Luc Robbiano

Unicité du problème de Cauchy : ensembles nodaux : régularité des problèmes elliptiques

Thèses d'Orsay, 1990

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1990__0276__P0_0>

ORSAY
n° d'ordre

63830

UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

THÈSE

Présentée

Pour obtenir

le Titre de Docteur d'Etat

Spécialité : **Mathématiques**

par

Luc ROBBIANO

SUJET : **Unicité du problème de Cauchy. Ensemble nodaux. Régularité des problèmes elliptiques.**

soutenue le **11 Décembre 1990** devant la Commission d'examen

MM. J.-M. BONY, Président
S. ALINHAC
G. LEBEAU
N. LERNER
X. SAINT RAYMOND
J.-C. SAUT
C. ZUILY

Abstract

This thesis in on three parts.

1. Uniqueness in Cauchy's problem

For this problem, the pseudo-convexity is a crucial hypothesis. We study the construct to counterexample when this hypothesis is not verified, or uniqueness with assumption of weak pseudo-convexity.

2. Nodal set

We study the Hausdorff dimension and the capacity of nodal set to solutions of elliptic equations. We generalize results known for the laplacian.

3. Regularity to elliptic problem

We give results of regularity, in a almost general frame, to solutions of nonlinear elliptic problems with Sobolev critical exponents.

AMS Subjets classification (1985). 35 A 07, 35 L 80, 35 R 25, 35 J 20, 35 J 60, 35 B 65.

Remerciements

Comment remercier un directeur de thèse? Par l'impulsion donnée, il influence les travaux futurs de son élève. S. Alinhac a su me donner un sujet convenant à mon goût. Je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie également les autres membres du jury, G. Lebeau, J.-C. Saut, J.-M. Bony qui a accepté d'être le président, N. Lerner qui a eu la gentillesse de travailler avec moi, X. Saint-Raymond et C. Zuily pour les multiples discussions que nous avons eues.

Mes remerciements vont aussi à H. Bahouri, J. Salazar et A. Benmohamed qui, par leur travail, ont contribué à cette thèse.

Enfin, je remercie Mesdames Bardot et Bérat qui ont tapé ces articles.

Table des Matières

I. Unicité du problème de Cauchy

1. *Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal,* avec N. Lerner, publié au Journal d'Analyse Mathématique, 44 (1984/85), 32-66.

2. *Sur les conditions de pseudo-convexité et l'unicité du problème de Cauchy,* publié à Indiana University Mathematics Journal 36 (1987), 333-347.

3. *Unicité de Cauchy pour des opérateurs faiblement hyperboliques,* avec H. Bahouri, publié à Hokkaido Mathematical Journal, 16 (1987), 257-275.

4. *Théorème d'unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques,* à paraître au Communications in Partial Differential Equations.

II. Ensembles nodaux

1. *Sur les zéros de solutions d'inégalités différentielles elliptiques,* publié au Communication in Partial Differential Equations, 12 (1987), 903-919.

2. *Dimension des zéros d'une solution faible d'un opérateur elliptique,* publié au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 67 (1988), 339-357.

3. *Dimension de Hausdorff et capacité des points singuliers d'une solution d'un opérateur elliptique,* avec J. Salazar, publié au Bulletin des Sciences Mathématiques, 114 (1990), 329-336.

III. Régularité des problèmes elliptiques

Exposant critique de Sobolev et régularité des solutions d'équations elliptiques, avec A. Benmohamed, à paraître aux Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 7 (1990).

Unicité du problème de Cauchy.
Ensembles nodaux.
Régularité des problèmes elliptiques.

Résumé

Cette thèse se compose de trois parties. La première traite de l'unicité du problème de Cauchy. La deuxième concerne l'étude des ensembles nodaux des solutions d'équations elliptiques. La troisième est une étude de la régularité des solutions d'équations (et de systèmes) elliptiques avec exposants critiques de Sobolev.

1. Unicité de Cauchy

Décrivons tout d'abord le cadre où se situe l'unicité du problème de Cauchy.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $P(x, D_x)$ un opérateur différentiel d'ordre m à cœfficients C^∞, on note $p(x,\xi)$ le symbole principal de P. Soit $x_0 \in \Omega$ et une surface C^∞, S passant par x_0 et définie par $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ $(d\varphi(x_0 \neq 0)$. Le problème s'énonce alors :

$$\text{soit } u \in C^\infty \text{ vérifiant } Pu = 0 \text{ sur } \Omega$$
$$u(x) = 0 \text{ pour } x \in S_- = \left\{x \in \Omega \big/ \varphi(x) < \varphi(x_0)\right\}$$

existe-t-il un voisinage ω de x_0 tel que $u = 0$ sur ω ?

Une propriété plus faible appelée unicité compacte est aussi étudiée et s'énonce :

$$\text{soit } u \in C^\infty \text{ vérifiant } Pu = 0 \text{ sur } \Omega$$
$$S_- \subset \complement \operatorname{supp} u \text{ et } S \cap \operatorname{supp} u = \{x_0\}$$

existe-t-il un voisinage ω de x_0 tel que $u = 0$ sur ω ?

Les résultats les plus importants pour l'unicité sont ceux de Calderón [8] et ceux de Hörmander [12]. (Voir Zuily [27] pour trouver la plupart des résultats sur l'unicité.)

Décrivons succinctement le résultat de Hörmander qui généralise celui de Calderón. Notons $\zeta = \xi + i\gamma d\varphi(x)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$, et $p_\gamma(x,\xi) = (x, \xi + i\gamma d\varphi(x))$. On dit que S est strictement pseudo-convexe pour P si pour tout (x,ζ) vérifiant

$$p(x,\zeta) = \{p, \varphi\}(x,\zeta) = 0$$

alors

$$\text{si } \gamma = 0 \quad \Re e\{\bar{p}\{p,\varphi\}\}(x,\xi) < 0$$
$$\text{si } \gamma \neq 0 \quad \frac{1}{2i\gamma}\{\bar{p}_\gamma, p_\gamma\}(x,\zeta) < 0 \ .$$

En fait cette hypothèse n'est pertinente que si l'on suppose que P est principalement normal, c'est-à-dire

$$\text{il existe } C > 0, \text{ pour tout } x \in \Omega \text{ et tout } \xi \in \mathbf{R}^n,$$
$$|\{p,\bar{p}\}(x,\xi)| \leq C\,|p|\,|\xi|^{m-1}$$

où $\bar{p}(x,\xi) = \overline{p(x,\xi)}$.

Dans ce cas quand γ tend vers 0, $\frac{1}{2i\gamma}\{\bar{p}_\gamma, p_\gamma\}$ converge vers $\Re e\{\bar{p}, \{p,\varphi\}\}$.

Sous ces deux conditions HÖRMANDER [**12**] (voir également HÖRMANDER [**14**], LERNER [**15**]) a démontré que P vérifie la propriété du problème de Cauchy par rapport à S.

Un certain nombre de contre-exemples à l'unicité sont connus, voir par exemple PLIŠ [**17**], [**18**], [**19**], DE GIORGI [**10**], COHEN [**9**], HÖRMANDER [**12**], [**13**], ALINHAC-BAOUENDI [**2**], ALINHAC-ZUILY [**3**]. ALINHAC [**1**] a donné les premiers contre-exemples montrant que les hypothèses géométriques de Hörmander sont pratiquement nécessaires. Sans entrer dans les détails, ALINHAC [**1**] a démontré que l'hypothèse de principale normalité est essentiellement nécessaire. (Voir également [**20**] et SAINT RAYMOND [**23**].)

Pour les caractéristiques doubles, il faut distinguer plusieurs cas selon que p est à cœfficients réels ou à cœfficients complexes (par exemple $dp \wedge d\bar{p} \neq 0$) et les cas des caractéristiques réelles et complexes (au sens $\gamma \neq 0$). Dans le cas p réel et avec une caractéristique double réelle ALINHAC [**1**] a prouvé que la pseudo-convexité est essentiellement nécessaire (voir également SAINT RAYMOND [**21**] et BAHOURI [**4**]). Pour p complexe et une caractéristique double réelle SAINT RAYMOND [**22**], sous une hypothèse beaucoup plus forte que la négation de la pseudo-convexité, a construit des contre-exemples à l'unicité. Dans I-2 on a prouvé que l'hypothèse de pseudo-convexité est pratiquement nécessaire pour que des problèmes perturbés possèdent l'unicité (on perturbe P et la surface S). En fait ce cas n'est pas encore bien compris. Pour les caractéristiques complexes doubles ALINHAC [**1**] a construit des contre-exemples à l'unicité. Dans I-2, on a prouvé que si p est à cœfficients analytiques alors on peut se ramener au cas du théorème de Alinhac. Ce qui rend pratiquement nécessaire l'hypothèse de pseudo-convexité dans ce cas.

Il existe néanmoins un certain nombre de cas qui ne sont pas traités par les théorèmes ci-dessus. Dans I-1, on a démontré que pour un opérateur d'ordre 2 à cœfficients réels alors

$$p(x,\xi) = \{p,\varphi\}(x,\xi) = 0 \Rightarrow \{p\{p,\varphi\}\}(x,\xi) \leq 0$$

entraîne l'unicité compacte. Sous une hypothèse aussi faible l'unicité n'est pas toujours vraie comme l'a démontré BAHOURI [4].

Dans I-3, on a étudié des opérateurs hyperboliques faibles non effectivement hyperboliques. Dans ce cas les caractéristiques sont doubles mais la situation géométrique est supposée simple (les caractéristiques forment une variété sur laquelle la forme symplectique est de rang constant).

On trouve dans le cas involutif des opérateurs possédant l'unicité mais pour lesquels le problème de Cauchy est mal posé. Dans le cas non involutif la situation est moins claire et on ne démontre que de l'unicité compacte.

L'article I-4 a un rôle à part dans ce contexte. Typiquement on regarde l'unicité pour $\Box + V(x)$, où V est C^∞, par rapport à une surface $\varphi(x) = 0$ ($\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$). V ne dépend pas du temps et celà permet de se passer d'hypothèse de pseudo-convexité sur φ. Ce résultat s'applique à la théorie du contrôle par l'intermédiaire de la méthode que LIONS [16] a appelé "Hilbert Uniqueness Method".

2. Ensembles nodaux

Soit M une variété riemannienne compacte et Δ le laplacien sur M, si u est une fonction propre de Δ l'ensemble $\{u = 0\}$ est un ensemble nodal de M. En fait l'étude réalisée se place dans un cadre un peu plus général. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et A un opérateur elliptique (à cœfficients Lipschitziens) et soit u une fonction non nulle (supposée $C^{1+\delta}$ dans II-1 et H^1 dans II-2 et II-3) vérifiant $|Au| \leq C(|u| + |\nabla u|)$.

Dans II-1 et II-2, on démontre que la dimension de Hausdorff de $\{u = 0\}$ est $n-1$ et celle de $\{u = 0, \nabla u = 0\}$ est $n-2$. L'article II-3 précise que dans ce cas $\{u = 0\}$ est réunion dénombrable d'ensembles de mesure de Hausdorff $(n-1)-$dimensionnelle finie, avec un résultat analogue pour $\{u = 0, \nabla u = 0\}$. L'article II-3 est principalement consacré à l'étude de l'ensemble $\{\nabla u = 0\}$ où u vérifie

$$|Au| \leq C\,|\nabla u| .$$

On démontre que $\{\nabla u = 0\}$ est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure de Hausdorff $(n-2)-$dimensionnelle finie. On en déduit que $\{\nabla u = 0\}$ est de capacité nulle. Cette propriété a permis à SALAZAR [24] d'étendre ses résultats obtenus pour le laplacien. La technique de démonstration repose sur les idées de CAFFARELLI et FRIEDMAN [6] et[7]. (Voir HARDT et SIMON [11] pour des améliorations.)

3. Régularité des problèmes elliptiques

Le problème de régularité de solutions de problèmes elliptiques avec exposants critiques de Sobolev intervient naturellement dans des problèmes provenant de la géométrie (voir BREZIS et CORON [5], TRUDINGER [25], WENTE [26]). L'étude de ce type de problèmes nous a amené à considérer la régularité des solutions d'opérateur linéaire d'ordre 2 à cœfficients dans des L^p avec $p = n$ pour les termes d'ordre 1 et $p = \frac{n}{2}$ pour les termes d'ordre 0. Les espaces L^p sont bien adaptés à l'étude des termes non linéaires.

Bibliographie

[1] S. Alinhac : *Non unicité du problème de Cauchy,* Annals of Mathematics, 117 (1983), 77-108.

[2] S. Alinhac, S. Baouendi : *Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal,* Sem. Goulaouic-Schwartz, 1978/79, exposé XXII, (Ecole Polytechnique, Paris).

[3] S. Alinhac-C. Zuily : *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles,* Comm. in P.D.E., 6 (1981), 799-828.

[4] H. Bahouri : *Non unicité de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel,* Comm. in P.D.E., 8 (1983), 1521-1547.

[5] H. Brezis, J-M. Coron : *Multiple solution of $H-$systems and Rellich's conjecture,* C.P.A.M., 37 (1984), 149-187.

[6] L. Caffarelli, A. Friedman : *The free boundary in the Thomas-Fermi atomic model,* J. Differential Equations, 32 (1979), 335-356.

[7] L. Caffarelli, A. Friedman : *Partial regularity of zero-set of solutions of linear and superlinear elliptic equations,* J. Differential equations, 60 (1985), 420-433.

[8] A.P. Calderón : *Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations,* Amer. J. of Math., 80 (1958), 16-36.

[9] P. Cohen : *The non uniqueness of the Cauchy problem,* O.N.R. Techn. Report, 93, Stanford 1960.

[10] E. De Giorgi : *Un esempio di non-uncita della soluzione del problema di Cauchy, relativo ad una equazione differenziale lineare a derivate parziali di tipo parabolico,* Rendic. di Mat. e della sua Appl., 5ème ser, 14 (1955), 382-387.

[11] R. Hardt, L. Simon : *Nodal sets for solutions of elliptic equations,* J. Differential geometry, 30 (1989), 505-522.

[12] L. Hörmander : *Linear partial differential operators,* Springer Verlag, Berlin 1963.

[13] L. Hörmander : *Non uniqueness for the Cauchy problem,* Lecture Notes in Math., 459 (1975), 36-72.

[14] L. Hörmander : *The analysis of linear partial differential operators,* Springer Verlag, Berlin 1985.

[15] N. Lerner : *Unicité de Cauchy pour des opérateurs différentiels faiblement principalement normaux,* J. des Math. Pures et Appl., 64 (1985), 1-11.

[16] J.L. Lions : *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués,* Masson, Paris.

[17] A. Pliš : *The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differential equations,* Bull. Acad. Pol. Sci., 2 (1954), 55-57.

[18] A. PLIŠ : *A smooth linear elliptic differential equation without any solutions in a sphere,* Comm. on Pure and Appl. Math., 14 (1961), 599-617.

[19] A. PLIŠ : *On non-uniqueness in Cauchy problem for an elliptic second order differential equation,* Bull. Acad. Pol. Sci., 11 (1963), 95-100.

[20] L. ROBBIANO : *Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs non elliptiques à symboles complexes,* J. of Diff. Equ., 57 (1985), 200-223.

[21] X. SAINT RAYMOND : *L'unicité pour des problèmes de Cauchy caractéristiques,* Comm. Partial Differential Equation, 7 (1982), 559-579.

[22] X. SAINT RAYMOND : *Non unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux,* Indiana Univ. Math. J., 33 (1984), 847-858.

[23] X. SAINT RAYMOND : *L'unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires du premier ordre,* Enseign. Math., 32 (1986), 1-55.

[24] J. SALAZAR : Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, 1988.

[25] N. TRUDINGER : *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds,* Ann. della Scuola Normale Superiore di Pisa, 22 (1968), 265-274.

[26] H. WENTE : *An existence theorem for surfaces of constant mean curvature,* J. Math. Anal. Appl., 26 (1969), 318-344.

[27] C. ZUILY : *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem,* Progress in Math 33, Birkhäuser, Boston 1983.

I

UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY

UNICITE DE CAUCHY POUR DES

OPERATEURS DE TYPE PRINCIPAL

par

Nicolas LERNER et Luc ROBBIANO

Publié au Journal d'Analyse Mathématique, 44 (1984/85), 32-66.

UNICITE DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS DE TYPE PRINCIPAL

Par

NICOLAS LERNER ET LUC ROBBIANO

Introduction

Nous donnons ici des conditions suffisantes d'unicité de Cauchy et une condition nécessaire et suffisante d'unicité de Cauchy "compacte" (cf. (0.2)) pour des opérateurs différentiels de type principal à coefficients C^∞ réels.

Etant donnés un opérateur P et une hypersurface orientée S, P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S si les conditions

$$\begin{gathered} Pu = 0, \quad \operatorname{supp} u \subset S_+ \\ \text{impliquent } u = 0. \end{gathered} \tag{0.1}$$

Nous dirons que P possède l'unicité de Cauchy compacte par rapport à S si les conditions

$$\begin{gathered} Pu = 0, \quad \operatorname{supp} u \subset S_+, \quad \operatorname{supp} u \cap S \text{ compact} \\ \text{impliquent } u = 0 \end{gathered} \tag{0.2}$$

(cf. le paragraphe 1 pour des définitions précises).

Rappelons brièvement, dans le cadre présent, le résultat de Hörmander ([9] th. 8.9.1) sous l'hypothèse de pseudo-convexité ([9] déf. 8.6.1) (on pourra consulter également Zuily [15]); si les bicaractéristiques (nulles de p) tangentes à S en x_0 sont "strictement convexes tournées vers S_-", alors P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S. Par ailleurs, Alinhac [1] a prouvé que, si en un point x_0 de S, il existe une bicaractéristique tangente "strictement convexe tournée vers S_+", alors on peut trouver $a \in C^\infty$ telle que $P + a$ ne possède pas l'unicité de Cauchy.

La condition nécessaire et suffisante utilisée ici pour le problème (0.2) examine la position des bicaractéristiques tangentes à une famille d'hypersurfaces sur tout un ouvert et demande qu'elles soient "tournées vers S_- au sens large". On dégage ensuite des conditions suffisantes pour le problème (0.1) dans des cas où il n'y a pas "trop" de bicaractéristiques tangentes à un ordre strictement supérieur à deux (cf. également Bahouri [4]).

