} \operatorname{Argsh} x \, dx, \qquad g(z) = \inf_{u \in S^\perp \cap S^{d-1}} \int_{\|x\|<z} \langle x, u\rangle^2 dF(x),\ z > o$$

(la fonction argsh désigne la composée de la fonction argument avec la fonction sinus hyperbolique).

<u>Remarque</u>: δ va en fait mesurer la distance qui sépare R(t) de son approximation $R_\varepsilon(t)$. On peut montrer que: $| R_\varepsilon(t) - R(t) | \leq$ cste ε^δ, où δ est tel que: $0 < \delta \leq 1$ et $\int_{\mathbb{R}^d} ||u||^\delta \, dF(u) < +\infty$

On a donc intérêt, pour maximiser la vitesse de convergence, à prendre δ le plus grand possible; on pourrait alors se demander ce qui se passe si F est telle que: $\exists \, 1 < \delta < 2$ tel que: $\int_{\mathbb{R}^d} ||u||^\delta \, dF(u) < +\infty$, c'est à dire si on a: $|R_\varepsilon(t) - R(t)| \leq$ cste ε^β, avec $\beta > 1$. La réponse n'est pas toujours positive; par exemple, si on prend: $R(t) = \exp(-||t||^\alpha)$, $\alpha > 1$, on montrera (cf chapitre 5) que: $\int_{\mathbb{R}^d} ||u||^\beta \, dF(u)$ est fini dès que $\beta < \alpha$ et pourtant $|R_\varepsilon(t) - R(t)| \leq$ cste $(\varepsilon + \varepsilon^\alpha)$; on est donc limité par $\delta = 1$.

Il est clair que plus γ est grand, plus la majoration proposée de la vitesse sera meilleure.

On montrera lors de la démonstration de ce théorème, que si on veut que le membre de droite de l'inégalité tende vers zéro lorsque ε tend vers zéro, on doit exiger que $f(\varepsilon)$ et $h(\varepsilon)$ tendent vers zéro lorsque ε tend vers zéro, ce qui semblait intuitif au départ. De plus, on montrera également que g(A) et G(A) tendent vers l'infini lorsque A tend vers l'infini, et donc si on sait majorer $H_{d-1,\, f(\varepsilon)}(A_{2h(\varepsilon)})$ par une constante, alors on est sûr que le deuxième membre de l'inégalité de droite tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro; si, par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait recouvrir A par moins de cste n^{d-1} boules de diamètre égal à $\frac{1}{n}$ alors: $H_{d-1,\, f(\varepsilon)}(A_{2h(\varepsilon)})$ est majoré par une constante ne dépendant pas de ε, ceci pour $h(\varepsilon) \leq f(\varepsilon)$; un exemple de cette situation est donné par:

$$d = 2 \text{ et } A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} C_k \cup \{o\} \quad \text{où} \quad C_k = \delta B(o,\tfrac{1}{2^k}),\ k \in \mathbb{N}^*.$$

En général l'hypothèse H2 implique H3.

Le cas s = d-1 joue un rôle particulier; en effet, ce cas revient à travailler avec d = 1, avec un processus dont le moment spectral d'ordre deux est infini, et il engendre les difficultés qui lui sont spécifiques: entre autres ne pas pouvoir intégrer $1/|x|$ au voisinage de x égal zéro .

Ce théorème permet donc de donner une majoration de la vitesse de convergence de $\zeta_\varepsilon(V)$ vers le temps local L(u,V). Malheureusement nous n'avons pas su donner la vitesse exacte de cette convergence, ce qui reste donc un problème ouvert; ceci pour plusieurs raisons: l'unes d'entre elles étant que la formule de Rice *mixte* (calcul de $E(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V))^2)$ n'a pu être appliquée que "loin" de {o} et donc la "partie" près de {o} échappe à la facturation de cette vitesse; par conséquent, il ne nous a pas été permis de proposer un théorème du type central-limite.

2.4 Plan du travail

L'étude du temps local, les démonstrations de la formule de Rice et du théorème 1 feront l'objet de la partie 3. Dans la partie 4 nous démontrerons le théorème 2 et dans la partie 5, nous ferons l'étude de deux exemples: le premier traitera des cas particuliers d'un processus *quasi-stable* et d'un stable symétrique; le deuxième, celui d'un processus somme de n variables indépendantes uniindéxées. Enfin, la partie 6, sera constituée d'une annexe où nous regrouperons et montrerons un certain nombre de résultats auxquels nous ferons référence aux cours des démonstrations.

3. Approximation du temps local

3.1 Démonstration de la proposition 1

Proposition 1: (i) Le temps local $L(.,V)$ de X existe P.ps et appartient à $L^2(\mu_1 \times P)$.

(ii) Lorsque $d \geq 3$, P.ps le temps local admet une version continue en tant que fonction de x.

(iii) $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2\delta} \int_V \chi_{\{t \,/\, |X(t)-u| < \delta\}}\, dt$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $L(u,V)$.

Dans tout ce qui suit, on pourra toujours choisir l'ensemble V aussi "petit" que nécessaire (voir la remarque suivant la proposition 8 de l'annexe). Avant de poursuivre la démonstration de la proposition 1, nous allons énoncer et montrer un lemme:

Lemme 1 :

(i) $\exists\, c > o, \exists\, B > o$ tq $\inf_{u \in S^{d-1}} \int_{\|x\|<B} < x \,, u >^2 \, dF(x) = m(B) \geq c$

(ii) $\exists\, M > o$ tq $\forall\, u \in \overline{V}\text{-}\overline{V}$, on ait : $R^2(o) - R^2(u) \geq M \, \|u\|^2$

Preuve du lemme 1 :

(i) Raisonnons par l'absurde en supposant que:

$\forall\, B > o, \quad \inf_{u \in S^{d-1}} . \int_{\|x\|<B} < x \,, u >^2 \, dF(x) = o$ alors:

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \exists\, (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in S^{d-1}$ telle que: $\int_{\|x\|<n} < x \,, u_n >^2 \, dF(x) = o.$

Mais S^{d-1} est compact, d'où il existe une sous-suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers $u^* \in S^{d-1}$ et d'après le lemme de Fatou:

$\int_{\mathbb{R}^d} < x \,, u^* >^2 \, dF(x) = o$; et donc le support de F est contenu dans un espace vectoriel de dimension strictement inférieure à d, ce qui contredit notre hypothèse de départ, d'où (i).

(ii) Soit $\| u \| \leq \frac{1}{B}$, $R(o) - R(u) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos < x \,, u >) \, dF(x)$

$$\geq \int_{\|x\|<B} (1 - \cos < x \,, u >) \, dF(x)$$

Mais $|< x,u >| \leq ||x|| \; ||u|| \leq 1$, d´où: $1 - \cos< x,u > \geq c_1 < x,u >^2$ et donc:

$$R(o) - R(u) \geq c_1 \int_{||x||<B} < x,u >^2 \; dF(x) \geq c_1 ||u||^2 \; m(B) \geq c_1 \; C \; ||u||^2, \text{ d´après(i).}$$

En tenant compte que R est continue en zéro, on a alors (ii).

Preuve de la proposition 1: Dans cette démonstration nous nous appuierons surtout sur les articles de S.M Berman [8] et de D.Geman-J.Horowitz [14]. Tout d´abord rappelons la définition du temps local de X.

Soient A et B des boréliens respectivement de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$, la mesure d´occupation $\mu(A,B)$ de X est définie par $\mu(A,B) = \mu_d\{ t \in B \,/\, X(t) \in A \}$.

Lorsque $\mu(.,B)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$, sa dérivée de Radon-Nikodym est appelée temps local de X et nous la noterons $L(x,B)(\omega)$, $x \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ (Nous omettrons d´écrire ω et écrirons en fait $L(x,B)$); On a donc dans ce cas:

$$\mu(A,B) = \int_A L(x,B) \; dx$$

L´étude de l´existence d´une version continue du temps local a été traitée dans [4] à [8] , [10] , [11] et [14].

(i) La fonction q_V,

$$q_V: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x \;,\; y) \longrightarrow q_V(x,y) = \int_{V \times V} p_{X(s),\, X(t)}(x,y) \; ds \; dt$$

est continue en (x,y) ($P_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ désignera dans tout ce qui suit, la densité, quand elle existe, du n-uplet $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ évaluée en $(x_1,x_2,\dots,x_n)$).

En effet, il suffit de voir que: $\int_{V\times V} (R^2(o) - R^2(t-s))^{-1/2} \; dt \; ds < \infty$.

(la finitude de cette intégrale découle du (ii) du lemme 1) puis d´appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue. D´après [8] et [14], on conclut donc que le temps local $L(.,V)$ de X existe P.ps, est dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}, \mu_1 \times P)$, et de plus on a la formule suivante:

(F) $E(L(x,V)\, L(y,V)) = q_V(x,y)$, $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Ceci achève la démonstration de (i). Passons à celle de (ii).

(ii) Pour prouver l'existence d'une version continue du temps local L(.,V) en tant que fonction de x, lorsque d $\geq$ 3, nous utilisons le critère de Kolmogorov.
Plus précisément, nous montrons que lorsque d est supérieur ou égal à 3, nous avons l'inégalité suivante: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$, $\forall\, 0 < \varepsilon \leq 1$,

$g(x,h) = E\,|L(x+h) - L(x)|^2 \leq \text{cste}\,|\,h\,|^{1+\varepsilon}$ (nous avons écrit ici L(x) au lieu de L(x,V)).

Effectuons la majoration de g(x,h) pour d $\geq$ 2 (nous nous servirons de cette majoration pour la démonstration de (iii)). D'après (F), nous avons:

$$g(x,h) = q_V(x+h,x+h) - 2\,q_V(x,x+h) + q_V(x,x)\,, \quad \text{d'où :}$$

$$g(x,h) = \int_{V\times V} \left(p_{X(s),X(t)}(x+h,x+h) - 2p_{X(s),X(t)}(x+h,x) + p_{X(s),X(t)}(x,x) \right) ds\,dt$$

En utilisant la formule d'inversion pour les fonctions caractéristiques, on en déduit:

$$g(x,h) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{V\times V} (e^{-iu(x+h)} - e^{-iux})(e^{-iv(x+h)} - e^{-ivx})\, E(e^{i(uX(t)+vX(s))})\, dt\,ds\,du\,dv$$

(e^x désignant exp(x), $x \in \mathbb{R}$); et donc:

$$g(x,h) \leq \text{cste} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{V\times V} |1 - e^{-iuh}|\,|1 - e^{-ivh}|\, E(e^{i(uX(t)+vX(s))})\, dt\,ds\,du\,dv$$

De par l'inégalité: $|1 - e^{-ix}| \leq 2\,|x|^{\delta}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \delta \leq 1$, on a alors en intégrant en u et v:

$$g(x,h) \leq \text{cste}\,|h|^{2\delta} \int_{V\times V} \left\{ [R^2(0) - R^2(t-s)]^{-\frac{\delta+1}{2}} + [R^2(0) - R^2(t-s)]^{-\frac{2\delta+1}{2}} \right\} ds\,dt$$

En utilisant (ii) du lemme 1, on en déduit alors les deux inégalités suivantes:

$$E\,|L(x+h) - L(x)|^2 \leq \text{cste}\,|\,h\,|^{1+\varepsilon} \quad , d \geq 3 \quad , \forall\, 0 \leq \varepsilon < 1$$

$$\text{et} \quad E\,|L(x+h) - L(x)|^2 \leq \text{cste}\,|\,h\,|^{\alpha} \quad , d \geq 2 \quad , \forall\, 0 < \alpha < 1$$

La première inégalité prouve donc (ii).

Remarque: Il est à noter que lorsqu'on travaille directement sur la loi du processus X, on obtient les majorations sensiblement plus fines suivantes:

$$E\,|L(x+h) - L(x)|^2 \leq \text{cste}\ |\,h\,|^2,\ d \geq 4$$

$$E\,|L(x+h) - L(x)|^2 \leq \text{cste}\ |\,h\,|^2\ \text{Log}\ |\,h\,|^{-1},\ d = 3$$

$$E\,|L(x+h) - L(x)|^2 \leq \text{cste}\ |\,h\,|,\ d = 2$$

(iii) D'après (i) on a:

$$\int_V \chi_{\{t\,/\,|X(t)-u|\,<\,\delta\}}\, dt = \int_{u-\delta}^{u+\delta} L(x\,,V)\,dx$$

et donc:

$$g(\delta,u) = E\,\left|\frac{1}{2\delta}\int_V \chi_{\{t\,/\,|X(t)-u|\,<\,\delta\}}\,dt - L(u\,,V)\right|^2 \text{ est égal à :}$$

$$E\left[\frac{1}{2\delta}\int_{u-\delta}^{u+\delta} (\,L(x\,,V) - L(u\,,V)\,)\,dx\,\right]^2$$

d'où, d'après l'inégalité de Schwarz:

$$g(\delta,u) \leq \frac{1}{2\delta}\int_{u-\delta}^{u+\delta} E(\,L(x\,,V) - L(u\,,V)\,)^2\,dx\ .$$

D'après la majoration faite dans (ii), on a donc:

$g(\delta,u) \leq$ cste δ^{α}, $\forall\ 0 < \alpha < 1$. Il s'en suit que:

$\lim_{\delta\to 0} g(\delta,u) = o$, ce qui achève la démonstration de la proposition1.

3.2 Démonstration de la proposition 2

Proposition 2:
Soit $\{ Y(t,\omega), t \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega \}$, $d \geq 2$, un processus gaussien stationnaire et centré, à valeurs réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à trajectoires continues et bi-mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{R}^d \otimes \mathcal{A}$.
Soit T un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ dont la mesure de Lebesgue de la frontière est nulle: soit $\mu_d(\partial T) = o$ et soit Γ la covariance du processus Y, supposée continue et telle que: $\Gamma^2(o) - \Gamma^2(u) \neq o$ pour $u \neq o$ et $u \in \overline{T} - \overline{T}$.
Notons dF_Y la mesure spectrale de Y supposée telle que:

$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 \, dF_Y(x) < +\infty$ et F_Y non concentrée sur un espace vectoriel de dimension strictement inférieure à d.

Sous les conditions précédentes et si $\dot{Y}$ désigne la dérivée en moyenne quadratique, on a:

$$EQ_T^2(A_u(Y)) = \int_{T\times T} E(\|\dot{Y}(t)\|\,\|\dot{Y}(s)\| / Y(t) = Y(s) = u) \, P_{Y(t),Y(s)}(u, u) \, dt \, ds < +\infty$$

Preuve: Soit $Y_\rho = \phi_\rho * Y$, où ϕ_ρ est une C^∞-approximation de l'unité dans $\mathbb{R}^d$, c'est à dire: $\forall \rho > o$, $\phi_\rho : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$, C^∞, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_\rho(u) \, du = 1$ et supp $\phi_\rho \subset B_d(o,\rho)$.
$\{ Y_\rho(t,\omega), t \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega \}$ est un processus gaussien, stationnaire et centré, à trajectoires C^∞; on notera Γ_ρ sa covariance.
Avant de poursuivre la démonstration de cette proposition, nous allons montrer un lemme qui sera utile tout au long de ce travail.

Lemme 2:
$\exists M > o, \exists \rho_o > o$ tq $\forall \rho \leq \rho_o$, $\forall u \in \overline{T} - \overline{T}$, on ait: $\Gamma_\rho^2(o) - \Gamma_\rho^2(u) \geq M \|u\|^2$

Preuve du lemme 2 :
L'application $x \rightarrow |\hat{\phi}|^2(\rho x)$ étant continue en zéro, on a donc:

$\forall B > o, \exists \rho_B > o$, tq $\forall o < \rho \leq \rho_B$ et $\forall x \in \mathbb{R}^d$ tq $\| x \| \leq B$, on ait: $|\hat{\phi}|^2(\rho x) \geq ½$.
D'autre part F_Y n'est pas concentrée sur un espace vectoriel de dimension strictement inférieure à d; on applique alors le lemme 1(i) et on obtient:

$$\exists c > o, \exists B > o \text{ tq } \inf_{u \in S^{d-1}} \int_{\|x\|<B} < x , u >^2 dF_Y(x) \geq c$$

Soit alors u tel que: $\| u \| \leq \frac{1}{B}$

$$\Gamma_\rho(o) - \Gamma_\rho(u) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos< x , u >) |\hat{\phi}|^2(\rho x) \; dF_Y(x)$$

$$\geq \int_{\|x\|<B} (1 - \cos< x , u >) |\hat{\phi}|^2(\rho x) \; dF_Y(x)$$

$\geq$ ½ C_1 C $\|u\|^2$ (C_1 a été défini dans la démonstration du lemme 1(ii)).

En tenant compte que $\Gamma^2_\rho(o) - \Gamma^2_\rho(u)$ converge uniformément vers $\Gamma^2(o)-\Gamma^2(u)$, lorsque ρ tend vers zéro, ceci d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue et que $\Gamma^2(o) - \Gamma^2(u) \neq o$ pour $u \in \overline{T} - \overline{T}$, on en déduit le résultat.

<u>Retour à la preuve de la proposition 2</u> :
$\{ Y_\rho(t,\omega), t \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega \}$ a des trajectoires C^∞; $\forall \rho \leq \rho_o$, $\forall u \in T\text{-}T$, $u \neq o$, $\Gamma^2_\rho(o) - \Gamma^2_\rho(u) \neq o$(ceci d'après le lemme 2); de plus puisque F_Y n'est pas concentrée sur un espace vectoriel de dimension strictement inférieure à d, la matrice des dérivées partielles secondes en zéro de Γ, soit $\ddot{\Gamma}(o)$, est non dégénérée, et donc pour ρ suffisamment petit ($\rho \leq \rho_1$), celle de Γ_ρ, soit $\ddot{\Gamma}_\rho(o)$, ne l'est pas non plus; ceci implique que la mesure spectrale de Y_ρ, soit F_{Y_ρ}, n'est pas concentrée sur un espace vectoriel de dimension strictement inférieure à d et donc que la loi jointe de $\left(\frac{\partial Y_\rho}{\partial t_j}(o) , \frac{\partial^2 Y_\rho}{\partial t_j^2}(o) \right)$ ne dégénère pas, ceci $\forall j \in \{1,d\}$ et pour tout $\rho \leq \rho_1$.
On peut donc appliquer à Y_ρ, la formule de Rice à l'ordre 2 [25].
D'autre part les conditions $\mu_d(C_u(Y)) = o$ Ps et Y à trajectoires continues impliquent que: Ps, $\chi_{A_u(Y_\rho)}(t) \xrightarrow[\rho \to o]{} \chi_{A_u(Y)}(t)$ pour μ_d-presque tout

t de $\mathbb{R}^d$; on peut donc appliquer la proposition 1(iv) du chapitre 1 [25], pour obtenir:

$$Q_T(A_u(Y)) \leq \liminf_{\rho \to o} Q_T(A_u(Y_\rho))$$

En appliquant le lemme de Fatou, on obtient:

$$EQ_T^2(A_u(Y)) \leq \liminf_{\rho \to o} EQ_T^2(A_u(Y_\rho))$$

$$\leq \liminf_{\rho \to o} \int_{T\times T} E(\| \mathrm{grad} Y_\rho(t) \| \| \mathrm{grad} Y_\rho(s) \| / Y_\rho(t) = Y_\rho(s) = u)\, P_{Y_\rho(t), Y_\rho(s)}(u, u)\, dt\, ds$$

1) pour Ps tout $(t,s) \in T\times T$,

$E(\| \mathrm{grad} Y_\rho(t) \| \ \| \mathrm{grad} Y_\rho(s) \| / Y_\rho(t) = Y_\rho(s) = u)\ P_{Y_\rho(t), Y_\rho(s)}(u,u)$ converge lorsque ρ tend vers zéro vers:

$$E(\| \dot{Y}(t) \| \| \dot{Y}(s) \| / Y(t) = Y(s) = u)\ P_{Y(t), Y(s)}(u,u)$$

2) $\exists\ \rho_2 > o$ tel que pour $\rho \leq \rho_2$ et pour tout $(t,s) \in T\times T$, on ait:

$E(\| \mathrm{grad} Y_\rho(t) \| \ \| \mathrm{grad} Y_\rho(s) \| / Y_\rho(t) = Y_\rho(s) = u)\ P_{Y_\rho(t), Y_\rho(s)}(u, u) \leq h(t,s)$,

$h \in L^1_{T\times T}(\mu_d \times \mu_d)$. En effet, pour montrer 2), nous allons utiliser la proposition 3 dont la preuve est donnée en annexe.

Soit donc $\tau = t - s \in T\text{-}T$, d'après la proposition précédente, on a:

$$E(\| \mathrm{grad} Y_\rho(t) \| \| \mathrm{grad} Y_\rho(s) \| / Y_\rho(t) = Y_\rho(s) = u) \leq$$

$$\left(\sum_{j=1}^{d} \frac{-\partial^2 \Gamma_\rho}{\partial t_j^2}(o)\right)\left(1 + u^2\, \Gamma_\rho(o)(\Gamma_\rho(o) + \Gamma_\rho(\tau))^{-2}\right.$$

Or $\dfrac{-\partial^2 \Gamma_\rho}{\partial t_j^2}(o) \xrightarrow[\rho \to o]{} \dfrac{-\partial^2 \Gamma}{\partial t_j^2}(o)$, $\Gamma_\rho(o) \xrightarrow[\rho \to o]{} \Gamma(o)$ et

$$\Gamma_\rho(o) + \Gamma_\rho(\tau) \xrightarrow[\rho \to o]{} \Gamma(o) + \Gamma(\tau)$$

En tenant compte que Γ est continue en zéro et $\Gamma(o) + \Gamma(\tau) \neq o$ pour $\tau \in \overline{T}\text{-}\overline{T}$, $\tau \neq o$, on a:

$\exists\ c > o$, $\exists\ \rho' > o$ tel que pour $\rho \leq \rho'$ et pour tout $(t,s) \in T\times T$, on ait:

$E(\| \mathrm{grad} Y_\rho(t) \| \ \| \mathrm{grad} Y_\rho(s) \| / Y_\rho(t) = Y_\rho(s) = u) \leq c$

D'autre part, d'après le lemme 2, on a:

$P_{Y_\rho(t), Y_\rho(s)}(u, u) \leq M^{-1/2} \| t - s \|^{-1}$ pour $\rho \leq \rho_o$ et

$M^{-1/2} \| t\text{-}s \|^{-1} \in L^1_{T\times T}(\mu_d \times \mu_d)$ d'où 2) .

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il vient:

$$EQ_T^2(A_u(Y)) \leq \int_{T\times T} E(\|\dot{Y}(t)\|\|\dot{Y}(s)\| / Y(t)=Y(s)=u)\; P_{Y(t),Y(s)}(u\,,u)\,dt\,ds$$

Pour l'inégalité inverse, nous allons exhiber une partition de T avec laquelle nous travaillerons. T étant un cube ouvert borné, il existe un cube C d'axes parallèles aux axes de coordonnées, de longueur l tel que: $T \subset C$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous considérons la partition de C en cubes $\{C_i\}$ d'axes parallèles aux axes de coordonnées, de longueur l/n et dont les intérieurs sont disjoints deux à deux; soit: $C = \bigcup_i C_i$ et $T = \bigcup_i (C_i \cap T)$. Posons $T_i = C_i \cap T$ et $W_i = \overset{o}{T_i}$.
Compte-tenu que $\mu_d(\partial T_i) = o$ (puisque $\mu_d(\partial T) = o$) et des propositions 4 et 5 dont les démonstrations sont données dans l'annexe, on en déduit:
$Q_T(A_u(Y)) = Q_{\cup T_i}(A_u(Y)) = \sum_i Q_{W_i}(A_u(Y))$ Ps.
On fixe alors $n \in \mathbb{N}^*$.

$$EQ_T^2(A_u(Y)) = \sum_i \sum_j E(Q_{W_i}(A_u(Y))\; Q_{W_j}(A_u(Y)))$$

Nous dirons que deux cubes C_i, C_j de la partition sont "*proches*" s'il existe $t_i \in C_i$ et $t_j \in C_j$ tels que: $\| t_i - t_j \| < l/n$.
L notera la somme correspondante aux couples (i,j) tels que: $i \neq j$ implique que C_i et C_j ne sont pas proches.
Il est clair que: $EQ_T^2(A_u(Y)) \geq \sum_{ij\in L} E(Q_{W_i}(A_u(Y))\; Q_{W_j}(A_u(Y)))$
Soit $(i,j) \in L$: en particulier , $\forall u \in W_i$, $\forall v \in W_j$, $\| u-v \| \geq l/n$
Soit $o < \varepsilon < \delta$
D'après la partie b) de la proposition 2 du chapitre 1 [25], on a:

$$Q_{W_i}(A_u(Y)) \geq \int_{(W_i)_{-\delta}} \|\mathrm{grad}(\chi_{A_u(Y)} * \varphi_\varepsilon)(t)\| \;\; dt \quad \text{(respt pour j)}$$

Nous avons noté $O_{-\delta}$, $O_{-\delta} = \{ t\,, d(t\,, O^c) > \delta \}$

$$E(Q_{W_i}(A_u(Y))\, Q_{W_j}(A_u(Y))) \geq$$

$$E\Big(\int_{(W_i)_{-\delta}\times (W_j)_{-\delta}} \Big\| \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{]-\infty,u[}(Y(s))\; \mathrm{grad}\varphi_\varepsilon(t-s)ds \Big\| \times$$

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{]-\infty,u[}(Y(s'))\; \mathrm{grad}\varphi_\varepsilon(t'-s')\, ds' \Big\| \; dtdt' \Big)$$

Soit $\{f_m\}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, non croissantes et telles que: $f_m(x) = 1$ si $x \leq u-1/m$ et $f_m(x) = o$ si $x \geq u$.
On applique alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il s'en suit:

$$E(Q_{W_i}(A_u(Y)) \, Q_{W_j}(A_u(Y))) \geq$$

$$\lim_{m \to +\infty} E \Big(\int_{(W_i)_{-\delta} \times (W_j)_{-\delta}} \Big\| \int_{\mathbb{R}^d} f_m(Y(s)) \, \mathrm{grad}\varphi_\varepsilon(t-s)ds \Big\| \times$$

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}^d} f_m(Y(s')) \, \mathrm{grad}\varphi_\varepsilon(t'-s') \, ds' \Big\| \, dtdt' \Big)$$

En appliquant encore une fois le théorème de convergence dominée de Lebesgue et en tenant compte que:

$\forall s$, $f_m(Y_\rho(s)) \xrightarrow[\rho \to o]{} f_m(Y(s))$ Ps, on a:

$$E(Q_{W_i}(A_u(Y)) \, Q_{W_j}(A_u(Y))) \geq$$

$$\lim_{m \to +\infty} \lim_{\rho \to o} E\Big(\int_{(W_i)_{-\delta} \times (W_j)_{-\delta}} \Big\| \int_{\mathbb{R}^d} f_m(Y_\rho(s)) \, \mathrm{grad}\varphi_\varepsilon(t-s) \, ds \Big\|$$

$$\times \Big\| \int_{\mathbb{R}^d} f_m(Y_\rho(s')) \, \mathrm{grad}\varphi_\varepsilon(t'-s') \, ds' \Big\| dtdt' \Big)$$

En intégrant par parties les deux intégrales sur $\mathbb{R}^d$, on obtient alors:

$$E(Q_{W_i}(A_u(Y)) \, Q_{W_j}(A_u(Y))) \geq$$

$$\lim_{m \to +\infty} \lim_{\rho \to o} E\Big(\int_{(W_i)_{-\delta} \times (W_j)_{-\delta}} \Big\| \int_{\mathbb{R}^d} f'_m(Y_\rho(s)) \mathrm{grad}Y_\rho(s) \varphi_\varepsilon(t-s) ds \Big\|$$

$$\times \Big\| \int_{\mathbb{R}^d} f'_m(Y_\rho(s')) \, \mathrm{grad}\, Y_\rho(s') \, \varphi_\varepsilon(t'-s') \, ds' \Big\| dtdt' \Big)$$

Compte-tenu que $\varphi_\varepsilon \geq o$, f'_m est de signe constant et de l'inégalité triangulaire, on obtient donc que l' espérance mathématique qui figure à droite dans l'inégalité est minorée par:

$$E\Big(\int_{(W_i)_{-\delta} \times (W_j)_{-\delta}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi_\varepsilon(t-s) \, \varphi_\varepsilon(t'-s') \, |f'_m(Y_\rho(s))|$$

$$\times \, |f'_m(Y_\rho(s'))| \, \|\mathrm{grad}Y_\rho(t)\| \, \|\mathrm{grad}\, Y_\rho(t')\| \quad ds\, ds' dt\, dt' \Big) \qquad +$$

$$\text{(I)}$$

$$E\Big(\int_{(W_i)_{-\delta} \times (W_j)_{-\delta}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi_\varepsilon(t-s) \, \varphi_\varepsilon(t'-s') \, |f'_m(Y_\rho(s))|$$

$$\times \, |f'_m(Y_\rho(s'))| \, \|\mathrm{grad}Y_\rho(s)\| \, \|\mathrm{grad}\, (Y_\rho(t')-Y_\rho(s'))\| \quad ds\, ds' dt\, dt' \Big) \; +$$

$$\text{(II)}$$

$$E\Big(\int_{(W_i)_{-\delta} \times (W_j)_{-\delta}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi_\varepsilon(t-s)\ \varphi_\varepsilon(t'-s')\ |f'_m(Y_\rho(s))|$$

$$\times\ |f'_m(Y_\rho(s'))|\ \|\text{grad}Y_\rho(s')\|\ \|\text{grad}\ (Y_\rho(t)-Y_\rho(s)\ \|\quad ds\, ds'dt\, dt'\ \Big)\ +$$

(III)

$$E\Big(\int_{(W_i)_{-\delta} \times (W_j)_{-\delta}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi_\varepsilon(t-s)\ \varphi_\varepsilon(t'-s')\ |f'_m(Y_\rho(s))|$$

$$\times\ |f'_m(Y_\rho(s'))|\ \|\text{grad}\ (Y_\rho(t)-Y_\rho(s)\ \|\ \|\text{grad}\ (Y_\rho(t')-Y_\rho(s')\ \|\quad ds\, ds'dt\, dt'\ \Big)$$

(IV)

<u>Interessons-nous à la première quantité</u>

D'après le théorème de Fubini:

$$(\text{I}) = \int_{(W_i)_{-\delta} \times (W_j)_{-\delta}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi_\varepsilon(t-s)\ \varphi_\varepsilon(t'-s')\ E(\ |f'_m(Y_\rho(s))|$$

$$\times\ |f'_m(Y_\rho(s'))|\ \|\text{grad}Y_\rho(t)\|\ \|\text{grad}\ Y_\rho(t')\|\,)\ ds\, ds'dt\, dt'$$

Et donc:

$$(\text{I}) = \int_{(W_i)_{-\delta} \times (W_j)_{-\delta}} \Big| \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi_\varepsilon(t-s)\ \varphi_\varepsilon(t'-s') \int_{\mathbb{R}^2} |f'_m(x)|\ |f'_m(y)|$$

$$\times\ E(\ \|\text{grad}\, Y_\rho(t)\|\ \|\text{grad}\, Y_\rho(t')\| \,/\ Y_\rho(s)=x\,,\ Y_\rho(s')=y\ )\ P_{Y_\rho(s),Y_\rho(s')}(x,y)\ dx\, dy\, ds\, ds'dt\, dt'$$

En appliquant successivement le lemme de Fatou lorsque $\rho \to 0$, $m \to +\infty$, $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ (dans cet ordre), la limite inférieure de (I) est minorée par:

$$\int_{W_i \times W_j} E(\ \|\dot{Y}(t)\|\ \|\dot{Y}(t')\| \,/\ Y(t) = Y(t') = u\ )\ P_{Y(t),Y(t')}(u,u)\ dt\, dt'$$

<u>Pour la deuxième quantité</u>

De façon analogue à ce qui précède, on a:

$$(\text{II}) = \int_{(W_i)_{-\delta} \times (W_j)_{-\delta}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi_\varepsilon(t-s)\ \varphi_\varepsilon(t'-s') \int_{\mathbb{R}^2} |f'_m(x)|\ |f'_m(y)|$$

$$\times\ E(\ \|\text{grad}\, Y_\rho(s)\|\ \|\text{grad}(\ Y_\rho(t')-Y_\rho(s')\ )\| \,/\ Y_\rho(s)=x\,,\ Y_\rho(s')=y\ )\ P_{Y_\rho(s),Y_\rho(s')}(x,y)\ dX$$

où $dX = dx\, dy\, ds\, ds'dt\, dt'$

On applique la proposition 3, il vient:

$$E(\ \|\text{grad}\ Y_\rho(s)\|\ \|\text{grad}(\ Y_\rho(t')\text{-grad}(\ Y_\rho(s')\| \,/\ Y_\rho(s)=x\ ,\ Y_\rho(s')=y\ )\ \leq$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{d} \frac{-\partial^2\Gamma_\rho}{\partial t_k^2}(0)\Big)^{-1/2} \Big(\sum_{k=1}^{d} 2\Big(\frac{-\partial^2\Gamma_\rho}{\partial t_k^2}(t'-s') - \frac{-\partial^2\Gamma_\rho}{\partial t_k^2}(0)\Big)\Big)^{1/2}$$

$\times$

$$\left\{1+\Gamma_\rho(o)(\Gamma_\rho^2(o)-\Gamma_\rho^2(s-s'))^{-2}[\,|x\Gamma_\rho(o)-y\Gamma_\rho(s-s')|+|y\Gamma_\rho(o)-x\Gamma_\rho(s-s')|]^2\right\}$$

Or $\dfrac{-\partial^2\Gamma_\rho}{\partial t_k^2}(o) \xrightarrow[\rho\to o]{} \dfrac{-\partial^2\Gamma}{\partial t_k^2}(o)$, $\Gamma_\rho(o) \xrightarrow[\rho\to o]{} \Gamma(o)$

D'autre part: $|x\Gamma_\rho(o)-y\Gamma_\rho(s-s')| \le (|x|+|y|)\,\Gamma(o) \le c(u)\,\Gamma(o)$ (de même pour $|y\Gamma_\rho(o)-x\Gamma_\rho(s-s')|$) et si $s \in W_i$ et $s' \in W_j$ alors: $\|s-s'\| \ge l/n$, ce qui implique que: $\Gamma_\rho^2(o)-\Gamma_\rho^2(s-s') \ge c_n > o$ pour $\rho \le \rho_o$. Finalement:
$E(\|\mathrm{grad}\, Y_\rho(s)\|\, \|\mathrm{grad}(Y_\rho(t')-Y_\rho(s'))\| \,/\, Y_\rho(s)=x,\ Y_\rho(s')=y) \le$

$$g_{n,u}\Big(\sum_{k=1}^{d}\Big(\frac{\partial^2\Gamma_\rho}{\partial t_k^2}(t'-s')-\frac{-\partial^2\Gamma_\rho}{\partial t_k^2}(o)\Big)\Big)^{1/2}$$ pour $\rho \le \rho_1$, et donc:

$$(II) \le g_{n,u} \int_{(W_i)_{-\delta}\times(W_j)_{-\delta}} \varphi_\varepsilon(t-s)\ \varphi_\varepsilon(t'-s') \int_{\mathbb{R}^{2d}} \Big[\sum_{k=1}^{d}\frac{-\partial^2\Gamma_\rho}{\partial t_k^2}(t'-s')-\frac{\partial^2\Gamma_\rho}{\partial t_k^2}(o)\Big]^{1/2} ds\, ds'\, dt\, dt' \int_{\mathbb{R}^2} |f'_m(x)|\,|f'_m(y)|\ dx\,dy\ ,\quad \text{pour } \rho \le \rho_1$$

Et donc (II) tend vers zéro lorsque $\rho \to o$, $m \to +\infty$, $\varepsilon \to o$ à cause de la continuité de $\dfrac{\partial^2\Gamma}{\partial t_k^2}$; on fait de même pour (III) et (IV).

Finalement : si $(i,j) \in L$:

$$E(Q_{W_i}(A_u(Y))\,Q_{W_j}(A_u(Y))) \ge \int_{W_i\times W_j} E(\|\dot Y(t)\|\,\|\dot Y(s)\| \,/\, Y(t)=Y(s)=u)\ P_{Y(t),Y(s)}(u,u)\ dt\,ds$$

D'où en posant: $E(u,\tau) = E(\|\dot Y(o)\|\,\|\dot Y(\tau)\| \,/\, Y(o)=Y(\tau)=u)\ P_{Y(o),Y(\tau)}(u,u)$

$$EQ_T^2(A_u(Y)) \ge \sum_{ij\in L} \int_{W_i\times W_j} E(u,\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

Compte-tenu que: $W_i \cap W_j = \emptyset$ dès que $i \ne j$ et que:
$\mu_{2d}\big(\bigcup_{ij\in L}(W_i\times W_j)\big) = \mu_{2d}\big(\bigcup_{ij\in L}(T_i\times T_j)\big)$, on a:

$$\sum_{ij\in L}\int_{W_i\times W_j} E(u,\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 = \int_{\bigcup_{ij\in L} T_i\times T_j} E(u,\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

Or: $\{(s,t) \in T\times T,\ \|t-s\| \ge (2d^{1/2}+1)/n\} = A_n \subset \bigcup_{ij\in L}(T_i\times T_j)$

D'où:

$$EQ_T^2(A_u(Y)) \geq \int_{A_n} E(u,\tau_1-\tau_2)\ d\tau_1 d\tau_2 .$$

Mais $A_n \uparrow T \times T$ lorsque $n \uparrow +\infty$; en appliquant le théorème de Beppolevi, on obtient finalement:

$$EQ_T^2(A_u(Y)) \geq \int_{T\times T} E(\|\dot{Y}(t)\|\|\dot{Y}(s)\| / Y(t)=Y(s)=u)\ P_{Y(t),Y(s)}(u\ ,\ u)\ dt\ ds$$

Ceci achève la démonstration de la formule de Rice (la finitude de $EQ_T^2(A_u(Y))$ est triviale compte-tenu du lemme1 et de la proposition 3).