La méthode employée repose sur un calcul symbolique avec grand paramètre qui permet d'établir une inégalité de Carleman [6]. Ce point de vue est proche de celui de Treves [13] puis de Menikoff [10] qui utilisent des opérateurs pseudo-différentiels du type $p(x, D_x - i\,|D_s|\,\varphi'(x))$ ($p(x, D_x)$ est l'opérateur P, $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ une équation de l'hypersurface); néanmoins, nous avons préféré à la manipulation délicate de tels opérateurs (dont le symbole n'est pas C^∞ à cause de $|D_s|$) la construction d'un calcul symbolique paramétré.

Nous tenons enfin à remercier Serge Alinhac qui nous a suggéré le corollaire du théorème.

Le plan de l'article est le suivant:

1. Les Resultats Principaux
   1.1. Le cadre du problème
   1.2. Enoncé des résultats
2. Commentaires
   2.1. Invariance des hypothèses
   2.2. Position des bicaractéristiques tangentes
   2.3. Comparaison avec la pseudo-convexité de Hörmander
   2.4. Lien avec le théorème de non unicité d'Alinhac
   2.5. Exemples
3. Calcul Symbolique Avec Grand Parametre
   3.1. Définition des symboles
   3.2. Calcul symbolique
   3.3. Continuité L^2
   3.4. Inégalité de Gårding
4. Preuve
   4.1. Estimation sur les symboles
   4.2. Estimation pour $\|P_\gamma u\|_{L^2} + \|(P_\gamma)^* u\|_{L^2}$
   4.3. Estimation de Carleman
   4.4. Preuve du corollaire.

1. Les resultats principaux

1.1. Le cadre du problème

1.1.1. Soit P un opérateur différentiel d'ordre 2, à coefficients C^∞ pour la partie principale, L^∞_{loc} pour les termes d'ordre inférieur, défini sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, de symbole principal $p(x, \xi)$, supposé réel, dont le champ hamiltonien sera noté H_p.

Soit $\mathcal{H}$ une *famille d'hypersurfaces orientées de Ω*, i.e., la donnéee d'une classe de fonctions $\varphi \in C^\infty$, réelles sur Ω, de gradient ne s'annulant pas, équivalentes pour la relation

$$(1.1) \qquad \varphi \sim \tilde{\varphi} \qquad \text{qui signifie}$$

pour tout x de Ω, il existe $\lambda(x)>0$ tel que $\tilde{\varphi}'(x)=\lambda(x)\varphi'(x)$ (remarquons que λ est alors nécessairement C^∞ car φ' ne s'annule pas).

On suppose que p est de type principal sur Ω, i.e.,

(1.2) $\begin{cases} \text{le vecteur } \dfrac{\partial p}{\partial \xi}(x,\xi) \text{ ne s'annule pas sur } \Omega\times\mathbf{R}^n\setminus 0. \\ \text{Egalement, on fait l'hypothèse que } \mathscr{H} \text{ est non caractéristique} \\ \text{pour } p, \text{ i.e.,} \end{cases}$

(1.3) $\{\{p,\varphi\},\varphi\}$ ne s'annule pas sur Ω, ce qui est indépendant du choix du représentant φ de $\mathscr{H}$.

1.1.2. On dira que *P possède l'unicité de Cauchy compacte relativement à* $\mathscr{H}$ si la propriété suivante est vérifiée.

(1.4) $\begin{cases} \text{Pour tout } x_0\in\Omega, \text{ il existe un ouvert } V\subset\Omega,\ x_0\in V, \text{ tel que,} \\ \text{pour tout voisinage } W \text{ de } x_0 \text{ inclus dans } V, \text{ si} \\ \qquad u\in C^\infty(W),\quad Pu=0 \quad \text{sur } W, \\ \qquad \operatorname{supp} u\subset\{x,\varphi(x)\geqq\varphi(x_0)\} \text{ et en outre} \\ \qquad \operatorname{supp} u\cap\{x,\varphi(x)=\varphi(x_0)\}\subset\subset W \text{ (compact inclus dans } W), \\ \text{on obtienne } u=0 \text{ sur un voisinage de } x_0. \end{cases}$

On vérifie facilement que cette propriété ne dépend pas du choix du représentant φ de $\mathscr{H}$.

On dira que *P possède l'unicité de Cauchy compacte 0-stable relativement à* $\mathscr{H}$ si, pour toute fonction $a\in C^\infty(\Omega)$, $P+a$ possède l'unicité de Cauchy compacte relativement à $\mathscr{H}$.

1.1.3. Soit P un opérateur différentiel d'ordre 2, à coefficients C^∞ pour la partie principale, L^∞ pour les termes d'ordre inférieur, défini sur un voisinage Ω de $x_0\in\mathbf{R}^n$, de symbole principal $p(x,\xi)$ supposé réel, de type principal en x_0. Soit S une hypersurface C^∞ orientée passant par x_0, non caractéristique pour P, i.e., $p(x_0,N_0)\neq 0$ où N_0 est un covecteur non nul du conormal à S en x_0. On définit également $S_+=\{x\in\Omega,\ \varphi(x)\geqq\varphi(x_0)\}$, si $S=\{x\in\Omega,\ \varphi(x)=\varphi(x_0)\}$ (φC^∞ réelle, $\varphi'(x_0)\neq 0$ fournissant une équation de l'hypersurface orientée S).

1.1.4. On dira que P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S près de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 tel que si

$$u\in C^\infty(V),\quad Pu=0 \text{ sur } V,\quad \operatorname{supp} u\subset S_+$$

on obtienne $u=0$ sur un voisinage de x_0.

1.2. Enoncé des résultats

Théorème 1.2.1 (*Condition suffisante d'unicité de Cauchy compacte*).

Soient P et $\mathscr{H}$ comme dans le paragraphe 1.1.1. *On suppose que, pour tout* $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^n$,

(1.5) $$p(x, \xi) = H_p(\varphi)(x, \xi) = 0 \quad \textit{implique} \quad H_p^2(\varphi)(x, \xi) \leqq 0.$$

Alors, P possède l'unicité de Cauchy compacte relativement à $\mathscr{H}$.

L'hypothèse (1.5) ne dépend pas du choix du représentant φ de $\mathscr{H}$ (cf. paragraphe 2).

Théorème 1.2.2 (*C.N.S. d'unicité de Cauchy compacte*).

Soient P et $\mathscr{H}$ comme dans le paragraphe 1.1.1, *P étant à coefficients C^∞.*

Pour que P possède l'unicité de Cauchy compacte 0-*stable relativement à $\mathscr{H}$, il faut et il suffit que* (1.5) *soit vérifiée.*

Corollaire 1.2.1 (*Condition suffisante d'unicité de Cauchy*).

Soient P et S comme dans le paragraphe 1.1.3. *Posons, $S^*(V)$ désignant le fibré en sphère du cotangent $T^*(V)$,*

(1.6) $$\Sigma_V = \{(x, \xi) \in S^*(V),\ p(x, \xi) = H_p(\varphi)(x, \xi) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = 0\},$$

où V est un voisinage de x_0. Alors, il existe un voisinage V_0 de x_0 tel que Σ_{V_0} soit une sous-variété de codimension 3 *de $S^*(V)$. On suppose alors qu'il existe un voisinage V de x_0, $V \subset V_0$, tel que pour tout $\rho \in \Sigma_V$,*

(1.7) $$\begin{aligned} &\text{(i)}\ H_p^2(\varphi)(\rho) \leqq 0, \\ &\text{(ii)}\ \mathrm{Hess}\ H_p^2(\varphi)(\rho)_{|\Sigma_V} < 0 \ \textit{si}\ H_p^2(\varphi)(\rho) = 0. \end{aligned}$$

Alors P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S près de x_0 (cf. paragraphe 1.1.4).

2. Commentaires

2.1. Invariance des hypothèses

2.1.1. Invariance de (1.5).

Supposons que (1.5) soit vérifiée pour un représentant φ de la famille $\mathscr{H}$ alors elle l'est pour une fonction $\tilde{\varphi}$ équivalente car, λ étant nécessairement C^∞, $H_p(\tilde{\varphi}) = \lambda H_p(\varphi)$ et $H_p^2(\tilde{\varphi}) = \lambda H_p^2(\varphi) + H_p(\lambda) H_p(\varphi)$ avec $\lambda > 0$.

2.1.2. Hypothèses du corollaire.

Remarquons que, pour ce corollaire, les données sont un opérateur et une hypersurface et non pas comme précédemment un opérateur et une famille d'hypersurfaces.

Lemme 2.1.1.

(a) *Il existe un voisinage V de x_0 tel que Σ_V définie par* (1.6) *soit une sous-variété de codimension* 3 *de $S^*(V)$.*

(b) Σ_V *ne dépend que de l'opérateur P et de l'hypersurface S.*

Preuve. Il suffit, pour montrer (a), d'établir que

$$dp \wedge dH_p(\varphi) \wedge d\varphi \wedge \xi \neq 0$$

sur $\tilde{\Sigma}_V = \{(x,\xi) \in V \times \mathbf{R}^n,\ p(x,\xi) = H_p(\varphi)(x,\xi) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = |\xi|^2 - 1 = 0\}$. En effet les vecteurs p'_ξ, $\{p,\varphi\}'_\xi$, ξ sont indépendants sur $\tilde{\Sigma}_V$ car si

$$\alpha p'_\xi + \beta\{p,\varphi\}'_\xi + \gamma\xi = 0$$

alors

$$\begin{cases} \alpha p'_\xi \cdot \varphi'_x + \beta\{p,\varphi\}'_\xi \cdot \varphi'_x + \gamma\xi \cdot \varphi'_x = 0 \\ \text{et} \\ \alpha p'_\xi \cdot \xi + \beta\{p,\varphi\}'_\xi \cdot \xi + \gamma|\xi|^2 = 0. \end{cases}$$

Or $p'_\xi \cdot \varphi'_x = \{p,\varphi\} = 0 = p = \frac{1}{2}p'_\xi \cdot \xi$, et en outre $\{p,\varphi\}'_\xi \cdot \xi = \{p,\varphi\} = 0$, d'où $\gamma = 0$ car $\xi \neq 0$ et $\beta = 0$ car p est d'ordre 2 non caractéristique, et par suite $\alpha = 0$ car p est de type principal en x_0 donc sur un voisinage V assez petit de x_0. Par suite, comme $\varphi = \varphi(x)$, $\varphi'(x_0) \neq 0$ donc $\varphi'(x) \neq 0$ dans un voisinage de x_0 on obtient l'indépendance des gradients.

Pour le (b), si $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x_0)$ est une autre équation de S, comme $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x_0)$ équivaut dans un voisinage de x_0 à $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ et que, *sur S*, $\tilde{\varphi}'(x) = \lambda(x)\varphi'(x)$, $\lambda \neq 0$, on obtient le résultat.

Montrons maintenant que l'hypothèse (1.7) ne dépend pas du choix de l'équation de S. Comme Σ ne dépend que de l'opérateur et de S, il suffit de prouver que, supposant $\varphi(x_0) = 0$, $H_p^2(\lambda\varphi) \leqq 0$ en tout point de Σ si $\lambda(x_0) > 0$. Or $H_p^2(\lambda\varphi) = \lambda H_p^2(\varphi)$ sur Σ et on obtient (i). En outre si $H_p^2(\varphi)(\rho) = 0$, $\rho \in \Sigma$ alors

$$\text{Hess}\, H_p^2(\lambda\varphi)(\rho)_{T_\rho(\Sigma)\times T_\rho(\Sigma)} = \lambda\ \text{Hess}\, H_p^2(\varphi)(\rho)_{|T_\rho(\Sigma)\times T_\rho(\Sigma)},$$

car $(H_p^2(\varphi))(\rho)_{T_\rho(\Sigma)} = 0$ car $H_p^2(\varphi)(\rho) = 0$ et $H_p^2(\varphi) \leqq 0$ sur Σ.

2.2. Position des bicaractéristiques tangentes

Pour les théorèmes, nous avons le lemme suivant.

Lemme 2.2.1. *Soient P et $\mathcal{H}$ vérifiant les hypothèses du théorème* 1.2.1. *Alors pour tout* $x_0 \in \Omega$, $\xi_0 \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, *si* $p(x_0,\xi_0) = H_p(\varphi)(x_0,\xi_0) = 0$, *la bicaractéristique tangente issue de* (x_0,ξ_0) *définie par* (2.2) *reste localement du "bon côté", i.e., vérifie*

$$\varphi(\omega(s)) \leqq \varphi(\omega(0)) \qquad \textit{pour s dans un voisinage de } 0_{\mathbf{R}}.$$

En particulier, si une bicaractéristique tangente a un contact d'ordre fini avec une hypersurface de la famille $\mathcal{H}$, nécessairement ce contact est d'ordre pair et du "bon côté", i.e.,

$$p(x_0, \xi_0) = H_p^l(\varphi)(x_0, \xi_0) = 0, \qquad 1 \leqq l < 2k,$$

et $H_p^{2k}(x_0, \xi_0) < 0$.

Il est trivial de remarquer que, réciproquement si on suppose les bicaractéristiques tangentes en "bonne position localement sur tout l'ouvert Ω" (i.e., pour tout $x_0 \in \Omega$, si $p(x_0, \xi_0) = H_p(\varphi)(x_0, \xi_0) = 0$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $|s| < \varepsilon$, $\varphi(\omega(s)) \leqq \varphi(\omega(0))$, où ω est définie pour (2.2)), alors l'hypothèse (1.5) est vérifiée.

Preuve du lemme. Remarquons tout d'abord que

(2.1) $$dp \wedge d\{p, \varphi\} \neq 0 \qquad \text{sur } p = \{p, \varphi\} = 0.$$

En effet, supposant $\varphi \equiv t$ au voisinage de x_0, $(t, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ un système de coordonnées centré en x_0 de variables duales (τ, ζ), on a sur $p = p'_\tau = 0$

$$d_{\tau,\zeta}p = p'_\zeta \cdot d\zeta,$$

$$d_{\tau,\zeta}p'_\tau = p''_{\tau\zeta} \cdot d\zeta + p''_{\tau\tau}d\tau.$$

Or, comme p est de type principal on a $p'_\eta \neq 0$, et comme par ailleurs $p''_{\tau\tau} \neq 0$ d'aprés (1.3), on obtient (2.1).

Soit $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times \mathbf{R}^n \setminus 0$ avec $p(x_0, \xi_0) = H_p(\varphi)(x_0, \xi_0) = 0$. Considérons la bicaractéristique de p issue de (x_0, ξ_0), i.e., la courbe intégrale $\omega(s)$ du champ hamiltonien de p,

(2.2) $$\dot{\omega}(s) = H_p(\omega(s)), \quad \omega(0) = (x_0, \xi_0).$$

Posons $t(x, \xi) = \varphi(x) - \varphi(x_0)$. Comme p est de type principal, on a en particulier $dp \neq 0$, et on peut écrire dans une carte locale symplectique centrée en (x_0, ξ_0) (non nécessairement homogène)

$$p = \xi_1, \quad H_p = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad (x, y, \xi_1, \eta)$$

étant un système de coordonnées symplectiques.

Or l'hypothèse (1.5) assure que, dans *tout un ouvert*, voisinage de 0, en continuant à noter t la fonction sur la carte,

$$\xi_1 = \frac{\partial t}{\partial x_1} = 0 \quad \text{implique} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x_1^2} \leqq 0.$$

Comme, d'après (2.1), les gradients de ξ_1, $\partial t/\partial x_1$ sont indépendants on a, soit $\partial^2 t/\partial x_1^2 \neq 0$, soit $\partial^2 t/\partial x_1 \partial y_j \neq 0$ pour un j, soit $\partial^2 t/\partial x_1 \partial \eta_j$ pour un j.

Dans le premier cas, on a $\partial^2 t/\partial x_1^2 < 0$, cas classique de la pseudo-convexité qui donne bien entendu une bicaractéristique tangente "tournée vers le bas des deux côtés".

(2.3) On peut donc supposer $\dfrac{\partial^2 t}{\partial x_1 \partial y_1} \neq 0.$

Considérons l'équation

$$\frac{\partial t}{\partial x_1}(x_1, y_1, 0_{\mathbf{R}^{n-2}}, 0_{\mathbf{R}_{\xi_1}}, 0_{\mathbf{R}_\eta^{n-1}}) = 0,$$

que l'on notera simplement

$$\frac{\partial t}{\partial x_1}(x_1, y_1) = 0.$$

De (2.3), il vient l'existence d'une fonction θ, C^∞ réelle définie sur un voisinage de $0_{\mathbf{R}}$, telle que

$$\frac{\partial t}{\partial x_1}(x_1, y_1) = (y_1 - \theta(x_1))\nu(x_1, y_1), \qquad \nu(0,0) \neq 0, \quad \theta(0) = 0.$$

Dans ces coordonnées, la bicaractéristique est $(x_1, 0)$, et on a, comme $t(0,0) = 0$,

$$t(x_1, 0_{\mathbf{R}^{2n-1}}) = \int_0^{x_1} \frac{\partial t}{\partial x_1}(s,0)ds = -\int_0^{x_1} \theta(s)\nu(s,0)ds,$$

et donc, comme $\theta(0) = 0$,

$$t(x_1, 0) = -\iint 1_{(0,x_1)}(s) 1_{(0,s)}(u)\theta'(u)\nu(s,0)duds. \tag{2.4}$$

Or (1.5) assure $-\theta'(x_1)\nu(x_1, \theta(x_1)) \leqq 0$, et supposant $\nu(0,0) > 0$ (resp. < 0) on a $\theta'(x_1) \geqq 0$ (resp. $\leqq 0$) sur un voisinage de 0. Comme $|u| \leqq |s| \leqq |x_1|$ sur l'intégrant de (2.4), on a, pour $|x_1|$ assez petit, $\theta'(u) \geqq 0$ (resp. $\leqq 0$) $\nu(s,0) > 0$ (resp. < 0) et on obtient

$$t(x_1, 0) \leqq 0, \qquad \text{pour } x_1 \text{ dans un voisinage de } 0, \tag{2.5}$$

ce qui signifie que les bicaractéristiques tangentes sont "tournées vers le bas des deux côtés".