3.3 Démonstration du théorème 1

Théorème 1:
Sous l' hypothèse $\mu_d(\bar{A} \cap \bar{V}\text{-}\bar{V}) = o$ la variable aléatoire $\zeta_\varepsilon(V)$,

$$\zeta_\varepsilon(V) = \theta^{-1}\ |\text{dét } c(\varepsilon)| \int_{\mathbb{R}^s} Q_{(V\varepsilon)_y}(\ A_\varepsilon(u,y)\ )\,dy$$

converge dans $L^2(\Omega)$ vers $L(u,V)$.

Remarque: Dans l'énoncé des résultats, nous avons annoncé la convergence dans $L^2(\Omega)$ de $\zeta_\varepsilon^*(V)$, $\zeta_\varepsilon^*(V) = \theta^{-1}\,|\text{détc}(\varepsilon)| \int \chi_{V\varepsilon \cap C_\varepsilon(u,.)}\, |\cos\theta_\varepsilon(t)|\, d\sigma_{d-1}(t)$, vers le temps local $L(u,V)$ de X. En fait on peut montrer que $\zeta_\varepsilon(V)$ peut toujours s'écrire comme une intégrale relativement à la mesure $Q_{dt}A_\varepsilon(u,.)$ (la démonstration de cette égalité est faite dans les propositions 6 et 7 de l'annexe); plus précisément nous montrons que cette intégrale s' écrit: $\int \chi_{V\varepsilon \cap \partial^* A_\varepsilon(u,.)}\ \|\ P_2 n_\varepsilon(t)\ \|\ Q_{dt}(A_\varepsilon(u,.))$, où ∂^* désigne le bord essentiel (cf annexe 6.1.2 pour sa définition), P_2 la projection orthogonale sur $\mathbb{R}^{d-s}$ et n_ε coïncidera avec le vecteur unitaire, défini presque-partout par rapport à la mesure de référence, qui coïncide avec le champ normal à $C_\varepsilon(u,.) \cap V_\varepsilon$ orienté vers l'extérieur de $A_\varepsilon(u,.) \cap V_\varepsilon$ lorsque le bord est régulier; ce qui est le cas par exemple, losque X_ε est de classe C^2: dans ce cas, on aura d' ailleurs $\zeta_\varepsilon(V) = \zeta_\varepsilon^*(V)$.

Avant de commencer la démonstration du théorème 1, nous allons énoncer et prouver deux lemmes techniques.

Lemme 3:

(i) $R_\varepsilon(t)$ et $\Gamma_\varepsilon(t)$ tendent vers $R(t)$ quand ε tend vers zéro, uniformément en t.

(ii) Pour $t = (t_1, t_2) \in \overline{V} \times \overline{V}$ tel que $d(t_1 - t_2 = \tau, A) \geq \delta$, $\delta > o$, alors $\| \nabla R_\varepsilon(\tau) \|_a$, $\| D^2 R_\varepsilon(\tau) \|_b$ et $\| \nabla \Gamma_\varepsilon(\tau) \|_a$ sont majorées par des constantes ne dépendant que de δ, ceci $\forall\ o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$.

Preuve du lemme 3:

(i) Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue .

(ii) Posons pour tout $\delta > o$, $L_\delta = \sup_{\tau \in C_\delta \cap [\overline{V} - \overline{V} + \overline{B}(o,\delta)]} \| \nabla R(\tau) \|_a$ et

$$N_\delta = \sup_{\tau \in C_\delta \cap [\overline{V} - \overline{V} + \overline{B}(o,\delta)]} \| D^2 R(\tau) \|_b \text{ où : } C_\delta = \{ x \in \mathbb{R}^d ,\ d(x,A) \geq \delta \}.$$

Soit $\tau \in C_{2\delta} \cap (\overline{V} - \overline{V})$, $i \in \{1,d\}$.

$D_i R_\varepsilon(\tau) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^{2d}} D_i\Psi(v)\ \Psi(u)\ R(\tau + \varepsilon(u-v))$ du dv (on a noté D_i, $D_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$)

Compte-tenu des propriétés de Ψ nous avons donc:

$$D_i R_\varepsilon(\tau) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^{2d}} D_i\Psi(v)\ \Psi(u)\ [R(\tau + \varepsilon(u-v)) - R(\tau)]\ du\, dv = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \quad (1)$$

Découpons $\mathbb{R}^{2d}$ en deux domaines: $A = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^{2d} ,\ \|u-v\| < \frac{\delta}{\varepsilon} \}$ et

$$B = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^{2d} ,\ \|u-v\| \geq \frac{\delta}{\varepsilon} \}$$

On majore $|D_i R_\varepsilon(\tau)|$ par: $\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |D_i\Psi(v)| \Psi(u)\ |R(\tau + \varepsilon(u-v)) - R(\tau)|$ du dv sur les deux domaines.

Si (u,v) $\in$ A: On écrit $R(\tau + \varepsilon(u-v)) - R(\tau)$ sous la forme:

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial R}{\partial u_i}(\tau + \varepsilon(u-v)\theta^*)\ \varepsilon(u-v)_i \ ,\ o \leq |\theta^*| < 1 \quad \text{et donc:}$$

$$|R(\tau + \varepsilon(u-v)) - R(\tau)| \leq \sum_{i=1}^{d} \left| \frac{\partial R}{\partial u_i}(\tau + \varepsilon(u-v)\theta^*) \right|$$

et $\tau + \varepsilon(u-v)\theta^* \in C_\delta \cap [(\overline{V} - \overline{V}) + \overline{B}(o,\delta)]$, d'où:

$$\int_A |(1)| \leq d\, L_\delta \int_{\mathbb{R}^{2d}} |D_i\Psi(v)|\ \Psi(u)\ \|u-v\|\ du\, dv$$

$$\leq d\, L_\delta \left[c \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(u)\, \|u\|\, du + \int_{\mathbb{R}^d} |D_i\Psi(v)\, \|v\|\, dv \right], \text{ où:}$$

$$c = \sup_{i=1}^{d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |D_i\Psi(v)\, dv \right]$$

De par les hypothèses faites sur Ψ on a: $\int_{\mathbb{R}^d} \Psi(u)\, \|u\|\, du < +\infty$

ainsi que: $\int_{\mathbb{R}^d} |D_i\Psi(v)\, \|v\|\, dv$, ceci $\forall\, i \in \{1,d\}$.

Si $(u,v) \in B$: On majore $|R(\tau+\varepsilon(u-v)) - R(\tau)|$ par $2\, R(o)$. En remarquant que:

$\{ \|u-v\| > \frac{\delta}{\varepsilon}\} \subset \{ U = \{ \|u\| \geq \frac{\delta}{2\varepsilon}\} \times \mathbb{R}^d \} \cup \{ \mathbb{R}^d \times \{ \|v\| \geq \frac{\delta}{2\varepsilon} \} \}$,

on obtient finalement:

$$\int_B |(1)| \leq 2\, \frac{R(o)}{\varepsilon} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \int_U |D_i\Psi(v)|\, \Psi(u)\, du\, dv + \int_{\mathbb{R}^d} \int_U |D_i\Psi(v)|\, \Psi(u)\, dv\, du \right]$$

$$\int_B |(1)| \leq \frac{cste}{\varepsilon} \left[\int_U \Psi(u)\, du + \int_U |D_i\Psi(v)|\, dv \right]$$

$$\int_B |(1)| \leq c(\delta,\beta_1,\beta_2,d)\, (\varepsilon^{\beta_1 -1} + \varepsilon^{\beta_2 -1}) .$$

et donc: $|D_i r_\varepsilon(\tau)| \leq M(\delta)$ pour $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$.

Soit $j \in \{1,d\}$, $D_iD_jR_\varepsilon(\tau) = (\frac{1}{\varepsilon})^2 \int_{\mathbb{R}^{2d}} D_i\Psi(u)\, D_j\Psi(v)\, R(\tau+\varepsilon(u-v))\, du\, dv$

De par les hypothèses faites sur Ψ, nous avons:

$$D_iD_jR_\varepsilon(\tau) = (\frac{1}{\varepsilon})^2 \int_{\mathbb{R}^{2d}} D_i\Psi(u)\, D_j\Psi(v) \left[R(\tau+\varepsilon(u-v)) - R(\tau) - \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial R}{\partial u_k}(\tau)\, \varepsilon\, (u-v)_k \right] du\, dv$$

$$D_iD_jR_\varepsilon(\tau) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} (2)$$

Si $(u,v) \in A$: On écrit $R(\tau+\varepsilon(u-v)) - R(\tau) - \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial R}{\partial u_k}(\tau)\, \varepsilon\, (u-v)_k$ sous la

forme: $\sum_{m;n=1}^{d} \frac{\partial^2 R}{\partial u_n \partial u_m}(\tau+\varepsilon(u-v)\theta^*)\, \varepsilon^2\, (u-v)_n\, (u-v)_m$, $o \leq |\theta^*| < 1$,

de la même façon que précédemment, on obtient:

$$\int_A |(2)| \leq d^2\, N_\delta \int_{\mathbb{R}^{2d}} |D_i\Psi(u)|\, |D_j\Psi(v)|\, [\|u\|^2 + 2\, \|u\|\, \|v\| + \|v\|^2]\, du\, dv$$

Il suffit alors pour conclure de remarquer que: $\int_{\mathbb{R}^d} |D_k\Psi(u)|\, \|u\|^\tau\, du < +\infty$,

ceci pour tout $k \in \{1,d\}$ et tout $\tau \in \{1,2\}$.

Si $(u,v) \in B$: On procède de façon analogue à ce qui a été fait dans la majoration de la deuxième intégrale apparaissant dans le calcul de $D_iR_\varepsilon(\tau)$.

Il suffit alors de majorer $| R(\tau+\varepsilon(u-v)) - R(\tau) - \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial R}{\partial u_k}(\tau)\, \varepsilon\, (u-v)_k |$ par $2\, R(o) + d\, L_{2\delta}\, \varepsilon\, [\, \|u\| + \|v\|\,]$ et d'utiliser ensuite les propriétés de Ψ et donc:

$|D_i D_j R_\varepsilon(\tau)| \leq M_1(\delta)$ pour $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$.

La majoration de $|D_i \Gamma_\varepsilon(\tau)|$, $i \in \{1,d\}$ et $\tau \in C_{2\delta} \cap (\overline{V} - \overline{V})$ s'obtient par les méthodes utilisées précédemment.

Lemme 4 :

(i) $g(A) = \inf\limits_{u \in S^\perp \cap S^{d-1}} \int_{\|x\|<A} <x,\ u>^2\, dF(x) \xrightarrow[A \to +\infty]{} +\infty$

(ii) Les valeurs propres de $B(\varepsilon)$ tendent vers l'infini lorsque ε tend vers zéro et donc: $\|(c(\varepsilon)\| \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} o$

Preuve du lemme 4 :

(i) Raisonnons par l'absurde en supposant que l'on ait:
non ($g(A) \xrightarrow[A \to +\infty]{} +\infty$). Ceci implique que: $\exists\, c > o$, $\exists\, (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, $\exists\, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S^\perp \cap S^{d-1}$, telles que: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\int_{\|x\|<A_n} <x\ ,\ u_n>^2\, dF(x) \leq c$.
Mais $S^\perp \cap S^{d-1}$ est compact, d'où il existe une sous-suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $u^* \in S^\perp \cap S^{d-1}$, soit $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. On applique alors le lemme de Fatou, il vient:

$c \geq \liminf\limits_{k} \int_{\|x\|<A_{n_k}} <x\ ,\ u_{n_k}>^2\, dF(x) \geq \int_{\mathbb{R}^d} <x\ ,\ u^*>^2\, dF(x) = +\infty$, par définition de $S^\perp$; ce qui prouve (i).

(ii) La plus petite valeur propre de $B(\varepsilon)$ est notée ppvp de $B(\varepsilon)$ et est égale à: $\inf\limits_{u \in S^\perp \cap S^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} <x\ ,\ u>^2\, |\hat{\Psi}|^2(\varepsilon x)\ dF(x)$

L'application $x \to |\hat{\Psi}|^2(\varepsilon x)$ étant continue en zéro, on a donc:
$\forall\, A > o$, $\exists\, \varepsilon_A > o$, tq $\forall\, o < \varepsilon \leq \varepsilon_A$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$ tq $\|x\| \leq A$, on ait: $|\hat{\Psi}|^2(\varepsilon x) \geq ½$.
d'où: $\forall\, A > o$, $\exists\ \varepsilon_A > o$, tq $\forall\ o < \varepsilon \leq \varepsilon_A$ on ait: ppvp de $B(\varepsilon) \geq \frac{1}{2}\, g(A)$

On utilise alors (i), il vient: $\liminf_{\varepsilon \to o}$ ppvp de $B(\varepsilon) = +\infty$

Compte-tenu que les coefficients de la matrice de passage $P(\varepsilon)$ sont bornés par 1, on en déduit que: $\|(c(\varepsilon)\| \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} o$, ce qui termine la démonstration du lemme.

Démonstration du théorème 1

Nous allons montrer dans un premier temps que:

$$\lim_{\delta \to o} \limsup_{\varepsilon \to o} E\,[\,\zeta_\varepsilon(V) - \eta_\delta(V)\,]^2 = o$$

où nous avons posé pour tout $\delta > o$:

$$\eta_\delta(V) = \frac{1}{2\delta} \int_V \chi_{\{\, |X(t) - u| < \delta \,\}}\, dt$$

$$\text{Soit } \Sigma = E\,[\,\zeta_\varepsilon(V) - \eta_\delta(V)\,]^2$$

$$= E\,(\zeta_\varepsilon^2(V)) + E\,(\eta_\delta^2(V)) - 2E\,(\zeta_\varepsilon(V)\,\eta_\delta(V))$$

$E\,(\eta_\delta^2(V))$

X étant bi-mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{R}^d \otimes \mathcal{A}$, nous pouvons appliquer le théorème de Fubini, et donc:

$$E\,(\eta_\delta^2(V)) = \left(\frac{1}{2\delta}\right)^2 \int_{u-\delta}^{u+\delta} \int_{u-\delta}^{u+\delta} \int_{V\times V} P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(x,y)\, dx\, dy\, d\tau_1 d\tau_2$$

Nous avons vu lors de la démonstration de la proposition 1 que la fonction q_V,

$$q_V : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x\,,\,y) \longrightarrow q_V(x,y) = \int_{V\times V} p_{X(s),\,X(t)}(x,y)\, ds\, dt$$

est continue en (x,y); d' autre part $\mu_d(\partial V) = o$, d' où:

$$\lim_{\delta \to o} E\,(\eta_\delta^2(V)) = \int_{\overline{V}\times\overline{V}} P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(u,u)\, d\tau_1\, d\tau_2 = \alpha(u)$$

$E(\zeta_\varepsilon^2(V))$

Pour pouvoir estimer $E(\zeta_\varepsilon^2(V))$, nous avons besoin d'une proposition technique (proposition 8), dont la démonstration est donnée en annexe. Cette proposition, plus le théorème de fubini permettent d' écrire $E(\zeta_\varepsilon^2(V))$ sous la forme:

$$E(\zeta_\varepsilon^2(V)) = \theta^{-2}\,[\text{dét}\, c(\varepsilon)]^2 \int_{\mathbb{R}^{2s}} E(\, Q_{(V_\varepsilon)_t}(\, A_\varepsilon(u,t)\,)\; Q_{(V_\varepsilon)_v}(\, A_\varepsilon(u,v)\,)\quad dt\, dv$$

Posons $Y_\varepsilon\,(x,y) = X_\varepsilon\,(x,c(\varepsilon)y)$ et $\text{Grad}_y Y_\varepsilon(x,y) = \nabla_y Y_\varepsilon(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{d-s}$

Comte-tenu du lemme 2 et de la proposition 2, nous avons:

$$E\,(\,\zeta_\varepsilon^2(V)\,) = \theta^{-2}\;[\text{dét}\; c(\varepsilon)]^2\;\; f(\varepsilon) \quad \text{avec:}$$

$$f(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^{2s}} \int_{(V_\varepsilon)_t \times (V_\varepsilon)_v} E(\|\nabla_y Y_\varepsilon(t,s)\|\,\|\nabla_y Y_\varepsilon(v,w)\| /\; Y_\varepsilon(t,s)=Y_\varepsilon(v,w)=u)\; P_{Y_\varepsilon(t,s),\,Y_\varepsilon(v,w)}(u,u)\, dX$$

où nous avons noté: $dX =\; dw\; ds\; dv\; dt$
D'après le théorème de Fubini, il vient:

$$E\,(\,\zeta_\varepsilon^2(V)\,) = \theta^{-2}\;[\text{détc}(\varepsilon)]^2\;\; g(\varepsilon) \quad \text{avec:}$$

$$g(\varepsilon) = \int_{V_\varepsilon \times V_\varepsilon} E(\,\|\,\nabla_y Y_\varepsilon(t,s)\,\|\,\|\,\nabla_y Y_\varepsilon(v,w)\,\| /\; Y_\varepsilon(t,s) = Y_\varepsilon(v,w) = u\,)\;\; P_{Y_\varepsilon(t,s),\,Y_\varepsilon(v,w)}(u,u)\, dX$$

On fait le changement de variables: $(T,S) = (t,sc(\varepsilon))$, de même avec (v,w).
Il vient alors, compte-tenu que $\mu_d(\partial V) = o$ et $\nabla_y Y_\varepsilon(t,s) = \nabla_y X_\varepsilon(t,c(\varepsilon)s)\; c'(\varepsilon)$:

$$E\,(\,\zeta_\varepsilon^2(V)\,) = \theta^{-2} \int_{\overline{V}\times\overline{V}} E_{\varepsilon,u}\,(\tau_1-\tau_2)\;\; P_{X_\varepsilon(\tau_1),\,X_\varepsilon(\tau_2)}(\,u\,,u\,)\;\, d\tau_1 d\tau_2$$

Où: $E_{\varepsilon,u}(\tau) = E\,(\,\|\,\nabla_y X_\varepsilon(o)\, c'(\varepsilon)\|\,\|\,\nabla_y X_\varepsilon(\tau)\, c'(\varepsilon)\|\,\| /\; X_\varepsilon(o) = X_\varepsilon(\tau) = u\,)$

Posons B, $B = \{\, (y,z) \in \overline{V} \times \overline{V} \;\; / \; y\text{-}z \in \overline{A}\,\}$ (B^c désignera le complémentaire de B dans $\overline{V} \times \overline{V}$). La section B_y de B en $y \in \overline{V}$ est contenue dans $(y\text{-}\overline{A}) \cap \overline{V}$; or la mesure de lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ de $(y - \overline{A}) \cap \overline{V}$ est la même que celle de $\overline{A} \cap (y-\overline{V})$, qui est inclus dans $\overline{A} \cap (\overline{V} - \overline{V})$; le théorème de Fubini, plus l' hypothèse $\mu_d (\overline{A} \cap (\overline{V}-\overline{V}))= o$ impliquent: $\mu_{2d}(B) = o$, et donc:

$$E (\zeta_\varepsilon^2 (V)) = \theta^{-2} \int_{B^c} E_{\varepsilon,u} (\tau_1-\tau_2)\ P_{X_\varepsilon(\tau_1), X_\varepsilon(\tau_2)}(u,u)\ d\tau_1 d\tau_2$$

$\forall (\tau_1,\tau_2) \in \overline{V} \times \overline{V}$,

. $E(X_\varepsilon(\tau_1) X_\varepsilon(\tau_2)) = R_\varepsilon (\tau_1- \tau_2) \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} R(\tau_1-\tau_2)$

(d'après le lemme 3 (i)).

. $$E((\nabla_y X_\varepsilon(\tau_1)\, c'(\varepsilon))' \nabla_y X_\varepsilon(\tau_2) c'(\varepsilon)) = c(\varepsilon) \left(\frac{-\partial^2 R_\varepsilon}{\partial u_i \partial u_j}(\tau_1- \tau_2)\right)_{i,j=s+1,d} c'(\varepsilon)$$

$$= I_{d-s} \text{ si } \tau_1 = \tau_2$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to o]{} \theta_{d-s,d-s} \text{ si } d(\tau_1- \tau_2, A) \geq \alpha > o$$

(d'après les lemmes 3(ii) et 4 (ii))

. $$E((\nabla_o X_\varepsilon(\tau_1)\, c'(\varepsilon))' X_\varepsilon(\tau_2)) = c(\varepsilon) \left(\frac{-\partial R_\varepsilon}{\partial u_i}(\tau_1- \tau_2)\right)_{i=s+1,d}$$

$$= \theta_{d-s,1} \text{ si } \tau_1 = \tau_2$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to o]{} \theta_{d-s,1} \text{ si } d(\tau_1- \tau_2, A) \geq \alpha > o$$

(d'après les lemmes 3(ii) et 4 (ii)).

Et donc d' après le théorème de convergence dominée de Lebesgue:

$\forall (\tau_1,\tau_2) \in B^c$, $E_{\varepsilon,u} (\tau_1-\tau_2) \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} \theta^2$; d' où grâce au lemme 3(i), on obtient:

(1) $\forall (\tau_1,\tau_2) \in B^c$,

$$\theta^{-2} E_{\varepsilon,u} (\tau_1-\tau_2)\ P_{X_\varepsilon(\tau_1), X_\varepsilon(\tau_2)}(u,u) \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} P_{X(\tau_1), X(\tau_2)}(u,u)$$

D' autre part, d' après la proposition 3:

$E_{\varepsilon,u} (\tau_1-\tau_2) \leq (d-s) [1 + 4 R_\varepsilon(o) (R_\varepsilon(o) + R_\varepsilon(\tau_1-\tau_2))^{-2} u^2]$, qui est bornée si ε est suffisamment petit et $(\tau_1,\tau_2) \in \overline{V} \times \overline{V}$, ceci d' après le lemme 3(i).

De plus, d'après le lemme 2:

$\exists N > o, \exists \varepsilon_o > o$ tq $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_o, \forall u \in \overline{V} - \overline{V}$, on ait:

$P_{X_\varepsilon(\tau_1), X_\varepsilon(\tau_2)}(u,u) \leq N^{-1/2} \|\tau_1-\tau_2\|^{-1}$, ce qui entraîne:

(2) $\theta^{-2} E_{\varepsilon,u} (\tau_1-\tau_2)\ P_{X_\varepsilon(\tau_1), X_\varepsilon(\tau_2)}(u , u) \leq D(u) \|\tau_1-\tau_2\|^{-1}$, pour ε suffisamment petit et $(\tau_1,\tau_2) \in \overline{V} \times \overline{V}$.

(1) et (2) permettent d' appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il vient:

$$\lim_{\varepsilon\to o} E(\zeta_\varepsilon^2(V)) = \int_{B^c} P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(u,u)\, d\tau_1 d\tau_2$$

$$= \int_{\overline{V}\times\overline{V}} P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(u,u)\, d\tau_1 d\tau_2 = \alpha(u)$$

$-2E(\zeta_\varepsilon(V)\,\eta_\delta(V))$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $B_n = \{(y,z) \in \overline{V}\times\overline{V},\ d(x,A) \leq \frac{1}{n}\}$

En appliquant la proposition 8, le théorème de Fubini permet d'écrire la majoration suivante:

$$-2E(\zeta_\varepsilon(V)\eta_\delta(V)) \leq \frac{-2\theta^{-1}}{2\delta}|\text{dét}\, c(\varepsilon)| \int_{\mathbb{R}^s\times V} E(Q_{B_{\varepsilon,n}(w,s)}(A_\varepsilon(u,w))\, \chi_{\{|X(s)-u|<\delta\}}\, dw\, ds$$

où: $B_{\varepsilon,n}(w,s) = \{ z \in \mathbb{R}^{d-s} \ /\ (w,zc(\varepsilon)) \in V$ et $(w,zc(\varepsilon)) - s \in A_n^c \}$ et

$A_n = \{ u \in \mathbb{R}^d \ /\ d(u,A) \leq 1/n \}$

Mais d' après le lemme 3(i),

$$R_\varepsilon(o)\, R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau_1-\tau_2) \xrightarrow[\varepsilon\to o]{} R^2(o) - R^2(\tau_1-\tau_2)$$

uniformément en (τ_1,τ_2), ceci pour presque tout $u \in (\overline{V} - \overline{V}) \cap A_n^c$

D' autre part $R^2(o) - R^2(u) \geq v_n > o$, pour $u \in (\overline{V} - \overline{V}) \cap A_n^c$, ceci d'après le lemme 1, ce qui entraîne: $R_\varepsilon(o)\, R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau_1-\tau_2) \geq v_n/2 > o$, pour $\varepsilon < \varepsilon_n$ et pp $u \in (\overline{V} - \overline{V}) \cap A_n^c$

On peut donc, d' après la proposition 2, appliquer la formule de Rice " *mixte* ", pour obtenir:

$$-2E(\zeta_\varepsilon(V)\eta_\delta(V)) \leq \frac{-2\theta^{-1}}{2\delta}\, \text{dét}\, c(\varepsilon)\ \ m(\varepsilon) \text{ avec:}$$

$$m(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^s\times V} \int_{u-\delta}^{u+\delta} \int_{B_{\varepsilon,n}(w,s)} E(\|\nabla_y Y_\varepsilon(w,z)\| / X(s)=x, Y_\varepsilon(w,z)=u)\, P_{X(s),Y_\varepsilon(w,z)}(x,u)\, dY$$

et $dY = dz\, dx\, dw\, ds$

On fait le changement de variables: $zc(\varepsilon) = z'$, il vient compte-tenu du théorème de Fubini:

$$-2E(\zeta_\varepsilon(V)\eta_\delta(V)) \leq \frac{-2\theta^{-1}}{2\delta}\, n(\varepsilon), \text{ avec:}$$

$$n(\varepsilon) = \int_{C_n} \int_{u-\delta}^{u+\delta} E(\|\nabla_y X_\varepsilon(\tau_1) c'(\varepsilon)\| / X_\varepsilon(\tau_1) = u , X(\tau_2) = x) \, P_{X_\varepsilon(\tau_1), X(\tau_2)}(u,x) \, dZ$$

avec $dZ = dx \, d\tau_1 d\tau_2$ et $C_n = \{ (y,z) \in V \times V , d(y-z, A) > 1/n \}$

Or $\mu_d(\partial V) = o$, et donc: $\mu_{2d}(C_n) = \mu_{2d}(B_n^c)$, ce qui entraîne:

$$-2E(\zeta_\varepsilon(V)\eta_\delta(V)) \leq \frac{-2\theta^{-1}}{2\delta} p(\varepsilon), \text{ avec:}$$

$$p(\varepsilon) = \frac{-2\theta^{-1}}{2\delta} \int_{B_n^c} \int_{u-\delta}^{u+\delta} E(\|\nabla_y X_\varepsilon(\tau_1) c'(\varepsilon)\| / X_\varepsilon(\tau_1) = u , X(\tau_2) = x) \, P_{X_\varepsilon(\tau_1), X(\tau_2)}(u,x) \, dZ$$

En appliquant le lemme de Fatou et en tenant compte de la convergence de $E(\|\nabla_y X_\varepsilon(\tau_1) c'(\varepsilon)\| / X_\varepsilon(\tau_1) = u , X(\tau_2) = x) \; P_{X_\varepsilon(\tau_1), X(\tau_2)}(u,x)$, lorsque ε tend vers zéro, vers $\theta \, P_{X(\tau_1), X(\tau_2)}(u,x)$ (la démonstration de cette affirmation est la même que celle faite dans la partie concernant $E(\zeta_\varepsilon^2(V))$); nous obtenons alors:

$$\limsup_{\varepsilon \to o} (-2E(\zeta_\varepsilon(V)\eta_\delta(V))) \leq \frac{-2}{2\delta} \int_{u-\delta}^{u+\delta} \int_{B_n^c} P_{X(\tau_1), X(\tau_2)}(u,x) \, dx \, d\tau_1 d\tau_2$$

Mais d'après la proposition 1, la fonction $q_{B_n^c}$,

$$q_{B_n^c} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x , y) \longrightarrow q_{B_n^c} = \int_{B_n^c} P_{X(\tau_1), X(\tau_2)}(u,x) \, dx \, d\tau_1 d\tau_2$$

est continue en (x,y) (on a fait un abus d' écriture en écrivant $q_{B_n^c}$), et donc:

$$\limsup_{\delta \to o} \limsup_{\varepsilon \to o} (-2E(\zeta_\varepsilon(V)\eta_\delta(V))) \leq$$

$$-2 \int_{B_n^c} P_{X(\tau_1), X(\tau_2)}(u,u) \, d\tau_1 \, d\tau_2 = -2\alpha_n(u)$$

Finalement on a montré que:

$$\limsup_{\delta \to o} \limsup_{\varepsilon \to o} \Sigma \leq 2(\alpha(u) - \alpha_n(u))$$

Il reste à voir que : $\lim_{n\to+\infty} (\alpha(u) - \alpha_n(u)) = 0$

Or $\alpha(u) - \alpha_n(u) = \int_{B_n} P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(u\,,\,u)\; d\tau_1\, d\tau_2$

Mais $\lim_{n\to+\infty} B_n = B$ et $\mu_{2d}(B) = 0$

En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient donc:

$\lim_{n\to+\infty} (\alpha(u) - \alpha_n(u)) = 0$

d'où:

$\limsup_{\delta\to 0}\ \limsup_{\varepsilon\to 0} \Sigma = \lim_{\delta\to 0}\ \limsup_{\varepsilon\to 0} \Sigma = 0$

Ceci implique que $(\zeta_\varepsilon(V))_\varepsilon$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ quand ε tend vers zéro et que $(\eta_\delta(V))_\delta$ a la même limite dans $L^2(\Omega)$ quand δ tend vers zéro. Or d'après (iii) de la proposition 1, $(\eta_\delta(V))_\delta$ converge dans $L^2(\Omega)$ quand δ tend vers zéro, vers $L(u,V)$; ceci implique donc que $(\zeta_\varepsilon(V))_\varepsilon$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $L(u,V)$, lorsque ε tend vers zéro, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

4. Une majoration de la vitesse d'approximation du temps local

Nous allons montrer en fait un résultat un peu plus général que ce que nous avons annoncé dans l'énoncé des résultats.

Théorème 2:
Soient Hi, i=0,3, les hypothèses suivantes:

H0 Il existe δ , $0 < \delta \leq 1$ tel que M_δ , $M_\delta = \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^\delta \, dF(u) < +\infty$

Soit $h(\varepsilon)$ une fonction qui tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro et telle que:

H1 $\varepsilon^\delta h^{-2}(\varepsilon)$ soit bornée

H2 il existe a , $0 < a \leq 1$ tel que pour ε suffisamment petit:

$$a(d,s) \, \| \Lambda^{-1/2}(\varepsilon) \|^2 \, l^2(\varepsilon) \, h^{-2}(\varepsilon) \leq a < 1$$

H3 $\| \Lambda^{-1/2}(\varepsilon)\|^2 \, n(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

Soit alors $f(\varepsilon) > 0$, une fonction qui tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro et telle que: $\varepsilon f^{-1}(\varepsilon) \leq M$ pour ε suffisamment petit.
Alors sous les hypothèses Hi, i=0,3 , nous avons:

$$E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V))^2 \leq c_h\Big[\varepsilon^\delta h^{\gamma-2}(\varepsilon) + c_1(\varepsilon)\, h^{1-\gamma/2}(\varepsilon) + c_1^2(\varepsilon) + c_2(\varepsilon) + H_{d-1,\, f(\varepsilon)}\,(A_{2h(\varepsilon)} \cap (V-V))\big(\chi_{s=d-1}\, G(g^{1/2}(c_0 f^{-1}(\varepsilon))) + \chi_{s\neq d-1}\, g^{-1/2}(c_0 f^{-1}(\varepsilon))\big)\Big]$$

Ceci pour tout $0 < \gamma < d-1$, $\gamma \leq 2$; nous avons posé:
$a(d,s) = (d-s)! \;\; [2^{2(d-s)} - 1](d-s)^3 R(0) c^{-1}$, et c est défini dans le lemme qui suit cet énoncé (lemme 5).

$$c_1(\varepsilon) = l(\varepsilon)\, \|\Lambda^{-1/2}(\varepsilon)\| \; h^{\gamma/2-1}(\varepsilon), \quad c_2(\varepsilon) = n(\varepsilon)\, \|\Lambda^{-1/2}(\varepsilon)\|^2$$

$$l(\varepsilon) = L_{h(\varepsilon)}\, d\,[AB + C] + 2R(0)c_d\,[2^{\beta_1-1}\beta_1^{-1} A\, \varepsilon^{\beta_1-1} h^{-\beta_1}(\varepsilon) + 2^{\beta_1}\beta_1^{-1}\varepsilon^{\beta_1-1}h^{-\beta_1}(\varepsilon)]$$

$$n(\varepsilon) = 2d^2 N_{h(\varepsilon)}\,[\,DA + C^2\,] + 2^{\beta_2} c_d\, \varepsilon^{\beta_2-2} h^{-\beta_2}(\varepsilon)\,[\,4R(0)A\beta_2^{-1} + dL_{2h(\varepsilon)}A \times (\beta_2-1)^{-1}h(\varepsilon) + 2dL_{2h(\varepsilon)}\,\beta_2^{-1} C\varepsilon\,]$$ et

$$A = \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla\Psi(u)\|\,du,\; B = \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|\,\|\Psi(u)\|\,du,\; C = \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|\,\|\nabla\Psi(u)\|\,du,$$

$$D = \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^2\,\|\nabla\Psi(u)\|\,du$$

$$L_\alpha = \sup_{\tau\in C_\alpha \cap [\overline{V}-\overline{V}+\overline{B}(0,\,\alpha)]} (\,\|\nabla R_\varepsilon(\tau)\|_a\,,\, \|\nabla\Gamma_\varepsilon(\tau)\|_a\,)\;,$$

$$N_\alpha = \sup_{\tau\in C_\alpha \cap [\overline{V}-\overline{V}+\overline{B}(0,\,\alpha)]} \|D^2R_\varepsilon(\tau)\|_b\;,\text{ où :}$$

$C_\alpha = \{ x \in \mathbb{R}^d \,/\, d(x,A) \geq \alpha \}, \alpha > o$

$G(z) = \int_z^{+\infty} x^{-2} \operatorname{Arg\,sh} x \, dx$ et $g(z) = \inf_{u \in S^\perp \cap S^{d-1}} \int_{\|x\|<z} < x, u>^2 dF(x)$, $z>o$

$c_o = \inf (1, r/M)$ où r est tel que : $\|y\| < r$ implique: $|\hat{\Psi}|^2(y) \geq ½$

Dans le commentaire qui suit l'énoncé du théorème 2, nous avons annoncé que pour que la vitesse proposée tende vers zéro lorsque ε tend vers zéro, il fallait nécessairement que $f(\varepsilon)$ et $h(\varepsilon)$ tendent vers zéro lorsque ε tend vers zéro. La démonstration de cette affirmation est faite dans l'annexe de la partie 4.
Avant de commencer la démonstration de ce théorème, nous allons montrer un certain nombre de lemmes techniques que nous démontrerons pour la plupart.

<u>Lemme 5</u> :
$\exists\ \varepsilon_o > o$ tel que pour tout $u \in V\text{-}V$ tel que $\|u\| > 2h(\varepsilon)$ et $\forall\ o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$, on ait:

(i) $R(o)\, R_\varepsilon(o) - \Gamma_\varepsilon^2(u) \geq c\,\|u\|^2$

(ii) $R_\varepsilon(o) + R_\varepsilon(u) \geq R(o)$

(iii) $R_\varepsilon^2(o) - R_\varepsilon^2(u) \geq c\,\|u\|^2$

(iv) $R(o) + R(u) \geq R(o)$

(v) $R^2(o) - R^2(u) \geq c\,\|u\|^2$

où c est défini par: $c = c_B = R(o)/4 \inf_{u \in S^{d-1}} \int_{\|x\|<B} <x\ ,\ u>^2 dF(x)$, $B > o$

<u>Preuve du lemme 5</u>:

Tout d'abord remarquons que l'on peut toujours choisir $B > o$ tel que $c_B > o$, ceci d'après le lemme 1(i). Fixons donc ce B.
(i) Nous allons montrer:
$\exists\ B_1 > o, \exists\ \varepsilon_o > o$ tel que $\forall\ o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ et $\forall\ u \in \mathbb{R}^d$ tel que $o < 2h(\varepsilon) \leq \|u\| \leq B_1$,
$R(o)\, R_\varepsilon(o) - \Gamma_\varepsilon^2(u) \geq c\,\|u\|^2$
En effet, raisonnons par l'absurde en supposant que cette affirmation n'est pas vraie; alors il existerait une suite $(\varepsilon_n)_n$, $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} o$ et une suite $(\tau_n)_n$, $\tau_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} o$ telle que: $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $o < h(\varepsilon_n) \leq \|\tau_n\|$,

et $\tau_n \, ||\tau_n||^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tau^* \in S^{d-1}$, et $R(o)\, R_{\varepsilon_n}(o) - \Gamma^2_{\varepsilon_n}(\tau_n) < c\, ||\tau_n||^2$

Et donc: $\liminf\limits_{n\to+\infty} [(R(o)\, R_{\varepsilon_n}(o) - \Gamma^2_{\varepsilon_n}(\tau_n))\, ||\tau_n||^{-2}] \leq c$

Or: $\Gamma_\varepsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\Psi}(-\varepsilon x)\, e^{i<x,u>}\, dF(x)$, $u \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > o$ et

$\hat{\Psi}(-\varepsilon x) = 1 + g_\varepsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ avec $|g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon\, ||x||\, ||\overline{\Psi}||$ où: $\overline{\Psi} = (\overline{\Psi}_j)_{j=1,d}$ et

$\overline{\Psi}_j = \int_{\mathbb{R}^d} |x_j|\, \Psi(x)\, dx$, j=1,d (on a noté x , $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$).

Ecrivons maintenant $\hat{\Psi}(-\varepsilon x)$ sous la forme : $\hat{\Psi}(-\varepsilon x) = |\hat{\Psi}(-\varepsilon x)|\, e^{i\varnothing_\varepsilon(x)}$, où $\varnothing_\varepsilon(x)$ est mesurable comme fonction de x et $-\pi < \varnothing_\varepsilon(x) \leq \pi$. Avec cette écriture: $\Gamma_\varepsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\Psi}|(-\varepsilon x) \cos(<x,u> + \varnothing_\varepsilon(x))\, dF(x)$, $u \in \mathbb{R}^d$

En appliquant l'inégalité de Schwarz:

$\Gamma^2_\varepsilon(u) \leq R_\varepsilon(o) \int_{\mathbb{R}^d} \cos^2(<x,u> + \varnothing_\varepsilon(x))\, dF(x)$

En appliquant le lemme de Fatou, on obtient:

$$\liminf_{n\to+\infty} [(R(o)\, R_{\varepsilon_n}(\tau_n) - \Gamma^2_{\varepsilon_n}(\tau_n))\, ||\tau_n||^{-2}] \geq$$

$$\int_{||x||<B} \liminf_{n\to+\infty} [1 - \cos^2(<x,\tau_n> + \varnothing_{\varepsilon_n}(x))][<x,\tau_n> + \varnothing_{\varepsilon_n}(x)]^{-2} \times$$

$$R_{\varepsilon_n}(o)\, [<x, \tau_n ||\tau_n||^{-1}> + \varnothing_{\varepsilon_n}(x)\, ||\tau_n||^{-1}]^2\, dF(x) = (1)$$

Or $\hat{\Psi}(-\varepsilon_n x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ entraîne: $\varnothing_{\varepsilon_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} o$

Plus précisément lorsque n tend vers l'infini: $\varnothing_{\varepsilon_n}(x) \approx \operatorname{Im} g_{\varepsilon_n}(x)$ et pour n suffisamment grand: $|\varnothing_{\varepsilon_n}(x)|\ \varepsilon_n^{-1} \leq$ cste $|g_{\varepsilon_n}(x)|\ \varepsilon_n^{-1} \leq$ cste $||x||\, ||\overline{\Psi}||$

Ceci plus l'hypothèse sur h et $||\tau_n|| \geq h(\varepsilon_n)$ impliquent:

$|\varnothing_{\varepsilon_n}(x)|\, ||\tau_n||^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} o$

En remplaçant dans (1), on obtient grâce au lemme 3(i):

$$\liminf_{n\to+\infty} [(R(o)\, R_{\varepsilon_n}(o) - \Gamma^2_{\varepsilon_n}(\tau_n))\, ||\tau_n||^{-2}] \geq R(o) \int_{||x||<B} <x,\tau^*>^2\, dF(x)$$

$$\geq 4\, c$$

Puisque c > o, on aboutit à une contradiction, d'où (i).

Remarque: Si Ψ est symétrique, on a le résultat suivant:
$\exists\ \varepsilon_o > o$ tel que $\forall\ o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ et $\forall\ u \in V\text{-}V$:

$$R(o)R_\varepsilon(o) - \Gamma_\varepsilon^2(u) \geq c\,\|u\|^2$$

(ii) est trivial d'après le lemme 3(i).

(iii) $R_\varepsilon^2(o) - R_\varepsilon^2(u) \geq (R_\varepsilon(o) + R_\varepsilon(u)) \int_{\|x\|<B} (1 - \cos\langle x,u\rangle)\ |\hat{\Psi}|^2(\varepsilon x)\ dF(x)$

On applique alors (ii) et on utilise la même méthode que dans (i).
(iv) et (v) sont triviaux; il suffit de choisir V suffisamment petit et d'appliquer la même méthode que dans (i) et (iii).

Dans le lemme 6 nous donnons une minoration de $R_\varepsilon(o)-R_\varepsilon(u)$ pour u *suffisamment petit* , et pour ce faire nous mettons en évidence le résultat suivant ((iii) du lemme):
Si λ est une mesure positive sur E espace vectoriel normé muni de la norme $\|\ \|$, f et g deux fonctions Borel-mesurables de E dans $\mathbb{R}$ telles que:

$o < \int_E f^2\, d\lambda < \infty$, $\int_E g^2\, d\lambda = \infty$ et $\forall\ A > o$, $\int_{\|x\|<A} g^2(x)\, d\lambda(x) < \infty$ alors la corrélation de (f,g) tronquée en $A > o$, soit $C_A(f,g)$, converge vers zéro lorsque A tend vers l'infini. Nous avons noté:

$$C_A(f,g) = \left[\int_{\|x\|<A} fg\, d\lambda\right] \left[\int_{\|x\|<A} g^2\, d\lambda \int_{\|x\|<A} f^2\, d\lambda\right]^{-1/2}$$

Lemme 6 :

(i) si $s \neq o$, $\exists\ c' > o$, $\exists\ B > o$ tq $\inf\limits_{u\in S\cap S^{d-1}} \int_{\|x\|<B} \langle x , u\rangle^2\ dF(x) \geq c'$

(ii) si $s \neq o$, $\forall\ \eta > o$, $\exists\ B_\eta > o$ tq $\sup\limits_{u\in S\cap S^{d-1}} \int_{B_\eta<\|x\|} \langle x,u\rangle^2\, dF(x) \leq \eta$

(iii) si $s \neq o$, $\forall\ \eta > o$, $\exists\ c_\eta > o$ tq $\forall\ c \geq c_\eta$, $\forall\ (u^*,v^*) \in (S\cap S^{d-1})\times(S^\perp\cap S^{d-1})$

$$\left[\int_{\|x\|<c} \langle x , u^*\rangle\langle x , v^*\rangle\ dF(x)\right]^2 \leq \eta \int_{\|x\|<c} \langle x , v^*\rangle^2\ dF(x)$$

(iv) $\exists\ \varepsilon_1 > o$ tq $\forall\ o < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, $\forall\ t = (t_1,t_2) \in S^* \times (S^\perp)^*$ tq $\|t\| < f(\varepsilon)$
on ait : $R_\varepsilon(o) - R_\varepsilon(t) \geq \text{cste}\ [\ \|t_1\|^2 + g(c_o f^{-1}(\varepsilon))\ ]\|t_2\|^2$ (idem pour R(o)-R(t))

Preuve du lemme 6 :
(i) La démonstration est la même que celle du lemme 1(i), en remplaçant S^{d-1} par $S \cap S^{d-1}$ qui est compact.
(ii) On sait que: $\forall\, i \in \{1,s\}$, $\int_{\mathbb{R}^d} x_i^2 \; dF(x) < +\infty$. Pour tout $\eta > o$, il existe donc $B_\eta > o$ tel que: $\int_{B_\eta < \|x\|} \|x_1, x_2, \dots, x_s\|^2 \, dF(x) \leq \eta$.
Soit alors $\omega \in S \cap S^{d-1}$, en appliquant l'inégalité de Schwarz on a:

$$\int_{B_\eta < \|x\|} < w, x >^2 dF(x) \leq \int_{B_\eta < \|x\|} \|x_1, x_2, \dots, x_s\|^2 \, dF(x) \leq \eta$$

d'où (ii).
(iii) $s \neq o$, soit $\eta > o$, d'après (ii), il existe $B_\eta > o$ tel que:

$$\sup_{u \in S \cap S^{d-1}} \int_{B_\eta < \|x\|} <x, u>^2 dF(x) \leq \eta.$$

Soit donc $B > B_\eta$ et soit $(u^*, v^*) \in (S \cap S^{d-1}) \times (S^\perp \cap S^{d-1})$,

$$\Big[\int_{\|x\| < B} < x, u^*>< x, v^*> dF(x)\Big]^2 \leq \underbrace{\Big[\int_{\|x\| \leq B_\eta} < x, u^*>< x, v^*> dF(x)\Big]^2}_{(\mathrm{I})}$$

$$+ \underbrace{\Big[\int_{B_\eta < \|x\| < B} < x, u^*>< x, v^*> dF(x)\Big]^2}_{(\mathrm{II})} +$$

$$\underbrace{2 \Big[\int_{\|x\| \leq B_\eta} < x, u^*>< x, v^*> dF(x)\Big] \Big[\int_{B_\eta < \|x\| < B} < x, u^*>< x, v^*> dF(x)\Big]}_{(\mathrm{III})}$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz on a: $(\mathrm{I}) \leq B_\eta^4 \; F^2(\mathbb{R}^d)$,

$$(\mathrm{II}) \leq \int_{B_\eta < \|x\|} <x, u^*>^2 dF(x) \int_{\|x\| < B} <x, v^*>^2 dF(x) \leq \eta \int_{\|x\| < B} <x, v^*>^2 dF(x)$$

et $(\mathrm{III}) \leq 2\, B_\eta^2 \; F(\mathbb{R}^d)\, \eta^{1/2} \Big[\int_{\|x\| < B} <x, v^*>^2 dF(x) \Big]^{1/2}$, d'où:

$$\sup_{(u^*, v^*) \in (S \cap S^{d-1}) \times (S^\perp \cap S^{d-1})} \Big[\int_{\|x\| < B} <x, u^*><x, v^*> dF(x)\Big]^2 \Big[\int_{\|x\| < B} <x, v^*>^2 dF(x)\Big]^{-1}$$

est majoré par: $B_\eta^4 \; F^2(\mathbb{R}^d)\, g(B)^{-1} + \eta + 2\, B_\eta^2 \; F(\mathbb{R}^d)\, \eta^{1/2} g(B)^{-1/2}$.

En appliquant alors le lemme 4(i) on en déduit (iii).
(iv) Deux cas se présentent: s = o et o < s < d.

Premier cas: s = o

$$R_\varepsilon(o) - R_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos\langle t, x\rangle) |\hat{\Psi}|^2(\varepsilon x)\, dF(x)$$

$$\geq \text{cste} \int_{\|x\| < c_0 f^{-1}(\varepsilon)} (1 - \cos\langle t, x\rangle) |\hat{\Psi}|^2(\varepsilon x)\, dF(x)$$

Or $\langle t,x\rangle \leq c_o < 1$ et $\|\varepsilon x\| \leq c_o\, \varepsilon\, f^{-1}(\varepsilon) \leq c_o M \leq r$

Et donc: $R_\varepsilon(o) - R_\varepsilon(t) \geq \text{cste}\; g(c_o\, f^{-1}(\varepsilon))\, \|t\|^2$

On fait de même avec R(o) - R(t).

Deuxième cas: o < s < d

Soit $\eta > o$ tel que $\eta \leq \frac{c'}{16}$ où c′ est la constante apparaissant dans (i).
Compte-tenu que $f(\varepsilon)$ tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro et de (i) et (iii), il s′en suit que: il existe ε_o suffisamment petit tel que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_o$, on ait: $\forall\, (u^*, v^*) \in (S \cap S^{d-1}) \times (S^\perp \cap S^{d-1})$:

$$\left[\int_{\|x\| < c_0 f^{-1}(\varepsilon)} \langle x, u^*\rangle \langle x, v^*\rangle\, dF(x)\right]^2 \leq$$

$$\eta \int_{\|x\| < c_0 f^{-1}(\varepsilon)} \langle x, v^*\rangle^2\, dF(x)$$

et $$\inf_{u \in S \cap S^{d-1}} \int_{\|x\| < c_0 f^{-1}(\varepsilon)} \langle x, u\rangle^2\, dF(x) \geq c'$$

D′où pour $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ et $t = (t_1, t_2) \in S^* \times (S^\perp)^*$ et $\|t\| < f(\varepsilon)$,

$$R_\varepsilon(o) - R_\varepsilon(t) \geq \text{cste} \int_{\|x\| < c_0 f^{-1}(\varepsilon)} \langle t, x\rangle^2\, dF(x)$$

$$R_\varepsilon(o) - R_\varepsilon(t) \geq$$

$$\text{cste}\left[\int_{\|x\| < c_0 f^{-1}(\varepsilon)} \langle t_1, x\rangle^2\, dF(x) + \int_{\|x\| < c_0 f^{-1}(\varepsilon)} \langle t_2, x\rangle^2\, dF(x)\right.$$

$$\left. + 2 \int_{\|x\| < c_0 f^{-1}(\varepsilon)} \langle t_1, x\rangle \langle t_2, x\rangle\, dF(x)\right]$$

Posons :

$t_i^* = \frac{t_i}{\|t_i\|}$, $\alpha^2_{\varepsilon;i}(t_i^*) = \int_{\|x\| < c_0 f^{-1}(\varepsilon)} \langle t_i^*, x\rangle^2\, dF(x)$, $i \in \{1,2\}$. On a

avec ces notations:

$$R_\varepsilon(o) - R_\varepsilon(t) \geq \text{cste}\ [\ \sum_{i=1}^{2} \| t_i \|^2\ \alpha^2_{\varepsilon;i}(t_i^*) - 2 \| t_1 \|\ \| t_2 \|\ \eta^{1/2}\ |\ \alpha_{\varepsilon;2}(t_2^*)\ |\ ]\text{, d'où :}$$

$$R_\varepsilon(o) - R_\varepsilon(t) \geq \text{cste}\ [\ \frac{3}{4} \| t_1 \|^2 c' + \frac{3}{4} \| t_2 \|^2 g(c_o f^{-1}(\varepsilon)) + (\ \frac{1}{2} \| t_2 \|\ |\ \alpha_{\varepsilon;2}(t_2^*)\ |$$

$$- 2 \| t_1 \|\ \eta^{1/2}\ )^2 + \frac{1}{4} \| t_1 \|^2\ (c' - 16\eta)]$$

et donc : $\quad R_\varepsilon(o) - R_\varepsilon(t) \geq \text{cste}[\| t_1 \|^2 + g(c_o f^{-1}(\varepsilon))\ \| t_2 \|^2\ ]$

On fait de même avec R(o) - R(t); ceci termine la démonstration du lemme 6.

Dans le lemme 7, nous majorons les dérivées partielles de R_ε et Γ_ε "*loin* " de A.

<u>Lemme7</u>:

Pour $t = (t_1,t_2) \in V \times V$ tel que $d(t_1 - t_2 = \tau\ ,\ A) \geq 2h(\varepsilon)$:

$\forall \{ i , j \} \in \{s+1,d\}$, $|D_i R_\varepsilon(\tau)| \leq l(\varepsilon)$, $|D_i \Gamma_\varepsilon(\tau)| \leq l(\varepsilon)$ et $|D_i D_j R_\varepsilon(\tau)| \leq n(\varepsilon)$

Nous ne démontrerons pas ce lemme. Sa démonstration s'inspire de celle faite dans le lemme 3(ii).

Enonçons maintenant le lemme 8.

<u>Lemme 8</u>:

$\forall\ \delta > o\ , \forall\ \delta' > o$

$$H_{2d-1,\delta}(\ B_{\delta'}) \leq a_d\ H_{2d-1,\delta}(\ t\,(B_{\delta'})\ ) \leq a_d\ H_{2d-1,\delta}(\ V \times (\ A_{\delta'} \cap (V-V)\ )\ )$$
$$\leq b_d\ H_{d-1,\delta}(\ A_{\delta'} \cap (V-V)\ )$$

où t: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}$

$\qquad (x\ ,\ y) \longrightarrow (x\ ,\ x-y)$

et $B_\delta = \{\ (y,z) \in V \times V\ ,\ y-z \in A_\delta\ \}$ avec $A_\delta = \{\ x \in \mathbb{R}^d\ /\ d(x,A) \leq \delta\ \}$

<u>Preuve</u> :

Tout d'abord faisons une remarque élémentaire.

1) Soient $\alpha > o$, $\delta > o$ et $a > o$, la mesure $\overset{(1)}{H_{\alpha;a\delta}}$ relativement à une certaine norme $\| \ \|_1$ peut toujours être considérée comme étant égale à $a^\alpha\ \overset{(2)}{H_{\alpha;\delta}}$ relativement à la norme $\| \ \|_2 = \frac{1}{a} \| \ \|_1$.

On notera donc $H_{\alpha,\delta}$ indépendamment de la norme sous-jacente; l'inégalité (1) découle alors facilement de cette remarque.
En tenant compte que: $t(B_{\delta'}) \subset V \times (A_{\delta'} \cap (V-V))$, l'inégalité (2) est immédiate. Prouvons maintenant l'inégalité 3.
Pour cela on montre le résultat plus général suivant:
Soit O un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $\alpha > o$, $\delta > o$, on a: $H_{d+\alpha,\delta}(O \times A) \le c_{d,\alpha} H_{\alpha,\delta}(A)$ où c dépend seulement de la mesure de Lebesgue de O, de α et de d.

Pour tout $\varepsilon > o$, il existe $(I_i)_{i=1}^{\infty}$ boules ouvertes de $\mathbb{R}^d$ telles que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ , diam } I_i \le \delta \text{ , } \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam} I_i)^{\alpha} \le H_{\alpha,\delta}(A) + \varepsilon .$$

O étant borné, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $O \subset \bigcup_{j=1}^{n_i} B_{i,j}$ où pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in \{1, n_i\}$ $B_{i,j}$ est une boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ de diamètre tel que:
diam $B_{i,j}$ = diam I_i et $n_i \le e_d \left[\text{Ent} \frac{1}{\text{diam} I_i} \right]^d$ où Ent désigne la partie entière;
d'où:

$$O \times A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n_i} C_{i,j} \text{ où } (C_{i,j})_{i,j} \text{ sont des boules ouvertes de } \mathbb{R}^{2d},$$

diam $C_{i,j} = 2^{1/2}$ diam I_i

$$\text{Or } \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} (\text{diam} C_{i,j})^{\alpha+d} \le g(d,\alpha) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} (\text{diam} I_i)^{\alpha+d} \le h(d,\alpha) \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam} I_i)^{\alpha}$$

$$\le h(d,\alpha) \, (H_{\alpha,\delta}(A) + \varepsilon)$$

Et donc : $H_{d+\alpha,\delta}(O \times A) \le c(d,\alpha) \, H_{\alpha,\delta}(A)$
Il suffit maintenant de prendre $O = V$, $A = A_{\delta'} \cap (V-V)$ et $\alpha = d-1$ pour en déduire l'inégalité 3. Ceci achève la démonstration du lemme 8.

Montrons maintenant le théorème 2.
Comme dans le théorème 1, posons:

$$\Sigma = E[\zeta_{\varepsilon}(V) - \eta_{\delta}(V)]^2 \text{ , soit :}$$

$$\Sigma = E(\zeta_{\varepsilon}^2(V)) + E(\eta_{\delta}^2(V)) - 2E(\zeta_{\varepsilon}(V)\,\eta_{\delta}(V))$$

$E(\zeta_\varepsilon^2(V))$

De façon analogue à ce qui précède, posons:
$E_{\varepsilon,u}(\tau) = E(\| \nabla_y X_\varepsilon(o)\, c'(\varepsilon)\| \, \| \nabla_y X_\varepsilon(\tau) c'(\varepsilon)\| \, / \; X_\varepsilon(o) = X_\varepsilon(\tau) = u\,)$, $\tau \in \mathbb{R}^d$; pour les mêmes raisons que dans la démonstration du théorème 1, nous avons:

$$E(\, \zeta_\varepsilon^{\,2}(V)\,) = \theta^{-2} \int_{V \times V} E_{\varepsilon,u}(\tau_1 - \tau_2)\; P_{X_\varepsilon(\tau_1),X_\varepsilon(\tau_2)}(u,u)\, d\tau_1 d\tau_2$$

$\forall\ \varepsilon > o$, on partitionne $V \times V$ en: $V \times V = B_{2h(\varepsilon)} \cup B^c_{2h(\varepsilon)}$ (c désigne le complément dans $V \times V$).
On posera: $C_{2h(\varepsilon)} = B^c_{2h(\varepsilon)}$

On a alors: $E(\, \zeta_\varepsilon^{\,2}(V)\,) = \int_{B_{2h(\varepsilon)}} (1) + \int_{C_{2h(\varepsilon)}} (2)$

Sur $B_{2h(\varepsilon)}$-: Pour tout $\eta > o$, Il existe un recouvrement fini de $B_{2h(\varepsilon)}$ par $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ boules ouvertes dans $\mathbb{R}^{2d}$, de diamètre l_i inférieur ou égal à $f(\varepsilon)d^{-1/2}$

Soit $B_{2h(\varepsilon)} \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i$,

diam $C_i = l_i \leq f(\varepsilon)d^{-1/2}$, $i \in \{1,+\infty\}$ telles que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_i^{2d-1} \leq H_{2d-1,f(\varepsilon)d^{-1/2}}(B_{2h(\varepsilon)}) + \eta$$

Mais une boule dans $\mathbb{R}^{2d}$ de centre (x,y) et de diamètre l, peut toujours être incluse dans un produit de cubes de $\mathbb{R}^d$, soit $T_{x;l} \times T_{y;l}$, où $T_{x;l}$ (respectivement $T_{y;l}$) est un cube dans $\mathbb{R}^d$ d'axes parallèles aux axes de coordonnées, de centre x (respectivement y) et de longueur l; et donc:

$$B_{2h(\varepsilon)} \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} T_{x_i;l_i} \times T_{y_i;l_i}$$

Donc:

$$\int_{B_{2h(\varepsilon)}} (1) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} [\, E(\zeta_\varepsilon^{\,2}(T_{x_i;l_i})\,)\,]^{1/2}\; [\, E(\, \zeta_\varepsilon^2\,(T_{y_i;l_i})\,)\,]^{1/2}$$

Or $\forall$ i $\in$ {1,+∞ },

$$E(\zeta_\varepsilon^2(T_{x_i;l_i})) = \int_{T_{x_i;l_i}\times T_{x_i;l_i}} \theta^{-2}\ E_{\varepsilon,u}(\tau_1-\tau_2)\ P_{X_\varepsilon(\tau_1),X_\varepsilon(\tau_2)}(u,u)\ d\tau_1 d\tau_2$$

Comme dans le théorème 1, on a:

$$E_{\varepsilon,u}(\tau_1-\tau_2) \leq (d-s)\ [\ 1 + 4\ R_\varepsilon(o)\ (R_\varepsilon(o) + R_\varepsilon(\tau_1-\tau_2))^{-2}\ u^2\ ]$$
$$\leq c(u)$$

si ε est suffisamment petit et $(\tau_1,\tau_2) \in V \times V$, ceci d´ après le lemme 3(i), et donc:

$$E(\zeta_\varepsilon^2(T_{x_i;l_i})) \leq \text{cste} \int_{T_{x_i;l_i}\times T_{x_i;l_i}} (\ R_\varepsilon^2(o) - R_\varepsilon^2(\tau_1-\tau_2)\ )^{-1/2}\ d\tau_1\, d\tau_2$$

Ce qui implique:

$$E(\zeta_\varepsilon^2(T_{x_i;l_i})) \leq \text{cste}\ (l_i)^d \int_{]-l_i;l_i[^d} (\ R_\varepsilon(o) - R_\varepsilon(u)\ )^{-1/2}\ du$$

pour ε suffisamment petit, toujours d´après le lemme 3(i).
On applique alors le lemme 6(iv) et donc: il existe $\varepsilon_o > o$ tel que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_o$, on ait:

$$E(\zeta_\varepsilon^2(T_{x_i;l_i})) \leq \text{cste}\ (l_i)^d \int_{]-l_i;l_i[^d} (\ x_1^2 + g(c_o f^{-1}(\varepsilon))\ x_d^2\ )^{-1/2}\ dx_1\, dx_2 \ldots dx_d$$

pour s = d-1 et

$$E(\zeta_\varepsilon^2(T_{x_i;l_i})) \leq \text{cste}\ (l_i)^d \int_{]-l_i;l_i[^d} [g(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{-1/2} (\ x_{d-1}^2 + x_d^2\ )^{-1/2}\ dx_1\, dx_2 \ldots dx_d$$

pour $s \neq d-1$
et donc :

$E(\zeta_\varepsilon^2(T_{x_i;l_i})) \leq \text{cste}\ (l_i)^{2d-1}\ G\ (\ [g(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{1/2}\ )$, pour s = d-1 et $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$

et

$E(\zeta_\varepsilon^2(T_{x_i;l_i})) \leq \text{cste}\ (l_i)^{2d-1}\ [g(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{-1/2}$, pour $s \neq d-1$ et $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$

On en déduit donc que:

$$\int_{B_{2h(\varepsilon)}} (1) \leq \text{cste} \sum_{i=1}^{+\infty} (l_i)^{2d-1}\ G\ (\ [g(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{1/2}\ ),$$

pour s = d-1 et $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ et

$$\int_{B_{2h(\varepsilon)}} (1) \quad \leq \quad \text{cste} \sum_{i=1}^{+\infty} \text{cste} \ (l_i)^{2d-1} \quad [g(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{-1/2},$$

pour $s \neq d\text{-}1$ et $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$

Il s'en suit que: $\forall \eta > o$,

$$\int_{B_{2h(\varepsilon)}} (1) \quad \leq \quad \text{cste} \quad [\, H_{2d-1, f(\varepsilon) d^{-1/2}} (B_{2h(\varepsilon)}) \ + \ \eta \,] \ G \ (\ [g(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{1/2} \ )$$

pour $s = d\text{-}1$ et $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ et

$$\int_{B_{2h(\varepsilon)}} (1) \quad \leq \quad \text{cste} \quad [\, H_{2d-1, f(\varepsilon) d^{-1/2}} (B_{2h(\varepsilon)}) \ + \ \eta \,] \ [g(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{-1/2}$$

pour $s \neq d\text{-}1$ et $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$

Compte tenu du lemme 8, on a alors:

$$\int_{B_{2h(\varepsilon)}} (1) \quad \leq \quad \text{cste} \quad H_{2d-1, f(\varepsilon) d^{-1/2}} (A_{2h(\varepsilon)} \cap (V - V)) \ \ G(\ [g(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{1/2} \ )$$

pour $s = d\text{-}1$ et $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ et

$$\int_{B_{2h(\varepsilon)}} (1) \quad \leq \quad \text{cste} \quad H_{2d-1, f(\varepsilon) d^{-1/2}} (A_{2h(\varepsilon)} \cap (V - V)) \ \ [g(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{-1/2}$$

pour $s \neq d\text{-}1$ et $o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$

Sur $C_{2h(\varepsilon)}$:

$$\int_{C_{2h(\varepsilon)}} (1) \ = \ \theta^{-2} \qquad \int_{C_{2h(\varepsilon)}} E_{\varepsilon,u} (\tau_1 - \tau_2) \ P_{X_\varepsilon(\tau_1), X_\varepsilon(\tau_2)} (u,u) \ d\tau_1 d\tau_2$$

On décompose alors $\displaystyle\int_{C_{2h(\varepsilon)}} (1)$ sous la forme:

$$\int_{C_{2h(\varepsilon)}} (1) \quad = \quad \int_{C_{2h(\varepsilon)}} P_{X(\tau_1), X(\tau_2)} (u,u) \ d\tau_1 d\tau_2 \quad +$$

$$\theta^{-2} \quad \int_{C_{2h(\varepsilon)}} E_{\varepsilon,u} (\tau_1 - \tau_2) \, [\, P_{X_\varepsilon(\tau_1), X_\varepsilon(\tau_2)} (u,u) \ - \ P_{X(\tau_1), X(\tau_2)} (u,u) \,] \, d\tau_1 d\tau_2$$

(I)

$$+\theta^{-2} \int_{C_{2h(\varepsilon)}} [E_{\varepsilon,u}(\tau_1-\tau_2) - \theta^2] P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(u,u)\, d\tau_1 d\tau_2 \qquad \text{(II)}$$

Pour (I) :

$$|P_{X_\varepsilon(o),X_\varepsilon(\tau)}(u,u) - P_{X(o),X(\tau)}(u,u)| =$$

$$\frac{1}{2\pi}|(R_\varepsilon^2(o) - (R_\varepsilon^2(\tau))^{-1/2} \exp[-u^2(R_\varepsilon(o)+R_\varepsilon(\tau))^{-1}] - (R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2} \exp[-u^2(R(o)+R(\tau))^{-1}]|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}|(R_\varepsilon^2(o) - (R_\varepsilon^2(\tau))^{-1/2} - (R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2}| \exp[-u^2(R_\varepsilon(o)+R_\varepsilon(\tau))^{-1}] +$$

$$\frac{1}{2\pi}(R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2} | \exp[-u^2(R_\varepsilon(o)+R_\varepsilon(\tau))^{-1}] - \exp[-u^2(R(o)+R(\tau))^{-1}]|$$

Or : $(R_\varepsilon^2(o) - (R_\varepsilon^2(\tau))^{-1/2} - (R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2} =$

$$[\,(R^2(o) - R_\varepsilon^2(o)) - (R^2(\tau)) - R_\varepsilon^2(\tau))\,](R_\varepsilon^2(o) - (R_\varepsilon^2(\tau))^{-1/2}(R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2} \times$$

$$[\,(R_\varepsilon^2(o) - (R_\varepsilon^2(\tau))^{1/2} + (R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2}\,]^{-1}$$

Mais $\forall\, t \in \mathbb{R}^d$: $|R^2(t) - R_\varepsilon^2(t)| \leq 2R(o)\,|R(t) - R_\varepsilon(t)|$

$$\text{et } |R(t) - R_\varepsilon(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} (1 - |\hat{\Psi}|^2(\varepsilon u))\, e^{i<t,u>}\, dF(u) \right|$$

$$\leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} |1 - |\hat{\Psi}|(\varepsilon u)|\, dF(u)$$

$$\leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} |1 - \hat{\Psi}(\varepsilon u)|\, dF(u)$$

Or $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$, $|1 - \hat{\Psi}(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(u)\,(1 - e^{i<x,u>})\, du \right|$

et d'après l'inégalité: $\forall\, y \in \mathbb{R}$ et $\forall\, o < a \leq 1$, $|1 - e^{iy}| \leq 2|y|^a$, on a:

$$|1 - \hat{\Psi}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(u)\, |<x,u>|^\delta\, du \leq ||x||^\delta \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(u)\, ||u||^\delta\, du$$

Posons N_δ, $N_\delta = \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(u)\, ||u||^\delta\, du < +\infty$, d'après les hypothèses faites sur Ψ, et donc:

$\forall\ t \in \mathbb{R}^d$, $|\ R(t) - R_\varepsilon(t)\ | \leq 2\ N_\delta\ \varepsilon^\delta \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^\delta\ dF(u) \leq$ cste ε^δ (la dernière inégalité provenant de l'hypothèse Ho).

D'après le lemme 5((iii) et (v)) on a:

$R_\varepsilon^2(o) - R_\varepsilon^2(\tau) \geq c\ \|\tau\|^2$ et $R^2(o) - R^2(\tau) \geq c\ \|\tau\|^2$, pour $\tau \in C_{2h(\varepsilon)}$, d' où :

$$|(R_\varepsilon^2(o) - (R_\varepsilon^2(\tau))^{-1/2} - (R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2}| \leq \text{cste}\ \|\tau\|^{-\gamma}\ \varepsilon^\delta\ (R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2}\ h^{\gamma-2}(\varepsilon)$$

D' autre part:

$$|\ \exp[-u^2(R_\varepsilon(o) + R_\varepsilon(\tau))^{-1}] - \exp[-u^2(R(o) + R(\tau))^{-1}]\ | \leq$$
$$u^2\ [|\ R(o) - R_\varepsilon(o)\ | + |\ R(\tau) - R_\varepsilon(\tau)\ |]\ (R(o) + R_\varepsilon(o))^{-1}(R(o) + R(\tau))^{-1}$$
$$\leq \text{cste}\ \varepsilon^\delta$$

Finalement :

$$|\ P_{X_\varepsilon(\tau_1), X_\varepsilon(\tau_2)}(u,u) - P_{X(\tau_1), X(\tau_2)}(u,u)\ | \leq$$
$$\text{cste}\ \|\tau_1 - \tau_2\|^{-\gamma}\ \varepsilon^\delta\ (R^2(o) - R^2(\tau_1 - \tau_2))^{-1/2}\ h^{\gamma-2}(\varepsilon)$$

Compte-tenu que: $E_{\varepsilon,u}(\tau_1 - \tau_2) \leq c(u)$, si ε est suffisamment petit et $(\tau_1, \tau_2) \in V \times V$ et que $\int_{V \times V} (R^2(o) - (R^2(\tau_1 - \tau_2))^{-1/2}\ \|\tau_1 - \tau_2\|^{-\gamma}\ d\tau_1\ d\tau_2$ est finie pour tout $o < \gamma < d-1$, $o < \gamma < 2$, on en déduit que:

$$|\ (I)\ | \leq \text{cste}\ \varepsilon^\delta\ h^{\gamma-2}(\varepsilon)$$

Pour (II):

$$E_{\varepsilon,u}(\tau) = \int_{\mathbb{R}^{2(d-s)}} (2\pi)^{s-d}\ (\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1/2}\ \|x\|\ \|y\|\ f(\varepsilon,\tau,x,y)\ dx\ dy$$

Avec

$$f(\varepsilon,\tau,x,y) = \exp[-\tfrac{1}{2}(\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1}(x - m_\varepsilon(\tau), y + m_\varepsilon(\tau))\ A_\varepsilon^{*\prime}(\tau)(x - m_\varepsilon(\tau), y + m_\varepsilon(\tau))']$$

où $A_\varepsilon^*(\tau)$ note la matrice des cofacteurs de $A_\varepsilon(\tau)$ et $A_\varepsilon(\tau)$ celle de la covariance de $(\nabla_y X_\varepsilon(o)\ c'(\varepsilon)\ ,\ \nabla_y X_\varepsilon(\tau)\ c'(\varepsilon))\ /\ X_\varepsilon(o) = X_\varepsilon(\tau) = u$

Plus précisément:

$$A_\varepsilon(\tau) = \begin{pmatrix} B_\varepsilon(\tau) & C_\varepsilon'(\tau) \\ C_\varepsilon(\tau) & B_\varepsilon(\tau) \end{pmatrix}$$

Avec :

$$B_\varepsilon(\tau) = I_{d-s} - (R_\varepsilon^2(o) - (R_\varepsilon^2(\tau))^{-1} R_\varepsilon(o) \,(c(\varepsilon)\frac{\partial R_\varepsilon}{\partial u_i}(\tau))_{i=s+1,d}\,(c(\varepsilon)\frac{\partial R_\varepsilon}{\partial u_i}(\tau))'_{i=s+1,d}$$

$$C_\varepsilon(\tau) = c(\varepsilon)(\frac{-\partial^2 R_\varepsilon}{\partial u_i \partial u_j}(\tau))_{i,j=s+1,d}\,c(\varepsilon)' - (R_\varepsilon^2(o) - (R_\varepsilon^2(\tau))^{-1} R_\varepsilon(\tau) \times$$

$$(c(\varepsilon)\frac{\partial R_\varepsilon}{\partial u_i}(\tau))_{i=s+1,d}\,(c(\varepsilon)\frac{\partial R_\varepsilon}{\partial u_i}(\tau))'_{i=s+1,d}$$

et $m_\varepsilon(\tau) = u\,(R_\varepsilon(o) + R_\varepsilon(\tau))^{-1}(c(\varepsilon)\frac{\partial R_\varepsilon}{\partial u_i}(\tau))_{i=s+1,d}$

$\text{dét}A_\varepsilon(\tau) = 1 + a_\varepsilon(\tau)$ et $|a_\varepsilon(\tau)| \leq \text{cste}\,\|\tau\|^{-\gamma} c_3(\varepsilon)$, $o \leq |a_\varepsilon(\tau)| \leq 1-b(a)$, $o < b(a) \leq 1$ et $c_3(\varepsilon) = \sup(\, c_1^2(\varepsilon), c_2(\varepsilon)\,)$, ceci d'après les hypothèses H2 et H3 et les lemmes 5 et 7.