2.3. Comparaison avec la pseudo-convexité de Hörmander [9]

(a) Rappelons la conséquence du résultat de Hörmander [9] pour un opérateur P d'ordre 2 à coefficients C^∞ réels défini au voisinage de x_0, de symbole principal p. On se donne une hypersurface C^∞ orientée S, passant par x_0.

Théorème (Hörmander [9]).
On suppose que, φ étant une fonction réelle C^∞, $\varphi'(x_0) \neq 0$, $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ étant une équation de S, pour tout $\xi_0 \in \mathbf{R}^n \setminus 0$ tel que

$$p(x_0, \xi_0) = H_p(\varphi)(x_0, \xi_0) = 0 \qquad \textit{alors } H_p^2(\varphi)(x_0, \xi_0) < 0. \tag{2.7}$$

On obtient que P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S près de x_0, i.e., qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\textit{si } u \in C^\infty(V), \qquad Pu = 0 \quad \textit{sur } V,$$

$$\operatorname{supp} u \subset \{\varphi(x) \geqq \varphi(x_0)\},$$

$$\textit{alors } u = 0 \qquad \textit{près de } x_0.$$

Remarquons que l'on obtient l'unicité de Cauchy et non pas uniquement l'unicité compacte.

L'hypothèse (2.7) de Hörmander exprime que les bicaractéristiques tangentes à S au point x_0 sont "tournées vers le bas" avec un contact d'ordre 2.

(b) Il semble impossible en général de faire une hypothèse en un seul point x_0, dans le cas où il existe des bicaractéristiques tangents ayant un contact d'ordre strictement supérieur à deux. Ceci est illustré par l'exemple suivant.

Dans $\mathbf{R}^3$, $x = (t, x_1, x_2)$ de variables duales $\xi = (\tau, \xi_1, \xi_2)$ on se place au voisinage de $0 = (0,0,0)$ avec $\varphi \equiv t$. Posons

$$p = \tau^2 + \xi_1\xi_2 + t(x_1^2 - x_2^4)(\xi_1 - \xi_2)^2 + t\xi_1^2. \tag{2.8}$$

Cet opérateur est à coefficients C^∞ réels, d'ordre 2, de type principal, non caractéristique (1.3), et vérifie, pour $\xi \in \mathbf{R}^3\backslash 0$,

$$\text{(2.9)} \quad \begin{cases} p(0,\xi) = H_p(\varphi)(0,\xi) = 0 \qquad \text{implique} \\ (H_p^2(\varphi)(0,\xi) < 0) \qquad \text{ou} \\ (H_p^2(\varphi)(0,\xi) = H_p^3(\varphi)(0,\xi) = 0 \quad \text{et} \quad H_p^4(\varphi)(0,\xi) < 0). \end{cases}$$

En effet, le point $\cdot$ désignant la dérivation le long de la bicaractéristique ((2.2)) on a,

$$\dot{t} = 2\tau,$$

$$\ddot{t} = -2[(x_1^2 - x_2^4)(\xi_1 - \xi_2)^2 + \xi_1^2],$$

$$\dddot{t} = 2[(4x_2^3\dot{x}_2 - 2x_1\dot{x}_1)(\xi_1 - \xi_2)^2 + 2(x_2^4 - x_1^2)(\xi_1 - \xi_2)(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) - 2\xi_1\dot{\xi}_1].$$

Pour $x_0 = (0,0,0)$, $\xi = (\tau, \xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^3\backslash 0$, $p(x_0,\xi) = H_p(\varphi)(x_0,\xi) = 0$ signifie $\tau = \xi_1\xi_2 = 0$.

Si $\tau = \xi_2 = 0$, $\xi_1 \neq 0$, on a $H_p^2(\varphi) = -2\xi_1^2 < 0$.

Si $\tau = \xi_1 = 0$, $\xi_2 \neq 0$, on a

$$H_p^2(\varphi) = H_p^3(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad \ddddot{t} = -4\dot{x}_1^2\xi_2^2 - 4\dot{\xi}_1^2 = -4\xi_2^4 < 0,$$

d'où (2.9) est vérifié.

Néanmoins, dans tout voisinage de $(0,0,0)$ sur S, on peut trouver x, $\xi \in \mathbf{R}^3\backslash 0$ avec

$$p(x,\xi)=H_p(\varphi)(x,\xi)=0 \quad \text{et} \quad H_p^2(\varphi)(x,\xi)>0.$$

Il suffit pour cela de prendre $\tau=\xi_1=0$, $\xi_2=1$, $x=(0,0,\alpha)$, alors $H_p^2(\varphi)=2\alpha^4$.

2.4. Lien avec le théorème d'Alinhac [1]

Le théorème 2 est en fait une conséquence du théorème 1 (la condition est suffisante) et du théorème d'Alinhac [1] dont nous rappelons l'expression seulement dans la cadre envisagé ici.

Théorème (*Alinhac* [1]).
Soit P un opérateur différentiel à coefficients C^∞ sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, de symbole principal réel p, de type principal sur Ω. Soit $S\equiv\{\psi(x)=\psi(x_0)\}$ une hypersurface C^∞ non caractéristique pour p passant par $x_0\in\Omega$. Supposons qu'il existe $\xi_0\in\mathbf{R}^n\setminus 0$ tel que

$$p(x_0,\xi_0)=H_p(\psi)(x_0,\xi_0)=0 \quad \textit{et} \quad H_p^2(\psi)(x_0,\xi_0)>0.$$

Alors, il existe un voisinage V de x_0, des fonctions $a,u\in C^\infty(V)$ avec supp $u\subset\{\psi(x)\geqq\psi(x_0)\}$ *et $(P+a)u=0$ sur V.*

Soit alors P et $\mathscr{H}$ comme dans le théorème 2, tels qu'il existe $(x_0,\xi_0)\in\Omega\times\mathbf{R}^n\setminus 0$ avec

$$p(x_0,\xi_0)=H_p(\varphi)(x_0,\xi_0)=0 \quad \text{et} \quad H_p^2(\varphi)(x_0,\xi_0)>0$$

(i.e., (1.5) n'est pas vérifiée).
Posons $\psi(x)=\varphi(x)-|x-x_0|^4$. On a

$$\{p,\psi\}(x_0,\xi_0)=\{p,\varphi\}(x_0,\xi_0)=0$$

et

$$H_p^2(\psi)(x_0,\xi_0)=H_p^2(\varphi)(x_0,\xi_0)>0.$$

Comme $\mathscr{H}$ est non caractéristique, l'hypersurface $S\equiv\psi(x)=\psi(x_0)$ est non caractéristique car

$$\{\{p,\psi\},\psi\}(x_0,\xi)=\{\{p,\varphi\},\varphi\}(x_0,\xi)\neq 0.$$

Les hypothèses du théorème d'Alinhac sont donc réalisées pour p et ψ. Par suite, il existe un voisinage V_0 de x_0, des fonctions $a_0,u_0\in C^\infty(V_0)$, supp $u_0\subset\{\psi(x)\geqq\psi(x_0)\}$, $(P+a_0)u_0=0$ sur V_0. Donc $P+a_0$ ne possède pas l'unicité de Cauchy compacte par rapport à $\mathscr{H}$. En effet pour tout voisinage ouvert V de x_0, il existe un voisinage $W=V\cap V_0$, une fonction $u_0\in C^\infty(W)$, $(P+a_0)u_0=0$ sur W, supp $u_0\subset\{\psi(x)\geqq\psi(x_0)\}\subset\{\varphi(x)\geqq\varphi(x_0)\}$, et supp $u_0\cap\{\varphi(x)=\varphi(x_0)\}=\{x_0\}\subset\subset W$, avec $u_0\neq 0$ au voisinage de x_0.

2.5. Exemples

2.5.1. Pour l'unicité de Cauchy (Corollaire 1.2.1).

(a) Rappelons que si P est un opérateur différentiel d'ordre 2 de type principal à coefficients réels constants dans la partie principale, L^∞ pour les termes d'ordre inférieur et S une hypersurface géométriquement convexe non caractéristique pour P alors P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S (Treves [12] théorème 5.3, chapitre IV).

(b) Par contre l'opérateur (des ondes) $D_t^2 + D_{x_1}D_{x_2}$ ne possède pas l'unicité de Cauchy (pour des termes d'ordre inférieur quelconques C^∞) par rapport à la surface d'équation $t=0$ (cf. [3], [4], [9] th. 8.9.4).

(c) Soit P un opérateur défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^3$ à coefficients L^∞, de symbole principal

$$p = \tau^2 + \xi_1\xi_2 + t(x_1^2 + x_2^2)(\xi_1 - \xi_2)^2 - t^2\xi_1^2,$$

et soit S l'hypersurface d'équation $t=0$, (t, x_1, x_2) étant des coordonnées locales et (τ, ξ_1, ξ_2) des variables duales.

Le corollaire 1.2.1 implique l'unicité de Cauchy pour P par rapport à S près de $(0,0,0)$. Remarquons qu'au point $(0,0,0)$ il existe des bicaractéristiques tangentes à S à l'ordre 4 exactement et qu'un résultat de pseudo-convexité ne peut s'appliquer a priori ici.

(d) Soit P un opérateur défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^4$, à coefficients L^∞, de symbole principal

$$p = \tau^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 + t[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_2^2] - t^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2),$$

et soit S l'hypersurface d'équation $t=0$.

Le corollaire 1.2.1 implique l'unicité de Cauchy pour P par rapport à S près de $(0,0,0,0)$ dans $\mathbf{R}^4$. La remarque du (c) est valable ici également.

(e) De manière plus générale, soit P un opérateur défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbf{R}^n$, à coefficients L^∞, de symbole principal

$$p = \tau^2 + \sum_{j=1}^{p} \xi_j^2 - \sum_{j=p+1}^{n-1} \xi_j^2 + t\left[\left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2\right)\sum_{j=1}^{p}\xi_j^2 + \sum_{j=2}^{n-1}\xi_j^2\right] + t^2\langle R(t,x)\xi, \xi\rangle,$$

où $R(t,x)$ est une matrice C^∞ $(n-1)\times(n-1)$.

P vérifie les hypothèses du corollaire 1.2.1 pour l'hypersurface d'équation $t=0$.

2.5.2. Pour l'uncité de Cauchy compacte (Th. 1.2.1, 1.2.2).

(a) Un opérateur à coefficients L^∞ de partie principale $D_t^2 + D_{x_1}D_{x_2}$ dans $\mathbf{R}^3$ possède l'unicité de Cauchy compacte par rapport à la famille d'hypersurface $\mathscr{H}$ données par la fonction t. Néanmoins cet opérateur (perturbé par une fonction $a \in C^\infty$) ne possède pas l'unicité de Cauchy par rapport à l'hypersurface d'équation $t=0$ (cf. le paragraphe précédent 2.5.1 (b)).

(b) Considérons un opérateur P à coefficients L^∞, défini sur un voisinage Ω de 0 dans $\mathbf{R}^4$, de symbole principal

$$p = \tau^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_3^2 + t((1+x_1)\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2, \tag{2.10}$$

les variables de $\mathbf{R}^4$ étant $x = (t, x_1, x_2, x_3)$, et leurs variables duales $\xi = (\tau, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Comme p est de type principal en $0_{\mathbf{R}^4}$, on peut choisir Ω de sorte que p soit de type principal sur Ω. Soit $\mathscr{H}$ la famille d'hypersurfaces orientées de Ω donnée par $\varphi \equiv t$, clairement non caractéristique (1.3) pour p.

(i) Le symbole p vérifie les hypothèses du théorème 1.2.1 car si $p(x,\xi) = H_p(\varphi)(x,\xi) = 0$, on a

$$H_p^2(\varphi) = -2L^2 \leqq 0 \qquad \text{avec } L = (1+x_1)\xi_1 + \xi_2 + \xi_3.$$

(ii) Le symbole p vérifie, pour $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbf{R}^4\backslash 0$, $p(x,\xi) = H_p(\varphi)(x,\xi) = 0$ implique

$$(H_p^2(\varphi)(x,\xi) < 0) \quad \text{ou} \quad (H_p^2(\varphi) = H_p^3(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad H_p^4(\varphi) < 0)$$

(i.e., les bicaractéristiques tangentes sont tournées du bon côté à un ordre $\leqq 4$).

En effet, le point $\cdot$ désignant la dérivation le long de la bicaractéristique de p

$$\begin{aligned} \dot t &= 2\tau, \\ \ddot t &= -2L^2, \\ \dddot t &= -4L\dot L, \\ \ddddot t &= -3\dot L^2 - 4L\ddot L, \end{aligned}$$

et par suite si $p = H_p(\varphi) = 0$, i.e., $\tau = \xi_1\xi_2 + \xi_3^2 + tL^2 = 0$, soit $L \neq 0$ et $\ddot t < 0$, soit $L = 0$ et $\ddot t = \dddot t = 0$ avec $\ddddot t < 0$ car alors $\dot L = \xi_2\xi_1 \neq 0$ (sinon $\tau = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$).

(iii) En tout point voisin de 0, on peut trouver des bicaractéristiques tangentes à l'ordre 4 exactement, de sorte qu'aucun résultat de stricte-pseudo-convexité n'est applicable ici. En effect pour

$$\begin{aligned} x &= (t, x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \\ \xi &= (\tau, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, 1, -\xi_3^2, \xi_3) \end{aligned}$$

avec

$$\xi_3^2 - \xi_3 - (1+x_1) = 0$$

(qui possède des racines réelles en ξ_3 pour x_1 assez petit), on a

$$p = H_p(\varphi) = H_p^2(\varphi) = H_p^3(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad H_p^4(\varphi) < 0.$$

3. Calcul symbolique avec grand paramètre

3.1. Définition des symboles

Définition 3.1. Soit $1 \geqq \rho > \delta \geqq 0$, $m \in \mathbf{R}$.

(i) On dit que $a(x, \xi, \gamma) \in \Sigma^m_{\rho,\delta}$, si:

(a) $a(x, \xi, \gamma) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I)$, où $I = [1, +\infty[$,

(b) pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\beta \in \mathbf{N}^n$, $\lambda \in \mathbf{N}$, il existe $C \geqq 0$ tel que: pour tout $(x, \xi, \gamma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I$,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\gamma^\lambda a(x, \xi, \gamma)| \leqq C(\gamma + |\xi|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|} \tag{3.1}$$

(ii) On dit que $a(x, \xi, \gamma) \in \Sigma^{-\infty}$, si:

(a) $a(x, \xi, \gamma) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I)$,

(b) pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\beta \in \mathbf{N}^n$, $\lambda \in \mathbf{N}$, pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe $C \geqq 0$, tel que: pour tout $(x, \xi, \gamma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I$,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\gamma^\lambda a(x, \xi, \gamma)| \leqq C(\gamma + |\xi|)^{-N}. \tag{3.2}$$

Pour $a(x, \xi, \gamma) \in \Sigma^m_{\rho,\gamma}$, on peut définir des semi-normes:

$$p_{\alpha,\beta,\lambda}(a) = \sup_{(x,\xi,\gamma) \in (\mathbf{R}^n)^2 \times I} \left| \frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\gamma^\lambda a(x, \xi, \gamma)}{(\gamma + |\xi|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}} \right| \tag{3.3}$$

pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\beta \in \mathbf{N}^n$, $\lambda \in \mathbf{N}$.

Remarque. Il est important, pour le calcul que nous allons développer, de remarquer que les semi-normes sont indépendantes de γ, et que γ est supérieur à 1.

On dira qu'une famille de symboles $(a_j)_{j \in \mathcal{J}}$ est bornée, si: pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\beta \in \mathbf{N}^n$, $\lambda \in \mathbf{N}$, il existe $C \geqq 0$, pour tout $j \in \mathcal{J}$ tel que:

$$p_{\alpha,\beta,\lambda}(a_j) \leqq C.$$

Définition 3.2 (Symboles multiples).

Soit $1 \geqq \rho > \delta \geqq 0$, $(m, m', m'') \in \mathbf{R}^3$. On dit que $a(x, y, \xi, \eta, \gamma) \in \Sigma^{m,m',m''}_{\rho,\delta}$ si:

(a) $a(x, y, \xi, \eta, \gamma) \in C^\infty((\mathbf{R}^n)^4 \times I)$,

(b) pour tout $\alpha_1 \in \mathbf{N}^n$, $\alpha_2 \in \mathbf{N}^n$, $\beta_1 \in \mathbf{N}^n$, $\beta_2 \in \mathbf{N}^n$, $\lambda \in \mathbf{N}$, il existe $C \geqq 0$, tel que: pour tout $(x, y, \xi, \eta, \gamma) \in (\mathbf{R}^n)^4 \times I$,

$$\begin{aligned} &|\partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} \partial_\xi^{\beta_1} \partial_\eta^{\beta_2} \partial_\gamma^\lambda a(x, y, \xi, \eta, \gamma)| \\ &\quad \leqq C(\gamma + |\xi|)^{m - \rho|\beta_1|}(\gamma + |\eta|)^{m' - \rho|\beta_2|}(\gamma + |\xi| + |\eta|)^{m'' + \delta|\alpha_1| + \delta|\alpha_2|}. \end{aligned}$$

Remarque. Soit $a(x, \xi, \gamma) \in \Sigma^m_{\rho,\delta}$, posons: $a_\gamma(x, \xi) = a(x, \xi, \gamma)$, pour chaque $\gamma \geqq 1$ on a $a_\gamma(x, \xi) \in S^m_{\rho,\delta}$.

On rappelle que: pour $1 \geqq \rho > \delta \geqq 0$, $m \in \mathbf{R}$, $a(x, \xi) \in S^m_{\rho,\delta}$ si:

(a) $a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$,

(b) pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\beta \in \mathbf{N}^n$, il existe $C \geqq 0$ tel que:
pour tout $(x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leqq C(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}.$$

Pour tout $\gamma \geqq 1$, on peut donc définir un opérateur A_γ par la formule:

$$A_\gamma u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} a(x, \xi, \gamma) \hat{u}(\xi) d\xi. \tag{3.4}$$

Pour chaque $\gamma \geqq 1$, A_γ opère continûment de:

$$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbf{R}^n),$$

$$\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n).$$

(3.5) On dira que $A_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^m_{\rho,\delta})$.

On notera $\sigma_{A_\gamma}(x, \xi, \gamma) = a(x, \xi, \gamma)$.

On démontre facilement les propriétés suivantes:

Propriétés 3.1. Soit $a(x, \xi, \gamma) \in \Sigma^m_{\rho,\delta}$, $b(x, \xi, \gamma) \in \Sigma^{m'}_{\rho,\delta}$. On a les propriétés suivantes:

(i) $(a+b) \in \Sigma^{m''}_{\rho,\delta}$, $m'' = \mathrm{Sup}(m, m')$.

(ii) $ab \in \Sigma^{m+m'}_{\rho,\delta}$.

(iii) S'il existe $C > 0$ tel que, pour tout

$$(x, \xi, \gamma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I, \qquad |a(x, \xi, \gamma)| \geqq C(\gamma + |\xi|)^m$$

alors $1/a \in \Sigma^{-m}_{\rho,\delta}$.

(iv) S'il existe $C > 0$, tel que, pour tout

$$(x, \xi, \gamma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I, \qquad a(x, \xi, \gamma) \geqq C(\gamma + |\xi|)^m$$

alors $\sqrt{a} \in \Sigma^{m/2}_{\rho,\delta}$.

(v) Pour tout $s \in \mathbf{R}$, $(\gamma^2 + |\xi|^2)^{s/2} \in \Sigma^s_{1,0}$.

3.2. Calcul symbolique

Définition 3.3. Soit $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}$, une suite de symboles de $\Sigma^m_{\rho,\delta}$.
On dit que a_j converge vers a dans $\Sigma^m_{\rho,\delta}$ si:

(i) a_j converge vers a simplement,

(ii) a_j est borné dans $\Sigma^m_{\rho,\delta}$.

Remarques.

(i) Une telle suite (a_j) converge vers a dans $C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I)$.

(ii) $a(x, \xi, \gamma) \in \Sigma^m_{\rho,\delta}$.

(iii) Si

$$A^j_\gamma u(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}a_j(x,\xi,\gamma)\hat{u}(\xi)d\xi;$$

$A^j_\gamma u$ converge vers $A_\gamma u$ dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$.

Proposition 3.1.

(i) *$\Sigma^{-\infty}$ est dense dans $\Sigma^m_{\rho,\delta}$.*

(ii) *$C_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times I)$ est dense dans $\Sigma^m_{\rho,\delta}$.*

(iii) *Soit $m'>m$, alors $\Sigma^{-\infty}$ est dense dans $\Sigma^m_{\rho,\delta}$ pour la topologie des semi-normes de $\Sigma^{m'}_{\rho,\delta}$.*

(iv) *Soit $a_j\in\Sigma^{m_j}_{\rho,\delta}$, $j\geqq 0$, m_j suite décroissante tendant vers $-\infty$. Alors il existe $a\in\Sigma^{m_0}_{\rho,\delta}$ tel que:*

$$a-\sum_{0\leqq j<k}a_j\in\Sigma^{m_k}_{\rho,\delta}.$$

a est unique modulo $\Sigma^{-\infty}$. On dit que a est la somme asymptotique des a_j.

On notera $a\sim\sum_{j=0}^\infty a_j$.

Démonstration. Pour (i) et (iii) on prend, $\chi(\xi,\gamma)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$; $\chi=1$ au voisinage de $(0,0)$. On vérifie facilement que la suite $a_j(x,\xi,\gamma)=\chi(\xi/j,\gamma/j)a(x,\xi,\gamma)$ converge vers a dans les sens (i) ou (iii).

Pour (ii) on prend, $\chi(x,\xi,\gamma)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n)$. $\chi=1$ au voisinage de $(0,0,0)$. On vérifie que la suite

$$a_j(x,\xi,\gamma)=\chi\left(\frac{x}{j},\frac{\xi}{j},\frac{\gamma}{j}\right)a(x,\xi,\gamma)$$

converge vers $a(x,\xi,\gamma)$ dans $\Sigma^m_{\rho,\delta}$.

Pour le (iv), quitte à regrouper des a_j, on peut supposer que m_j est strictement décroissante. Dans $\Sigma^{m_j}_{\rho,\delta}$ on a une suite de semi-normes $(p_{j,k})_{k\in\mathbf{N}}$ où

$$p_{j,k}(a)=\operatorname*{Sup}_{|\alpha|+|\beta|+\lambda\leqq k}(p_{\alpha,\beta,\lambda}(a))$$

(cf. (3.3)).

On définit $b_j\in\Sigma^{-\infty}$ tel que:

(a) $b_j=\chi(\xi/\lambda_j,\gamma/\lambda_j)a_j(x,\xi,\gamma)$ pour une suite λ_j, et $\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R})$, $\chi=1$ au voisinage de $(0,0)$.

(b) $$p_{\nu,\mu}(a_j-b_j)\leqq 2^{-j}\text{ pour }\begin{matrix}0\leqq\nu\leqq j-1,\\0\leqq\mu\leqq j-1.\end{matrix}$$

Posons $c_k=\sum_{j=0}^k(a_j-b_j)$. Pour (x,ξ,γ) fixés seul un nombre fini de (a_j-b_j) sont non nuls. Donc, c_k converge simplement vers $a(x,\xi,\gamma)$ soit k fixé et $l\geqq k$ on a:

$$p_{k,\mu}(c_l-c_k)\leqq\sum_{j=k+1}^{l}p_{k,\mu}(a_j-b_j)$$

$$\leqq\sum_{j=k+1}^{\mu}p_{k,\mu}(a_j-b_j)+\sum_{j=\mu+1}^{l}p_{k,\mu}(a_j-b_j)\leqq C+2^{-\mu}$$

où C ne dépend pas de l, donc $(c_l - c_k)_{l\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée dans $\Sigma^{m_k}_{\rho,\delta}$, donc $a - c_k \in \Sigma^{m_k}_{\rho,\delta}$. En particulier $(a - c_0) \in \Sigma^{m_0}_{\rho,\delta}$ donc $a \in \Sigma^{m_0}_{\rho,\delta}$.

$$a - \sum_{0\leq j<k} a_j = a - c_k + c_k - \sum_{0\leq j<k} a_j,$$

$$c_k - \sum_{0\leq j<k} a_j = a_k - \sum_{0\leq j\leq k} b_j \in \Sigma^{m_k}_{\rho,\delta},$$

ce qui termine la démonstration (l'unicité est triviale).

Théorème 3.1.

(i) *Soit* $A_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^m_{\rho,\delta})$; A^*_γ *désignant l'adjoint formel de* A_γ, *on a* $A^*_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^m_{\rho,\delta})$ *et*

$$\sigma_{A^*_\gamma} \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!\, i^{|\alpha|}}\, \partial^\alpha_\xi \partial^\alpha_x \overline{\sigma_{A_\gamma}(x, \xi, \gamma)}.$$

(ii) *Soit* $A_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^m_{\rho,\delta})$, $B_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^{m'}_{\rho,\delta})$. *Alors* $A_\gamma \circ B_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^{m+m'}_{\rho,\delta})$ *et*

$$\sigma_{A_\gamma\circ B_\gamma}(x, \xi, \gamma) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!\, i^{|\alpha|}}\, \partial^\alpha_\xi \sigma_{A_\gamma}(x, \xi, \gamma) \partial^\alpha_x \sigma_{B_\gamma}(x, \xi, \gamma).$$

Soit $a(x, y, \xi, \eta, \gamma) \in C^\infty_0((\mathbf{R}^n)^4 \times I)$ on définit $\tilde{a}(x, \xi, \gamma)$ de la façon suivante:

$$\tilde{a}(x, \xi, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint a(x, y, \xi, \eta, \gamma) e^{i(x-y)(\eta-\xi)} dy d\eta.$$

Il est clair que $C^\infty_0((\mathbf{R}^n)^4 \times I)$ est dense dans $\Sigma^{m,m',m''}_{\rho,\delta}$, c'est-à-dire: pour tout $a \in \Sigma^{m,m',m''}_{\rho,\delta}$, il existe $(a_l)_{l\in\mathbf{N}}$ une suite de $C^\infty_0((\mathbf{R}^n)^4 \times I)$ telle que:

(i) a_l converge simplement vers a.

(ii) $(a_l)_{l\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\Sigma^{m,m',m''}_{\rho,\delta}$.

(La démonstration est identique à la démonstration de la proposition 3.1(ii)).

Théorème 3.2 (*Contraction des symboles multiples*).

(i) *L'application de* $\Sigma^{m,m',m''}_{\rho,\delta}$ *dans* $\Sigma^{m+m'+m''}_{\rho,\delta}$ *qui à* $a(x, y, \xi, \eta, \gamma)$ *associe* $a(x, \xi, \gamma)$ *est séquentiellement continue.*

(ii) *Pour tout* $a \in \Sigma^{m,m',m''}_{\rho,\delta}$, *on peut donc associer* $\tilde{a} \in \Sigma^{m+m'+m''}_{\rho,\delta}$. *De plus* $\tilde{a}$ *admet un développement asymptotique*:

$$\tilde{a}(x, \xi, \gamma) \sim \sum_\alpha \frac{1}{i^{|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!}\, \partial^\alpha_y \partial^\alpha_\eta a(x, y, \xi, \eta, \gamma)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}}.$$

Le théorème 3.1 est une conséquence directe (comme dans le cas des classes $S^m_{\rho,\delta}$) du théorème 3.2.

Démonstration du théorème 3.2. On va d'abord démontrer le (i) du théorème 3.2. Dans le calcul qui va suivre l est facile de voir que les constantes ne dépendent que des semi-normes de a. La convergence des suites et l'uncité de la limite sont des conséquences du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

On rappelle que $\gamma \geqq 1$. On a:

$$\tilde{a}(x, \xi, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint a(x, x+z, \xi, \xi+\sigma, \gamma) e^{-iz\sigma} dz d\sigma.$$

On vérifie facilement que:

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\gamma^\lambda \tilde{a}(x, \xi, \gamma) = \tilde{b}(x, \xi, \gamma).$$

où $b(x, y, \xi, \eta, \gamma)$ est une somme d'éléments de

$$\sum\nolimits_{\rho,\delta}^{m-\rho|\beta_1|, m'-\rho|\beta_2|, m''+\delta|\alpha|}$$

avec $|\beta| = |\beta_1 + \beta_2|$.

Il suffit donc de prouver qu'il existe C, dépendant seulement des semi-normes de $a(x, y, \xi, \eta, \gamma)$, tel que:

$$|\tilde{a}(x, \xi, \gamma)| \leqq C(\gamma + |\xi|)^{m+m'+m''}.$$

On pose:

$$\langle \gamma; \xi \rangle = (\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2}, \tag{3.6}$$

$$\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}, \tag{3.7}$$

$$\Delta_\sigma = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \sigma_j}\right)^2.$$

Posons $L = [1 + \langle \gamma, \xi \rangle^{2\delta} |z|^2]^{-k} [1 - \langle \gamma, \xi \rangle^{2\delta} \Delta_\sigma]^k$. On a:

$$L e^{-iz\sigma} = e^{-iz\sigma}.$$

Donc:

$$\tilde{a}(x, \xi, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint La(x, x+z, \xi, \xi+\sigma, \gamma) e^{-iz\sigma} dz d\sigma$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \beta(x, \xi, \sigma, \gamma) d\sigma,$$

avec

$$\beta = \int [1 + \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta} |z|^2]^{-k} [1 - \langle \gamma; \xi \rangle^{2\gamma} \Delta_0]^k (a(x, x+z, \xi, \xi+\sigma, \gamma)) e^{-iz\sigma} dz.$$

En utilisant le fait que pour, $0 \leqq r \leqq 2k$, on a

$$\langle \gamma; \xi \rangle^{\delta r} \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^{-\delta r} \leqq 1 + \langle \gamma; \xi \rangle^{2\delta k} \langle \gamma; \xi + \sigma \rangle^{-2\delta k}, \tag{3.8}$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
|\beta| &\leqq \int [1+\langle\gamma;\xi\rangle^{2\delta}|z|^2]^{-k}\langle\gamma;\xi\rangle^{m}\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle^{m'}\\
&\quad\times(\langle\gamma;\xi\rangle+\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle)^{m''}(1+\langle\gamma;\xi\rangle^{2\delta k}\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle^{-2\delta k})dz, \qquad (3.9)\\
|\beta| &\leqq C\langle\gamma;\xi\rangle^{m-\delta n}\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle^{m'}(\langle\gamma;\xi\rangle+\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle)^{m''}(1+\langle\gamma;\xi\rangle^{2\delta k}\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle^{-2\delta k})
\end{aligned}
$$

pour k suffisamment grand.

Avec $L'=\langle\sigma\rangle^{-2j}(1-\Delta_z)^j$ on a:

$$\beta=\int\langle\sigma\rangle^{-2j}(1-\Delta_z)^j[1+\langle\gamma;\xi\rangle^{2\delta}|z|^2]^{-k}[1-\langle\gamma;\xi\rangle^{2\delta}\Delta_\sigma]^k(a)e^{-iz\sigma}dz.$$

On démontre facilement que:

$$|\partial_z^\alpha[(1+\langle\gamma;\xi\rangle^{2\delta}|z|^2)^{-k}]|\leqq C\langle\gamma;\xi\rangle^{-\delta|\alpha|}(1+\langle\gamma;\xi\rangle^{2\delta}|z|^2)^{-k},$$

d'où, en utilisant (3.8),

$$
\begin{aligned}
|\beta| &\leqq \int\langle\sigma\rangle^{-2j}(1+\langle\gamma;\xi\rangle^{2\delta}|z|^2)^{-k}\langle\gamma;\xi\rangle^{m}\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle^{m'}\\
&\quad\times(\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle+\langle\gamma;\xi\rangle)^{m''+2\delta j}(1+\langle\xi\rangle^{2\delta k}\langle\xi+\sigma\rangle^{-2\delta k})dz, \qquad (3.10)\\
|\beta| &\leqq C\langle\sigma\rangle^{-2j}\langle\gamma;\xi\rangle^{m-\delta n}\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle^{m'}(\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle+\langle\gamma;\xi\rangle)^{m''+2\delta j}\\
&\quad\times(1+\langle\xi\rangle^{2\delta k}\langle\xi+\sigma\rangle^{-2\delta k}).
\end{aligned}
$$

En utilisant (3.9), (3.10) et pour tout $t>0$, $\inf(1,t)\sim(1+t^{-1})^{-1}$, on a:

$$
\begin{aligned}
|\beta| &\leqq C\langle\gamma;\xi\rangle^{m-\delta n}\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle^{m'}(\langle\gamma;\xi\rangle+\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle)^{m''}\\
&\quad\times(1+\langle\gamma;\xi\rangle^{2\delta k}\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle^{-2\delta k})\left[1+\frac{\langle\sigma\rangle^{2j}}{(\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle+\langle\gamma;\xi\rangle)^{2\delta j}}\right]^{-1}.
\end{aligned}
$$

On a

$$\tilde a=\int_{|\sigma|\geqq\langle\gamma;\xi\rangle/2}\beta d\sigma+\int_{|\sigma|<\langle\gamma;\xi\rangle/2}\beta d\sigma.$$

Quand $|\sigma|<\langle\gamma;\xi\rangle/2$, on a: $\langle\gamma;\xi\rangle\sim\langle\gamma;\xi+\sigma\rangle$, et donc:

$$
\begin{aligned}
\int_{|\sigma|<\langle\gamma;\xi\rangle/2}|\beta| &\leqq C\langle\gamma;\xi\rangle^{m+m'+m''-\delta n}\int_{|\sigma|<\langle\gamma;\xi\rangle/2}\left(1+\frac{\langle\sigma\rangle^{2j}}{\langle\gamma;\xi\rangle^{2\delta j}}\right)^{-1}d\sigma \qquad (3.11)\\
&\leqq C\langle\gamma;\xi\rangle^{m+m'+m''}\int_{|\sigma|<1/2}(1+|\sigma|^{2j})^{-1}d\sigma.
\end{aligned}
$$

Quand $|\sigma|\geqq\langle\gamma;\xi\rangle/2$, en utilisant l'inégalité (de Peetre), pour tout $(\xi,\sigma,\gamma)\in$

$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I$, $s \in \mathbf{R}$, on a:

$$\langle \gamma ; \xi + \sigma \rangle^s \leqq 2^{|s|/2} \langle \gamma ; \xi \rangle^s \langle \sigma \rangle^{|s|},$$

on a:

$$\int_{|\sigma| \geqq \langle \gamma ; \xi \rangle / 2} |\beta| \leqq C \langle \gamma ; \xi \rangle^{m+m'+m''} B,$$

avec

$$B \leqq C \langle \gamma ; \xi \rangle^{-\delta n} \int_{|\sigma| \geqq \langle \gamma ; \xi \rangle / 2} \left(1 + \frac{\langle \gamma ; \xi + \sigma \rangle}{\langle \gamma ; \xi \rangle}\right)^{m''} \langle \sigma \rangle^{|m'|+2\delta k} [1 + \langle \sigma \rangle^{2j(1-\delta)}]^{-1} d\sigma$$

$$\leqq C \langle \gamma ; \xi \rangle^{-\delta n} \int_{|\sigma| \geqq \langle \gamma ; \xi \rangle / 2} |\sigma|^{|m'|+|m''|+2\delta k} \frac{1}{|\sigma|^{2j(1-\delta)}} d\sigma,$$

et par suite

$$B \leqq C \langle \gamma ; \xi \rangle^{-\delta n + |m'| + |m''| + 2\delta k - 2j(1-\delta)} \int_{|\sigma| \geqq 1/2} \frac{|\sigma|^{|m'|+|m''|+2\delta k}}{|\sigma|^{2j(1-\delta)}} d\sigma. \tag{3.12}$$

En regroupant (3.11), (3.12), on trouve que $\bar{a}$ est borné par $\langle \gamma ; \xi \rangle^{m+m'+m''}$.

La démonstration du (ii) n'est pas différente de celle de Unterberger [14] pour les classes $S^m_{\rho,\delta}$.