De même:

$|m_\varepsilon(\tau)| \leq \text{cste}\; c(\varepsilon)\;\; h^{1-\gamma/2}(\varepsilon)$

On écrit $A_\varepsilon^*(\tau)$ sous la forme:

$$A_\varepsilon^*(\tau) = \begin{pmatrix} I_{d-s}(\tau) & \theta_{d-s;d-s}(\tau) \\ \theta_{d-s;d-s}(\tau) & I_{d-s}(\tau) \end{pmatrix} + A_{\varepsilon,1}(\tau)$$

où: $A_{\varepsilon,1}(\tau) = (a_{\varepsilon 1}^{i;j})_{i,j}$, $|a_{\varepsilon 1}^{i;j}| \leq \text{cste}\,\|\tau\|^{-\gamma} c_3(\varepsilon)$ $i,j \in \{s+1,d\}$, ceci d'après les hypothèses H2,H3 et les lemmes 5 et 7 et $E_{\varepsilon,u}(\tau) - \theta^2$ comme:

$$E_{\varepsilon,u}(\tau) - \theta^2 = [\,E_{\varepsilon,u}(\tau) - (\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1/2}\,\theta^2\,] + \theta^2\,[\,(\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1/2} - 1\,]$$

Interessons-nous à: $E_{\varepsilon,u}(\tau) - (\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1/2}\,\theta^2$

$$E_{\varepsilon,u}(\tau) - (\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1/2}\,\theta^2 =$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2(d-s)}} (2\pi)^{s-d}\;(\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1/2}\;\|x\|\;\|y\|\;[\;f(\varepsilon,\tau,x) - \exp(-1/2\;\|x,y\|^2\;]\;dx\,dy$$

Et :

$$|\exp[-1/2(\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1}(x-m_\varepsilon(\tau)\,,y+m_\varepsilon(\tau))\;A_\varepsilon^{*\prime}(\tau)(x-m_\varepsilon(\tau),y+m_\varepsilon(\tau))'\,] - \exp(-1/2\;\|x,y\|^2| \leq$$

$$1/2\Big[|\;\|x-m_\varepsilon(\tau)\;,\;y+m_\varepsilon(\tau)\|^2\;(\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1} - \|x,y\|^2\,| \;\; +$$

$(\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1}|\ (x-m_\varepsilon(\tau),\ y+m_\varepsilon(\tau))\ A_{\varepsilon,1}(\tau)\ (x-m_\varepsilon(\tau)\ ,\ y+m_\varepsilon(\tau))'\ |\ \Big] \times$

$\Big[\exp[-½(\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1}(x-m_\varepsilon(\tau), y+m_\varepsilon(\tau))\ A^{*\prime}_\varepsilon(\tau)(x-m_\varepsilon(\tau), y+m_\varepsilon(\tau))'] + \exp(-½\ ||x,y||^2\Big]$

et $\exp[-½(\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1}(x-m_\varepsilon(\tau)\ , y+m_\varepsilon(\tau))\ A^{*\prime}_\varepsilon(\tau)(x-m_\varepsilon(\tau)\ , y+m_\varepsilon(\tau))' = (a)$

$\leq \exp[-½(\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1}||x-m_\varepsilon(\tau)\ ,\ y+m_\varepsilon(\tau)||^2$ ppvp $A^*_\varepsilon(\tau)$

Or dét $A^{*\prime}_\varepsilon(\tau) = [\ \text{dét}\ A_\varepsilon(\tau)\ ]^{d-1}$ et (*) dét $A_\varepsilon(\tau) \geq b(a) > o$, d'où:

dét $A^{*\prime}_\varepsilon(\tau) \geq b(a)^{d-1}$. Compte-tenu que chacun des termes de $A^*_\varepsilon(\tau)$ est borné uniformément (hypothèses H2 et H3 et lemmes 5 et 7), on a donc forcément que la plus grande valeur propre de $A^*_\varepsilon(\tau)$ est uniformément bornée; ceci plus (*) entraînent que ppvp $A^*_\varepsilon(\tau) \geq w(a) > o$.

De plus : $\forall\ x \in \mathbb{R}\ , \forall\ v \in \mathbb{R}\ , (x-v)^2 \geq ¾\ x^2 - 3v^2$, d' où:

$(a) \leq \exp[\frac{-3}{8}\ w(a)\ b(a)^{-1}||x,y||^2\ ]\ \exp[\frac{-3}{2} w(a)\ (b(a))^{-1}||m_\varepsilon(\tau), m_\varepsilon(\tau)||^2]$

et donc: (a) $\leq$ cste $\exp[-\text{cste}\,||x,y||^2\ ]$, pour ε assez petit, ceci grâce à H2.
D'autre part:

$(b) = |\ ||x-m_\varepsilon(\tau)\ ,\ y+m_\varepsilon(\tau)||^2\ (\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1} - ||x,y||^2\ |$

$\leq\ |\ ||x-m_\varepsilon(\tau)\ ,\ y+m_\varepsilon(\tau)||^2 - ||x,y||^2\ |\ (\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1} + |a_\varepsilon(\tau)|\ (\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1}||x,y||^2$

$\leq$ cste $\Big[||\ m_\varepsilon(\tau)\ ,\ m_\varepsilon(\tau)||\ (\ ||x,y|| + ||\ |x| + e_1\ ,\ |y| + e_1\ ||\ ) + c_3(\varepsilon)\ ||\tau||^{-\gamma}||x,y||^2\ \Big]$

où : $|x| = (\ |x_1|\ ,\ |x_2|\ , ...,\ |x_d|\ )$ et $e_1 = (1,1,.....,1)$ (ceci d'après H2 et H3 et les lemmes 5 et 7).
D'où:

$(b) \leq$ cste $||\tau||^{-\gamma}\Big[c_1(\varepsilon)\ h^{1-\gamma/2}(\varepsilon)(\ ||x,y|| + ||\ |x| + e_1\ ,\ |y| + e_1\ ||\ ) + c_3(\varepsilon)||x,y||^2\ \Big]$

$(c) = (\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-1}\ |\ (x-m_\varepsilon(\tau), y+m_\varepsilon(\tau))A_{\varepsilon,1}(\tau)(x-m_\varepsilon(\tau), y+m_\varepsilon(\tau))'\ |$, ce qui implique:

$(c) \leq$ cste $||\tau||^{-\gamma}\ c_3(\varepsilon)\ ||\ |x| + e_1\ ,\ |y| + e_1\ ||^2$, et donc:

$|\ E_{\varepsilon,u}(\tau) - (\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-½}\ \theta^2\ | \leq$ cste $||\tau||^{-\gamma}\ [\ c_1(\varepsilon)\ h^{1-\gamma/2}(\varepsilon) + c_3(\varepsilon)\ ]$

$(d) = |\ \text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-½} - 1| = |\ (1 + a_\varepsilon(\tau)\ )^{-½} - 1\ | = ½\ |\ a_\varepsilon(\tau)\ |\ |\ 1 + \theta_\varepsilon(\tau)\ a_\varepsilon(\tau)\ |^{-3/2}$,

avec $o \leq \theta_\varepsilon(\tau) < 1$; ce qui implique: (d) $\leq$ cste $c_3(\varepsilon)||\tau||^{-\gamma}$
On a donc:

$|(II)| \leq$ cste $[\ c_1(\varepsilon)\ h^{1-\gamma/2}(\varepsilon) + c_3(\varepsilon)\ ]$, ce qui entraîne:

$$\int_{C_{2h(\varepsilon)}} (1) \leq \text{cste}\ [\ \varepsilon^\delta\ h^{\gamma-2}(\varepsilon) + c_1(\varepsilon)\ h^{1-\gamma/2}(\varepsilon) + c_3(\varepsilon)\ ]$$

On en déduit finalement:

$$E(\zeta_\varepsilon^2(V)) \leq \int_{C_{2h(\varepsilon)}} P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(u,u)\, d\tau_1 d\tau_2 \quad +$$

$$\text{cste}\Big[\big(\varepsilon^\delta h^{\gamma-2}(\varepsilon) + c_1(\varepsilon)\, h^{1-\gamma/2}(\varepsilon) + c_1^2(\varepsilon) + c_2(\varepsilon)\big) \; +$$

$$H_{d-1,\, f(\varepsilon)}(A_{2h(\varepsilon)} \cap (V-V))(\times_{s=d-1} G(g^{1/2}(c_o f^{-1}(\varepsilon))) + \times_{s\neq d-1} g^{-1/2}(c_o f^{-1}(\varepsilon)))\Big]$$

<u>$E(\eta_\delta^2(V))$</u>

$$E(\eta_\delta^2(V)) = \left(\frac{1}{2\delta}\right)^2 \int_{V\times V} \int_{u-\delta}^{u+\delta} \int_{u-\delta}^{u+\delta} P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(x,y)\, dx\, dy\, d\tau_1 d\tau_2$$

En procédant de façon analogue à ce qui précède, on a finalement:

$$\lim_{\delta\to o} E(\eta_\delta^2(V)) \leq \int_{C_{2h(\varepsilon)}} P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(u,u)\, d\tau_1 d\tau_2 \quad +$$

$$\text{cste}\; H_{d-1,f(\varepsilon)}(A_{2h(\varepsilon)} \cap (V-V))(\times_{s=d-1} G(g^{1/2}(c_o f^{-1}(\varepsilon))) + \times_{s\neq d-1} g^{-1/2}(c_o f^{-1}(\varepsilon)))\Big]$$

<u>$-2E(\zeta_\varepsilon(V)\,\eta_\delta(V))$</u>

D'après le lemme 5(i) , on a:

$\exists\ \varepsilon_o > o$ tel que pour tout $u \in V\text{-}V$ tel que $\|u\| > 2h(\varepsilon)$ et $\forall\ o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$, on ait:

$R(o)\, R_\varepsilon(o) - \Gamma_\varepsilon^2(u) \;\geq\; C\,\|u\|^2$; en particulier, si $u \in (B_{2h(\varepsilon)})^c$, on a:

$R(o)\, R_\varepsilon(o) - \Gamma_\varepsilon^2(u) \;\geq\; 4\,C\,h^2(\varepsilon)$, et donc on peut appliquer la formule de Rice " *mixte* ", il vient:

$$-2E(\zeta_\varepsilon(V)\eta_\delta(V)) \leq \frac{-2\theta^{-1}}{2\delta} \int_{u-\delta}^{u+\delta} \int_{C_{2h(\varepsilon)}} F^z_{\varepsilon;u}(\tau_1-\tau_2)\, P_{X_\varepsilon(\tau_1),X(\tau_2)}(u,z)\, d\tau_1 d\tau_2 dz$$

On a noté: $F^z_{\varepsilon;u}(\tau) = E(\|\nabla_y X_\varepsilon(o) c'(\varepsilon)\| \,/\, X_\varepsilon(o) = u\,,\, X(\tau) = z)$

D'après le lemme de Fatou:

$$\limsup_{\delta\to o} -2E(\zeta_\varepsilon(V)\eta_\delta(V)) \leq -2\theta^{-1} \int_{C_{2h(\varepsilon)}} F^{u}_{\varepsilon;u}(\tau_1-\tau_2)\, P_{X_\varepsilon(\tau_1),X(\tau_2)}(u,u)\, d\tau_1 d\tau_2$$

On notera dorénavant: $F^{u}_{\varepsilon;u} = F_{\varepsilon,u}$

Or : $-2\theta^{-1} \int_{C_{2h(\varepsilon)}} F_{\varepsilon,u}(\tau_1-\tau_2)\, P_{X_\varepsilon(\tau_1),X(\tau_2)}(u,z)\, d\tau_1 d\tau_2 =$

$$-2 \int_{C_{2h(\varepsilon)}} P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(u,u)\, d\tau_1 d\tau_2 \; -$$

$$2\theta^{-1} \int_{C_{2h(\varepsilon)}} F_{\varepsilon,u}(\tau_1-\tau_2)\,[P_{X_\varepsilon(\tau_1),X(\tau_2)}(u,u) - P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(u,u)]\, d\tau_1 d\tau_2 \; -$$

(I)

$$2\theta^{-1} \int_{C_{2h(\varepsilon)}} [F_{\varepsilon,u}(\tau_1-\tau_2) - \theta]\, P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(u,u)\, d\tau_1 d\tau_2$$

(II)

<u>Pour (I)</u> :

$$|P_{X_\varepsilon(o),X(\tau)}(u,u) - P_{X(o),X(\tau)}(u,u)| =$$

$$\frac{1}{2\pi}|(R_\varepsilon(o)R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1/2} \exp[-u^2/2\,(R_\varepsilon(o)+R(o)-2\Gamma_\varepsilon(\tau))(R_\varepsilon(o)R(o)-\Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1}] -$$

$$(R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2} \exp[-u^2(R(o)+R(\tau))^{-1}]\,|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\,|(R_\varepsilon(o)\,R(o) - (\Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1/2} - (R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2}| \;\times$$

$$\exp[-u^2/2\,(R_\varepsilon(o)+R(o)-2\Gamma_\varepsilon(\tau))(R_\varepsilon(o)R(o)-\Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1}] + \frac{1}{2\pi}(R^2(o)-R^2(\tau))^{-1/2} \;\times$$

$$|\exp[-u^2/2\,(R_\varepsilon(o)+R(o)-2\Gamma_\varepsilon(\tau))(R_\varepsilon(o)R(o)-\Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1} - \exp[-u^2(R(o)+R(\tau))^{-1}]\,|$$

Or : $(R_\varepsilon(o)\,R(o) - (\Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1/2} - (R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2} =$

$-[\; R(o)(R_\varepsilon(o) - R(o)) + (R^2(\tau)) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau))\;](R_\varepsilon(o)R(o) - (\Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1/2}(R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2} \;\times$

$[\;(R_\varepsilon(o)R(o) - (\Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{1/2} + (R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2}\;]^{-1}$

Par des calculs semblables à ceux déjà faits:

$|\,R(o)(R_\varepsilon(o) - R(o))\,| \leq$ cste ε^δ, et $\forall\; t \in \mathbb{R}^d$:

$|R^2(t) - \Gamma_\varepsilon^2(t)| \leq$ cste ε^δ (ceci toujours d'après Ho)
De plus d'après les lemme 5((i) et (v)) on a:
$R_\varepsilon^2(o) - R_\varepsilon^2(\tau) \geq c\,||\tau||^2$ et $R^2(o) - R^2(\tau) \geq c\,||\tau||^2$, pour $\tau \in C_{2h(\varepsilon)}$ d' où:

$|(R_\varepsilon(o)R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1/2} - (R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2}| \leq$ cste $||\tau||^{-\gamma}\varepsilon^\delta\,(R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2}\,h^{\gamma-2}(\varepsilon)$
D' autre part:
$|\exp[-u^2/2\,(R_\varepsilon(o) + R(o) - 2\Gamma_\varepsilon(\tau))(R_\varepsilon(o)\,R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1} - \exp[-u^2(R(o) + R(\tau))^{-1}]\,| \leq$

$u^2/2\;[|\,(R_\varepsilon(o) - \Gamma_\varepsilon(\tau))(R_\varepsilon(o)R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1} - (R(o) + R(\tau))^{-1}\,| \;+$
$|\,(R(o) - \Gamma_\varepsilon(\tau))\,(R_\varepsilon(o)\,R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1} - (R(o)+R(\tau))^{-1}\,|$
Par des calculs analogues à ceux menés antérieurement, on montre que:
(b) $= |\,(R_\varepsilon(o) - \Gamma_\varepsilon(\tau))(R_\varepsilon(o)\,R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1} - (R(o) + R(\tau))^{-1}\,| \leq$ cste $||\tau||^{-\gamma}\varepsilon^\delta\;h^{\gamma-2}(\varepsilon)$,
et
(c) $= (R(o) - \Gamma_\varepsilon(\tau))\,(R_\varepsilon(o)\,R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1} - (R(o)+R(\tau))^{-1}\,| \leq$ cste $||\tau||^{-\gamma}\,\varepsilon^\delta\;h^{\gamma-2}(\varepsilon)$
Il s'en suit que:
(a) $\leq$ cste $||\tau||^{-\gamma}\varepsilon^\delta\;h^{\gamma-2}(\varepsilon)$
On en déduit que:
$|P_{X_\varepsilon(o),X(\tau)}(u,u) - P_{X(o),X(\tau)}(u,u)| \leq$ cste $||\tau||^{-\gamma}\,\varepsilon^\delta\,(R^2(o) - R^2(\tau))^{-1/2}\,h^{\gamma-2}(\varepsilon)$ (*)
De plus par un calcul analogue à celui fait dans la démonstration de la proposition 3, on montre que:
$F_{\varepsilon,u}(\tau) \leq (d-s)\;[\,1 + R(o)\,u^2\,(R_\varepsilon(o) - \Gamma_\varepsilon(\tau))^2(R_\varepsilon(o)\,R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-2}$
Mais on a vu que: (b) $\leq$ cste $||\tau||^{-\gamma}\,\varepsilon^\delta\;h^{\gamma-2}(\varepsilon) \leq$ cste $\varepsilon^\delta\;h^{-2}(\varepsilon)$,
pour $\tau \in C_{2h(\varepsilon)}$, qui est borné d'après l'hypothèse H1; de plus,
$(R(o) + R(\tau))^{-1} \leq$ cste pour $\tau \in C_{2h(\varepsilon)}$, ceci d'après le lemme 5; d'où:
$|\,R_\varepsilon(o) - \Gamma_\varepsilon(\tau)\,|\,(R_\varepsilon(o)R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1} \leq$ cste , pour $\tau \in C_{2h(\varepsilon)}$, ce qui implique:
$F_{\varepsilon,u}(\tau) \leq$ cste, pour $\tau \in C_{2h(\varepsilon)}$.
De cette inégalité et de (*), on déduit que:
(I) $\leq$ cste $\varepsilon^\delta\,h^{\gamma-2}(\varepsilon)$

Pour (II):

$$F_{\varepsilon,u}(\tau) = \int_{\mathbb{R}^{(d-s)}} (2\pi)^{(s-d)/2}\,(\text{dét}D_\varepsilon(\tau))^{-1/2}\;||x||\;\;g(\varepsilon,\tau,x)\;dx$$

Avec

$g(\varepsilon,\tau,x) = \exp[-½(\text{dét}\, D_\varepsilon(\tau))^{-1}(x - p_\varepsilon(\tau))\ D_\varepsilon^{*\,\prime}(\tau)\,(x - p_\varepsilon(\tau)')]$

où $D_\varepsilon^*(\tau)$ note la matrice des cofacteurs de $D_\varepsilon(\tau)$ et $D_\varepsilon(\tau)$ celle de la covariance de $\nabla_y X_\varepsilon(\tau)\ c'(\varepsilon)\ /\ X_\varepsilon(o) = X(\tau) = u$

Plus précisément:

$$D_\varepsilon(\tau) = I_{d-s} - (R_\varepsilon(o)\,R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1} R_\varepsilon(o)(c(\varepsilon)\frac{\partial\Gamma_\varepsilon}{\partial u_i}(\tau))_{i=s+1,d}\ (c(\varepsilon)\frac{\partial\Gamma_\varepsilon}{\partial u_i}(\tau))'_{i=s+1,d}$$

et $p_\varepsilon(\tau) = u\,(R_\varepsilon(o) - \Gamma_\varepsilon(\tau))\,(R_\varepsilon(o)\,R(o) - \Gamma_\varepsilon^2(\tau))^{-1}(c(\varepsilon)\frac{\partial\Gamma_\varepsilon}{\partial u_i}(\tau))_{i=s+1,d}$

De la même façon que ce qui précède, on a:

$\text{dét}D_\varepsilon(\tau) = 1 + d_\varepsilon(\tau)$, $|d_\varepsilon(\tau)| \leq \text{cste}\ ||\tau||^{-\gamma}\, c_3(\varepsilon)$, $o \leq |d_\varepsilon(\tau)| \leq 1\text{-}b(a)$

$|p_\varepsilon(\tau)| \leq \text{cste}\ c_1(\varepsilon)\ h^{1-\gamma/2}(\varepsilon)$, pour $\tau \in C_{2h(\varepsilon)}$.

On décompose $D_\varepsilon^*(\tau)$ et $F_{\varepsilon,u}(\tau)$ sous la forme:

$D_\varepsilon^*(\tau) = I_{d-s} + D_{\varepsilon,1}(\tau)$

où: $D_{\varepsilon,1}(\tau) = (d_{\varepsilon 1}^{i;j})_{i,j}$, $|d_{\varepsilon 1}^{i;j}| \leq \text{cste}\ ||\tau||^{-\gamma}\, c_3(\varepsilon)$ $i,j \in \{s+1,d\}$

et $F_{\varepsilon,u}(\tau) - \theta$ comme:

$F_{\varepsilon,u}(\tau) - \theta = [F_{\varepsilon,u}(\tau) - (\text{dét}D_\varepsilon(\tau))^{-½}\,\theta\,] + \theta\,[(\text{dét}D_\varepsilon(\tau))^{-½} - 1\,]$

De façon analogue à ce qui précède, on montre que:

$|\,E_{\varepsilon,u}(\tau) - (\text{dét}A_\varepsilon(\tau))^{-½}\,\theta^2\,| \leq \text{cste}\ ||\tau||^{-\gamma}\,[\,c_1(\varepsilon)\ h(\varepsilon)^{1-\gamma/2} + c_3(\varepsilon)\,]$

et $|\,(\text{dét}D_\varepsilon(\tau))^{-½} - 1\,| \leq \text{cste}\ ||\tau||^{-\gamma}\,c_3(\varepsilon)$, d'où:

$|(\text{II})| \leq \text{cste}\,[\,c_1(\varepsilon)\ h(\varepsilon)^{1-\gamma/2} + c_3(\varepsilon)\,]$, ce qui entraîne :

$$\limsup_{\delta\to o} -2E(\zeta_\varepsilon(V)\eta_\delta(V)) \leq -2 \int_{C_{2h(\varepsilon)}} P_{X(\tau_1),X(\tau_2)}(u,u)\ d\tau_1 d\tau_2 + \text{cste}\Big[\big(\varepsilon^\delta\ h^{\gamma-2}(\varepsilon) + c_1(\varepsilon)\ h^{1-\gamma/2}(\varepsilon) + c_3(\varepsilon)\big)\Big]$$

Ceci implique, compte-tenu de (iii) de la proposition 1 et de ce qui précède que:

$$E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2 \leq c_h\Big[\big(\varepsilon^\delta\ h^{\gamma-2}(\varepsilon) + c_1(\varepsilon)\ h^{1-\gamma/2}(\varepsilon) + c_1^2(\varepsilon) + c_2(\varepsilon)\big) + H_{d-1,\,f(\varepsilon)}\,(A_{2h(\varepsilon)} \cap (V\text{-}V))(\ \chi_{s=d-1}\ G(g^{½}(c_o f^{-1}(\varepsilon))) + \chi_{s\neq d-1}\ g^{-½}(c_o f^{-1}(\varepsilon)))\Big]$$

ceci achève la démonstration du théorème 2.

5. Exemples

5.1 Exemple d'un processus quasi-stable et d'un processus stable symétrique

Nous allons donner deux exemples que nous traiterons conjointement.
Soient $R_1(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<t,x>}\, \Phi_\alpha(x)\, dx$ et $R_2(t) = \exp(-\|t\|^\alpha)$, $t \in \mathbb{R}^d$, où:

$\forall\, x \in \mathbb{R}^d$, $\Phi_\alpha(x) = 2\, c_d^{-1}\, g_\alpha(\|x\|)\, \|x\|^{1-d}$ et $\forall\, y \in \mathbb{R}$, $\hat{g}_\alpha(y) = \exp(-|y|^\alpha)$,
$o < \alpha < 2$.
Nous allons montrer le résultat suivant (l'indice k=1,2 correspond à la covariance R_k).
$A = o$ et $S = \{o\}$, ce que implique que $s=o$.

$c^{(k)}(\varepsilon) \approx e_\alpha^{(k)}\, \varepsilon^{1-\alpha/2}\, I_d$ avec: $e_\alpha^{(k)} = [\, c_d\, a_\alpha^{(k)} \int_o^{+\infty} y^{1-\alpha}\, |\hat{\Psi}|^2(y)\, dy\,]^{-1/2}$

$a_\alpha^{(1)} = 2\, c_d^{-1} [\, \int_{\mathbb{R}} (1-\cos y)\, |y|^{-1-\alpha}\, dy\,]^{-1}$

et $a_\alpha^{(2)} = [\, \int_{\mathbb{R}^d} (1-\cos y_1)\, \|y\|^{-d-\alpha}\, dy\,]^{-1}$, où : $y = (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_d)$

et en posant : $V_\varepsilon = E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2$,

$V_\varepsilon \leq \text{cste}\ \varepsilon^\alpha$ si $o < \alpha \leq \alpha_1$

$V_\varepsilon \leq \text{cste}\ \varepsilon^{(1-\alpha/2)(d-\alpha/2)(d+1-3/2\alpha)^{-1}}$ si $\alpha_1 \leq \alpha \leq 1$

$V_\varepsilon \leq \text{cste}\ \varepsilon^{1-\alpha/2}$ si $1 \leq \alpha < 2$

avec $\alpha_1 = 1/7\, [3(d+1) - (9(d+1)^2 - 28d)^{1/2}]$

Tout d'abord voyons que R_1 et R_2 sont effectivement des covariances et qu'elles sont isotropes.
Il est clair que R_1 est une covariance et qu'elle est isotrope; nous dirons qu'elle est quasi-stable.
Nous allons montrer que R_2 est la fonction caractéristique d'un processus stable symétrique d'indice $o \leq \alpha < 2$, ce qui suffit pour conclure que R_2 est une covariance.

En effet , avec les notations du Feller W[13], nous avons:

$R_2(u) = \exp(-||u||^{\alpha}) = \exp(\psi(u))$, $u \in \mathbb{R}^d$, avec:

$$\psi(u) = d_\alpha^{-1} \int_{S^{d-1}} \int_0^{+\infty} (e^{i<u,z>} - 1 - i<u,\tau_\alpha(z)>) \, ||z||^{-2} \Lambda_\alpha(d\rho) \, d\sigma_{d-1}(z')$$

où $z = \rho z'$, $\rho = ||z||$, $z' \in S^{d-1}$, $\Lambda_\alpha(d\rho) = \rho^{1-\alpha} d\rho$,

$$d_\alpha = \int_{S^{d-1}} \int_0^{+\infty} (1-\cos vz_1) \, v^{-1-\alpha} \, dv \, d\sigma_{d-1}(z) \quad \text{et}$$

$\tau_\alpha(z) = o$ si $o < \alpha < 1$

$\tau_\alpha(z) = (z_1, z_2, \ldots, z_d)$ si $1 < \alpha < 2$

$\tau_\alpha(z) = (\sin z_1, \sin z_2, \ldots, \sin z_d)$ si $\alpha = 1$

R_2 est donc une covariance ne dépendant que de la norme; elle est donc isotrope.

Regardons maitenant les propriétés des dérivées partielles de R_k, k=1,2.

$$R_1(t) = c_d^{-1} \int_{S^{d-1}} e^{-||t||^{\alpha}|x_1|^{\alpha}} \, d\sigma_{d-1}(x)$$

D'où pour $t \in (\mathbb{R}^d)^*$, $i,j \in \{1,d\}$

$$\frac{\partial R_1}{\partial t_i}(t) = -\alpha \, c_d^{-1} \, t_i ||t||^{\alpha-2} \int_{S^{d-1}} |x_1|^{\alpha} e^{-||t||^{\alpha}|x_1|^{\alpha}} \, d\sigma_{d-1}(x) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_i \partial t_j}(t) = -\alpha \, c_d^{-1} \left[\chi_{i=j} ||t||^{\alpha-2} + (\alpha-2) t_i t_j ||t||^{\alpha-4}\right] \times$$

$$\int_{S^{d-1}} |x_1|^{\alpha} e^{-||t||^{\alpha}|x_1|^{\alpha}} d\sigma_{d-1}(x) + \alpha^2 \, c_d^{-1} t_i t_j ||t||^{2\alpha-4} \times$$

$$\int_{S^{d-1}} |x_1|^{2\alpha} e^{-||t||^{\alpha}|x_1|^{\alpha}} d\sigma_{d-1}(x)$$

De même:

$$\frac{\partial R_2}{\partial t_i}(t) = -\alpha \, t_i ||t||^{\alpha-2} \exp(-||t||^{\alpha}) \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial t_i \partial t_j}(t) = -\alpha \left[\chi_{i=j} ||t||^{\alpha-2} + (\alpha-2) t_i t_j ||t||^{\alpha-4} - \alpha \, t_i t_j ||t||^{2\alpha-4}\right] \exp(-||t||^{\alpha})$$

On en déduit que A = {o}

De plus on a les inégalités suivantes:

$\forall k \in \{1,2\}$, $\forall i,j \in \{1,d\}$, $\forall t \in (\mathbb{R}^d)^*$,

$$\left| \frac{\partial R^{(k)}}{\partial t_i}(t) \right| \leq \text{cste} \, ||t||^{\alpha-1}, \quad \left| \frac{\partial^2 R^{(k)}}{\partial t_i \partial t_j}(t) \right| \leq \text{cste} \left[||t||^{\alpha-2} + ||t||^{2\alpha-2} \right] \quad \text{(F1)}$$

On a aussi: $\lim\limits_{\|t\| \to +\infty} \dfrac{\partial R^{(k)}}{\partial t_i}(t) = \lim\limits_{\|t\| \to +\infty} \dfrac{\partial^2 R^{(k)}}{\partial t_i \partial t_j}(t) = o$ (F2)

D'autre part: $S = \{o\}$, et donc s=o.
En effet:
Si $F_\alpha^{(k)}$ note la densité de la covariance R_k, k=1,2 , $F_\alpha^{(k)}$ étant isotrope , $\int_{\mathbb{R}^d} \langle v^*, x \rangle^2 \; F_\alpha^{(k)}(dx)$ est constante pour $v^* \in S^{d-1}$, donc égale à $+\infty$, sinon on aurait $S = \mathbb{R}^d$.
Donnons maintenant un équivalent de $c(\varepsilon)$ et pour cela montrons le lemme suivant:

<u>Lemme 9</u>: $\forall\, k \in \{1,2\}$

1) $\beta < \alpha \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\beta \; F_\alpha^{(k)}(dx) < +\infty$

2) $g_\alpha^{(k)}(B) = \inf\limits_{u \in S^\perp \cap S^{d-1}} \int_{\|x\|<B} \langle v,\; u \rangle^2 \; F_\alpha^{(k)}(dx) \approx D_\alpha^{(k)} \; B^{2-\alpha}$
lorsque $B \longrightarrow +\infty$

L'équivalent de $c(\varepsilon)$ sera donné à l'aide de 2); 1) servira un peu plus loin pour le choix de δ.
<u>Preuve du lemme 9</u>:
Pour R_1 : $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\beta \; dF(x) = 2\; C_d^1 \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\beta \; g_\alpha(\|x\|)\; \|x\|^{1-d}\; dx =$

$2 \int_0^{+\infty} \rho^\beta\, g_\alpha(\rho)\, d\rho = E_\alpha(|\xi|^\beta)$, où ξ est une variable aléatoire stable sur $\mathbb{R}$, d'indice α.

D'après [13], $E_\alpha(|\xi|^\beta) < +\infty$ dès que $\beta < \alpha$.
Enonçons maintenant un résultat dont la démonstration est donnée en annexe qui nous permettra de terminer la démonstration du lemme 9.

Soit $f_\alpha^{(k)}$ la densité spectrale de R_k, k=1,2, alors:
$\|x\|^{d+\alpha} \; f_\alpha^{(k)}(x) \approx a_\alpha^{(k)}$ lorsque $\|x\| \longrightarrow +\infty$

Ce résultat qui est énoncé dans l'annexe sous forme de proposition (proposition 9) permet de montrer d'une part que:
$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^\beta \; F_\alpha^{(k)}(dx)$ est finie , dès que $\beta < \alpha$, ce qu'on savait d'ailleurs pour R_1; d'autre part:

$$g_\alpha^{(k)}(B) = 1/d \int_{||x||<B} ||x||^2 \; F_\alpha^{(k)}(dx) = 1/d \int_{||x||<B} ||x||^2 \; f_\alpha^{(k)}(x)\; dx$$

Or $f_\alpha^{(k)}$ ne dépend que de la norme, d'où:

$$g_\alpha^{(k)}(B) = c_d /d\; B^{2+\alpha} \int_o^1 x^{1-\alpha} \; (Bx)^{d+\alpha} \; f_\alpha^{(k)}(Bx)\; dx$$

En appliquant alors la proposition 9 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient:

$$g_\alpha^{(k)}(B) \approx D_\alpha^{(k)} B^{2-\alpha} \text{ lorsque } B \longrightarrow +\infty, \text{ avec } D_\alpha^{(k)} = c_d /d \times (2-\alpha)^{-1} \; a_\alpha^{(k)}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 9. Nous sommes maintenant en mesure de donner un équivalent pour $c(\varepsilon)$.

Nous allons faire l'hypothèse supplémentaire suivante sur Ψ:
Ψ ne dépend que de la norme.

Sous cette condition, nous avons : $c^{(k)}(\varepsilon) \approx e_\alpha^{(k)} \varepsilon^{1-\alpha/2} I_d$

l'hypothèse précédente implique que: $\forall\; i \neq j$, $\forall$ k=1,2, $\dfrac{-\partial^2 \; R_\varepsilon^{(k)}}{\partial t_i \partial t_j}(o) = o$,

et $\forall\; i \in \{1,d\}$, $\forall$ k=1,2, $\dfrac{-\partial^2 \; R_\varepsilon^{(k)}}{\partial t_i^2}(o) = \dfrac{-\partial^2 \; R_\varepsilon^{(k)}}{\partial t_1^2}(o)$

Il reste à voir que : $\dfrac{-\partial^2 \; R_\varepsilon^{(k)}}{\partial t_i^2}(o) \approx e_\alpha^{(k)} \; \varepsilon^{1-\alpha/2}$, k=1,2, i=1,d

$$\frac{-\partial^2 \; R_\varepsilon^{(k)}}{\partial t_i^2}(o) = \int_{\mathbb{R}^d} x_i^2 \; |\hat{\Psi}|^2(\varepsilon x) \; f_\alpha^{(k)}(x)\; dx$$

Comme $f_\alpha^{(k)}$ et Ψ ne dépendent de la norme, on a:

$$\frac{-\partial^2 \; R_\varepsilon^{(k)}}{\partial t_i^2}(o) = c_d \; d^{-1} \; \varepsilon^{\alpha-2} \int_o^{+\infty} |\hat{\Psi}|^2(x) \; x^{1-\alpha} \; f_\alpha^{(k)}(x\varepsilon^{-1}) \; (x\varepsilon^{-1})^{d+\alpha} dx$$

De la même façon que dans la démonstration du lemme 9, et grâce aux hypothèses faites sur Ψ, on a:

$$\frac{-\partial^2 \; R_\varepsilon^{(k)}}{\partial t_i^2}(o) = c_d \; d^{-1} \; a_\alpha^{(k)} \; \varepsilon^{\alpha-2} \int_o^{+\infty} |\hat{\Psi}|^2(x) \; x^{1-\alpha} \; dx$$

et donc $c(\varepsilon) \approx e_{\alpha}^{(k)} \varepsilon^{1-\alpha/2} I_d$ (pour le calcul de $a_{\alpha}^{(k)}$, cf proposition 9).
Donnons une majoration de la vitesse de convergence V_{ε}.
Nous avons les inégalités suivantes:
Soit $a(\varepsilon)$ une fonction de ε strictement positive tendant vers zéro lorsque ε tend vers zéro et telle que $a(\varepsilon)\varepsilon^{-1}$ tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro; on vérifie grâce à F1 et F2 que:
$\exists N > o, \exists \varepsilon_o > o$ tels que $\forall o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ et $\forall t \in V\text{-}V$ tel que $||t|| \geq a(\varepsilon)$,
$\forall i \in \{1,d\}, \forall k \in \{1,2\}$

si $o < \alpha \leq 1$, $\left|\dfrac{\partial \Gamma_{\varepsilon}^{(k)}}{\partial t_i}(t)\right| \leq N\ [a(\varepsilon)]^{\alpha-1}$, $\left|\dfrac{\partial R_{\varepsilon}^{(k)}}{\partial t_i}(t)\right| \leq N\ [a(\varepsilon)]^{\alpha-1}$,

$\left|\dfrac{\partial^2 R_{\varepsilon}^{(k)}}{\partial t_i \partial t_j}(t)\right| \leq N\ [a(\varepsilon)]^{\alpha-2}$

si $1 < \alpha < 2$, $\left|\dfrac{\partial \Gamma_{\varepsilon}^{(k)}}{\partial t_i}(t)\right| \leq N$, $\left|\dfrac{\partial R_{\varepsilon}^{(k)}}{\partial t_i}(t)\right| \leq N$,

$\left|\dfrac{\partial^2 R_{\varepsilon}^{(k)}}{\partial t_i \partial t_j}(t)\right| \leq N[a(\varepsilon)]^{\alpha-2}$

Nous pouvons grâce à ces inégalités améliorer légèrement les résultats du lemme 7 en choisissant $l(\varepsilon)$ et $n(\varepsilon)$ sous la forme:
si $o < \alpha \leq 1$, $l^{(k)}(\varepsilon) = N\ [2h(\varepsilon)]^{\alpha-1}$, $n^{(k)}(\varepsilon) = N\ [2h(\varepsilon)]^{\alpha-2}$
si $1 < \alpha < 2$, $l^{(k)}(\varepsilon) = N$, $n^{(k)}(\varepsilon) = N\ [2h(\varepsilon)]^{\alpha-2}$
<u>Montrons que</u>: $\forall k \in \{1,2\}$

$A_{\varepsilon}^{(k)} = H_{d-1,f(\varepsilon)}(B(o,2h(\varepsilon)) \cap (V\text{-}V))\ \ [g^{(k)}(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{-1/2}$ est minimum en tant que fonction de f, pour f = 4h.

Tout d'abord remarquons que V-V est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant $\{o\}$; ceci plus le fait que $h(\varepsilon)$ tende vers zéro lorsque ε tend vers zéro (voir annexe de la partie 4) impliquent que pour ε suffisamment petit:
$B(o,2h(\varepsilon)) \cap (V\text{-}V) = B(o,2h(\varepsilon))$ et donc:

$A_{\varepsilon}^{(k)} = H_{d-1,f(\varepsilon)}(B(o,2h(\varepsilon))\ \ [g^{(k)}(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{-1/2}$

Considérons $\Pi^{(k)}(r) = H_{d-1,r}(B(o,R))\ \ [g^{(k)}(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{-1/2}$, pour r et R petits, et montrons que $\Pi^{(k)}(r)$ est minimum pour r=2R.