3.3. Continuité L^2

Théorème 3.3. *Soit $A_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^0_{\rho,\delta})$.*

A_γ opère continûment de $L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n)$. En outre, $\exists C \geqq 0$ indépendant de γ, tel que:

$$\| A_\gamma u \|_0 \leqq C \| u \|_0.$$

Définition 3.4. Soit $u \in H^s(\mathbf{R}^n)$, on note pour $\gamma \geqq 1$:

$$\| u \|^2_{s,\gamma} = \int (\gamma^2 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \tag{3.13}$$

Théorème 3.4. *Soit $A_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^m_{\rho,\delta})$, $\exists C \geqq 0$ indépendant de γ, tel que: $\forall u \in H^s(\mathbf{R}^n)$:*

$$\| A_\gamma u \|_{s-m,\gamma} \leqq C \| u \|_{s,\gamma}.$$

Démonstration du théorème 3.3. On peut se restreindre à démontrer le théorème 3.3 pour $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. On va montrer qu'il existe $B_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^0_{\rho,\delta})$ et $Q_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^{-\infty})$ tels que

$$B_\gamma^* B_\gamma + Q_\gamma = M^2 \,\mathrm{id} - A_\gamma^* A_\gamma, \tag{3.14}$$

où M est un réel tel que, pour $\varepsilon > 0$ et pour tout $(x, \xi, \gamma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times I$,

$$M^2 \geqq |\sigma_{A_\gamma}(x, \xi, \gamma)|^2 + \varepsilon^2.$$

Notons $C = M^2 \,\mathrm{id} - A_\gamma^* A_\gamma$, on a:

$$\sigma_C(x, \xi, \gamma) = M^2 - |\sigma_{A_\gamma}(x, \xi, \gamma)|^2 \quad \text{modulo } \Sigma_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)},$$

posons $b_0(x, \xi, \gamma) = \sqrt{M^2 - |\sigma_{A_\gamma}(x, \xi, \gamma)|^2}$, $b_0 \in \Sigma_{\rho,\delta}^0$ (propriétés 3.1(iv)).

Soit $B_0 \in \mathrm{Op}(\Sigma_{\rho,\delta}^0)$ tel que $\sigma_{B_0} = b_0$. On a $B_0^* B_0 = C + C_1$ avec $C_1 \in \mathrm{Op}(\Sigma_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)})$ et $C_1^* = C_1$.

Par récurrence, supposons qu'on ait, B_{j-1} et C_j tels que

$$B_{j-1}^* B_{j-1} = C + C_j,$$

avec $C_j \in \mathrm{Op}(\Sigma_{\rho,\delta}^{-j(\rho-\delta)})$ et $C_j^* = C_j$, et $B_{j-1} - B_0 \in \mathrm{Op}(\Sigma_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)})$.

On cherche $B_j = B_{j-1} + D_j$, où $D_j \in \mathrm{Op}(\Sigma_{\rho,\delta}^{-j(\rho-\delta)})$, et avec

$$(B_{j-1}^* + D_j^*)(B_{j-1} + D_j) = C + C_{j+1},$$

$$B_{j-1}^* D_j + D_j^* B_{j-1} = -C_j + C_{j+1}.$$

Si on pose $b_{j-1} = \sigma_{B_{j-1}}$, $d_j = \sigma_{D_j}$, $c_j = \sigma_{C_j}$, on a modulo $\Sigma_{\rho,\delta}^{-(j+1)(\rho-\delta)}$,

$$\bar{b}_{j-1} d_j + \bar{d}_j b_{j-1} = -c_j.$$

Posons

$$d_j(x, \xi, \gamma) = -\frac{c_j}{2b_{j-1}} \chi_i((\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2}),$$

$$\begin{aligned} \chi_i(t) &= 0 \quad && \text{si } t \leqq M_j, \\ &= 1 && \text{si } t \geqq 2M_j, \end{aligned}$$

$\chi_i \in C^\infty$, M_j choisi tel que $b_{j-1}(x, \xi, \gamma) \geqq \varepsilon^2/2$ pour $(\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2} \geqq M_j$.

Soit $D_j \in \mathrm{Op}(\Sigma_{\rho,\delta}^{-j(\rho-\delta)})$ tel que

$$\sigma_{D_j} = d_j = -\frac{1}{2} \frac{c_j}{b_{j-1}} \chi_i((\gamma^2 + |\xi|^2)^{1/2}),$$

alors $B_j = B_{j-1} + D_j$ vérifie $B_j^* B_j = C + C_{j+1}$, avec $C_{j+1} \in \mathrm{Op}(\Sigma_{\rho,\delta}^{-(j+1)(\rho-\delta)})$, avec $C_j^* = C_j$ et $B_j - B_0 \in \mathrm{Op}(\Sigma_{\rho,\delta}^{-(\rho-\delta)})$. (On a utilisé le fait que $c_j = \bar{c}_j + k$ avec $k \in \Sigma_{\rho,\delta}^{-(j+1)(\rho-\delta)}$ car $C_j^* = C_j$).

En choisissant $B_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma_{\rho,\delta}^0)$ tel que $\sigma_{B_\gamma} \sim b_0 + d_1 + \cdots + d_j + \cdots$, on a

$$B_\gamma^* B_\gamma - M^2 \,\mathrm{id} + A_\gamma^* A_\gamma \in \Sigma^{-\infty}.$$

Maintenant on déduit de (3.14), pour $u \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, $0 \leqq (B_\gamma^* B_\gamma u, u) =$

$M^2\|u\|_0^2-\|A_\gamma u\|_0^2-(Q_\gamma u,u)$, donc

$$\|A_\gamma u\|_0^2\leqq M^2\|u\|_0^2+\|Q_\gamma u\|_0\|u\|_0.$$

Or, si

$$Q_\gamma u(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}q(x,\xi,\gamma)\hat{u}(\xi)d\xi,$$

on a

$$q\in\Sigma^{-\infty}.$$

En particulier, $\forall\beta,\alpha\in\mathbf{N}^n$, $\forall M\in\mathbf{N}$, $\exists C_{\alpha,\beta,M}\geqq 0$, $\forall\gamma\geqq 1$ tel que, pour tout (x,ξ):

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha q(x,\xi,\gamma)|&\leqq C_{\alpha,\beta,M}(\gamma+|\xi|)^{-M}\\&\leqq C_{\alpha,\beta,M}(1+|\xi|)^{-M},\end{aligned}$$

donc $q_\gamma(x,\xi)=q(x,\xi,\gamma)$ est une famille bornée dans $S^0_{1,0}$ d'après le théorème de Calderon–Vaillancourt [5].

Il existe C, indépendant de γ, tel que

$$\|Q_\gamma u\|_0\leqq C\|u\|_0,$$

ce qui termine la démonstration.

Le théorème 3.4 se déduit aisément du théorème 3.3 en utilisant Λ_s défini par:

$$\Lambda_s u(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}(\gamma^2+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi)d\xi. \tag{3.15}$$

Proposition 3.5 (*Inégalité de Poincaré avec paramètre*).

Soit $u(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ à support dans une boule de rayon δ. Pour $\gamma\geqq 1/\delta$ et $t>s$, on a:

$$\|u\|_{s,\gamma}\leqq\delta^{t-s}\|u\|_{t,\gamma}. \tag{3.16}$$

Démonstration. On a $\|u\|_{s,\gamma}^2=\int(\gamma^2+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi$. Soit v telle que $\delta^{-n}v(x/\delta)=u(x)$, on a $\hat{u}(\xi)=\hat{v}(\delta\xi)$. Alors

$$\|u\|_{s,\gamma}^2=\int(\gamma^2+|\xi|^2)^s|\hat{v}(\delta\xi)|^2d\xi=\delta^{-n}\int\left(\gamma^2+\left|\frac{\eta}{\delta}\right|^2\right)^s|\hat{v}(\eta)|^2d\eta.$$

D'où

$$\|u\|_{s,\gamma}^2=\delta^{-n-2s}\int((\gamma\delta)^2+|\eta|^2)^s|\hat{v}(\eta)|^2d\eta; \tag{3.17}$$

or, on a

$$((\gamma\delta)^2+|\eta|^2)^s\leqq((\gamma\delta)^2+|\eta|^2)^t,\qquad\text{car }\gamma\delta\geqq 1.$$

D'où, en utilisant (3.17),

$$\|u\|^2_{s,\gamma} \leqq \delta^{-n-2s} \int ((\gamma\delta)^2 + |\eta|^2)^t |\hat{v}(\eta)|^2 d\eta \leqq \delta^{-2s+2t} \|u\|^2_{t,\gamma},$$

ce qui achève la démonstration.

3.4. Inégalité de Gårding

Théorème 3.5 (*Inégalité de Gårding précisée*).
Soit $A_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^m_{1,0})$, et $a(x, \xi, \gamma)$ son symbole, on écrit $a = a_m + b$ où $b \in \Sigma^{m-1}_{1,0}$. Si $a_m \geqq 0$, alors: $\exists C \geqq 0$ indépendant de γ tel que:

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n),$$

$$\mathrm{Re}(A_\gamma u, u) + C\|u\|^2_{(m-1)/2,\gamma} \geqq 0. \tag{3.18}$$

Pour la 4ème partie nous aurons besoin du corollaire suivant:

Corollaire 3.5′. *Soit $A_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^m_{1,0})$. $\exists C \geqq 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C(\varepsilon)$, tel que, $\forall u \in C^\infty_0(B(0,\varepsilon))$,*

$$|\mathrm{Re}(x_j A_\gamma u, u)| \leqq C\varepsilon \|u\|^2_{m/2,\gamma} + C(\varepsilon)\|u\|^2_{(m-1)/2,\gamma} \tag{3.19}$$

$$\|x_j A_\gamma u\|_0 \leqq C\varepsilon \|u\|_{m,\gamma} + C(\varepsilon)\|u\|_{m-1/2,\gamma}. \tag{3.20}$$

Démonstration du théorème 3.5. Nous suivons la démonstration de Cordoba–Fefferman [7]. Il est clair qu'on peut supposer $a = a_m$.
Posons:

$$t(x, y, \xi, \gamma) = c_0(|\xi|^2 + \gamma^2)^{n/4} \int e^{-(|\xi|^2+\gamma^2)^{1/2}\{|x-z|^2+|y-z|^2\}} a(z, \xi, \gamma)\,dz$$

$$= c_0 e^{-\lambda|x-y|^2/2} \lambda^{n/2} \int e^{-2\lambda|w|^2} a\left(\frac{x+y}{2} - w, \xi, \gamma\right) dw,$$

où on a posé $\lambda = \sqrt{\gamma^2 + |\xi|^2}$.
On démontre aisément les lemmes suivants.

Lemme 3.5 (a).

$$a(z, \xi, \gamma) = e^{-(|\xi|^2+\gamma^2)^{1/2}|z|^2} \in \Sigma^0_{1,1/2}.$$

Lemme 3.5 (b).
Soit $a(z, \xi, \gamma) \in \Sigma^m_{1,0}$. On définit pour $t \in [0, 1]$:

$$b_t(z, \xi, \gamma) = (|\xi|^2 + \gamma^2)^{n/4} \int w^\alpha e^{-(|\xi|^2+\gamma^2)^{1/2}|w|^2} a(z - tw, \xi, \gamma)\,dw.$$

Alors $(b_t(z, \xi, \gamma))_{t\in[0,1]}$ est une famille bornée de $\Sigma^{m-|\alpha|/2}_{1,0}$.

On peut alors en déduire que:

$$t(x, y, \xi, \gamma) \in \Sigma^{m,0,0}_{1,1/2} \qquad \text{(Définition 3.2).}$$

Le théorème 3.2 permet d'associer à $t(x, y, \xi, \gamma)$ un symbole, et donc un opérateur $T_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^m_{1,1/2})$. De plus on a:

$$T_\gamma u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} t(x, x, \xi, \gamma)\hat{u}(\xi)d\xi$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^n i} \int e^{ix\xi} \partial_y \partial_\xi t(x, x, \xi, \gamma)\hat{u}(\xi)d\xi + R_\gamma u,$$

où $R_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^{m-1}_{1,1/2})$.

Traitons la première intégrale, on a:

$$t(x, x, \xi, \gamma) = t_1 + t_2 + t_3,$$

avec

$$t_1 = c_0 \lambda^{n/2} \int e^{-2\lambda |w|^2} a(x, \xi, \gamma) dw,$$

$$t_2 = c_0 \lambda^{n/2} \int e^{-2\lambda |w|^2} w \cdot \partial_x a(x, \xi, \gamma) dw,$$

$$t_3 = c_0 \lambda^{n/2} \int e^{-2\lambda |w|^2} \int_0^1 (1 - s)\partial_x^2 a(x - sw, \xi, \gamma) w^2 ds dw.$$

On a:

$$t_1 = a(x, \xi, \gamma) c_0 \int e^{-2|\tilde{w}|^2} d\tilde{w} = a(x, \xi, \gamma).$$

En posant $\tilde{w} = \sqrt{\lambda}\, w$, et $c_0 = (\pi/2)^{-n/2}$,

$$t_1 = a(x, \xi, \gamma),$$

$$t_2 = 0 \qquad \text{car} \int e^{-\lambda |w|^2} w_j dw = 0,$$

$$t_3 \in \Sigma^{m-1}_{1,0} \qquad \text{(il suffit d'appliquer le lemme 3.5 (b)).}$$

Traitons la deuxième intégrale, on a:

$$\partial_y t(x, y, \xi, \gamma) = C_0 \lambda^{n/2+1} (x - z) e^{-\lambda |x-y|^2/2} \int e^{-2\lambda |w|^2} a\left(\frac{x+y}{2} - w, \xi, \gamma\right) dw$$

$$+ \frac{C_0}{2} e^{-\lambda |x-\bar{y}|^2/2} \lambda^{n/2} \int e^{-2\lambda |w|^2} \partial_w a\left(\frac{x+y}{2} - w, \xi, \gamma\right) dw,$$

donc

$$\partial_y t(x, x, \xi, \gamma) = \frac{C_0}{2} \lambda^{n/2} \int e^{-2\lambda|w|^2} \partial_w a(x - w, \xi, \gamma) dw.$$

En appliquant le lemma 3.5 (b), on a: $\partial_y t(x, x, \xi, \gamma) \in \Sigma^m_{1,0}$, donc

$$\partial_\xi \partial_y t(x, x, \xi, \gamma) \in \Sigma^{m-1}_{1,0}.$$

Donc, on a: $T_\gamma u = A_\gamma u + R_\gamma u$, avec $R_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^{m-1}_{1,1/2})$. Or

$$(T_\gamma u, u) = \int e^{i(x-y.\xi)} c_0 \lambda^{n/2} e^{-\lambda\{|x-z|^2+|y-z|^2\}} a(z, \xi, \gamma) u(y) \overline{u(x)} dx dz d\xi dy$$

$$= \int c_0 a(z, \xi, \gamma) |Wu(z, \xi, \gamma)|^2 d\xi dz,$$

où

$$Wu(z, \xi, \gamma) = \lambda^{n/4} \int e^{i(x-z)\xi - \lambda|x-z|^2} \bar{u}(x) dx.$$

Comme dans Cordoba–Fefferman [7], W est continue de $L^2(\mathbf{R}^n) \to L^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$.
Par suite $(T_\gamma u, u)$ est positif. Donc,

$$(A_\gamma u, u) + (R_\gamma u, u) \geqq 0.$$

Or

$$(R_\gamma u, u) = (\Lambda_{(1-m)/2} R_\gamma u, \Lambda_{(m-1)/2} u),$$

et

$$\Lambda_{(1-m)/2} R_\gamma \in \mathrm{Op}(\Sigma^{(m-1)/2}_{1,1/2}).$$

Donc, il existe $C \geqq 0$ indépendant de γ, tel que:

$$C \| u \|_{(m-1)/2,\gamma} \geqq \| R_\gamma u \|_0.$$

On a:

$$(A_\gamma u, u) + C \| u \|^2_{(m-1)/2,\gamma} \geqq 0.$$

Démonstration du corollaire 3.5′.

Preuve de (3.19). Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ vérifiant:

$$\chi(x) = 1 \quad \text{si } |x| \leqq \tfrac{3}{2},$$
$$= 0 \quad \text{si } |x| \geqq 2.$$

On a:

$$\mathrm{Re}(x_j A_\gamma u, u) = \mathrm{Re}\left(\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) x_j A_\gamma u, u\right).$$

On a $\chi(x/\varepsilon)x_j \in \Sigma^0_{1,0}$. Posons $a = \sigma_{A_\gamma}$. Let symbole de $\chi(x/\varepsilon)x_jA_\gamma$ est $\chi(x/\varepsilon)x_ja(x,\xi,\gamma) + r(x,\xi,\gamma)$ avec $r \in \Sigma^{m-1}_{1,0}$.

Posons $b(x,\xi,\gamma) = \chi(x/\varepsilon)x_ja(x,\xi,\gamma)$. On a, pour tout $(x,\xi,\gamma) \in (\mathbf{R}^n)^2 \times I$,

$$|b(x,\xi,\gamma)| \leqq \tfrac{3}{2}\varepsilon\,|a(x,\xi,\gamma)|.$$

Soit $C > 0$ tel que, pour tout $(x,\xi,\gamma) \in (\mathbf{R}^n)^2 \times I$,

$$C(\gamma^2 + |\xi|^2)^{m/2} \geqq \tfrac{3}{2}|a(x,\xi,\gamma)|.$$

On a:

$$b(x,\xi,\gamma) + \varepsilon C(\gamma^2 + |\xi|^2)^{m/2} \geqq 0$$

et

$$-b(x,\xi,\gamma) + \varepsilon C(\gamma^2 + |\xi|^2)^{m/2} \geqq 0.$$

En appliquant le théorème 3.5, on en déduit (3.19).