Remarquons que pour r=2R, on a : $H_{d-1,r}(B(o,r/2)) = r^{d-1} = (2R)^{d-1}$

En effet, dans l'annexe de la partie 4, on montre que : $H_{d-1,r}(B(o,r/2)) \geq r^{d-1}$

D'autre part, il est évident que $H_{d-1,r}(B(o,r/2)) \leq r^{d-1}$; d'où l'égalité précédente.

De plus:

(a) $\Pi^{(k)}(r) \geq (2R)^{d-1}[g^{(k)}(c_o f^{-1}(\varepsilon))]^{-1/2} > (2R)^{d-1}[g^{(k)}(c_o(2R)^{-1})]^{-1/2}$ pour $2R<r$

(b) $\Pi^{(k)}(r) \geq (2R)^d\, r^{-1}[g^{(k)}(c_o r^{-1})]^{-1/2} > (2R)^{d-1}[g^{(k)}(c_o(2R)^{-1})]^{-1/2}$ pour $r<2R$

La première inégalité de a) et b) provient des résultats contenus dans l'annexe de la partie 4.

La deuxième inégalité de a) provient du fait que si r est petit $g^{(k)}(c_o r^{-1})$ est une fonction strictement croissante de r (en effet:

1) $||x||^{d+\alpha}\ f_\alpha^{(k)}(x) \approx a_\alpha^{(k)}$ lorsque $||x|| \longrightarrow +\infty$)

La deuxième inégalité de b) provient de la remarque suivante:

$r^{-1}[g^{(k)}(c_o r^{-1})]^{-1/2}$ est une fonction strictement décroissante de r (en effet, d'après 1): $g(x) - \frac{1}{2}xg'(x) \approx b_\alpha^{(k)} x^{2-\alpha}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$, avec:

$$b_\alpha^{(k)} = c_d^{-1} d^{-1}[\,2(2-\alpha)]^{-1}\alpha\ a_\alpha^{(k)}$$

D'où:

$\frac{\partial}{\partial r}(r^{-1}[g^{(k)}(c_o r^{-1})]^{-1/2}) < o$ pour r petit, ce qui implique que $\Pi^{(k)}(r)$ est minimum pour r=2R. Dans ce qui suit, nous prendrons f=4h; avec cette valeur de f, il vient:

$$H_{d-1,4h(\varepsilon)}(B(o,2h(\varepsilon)) \cap (V-V))\ [g^{(k)}(c_o(4h(\varepsilon))^{-1})]^{-1/2} \approx c_\alpha^{(k)}\ h(\varepsilon)^{d-\alpha/2}$$

lorsque $\varepsilon \longrightarrow o$; avec: $c_\alpha^{(k)} = 4^{d-1}\ \bar{w}_\alpha^{1/2}\ [4\ c_o^{-1}]^{1-\alpha/2}$ où:

$$w_\alpha = c_d\ [d(2-\alpha)]^{-1}\ a_\alpha^{(k)}$$

<u>Traitons le cas $1 < \alpha < 2$</u>

Nous avons vu que $\beta < \alpha$ implique:

$$\int_{\mathbb{R}^d} ||x||^\beta\ F_\alpha^{(k)}(dx) < +\infty$$

Ici, puisque $1< \alpha < 2$, nous pouvons prendre δ maximum, c'est à dire : $\delta = 1$

D'après le lemme 4(i) et compte-tenu que $S^\perp = \mathbb{R}^d$,

$C_B \xrightarrow[B \to +\infty]{} +\infty$; de plus $l^{(k)}(\varepsilon) = N$ et $c^{(k)}(\varepsilon) \approx e_\alpha^{(k)}\ \varepsilon^{1-\alpha/2}\ I_d$.

D'où H2 est vérifié dès $h(\varepsilon) \geq \varepsilon^{1-\alpha/2}$

Puisque $\alpha > 1$, cette condition implique que $h(\varepsilon) \geq \varepsilon^{1/2}$ et compte-tenu que $n^{(k)}(\varepsilon) = N\ [2h(\varepsilon)]^{\alpha-2}$, H3 est vérifiée; on a alors:

$$E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2 \leq$$

$$\text{cste}\ [\ \varepsilon\ h^{\gamma-2}(\varepsilon) + \varepsilon^{1-\alpha/2} + \varepsilon^{2-\alpha}\ h^{\gamma-2}(\varepsilon) + \varepsilon^{2-\alpha}\ h^{\alpha-2}(\varepsilon) + h^{d-\alpha/2}(\varepsilon)\ ]$$

Ceci pour tout $o < \gamma < d-1$, $\gamma \leq 2$ et toute fonction $h(\varepsilon)$ telle que $h(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} o$, $h(\varepsilon) \geq \varepsilon^{1-\alpha/2}$ et si ε est suffisamment petit.

Nous dirons par la suite que : $x_\varepsilon >> y_\varepsilon \iff \lim_{\varepsilon \to o} y_\varepsilon x_\varepsilon^{-1} = o$

Puisque $\alpha > 1$, $\varepsilon^{2-\alpha} h^{\gamma-2}(\varepsilon) >> \varepsilon h^{\gamma-2}(\varepsilon)$ et la condition $h(\varepsilon) \geq \varepsilon^{1-\alpha/2}$ implique : $\varepsilon^{1-\alpha/2} >> \varepsilon^{2-\alpha} h^{\alpha-2}(\varepsilon)$, et donc:

$E(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V))^2 \leq \text{cste}\,[\varepsilon^{1-\alpha/2} + \varepsilon^{2-\alpha} h^{\gamma-2}(\varepsilon) + h^{d-\alpha/2}(\varepsilon)]$

Choisissons maintenant : $\alpha/2 < \gamma < \inf(d-1,2)$ et $h(\varepsilon) = \varepsilon^\beta$, avec:
$(1-\alpha/2)(d-\alpha/2)^{-1} < \beta < (1-\alpha/2)\inf(1,(2-\gamma)^{-1})$
Avec ce choix de γ et de β, on obtient :

$E(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V))^2 \leq \text{cste}\ \varepsilon^{1-\alpha/2}$, pour $1 < \alpha < 2$

Etudions maintenant le cas $o < \alpha \leq 1$

Pour cela nous améliorons légèrement les hypothèses et l'énoncé du théorème faits dans le cas général.
Enonçons le résultat préléminaire auquel nous allons aboutir:
Soit une fonction $h(\varepsilon) > o$, vérifiant: $h(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} o$ et $\varepsilon\, h(\varepsilon)^{-1} \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} o$, alors:

$E(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V))^2 \leq \text{cste}\,[\varepsilon^\alpha + H_1(\varepsilon) + H_2(\varepsilon) + h^{d-\alpha/2}(\varepsilon)]$

où: $H_1(\varepsilon) = h^{\alpha-1}(\varepsilon)\,\varepsilon^{1-\alpha/2}$ et $H_2(\varepsilon) = h^{\alpha-2}(\varepsilon)\,\varepsilon^{2-\alpha}$
Nous n'allons pas faire la démonstration de cette affirmation. Nous nous contenterons d'en esquisser les grandes lignes.
Nous montrons que sous la condition:
$h(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} o$ et $\varepsilon\, h(\varepsilon)^{-1} \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} o$, on a:

1) $\forall\, t \in \mathbb{R}^d$, $\forall\ \varepsilon > o$, $|R^{(k)}(t) - R_\varepsilon^{(k)}(t)| \leq \text{cste}\ \varepsilon^\alpha$ et
$|R^{(k)}(t) - \Gamma_\varepsilon^{(k)}(t)| \leq \text{cste}\ \varepsilon^\alpha$

2) $\forall\, t \in V-V$, $R^{(k)}(o) - R^{(k)}(t) \geq \text{cste}\ \|t\|^\alpha$

3) $\exists\, \varepsilon_o > o$, $\exists\, B'$ tel que pour tout $t \in V-V$ tel que $\|t\| > 2h(\varepsilon)$ et $\forall\, o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$, on ait:

(i) $$R_\varepsilon^{(k)}(o) - R_\varepsilon^{(k)}(t) \geq B'\,\|t\|^\alpha$$

(ii) $$R^{(k)}(o)\ R_\varepsilon^{(k)}(o) - [\,\Gamma_\varepsilon^{(k)}(t)\,]^2 \geq B'\,\|t\|^\alpha$$

En appliquant alors le même principe que dans la démonstration générale du théorème, on obtient alors:

$E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2 \leq$ cste $[\ \varepsilon^\alpha + \varepsilon^{1-\alpha/2}\, h^{\alpha-1}(\varepsilon) + \varepsilon^{2-\alpha} h^{\alpha-2}(\varepsilon) + h^{d-\alpha/2}(\varepsilon)\ ]$

avec $h(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ et $\varepsilon\, h(\varepsilon)^{-1} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

On a deux cas qui se présentent:

<u>Premier cas</u> : $h(\varepsilon) \geq \varepsilon^{1-\alpha/2}$

Dans ce cas : $E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2 \leq$ cste $[\ \varepsilon^\alpha + \varepsilon^{1-\alpha/2}\, h^{\alpha-1}(\varepsilon) + h^{d-\alpha/2}(\varepsilon)\ ]$

le minimum du crochet droit est atteint pour $h(\varepsilon) = c_\alpha \varepsilon^{(1-\alpha/2)(d+1-3/2\alpha)^{-1}}$,

et la condition $h(\varepsilon) \geq \varepsilon^{1-\alpha/2}$ entraîne que $h(\varepsilon) >> \varepsilon$, et donc:

$E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2 \leq$ cste $[\ \varepsilon^\alpha + \varepsilon^{(1-\alpha/2)(d-\alpha/2)(d+1-3/2\alpha)^{-1}}]$

<u>Deuxième cas</u> : $\varepsilon << h(\varepsilon) \leq \varepsilon^{1-\alpha/2}$

Dans ce cas : $E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2 \leq$ cste $[\ \varepsilon^\alpha + \varepsilon^{1-\alpha/2}\, h^{\alpha-2}(\varepsilon) + h^{d-\alpha/2}(\varepsilon)\ ]$

le minimum du crochet droit est atteint pour $h(\varepsilon) = d_\alpha \varepsilon^{1-\alpha/2}$, d'où:

$E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2 \leq$ cste $[\ \varepsilon^\alpha + \varepsilon^{\alpha/2(2-\alpha)} + \varepsilon^{(2-\alpha)/2(d-\alpha/2)}\ ]$

ou encore:

$E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2 \leq$ cste $[\ \varepsilon^\alpha + \varepsilon^{\alpha/2(2-\alpha)}\ ]$, ceci parce-que:

$(1-\alpha/2)(d-\alpha/2) > (1-\alpha/2)\alpha$

On compare alors les deux majorations de la vitesse de convergence de $\zeta_\varepsilon(V)$ vers $L(u,V)$ proposées et on remarque que:

$\varepsilon^{(1-\alpha/2)(d-\alpha/2)(d+1-3/2\alpha)^{-1}} \leq \varepsilon^{\alpha/2(2-\alpha)} \Leftrightarrow (1-\alpha)(d-3\alpha/2) \geq 0$, ce qui est le cas. On obtient finalement:

$E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2 \leq$ cste $[\ \varepsilon^\alpha + \varepsilon^{(1-\alpha/2)(d-\alpha/2)(d+1-3/2\alpha)^{-1}}]$

Il nous reste donc à comparer la position de α par rapport à celle de $(1-\alpha/2)(d-\alpha/2)(d+1-3/2\alpha)^{-1}$; on est alors ramenés à résoudre une équation du second degré et on obtient finalement:

$E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2 \leq$ cste ε^α si $0 < \alpha \leq \alpha_1$

$E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2 \leq$ cste $\varepsilon^{(1-\alpha/2)(d-\alpha/2)(d+1-3/2\alpha)^{-1}}$ si $\alpha_1 \leq \alpha \leq 1$

avec $\alpha_1 = 1/7\,[3(d+1)-(9(d+1)^2 - 28d)^{1/2}]$

ceci achève la partie concernant l'exemple 1.

5.2 Exemple d'un processus somme de n variables indépendantes uniindéxées

Soit $X(t_1,t_2,.....t_d) = \sum_{i=1}^{d} X_i(t_i)$ où $X_1,X_2,.....,X_d$ sont gaussiens centrés stationnaires, indépendants, X_i de covariance R_i de classe C^2 en dehors de o, $\dot{R}_i$ borné à l'infini, ainsi que $\ddot{R}_i$, $|\dot{R}_i(t)| <$ cste $|t|^{\alpha_i-1}$,

$|\ddot{R}_i(t)| <$ cste $|t|^{\alpha_i-2}$, pour t dans un voisinage de zéro (. désigne la dérivée première et .. la dérivée seconde); R_i est supposée également posséder une densité spectrale f_{α_i} paire telle que:

$f_{\alpha_i}(x) = f_i(x) \approx c_{\alpha_i} |t|^{-\alpha_i-1}$, lorsque $x \longrightarrow +\infty$ et $o < \alpha_i < 2$, f_i bornée, $c_{\alpha_i} > o$.

(on remarque que les hypothèses sur $\dot{R}_i$, $\ddot{R}_i$ et f_i sont liées; elles sont dûes aux théorèmes de Tauber (cf [24])).

Soit $X_\varepsilon = \Psi_\varepsilon * X$ où Ψ est de la forme: $\Psi(t_1,t_2,.....t_d) = \prod_{i=1}^{d} \Psi_i(t_i)$ où Ψ_i est telle que:

$\Psi_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, C^1, $\int_{\mathbb{R}} \Psi_i(u)\, du = 1$, $\int_{\mathbb{R}} \Psi_i(u)\, |u|^{\alpha_i} du < +\infty$

et il existe $\delta_i > 1$, $\beta_i \geq 1$, $C_i > o$, $D_i > o$ tels que:

$\forall\ u \in \mathbb{R}^*$, $\Psi_i(u) \leq C_i \left(\frac{1}{|u|}\right)^{1+\delta_i}$, $|\dot{\Psi}_i(u)| \leq D_i \left(\frac{1}{|u|}\right)^{1+\beta_i}$,

si $\alpha_i = 1$, on impose en plus: $\int_{\mathbb{R}} \Psi_i(u)\, |u|^2 du < +\infty$ et Ψ_i paire.

Enonçons le résultat auquel nous allons aboutir:

Posons $\alpha_* = \inf_{i=1}^{d} \alpha_i$ et $\alpha^* = \sup_{i=1}^{d} \alpha_i$,

$H_1^{(\gamma)}(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\alpha^*/2}\, h^{-\alpha^*/2(3/2-\gamma)}(\varepsilon)$ si $\alpha_* \geq 1$ et

$H_1^{(\gamma)}(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\alpha^*/2}\, h^{-\alpha^*/2(3/2-\gamma)}(\varepsilon)\, h^{\alpha_*-1}(\varepsilon)$ si $\alpha_* \leq 1$

$H_2(\varepsilon) = \varepsilon^{2-\alpha^*} h^{\alpha_*-2}(\varepsilon)$, $H_3^{(\gamma)}(\varepsilon) = \sup\left([H_1^{(\gamma)}(\varepsilon)]^2, H_2(\varepsilon) \right)$

γ étant un réel tel que : $\gamma \leq 3/2$, $1/2 < \gamma < \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^{-1}$

Sous les hypothèses et notations précédentes on a:
A est la réunion des plans de coordonnées, S = {o} et par conséquent s=o.

$$c(\varepsilon) \approx (C_{\Psi_i} \varepsilon^{1-\alpha_i/2} \delta_{i,j})_{i,j} \text{ avec : } C_{\Psi_i} = [\, 2\, c_{\alpha_i} \int_o^{+\infty} y^{1-\alpha_i} \, |\hat{\Psi}_i|^2(y)\, dy \,]^{-1/2}$$

et en posant : $V_\varepsilon = E\,(\zeta_\varepsilon(V) - L(u,V)\,)^2$,

$V_\varepsilon \leq$ cste $\Big[(\,\varepsilon + \varepsilon^{\alpha_*}\,)\, h^{-\alpha^*(3/2-\gamma)}(\varepsilon) + H_1^{(\gamma)}(\varepsilon)\, h^{\alpha^*/2(3/2-\gamma)}(\varepsilon) + H_3^{(\gamma)}(\varepsilon) + h(\varepsilon)^{1-\alpha^*/2}\Big]$, ceci pour tout γ tel que: $\gamma \leq 3/2$, $\gamma < \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^{-1}$ et sous les contraintes suivantes:

si $1 < \alpha_* < 2$ $\quad \varepsilon^{2-\alpha^*} h^{-\alpha^*}(\varepsilon) \leq 1$

si $o < \alpha_* \leq 1$ $\quad \varepsilon^{2-\alpha^*} h^{2\alpha_*-2}(\varepsilon)\, h^{-\alpha^*}(\varepsilon) \leq 1$, $\varepsilon^{\alpha_*} h^{-\alpha^*}(\varepsilon) \leq 1$ et

$$\varepsilon^{2-\alpha^*} h^{\alpha_*-2}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to o]{} o$$

Nous allons esquisser les grandes lignes de la démonstration.
On se place sous les contraintes énoncées précédemment.
Compte-tenu que X_i est indépendant de X_j pour $i \neq j$,
$R(t_1,t_2,\ldots..t_d) = \sum_{i=1}^{d} R_i(t_i)$; il est alors évident que A est la réunion des plans de coordonnées.

On vérifie que la mesure spectrale F du processus X est égale à $\sum_{i=1}^{d} F_i$, où F_i est la mesure spectrale de X_i concentrée sur l'axe de coordonnées $\{x_j,\ j \neq i\}$ de $\mathbb{R}^d$. Il s'ensuit que S = {o} et donc que s = o.

$X_\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(u)\; X_i(t_i - \varepsilon u_i)\, du = \sum_{i=1}^{d} X_{\varepsilon,\Psi_i}(t_i)$, (puisque $\int_{\mathbb{R}} \Psi_i(u)\, du = 1$),

et donc: $R_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{d} R^{(k)}_{\varepsilon;\Psi_k}(t_k) = \sum_{k=1}^{d} R_\varepsilon^{(k)}(t_k)$

$$\forall\, i \neq j \quad \frac{-\partial^2 R_\varepsilon}{\partial t_i \partial t_j}(o) = o, \text{ et } \forall\, i \in \{1,d\}, \quad \frac{-\partial^2 R_\varepsilon}{\partial t_i^2}(o) = -\ddot{R}_\varepsilon^{(i)}(o)$$

$B(\varepsilon)$ se diagonalise "naturellement" et $B(\varepsilon) = (-\ddot{R}_\varepsilon^{(i)}(o)\ \delta_{i,j})_{i,j}$; par des calculs analogues à ceux de l'exemple 1, on montre que:

$$-\ddot{R}_\varepsilon^{(i)}(o) \approx B_{\Psi_i}\, \varepsilon^{\alpha_i - 2} \text{ avec: } B_{\Psi_i} = 2\, c_{\alpha_i} \int_o^{+\infty} y^{1-\alpha_i}\; |\hat{\Psi}_i|^2(y)\, dy$$

Donnons une majoration de la vitesse de convergence V_ε. Pour cela nous améliorons légèrement les hypothèses et l'énoncé du théorème faits dans le cas général.
Nous avons l' inégalité suivante:
$\exists\ \varepsilon_o > o$ tq $\forall\ t \in \mathbb{R}^d$ et $\forall\ \varepsilon \leq \varepsilon_o$,

$|R(t) - R_\varepsilon(t)| \leq$ cste $(\varepsilon + \varepsilon^{\alpha_*})$ et $|R(t) - \Gamma_\varepsilon(t)| \leq$ cste $(\varepsilon + \varepsilon^{\alpha_*})$

Nous prendrons donc $\delta = \inf(1, \alpha_*)$

Nous avons également la suite d'inégalités suivantes:
$\exists\ N > o, \exists\ \varepsilon_o > o$ tels que $\forall\ o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$ et $\forall\ t \in V\text{-}V$ tel que $||t|| > 2h(\varepsilon)$ et $\forall\ i \in \{1,d\}$:

si $o < \alpha_i \leq 1$, $|\dfrac{\partial \Gamma_\varepsilon}{\partial t_i}(t)| \leq N\ [h(\varepsilon)]^{\alpha_i - 1}$, $|\dfrac{\partial R_\varepsilon}{\partial t_i}(t)| \leq N\ [h(\varepsilon)]^{\alpha_i - 1}$,

si $1 < \alpha_i \leq 2$, $|\dfrac{\partial \Gamma_\varepsilon}{\partial t_i}(t)| \leq N$, $|\dfrac{\partial R_\varepsilon}{\partial t_i}(t)| \leq N$

si $i \neq j$, $|\dfrac{\partial^2 R_\varepsilon}{\partial t_i \partial t_j}(t)| = o$ et $|\dfrac{\partial^2 R_\varepsilon}{\partial t_i^2}(t)| \leq N\ [h(\varepsilon)]^{\alpha_i - 2}$

Nous pouvons grâce à ces inégalités améliorer légèrement les résultats du lemme 7 en choisissant $l(\varepsilon)$ et $n(\varepsilon)$ sous la forme:

si $o < \alpha_* \leq 1$, $l(\varepsilon) = N\ [2h(\varepsilon)]^{\alpha_* - 1}$, $n(\varepsilon) = N\ [2h(\varepsilon)]^{\alpha_* - 2}$

si $1 < \alpha_* < 2$, $l(\varepsilon) = N$, $n(\varepsilon) = N\ [2h(\varepsilon)]^{\alpha_* - 2}$

Les inégalités suivantes vont servir dans la partie "près" de A; nous prendrons dans tout ce qui suit $f(\varepsilon) = 4h(\varepsilon)$
$\exists\ \varepsilon_o > o$ tel que pour tout $t \in V\text{-}V$ tel que $d(t,A) \leq 2h(\varepsilon)$ et $\forall\ o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$, on ait:

(i) $$R_\varepsilon(o) - R_\varepsilon(t) \geq \text{cste}\, h^{\alpha^* - 2}(\varepsilon)\ ||t||^2$$

(ii) $$R(o) - R(t) \geq \text{cste}\, h^{\alpha^* - 2}(\varepsilon)\ ||t||^2$$

Ecrivons maintenant les inégalités qui serviront dans la partie "loin" de A.

(i) $\forall\ t \in V\text{-}V$, $R(o) - R(t) \geq$ cste $\sum_{i=1}^{d} |t_i|^{\alpha_i}$

(ii) $\exists\ \varepsilon_o > o$ tel que pour tout $t \in V\text{-}V$ tel que $d(t,A) > 2h(\varepsilon)$ et $\forall\ o < \varepsilon \leq \varepsilon_o$, on ait:

$$R_\varepsilon(o) - R_\varepsilon(t) \geq \text{cste} \sum_{i=1}^{d} |t_i|^{\alpha_i} \quad \text{et}$$

$$R(o)\, R_\varepsilon(o) - \Gamma_\varepsilon^2(t) \geq \text{cste} \sum_{i=1}^{d} |t_i|^{\alpha_i}$$

Le choix de γ provient du fait suivant:
En appliquant les inégalités précédentes et en appliquant le même principe que dans la démonstration générale du théorème, nous sommes amenés à nous intéresser à la finitude de l'intégrale A suivante:

$$A = \int_{[o;1]^d} \left[\sum_{i=1}^{d} |t_i|^{\alpha_i} \right]^{-3/2}$$

Cette intégrale n'est pas toujours finie; sa finitude dépend du choix de d et des α_i. Soit donc l'intégrale B, définie par:

$$B = \int_{[o;1]^d} \left[\sum_{i=1}^{d} |t_i|^{\alpha_i} \right]^{-\gamma}$$

Une condition suffisante pour que B soit finie est que: $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i^{-1} - \gamma > o$

Il est alors évident que si: $\alpha_* \leq 1$, on peut prendre $\gamma = 3/2$; si $\alpha_* > 1$, on prendra γ tel que: $\gamma \leq 3/2$, $\gamma < \sum_{i=1}^{d} \alpha_i^{-1}$

le résultat annoncé antérieurement découle de la même méthode que celle employée dans le cas général.
En procédant de façon analogue à ce qui a été fait dans le chapitre 5.1, on obtient les résultats suivants:

<u>Si $o < \alpha_* \leq 1$ et $\alpha_* \leq \alpha^*$</u>

I) $\alpha_* + \alpha^*/2 - 1 \geq o$

a) $\alpha^* \leq 2\alpha_*$

$1 + \alpha_* - 3/2\, \alpha^* \geq o$ $\qquad V_\varepsilon \leq$ cste $\varepsilon^{(1-\alpha^*/2)(2-\alpha^*)(3-\alpha_*-\alpha^*/2)^{-1}}$

$1 + \alpha_* - 3/2\, \alpha^* \leq o$ $\qquad V_\varepsilon \leq$ cste $\varepsilon^{(1-\alpha^*/2)(2-\alpha^*)(2-2\alpha_*+\alpha^*)^{-1}}$

b) $2\alpha_* \leq \alpha^*$ $\qquad V_\varepsilon \leq$ cste $\varepsilon^{(1-\alpha^*/2)(2-\alpha^*)(2-2\alpha_*+\alpha^*)^{-1}}$

II) $\alpha_* + \alpha^*/2 - 1 \leq o$

a) $\alpha_* \geq \alpha^*(1-\alpha^*/2)$ $\qquad V_\varepsilon \leq$ cste $[\, \varepsilon^{\alpha_*} + \varepsilon^{(1-\alpha^*/2)^2(2-\alpha_*-\alpha^*/2)^{-1}}$

b) $\alpha_* \leq \alpha^*(1-\alpha^*/2)$

(i) $\alpha^* \leq 1$ et $o < \alpha_* \leq \alpha^*/2$

$o < \alpha^* \leq 2/3$ $\qquad V_\varepsilon \leq$ cste ε^{α_*}

$2/3 \le \alpha^* \le 1$ $\qquad V_\varepsilon \le \text{cste} \;\; \varepsilon^{(1-\alpha^*/2)\,\alpha_*\,\alpha^{*-1}}$

(ii) $\alpha^* \le 1$ et $\alpha^*/2 \le \alpha_* \le \alpha^*(1-\alpha^*/2)$

$$V_\varepsilon \le \text{cste} \; [\, \varepsilon^{\alpha_*} + \varepsilon^{(1-\alpha^*/2)^2(2-\alpha_*-\alpha^*/2)^{-1}}$$

(iii) $\alpha^* \ge 1$ $\qquad V_\varepsilon \le \text{cste} \;\; \varepsilon^{(1-\alpha^*/2)\,\alpha_*\,\alpha^{*-1}}$

<u>Si $\alpha_* = \alpha^* = \alpha$ avec $o < \alpha \le 1$</u>

$o < \alpha \le a$ $\qquad V_\varepsilon \le \text{cste} \;\; \varepsilon^{\alpha}$

$a \le \alpha \le 2/3$ $\qquad V_\varepsilon \le \text{cste} \; \varepsilon^{(1-\alpha/2)^2(2-3/2\alpha)^{-1}}$

$2/3 \le \alpha \le 1$ $\qquad V_\varepsilon \le \text{cste} \; \varepsilon^{(1-\alpha/2)(2-\alpha)(3-3/2\alpha)^{-1}}$

avec $a = (6 - 2\, 2^{1/2})/7$

<u>Si $\alpha_* > 1$</u>

$3 - \alpha_* - 3/2\alpha^* \ge o$ $\qquad V_\varepsilon \le \text{cste} \; \varepsilon^{(1-\alpha^*/2)(2-\alpha^*)(3-\alpha_*-\alpha^*/2)^{-1}}$

$3 - \alpha_* - 3/2\alpha^* \le o$ $\qquad V_\varepsilon \le \text{cste} \;\; \varepsilon^{(1-\alpha^*/2)(2-\alpha^*)\,\alpha^{*-1}}$

Donnons un exemple illustrant le cas $\alpha_* = \alpha^* = \alpha \le 1$

Soit $R_i(t) = 1 - \beta_i^{\,1} \displaystyle\int_o^t h_i(x)\, dx$, $t \ge o$ où: $h_i : [o,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$,

$h_i(x) = \exp(-x^{a_i})$ et $o < a_i < 1$, $\beta_i = \displaystyle\int_o^{+\infty} h_i(x)\, dx$

On montre alors que l'on peut prendre $\alpha_i = 1$ et donc: $V_\varepsilon \le \text{cste}\ \varepsilon^{1/3}$

<u>Remarque</u>: On peut restreindre les conditions sur Ψ_i à: $\Psi_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, C^1,

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Psi_i(u)\, du = 1$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Psi_i(u)\, |u|\, du < +\infty$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\dot{\Psi}_i(u)|\, du < +\infty$ et il existe

$\delta_i > o$ tel que: $\forall\, u \in \mathbb{R}^*$, $\Psi_i(u) \le C_i\left(\frac{1}{|u|}\right)^{1+\delta_i}$

6. Annexes

6.1 Annexe de la partie 3

6.1.1 Démonstrations des propositions 3,4,5

Dans cette partie, nous allons montrer les propositions auxquelles nous avons fait référence lors des démonstrations et que nous n'avons pas démontrées.

Proposition 3 : Soit (Y,Z,X_1,X_2) un vecteur gaussien centré à valeurs dans $\mathbb{R}^{2d+2}$ où Y et Z sont à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et X_1,X_2 dans $\mathbb{R}$, avec:
$E(X_1^2) = E(X_2^2) = \sigma^2$, $E(X_1X_2) = \gamma$ et tel que $\sigma^4-\gamma^2 \neq 0$ alors:
$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$E(\|Y\|\ \|Z\| / X_1 = x, X_2 = y) \leq E^{1/2}(\|Y\|^2)\ E^{1/2}(\|Z\|^2)[1 + \sigma^2(\sigma^4-\gamma^2)^{-2}(|x\sigma^2 - y\gamma| + |y\sigma^2 - x\gamma|)^2]$
Si x = y = u, alors:
$E(\|Y\|\ \|Z\| / X_1 = X_2 = u) \leq E^{1/2}(\|Y\|^2)\ E^{1/2}(\|Z\|^2)\ [1 + 4\sigma^2(\sigma^2+\gamma)^{-2}u^2]$

Preuve : D'après l'inégalité de Schwarz:
$E(\|Y\|\|Z\| / X_1= x, X_2= y) \leq E^{1/2}(\|Y\|^2 / X_1= x, X_2= y)E^{1/2}(\|Z\|^2 / X_1= x,X_2= y)$
En posant $Y = (Y_1,Y_2,.....,Y_d)$, on a:
$$E(\|Y\|^2 / X_1 = x, X_2 = y) = \sum_{j=1}^{d} E(Y_j^2 / X_1 = x, X_2 = y)$$
Or $E(Y_j^2 / X_1 = x, X_2 = y) = \mathrm{Var}(Y_j / X_1, X_2) + E^2(Y_j / X_1 = x, X_2 = y)$, et $\mathrm{Var}(Y_j / X_1,X_2) \leq E(Y_j^2)$, $E(Y_j /X_1 = x, X_2 = y) = (\sigma^4-\gamma^2)^{-1}[E(Y_jX_1)(x\sigma^2 - y\gamma) + E(Y_jX_2)(y\sigma^2 - x\gamma)]$
Compte-tenu que: $E^2(Y_iX_1) \leq E(Y_i^2)E(X_j^2)$, on en déduit les deux inégalités annoncées.

Proposition 4 : Soit $\{Z(t,\omega), t \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega\}$ un processus à valeurs réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et bi-mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{R}^d \otimes \mathcal{A}$; soit O un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, alors $Q_o(A_u(Z))$ est une variable aléatoire.

Preuve : Tout d'abord il suffit de remarquer que:

$Q_o(A_u(Z)) = \sup \left\{ \int_O \operatorname{div} g(t)\ dt\ ,\ g \in \mathcal{G} \right\}$, où $\mathcal{G}$ est un ensemble dénombrable de fonctions de $(C_K^\infty(V))^d$ de norme $\| \|_\infty$ bornée par 1, indépendantes de ω, qui est dense pour la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de ses dérivées.
Il suffit alors pour conclure de voir que:

pour chaque g appartenant à $(C_K^\infty(V))^d$,

$$(\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{R})$$

$$\omega \longrightarrow \int_O \chi_{\{\ |Z(t,\omega)| < u\ \}} \operatorname{div} g(t)\ dt \text{ est } \mathcal{A}\text{-mesurable.}$$

En effet, la fonction $\chi_{\{\ |Z(t,\omega)| < u\ \}} \operatorname{div} g(t)$ est (t, ω)-mesurable et même intégrable sur $O \times \Omega$, respectivement à la mesure $dt \otimes P$; d'après le théorème de Fubini:

$\omega \longrightarrow \int_O \chi_{\{\ |Z(t,\omega)| < u\ \}} \operatorname{div} g(t)\ dt$ est $\mathcal{A}$-mesurable, ce qui achève la démonstration de la proposition 4.

Proposition 5 : Soit $\{ Z(t,\omega),\ t \in \mathbb{R}^d,\ \omega \in \Omega \}$ un processus gaussien stationnaire et centré, à valeurs réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à trajectoires continues et bi-mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{R}^d \otimes \mathcal{A}$; soit F_Z sa mesure spectrale supposée non concentrée sur un espace vectoriel de dimension strictement inférieure à d et telle que:

$\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2\ dF_Z(x) < +\infty$; soit alors F un borélien borné de $\mathbb{R}^d$ dont la mesure de Lebesgue de la frontière est nulle: soit $\mu_d(F) = o$, alors $Q_F(A_u(Z))$ est une variable aléatoire et $Q_F(A_u(Z)) = o$ Ps.

Preuve : puisque $\mu_d(F) = o$, il existe $(O_n)_n$ suite décroissante d'ouverts (bornée par O ouvert borné de $\mathbb{R}^d$) telle que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ F \subset O_n$ et $\lim_{n \to +\infty} \mu_d(O_n) = o$.

Soit $W = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$; $\lim_{n\to+\infty} Q_{O_n}(A_u(Z)) = Q_W(A_u(Z))$ (ceci d'après la proposition 4 et parce-que d'après la formule de Rice à l'ordre un[25], $Q_{/O}(A_u(Z))$ est une mesure finie comme fonction de O), d'où $Q_W(A_u(Z))$ est $\mathcal{A}$-mesurable.
D'autre part: $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $Q_{O_n}(A_u(Z)) \leq Q_O(A_u(Z))$ Ps et $Q_O(A_u(Z)) \in L^1(dP)$.
On applique alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue, et donc:
$\lim_{n\to+\infty} E(Q_{O_n}(A_u(Z))) = E(Q_W(A_u(Z)))$.
Or d'après la formule de Rice à l'ordre un: $E(Q_{O_n}(A_u(Z))) \leq C\ \mu_d(O_n)$ qui converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini, d'où: $E(Q_W(A_u(Z))) = o$; or $Q_W(A_u(Z)) \geq o$ Ps, ce qui entraîne: $Q_W(A_u(Z)) = o$ Ps.
Il suffit pour conclure d'utiliser le fait que P est complète et que:
$o \leq Q_F(A_u(Z)) \leq Q_W(A_u(Z))$ Ps (la dernière inégalité provenant du fait que $F \subset W$). Ceci achève la démonstration de la proposition.

6.1.2 Démonstration de la propositions 6 et énoncé de la proposition 7

Montrons l'égalité $\zeta^*_\varepsilon(V) = \zeta_\varepsilon(V)$
Nous avons énoncé suite au théorème, une remarque où nous prétendons pouvoir écrire l'intégrale apparaissant dans le théorème comme une intégrale relativement à la mesure σ_{d-1}.
Pour cela nous allons montrer une proposition plus générale et tout d'abord définir le vecteur n.
Soient V un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et B un borélien borné de $\mathbb{R}^d$ tels que:
$Q_V(B) < +\infty$
Grâce au théorème de représentation de Riesz, il existe d mesures de Radon définies sur V, soient $\mu_B^1, \mu_B^2, \ldots, \mu_B^d$ telles que si $\mu_B = (\mu_B^1, \mu_B^2, \ldots, \mu_B^d)$

on ait:

$$\forall\ \Phi \in (C_K^\infty(V))^d\ ,\quad \int_B \operatorname{div}\Phi(\lambda)\, d\lambda = \sum_{i=1}^d \int_V \Phi_i\, d\mu_B^i = \int_V \langle \Phi , d\mu_B \rangle$$

D'après les théorèmes de Radon-Nikodym et Vitali, il existe un champ vectoriel n, $n : V \longrightarrow \mathbb{R}^d$ Borel-mesurable tel que: $d\mu_B = n\ d\,|\mu_B|$ sur V, $\|n\| = 1$ $|\mu_B|$ presque-partout, où $|\mu_B|$ désigne la variation totale de μ_B et est définie par:

$\forall$ C borélien de V, $|\mu_B|(C) = \sup \sum_{j=1}^{+\infty} \| \mu_B(C_j) \|$ où $(C_j)_{j=1}^{\infty}$ forme une partition de boréliens de C. De plus $|\mu_B|((\partial^* B)^c \cap V) = o$; $\partial^* B$ désigne la *frontière essentielle* de B [25] et est définie par:
$\partial^* B = \cap \{ \partial(B \Delta N), \mu_d(N) = o \}$, Δ notant la différence symétrique.
On a alors une formule généralisant celle de Green qui est la suivante:

$$\forall \Phi \in (C_K^{\infty}(V))^d , \quad \int_B \operatorname{div} \Phi(\lambda)\, d\lambda = \int_{\partial^* B \cap V} < \Phi , n > d\,|\mu_B|$$

([19] à [21])
Avec ces notations, on est alors en mesure d'énoncer la proposition 6:

<u>Proposition 6</u> : $\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^s, \mathcal{R}^s) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^+, \mathcal{R}^+) \\ y & \longrightarrow & Q_{V_y}(B_y) \end{array}$ est $\mathcal{R}^s$-mesurable et:

$$\int_{\partial^* B \cap V} \| P_2 n(t) \| \, Q_{dt}(B) = \int_{\partial^* B \cap V} \| P_2 n(t) \| \, d\,|\mu_B|(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^s} Q_{V_y}(B_y) \, dy$$

<u>Commentaire</u> : Cette formule a l'avantage de ne demander aucune régularité sur le bord de B. Lorsque B est une d-variété différentiable et orientable de bord ∂B, et $\forall\, y \in \mathbb{R}^s$ B_y est une (d-s)-variété différentiable et orientable, on peut remplacer $Q_{dt}(B)$ dans le deuxième membre de l'égalité par $d\sigma_{d-1}(t)$, où σ_{d-1} est l'aire (d-1)-dimensionnelle sur ∂B et n coïncide avec la normale unitaire à ∂B orientée vers l'extérieur de B.
Dans ce cas-là, la proposition peut d'ailleurs se démontrer par des méthodes locales en utilisant le théorème des fonctions implicites.
La démonstration de la proposition requiert une autre proposition qui se prouve aussi par des méthodes standart d'approximation; nous nous contenterons donc de l'énoncer.