Preuve de (*3.20*). On a, comme $u \in C_0^\infty(B(0,\varepsilon))$, $x_jA_\gamma u = x_jA_\gamma\chi(x/\varepsilon)u$, et $x_jA_\gamma\chi(x/\varepsilon)$ est un opérateur $\in \mathrm{Op}(\Sigma^m_{1,0})$. En effet, si a est le symbole de A, et a_k une suite convergente vers a dans $\Sigma^m_{1,0}$, $a_k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n} \times I)$, on a:

$$\begin{aligned}
x_jA^k_\gamma\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u &= \int e^{i(x-y)\xi}x_ja_k(x,\xi,\gamma)\chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)u(y)dyd\xi \\
&= \int e^{i(x-y)\xi}(x_j - y_j)a_k(x,\xi,\gamma)\chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)u(y)dyd\xi \\
&\quad + \int e^{i(x-y)\xi}a_k(x,\xi,\gamma)y_j\chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)u(y)dyd\xi \\
&= -\int e^{i(x-y)\xi}D_{\xi_j}a_k(x,\xi,\gamma)\chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)u(y)dyd\xi \\
&\quad + \int e^{i(x-y)\xi}a_k(x,\xi,\gamma)y_j\chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)u(y)dyd\xi \\
&= B^k_\gamma\circ\chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)u + A^k_\gamma\circ y_j\chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)u,
\end{aligned}$$

où $\sigma_{B^k_\gamma} = -D_{\xi_j}a_k$ qui converge dans $\Sigma^{m-1}_{1,0}$ vers $-D_{\xi_j}a$. On en déduit que $x_jA_\gamma\chi(x/\varepsilon) \in \mathrm{Op}(\Sigma^m_{1,0})$ et que

$$\sigma_{x_jA_\gamma\chi(x/\varepsilon)}(x,\xi,\gamma) = x_ja(x,\xi,\gamma)\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

modulo $\Sigma^{m-1}_{1,0}$.

La fin de la démonstration est identique à la démonstration de (3.19).

4. Preuve

En utilisant essentiellement (2.1), on s'inspire de la preuve de [8].

4.1. Estimation sur les symboles

Lemme 4.1. *Soient P et $\mathscr{H}$ comme dans le paragraphe* 1.1.1, *Ω_1 un ouvert relativement compact, $\bar{\Omega}_1$ inclus dans Ω, ψ une fonction équivalente à φ sur Ω_1, $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi = 1$ sur $\bar{\Omega}_1$.*

Posons

$$a(x, \xi, \gamma) = \chi(x) p(x, \xi - i\gamma\psi'(x)). \tag{4.1}$$

Il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in \bar{\Omega}_1$, pour tout $(\xi, \Gamma) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \backslash (0,0)$, on ait

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial a}{\partial \xi_j}(x, \xi, \Gamma) \right|^2 \geqq C(|\xi|^2 + \Gamma^2). \tag{4.2}$$

Preuve. A cause de l'homogénéité de a, il suffit de montrer que le vecteur $\partial a(x, \xi, \Gamma)/\partial \xi$ ne s'annule pas sur $\bar{\Omega}_1 \times S^n$. Sinon, on pourrait trouver $(x; \xi, \Gamma) \in \bar{\Omega}_1 \times S^n$ avec

$$0 = \frac{\partial a}{\partial \xi}(x, \xi, \Gamma) = \frac{\partial p}{\partial \xi}(x, \xi - i\Gamma\psi'(x)), \tag{4.3}$$

et par suite, p étant homogène de degré 2 $(\neq 0)$, on obtiendrait de (4.3) $p(x, \xi - i\Gamma\psi'(x)) = \{p, \psi\}(x, \xi - i\Gamma\psi'(x)) = 0$. Or p étant de type principal (4.3) implique $\Gamma \neq 0$; par suite, $\{p, \psi\}$ étant de degré 1, il vient, comme $p(x, \xi)$ est réel $\{\{p, \psi\}, \psi\}(x, \xi) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse (1.3) et donne le résultat.

Remarquons que, comme $p(x, \xi)$ est un symbole réel de degré 2, on obtient, pour ψC^∞ réelle, l'identité

$$\left\{ \begin{aligned} & p(x, \xi - i\Gamma\psi'(x)) = j_1(x, \xi, \Gamma) + i\Gamma j_2(x, \xi, \Gamma), \qquad \text{avec} \\ & j_1(x, \xi, \Gamma) = p(x, \xi) - \frac{\Gamma^2}{2}\{\{p, \psi\}, \psi\}(x, \xi), \\ & j_2(x, \xi, \Gamma) = -\{p, \psi\}(x, \xi). \end{aligned} \right. \tag{4.4}$$

Lemme 4.2. *Soient P et $\mathscr{H}$ vérifiant les hypothèses du théorème* 1, *$x_0 \in \Omega$. Il existe un voisinage Ω_0 de x_0, $\Omega_0 \subset \Omega$, une fonction C^∞ réelle ψ équivalente à φ sur Ω_0, des fonctions réelles $a(x, \xi, \Gamma)$, $b(x, \xi, \Gamma) \in C^\infty(\Omega_0 \times S^n)$, des constantes C_1, C_2, tels que, pour tout $(x; \xi, \Gamma) \in \Omega_0 \times S^n$*

$$\begin{aligned} & C_1 |j_1(x, \xi, \Gamma)|^2 + C_2 |j_2(x, \xi, \Gamma)|^2 + a(x, \xi, \Gamma) j_1(x, \xi, \Gamma) \\ & \quad + b(x, \xi, \Gamma) j_2(x, \xi, \Gamma) + \{j_1, j_2\}(x, \xi, \Gamma) \geqq 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

où j_1 et j_2 sont donnés par (4.4).

Preuve. Comme $d\varphi \neq 0$ sur Ω, on peut trouver un voisinage relativement compact Ω' de x_0 et un système de coordonnées $(t, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$, centré en x_0, tels que $\varphi \equiv t$ sur Ω'. Posons alors

$$\psi(t, y) = t - \frac{At^2}{2},$$

et

$$\Omega_0 = \Omega' \cap \left\{(t, y), |t| < \frac{1}{2A}\right\}.$$

On a, utilisant (4.4) et les variables $x = (y, t)$ de variables duales $\xi = (\eta, \tau)$, l'identité

$$\begin{aligned} j_1 &= p(y, t, \eta, \tau) - \frac{\Gamma^2}{2} p''_{\tau\tau}(y, t, \eta, \tau)(1 - At)^2, \\ j_2 &= -p'_\tau(y, t, \eta, \tau)(1 - At). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Remarquons tout d'abord, qu'en utilisant (2.1), (1.5), on prouve qu'il existe une constante C_1, indépendante de A, telle que pour $(x, \xi) \in \Omega' \times S^{n-1}$, on ait

$$\{p'_\tau, p\}(x, \xi) + C_1(|p(x, \xi)| + |p'_\tau(x, \xi)|) \geqq 0, \tag{4.7}$$

ce qui donne pour $(x, \xi) \in \Omega' \times S^{n-1}$ avec $p'_\tau(x, \xi) = 0$,

$$\{p'_\tau, p\}(x, \xi) + C_1 |p(x, \xi)| \geqq 0, \tag{4.8}$$

et par homogénéité la même inégalité pour

$$(x, \xi) \in \Omega' \times \mathbf{R}^n \qquad \text{si } p'_\tau(x, \xi) = 0.$$

De (4.6), il vient l'identité

$$\begin{aligned} \{j_1, j_2\} = {} & (1 - At)\{p'_\tau, p\}(x, \xi) + A(p'_\tau(x, \xi))^2 \\ & + A\Gamma^2(1 - At)^2(p''_{\tau\tau}(x, \xi))^2 + \frac{\Gamma^2}{2}(1 - At)^3\{p''_{\tau\tau}, p'_\tau\}(x, \xi). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Par conséquent, pour $(x; \xi, \Gamma) \in \Omega_0 \times S^n$, il vient,

$$j_1(x, \xi, \Gamma) = j_2(x, \xi, \Gamma) = 0 \quad \text{implique} \quad \{j_1, j_2\} \geqq 0. \tag{4.10}$$

En effet, de (4.6), (4.9) il vient pour $j_1 = j_2 = 0$,

$$\begin{aligned} \{j_1, j_2\} = {} & (1 - At)\{p'_\tau, p\}(x, \xi) + A\Gamma^2(1 - At)^2(p''_{\tau\tau}(x, \xi))^2 \\ & + \frac{\Gamma^2}{2}(1 - At)^3\{p''_{\tau\tau}, p'_\tau\}(x, \xi), \end{aligned}$$

avec

$$p'_\tau(x,\xi)=0, \qquad p(x,\xi)=\frac{\Gamma^2}{2}\,p''_{\tau\tau}(x,\xi)(1-At)^2.$$

D'où, en utilisant (4.8) et la définition de Ω_0,

$$\{j_1,j_2\}\geqq -\frac{C_1}{2}\,|p(x,\xi)|$$
$$+A\Gamma^2(1-At)^2\left[(p''_{\tau\tau}(x,\xi))^2+\frac{1}{2A}(1-At)\{p''_{\tau\tau},p'_\tau\}(x,\xi)\right]$$

soit, comme $j_1=0$,

$$\{j_1,j_2\}\geqq A\Gamma^2(1-At)^2\left[(p''_{\tau\tau}(x,\xi))^2-\frac{C_1}{4A}|p''_{\tau\tau}(x,\xi)|+\frac{1-At}{2A}\{p''_{\tau\tau},p'_\tau\}(x,\xi)\right],$$

ce qui assure (4.10) pour A assez grand, car $(p''_{\tau\tau}(x,\xi))^2\geqq\omega'>0$ sur l'ouvert relativement compact Ω', ω' étant indépendant de A, ainsi que C_1. En outre, des identités (4.6), il vient

$$d_{\xi,\Gamma}j_1=p'_\tau(x,\xi)d\tau+p'_\eta(x,\xi)d\eta-\Gamma p''_{\tau\tau}(x,\xi)(1-At)^2d\Gamma,$$
$$d_{\xi,\Gamma}j_2=-(1-At)p''_{\tau\tau}(x,\xi)d\tau-p''_{\tau\eta}(x,\xi)(1-At)d\eta.$$

Par suite si pour $(x;\xi,\Gamma)\in\Omega_0\times S^n$, $j_1(x,\xi,\Gamma)=j_2(x,\xi,\Gamma)=0$, on a $p'_\tau(x,\xi)=0$, et donc, comme p est de type principal $p'_\eta(x,\xi)\neq0$. Or $p''_{\tau\tau}\neq0$ (1.3), et on obtient $d_{\xi,\Gamma}j_1\wedge d_{\xi,\Gamma}j_2\neq0$, ce qui avec (4.10) prouve le lemme 4.2.

4.2. Estimation pour $\|P_\gamma u\|+\|(P_\gamma)^*u\|$

On s'inspire de la preuve de [8].

Lemme 4.3. *Soient P, $\mathcal{H}$ comme dans le paragraphe* 1.1.1, Ω_1 *un ouvert relativement compact,* $\bar\Omega_1$ *inclus dans* Ω, ψ *une fonction équivalente à* φ *sur* Ω_1.

Alors il existe $\delta_0>0$ et une fonction $C(\delta)>0$ définie sur $]0,\delta_0]$, *tendant vers l'infini quand δ tend vers* 0, *tels que pour $u\in C_0^\infty(\Omega_1)$, diamètre* supp $u\leqq\delta\leqq\delta_0$, $\gamma\geqq\delta^{-1}$,

$$\|P_\gamma u\|_{L^2}+\|(P_\gamma)^*u\|_{L^2}\geqq C(\delta)\|u\|_{1,\gamma}, \tag{4.11}$$

où $P_\gamma=e^{-\gamma\psi}Pe^{\gamma\psi}$, $\|u\|_{1,\gamma}$ *donné par* (3.13).

Preuve. Comme les coefficients de P sont L^∞_{loc}, on obtient que $\bar\Omega_1$ est compact inclus dans Ω, et qu'il suffit d'établir le lemme avec P_γ remplacé par l'opérateur de symbole $\chi(x)p(x,\xi-i\gamma\psi'(x))$, $\chi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi=1$ sur $\bar\Omega_1$.

Du lemme 4.1, posant $a(x,\xi,\gamma)=\chi(x)p(x,\xi-i\gamma\psi'(x))$, il vient l'existence de $C=C_0>0$ telle que pour tout $(x,\xi,\gamma)\in\bar\Omega_1\times\mathbf{R}^n\times[1,+\infty)$,

$$\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial a}{\partial\xi_j}(x,\xi,\gamma)\right|^2\geqq C_0(\gamma^2+|\xi|^2). \tag{4.12}$$

Par ailleurs, comme polynôme en ξ, γ de degré 2 à coefficients C_0^∞, il est clair que $a \in \Sigma_{1,0}^2$ (Déf. (3.1)). Posons $A = a(x, D_x, \gamma)$. On a

$$[A, x_j]^*[A, x_j] = x_j[A^*, [A, x_j]] + x_j[A, x_j]A^* + A^*x_j[x_j, A].$$

Par suite, pour $u \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$, les normes et produits scalaires étant L^2 sauf mention explicite,

$$\|[A, x_j]u\|^2 = (x_jB_2u, u) + (A^*u, [A, x_j]^*x_ju) + (x_j[x_j, A]u, Au),$$

où $B_2 \in \mathrm{Op}(\Sigma_{1,0}^2)$ (3.5).

Par suite, si $\operatorname{supp} u \subset B(0, \varepsilon) \subset \Omega_1$, on déduit du corollaire 3.5′

$$\|[A, x_j]u\|^2 \leqq C_1\varepsilon\,\|u\|_{1,\gamma}^2 + C_2(\varepsilon)\|u\|_{1/2,\gamma}^2 + \varepsilon(\|A^*u\|^2 + \|Au\|^2)$$
$$+\frac{2}{\varepsilon}\{\|[A, x_j]^*x_ju\|^2 + \|x_j[x_j, A]u\|^2\},$$

$C_2(\varepsilon)$ étant a priori non bornée quand ε tend vers 0, mais bornée sur tout $[\alpha, +\infty)$ avec $\alpha > 0$.

On obtient alors, réutilisant le corollaire 3.5′,

$$\|[A, x_j]u\|^2 \leqq \tilde{C}_1\varepsilon\,\|u\|_{1,\gamma}^2 + \tilde{C}_2(\varepsilon)\|u\|_{1/2,\gamma}^2 + \varepsilon(\|A^*u\|^2 + \|Au\|^2).$$

Par suite, si $\operatorname{supp} u \subset B(0, \delta)$, $\delta \leqq \varepsilon$, si $\gamma \geqq \delta^{-1}$, il vient de (3.16),

$$\|[A, x_j]u\|^2 \leqq (\tilde{C}_1\varepsilon + \tilde{C}_2(\varepsilon)\delta)\|u\|_{a,\gamma}^2 + \varepsilon(\|A^*u\|^2 + \|Au\|^2).$$

Or de l'inégalité (4.12), il vient, en remarquant que le symbole de $[A, x_j]$ est $(1/i)\partial a/\partial\xi_j$,

$$\sum_{j=1}^n \|[A, x_j]u\|^2 \geqq (nC_0 - \delta C_3)\|u\|_{1,\gamma}^2.$$

Finalement, on a, pour $\operatorname{supp} u \subset B(0, \delta)$, $\delta \leqq \varepsilon$, $\gamma \geqq \delta^{-1}$,

$$\varepsilon(\|Au\|^2 + \|A^*u\|^2) + C\varepsilon\,\|u\|_{1,\gamma}^2 + C(\varepsilon)\delta\,\|u\|_{1,\gamma}^2 \geqq C_4\|u\|_{1,\gamma}^2.$$

En outre, on peut supposer $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$ avec $C\varepsilon_0 = C_4/2$. D'où, on a, pour $\operatorname{supp} u \subset B(0, \delta)$, $\delta \leqq \varepsilon$, $\gamma\delta \geqq 1$,

$$\|Au\|^2 + \|A^*u\|^2 \geqq \left(\frac{C_4}{2} - C(\varepsilon)\delta\right)\frac{1}{\varepsilon}\|u\|_{1,\gamma}^2.$$

On peut supposer, en la majorant éventuellement, que la fonction $C(\varepsilon)$ est continue et vérifie $C(\varepsilon) \geqq \varepsilon^{-1}C_4/4$. Soit alors

$$0 < \delta\frac{4}{C_4} \leqq \frac{1}{C(\varepsilon_0)}, \quad \frac{C_4}{4\delta} \in [C(\varepsilon_0), +\infty)$$

est une valeur atteinte par C. Il existe donc $\varepsilon(\delta)$ avec $C(\varepsilon(\delta))\delta 4/C_4 = 1$, on a

$$1 \geqq \varepsilon(\delta)^{-1} \frac{C_4}{4} \delta \frac{4}{C_4}$$

soit $\delta \leqq \varepsilon(\delta)$.

Par ailleurs

$$\varepsilon(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

car sinon on pourrait trouver une suite

$$\delta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0, \qquad \varepsilon(\delta_n) \geqq \varepsilon_1 > 0.$$

Par suite $C(\varepsilon(\delta_n))$ resterait borné et le produit $C(\varepsilon(\delta_n))\delta_n$ tendrait vers 0, ce qui est impossible car $C(\varepsilon(\delta))\delta = C_4/4$.

Finalement, pour $\delta \leqq C_4/4C(\varepsilon_0)$, $\operatorname{supp} u \subset B(0, \delta)$, $\gamma\delta \geqq 1$,

$$\|Au\|^2 + \|A^*u\|^2 \geqq \frac{C_4}{4\varepsilon(\delta)} \|u\|_{1,\gamma}^2, \qquad \text{avec } \varepsilon(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0,$$

soit le résultat du lemme.

4.3. Estimation finale

Nous prouvons ici une inégalité de Carleman [6].

Lemme 4.4. *Soient P et $\mathcal{H}$ comme dans le paragraphe* 1.1.1. *Pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $V(x_0)$, C_1, $C_2 > 0$, une constante $\gamma(x_0) \geqq 2$, tels que, pour tout $u \in C_0^\infty(V(x_0))$, pour tout $\gamma \geqq \gamma(x_0)$*

$$\|P_\gamma u\| \geqq C_1 \|u\|_{1,\gamma} \geqq C_2(\gamma \|u\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}). \tag{4.13}$$

Preuve. Prolongeant par homogénéité de degré 2 en (ξ, Γ), l'inégalité (4.5) du lemme 4.2, il vient pour $\gamma \geqq 1$, $x \in \Omega_0$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, avec $\langle \gamma; \xi \rangle^2 = |\xi|^2 + \gamma^2$,

$$C_1 \langle \gamma; \xi \rangle^{-2} |j_1(x, \xi, \gamma)|^2 + C_2 \gamma^{-2} |\gamma j_2(x, \xi, \gamma)|^2 + a\left(x, \frac{\xi}{\langle \gamma; \xi \rangle}, \frac{\gamma}{\langle \gamma; \xi \rangle}\right) j_1(x, \xi, \gamma)$$
$$+ \gamma^{-1} b\left(x, \frac{\xi}{\langle \gamma; \xi \rangle}, \frac{\gamma}{\langle \gamma; \xi \rangle}\right) \langle \gamma; \xi \rangle \gamma j_2(x, \xi, \gamma) + \{j_1, j_2\}(x, \xi, \gamma) \geqq 0.$$

En utilisant l'inégalité de Gårding précisée (3.18), il vient pour $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$,

$$(\operatorname{Op}[C_1 \langle \gamma; \xi \rangle^{-2} |j_1|^2 + C_2 \gamma^{-2} |\gamma j_2|^2 + a_0 j_1 + \gamma^{-1} b_1 \gamma j_2] u, u)$$
$$+ \gamma^{-1} \|P_\gamma u\|^2 - \gamma^{-1} \|(P_\gamma)^* u\|^2 + C_3 \|u\|_{1/2,\gamma}^2 \geqq 0$$

avec

$$a_0 = a\left(x, \frac{\xi}{\langle \gamma; \xi \rangle}, \frac{\gamma}{\langle \gamma; \xi \rangle}\right), \quad b_1 = \langle \gamma; \xi \rangle b\left(x, \frac{\xi}{\langle \gamma; \xi \rangle}, \frac{\gamma}{\langle \gamma; \xi \rangle}\right).$$

Donc en multipliant par γ, on obtient, posant $p_\gamma = p(x, \xi - i\gamma\psi'(x))$,

$$\left(\mathrm{Op}\left[C_1\gamma\langle\gamma;\xi\rangle^{-2}\left|\frac{p_\gamma+\bar{p}_\gamma}{2}\right|^2 + C_2\gamma^{-1}\left|\frac{p_\gamma-\bar{p}_\gamma}{2i}\right|^2 + a_0\gamma\frac{p_\gamma+\bar{p}_\gamma}{2} + b_1\frac{p_\gamma-\bar{p}_\gamma}{2i}\right]u, u\right)$$

$$(4.14)\quad + \|P_\gamma u\|^2 - \|(P_\gamma)^* u\|^2 + C_3\gamma\|u\|^2_{1/2,\gamma} \geqq 0.$$

Or, comme $a_0 \in \Sigma^0_{1,0}$ (Déf. 3.1), pour $\alpha > 0$,

$$(4.15)\qquad \left|\left(\mathrm{Op}\left(a_0\gamma\frac{p_\gamma+\bar{p}_\gamma}{2}\right)u, u\right)\right| \leqq \alpha\|P_\gamma u\|^2 + \alpha\|(P_\gamma)^* u\|^2 + \frac{C_4\gamma^2}{\alpha}\|u\|^2.$$

De même, comme $b_1 \in \Sigma^1_{1,0}$, on a

$$(4.16)\qquad \left|\left(\mathrm{Op}\left(b_1\frac{p_\gamma-\bar{p}_\gamma}{2i}\right)u, u\right)\right| \leqq \alpha\|P_\gamma u\|^2 + \alpha\|P^*_\gamma u\|^2 + \frac{C_4}{\alpha}\|u\|^2_{1,\gamma}.$$

De même, on a

$$\left|\left(\mathrm{Op}\left(C_1\gamma\langle\gamma;\xi\rangle^{-2}\left|\frac{p_\gamma+\bar{p}_\gamma}{2}\right|^2\right)u, u\right)\right| \leqq C_5\gamma\|\langle\gamma;\xi\rangle^{-1}(P_\gamma + (P_\gamma)^*)u\|^2 + C_6\gamma\|u\|^2_{1/2,\gamma},$$

(4.17)

ainsi que

$$(4.18)\qquad \left|\left(\mathrm{Op}\left(C_2\gamma^{-1}\left|\frac{p_\gamma-\bar{p}_\gamma}{2i}\right|^2\right)u, u\right)\right| \leqq C_7\gamma^{-1}\|(P_\gamma - (P_\gamma)^*)u\|^2 + C_8\gamma\|u\|^2_{1/2,\gamma},$$

car $P_\gamma - (P_\gamma)^* = \gamma B_1$, où $B_1 \in \mathrm{Op}(\Sigma^1_{1,0})$.

Pour $\alpha = \frac{1}{8}$, de (4.14), ..., (4.18), il vient

$$\|P_\gamma u\|_0^2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{C}{\gamma}\right) - \|(P_\gamma)^* u\|^2\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{C}{\gamma}\right) \geqq -C\|u\|^2_{1,\gamma},$$

d'où pour $\gamma \geqq 2C$,

$$7\|P_\gamma u\|^2 - \|(P_\gamma)^* u\|^2 \geqq -4C\|u\|^2_{1,\gamma}.$$

Or de (4.11), il vient, pour diamètre supp $u \leqq \delta \leqq \delta_1$, $\gamma\delta \geqq 1$,

$$\|P_\gamma u\|^2 + \|(P_\gamma)^* u\|^2 \geqq \tfrac{1}{2}C(\delta)^2\|u\|^2_{1,\gamma},$$

avec $\lim_{\delta\to 0} C(\delta) = +\infty$.

Par suite, ajoutant membre à membre les deux dernières inégalités, pour $\gamma \geqq \max(2C, \delta^{-1})$, $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$, diamètre supp $u \leqq \delta \leqq \delta_1$,

$$\|P_\gamma u\|^2 \geqq \frac{1}{8}\left(\frac{C(\delta)^2}{2} - 4C\right)\|u\|^2_{1,\gamma}.$$

Choisissons alors $\delta_2 \leqq \delta_1$ tel que $C(\delta_1)^2 \geqq 8C + 8$, puis $\gamma \geqq \max(2C, \delta_2^{-1})$, alors pour $u \in C_0^\infty(\Omega_0)$, diamètre supp $u \leqq \delta_2$, $\|P_\gamma u\| \geqq \|u\|_{1,\gamma}$, ce qui achève la preuve du lemme 4.4 duquel on déduit aisément le théorème 1.

4.4. Preuve des corollaires

Dans ce paragraphe, on supposera que le symbole principal de l'opérateur est

$$p = \tau^2 + q(t, x, \xi),$$

où $(t, x_1, \dots, x_{n-1})$ de variables duales $(\tau, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ est un système de coordonnées locales, x désignant $(x_1, \dots, x_{n-1})$, et ξ $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $q(t, x, \xi)$ étant une forme quadratique en ξ, C^∞ en (t, x).

On suppose ici que l'hypersurface S a pour équation $t = 0$ et que le point x_0 de $\mathbf{R}^n$ est $0_{\mathbf{R}^n}$.

Lemme 4.4.1. *Sous les hypothèses du corollaire* 1.2.1, *il existe une fonction C^∞ réelle λ définie au voisinage de $0_{\mathbf{R}^n}$ avec $\lambda(0) = 1$, un voisinage V de $0_{\mathbf{R}^n}$ tels que pour $(x, t; \xi, \tau) \in V \times \mathbf{R}^n$*

$$p(x, t, \xi, \tau) = \{p, t\lambda\}(x, t, \xi, \tau) = 0 \quad \textit{implique} \quad H_p^2(t\lambda)(x, t, \xi, \tau) \leqq 0.$$

Preuve. On pose $q(t, x, \xi) = \langle Q(t, x)\xi, \xi\rangle$, $Q(t, x)$ étant une matrice symétrique $(n-1) \times (n-1)$ à coefficients C^∞. Comme p est de type principal en 0 on a

$$q'_\xi(0, 0, \xi) = {}^tT_0^{-1}\xi,$$

où T_0 est une matrice inversible $(n-1) \times (n-1)$. On pose alors

$$(4.19) \qquad \begin{cases} \lambda(t, x) = 1 + \langle ax, x\rangle - Ct|x|^2, \\ \text{où la forme quadratique } a \text{ est définie par} \\ a = T_0 Q''_{tt}(0, 0)^t T_0, \text{ et } C \text{ une constante} > 0. \end{cases}$$

On a

$$(4.20) \qquad H_p^2(t\lambda) = \lambda H_p^2(t) + 2H_p(\lambda)H_p(t) + tH_p^2(\lambda).$$

En outre, d'après l'hypothèse (1.7), si V est un voisinage compact de $0_{\mathbf{R}^n}$, l'ensemble des $(t, x; \xi, \tau) \in S^*(V)$ tels que $p = \tau = t = |\xi|^2 - 1 = 0 = H_p^2(t)$ est fini et par suite on peut supposer que le seul point (t, x) pour lequel il y a des bicaractéristiques tangentes à un ordre strictement supérieur à 2 est le point $(0, 0)$.

De (4.20), il vient

$$(4.21) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(H_p^2(t\lambda)) &= \lambda \frac{\partial}{\partial t}(H_p^2(t)) + \lambda'_t H_p(t) \\ &+ 2\frac{\partial}{\partial t}(H_p(\lambda))H_p(t) + 2H_p(\lambda)\frac{\partial}{\partial t}(H_p(t)) \\ &+ H_p^2(\lambda) + t\frac{\partial}{\partial t}(H_p^2(\lambda)). \end{aligned}$$

Soit donc $\rho_0 = (0,0;0,\xi_0)$ un point tel que

$$\tau = q(0,0,\xi_0) = t = |\xi_0|^2 - 1 = 0 \qquad \text{avec } q'_t(0,0,\xi_0) = 0.$$

On a en outre

$$H_p(\lambda) = 2\tau\lambda'_t + q'_\xi \cdot \lambda'_x, \tag{4.22}$$

et

$$\begin{aligned} H_p^2(\lambda) &= 2\tau[2\tau\lambda''_{tt} + q''_{\xi t}\cdot\lambda'_x + q'_\xi\cdot\lambda''_{xt}] \\ &\quad + q'_\xi\cdot[2\tau\lambda''_{tx} + q''_{\xi x}\cdot\lambda'_x + q'_\xi\cdot\lambda''_{xx}] - q'_t 2\lambda'_t - q'_x\cdot[q''_{\xi\xi}\cdot\lambda'_x]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Donc comme $\lambda'_x = \lambda'_t = 0$ en $(0,0)$, il vient de (4.21), (4.22), (4.23)

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_p^2(t\lambda))(\rho_0) = \frac{\partial}{\partial t}(H_p^2(t))(\rho_0) + H_p^2(\lambda)(\rho_0),$$

et par suite

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(H_p^2(t\lambda))(\rho_0) &= -2\langle Q''_{tt}(0,0)\xi_0,\xi_0\rangle + 2\langle aq'_\xi, q'_\xi\rangle \\ &= \langle[-2Q''_{tt}(0,0) + 2T_0^{-1}T_0Q''_{tt}(0,0){}^tT_0{}^tT_0^{-1}]\xi_0,\xi_0\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

en utilisant (4.19).

En outre si X est un champ tangent à Σ, comme $H_p^2(t\lambda) \leqq 0$ sur Σ ((4.20)) et que $H_p^2(t\lambda)(\rho_0) = 0$, on a $X(H_p^2(t\lambda))(\rho_0) = 0$. Calculons, en utilisant (4.21),

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(H_p^2(t\lambda))(\rho_0) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(H_p^2(t))(\rho_0) + 2\frac{\partial}{\partial t}(H_p^2(\lambda))(\rho_0).$$

Or, en utilisant (4.23), on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_p^2(\lambda))(\rho_0) = \lambda'''_{xxt}(q'_\xi)^2 + \lambda''_{xx}(q'_\xi, q''_{\xi t})$$

et par suite

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}H_p^2(t\lambda)(\rho_0) = \langle[-2Q'''_{ttt}(0,0) + 4{}^t\Lambda_1 T_0 Q''_{tt}(0) - 4CT_0^{-1}\,{}^tT_0^{-1}]\xi_0,\xi_0\rangle, \tag{4.24}$$

avec $q''_{\xi t} = \Lambda_1\xi$ où Λ_1 est une matrice $(n-1)\times(n-1)$.

Par suite, comme $|\xi_0| = 1$, on obtient que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(H_p^2(t\lambda))(\rho_0) \leqq \|\Omega_p\| - 4C\|{}^tT_0\|^{-2}, \tag{4.25}$$

où $\|\Omega_p\|$ est la norme de la forme quadratique ne dépendant que de p donnée par les deux premiers termes dans (4.24).

Par suite, il existe $\varepsilon_0 > 0$, $C_0 > 0$, ne dépendant que du jet des coefficients de p en $(0,0)$, tels que pour $C \geqq C_0$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(H_p^2(t\lambda))(\rho_0) \leqq -\varepsilon_0 C. \tag{4.26}$$

Remarquons que ε_0 et C_0 ne dépendent pas de la direction ξ_0 mais seulement du point de base.

En outre si X est un champ unitaire tangent à Σ, on a la majoration

$$\left| X \frac{\partial}{\partial t}(H_p^2(t\lambda))(\rho_0) \right| \leqq C(p), \tag{4.27}$$

où $C(p)$ est une constante ne dépendant que de p. En effet, il suffit de remarquer qu'on ne peut "atteindre" λ_{xxt} avec $X\partial/\partial t$ car le champ $\partial/\partial t$ est transverse à Σ.

Posant alors

$$X_1 = \tau^2 + q,$$
$$X_2 = 2\tau,$$
$$X_3 = |\xi|^2 - 1,$$
$$X_4 = t,$$

$X_1, \ldots, X_{2n}$ un système de coordonnées locales au voisinage de ρ_0, on examine $\omega = H_p^2(t\lambda)$, au voisinage de ρ_0 en des points tels que $p = H_p(t\lambda) = |\xi|^2 - 1 = 0$, on a

$$\begin{aligned} \omega(h_1, \ldots, h_{2n}) = {} & + \frac{\partial^2 \omega}{\partial X_4^2}(0)h_4^2 + 2\frac{\partial^2\omega}{\partial X_4 \partial X_2}(0)h_4h_2 \\ & + \frac{\partial^2\omega}{\partial X_2^2}(0)h_2^2 + 2\sum_{j\geqq 5}\frac{\partial^2\omega}{\partial X_4\partial X_j}(0)h_4h_j + 2\sum_{j\geqq 5}\frac{\partial^2\omega}{\partial X_2\partial X_j}(0)h_2 j_j \\ & + \sum_{j,k\geqq 5}\frac{\partial^2\omega}{\partial X_j\partial X_k}(0)h_jh_k + \varepsilon(h)|h|^2, \end{aligned} \tag{4.28}$$

car $h_1 = 0 = h_3$ (car $p = |\xi|^2 - 1 = 0$ au point h) et

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_p^2(t\lambda))(\rho_0) = 0.$$

En outre $H_p(t\lambda) = 0$ et donc $2\tau\lambda + tH_p(\lambda) = 0$, et par conséquent, $h_2 = \alpha(h)h_4$. On obtient donc que l'expression (4.28) est négative en utilisant (4.26), (4.27) et l'hypothèse (1.7)(ii).

Nous avons donc prouvé que pour tout ρ_0 tel que $p = H_p(t) = t = |\xi|^2 - 1 = 0 = H_p^2(t)$, il existe un voisinage W tel que si $\rho \in W$ et $p = H_p(t\lambda) = 0$ alors $H_p^2(t\lambda)(\rho) \leqq 0$. Alors il existe un voisinage V de $0_{\mathbf{R}^n}$ tel que pour tout $y \in V$, pour tout $\eta \in \mathbf{R}^n \setminus 0$ tel que $p(y, \eta) = H_p(t\lambda)(y, \eta) = 0$ on ait $H_p^2(t\lambda)(y, \eta) \leqq 0$.

En effet sinon, on pourrait trouver une suite $(y_n\,;\eta_n)=(x_n,t_n\,;\xi_n,\tau_n)$ avec

$$\begin{matrix} t_n \to 0 \\ x_n \to 0 \end{matrix} \qquad \tau_n^2+|\xi_n|^2=1 \qquad \text{telle que}$$

$$p(y_n,\eta_n)=H_p(t\lambda)(y_n,\eta_n)=0$$

et

$$H_p^2(t\lambda)(y_n,\eta_n)>0.$$

Or, en extrayant une sous-suite, on peut supposer par compacité que $(\tau_n,\xi_n)\to(\tau_0,\xi_0)$, $\tau_0^2+|\xi_0|^2=1$.

Comme $H_p(t\lambda)=tH_p(\lambda)+\lambda H_p(t)=0$, que t_n tend vers 0 et λ vers 1, il vient

$$p(0,0;\xi_0,\tau_0)=H_p(t)(0,0;\xi_0,\tau_0)=0,$$

et posant $\rho_0=(0,0;\xi_0,\tau_0)$, soit $H_p^2(t)(\rho_0)<0$ ce qui est impossible, soit on a $H_p^2(t)(\rho_0)=0$.

Or, on a vu que dans un voisinage de ρ_0 si $p=H_p(t\lambda)=0$ alors $H_p^2(t\lambda)\leqq 0$, ce qui contredit $H_p^2(t\lambda)(y_n,\eta_n)>0$. Ceci achève la preuve du lemme 4.4.1.

Par conséquent du lemme 4.4.1 et du théorème 1.2.1, il vient:

il existe un voisinage V de $0_{\mathbf{R}^n}$, tel que pour tout $u\in C^\infty(V)$ telle que

$$Pu=0, \qquad \operatorname{supp} u\subset\{t\lambda(t,x)\geqq 0\},$$

$$\operatorname{supi} u\cap\{t\lambda(t,x)=0\}\subset\subset V,$$

alors $u=0$ sur un voisinage de $0_{\mathbf{R}^n}$.

Or la dernière condition est ici automatiquement vérifiée grâce à la pseudo-convexité sur $V\setminus\{0\}$, et on a $\operatorname{supp} u\cap\{t\lambda(t,x)\}=\{0\}$. Ceci achève la preuve du corollaire 1.2.1.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Alinhac, *Non-unicité du problème de Cauchy*, Ann. of Math. **117** (1983), 77–108.

2. S. Alinhac, *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles réels*, Séminaire Goulaouic–Meyer–Schwartz, 1982–1983, Exposé III, Ecole Polytechnique, Paris et article à paraître aux Annales de Fourier 1984.

3. S. Alinhac and M. S. Baouendi, *Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal*, Séminaire Goulaouic–Schwartz, Exposé n° 22 (1979).