Proposition 7 :

1) Soit f: $(\mathbb{R}^d,\mathcal{R}^d) \longrightarrow (\mathbb{R}^d,\mathcal{R}^d)$ une fonction vectorielle $\mathcal{R}^d$-mesurable bornée et soit σ une mesure finie définie sur $(V,\mathcal{R}_V)$ ($\mathcal{R}_V$ désigne la tribu borélienne de V) alors:

$$\sup_{v\in\mathcal{P}_V} \int_V < v(t), f(t) > d\sigma(t) = \int_V \|f(t)\| \, d\sigma(t)$$

2) Soit φ: $(\mathbb{R}^s,\mathcal{R}^s) \longrightarrow (\mathbb{R}^+,\mathcal{R}^+)$ telle que:

$\int_* \varphi(y) \, dy = \int^* \varphi(y) \, dy$, alors φ est $\mathcal{R}^s$-mesurable.

Nous avons posé:

$$\int^* \varphi(y) \, dy = \inf \{ \int_{\mathbb{R}^s} g(y) \, dy \ , \varphi \leq g \ , g \ \mathcal{R}^s\text{-mesurable} \} \text{ et}$$

$$\int_* \varphi(y) \, dy = \sup \{ \int_{\mathbb{R}^s} h(y) \, dy \ , o \leq h \leq \varphi \ , h \ \mathcal{R}^s\text{-mesurable} \}$$

3) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions non-négatives, f_n : $\mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^+$, alors:

$$\int^* \liminf_n f_n(y) \, dy \leq \liminf_n \int^* f_n(y) \, dy$$

Démonstration de la proposition 6 :

Pour la première égalité : Elle est immédiate à partir des définitions de $Q_\bullet(B)$ et $|\mu_B|(.)$ et du 1) de la proposition 7.

Pour la deuxième égalité : On pose $\sigma = |\mu_B|$.
D'après le 1) de la proposition 7:

$$(1) = \int_V \|P_2 n(t)\| \, d\sigma(t) = \sup_{v\in\mathcal{P}_V} \int_V < v(t), P_2 n(t) > d\sigma(t)$$

$(1) = \sup_{v\in\mathcal{P}_V} \int_V < P_2 v(t), n(t) > d\sigma(t)$ et d'après la formule de Green généralisée, on a:

$(1) = \sup_{v\in\mathcal{P}_V} \int_B \operatorname{div} P_2 v(t) \, dt$. On applique alors le théorème de Fubini, il vient:

$$(1) = \sup_{v\in\mathcal{P}_V} \int_{\mathbb{R}^s} \left[\int_{B_y} \operatorname{div} P_2 v(y,z)\, dz \right] dy. \text{ Or:}$$

$\int_{B_y} \operatorname{div} P_2 v(y,z)\, dz \leq Q_{V_y}(B_y)$, $\forall y \in \mathbb{R}^s$, parce-que $P_2 v(y,.) \in \mathcal{P}_{V_y}$; et donc:

$$\int_V \|P_2 n(t)\|\, d\sigma(t) \leq \int_* Q_{V_y}(B_y)\, dy \qquad \text{(inégalité (i))}$$

Posons alors $g_\varepsilon(y,z) = \Psi_\varepsilon * \chi_B(y,z)$, où Ψ_ε est une C^1-approximation de l'unité dans $\mathbb{R}^d$. On suppose de plus que supp $\Psi_\varepsilon \subset B(o,\varepsilon)$.

Mais $g_\varepsilon \xrightarrow{L^1} \chi_B$ (L^1 signifie ici $L^1(\mathbb{R}^d)$); donc il existe une sous-suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $g_{\varepsilon_n} \xrightarrow[n]{} \chi_B$ μ_d-pp et donc :

$g_{\varepsilon_n,y}(.) = g_{\varepsilon_n}(y,.) \xrightarrow[n]{} \chi_{B_y}$ pour μ_s-presque tout y de $\mathbb{R}^s$.

On utilise alors la partie a) de la proposition 2 de [25], il vient:

$\forall\, \delta > o$, $Q_{(V_{-\delta})_y}(B_y) \leq \liminf_n \int_{(V_{-\delta})_y} \|\nabla_z g_{\varepsilon_n,y}(z)\|\, dz$, ceci pour μ_s-presque tout y de $\mathbb{R}^s$. D'où en appliquant successivement les théorèmes de Fatou et de Fubini, on obtient:

$$\forall\, \delta > o, \quad \int^* Q_{(V_{-\delta})_y}(B_y)\, dy \leq \liminf_n \int_{V_{-\delta}} \|\nabla_z g_{\varepsilon_n,y}(z)\|\, dz\, dy$$

(inégalité (ii)).

Soit $o < \varepsilon < \delta$, d'après le 1) de la proposition 7, on a:

$$\int_{V_{-\delta}} \|\nabla_z g_\varepsilon(y,z)\|\, dz\, dy = \sup_{v\in\mathcal{P}_{V_{-\delta}}} \int_{\mathbb{R}^d} < v(y,z), \nabla_z g_\varepsilon(y,z) > dy\, dz$$

On applique alors le résultat de la proposition 2b de [25], il vient:

$\int_{\mathbb{R}^d} < v(y,z), \nabla_z g_\varepsilon(y,z) > dy\, dz = \int_B \operatorname{div}_z w(s)\, ds$, où w est définie par:

$w(s) = - \int_{\mathbb{R}^d} \Psi_\varepsilon(t-s)\, v(t)\, dt$, $w \in \mathcal{P}_V$; ceci entraîne:

$$\forall\, \delta > o,\ \liminf_{n} \int_{V_{-\delta}} \|\nabla_z g_{\varepsilon_n}(y,z)\|\ dz\, dy \ \le$$

$$\sup_{v \in \mathcal{P}_V} \int_B \operatorname{div} P_2 v(t)\ dt = \int_V \|P_2 n(t)\|\ d\sigma(t)$$

D'après l'inégalité (ii), on obtient finalement:

$$\forall\, \delta > o, \quad \int^{*} Q_{(V_{-\delta})_y}(B_y)\ dy \ \le \int_V \|P_2 n(t)\|\ d\sigma(t)$$

Or $(V_{-\delta})_y \uparrow V_y$ lorsque $\delta \downarrow o$, ceci $\forall\, y \in \mathbb{R}^s$. On applique alors la partie (ii) de la proposition 1 de [25], et donc:
$\forall\, y \in \mathbb{R}^s$, $Q_{(V_{-\delta})_y}(B_y) \uparrow Q_{V_y}(B_y)$ lorsque $\delta \downarrow o$, d'où en appliquant le 3 de la proposition 7 , il vient:

$$\int^{*} Q_{V_y}(B_y)\ dy \ \le \int_V \|P_2 n(t)\|\ d\sigma(t)$$

et d'après l'inégalité (i) et le 2) de la proposition 7, on a:

$$\int_{\partial^* B \cap V} \| P_2\, n(t)\, \|\ d\, |\mu_B|(t) \ = \ \int_{\mathbb{R}^s} Q_{V_y}(B_y)\ dy\ ,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 6.
<u>En particulier</u> : On peut appliquer la proposition 6 à: $B = A_\varepsilon(u,.) \cap V_\varepsilon$ et $V = V_\varepsilon$. Si X_ε est de classe C^2 ps, $A_\varepsilon(u,.)$ est une d-variété orientable, $\partial^* B \cap V_\varepsilon = C_\varepsilon(u,.) \cap V_\varepsilon$ et $\sigma_{d-1}(A_\varepsilon(u,.) \cap C) = Q_C(A_\varepsilon(u,.))$, $\forall$ C ouvert de $\mathbb{R}^d$, d'où:

$$\int_{\mathbb{R}^s} Q_{(V_\varepsilon)_y}(A_\varepsilon(u,y)\,)\ dy = \int \chi_{V_\varepsilon \cap C_\varepsilon(u,.)}\ \|\ P_2\, n_\varepsilon(t)\ \|\ Q_{dt} A_\varepsilon(u,.)$$

$$=$$

$$\int \chi_{V_\varepsilon \cap C_\varepsilon(u,.)}\ \|\ P_2 n_\varepsilon(t)\ \|\ d\sigma_{d-1}(t) = \int \chi_{V_\varepsilon \cap C_\varepsilon(u,.)}\ |\cos\theta_\varepsilon(t)|\ \ d\sigma_{d-1}(t)$$

Et donc $\zeta^{*}_\varepsilon(V) = \zeta_\varepsilon(V)$.

6.1.3 Démonstration de la proposition 8

Proposition 8 : Soit $\{ Z(t,\omega), t \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega \}$ un processus à valeurs réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et bi-mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{R}^d \otimes \mathcal{A}$; soit V un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ alors si $o \le s < d$,

$$\begin{array}{lll} (\mathbb{R}^s \times \Omega, \mathcal{R}^s \otimes \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{R}^+) & & \text{est } \mathcal{R}^s \otimes \mathcal{A}\text{-mesurable.} \\ (y, \omega) \longrightarrow Q_{V_y}(A_u(Z(y,.)) & & \end{array}$$

Preuve :
Comme dans la démonstration de la proposition 4, nous allons prouver que: $Q_{V_y}(A_u(Z(y,.)) = S_y$, où:

$$S_y = \sup \{ \int_{\mathbb{R}^{d-s}} \operatorname{div} v(t) \ \chi_{B_y} dt \times \chi_{\operatorname{supp} V \subset V_y}, \ v \in \mathcal{V} \}.$$

avec $B = A_u(Z)$ et $\mathcal{V}$ est définie de la manière suivante:

Soit T un ouvert borné de $\mathbb{R}^{d-s}$, tel que: $\forall y \in \mathbb{R}^s$, $V_y \subset T$.

Soit alors $\{B_i\}$ une base dénombrable de la topologie de T.

$\mathcal{V} = \Big\{ f_{K,L} \cdot w, K = \cup \{ \overline{B}_i, i \in I, \operatorname{card} I < +\infty\}, K = \cup \{ \overline{B}_j, j \in J, \operatorname{card} J < +\infty\}$, $K \subset \overset{o}{L} \subset L, w \in \mathcal{P} \Big\}$ et $\mathcal{P} = \Big\{ P : \mathbb{R}^{d-s} \longrightarrow \mathbb{R}^{d-s}$, P polynômes trigonométriques à coefficients rationnels, $\|P\|_\infty \le 1 \Big\}$, où $f_{K,L}$ est définie de la manière suivante:

$f_{K,L} \in C_K^\infty(\overset{o}{L})$ (si O est ouvert $\mathbb{R}^{d-s}$, $C_K^\infty(O)$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^{d-s}$ dans $[o,1]$, C^∞, à support compact inclus dans O), $f_{K,L}$ à valeurs dans $[o,1]$, $f_{K,L}(x) = 1$ si $x \in K$.

Tout d'abord il est clair que si $v \in \mathcal{V}$ et $\operatorname{supp} v \subset V_y$, $v \in (C_K^\infty(V_y))^{d-s}$, $\|v(t)\| \le 1$, $\forall t \in \mathbb{R}^{d-s}$; si $v \in \mathcal{V}$ et $\operatorname{supp} v \not\subset V_y$, on a:

$$\int_{\mathbb{R}^{d-s}} \operatorname{div} v(t) \ \chi_{B_y} dt \times \chi_{\operatorname{supp} V \subset V_y} = o$$

Compte-tenu que $Q_{V_y}(A_u(Z(y,.)) \ge o$, $S_y \le Q_{V_y}(A_u(Z(y,.))$

Réciproquement : Soit $v \in (C_K^\infty(V_y))^{d-s}$, $\operatorname{supp} v = C_y \subset V_y$

Il existe K_y et L_y de la forme: $K_y = \bigcup_{i=1}^{n_y} \overline{B}_i$ et $L_y = \bigcup_{k=1}^{m_y} \overline{B}_k$ tels que:

$\operatorname{supp} v = C_y \subset \overset{o}{K}_y \subset K_y \subset \overset{o}{L}_y \subset L_y \subset V_y$

Soit alors f_{K_y,L_y} la fonction correspondante.

D'autre part, il existe une suite $(f_n)_n \in \mathcal{G}$ telle que: $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} v$, sur $\overline{T}$.

(la convergence,ici, est uniforme ainsi que celle des dérivées)

On considère maintenant la fonction: $f_{K_y,L_y} \cdot f_n$; elle appartient à $\mathcal{V}$ et

$\mathrm{supp}(f_{K_y,L_y} \cdot f_n) \subset V_y$

De plus:

$$\int_{\mathbb{R}^{d-s}} \mathrm{div}(f_{K_y,L_y} \cdot f_n(t)) \chi_{B_y}(t)\, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{\mathbb{R}^{d-s}} \mathrm{div} v(t) \chi_{B_y}(t)\, dt$$

Ceci signifie donc que: $Q_{V_y}(A_u(Z(y,.)) = S_y$

<u>Montrons maintenant que S_y est mesurable en tant que fonction de y et ω</u>

Il suffit de montrer que : $\forall\, v \in \mathcal{V}$

a) $(\mathbb{R}^s \times \Omega, \mathcal{R}^s \otimes \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{R}^+)$

$$(y, \omega) \longrightarrow \int_T \chi_{\{ |Z(t,y,\omega)| < u \}} \mathrm{div}\, v(t)\, dt$$

est $\mathcal{R}^s \otimes \mathcal{A}$-mesurable et

b) $O = \{ y \in \mathbb{R}^s / \mathrm{supp}\, v \subset V_y \}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^s$.

<u>Pour a)</u> : La démonstration se fait de la même façon que celle de la proposition 4.

<u>Pour b)</u> : Posons $K = \mathrm{supp}\, v$ et soit $z \in \mathbb{R}^s$ tel que: $z = \lim_{n \to +\infty} z_n$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in O^c$.

<u>Montrons que nécessairement $z \in O^c$</u>

$z_n \in O^c \Leftrightarrow K \not\subset V_{z_n} \Leftrightarrow \exists\, x_n \in K$ et $x_n \in (V_{z_n})^c \Leftrightarrow \exists\, x_n \in K$ tel que $(x_n, z_n) \in V^c$

Mais K est compact, il existe donc une sous-suite $(n_k)_k$ et $x^* \in K$ tels que:

$$\lim_{n \to +\infty} x_{n_k} = x^* \text{ et donc: } \lim_{n \to +\infty} (x_{n_k}, y_{n_k}) = (x^*, z)$$

Or $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \in V^c$ fermé de $\mathbb{R}^d$ d'où: $(x^*, z) \in V^c$ et donc $z \in O^c$, ce qui prouve que O est ouvert dans $\mathbb{R}^s$, et achève la démonstration de la proposition 8.

<u>Remarque</u> : Suite à cette proposition, nous sommes en mesure de justifier pourquoi nous avons pu choisir V "suffisamment petit".

En effet, avec la même construction que nous avons utilisée dans la démonstration de la proposition 2 (formule de Rice), nous avons:

$V = \bigcup_j (C_i \cap V) = \bigcup_j V_i$ où $V_i = C_i \cap V$; il suffit ensuite de travailler sur $\overset{\circ}{V}_i$ et d'après les propositions 5 et 8 et puisque le temps local est additif comme fonction de V, le résultat découle.

6.2 Annexe de la partie 4

Justifions le fait que l'on ait pris: $\lim_{\varepsilon \to o} h(\varepsilon) = o$ et $\lim_{\varepsilon \to o} f(\varepsilon) = o$

$H_{d-1,f(\varepsilon)} (A_{2h(\varepsilon)} \cap (V-V)) \geq H_{d-1,f(\varepsilon)} (B(o,2h(\varepsilon)) \cap (V-V))$, ceci parce-que $\{o\} \in A$.

Interessons-nous d'abord à $H_{d-1,r} (B(o,R))$ où $R \geq o$, $r \geq o$.

$H_{d-1,r}(B(o,R)) = \inf\left\{ \sum_{i \in I} (\mathrm{diam} B_i)^{d-1}, \bigcup_{i \in I} B_i \supset B(o,R), \text{card } I < +\infty, \mathrm{diam} B_i \leq r \right\}$

Soit donc $\bigcup_{i \in I} B_i$, card $I < +\infty$ tel que $\bigcup_{i \in I} B_i \supset B(o,R)$, $\mathrm{diam} B_i \leq r$

$$\sum_{i \in I} (\mathrm{diam} B_i)^{d-1} = \sum_{i \in I} (\alpha_d (\mathrm{Vol} B_i)^{d^{-1}})^{d-1} = (\alpha_d)^{d-1} \left(\sum_{i \in I} (\mathrm{Vol} B_i)^{(d-1)d^{-1}} \right)$$

où α_d est une constante qui dépend seulement de d.

Mais on a l'inégalité suivante:

si $\forall\, i \in \mathbb{N}^*$, $a_i \geq o$, $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i < +\infty$ et $o < \alpha < 1$ alors: $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^{\alpha} \geq (\sum_{i=1}^{+\infty} a_i)^{\alpha}$, d'où:

$$\sum_{i \in I} (\mathrm{diam} B_i)^{d-1} \geq \alpha_d^{d-1} \left(\sum_{i \in I} \mathrm{Vol} B_i \right)^{(d-1)d^{-1}} \geq \alpha_d^{d-1} (\mathrm{Vol} B(o,R))^{(d-1)d^{-1}} =$$
$$\alpha_d^{d-1} (\mathrm{diam} B(o,R)\, \alpha_d^{-1})^{d-1} = (2R)^{d-1}$$

D'autre part : $\sum_{i \in I} (\mathrm{diam} B_i)^{d-1} \geq r^{-1} \sum_{i \in I} (\mathrm{diam} B_i)^d \geq r^{-1} \sum_{i \in I} \alpha_d^d \mathrm{Vol} B_i$
$\geq r^{-1} \alpha_d^d \mathrm{Vol} B(o,R) = r^{-1} \alpha_d^d (2R\alpha_d^{-1})^d = r^{-1} (2R)^d$

D'où le résultat: $H_{d-1,r}(B(o,R)) \geq (2R)^{d-1}$ et $H_{d-1,r}(B(o,R)) \geq r^{-1} (2R)^d$

Mais V est ouvert, d'où V-V est ouvert dans $\mathbb{R}^d$ et de plus il contient le point $\{o\}$; il existe donc $R > o$ tel que: $V-V \supset B(o,R)$, et donc:
$B(o,2h(\varepsilon)) \cap V-V \supset B(o, \inf(2h(\varepsilon), R))$

Soit donc $\varepsilon > o$ tel que $R < 2h(\varepsilon)$. Pour cet ε, on a alors:

$H_{d-1,f(\varepsilon)} (A_{2h(\varepsilon)} \cap (V-V)) \geq H_{d-1,f(\varepsilon)} (B(o,R)) \geq (2R)^d (f(\varepsilon))^{-1}$

Mais $\forall\, z > o$, $g(z) \leq R(o)\, z^2$, d'où : $[g(c_o f^{-1}(\varepsilon)]^{-1/2} \geq c_1 f(\varepsilon)$, $c_1 > o$

De plus G est une fonction décroissante, d'où:

$G([g(c_o f^{-1}(\varepsilon)]^{+1/2}) \geq G(c_2 f^{-1}(\varepsilon))$, $c_2 > o$; mais $\forall\, x > o$,

$G(x) \geq x^{-1} \mathrm{Log}(x + (x^2 + 1)^{1/2})$, et donc:

$G([g(c_o f^{-1}(\varepsilon)]^{+1/2}) \geq c_3 f(\varepsilon) \mathrm{Log}(c_2 f^{-1}(\varepsilon) + ((c_2 f^{-1}(\varepsilon))^2 + 1)^{1/2})$, $c_3 > o$

Finalement:

$H_{d-1,\, f(\varepsilon)}(A_{2h(\varepsilon)} \cap (V-V))(\times_{s=d-1} G(g^{1/2}(c_o f^{-1}(\varepsilon))) + \times_{s\neq d-1} g^{-1/2}(c_o f^{-1}(\varepsilon))) \geq$
$(2R)^d \inf\{ c_1 , c_3 \,\mathrm{Log}(c_2 f^{-1}(\varepsilon) + ((c_2 f^{-1}(\varepsilon))^2 + 1)^{1/2})\}$

Mais lorsque $r > o$, on a vu dans la démonstration du lemme 6(iv), que l'on devait au moins prendre $f(\varepsilon)$ borné pour ε assez petit; soit $f(\varepsilon) \leq M_1$, et donc:

$H_{d-1,\, f(\varepsilon)}(A_{2h(\varepsilon)} \cap (V-V))(\times_{s=d-1} G(g^{1/2}(c_o f^{-1}(\varepsilon))) + \times_{s\neq d-1} g^{-1/2}(c_o f^{-1}(\varepsilon))) \geq$
$(2R)^d \inf\{ c_1 , c_3 \,\mathrm{Log}(c_2 M_1^{-1} + ((c_2 M_1^{-1})^2 + 1)^{1/2}\}$

On voit donc que l'on doit imposer: $\mathrm{card}\{ \varepsilon / 2h(\varepsilon) > R \} < +\infty$, et donc:
$\exists\, \varepsilon_o$, tel que $\forall\, \varepsilon \leq \varepsilon_o$, $h(\varepsilon) \leq R$, ce que nous supposerons dans ce qui suit, d'où:

$H_{d-1,\, f(\varepsilon)}(A_{2h(\varepsilon)} \cap (V-V)) \geq H_{d-1, f(\varepsilon)}(B(o,2h(\varepsilon)))$

Mais d'après ce qui précède :

$H_{d-1,\, f(\varepsilon)}(A_{2h(\varepsilon)} \cap (V-V))(\times_{s=d-1} G(g^{1/2}(c_o f^{-1}(\varepsilon))) + \times_{s\neq d-1} g^{-1/2}(c_o f^{-1}(\varepsilon))) \geq$
$(2h(\varepsilon))^d c_4$, et donc on doit imposer: $\lim\limits_{\varepsilon \to o} h(\varepsilon) = o$

D'autre part :

$H_{d-1,\, f(\varepsilon)}(A_{2h(\varepsilon)} \cap (V-V))(\times_{s=d-1} G(g^{1/2}(c_o f^{-1}(\varepsilon))) + \times_{s\neq d-1} g^{-1/2}(c_o f^{-1}(\varepsilon))) \geq$
$(2h(\varepsilon))^{d-1} \inf\{c_1 f(\varepsilon) , G(c_2 f^{-1}(\varepsilon))\}$

Il est alors clair que pour minimiser le crochet droit apparaissant dans le théorème et compte-tenu que: $G(x) \longrightarrow o \Leftrightarrow x \longrightarrow +\infty$, on doit prendre

$\lim\limits_{\varepsilon \to o} f(\varepsilon) = o.$

6.3 Annexe de la partie 5

Le résultat que nous allons prouver est classique pour $d = 1$(cf par exemple [13]). Nous ne l'avons pas trouvé dans la littérature pour $d > 1$.

Proposition 9 : Soit $f_\alpha^{(k)}$ la densité spectrale de R_k, $k=1,2$, alors :
$\|x\|^{d+\alpha} \; f_\alpha^{(k)}(x) \approx a_\alpha^{(k)}$ lorsque $\|x\| \longrightarrow +\infty$, $a_\alpha^{(k)} > o$

Preuve : $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$, $f_\alpha^{(1)}(x) = 2\, c_d^{-1}\, g_\alpha(\|x\|)\, \|x\|^{1-d}$ et $\forall\, y \in \mathbb{R}$,

$\hat{g}_\alpha(y) = \exp(-|y|^\alpha)$, $o < \alpha < 2$. Or $x^{1+\alpha} g_\alpha(x) \approx b_\alpha$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$,

$b_\alpha = [\int_{\mathbb{R}} (1-\cos y)\, |y|^{-1-\alpha}\, dy\ ]^{-1} > 0$, est le résultat classique pour $d = 1$ cité au début de ce paragraphe; et donc:

$$a_\alpha^{(1)} = 2\ c_d^{-1} [\int_{\mathbb{R}} (1-\cos y)\, |y|^{-1-\alpha}\, dy\ ]^{-1} > 0.$$

Afin d'alléger les notations, nous noterons f_α la densité $f_\alpha^{(2)}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$f_\alpha(x) = (\frac{1}{2\pi})^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<x,y>}\ e^{-||y||^\alpha}\ dy\ ,\quad 0 < \alpha < 2$$

D'après [26], pages 2-3:

$$f_\alpha(x) = (\frac{1}{2\pi})^d\, 2^{(d-2)/2}\, \Gamma(d/2) \int_0^{+\infty} J_{(d-2)/2}(\rho||x||)\ (\rho||x||)^{-(d-2)/2}\ c_d\ e^{-\rho^\alpha}\ \rho^{d-1}\ d\rho$$

où Γ désigne la d'Euler et J_ν la fonction de Bessel d'indice ν, $\nu \in \mathbb{R}$.

Posons alors : $\forall z > 0$,

$$h_\alpha(z) = \int_0^{+\infty} J_{(d-2)/2}(\rho z)\ (\rho z)^{-(d-2)/2}\ e^{-\rho^\alpha}\ \rho^{d-1}\ d\rho$$

On a donc: $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f_\alpha(x) = (\frac{1}{2\pi})^d\, 2^{(d-2)/2}\, \Gamma(d/2)\ c_d\ h_\alpha(||x||)$

Pour montrer que: $||x||^{d+\alpha} f_\alpha(x) \approx a_\alpha$, lorsque $||x||$ tend vers l'infini, nous allons montrer que : $\lim_{z \to +\infty} z^{d+\alpha}\ h_\alpha(z) = w_\alpha$

En faisant le changement de variables $\rho z = \omega$ dans l'intégrale ci-dessus, on obtient:

$$h_\alpha(z) = -\ z^{-d} \int_0^{+\infty} -J_{d/2-1}(\omega)\ \omega^{-(d/2-2)}\ \omega^{d-2}\ e^{-(\omega z^{-1})^\alpha}\ d\omega$$

Or d'après [12] page 11 et [15] page 16 : $\frac{\partial}{\partial z}(J_\nu(z)\ z^{-\nu}) = -J_{\nu+1}(z)\ z^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$.

En intégrant par parties et compte-tenu que: $|J_\nu(z)| \le C_\nu\ z^{-1/2}$, pour $z \to +\infty$, (cf [12] page 85 et [15] page 57) et que $d \ge 2$, il vient:

$$h_\alpha(z) = (d-2)\ z^{-d} \int_0^{+\infty} J_{d/2-2}(u)\ u^{-(d/2-2)}\ u^{d-3}\ e^{-(uz^{-1})^\alpha}\ du\ -$$

$$\alpha\, z^{-d-\alpha} \int_0^{+\infty} J_{d/2-2}(u)\ u^{-(d/2-2)}\ u^{d-3+\alpha}\ e^{-(uz^{-1})^\alpha}\ du \quad (*)$$

Premier cas : d pair ($d \geq 2$)
On procède par récurrence et compte-tenu du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on voit qu'il suffit de montrer:

$$(^{**})\ \forall \nu \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{R}, \int_1^{+\infty} J_\nu(u)\, u^{-\nu}\, u^m\, e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du \xrightarrow[z \to +\infty]{} C_{\nu,m,\alpha}$$

Montrons (**) :
$\forall \nu \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}$, posons:

$$I_{\nu,m,\alpha}(z) = \int_1^{+\infty} J_\nu(u)\, u^{-\nu}\, u^m\, e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du$$

En intégrant par parties, on obtient alors:

$$I_{\nu,m,\alpha}(z) = J_{\nu-1}(1)\ e^{-z^{-\alpha}} + (m-1) \int_1^{+\infty} J_{\nu-1}(u)\, u^{-\nu+1}\, u^{m-2}\, e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du$$

$$- \alpha z^{-\alpha} \int_1^{+\infty} J_{\nu-1}(u)\, u^{-\nu+1}\, u^{m+\alpha-2}\, e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du$$

Or $J_{\nu-1}(1)\ e^{-z^{-\alpha}} \xrightarrow[z \to +\infty]{} J_{\nu-1}(1)$

On voit donc que $I_{\nu,m,\alpha}(z)$ donne naissance à deux sortes de termes:

$$\int_1^{+\infty} J_{\nu-1}(u)\, u^{-\nu+1}\, u^{m-2}\, e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du \qquad \text{(type 1)} \qquad \text{et}$$

$$z^{-\alpha} \int_1^{+\infty} J_{\nu-1}(u)\, u^{-\nu+1}\, u^{m+\alpha-2}\, e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du \qquad \text{(type 2)}$$

On réitère alors le procédé, c'est à dire: la première intégrale $I_{\nu,m,\alpha}(z)$ a donné naissance au plus à deux intégrales(état1); chacune des deux intégrales donne alors naissance au plus à deux intégrales (état 2), et ainsi de suite jusqu'à l'état M.

A l'état M, on alors au plus 2^M intégrales et $I_{\nu,m,\alpha}(z)$ est une combinaison linéaire de termes. Nous notons $J_{M_1,M_2}(\nu,m,\alpha,z)$ l'un d'entre eux caractérisé par le couple (M_1,M_2) où: $M_1+M_2 = M$. Plus exactement soit:

$$J_{M_1,M_2}(\nu,m,\alpha,z) = z^{-\alpha M_2} \int_1^{+\infty} J_{\nu-M}(u)\, u^{-\nu+M}\, u^{m-2M_1+(\alpha-2)M_2}\, e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du, \text{ où}$$

$M = M_1+M_2$, $M_1 \geq o$, $M_2 \geq o$, l'une des deux extrémités de l'arbre ainsi construit.

On choisit alors: $m-M-\nu+½ < o$, ce qui est toujours possible si M est grand.

<u>Premier cas</u> : $M_2 = o$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue et compte-tenu que: $\forall\, \xi \in \mathbb{R}$, $|J_\xi(z)| \leq C_\xi\, z^{-1/2}$, pour $z \to +\infty$, on a:

$$\lim_{z\to+\infty} J_{M_1,o}(\nu,m,\alpha,z) = \int_1^{+\infty} J_{\nu-M}(u)\; u^{m-M-\nu}\, du \; < +\infty,$$ ceci parce-que $m-M-\nu+1/2 < o$

<u>Deuxième cas</u> : $M_2 \neq o$

on a : $\lim\limits_{z\to+\infty} J_{M_1,M_2}(\nu,m,\alpha,z) = o$

En effet: en faisant le changement de variables: $uz^{-1} = \omega$, on obtient:

$$J_{M_1,M_2}(\nu,m,\alpha,z) = z^{-M-\nu+m+1} \int_{z^{-1}}^{+\infty} J_{\nu-M}(z\omega)\; \omega^{m+\alpha M_2-M-\nu}\; e^{-\omega^\alpha}\, d\omega$$

On découpe alors la dernière intégrale en deux: $\int_{z^{-1}}^{1}$ et $\int_{1}^{+\infty}$

Or : $$\left|z^{-M-\nu+m+1} \int_1^{+\infty} J_{\nu-M}(z\omega)\; \omega^{m+\alpha M_2-M-\nu}\; e^{-\omega^\alpha}\, d\omega\right| \leq$$

$$z^{-M-\nu+m+1/2} \int_1^{+\infty} u^{m+\alpha M_2-M-\nu-1/2}\; e^{-u^\alpha}\, du \xrightarrow[z \to +\infty]{} o$$

Interessons-nous à $B_{M_1,M_2}(\nu,m,\alpha,z)$,

$$B_{M_1,M_2}(\nu,m,\alpha,z) = z^{-M-\nu+m+1} \int_{z^{-1}}^{+\infty} J_{\nu-M}(z\omega)\; \omega^{m+\alpha M_2-M-\nu}\; e^{-\omega^\alpha}\, d\omega$$

$$|B_{M_1,M_2}(\nu,m,\alpha,z)| \leq z^{-M-\nu+m+1/2} \int_{z^{-1}}^{+\infty} \omega^{m+\alpha M_2-M-\nu-1/2}\, d\omega$$

Deux cas se présentent alors: $m+\alpha M_2-M-\nu+1/2 \neq o$ et $m+\alpha M_2-M-\nu+1/2 = o$

a) $m+\alpha M_2-M-\nu+1/2 \neq o$

$$|B_{M_1,M_2}(\nu,m,\alpha,z)| \leq [\, m+\alpha M_2-M-\nu+1/2]^{-1}[z^{-M-\nu+m+1/2} - z^{-\alpha M_2}] \xrightarrow[z \to +\infty]{} o$$

b) $m+\alpha M_2-M-\nu+1/2 = o$

$$|B_{M_1,M_2}(\nu,m,\alpha,z)| \leq \operatorname{Log} z\; z^{-\alpha M_2} \xrightarrow[z \to +\infty]{} o$$

On a donc montré que si d est pair: $\lim\limits_{z\to+\infty} z^{d+\alpha}\, h_\alpha(z) = w_\alpha$

Deuxième cas : d impair ($d \geq 3$), $d = 2k+1$, $k \geq 1$
Compte-tenu de (**) et de l'expression de $h_\alpha(z)$ (*), on voit que pour montrer que $z^{d+\alpha}\, h_\alpha(z)$ a une limite quand z tend vers l'infini, il suffit de prouver:

$$K_{k,\alpha}(z) = z^\alpha \int_0^{+\infty} J_{k-3/2}(u)\ u^{k-\frac{1}{2}}\ e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du \xrightarrow[z \to +\infty]{} C_{k,\alpha}$$

on procède par récurrence: k = 1

$$K_{1,\alpha}(z) = z^\alpha \int_0^{+\infty} J_{-\frac{1}{2}}(u)\ u^{\frac{1}{2}}\ e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du$$

D'après [15] page 17: $J_{-\frac{1}{2}}(u) = (\frac{1}{2}\pi u)^{-\frac{1}{2}} \cos u$, d'où:

$$K_{1,\alpha}(z) = (\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}}\, z^\alpha \int_0^{+\infty} \cos u\ e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du$$

En intégrant par parties l'intégrale ci-dessus, on obtient:

$$K_{1,\alpha}(z) = (\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}}\, \alpha \int_0^{+\infty} \sin u\ u^{\alpha-1}\ e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du$$

Mais d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue:

$$\lim_{z\to+\infty} \int_0^1 \sin u\ u^{\alpha-1}\ e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du = \int_0^1 \sin u\ u^{\alpha-1}\, du$$

D'autre part,

$$L_\alpha(z) = (\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_1^{+\infty} \sin u\ u^{\alpha-1} e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du = \int_1^{+\infty} J_{\frac{1}{2}}(u)\ u^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du$$

(ceci d'après [15] , page 17)
On applique alors (**), il vient: $L_\alpha(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} v_{k,\alpha}$, ce qui implique:

$$K_{1,\alpha}(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} C_{1,\alpha}$$

Supposons maintenant que: $K_{k+1,\alpha}(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} C_{k,\alpha}$:

$$K_{k+1,\alpha}(z) = z^\alpha \int_0^{+\infty} J_{k-\frac{1}{2}}(u)\ u^{k+\frac{1}{2}}\ e^{-(uz^{-1})^\alpha}\, du$$

On intègre par parties l'intégrale ci-dessus, il vient:

$$K_{k+1,\alpha}(z) = -(2k-1)z^{\alpha} \int_0^{+\infty} J_{k-3/2}(u)\ u^{k-1/2}\ e^{-(uz^{-1})^{\alpha}}\,du\ +$$

$$\alpha \int_0^{+\infty} J_{k-3/2}(u)\ u^{3/2-k}\ u^{2k+\alpha-2}\ e^{-(uz^{-1})^{\alpha}}\,du$$

On applique l'hypothèse de récurrence et (**), ce qui montre finalement que: $\lim_{z\to+\infty} z^{d+\alpha} h_{\alpha}(z) = w_{\alpha}$ et donc que: $\lim_{||x||\to+\infty} ||x||^{d+\alpha} f_{\alpha}(x) = a_{\alpha}$

<u>Il reste donc à montrer que $a_{\alpha} \geq o$</u>

nous allons voir que, plus précisément: $a_{\alpha} = [\ \int_{\mathbb{R}^d} (1-\cos y_1)\ ||y||^{-d-\alpha}\ dy\ ]^{-1}$, ce qui prouvera donc que: $a_{\alpha} > o$.

En effet: $(\ 1 - \hat{f}_{\alpha}(x)\ )\ ||x||^{-\alpha} = (\ 1-e^{-||x||^{\alpha}}\ )\ ||x||^{-\alpha} \xrightarrow[||x|| \to o]{} 1$

D'autre part, compte-tenu que f_{α} est une densité, on a:

$$(\ 1 - \hat{f}_{\alpha}(x)\ )\ ||x||^{-\alpha} = \int_{\mathbb{R}^d} (1-\cos\langle x,y\rangle)\ ||x||^{-\alpha}\ f_{\alpha}(y)\ dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} (1-\cos(||x||y_1)\ ||x||^{-\alpha}\ f_{\alpha}(y)\ dy$$

En faisant le changement de variables: $||x||y = z$, et en tenant compte que $\lim_{||x||\to+\infty} ||x||^{d+\alpha} f_{\alpha}(x) = a_{\alpha}$, que $||x||^{d+\alpha} f_{\alpha}(x)$ est bornée pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^d$ et que $o < \alpha < 2$, ce qui entraîne:

$\int_{\mathbb{R}^d} (1-\cos y_1)\ ||y||^{-d-\alpha}\ dy < +\infty$, et en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient: $\lim_{||x||\to o} (\ 1 - \hat{f}_{\alpha}(x)\ )\ ||x||^{-\alpha} = 1 = a_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} (1-\cos y_1)\ ||y||^{-d-\alpha}\ dy$. Ceci achève la démonstration de la proposition 9.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] AZAIS, J.M: "Approximation du temps local des mouvements stables". C.R.Acad.Sci.Paris., t306, série I, 787-790 (1988).

[2] AZAIS, J.M; FLORENS, D: "Approximation du temps local des processus gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires". Prob. Th. Rel. Fields., 76,121-132 (1987).

[3] BELYAIEV, Y: "Point processes and first passages problems". Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., 3, 1-17 (1972).

[4] BERMAN, S.M: "Local times and sample functions properties of stationary gaussian processes". Trans. Amer. Math. Soc., 137,277-299 (1969).

[5] BERMAN, S.M: "Gaussian processes with stationary increments: local times and sample functions properties". Ann. Math. Stat., 41,1260-1272 (1970).

[6] BERMAN, S.M: "Local nondeterminism and local time of gaussian processes". Indiana Univ. Math. J., 23, 69-94 (1973).

[7] BERMAN, S.M: "Local nondeterminism and local times of general stochastic processes". Ann. Inst. Henri Poincaré.,19 , n°2, 189-207 (1983).

[8] BERMAN, S.M: "Joint continuity of the local times of Markov processes". Z. Wahrs verw. Gebiete., 69, 37-46 (1985).

[9] BERZIN, C: "Approximation du temps local des champs aléatoires gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires ". C. R. Acad. Sci. Paris., t306, série I, 291-294 (1988).

[10] CUZICK, J: "Continuity of gaussian local times". The Ann. Prob., 10, n°3, 818-823 (1982).

[11] DAVYDOV, YU.A: "Local times for multiparameter random processes". Theory Prob. Appl., 23, n°3, 573-583 (1978).

[12] ERDELYI,MAGNUS,OBERHETTINGER,TRICOMI: "Higher transcendental functions". Bateman manuscript project, Vol 2, Mc Graw-Hill Book Compagny, INC(1953).

[13] FELLER, W: "An introduction to probability theory and it's applications". John Wiley ans Sons , Inc second corrected printed, Vol 2 (1966).

[14] GEMAN, D; HOROWITZ, J: "Occupation densities". The Ann. Prob., 8, n°1, 1-67 (1980).

[15] GRAY,A; MATHEWS,GB; MACROBERT,T.M: "A treatise on Bessel functions and their applications to physics", Macmillan and Co, London, second edition (1952).

[16] KAHANE, J.P; SALEM, R: "Ensembles parfaits et séries trigonométriques". Hermann (1963).

[17] KAHANE, J.P: "Ensembles aléatoires et dimensions". Cours au séminaire de L'Escurial, Prépub. Math. d'Orsay (1983).

[18] KAHANE, J.P: "Mesures et dimensions". Fifth. Int. Congress. on Math Educ., held at Adelaïde (Australia) (1984).
[19] MASSARI, U; MIRANDA, M: "Minimal surfaces of codimension one". North-Holland, Mathematics Studies, Notas de Matemáticas (95), 91 (1984).
[20] MIRANDA, M: "Frontiere minime". Mon. Math., 27, IMPA, Rio De Janeiro (1976).
[21] MIRANDA, M: "Medida geométrica e algumas aplicaçoes". IMPA, Rio De Janeiro (1979).
[22] ROGERS, C.A: "Hausdorff measures". Camb. Univ. Press. (1970).
[23] TRICOT, C: "Mesures et dimensions". Thèse d´état, Univ. Paris-Sud. Centre d´Orsay (1983).
[24] WIDDER, D: "The Laplace transform". Princeton University Press (1941).
[25] WSCHEBOR, M: "Surfaces aléatoires: mesure géométrique des ensembles de niveau ". Lect. Notes Math., n°1147, Springer-Verlag (1985).
[26] YADRENKO, M.I : "Spectral theory of random fiels".Optimization software, INC, Publications divisions, New-York (1983).

BIBLIOGRAPHIE

ADLER, R: "The geometry of random fields". John Wiley and Sons (1980).
CRAMER, H: "Métodos Matemáticos de estadística". Aguilar (1960).
CRAMER, H; LEADBETTER, M.R: "Stationary and related stochastic processes". J. Wiley and Sons (1967).
DOOB, J.L: "Stochastic processes". J. Wiley and Sons (1953).
MARCUS, M.B: "Gaussian processes with stationary increments possessing discontinuous sample paths". Pacific. J. Math., 26, 149-157 (1968).

TABLE DES MATIERES

DEUXIEME PARTIE

APPROXIMATION DU TEMPS LOCAL DES CHAMPS ALEATOIRES GAUSSIENS STATIONNAIRES PAR REGULARISATION DES TRAJECTOIRES

Ce texte est constitué d'un article présenté à la revue Probability and Mathematical Statistics(1987)

APPROXIMATION DU TEMPS LOCAL DES CHAMPS ALEATOIRES GAUSSIENS STATIONNAIRES PAR REGULARISATION DES TRAJECTOIRES

Corinne Berzin
Université Paris XI
UA 743 Statistique Appliquée
Bat. 425, Mathématiques
91405 ORSAY Cédex

Résumé : Soit $\{ X(t) , t \in \mathbb{R}^d \}$ un champ aléatoire gaussien centré et stationnaire . Nous nous intéressons à la mesure d'aire (d-1)-dimensionnelle de l'ensemble des passages à niveau du champ régularisé par convolution . Sous certaines hypothèses et moyennant une normalisation appropriée , cette mesure aléatoire converge dans L^2 vers une limite coincidant avec le temps local du champ X , lorsque celui-ci admet un temps local continu.

Summary : Let $\{X(t) , t \in \mathbb{R}^d\}$ be a stationary gaussian field . We are looking for the (d-1)-dimensional area measure of the intersection with the level zero of the field regularized by convolution .
Under some conditions and with an appropriated normalization ,this measure converges in L^2 towards a limit which is the local time, when X admits a continuous local time .

I Introduction

1) Le cas du Wiener à d - paramètres ($d \geq 1$)

La théorie du temps local d'un processus stochastique X a été élaborée par P. Lévy dans le cas du mouvement Brownien . Depuis de nombreuses approximations ont été proposées ; en 1984, M. Wschebor [6] a proposé une construction du temps local du processus de Wiener à d-paramètres , en utilisant les régularisées de X . Le résultat principal est que si $X_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon * X(t)$ est une régularisation de X obtenue à l' aide d'une C^∞-approximation de l'unité ψ_ε , si T est un ensemble ouvert borné dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de $(\mathbb{R}^+)^d$ et si le temps local est défini de la manière suivante :

Soient A et B des boréliens respectivement de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$, μ_d désignant la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, la mesure d'occupation $\mu(A,B)$ de X est définie par :

$$\mu(A,B) = \mu_d \{ t \in B , X(t) \in A \}$$

et le temps local $L(x,B)$ est caractérisé comme étant une fonction satisfaisant :

$$\mu(A,B) = \int 1_A(x) \quad L(x,B)\, dx$$

L'existence de versions régulières de telles fonctions est étudiée dans [4] et [5] , alors pour une certaine normalisation $d(\varepsilon)$ d'ordre ε on a :

$$\sqrt{d(\varepsilon)} \quad \sigma_{d-1} \left(C(X_\varepsilon) \cap T \right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p} L(0,T) , \ \forall p \in \mathbb{N}^*$$

où σ_{d-1} désigne la mesure d'aire (d-1) dimensionnelle ,

$$C(X_\varepsilon) = \{ t \in \mathbb{R}^d , X_\varepsilon(t) = 0 \} .$$

2) Les cas des processus stables et gaussiens stationnaires (d=1)

J.M. Azais a étendu ce résultat aux processus stables à accroissements indépendants [1] .

D. Florens-Zmirou et J.M. Azais ont ensuite donné une approximation similaire du temps local, pour une certaine classe de processus gaussiens stationnaires indexés par le temps [2] .

Ils ont établi que si $N_{\psi,\varepsilon}]a,b[$ désigne le nombre de passages par zéro de X_ε durant l'intervalle de temps $]a,b[$, $\lambda_{2,\varepsilon}$ le moment spectral d'ordre 2 de X_ε et si X admet un temps local $L(u,]a,b[)$ continu en u au point zéro alors :

$$\sqrt{\pi/2}\ \lambda_{2,\varepsilon}^{-1/2}\ N_{\psi,\varepsilon}]a,b[\ \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2}\ L(0,]a,b[)$$

Le but de cette note est de généraliser ce résultat au cas où le processus X est multiindexé .

Nous généralisons la notion d'aire (d-1)-dimensionnelle à celle de périmètre $Q_T(.)$ utile dans les cas où pour un processus Y et pour chaque réalisation de la surface aléatoire $Y(.)$, l'ensemble $C(Y)$ est très irrégulier topologiquement .

Nous considérons $A(X_\varepsilon) = \{ t \in \mathbb{R}^d ,\ X_\varepsilon(t) < 0 \}$;

lorsque X_ε est à trajectoires continues , presque sûrement X_ε n'a pas de points critiques de valeur zéro et $Q_T(A(X_\varepsilon))$ n' est alors que la mesure d'aire (d-1)-dimensionnelle de $C(X_\varepsilon) \cap T$ [6] ; nous montrons alors sous certaines hypothèses , qu'il existe une normalisation $d(\varepsilon)$ strictement positive , telle que si X admet une version continue du temps local , L , alors :

$$\sqrt{d(\varepsilon)}\ Q_T(A(X_\varepsilon))\ \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2}\ L(0,T)$$

Il est à noter que lorsque $d > 1$, les hypothèses de travail sont beaucoup plus générales que dans le cas $d = 1$; ceci provenant du fait que $u \longrightarrow 1 / \|u\|$ est intégrable au voisinage de $u = 0$.

II Resultats

1) Notations et hypothèses :

Soit $\{ X(t) ,\ t \in \mathbb{R}^d \}$ un champ aléatoire gaussien centré et stationnaire de covariance $r(.)$ continue en zéro , et de mesure spectrale $F(d\lambda)$, supposée non nulle sur les quadrants ouverts de $\mathbb{R}^d$. On suppose $d > 1$.

On note $D_i = \partial / \partial t_i$.

Soit ψ un noyau de convolution de classe C^1 vérifiant :

$\psi(u) \leq 1 / \|u\|^{d+1}$, $|D_i\psi\ (u)| \leq 1 / \|u\|^{d+1}$, $|D_i\psi\ (.)| \in L^1(d\lambda)$, $\forall\ i \in [1,d]$, $\forall\ u \in (R^*)^d$. On note $\hat{\psi}$ la tranformée de Fourier de ψ .On définit ψ_ε par $\psi_\varepsilon\ (u) = \varepsilon^{-d}\ \psi(u/\varepsilon)$, $\forall\ u \in \mathbb{R}^d$, et

X_ε par $X_\varepsilon = \psi_\varepsilon * X$.

Soient $\Lambda_1(\varepsilon) \geq \ldots\ldots \geq \Lambda_d(\varepsilon)$ les valeurs propres de la matrice de covariance de $\dot{X}_\varepsilon(0)$.

Soit T un cube ouvert borné dans $\mathbb{R}^d$ dont les cotés sont parallèles aux axes de coordonnées et de longueur C .

Soit $r_{\varepsilon,\psi}(.) = E(X_\varepsilon(.)X_\varepsilon(0))$ noté encore $r_\varepsilon(.)$.

$\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker .

Si B est un Borélien de $\mathbb{R}^d$, nous appelons " périmètre relatif de B par rapport à T " , $Q_T(B)$, défini par :

$$Q_T(B) = \sup \left\{ \int \operatorname{div} v(t)\ 1_B(t)\ dt\ ;\ v \in C_k^\infty(T)^d\ ,\ \|v\| < 1 \right\}$$

où $C_k^\infty(T)^d$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ de classe C^∞ et à support inclus dans T .

<u>Hypothèse H1</u> : La fonction de covariance r vérifie :

a) Les dérivées partielles premières et secondes de r existent en dehors de l'origine et sont bornées à l'infini . Les dérivées partielles premières de r sont à variation bornée autour de l'origine .

b) On pose $H(i) = \int x_i^2\ \ dF(x)$, $\forall\ i \in [1,d]$

on suppose qu'il existe une direction j pour laquelle H(j) est infini .

<u>Hypothèse H2</u> : On suppose que l'on peut appliquer les formules de type Rice adaptées à notre problème [6] .

Hypothèse H3 : Soit $c(\varepsilon) = (\Lambda_1(\varepsilon))^{-1}$; on suppose que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon)\, \Lambda_i(\varepsilon) = \Lambda_i \quad , \ \forall\, i \in [1,d]$$

Soit $\Lambda = [(\Lambda_{i,j})]_{i,j}$ où $\Lambda_{i,j} = \delta_{i,j}\, \Lambda_i$ et p le rang de Λ . On considère $X = (X_1, X_2, \ldots, X_p)$ où les X_i sont des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes, de variance Λ_i , $1 \leqslant i \leqslant p$, et $\theta = E(\|X\|_p)$.

Nous démontrons alors :

Théorème : Sous les hypothèses H1, H2 et H3 les variables aléatoires :

$$\xi^{\varepsilon} = \sqrt{c(\varepsilon)}\; Q_T(A(X_\varepsilon)) \quad \text{et} \quad \eta^{\delta} = \theta/2\delta \int 1_T(t)\, 1_{\{|X(t)|<\delta\}}(t)\, dt$$

convergent au sens de $L^2(\Omega)$ vers une même limite pour ε et δ tendant vers zéro .

Corollaire : Sous les hypothèses H1, H2 et H3 et si X admet un temps local L(u,T) continu en u au point zéro alors :

$$\sqrt{c(\varepsilon)}\; \theta^{-1}\; Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^2} L(0,T)$$

2) Commentaires

a) Sur H2 : Les formules de type Rice utilisées dans notre travail sont valides par exemple lorsque X (respectivement X_ε) est à trajectoires continues (respectivement de classe C^4 [condition A] et si on a la propriété :

$\exists\, N \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geqslant N$, $\exists\, \varepsilon(C/n)$, $\forall\, \varepsilon < \varepsilon(C/n)$, $\exists\, a < C/2n$, $\forall\, t_1 \in T$, $\forall\, t_2 \in T$, $\forall\, t_3 \in T$ tels que $\|t_1 - t_3\| < a$, $\|t_3 - t_2\| > C/n$, la matrice de covariance de $(X_\varepsilon(t_1), X(t_2), \dot{X}_\varepsilon(t_3))$ est non dégénérée [6] .

Cette dernière condition est vérifiée sous H1 dans les exemples suivants :

α) X est isotrope ($r(t) = g(\|t\|)$) et ψ est invariante par les transpositions et par symétrie par rapport aux axes de coordonnées [Condition B] .

β) ψ et F sont invariantes par rapport aux axes de coordonnées et $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda^{i,i}_{2,\varepsilon} = +\infty$, $\forall\, i \in [1,d]$, ce qui est assuré par exemple sous H3 lorsque p = d .

b) Sur H3 : Deux cas particuliers sont intéressants lorsque r vérifie H1 et H2 :

α) la condition (B) est vérifiée

Dans ce cas : $\lambda_{2,\varepsilon}^{i,j} = \int |\hat{\psi}|^2(\varepsilon x)x_i x_j \, dF(x) = 0$,pour $i \neq j$,

$$\text{et } \lambda_{2,\varepsilon}^{i,i} = c(\varepsilon)^{-1} \quad , \forall\, i \in [1,d] \; .$$

En particulier si $g'(x) = x^{\beta} f(x)$, pour $x \geqslant 0$, où $-1 < \beta$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = a$, $a \neq 0$, $|f(x)| < M$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, alors :

$c(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\beta} K_{\psi}^{-1}$, où K_{ψ} supposée non nulle est définie par :

$K_{\psi} = -a\int \psi(u)\, h_1 \|h\|^{\beta-1} D_1\psi\,(u-h)\, du\, dh$, $\theta = E(\|X\|_d)$

où $X \longrightarrow N(0, I)$, et sous les hypothèses du corollaire :

$$\theta^{-1} (\sqrt{K_{\psi}})^{-1} (\sqrt{\varepsilon})^{1-\beta} Q_T(A(X_{\varepsilon})) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^2} L(0,T)$$

Exemple 1 : $r(t) = e^{-\|t\|^{\alpha}}$, $0 < \alpha < 2$, $\beta = \alpha - 1$.

β) $r(t) = \prod_i r^i(t_i)$, $r^i(0) > 0$, $\psi(t) = \prod_i \psi_i(t_i)$, $\psi_i(x) = \psi_i(-x)$, $\psi_{i,\varepsilon}(x) = 1/\varepsilon\; \psi_i(x/\varepsilon)$, $\int_{\mathbb{R}} \psi_i(t)\, dt = 1$, $\forall\, i \in [1,d]$, $\forall\, t \in \mathbb{R}^d$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ et $\forall\, \varepsilon > 0$.

Dans ce cas $\lambda_{2,\varepsilon}^{i,j} = 0$, pour $i \neq j$, $\lambda_{2,\varepsilon}^{i,i} = \lambda_{2,\varepsilon}^{i}\, g_i(\varepsilon)$, où

$g_i(\varepsilon) = \prod_{j \neq i} r^j_{\psi_j,\varepsilon}(0)$ converge vers $\prod_{j \neq i} r^j(0)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, et $\lambda_{2,\varepsilon}^{i}$ est le moment spectral d'ordre deux d'un processus à un indice de covariance $r^i_{\psi_i,\varepsilon}$ .Si $\lambda_{2,\varepsilon}^{j} \,/\, \sup_i(\lambda_{2,\varepsilon}^{i}) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} a_j$,

$p = \operatorname{rang}(a_j\, \delta_{i,j})_{i,j=1,d}$, et si $\lambda_{2,\varepsilon}^{1,1} \geqslant \lambda_{2,\varepsilon}^{2,2} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{2,\varepsilon}^{d,d}$,

alors , sous les hypothèses du corollaire on a :

$$\theta^{-1} \sqrt{c(\varepsilon)}\; Q_T(A(X_{\varepsilon})) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^2} L(0,T)$$

où $\theta = E(\|X\|_p)$ et $X \longrightarrow N\left(0 , (a_i/a_1\; r_1(0)/r_i(0)\delta_{i,j})_{i,j=1,p}\right)$

Exemple 2 : $r^i = r^o$ et $\psi_i = \psi_o$ où r^o vérifie H1 (traduit pour $d = 1$), alors $a_i = 1$, $\forall\ i \in [1,d]$.

Remarque : Si la condition (A) est vérifiée , alors sous l'hypo-thèse H1 le cas particulier 1 et l'exemple n° 2 vérifient H2 ; ce dernier permet donc d'obtenir un sous-ensemble de la classe des processus à un indice , stationnaires , de moment spectral d'ordre deux infini , qui contient une partie de la classe exhibée dans le cas $d = 1$ par [2] .

III Démonstrations

On note : $\gamma_\varepsilon(t) = E(X_\varepsilon(t)X(0))$, $DR_\varepsilon(t) = (D_i r_\varepsilon(t))_i$,

$D^2R_\varepsilon(t) = (D_iD_jr_\varepsilon(t))_{i,j}$, $a(\varepsilon) = (\varepsilon\sqrt{d})^{-1}$ et $c_d = A/\sqrt{d}$

On dira que $x \ll y$, s'il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que $x < ky$.

Commençons par démontrer deux lemmes .

Lemme 1 : 1) $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} c(\varepsilon) = 0$

2) $r_\varepsilon(t)$ et $\gamma_\varepsilon(t)$ tendent uniformément en t vers $r(t)$ quand ε tend vers zéro .

3) $|D_ir_\varepsilon(t)|$, $|D_iD_jr_\varepsilon(t)|$ et $|D_i\gamma_\varepsilon(t)|$ sont bornées $(\forall i,\forall j)$, sur $D(t_o) = \{t \in \mathbb{R}^d\ ,\ \|t\| > t_o\}$ par des constantes ne dépendant que de t_o .

Preuve :

1) On peut toujours supposer que : $\inf\limits_{\|x\|<1} |\hat{\psi}(x)|^2 \gg 1$

(en effet , il existe $\eta > 0$ tel que : $\inf\limits_{\|x\|<\eta} |\hat{\psi}(x)|^2 > 0$; on considère alors φ définie par : $\varphi(x) = \psi(x/\eta)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^d$) , d'où : $\lambda_{2,\varepsilon}^{j,j} \gg \int_{-a(\varepsilon)}^{a(\varepsilon)} \cdots\cdots\cdots \int_{-a(\varepsilon)}^{a(\varepsilon)} x_j^2 \quad dF(x)$

d'après H1b) : 1) $\lambda_{2,\varepsilon}^{j,j} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} +\infty$. De plus , si :

$z_j = (0 \;,\ldots, \underset{j}{\underset{\downarrow}{1}}, \ldots 0)$,on a : 2) $-z_j \; D^2 R_\varepsilon(0) \; z'_j = \lambda_{2,\varepsilon}^{j,j} \leqslant \Lambda_1(\varepsilon)$,

et 3) $\lim_{\varepsilon \to 0} c(\varepsilon) \; \Lambda_1(\varepsilon) = \Lambda_1 = 1$. En utilisant 1) ,2) et 3) ,

on obtient : $\lim_{\varepsilon \to 0} \; c(\varepsilon) = 0$.

2) On montre 2) à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue .

3) Grace à la propriété de majoration de $|D_i \hat{\psi}(.)|$,on peut dériver $r_\varepsilon(.)$ sous le signe somme . On a alors :

$$* \; D_i r_\varepsilon(t) = 1/\varepsilon \int \psi(u) \; D_i \psi(v) \; r(t + \varepsilon(u - v)) \; du \; dv$$

On fait le changement de variables $t + \varepsilon(u - v) = h$ et on intègre alors par parties , il vient :

$$D_i r_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^d \int \psi(u) \; \psi(u + (t-h)/\varepsilon)) \; D_i r(h) \; du \; dh$$

$$= \int \qquad (1)$$

Soit $t_0 > 0$; on pose $A = t_0/3$ et on suppose $\|t\| > t_0 = 3A$;

On découpe $\mathbb{R}^{2d}$ suivant la partition :

$D_1 = \{ \; (u,h) \in R^{2d} \;, \; -\|u\| \leqslant 2A/\varepsilon - \|t\|/\varepsilon \;, \; \|h\| < A \; \}$

$D_2 = \{ \; (u,h) \in R^{2d} \;, \; -\|u\| > 2A/\varepsilon - \|t\|/\varepsilon \;, \; \|h\| < A \; \}$

$D_3 = \{ \; (u,h) \in \mathbb{R}^{2d} \;, \; \|h\| \geqslant A \; \}$

On majore $|D_i r_\varepsilon(t)|$ par $(1/\varepsilon)^d \int \psi(u)\psi(u + (t-h)/\varepsilon)|D_i r(h)|dudh$

sur $\bigcup_{i=1}^{3} D_i$.

Si $(u,h) \in D_1$, $\|u\| \geq A/\varepsilon$ d'où $\psi(u) \ll \varepsilon^{d+1}$, et donc on a :

$$\int_{D_1} |(1)| \ll \varepsilon \int_{\|h\|<A} |D_i r(h)| \, dh \ll \varepsilon \text{ , d'après H1a) .}$$

Si $(u,h) \in D_2$, $\|t/\varepsilon+u-h/\varepsilon\| \geq A/\varepsilon$, d'où : $\psi(t/\varepsilon+u-h/\varepsilon) \ll \varepsilon^{d+1}$;

de même : $\int_{D_2} |(1)| \ll \varepsilon$.

Si $\|h\| > A$, $|D_i r(h)|$ est majorée d'après H1a) d'où :

$$\int_{D_3} |(1)| \ll (1/\varepsilon)^d \int \psi(u) \, \psi(t/\varepsilon+u-h/\varepsilon) \, du \, dh \ll \int \psi(u) \, \psi(v) \, du \, dv = 1$$

et donc il existe $N(t_0)$ tel que $|D_i r_\varepsilon(.)|$ soit majoré par $N(t_0)$, sur $D(t_0)$.

** $D_i D_j r_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^2 \int D_j \psi(t/\varepsilon - u) \, r(\varepsilon u - \varepsilon v) \, D_i \psi(-v) \, du \, dv$;

Pour simplifier les notations , on suppose que $i = 2$ et $j = 1$.
On intègre alors par parties , il vient :

$$D_2 D_1 r_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^{d+1} \int \psi(u) \, D_2 r(h) \, D_1 \psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) \, du \, dh$$

$$= \int (2)$$

On découpe R^{2d} suivant la partition :

$D_1 = \{ (u,h) \in R^{2d} , \exists \, k \in \{2,...,d\} , |h_k| > c_d \}$

$D_2 = \{ (u,h) \in R^{2d} , \forall \, k \in \{1,...,d\} , |h_k| \leq c_d \}$

$D_3 = \{ (u,h) \in \mathbb{R}^{2d} , |h_1| > A/\sqrt{d} , \forall \, k \in \{2,...,d\} , |h_k| \leq c_d \}$

Posons $S = \{ h \in R^{d-1} , \exists \, k \in \{2,...,d\} , |h_k| > c_d \}$ et

$U = \{ h \in \mathbb{R}^{d-1} , \forall \, k \in \{2,...d\} , |h_k| \leq c_d \}$

$$\int_{D_1} (2) = (1/\varepsilon)^{d+1} \int\int_S \psi(u) \; [\int_{\mathbb{R}} D_2 r(h) \; D_1\psi(t/\varepsilon+u-h/\varepsilon) \; dh_1] dh_2 .. dh_d du$$

On intègre par parties le terme sous crochet, il vient d'aprés H1a) :

$$\int_{D_1} (2) = (1/\varepsilon)^{d} \int\int_{S\times\mathbb{R}} \psi(u) \; D_1 D_2 r(h) \; \psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) \; du \; dh$$

Mais les dérivées partielles secondes de r sont bornées sur $S \times \mathbb{R}$, d'où :

$$\left| \int_{D_1} (2) \right| << 1 .$$

On découpe D_2 suivant la partition :

$$D_{2,1} = \{ (u,h) \in D_2 \; , \; -\|u\| \leqslant 2A/\varepsilon - \|t\|/\varepsilon \}$$

$$D_{2,2} = \{ (u,h) \in D_2 \; , \; -\|u\| > 2A/\varepsilon - \|t\|/\varepsilon \}$$

On démontre de la même façon que dans (*) que :

$$\left| \int_{D_2} (2) \right| << 1 .$$

Pour majorer $\left|\int_{D_3} (2)\right|$, on intègre par parties en h_1 d'où :

$$\int_{D_3} (2) = B \, / \, (\varepsilon)^d \quad \text{où :}$$

$$B = \int\int_U \psi(u) D_2 r(c_d, h_2, .., h_d) \psi(t_1/\varepsilon + u_1 - c_d/\varepsilon, .., t_d/\varepsilon + u_d - h_d/\varepsilon) dh_2 . dh_d du$$

$$- \int\int_U \psi(u) D_2 r(-c_d, h_2, .., h_d) \psi(t_1/\varepsilon + u_1 + c_d/\varepsilon, .., t_d/\varepsilon + u_d - h_d/\varepsilon) dh_2 . dh_d du$$

$$+ \int_{D_3} \psi(u) \; D_1 D_2 r(h) \; \psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) \; du \; dh$$

$$\int_{D_3} (2) = \int_{D_3} (A) + \int_{D_3} (B) + \int_{D_3} (C)$$

Pour majorer $\left| \int_{D_3} (A) \right|$ et $\left| \int_{D_3} (B) \right|$, on partitionne

$D_4 = \{ (u,h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1} , \forall k \in \{2,\dots,d\} , |h_k| \leqslant c_d \}$ en deux domaines :

$D_{41} = \{ (u,h) \in D_4 , - \|u\| \leqslant (5A/2\varepsilon) - \|t\|/\varepsilon \}$

$D_{42} = \{ (u,h) \in D_4 , - \|u\| > (5A/2\varepsilon) - \|t\|/\varepsilon \}$

On fait alors un raisonnement analogue à celui dans (*) , en tenant compte du fait que :

$\int_U |D_2 r(\pm c_d, h_2, \dots, h_d)| \, dh_2 \dots dh_d \ll 1$, d'où :

$| \int_{D_3} (A) | + | \int_{D_3} (B) | \ll \varepsilon$.

Pour majorer $| \int_{D_3} (C) |$, il suffit de voir que les dérivées partielles secondes de r sont bornées sur D_3 ; on a donc :

$| D_2 D_1 r_\varepsilon(t) | \ll 1$.

*** $D_i \gamma_\varepsilon(t) = 1/\varepsilon \int D_i \psi(t/\varepsilon - u) \, r(\varepsilon u) \, du$

posons $\varepsilon u = v$ et intégrons par parties , il vient :

$$D_i \gamma_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^d \int \psi((t - v)/\varepsilon) \, D_i r(v) \, dv$$

Il suffit alors d'intégrer sur la partition suivante :

$D_1 = \{ v \in R^d , \|v\| < A \}$ et D_1^c , et d'appliquer les mêmes raisonnements que précedemment .

<u>Lemme 2</u> : Soit $\{(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t) , t \in B\}$, un processus gaussien centré à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$ et B un ouvert borné de $\mathbb{R}^k$. On suppose que la matrice de covariance $R_\varepsilon(t)$ de $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t))$ converge uniformément en t lorsque ε tend vers zéro vers $\begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}$, où Λ est diagonale , de rang q . Soient $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \dots \geqslant \lambda_q$, les q valeurs propres non nulles de Λ et $\Lambda_1 = (\lambda_i \delta_{i,j})_{i,j=1,q}$.

Soit $t \longrightarrow g_\varepsilon(t)$ une fonction définie sur B à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément en t vers g(t) bornée sur B , lorsque ε tend vers zéro ; alors :

$$\int_B E(\ \|X_\varepsilon(t)\|\ \|Y_\varepsilon(t)\|\ )\ g_\varepsilon(t)\ dt \xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{} [\int_B g(t)\ dt]\ E^2(\ \|X\|_q)\ ,$$

où $X \longrightarrow N\ (0, \Lambda_1)$.

<u>Démonstration</u> : Elle se fait en trois étapes .

<u>E1</u> : Il est clair que le théorème est vrai si le rang de Λ est q ; en effet , il suffit alors d'appliquer le théorème de convergen--ce dominée de Lebesgue .

<u>E2</u> : $$\int_B g_\varepsilon(t)\quad E(\ \|X_\varepsilon(t)\|\ )\ dt \xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{} E(\ \|X\|_q)\ \int_B g(t)\ dt$$

a) Si la matrice de covariance $C_\varepsilon(t)$ de $X_\varepsilon(t)$ est diagonale et si ses valeurs propres convergent simplement et sont uniformément bornées en t pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors E2 est prouvée en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue .

b) Si $C_\varepsilon(t)$ est quelconque , on la diagonalise à l'aide d'une matrice orthogonale $P_\varepsilon(t)$, soit $D_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(t)\ C_\varepsilon(t)\ P'_\varepsilon(t)$ et on peut ranger les valeurs propres de $D_\varepsilon(t)$ par ordre croissant , par exemple ; il suffit alors , pour appliquer a) , de voir que :

$$E(\|X_\varepsilon(t)\|) = E(\|P_\varepsilon(t)X_\varepsilon(t)\|)\ .$$

<u>E3</u> : Pour montrer le lemme , on se sert alors de E1 et E2 en bruitant les processus X_ε et Y_ε , puis on fait tendre le bruit vers zéro .

Plus précisément :

Soit Z_σ un vecteur aléatoire gaussien centré de variance $\sigma^2\ I_n$, indépendant de $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t))$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Soit W_σ un vecteur aléatoire vérifiant les mêmes propriétés que Z_σ . On suppose de plus que Z_σ et W_σ sont indépendants entre eux

On note T_σ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et suivant une loi $N\ (0\ ,\ ((\lambda_i + \sigma^2)\ \delta_{i,j})_{i,j=1,n}$.

On décompose $\int_B g_\varepsilon(t)\ E(\|X_\varepsilon(t)\|\,\|Y_\varepsilon(t)\|)\ dt - \int_B g(t)\ E^2(\|X\|_q)\ dt$

$$= \int (1)$$

en :

$$\int (1) = \int_B g_\varepsilon(t)[E(\|X_\varepsilon(t)\|\,\|Y_\varepsilon(t)\|) - E(\|X_\varepsilon(t)+Z_\sigma\|\,\|Y_\varepsilon(t)+W_\sigma\|)]dt$$

$$+ \int_B g_\varepsilon(t)\ [\ E(\|X_\varepsilon(t) + Z_\sigma\|)(\|Y_\varepsilon(t) + W_\sigma\|) - E^2(\|T_\sigma\|)\ ]\ dt$$

$$+ \int_B g_\varepsilon(t)\ [E^2(\|T_\sigma\|) - E^2(\|X\|_q)]\ dt + \int_B (g_\varepsilon(t) - g(t))\ E^2(\|X\|_q)dt$$

On pose :

$$\int (1) = \int (a) + \int (b) + \int (c) + \int (d)$$

$|\ (a)\ | \leqslant E(\|Z_\sigma\|)\ [E(\|X_\varepsilon(t)\|) + E(\|Y_\varepsilon(t)\|) + E(\|Z_\sigma\|)]\ |g_\varepsilon(t)|$

d'où :

$|\ (a)\ | << \sigma\ [\ E(\|X_\varepsilon(t)\|) + E(\|Y_\varepsilon(t)\|) + \sigma\ ]\ |g_\varepsilon(t)|$

On applique alors E2 et donc :

$\int_B (a)$ converge vers zéro lorsque σ tend vers zéro uniformément en ε .

$\int_B (b)$ converge vers zéro lorsque ε tend vers zéro , d'après E1 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue .

$\int_B (c)$ converge vers zéro lorsque σ tend vers zéro uniformément en ε d'après E2 et parce-que $|g_\varepsilon(t)| << 1$ pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $\forall\ t \in B$.

$\int_B (d)$ converge vers zéro lorsque ε tend vers zéro d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue .

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème .

<u>Demonstration du théorème</u> : Montrons que :

$$\lim_{\delta \to 0}\ \limsup_{\varepsilon \to 0}\ E(\sqrt{c(\varepsilon)}\ Q_T(A(X_\varepsilon)) - \theta/2\delta \int 1_{\{t,|X(t)|<\delta\}} dt\ )^2 = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on partitionne le cube T en cubes T_i de côtés parallèles aux axes de coordonnées et de longueur C/n .

On pose : $\xi_i^\varepsilon = \sqrt{c(\varepsilon)}\ Q_{T_i}(A(X_\varepsilon))$ et $\eta_i^\delta = \theta/2\delta \int_{T_i} 1_{\{t,\,|X(t)|<\delta\}} dt$

Nous voulons montrer que :

$$\lim_\delta \limsup_\varepsilon E\Big(\sum_i (\xi_i^\varepsilon - \eta_i^\delta)\Big)^2 = \lim_\delta \limsup_\varepsilon E\Big(\sum_{i,j} (\xi_i^\varepsilon - \eta_i^\delta)(\xi_j^\varepsilon - \eta_j^\delta)\Big) = 0$$

Soit $\Sigma = E\Big(\sum_{i,j} (\xi_i^\varepsilon - \eta_i^\delta)(\xi_j^\varepsilon - \eta_j^\delta)\Big)$

On divise Σ en deux sommes Σ' et Σ'' telles que :

Σ' désigne la somme correspondante aux indices (i,j) tels que

T_i et T_j ne sont pas proches ; c'est à dire :

$\forall\, t \in T_i$, $\forall\, t' \in T_j$, $\|t - t'\| > C/n$

Σ'' désigne la somme restante : on somme sur les couples (i,j)

tels que : $\exists\, t \in T_i$, $\exists\, t' \in T_j$, $\|t - t'\| \leqslant C/n$

Nous noterons "T_i proche de T_j" : "T_i pp T_j"

<u>Pour Σ'</u> : Soit un terme général $a_{i,j}^{\varepsilon,\delta}$ de Σ' .

$$a_{i,j}^{\varepsilon,\eta} = E(\eta_i^\delta \eta_j^\delta) + E(\xi_i^\varepsilon \xi_j^\varepsilon) - E(\eta_i^\delta \xi_j^\varepsilon) - E(\eta_j^\delta \xi_i^\varepsilon)$$

$$a_{i,j}^{\varepsilon,\eta} = (1) \quad + (2) \quad - (3) \quad - (4)$$

On applique les formules de type Rice [6] à chacune des quatre espérances :

$$(1) = \int_{T_i \times T_j} (\theta/2\delta)^2 \int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} p_{X(t_1),X(t_2)}(x,y)\, dx\, dy\, dt_1\, dt_2$$

où $p_{Y_1,\ldots,Y_n}$ désigne la densité de $(Y_1,\ldots,Y_n)$.

(1) tend vers $\theta^2 \displaystyle\int_{T_i}\int_{T_j} p_{X(t_1),X(t_2)}(0,0)\, dt_1\, dt_2$ lorsque δ tend

vers zéro d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Soit P_ε une matrice orthogonale qui diagonalise $-D^2R_\varepsilon(0)$ en Λ_ε

définie par $\Lambda_\varepsilon = (\Lambda_i(\varepsilon)\,\delta_{i,j})_{i,j}$; on note p_{t_1,t_2}^ε la densité

de $X_\varepsilon(t_1),X_\varepsilon(t_2)$.

$$(2) = \int_{T_i \times T_j} p^{\varepsilon}_{t_1,t_2}(0,0) \quad A_\varepsilon(t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2 \quad , \text{ où :}$$

$$A_\varepsilon(t_1,t_2) = E(\|\sqrt{c(\varepsilon)}P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(t_1-t_2)\|\,\|\sqrt{c(\varepsilon)}P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(0)\|/X_\varepsilon(t_1-t_2)=X_\varepsilon(0)=0)$$

Posons $t_1 - t_2 = \tau$;on décompose alors $\dot{X}_\varepsilon(\tau)$, $\dot{X}_\varepsilon(0)$ de la manière suivante :

$$P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(0) = \xi_\varepsilon + X_\varepsilon(0)\,\alpha_\varepsilon + X_\varepsilon(\tau)\,\beta_\varepsilon$$

$$P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) = \xi^*_\varepsilon - X_\varepsilon(\tau)\,\alpha_\varepsilon - X_\varepsilon(0)\,\beta_\varepsilon$$

où : $(\xi_\varepsilon,\xi^*_\varepsilon)$ est un couple gaussien centré , de coordonnées à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et indépendant de $(X_\varepsilon(0),X_\varepsilon(\tau))$ [6] .

On vérifie que :

$$\alpha_\varepsilon = \frac{r_\varepsilon(\tau)\; P_\varepsilon\; DR_\varepsilon(\tau)}{r^2_\varepsilon(0) - r^2_\varepsilon(\tau)} \quad , \quad \beta_\varepsilon = \frac{-P_\varepsilon\; Dr_\varepsilon(\tau)\; r_\varepsilon(0)}{r^2_\varepsilon(0) - r^2_\varepsilon(\tau)}$$

De plus $\text{Var}\,\xi_\varepsilon = \text{Var}\,\xi^*_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon - \dfrac{r_\varepsilon(0)\; P_\varepsilon\; DR_\varepsilon(\tau)\; DR'_\varepsilon(\tau)\; P'_\varepsilon}{r^2_\varepsilon(0) - r^2_\varepsilon(\tau)}$ et

$$\text{Cov}\,(\xi_\varepsilon,\xi^*_\varepsilon) = -\,P_\varepsilon\; D^2R_\varepsilon(\tau)\; P'_\varepsilon \;-\; \frac{r_\varepsilon(\tau)\; P_\varepsilon\; DR_\varepsilon(\tau)\; DR'_\varepsilon(\tau)\; P'_\varepsilon}{r^2_\varepsilon(0) - r^2_\varepsilon(\tau)}$$

$$\text{d'où : } (2) = \int_{T_i \times T_j} (2\pi)^{-1}\,(r^2_\varepsilon(0)-r^2_\varepsilon(\tau))^{-1/2}\, E(\|\sqrt{c(\varepsilon)}\xi_\varepsilon\|\,\|\sqrt{c(\varepsilon)}\xi^*_\varepsilon\|)\; dt_1 dt_2$$

En appliquant les lemmes 1 et 2 il vient , compte tenu que les coefficients de P_ε sont bornés par 1 :

(2) tend vers $\theta^2 \displaystyle\int_{T_i \times T_j} p_{X(t_1),X(t_2)}(0,0)\; dt_1\; dt_2$ lorsque ε tend vers zéro .

$$(3) = \int_{T_i \times T_j} \sqrt{c(\varepsilon)} \int \theta/2\delta \int_{-\delta}^{\delta} \|\dot{x}\|\; p_{X(t_1),\dot{X}_\varepsilon(t_2),\dot{X}_\varepsilon(t_2)}(u,0,\dot{x})\; du\; d\dot{x}\; dt_1\; dt_2$$

$$(3) = \int_{T_i \times T_j} 1/2\pi \int_{-\delta}^{\delta} \theta/2\delta \times (r(0)r_\varepsilon(0)-\gamma_\varepsilon^2(t_1-t_2))^{-1/2} B_\varepsilon(t_1-t_2)\, dt_1\, dt_2$$

où :

$B_\varepsilon(\tau) = \exp(-1/2\ u^2 r_\varepsilon(0)/(r(0)r_\varepsilon(0)-\gamma^2(\tau)))\ C_\varepsilon(\tau)$ et

$C_\varepsilon(\tau) = E(\|\sqrt{c(\varepsilon)}\ P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau)\| \ / \ X(0) = u \ , \ X_\varepsilon(\tau) = 0)$

Calculons $E(P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) \sqrt{c(\varepsilon)} \ / \ X(0) = u \ , \ X_\varepsilon(\tau) = 0) = (i)$

La matrice de covariance de $(P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) \sqrt{c(\varepsilon)} \ , \ X(0) \ , \ X_\varepsilon(\tau))$

est : $\begin{bmatrix} \Lambda_\varepsilon c(\varepsilon) & (a_{i,\varepsilon}(\tau))'_i \ \theta'_d \\ (a_{i,\varepsilon}(\tau))_i & r(0) \quad \gamma_\varepsilon(\tau) \\ \theta_d & \gamma_\varepsilon(\tau) \quad r_\varepsilon(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} \\ & \\ I_{2,1} & I_{2,2} \end{bmatrix}$

et θ_d est le vecteur ligne de $\mathbb{R}^d$ dont les coordonnées sont nulles.

$a_{i,\varepsilon}(\tau) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ uniformément en τ d'après le lemme 1 et parce-que les coefficients de P_ε sont bornés par 1 ;

d'où : (*) $(i) = f_\varepsilon(\tau)\ u$ où $f_\varepsilon(\tau) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ uniformément en τ .

Or $\mathrm{Var}\ (\ P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) \sqrt{c(\varepsilon)} \ / \ X(0), X_\varepsilon(\tau)\ ) = I_{1,1} - I_{1,2}\ I_{2,2}^{-1}\ I_{2,1}$

le terme général de $I_{1,2}\ I_{2,2}^{-1}\ I_{2,1}$ est : $\dfrac{r(0)\ a_{i,\varepsilon}(\tau)\ a_{j,\varepsilon}(\tau)}{r(0)r_\varepsilon(0) - \gamma_\varepsilon^2(\tau)}$

qui converge uniformément en τ vers zéro lorsque ε tend vers zéro;

d'où : (**) $\mathrm{Var}\ (\ P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) \sqrt{c(\varepsilon)})\ / \ X(0)\ , \ X_\varepsilon(\tau)\ )$ converge uniformément en τ vers Λ lorsque ε tend vers zéro .

Il est clair qu'en modifiant légèrement le lemme 2 et en utilisant les résultats (*) et (**) et le lemme 1 on a :

$$(3) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \theta^2/2\delta \int_{T_i \times T_j} \int_{-\delta}^{\delta} p_{X(t_1),X(t_2)}(0,0)\ D(t_1-t_2\ ,u)\ du\ dt_1\ dt_2$$

où : $D(\tau,u) = \exp\ (\ -1/2\ u^2\ r(0)\ (r^2(0) - r^2(\tau))^{-1}$, et donc :

$$(3) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \theta^2 \int_{T_i \times T_j} p_{X(t_1),X(t_2)}(0,0)\, dt_1\, dt_2$$ d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue .

De manière analogue on montrerait que (4) converge vers la même limite que (3) lorsque ε puis δ tendent vers zéro ; et donc :

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \Sigma' = 0 .$$

<u>Pour Σ''</u> : nous avons :

$$\Sigma'' = \sum_{T_i ppT_j} E\, (\xi_i^{\varepsilon} - \eta_i^{\delta})(\xi_j^{\varepsilon} - \eta_j^{\delta}) \quad , \text{ d'où :}$$

$$\Sigma'' \leqslant \sum_{T_i ppT_j} \left(E\, (\xi_i^{\varepsilon} - \eta_j^{\delta})^2\, E\, (\xi_i^{\varepsilon} - \eta_j^{\delta})^2 \right)^{1/2} \quad \text{et donc :}$$

$$\Sigma'' \leqslant \sum_{T_i ppT_j} \left[\left((E(\xi_i^{\varepsilon})^2 \right)^{1/2} + \left((E(\eta_j^{\delta})^2 \right)^{1/2} \right]^2$$

<u>Majorons $E(\eta_i^{\delta})^2$</u>

$$E(\eta_i^{\delta})^2 = \int_{T_i \times T_i} (\theta/2\delta)^2 \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} p_{X(t_1),X(t_2)}(x,y)\, dt_1\, dt_2\, dx\, dy$$

$$E(\eta_i^{\delta})^2 \leqslant \int_{T_i \times T_i} \theta^2 \, (r^2(0) - r^2(t_1 - t_2))^{-1/2}\, dt_1\, dt_2 \quad , \text{ d'où :}$$

$$E(\eta_i^{\delta})^2 \leqslant \int_{-C/n}^{C/n} \cdots \int_{-C/n}^{C/n} (r^2(0) - r^2(u_1,..,u_d))^{-1/2} (C/n - |u_1| \,..(C/n - |u_d|)dudt$$

$$E(\eta_i^{\delta})^2 \leqslant (C/n)^d \int_{-C/n}^{C/n} \cdots \int_{-C/n}^{C/n} (r^2(0) - r^2(u_1,\ldots,u_d))^{-1/2}\, du_1 \,..du_d$$

<u>Majorons $r(0) - r(u)$ sur $]-C/n,0[\times]0,C/n[\times\ldots\times]0,C/n[$ par exemple</u>

$$r(0) - r(u) = \int (1 - \cos\langle x,u\rangle)\, dF(x) \quad , \text{ d'où :}$$

$$r(0) - r(u) \geqslant \int_{-1/d\|u\|}^{0} \int_{0}^{1/d\|u\|} \cdots \int_{0}^{1/d\|u\|} (1 - \cos\langle x,u\rangle)\, dF(x)$$

Il est clair que $0 \leqslant \langle x,u\rangle \leqslant 1$ pour tout x appartenant au domaine d'intégration de l'expression précédente ; donc :

$$r(0) - r(u) \gg \int_{-1/d\|u\|}^{0} \int_{0}^{1/d\|u\|} \cdots \int_{0}^{1/d\|u\|} \langle x,u\rangle^2\, dF(x)$$

Mais $x_i u_i \geq 0 \quad \forall\ i \in [1,d]$ d'où :

$$r(0) - r(u) >> \sum_{i=1}^{d} u_j^2 \int_{-1/d\|u\|}^{0} \int_{0}^{1/d\|u\|} \cdots \int_{0}^{1/d\|u\|} x_j^2 \quad dF(x)$$

Or $\|u\| < \sqrt{d}\, C/n$ implique $1/d\|u\| > n/Cd\sqrt{d}$, $-1/d\|u\| < -n/Cd\sqrt{d}$

Posons $a_n(C) = \inf_{\sigma,j} A_j(\sigma n/dC\sqrt{d})$; on a supposé en fait que n est "suffisamment grand" , c'est à dire que n est supérieur à N pour avoir les propriétés suivantes :

$\forall\ n \geq N, \exists\ \varepsilon'(C/n), \forall\ (x,y) \in]-C/n,C/n[\times\ldots]-C/n,C/n[, \forall\ \varepsilon < \varepsilon'(C/n)$, $r(0) + r(x-y) > r(0)$ et $r_\varepsilon(0) + r_\varepsilon(x-y) > r(0)/2, a_n(C) \geq a_N(C) > 0$; on pose alors $\varepsilon''(C/n) = \inf(\varepsilon'(C/n), \varepsilon(C/n))$ où $\varepsilon(C/n) = dC/n$.

où : $A_j(\sigma u) = \int_{A\sigma_1(u)} \int_{A\sigma_2(u)} \cdots \int_{A\sigma_d(u)} v_j^2 \quad dF(v)$, $u > 0$

avec $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_d)$ où :

$\forall\ i \in [1,d]\ \sigma_i = \pm 1$, $A\sigma_i(u) =]0,\sigma_i(u)[$ si $\sigma_i \geq 0$

$A\sigma_i(u) =]\sigma_i(u),0[$ si $\sigma_i \leq 0$

d'où : $r(0) - r(u) \geq \|u\|^2 \quad a_n(C)$ et donc :

$$E(\eta_i^\delta)^2 << (C/n)^d \int_{-C/n}^{C/n} \int_{-C/n}^{C/n} \cdots \int_{-C/n}^{C/n} 1/\|u\| \ du$$

ou encore :

$$E(\eta_i^\delta)^2 << (C/n)^d \int_0^{\sqrt{d}\,C/n} r^{d-2} \ dr = (C/n)^{2d-1} (\sqrt{d})^{d-1} / d-1$$

et donc : $E(\eta_i^\delta)^2 << (C/n)^{2d-1}$

<u>Majorons $E(\xi_i^\varepsilon)^2$</u>

$$E(\xi_i^\varepsilon)^2 = c(\varepsilon) \int_{T_i \times T_i} p^\varepsilon_{t_1,t_2}(0,0) E(\|\dot X_\varepsilon(0)\| \|\dot X_\varepsilon(t_1-t_2)\| / X_\varepsilon(0)=X_\varepsilon(t_1-t_2)=0)dt$$

$$(1) = E(\|\dot X_\varepsilon(0)\| \|\dot X_\varepsilon(\tau)\| / X_\varepsilon(0)=X_\varepsilon(\tau)=0) \leq \sum_{j=1}^{d} V(D_j X_\varepsilon(0)/X_\varepsilon(0), X_\varepsilon(\tau))$$

d'où :

$$(1) \leq \sum_{k=1}^{d} (\lambda_{2,\varepsilon}^{k,k} - r_\varepsilon(0)[D_k r_\varepsilon(\tau)]^2 (r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(\tau))^{-1})$$

et donc :

$(1) \leq \sum_{k=1}^{d} \lambda_{2,\varepsilon}^{k,k}$, on obtient alors :

$$E(\xi_i^\varepsilon)^2 \leq \sum_{k=1}^{d} c(\varepsilon)\ \lambda_{2,\varepsilon}^{k,k} \int_{T_i \times T_i} (r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(t_1 - t_2))^{-1/2} dt_1\ dt_2$$

d'où :

$$E(\xi_i^\varepsilon)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{d} c(\varepsilon)\ \lambda_{2,\varepsilon}^{k,k} (C/n)^d \int_{-C/n}^{C/n}\int_{-C/n}^{C/n}\cdots\int_{-C/n}^{C/n} (r_\varepsilon^2(0)-r_\varepsilon^2(u_1,\dots,u_d))^{-1/2} du$$

On considère alors le vecteur z_k défini au début de la partie concernant les démonstrations ; on peut écrire :

$\forall\ k \in [1,d]$, $c(\varepsilon)\ z_k\ -D^2 R_\varepsilon(0)\ z'_k\ = c(\varepsilon)\ \lambda_{2,\varepsilon}^{k,k} \leqslant c(\varepsilon)\ \Lambda_1(\varepsilon)$; or $c(\varepsilon)\ \Lambda_1(\varepsilon) = \Lambda_1 = 1$, d'où : pour tout k appartenant à [1,d] ,

$c(\varepsilon)\ \lambda_{2,\varepsilon}^{k,k}$ est majoré par une constante ne dépendant pas de ε .

on a alors la majoration suivante :

$$E(\xi_i^\varepsilon)^2 \ll (C/n)^d \int_{-C/n}^{C/n}\int_{-C/n}^{C/n}\cdots\int_{-C/n}^{C/n} (r_\varepsilon^2(0)-r_\varepsilon^2(u_1,u_2,\dots,u_d))^{-1/2} du$$

On intègre sur les domaines suivants :

$D_1 = \{\ \tau \in [-C/n,C/n]^d\ /\ \|\tau\| > \varepsilon/\sqrt{d}\ \}$

$D_2 = \{\ \tau \in [-C/n,C/n]^d\ /\ \|\tau\| \leqslant \varepsilon/\sqrt{d}\ \}$

On suppose que : $\varepsilon < \varepsilon(C/n) = dC/n$

$E(\xi_i^\varepsilon)^2 \leqslant (1) + (2)$

<u>Sur D_1</u> : Soit $\tau \in D_1 \cap\ ]-C/n,0[\times]0,C/n[\times\dots]0,C/n[$ par exemple

$$r_\varepsilon(0) - r_\varepsilon(\tau) = \int (1 - \cos\langle x,u\rangle)\ |\hat{\psi}|^2(\varepsilon u)\ dF(u)$$

$$r_\varepsilon(0) - r_\varepsilon(\tau) \gg \int_{-1/d\|\tau\|}^{0}\int_{0}^{1/d\|\tau\|}\cdots\int_{0}^{1/d\|\tau\|} \langle\tau,u\rangle^2\ |\hat{\psi}|^2(\varepsilon u)\ dF(u)$$

Mais $\|\varepsilon u\| \leqslant 1$ d'où:

$$r_\varepsilon(0) - r_\varepsilon(\tau) \gg \int_{-1/d\|\tau\|}^{0}\int_{0}^{1/d\|\tau\|}\int_{0}^{1/d\|\tau\|} \langle\tau,u\rangle^2\ dF(u)$$

d'après ce qui précède :

$r_\varepsilon(0) - r_\varepsilon(\tau) \gg \|u\|^2$, et donc :

$(1) \ll (C/n)^{2d-1}$ pour $\varepsilon < \varepsilon''(C/n)$

<u>Sur D_2</u> : Soit $\tau \in D_2 \cap\ ]-C/n,0[\times]0,C/n[\times\dots]0,C/n[$ par exemple

$$r_\varepsilon(0) - r_\varepsilon(\tau) \geqslant \int_{-a(\varepsilon)}^{0}\int_{0}^{a(\varepsilon)}\cdots\int_{0}^{a(\varepsilon)} (1-\cos\langle\tau,u\rangle)\ |\hat{\psi}|^2(\varepsilon u)\ dF(u)$$

Or $\|\varepsilon u\| \leqslant 1$ et $0 \leqslant \langle\tau,u\rangle \leqslant 1$, d'où :

$$r_\varepsilon(0) - r_\varepsilon(\tau) \gg \int_{-a(\varepsilon)}^{0} \int_{0}^{a(\varepsilon)} \cdots \int_{0}^{a(\varepsilon)} \langle\tau,u\rangle^2 \, dF(u) \gg \|\tau\|^2$$

pour $\varepsilon < \varepsilon''(C/n)$

d'où : (2) $\ll (C/n)^{2d-1}$ pour $\varepsilon < \varepsilon''(C/n)$

On en déduit donc que : $\Sigma'' \ll \sum_{T_i \, pp T_j} (C/n)^{2d-1}$ pour $\varepsilon < \varepsilon''(C/n)$

Or il existe au plus $(3n)^d$ cubes proches d'où :

$\Sigma'' \ll (C/n)^{d-1}$ pour $\varepsilon < \varepsilon''(C/n)$, et donc :

$\limsup\limits_{\delta \to 0} \limsup\limits_{\varepsilon \to 0} \Sigma \ll (C/n)^{d-1}$, $\forall\, n \geqslant N$, d'où :

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{\varepsilon \to 0} \Sigma = 0$$

ce qui achève la démonstration du théorème .

Bibliographie :

[1] J.M. Azais : " Conditions for convergence of number of crossings to the local time . Application to stable processes with independent increments and to gaussian processes " . A paraître .

[2] J.M. Azais et D. Florens-Zmirou : " Approximation du temps local des processus gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires " . A paraître .

[3] S.M. Berman : " Local non determinism and local times of gaussian processes " . Indiana Univ. Math. J. , Vol 23 , n° 1 , (1973) , pages 69-94 .

[4] Y.A Davydov : " Local times for multiparameter random processes " . Theory. Probab. Appl. , Vol 23 , n° 3 , (1978) , pages 573-583 .

[5] W. Ehm : " Sample properties of multiparameter stable processes " . Z. Wahrsch. Verw. Gebiete , Vol 56 , (1981) , pages 195-228 .

[6] M. Wschebor : " Surfaces aléatoires : mesure géométrique des ensembles de niveau " . Lecture Notes in Math. , Springer , Berlin-New York , (1985) .

TROISIEME PARTIE

ESTIMATION DE LA MATRICE DES MOMENTS SPECTRAUX D´ORDRE 2 D´UN CHAMP ALEATOIRE GAUSSIEN A L´AIDE DES COURBES DE NIVEAU

Ce texte est constitué d´une note parue au CRAS(1988)

Probabilités/*Probability Theory*

Estimation de la matrice des moments spectraux d'ordre 2 d'un champ aléatoire gaussien à l'aide des courbes de niveau

Corinne BERZIN et Ileana IRIBARREN

Résumé — On propose des estimateurs pour la matrice des moments spectraux du second ordre d'un champ aléatoire Gaussien bi-indexé stationnaire et centré. Les estimateurs sont définis à l'aide de fonctionnelles sur les courbes de niveau du champ. On étudie ses propriétés statistiques et on donne une expression de la matrice de covariances asymptotique.

Estimation of the spectral moments matrix of second order of a gaussian random field based on the level curves

Abstract — We propose estimators for the spectral matrix of the second order moments of a stationary and centered Gaussian bi-parametric random field. The estimators are defined as functionals over the level curves of the field. We study their statistical properties and we give an expression of the asymptotic covariance matrix.

I. INTRODUCTION. — Soit $X=\{X(t):t\in\mathbb{R}^2\}$ un champ aléatoire gaussien, centré et stationnaire. Soit $\Gamma(t)$ sa fonction de covariance, que nous supposerons deux fois différentiable et $\Gamma(0)=1$. Si dF est la mesure spectrale associée à Γ, les moments spectraux σ_{ij}, $i, j=1, 2$ sont définis par

$$\sigma_{ij}=\int_{\mathbb{R}^2}\lambda_i\lambda_j\,dF,\qquad i,j=1,2. \tag{1}$$

On notera Σ la matrice $(\sigma_{ij})_{i,j=1,2}$. On suppose que X admet des trajectoires presque sûrement deux fois différentiables; le processus gradient de X, $X'(t)=(X'_1(t), X'_2(t))$, où $X'_j(t)=\partial X(t)/\partial t_j$, $j=1, 2$, admet alors comme matrice de covariances $(-\Gamma''_{ij}(0))_{i,j=1,2}$ où $\Gamma''_{ij}(t)=\partial^2\Gamma(t)/\partial t_i\,\partial t_j$, $t\in\mathbb{R}^2$. D'après la relation (1) les moments spectraux σ_{ij} sont liés à la fonction Γ par la relation $\sigma_{ij}=-\Gamma''_{ij}(0)$, $i, j=1, 2$.

Des techniques différentes ont été proposées par plusieurs auteurs pour estimer les moments spectraux. Lorsque X est un processus gaussien uni-indexé ($t\in\mathbb{R}$) Lindgren [5] a proposé des estimateurs pour le second moment spectral en utilisant les passages à niveau et Cabaña [1] les extrêmes du processus. Dans les cas où X est un processus bi-indexé, Longuet-Higgins [6] estime les moments spectraux de tous les ordres en utilisant le nombre des zéros du processus sur les droites faisant un angle donné avec l'axe horizontal.

L'objet de ce travail est de proposer des estimateurs pour la matrice Σ en utilisant des fonctionnelles définies sur les courbes de niveau de X du même type que celles qui ont été utilisées par Cabaña [2] pour estimer les paramètres d'isotropie.

L'étude générale du comportement asymptotique de ce type de fonctionnelles a été faite par Iribarren [4]; on utilisera ses résultats pour établir les propriétés des estimateurs proposés.

II. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES ESTIMATEURS DE LA MATRICE Σ. — Soient $u\in\mathbb{R}$ un niveau fixé et T un rectangle de $\mathbb{R}^2$. Étant donné que X est gaussien, l'ensemble aléatoire $C_u^T=\{t\in T:X(t)=u\}$ est p. s. une courbe différentiable si les conditions suivantes sont

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

0249-6291/88/03070915 $ 2.00

vérifiées :

H 1 : X est p. s. de classe C^2.

H 2 : $\det \Sigma > 0$ c'est-à-dire $\Gamma''(0)$ n'est pas dégénérée.

Le processus gradient de X peut être représenté par $X'(t) = \|X'(t)\| (\cos \Theta(t), \sin \Theta(t))$ où $\|X'(t)\|$ et $\Theta(t)$, $t \in \mathbb{R}^2$, sont deux champs aléatoires réels stationnaires. Si $f : [\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, les conditions H 1 et H 2 permettent de définir p. s. les intégrales de ligne (*voir* [3])

$$\mathscr{F}_u(f, T) = |T|^{-1} \int_{C_u^T} f(\Theta)\, dS. \tag{2}$$

Notre proposition d'estimateurs se fondera sur les valeurs des intégrales

$$\mathscr{L}(T, u) = \mathscr{F}_u(1, T); \qquad \mathscr{C}(T, u) = \mathscr{F}_u(|\cos \theta|, T); \qquad \mathscr{S}(T, u) = \mathscr{F}_u(|\sin \theta|, T). \tag{3}$$

Les hypothèses H 1, H 2 permettent d'écrire les deux premiers moments des intégrales (2) sous la forme (*voir* [3])

$$\left\{\begin{aligned} & E\mathscr{F}_u(f, T) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, P_{X(0);\, \theta(0)}(u; \theta)\, E[\|X'(0)\| / X(0) = u,\ \Theta(0) = \theta]\, d\theta \\ & E\mathscr{F}_u(f, T)\, \mathscr{F}_v(g, T) \\ & \quad = |T|^{-2} \int_{T \times T} ds\, dt \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\, P_{X(s),\, X(t);\, \theta(s),\, \theta(t)}(u, v; \theta, \varphi) \\ & \qquad \times E[\|X'(s)\|\, \|X'(t)\| / X(s) = u,\ X(t) = v;\ \Theta(s) = \theta,\ \Theta(t) = \varphi]\, d\varphi. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

où $P_{X(t);\, \theta(t)}(u; \theta)$ désigne la densité conjointe des variables $X(t)$ et $\Theta(t)$ au point $(u; \theta)$.

Soient λ_+ et λ_- ($\lambda_+ \geqq \lambda_-$) les deux valeurs propres de la matrice Σ; le calcul montre que

$$E\|X'(0)\| = \sqrt{\frac{2\lambda_+}{\pi}}\, \mathscr{E}\left(\sqrt{1 - \frac{\lambda_-}{\lambda_+}}\right) = g(\Sigma) \tag{5}$$

où $\mathscr{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$ est l'intégrale elliptique de second ordre.

Les formules (4) appliquées aux fonctionnelles (3) suggèrent les estimateurs suivants pour les paramètres $\gamma_1 = (\sigma_{11})^{1/2}$, $\gamma_2 = (\sigma_{22})^{1/2}$ et $\gamma_3 = g(\Sigma)$

$$\left\{\begin{aligned} & \hat{\gamma}_1(T, u) = \pi \exp(u^2/2)\, \mathscr{C}(T, u), \qquad \hat{\gamma}_2(T, u) = \pi \exp(u^2/2)\, \mathscr{S}(T, u), \\ & \qquad \hat{\gamma}_3(T, u) = (2\pi)^{1/2} \exp(u^2/2)\, \mathscr{L}(T, u) \end{aligned}\right. \tag{6}$$

lesquels ont la propriété d'être sans biais. Si on suppose que $0 < \sigma_{12}^2 < \sigma_{11}\sigma_{22}$, les valeurs propres λ_+, λ_- de la matrice Σ sont données par la relation

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}\right]. \tag{7}$$

Soit $r = \lambda_- / \lambda_+$; la fonction $g(\Sigma)$ peut s'écrire alors comme une fonction de la variable r et des paramètres σ_{11} et σ_{22}

$$g(\Sigma) = \sqrt{\sigma_{11} + \sigma_{22}}\, h(r) \qquad \text{où} \quad h(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi(1 + r)}}\, \mathscr{E}(\sqrt{1 - r}) \tag{8}$$

et σ_{12}^2 peut s'écrire aussi comme

$$\sigma_{12}^2 = \frac{(1 - r)^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - (1 + r)^2 (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4(1 + r)^2}. \tag{9}$$

La fonction h est une fonction strictement croissante de r, et elle est définie de l'intervalle (0, 1) sur $(\sqrt{2/\pi}, \sqrt{\pi/2})$. D'après les relations (8) et (9) on peut définir les estimateurs suivants :

De r :

$$\hat{r}(\mathrm{T}, u)=\begin{cases} h^{-1}(\hat{\alpha}(\mathrm{T}, u)) & \text{si } \hat{\alpha}\in \operatorname{Im} h \\ 1 & \text{si } \hat{\alpha}\notin \operatorname{Im} h \end{cases}$$

où

$$\hat{\alpha}(\mathrm{T}, u)=\frac{\hat{\gamma}_3(\mathrm{T}, u)}{\sqrt{\hat{\gamma}_1^2(\mathrm{T}, u)+\hat{\gamma}_2^2(\mathrm{T}, u)}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathscr{L}(\mathrm{T}, u)}{\sqrt{\mathscr{C}^2(\mathrm{T}, u)+\mathscr{S}^2(\mathrm{T}, u)}}$$

$\hat{\alpha}(\mathrm{T}, u)$ est toujours supérieur ou égale à $\sqrt{(2/\pi)}$, mais il peut dépasser $\sqrt{\pi/2}$, ce qui est le cas quand le champ tend à devenir isotrope ($r=1$, $\sigma_{12}^2=0$). Ce qui nous amène, en utilisant (9), à définir l'estimateur de σ_{12}^2 comme suit :

$$\hat{\sigma}_{12}^2(\mathrm{T}, u)=\frac{(1-\hat{r}(\mathrm{T}, u))^2(\hat{\gamma}_1^2(\mathrm{T}, u)+\hat{\gamma}_2^2(\mathrm{T}, u))^2-(1+\hat{r}(\mathrm{T}, u))^2(\hat{\gamma}_1^2(\mathrm{T}, u)-\hat{\gamma}_2^2(\mathrm{T}, u))^2}{4(1+\hat{r}(\mathrm{T}, u))^2}$$

si $\hat{r}(\mathrm{T}, u)\neq 1$ et

$\hat{\sigma}_{12}^2(\mathrm{T}, u)=0$ si $\hat{r}(\mathrm{T}, u)=1$.

DÉFINITION. — On dit que X satisfait une condition de ρ-mélange si

$$\sup\{|\mathrm{EZ_B Z_{B'}}-\mathrm{EZ_B EZ_{B'}}|:\mathrm{Z_B}\in\sigma(\mathrm{B}),\ \mathrm{Z_{B'}}\in\sigma(\mathrm{B'})\}=\rho(d(\mathrm{B}, \mathrm{B'}))\to 0 \quad \text{quand } d\to\infty$$

où B et B′ sont deux boréliens de $\mathbb{R}^2$ et $\sigma(\mathrm{B})=\sigma\{\mathrm{X}(t): t\in \mathrm{B}\}$.

THÉORÈME. — *Si les conditions* H 1 *et* H 2 *sont vérifiées et qu'en plus*

H 3 : *La fonction de covariance* Γ *de* X *est telle que* $\Gamma(u)$, $\Gamma'(u)$ *et* $\Gamma''(u)$ *tendent vers zéro quand* $|u|\to\infty$.

H 4 : X *satisfait une condition de* ρ*-mélange et il existe* $\delta>0$ *tel que*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\rho(k)^{\delta/2+\delta}<\infty.$$

H 5 : *Les moments d'ordre* $2+\delta$ *de* $\mathscr{L}(\mathrm{T}, u)$ *sont finis.*

Alors

(10) $$\lambda^2 \operatorname{cov}(\hat{\gamma}_k(\lambda \mathrm{T}, u), \hat{\gamma}_l(\lambda \mathrm{T}, u))\to \mathrm{V}_{kl}(\mathrm{T}), \qquad k, l=1, 2, 3.$$

quand $\lambda\to\infty$, *et de plus*

(11) $$\lambda(\hat{\gamma}_1(\lambda \mathrm{T}, u)-\gamma_1, \hat{\gamma}_2(\lambda \mathrm{T}, u)-\gamma_2, \hat{\gamma}_3(\lambda \mathrm{T}, u)-\gamma_3)$$

converge faiblement vers un processus de Wiener tri-dimensionnel $\mathrm{W_V}(\mathrm{T})$ *indexé par les rectangles* $\mathrm{T}\in\mathbb{R}^2$ *et de matrice de covariance* $\mathrm{V}(\mathrm{T})=(\mathrm{V}_{kl})_{k, l=1, 2, 3}$ *dont les éléments sont donnés par les formules suivantes :*

(12) $$\mathrm{V}_{kl}(\mathrm{T})=|\mathrm{T}|^{-1}\exp(u^2)\int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{H}_{0, t}^{k, l}(u, u)\,dt, \qquad k, l=1, 2, 3.$$

où

$$\mathrm{H}_{s, t}^{k, l}(u, v)=\mathrm{P}_{\mathrm{X}(s), \mathrm{X}(t)}(u, v)\,h_{s, t}^{k, l}(u, v)-\mathrm{P}_{\mathrm{X}(s)}(u)\,\mathrm{P}_{\mathrm{X}(t)}(v)\,h_s^k(u)\,h_t^l(v)$$

et

$$h_{s, t}^{k, l}(u, v)=\begin{cases} \pi^2\,\mathrm{E}(|\mathrm{X}'_k(s)||\mathrm{X}'_l(t)|/\mathrm{X}(s)=u, \mathrm{X}(t)=v), & k, l=1, 2 \\ 2\pi\,\mathrm{E}(\|\mathrm{X}'(s)\|\,\|\mathrm{X}'(t)\|/\mathrm{X}(s)=u, \mathrm{X}(t)=v), & k=l=3 \\ \pi\sqrt{2\pi}\,\mathrm{E}(\|\mathrm{X}'(s)\|\,|\mathrm{X}'_k(t)|/\mathrm{X}(s)=u, \mathrm{X}(t)=v), & k=1, 2;\ l=3 \end{cases}$$

et $h_s^k(u)\, h_t^l(v)$ *désigne dans chaque cas le produit des espérances conditionnelles sachant* $X(s)=u$ *et sachant* $X(t)=v$.

Remarques. — 1. Le théorème entraîne la consistance des estimateurs $\hat{\gamma}_1(\lambda T, u)$, $\hat{\gamma}_2(\lambda T, u)$, $\hat{\gamma}_3(\lambda T, u)$ et en plus leur indépendance asymptotique.

2. On déduit aussi la consistance et la normalité asymptotique des estimateurs $\hat{r}(\lambda T, u)$ et $\hat{\sigma}_{12}^2(\lambda T, u)$.

Démonstration. — La démonstration découle du résultat général sur le comportement asymptotique des fonctionnelles du type (2) qui est traité dans [4].

Note reçue le 19 septembre 1988, acceptée le 26 septembre 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] E. M. CABAÑA, *Estimation of the spectral moments, by means of extrema*, Reporte n° 84-08, Dto. de Matematicas y Ciencias de la Computacion, Universidad Simon Bolivar, Caracas, 1984.

[2] E. M. CABAÑA, Affine Processes: A Test of Isotropy based on Level Sets, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, 47, n° 4, 1987.

[3] E. M. CABAÑA, Esperanzas para Integrales sobre Conjuntos de Nivel Aleatorios, *Actas II Congreso Latinoamericano de Probabilidades Y Estadistica Matematica* (II CLAPEM), Caracas, 1985.

[4] I. IRIBARREN, Asymptotic behaviour of the integrals of a function on the level set of a mixing random field, *Prob. and Math. Stat.*, 10, Fasc. 1, 1988.

[5] G. LINDGREN, Spectral moments estimation by means of level crossing, *Biometrika*, 61, n° 3, 1974, p. 401.

[6] M. S. LONGUET-HIGGINS, The statistical analysis of a random moving surface, *Phil. Trans. A.*, 249, 1957, p. 321-387.

[7] M. WSCHEBOR, Surfaces aléatoires. Mesures géométriques des ensembles de niveau, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, n° 1147, 1985.

C. B. : *Laboratoire de Statistique appliquée*, Bât. n° 425, U.A. n° 743, *Université Paris-Sud*, 91405 *Orsay Cedex;*

I. I. : *Departamento de Matematicas, Instituto Venezolano de Investigaciones Cientificas, Apartado* 21827, *Caracas* 1020-*A*, *Venezuela.*