4. H. Bahouri, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel*, Thèse de 3ème cycle, Université Paris XI (Orsay), 1982.

5. A. Calderon and R. Vaillancourt, *A class of bounded ψ do's*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **69** (1972), 1185–1187.

6. T. Carleman, *Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes*, Ark. Mat. Astr. Fys **26B** (17) (1939), 1–9.

7. A. Cordoba and C. Fefferman, *Wave packets and Fourier integral operators*, Commun. on PDE 3(11) (1978), 979–1005.

8. Yu. V. Egorov, *On the solubility of differential equations with simple characteristics*, Russian Math. Surveys **26** (1971), 113–127.

9. L. Hormander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

10. A. Menikoff, *Carleman estimates for partial differential operators with real coefficients*, Arch. Rat. Mech. Anal. **54** (1974), 118–133.

11. L. Nirenberg, *Uniqueness in the Cauchy problem for a degenerate elliptic second order equations*, preprint.

12. F. Treves, *Linear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, London, 1970.

13. F. Treves, *A link between solvability of pseudo-differential equations and uniqueness in the Cauchy problem*, Am. J. Math. **94** (1972), 267–288.

14. A. Unterberger, *Pseudo-Differential Operators and Applications*, Aarhus Universitet, 1975.

15. C. Zuily, *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem*, Progress in Mathematics, Vol. 33.

Université Paris XI
Centre d'Orsay
91405 Orsay Cedex, France

(Reçu le 10 janvier 1984)

SUR LES CONDITIONS DE PSEUDO-CONVEXITE ET L'UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY

par

Luc ROBBIANO

Publié à Indiana University Mathematics Journal 36 (1987), 333-347.

Sur les Conditions de Pseudo–Convexité et l'Unicité du Problème de Cauchy

LUC ROBBIANO

Ce travail fait suite à un résultat dû à Alinhac [1] sur la non unicité du problème de Cauchy. On démontre la nécessité de certaines hypothèses intervenant dans le théorème d'unicité de Hörmander (voir Hörmander [3], [4], Lerner [5], et Zuily [9] pour une étude détaillée de l'unicité).

De façon succinte, les hypothèses du théorème d'unicité sont les suivantes :

(i) L'opérateur P est principalement normal.

(ii) La surface S est pseudo–convexe pour P.

La première hypothèse concerne les racines réelles de p (où p est le symbole principal de P). La seconde concerne les racines complexes doubles de p par rapport à S.

On démontre ici que pour une racine double non réelle ne vérifiant pas (ii) P n'a pas l'unicité de Cauchy. Ce résultat est obtenu en faisant des hypothèses génériques habituelles dans ce genre de problèmes. On restreint également la classe des problèmes traités, en supposant que le symbole principal de P est à coefficients analytiques réels (à valeurs complexes). Les cas de non–unicité pour des opérateurs à racine double réelle ont été étudiés par Alinhac [1] et Bahouri [2] pour des opérateurs à symboles réels, et par Saint Raymond [7] pour des opérateurs à symboles complexes.

En corollaire, nous obtenons un résultat de non–unicité pour des opérateurs à racine double réelle, qui n'est prouvé que pour un point voisin, et une surface voisine des données initiales.

§1. Enoncé des résultats

1.1. Enoncé du théorème. Soit P un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients C^∞, défini dans un voisinage Ω de $y_0 \in \mathbf{R}^{n+1}$. On suppose que $p(y,\eta)$, le symbole principal de P, est à coefficients analytiques réels de Ω dans $\mathbf{C}$.

Soit S une hypersurface C^∞, orientée, définie au voisinage de y_0 par l'équation $\varphi(y) = \varphi(y_0)$ ($d\varphi(y_0) \neq 0$). On suppose que S est non caractéristique pour P (i.e., $p(y_0, d\varphi(y_0)) \neq 0$).

On note $p_\gamma(y,\eta) = p(y,\eta - i\gamma\varphi'(y))$ et $\{f,g\}$ le crochet de Poisson de f et g, i.e., $\{f,g\}(y,\eta) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial \eta_j}\frac{\partial g}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial g}{\partial \eta_j}$.

Indiana University Mathematics Journal ©, Vol. 36, No. 2 (1987)

Théorème 1. *Supposons qu'il existe $\eta_0 \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et $\gamma_0 \in \mathbf{R}^*$ tels que, en notant $m_0 = (y_0, \eta_0 - i\gamma_0\varphi'(y_0))$,*

$$\{\{p,\varphi\},\varphi\}(m_0) \neq 0. \tag{1}$$

(2) *Les vecteurs* $\operatorname{Re}(p'_\eta(m_0))$ *et* $\operatorname{Im}(p'_\eta(m_0))$ *sont indépendants.*

$$p(m_0) = \{p,\varphi\}(m_0) = 0 \qquad et \qquad \frac{1}{2i\gamma_0}\{\overline{p_\gamma}, p_\gamma\}(m_0) < 0. \tag{3}$$

Alors, il existe un voisinage V de y_0, il existe deux fonctions $C^\infty(V)$, $a(y)$ et $u(y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \operatorname{supp} u \subset S_+ = \{y/\varphi(y) \geq \varphi(y_0)\} \\ y_0 \in \operatorname{supp} u \\ Pu + au = 0. \end{cases}$$

Remarques

(a) L'hypothèse (1) (au regard de (3)) indique que m_0 est une racine double de l'équation caractéristique. Si P est d'ordre 2, cela revient à dire que S est non caractéristique pour P. C'est une hypothèse générique.

(b) (2) est aussi une hypothèse générique. Elle est équivalente à :

(2′) Il existe $j,k \in \{1,\dots,n+1\}$ tels que $\operatorname{Im} p'_{\eta_j}(m_0)\overline{p'_{\eta_k}(m_0)} \neq 0$.

(c) (3) indique qu'au point m_0 l'opérateur P ne vérifie pas l'hypothèse de stricte pseudo-convexité pour les caractéristiques complexes de P.

Cette hypothèse s'énonce ainsi :

Pour tout $\eta \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $\gamma \in \mathbf{R}^*$, si

$$p(y_0, \eta - i\gamma\varphi'(y_0)) = \{p,\varphi\}(y_0, \eta - i\gamma\varphi'(y_0)) = 0,$$

alors $\frac{1}{2i\gamma}\{\overline{p_\gamma}, p_\gamma\}(y_0, \eta - i\gamma_0\varphi'(y_0)) > 0$.

Le théorème 1 montre que dans les cas génériques l'hypothèse de pseudo-convexité est nécessaire pour avoir l'unicité de Cauchy.

Ce résultat étend, pour les opérateurs à symbole principal analytique réel, le théorème 3 d'Alinhac [1]. Le démonstration du théorème 1 repose sur ce théorème. Nous le citons au paragraphe 2.

(d) Du théorème 1 on peut se faire une idée des surfaces, ayant même plan tangent, qui n'admettent pas l'unicité de Cauchy. Pour cela, fixons des coordonnées telles que $y_0 = 0$, prenons pour surface S: $\psi(y) = 0$ où $\psi(y) = N \cdot y + {}^t yAy + O(|y|^3)$ avec N un vecteur de $\mathbf{R}^{n+1}$ fixé et A une matrice symétrique $(n+1, n+1)$.

Les conditions (1), (2) et (3) deviennent respectivement :

$$ {}^tNP''_{\eta\eta}N \neq 0 $$

$$ (\mathrm{Re}\, p'_\eta, \mathrm{Im}\, p'_\eta) \text{ indépendant} $$

$$ p = p'_\eta \cdot N = 0 \text{ et } \frac{1}{\gamma_0}\mathrm{Im}\,(p'_y\,\overline{p'_\eta}) < \mathrm{Re}\ {}^tp'_\eta A\,\mathrm{Re}\, p'_\eta + \mathrm{Im}\ {}^tp'_\eta A\,\mathrm{Im}\, p'_\eta . $$

Ces trois conditions sons prises en un point $m_0 = (0, \eta_0 - i\gamma_0 N)$.

On remarque que seule la condition (3) dépend de A et que la quantité Re ${}^tp'_\eta A$ Re ${}^tp'_\eta$ + Im ${}^tp'_\eta A$ Imp'_η ne dépend que de la restriction de A, considérée comme une forme quadratique, au plan défini par $(\mathrm{Re}\, p'_\eta, \mathrm{Im}\, p'_\eta)$. En particulier, si N vérifie (1) et (2) $p = p'_\eta \cdot N = 0$ au point m_0, alors il existe des surfaces tangentes au plan $y \cdot N = 0$ n'admettant pas l'unicité de Cauchy.

Exemple. Soit

$$ P = D^2_{y_1} + 2y_3 D_{y_1} D_{y_2} + D_{y_2} D_{y_3} + i[2(1+y_4) D_{y_1} D_{y_2} + D_{y_2} D_{y_4}] $$

et $S \equiv y_1 = 0$ dans $\mathbf{R}^4$. On prend $m_0 = (0,0,0,0; -i, 1, -1, 0)$ on a donc $\gamma_0 = 1$. (1) et (2) sont vérifiées. On a $p(m_0) = p'_{\eta_1}(m_0) = 0$. On remarque, qu'ici la condition $\frac{1}{2i\gamma_0}\{\overline{p_\gamma}, p_\gamma\}(m_0) < 0$ est équivalente à $\mathrm{Im}\, p'_y(m_0)\overline{p'_\eta(m_0)} < 0$. On a :

$$ \mathrm{Im}\, p'_y(m_0)\overline{p'_\eta(m_0)} = \mathrm{Im}\big[2\eta_1\eta_2(\overline{\eta_2}) - i2\overline{\eta_1\eta_2}(-\overline{\eta_2})\big]\Big|_{m_0} = -4 < 0 . $$

On peut donc appliquer le théorème 1.

1.2. Enoncé du Corollaire. Avant d'énoncer le corollaire, nous allons définir les voisinages (C^2) d'une surface S au point y_0 de la façon suivante : on chosit des coordonnées locales $(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}$ telles que $S \equiv t = 0$.

Les voisinages (C^2) de S au point y_0 sont les ensembles qui contiennent un ensemble V_ε, avec $\varepsilon > 0$, du type suivant :

$$ V_\varepsilon = \{S' /\ \text{il existe } \psi(x) \in C^\infty \text{ telle que } S' \equiv t = \psi(x) \text{ avec } \psi(0) = 0;\ d\psi(0) = 0;\ |Hess\ \psi(x)| < \varepsilon\} . $$

On remarque que les voisinages sont indépendants de la façon de choisir les coordonnées locales.

Corollaire 2. *Soit* $\rho_0 = (y_0, \eta_0) \in T^*\Omega \setminus \{0\}$ *vérifiant :*

(4) $$ \{\{p, \varphi\}, \varphi\}(\rho_0) \neq 0 . $$

(5) *Les vecteurs* $\mathrm{Re}\,(p'_\eta(\rho_0))$ *et* $\mathrm{Im}\,(p'_\eta(\rho_0))$ *sont indépendants.*

(6) *Pour* $\rho = (y, \eta) \in T^*\Omega \setminus \{0\}$ *voisin de* ρ_0, $p(\rho) = 0 \Rightarrow \{\overline{p}, p\}(\rho) = 0$.

(7) $$ p(\rho_0) = \{p, \varphi\}(\rho_0) = 0 \text{ et } \mathrm{Re}\,\{\overline{p}, \{p, \varphi\}\}(\rho_0) > 0 . $$

Alors dans tout voisinage de S au point y_0 il existe S' telle que :

$$S'_+ \subset S_+$$

et pour tout voisinage V de y_0, il existe $y \in V \cap S'$ tel que P n'a pas l'unicité de Cauchy en y par rapport à S', au sens de la conclusion du théorème 1.

Remarques

(a) En fait, comme on le verra dans la démonstration, on peut choisir $S = S'$ si l'ensemble :

$$\{(y,\eta,\gamma) \in \Omega \times \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbf{R} / \varphi(y) = \varphi(y_0),$$
$$p(y,\eta - i\gamma\varphi'(y)) = \{p,\varphi\}(y,\eta - i\gamma\varphi'(y)) = 0\}$$

contient des points (y,η,γ) aussi proches qu'on veut de $(y_0,\eta_0,0)$ avec $\gamma \neq 0$. Dans ce cas (6) peut être remplacée par

(6)′ Pour $\rho = (y,\eta) \in T^*\Omega \setminus \{0\}$ voisin de ρ_0

$$[p(\rho) = 0,\ \ \varphi(y) = \varphi(y_0)] \Rightarrow \{\overline{p},p\}(\rho) = 0.$$

(b) Les hypothèses (4) et (5) sont les mêmes que les hypothèses (1) et (2) du théorème 1.

(c) (6) indique que P est principalement normal. En effet, étant donné (5), $\frac{1}{2i}\{\overline{p},p\} = \operatorname{Re}(\overline{a}p)$ au voisinage de (y_0,η_0). Comme on l'a vu dans l'introduction, c'est une hypothèse qui intervient dans le théorème d'unicité. C'est aussie une hypothèse nécessaire (dans les principaux cas génériques) pour avoir l'unicité. Sur la nécessité de cette hypothèse voir Alinhac [1], Saint Raymond [8], Robbiano [6].

(d) (7) implique que S n'est pas pseudo–convexe pour P en ρ_0.
L'hypothèse de pseudo–convexité est la suivante :

$$\text{pour tout } \eta \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\},$$
$$p(y_0,\eta) = \{p,\varphi\}(y_0,\eta) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\{\overline{p},\{p,\varphi\}\}(y_0,\eta) < 0.$$

Le corollaire 2 montre donc que cette hypothèse est essentiellement nécessaire.

(e) Ce corollaire est à comparer au théorème de Saint Raymond [7].
En restant dans le cadre des hypothèses (4), (5) et (6) et en supposant de plus que la matrice

$$K = \begin{pmatrix} H^2_{\mathrm{Re}\,p}\varphi(\rho_0) & H_{\mathrm{Re}\,p}H_{\mathrm{Im}\,p}\varphi(\rho_0) \\ H_{\mathrm{Re}\,p}H_{\mathrm{Im}\,p}\varphi(\rho_0) & H^2_{\mathrm{Im}\,p}\varphi(\rho_0) \end{pmatrix} \tag{8}$$

est définie positive, alors Saint Raymond montre que P n'a pas l'unicité de Cauchy en y_0. Précisons que pour ce théorème p est seulement à coefficients C^∞.

(8) est équivalente à :

(9) K a deux valeurs propres strictement positives.

Par contre, (7) est équivalente à :

(10) la somme des deux valeurs propres de K est strictement positive.

En conclusion, le théorème de Saint Raymond donne un résultat plus fort dans les cas (9). Par contre, si K vérifie (10) mais a une valeur propre négative ou nulle, le corollaire 2 est le seul résultat connu.

Exemple 1. Soit

$$P = D_{y_1}^2 + 2y_3 D_{y_1} D_{y_2} + 2D_{y_2} D_{y_3} + i\left[y_4 D_{y_1} D_{y_2} - 2D_{y_2} D_{y_4}\right]$$

avec $S \equiv y_1 = 0$, $y = 0$, $\eta_0 = (0,1,0,0)$. (4), (5) et (6) sont vérifiées. On a :

$$p(\rho_0) = \{p, y_1\}(\rho_0) = 0$$

$$\mathrm{Re}\left\{\overline{p}\{p, y_1\}\right\}(\rho_0) = +2.$$

On peut donc appliquer le corollaire. On remarque qu'en prenant

$$y = (0,0,0,-2\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \eta = \left(i\varepsilon, 1, -\tfrac{\varepsilon^2}{2}, 0\right)$$

on a $p(y,\eta) = \{p, y_1\}(y,\eta) = 0$. On peut donc appliquer la remarque (a).

Exemple 2. Soit

$$P = D_{y_1}^2 + D_{y_2} D_{y_3} - y_1 D_{y_3}^2 + i D_{y_3} D_{y_4}$$

$S \equiv y_1 = 0$, $y_0 = 0$, $\eta_0 = (0,0,1,0)$. (4), (5) et (6) sont vérifiées. On a : $p(\rho_0) = \{p, y_1\}(\rho_0) = 0$ et $\mathrm{Re}\left\{\overline{p}\{p, y_1\}\right\}(\rho_0) = +2$. On peut appliquer le corollaire. Par contre, on ne peut appliquer la remarque (a), en effet $\{p, y_1\} = 0 \Rightarrow \eta_1 = 0$.

Remarquons également que pour les deux exemples, on ne peut pas appliquer le théorème de Saint Raymond.

§2. Demonstrations

2.1. Preuve du théorème

(a) *Réduction.* On peut tout d'abord supposer que φ est analytique. En effet, on peut trouver une surface analytique tangente à S en y_0, définie par une équation $\widetilde{\varphi}(y) = \widetilde{\varphi}(y_0)$ ($\widetilde{\varphi}$ analytique avec $\widetilde{\varphi}(y_0) = \varphi(y_0)$, $d\widetilde{\varphi}(y_0) = d\varphi(y_0)$) telle que :

$$\{y \mid \widetilde{\varphi}(y) \geq \widetilde{\varphi}(y_0)\} \subset \{y \mid \varphi(y) \geq \varphi(y_0)\},$$

$\widetilde{\varphi}$ vérifiant (1), (2) et (3).

(1) et (2) sont clairement invariantes. Pour vérifier (3) il suffit de prendre $\widetilde{\varphi}$ proche de φ pour que le signe de l'expression soit le même.

En faisant un changement de variable analytique, on se ramène à la situation suivante. On travaille en coordonnées (x,t), S est définie par l'équation $t = 0$, le point $y_0 = (x_0, t_0) = (0,0)$. On suppose aussi qu'on a $\mathrm{Im}\, p'_{\xi_n} \overline{p'_{\xi_{n-1}}} \neq 0$ au point $(0,0,\xi_0,\tau_0)$. C'est l'hypothèse (2)$'$ après une éventuelle rotation sur les variables x.

L'idée de la preuve est la suivante. On va construire une fonction $\psi(x)$ vérifiant $\psi(0) = 0$, $d\psi(0) = 0$ et $\psi(x) \geq 0$. On pose $T(x,t) = t - \psi(x)$. ψ devra être telle qu'on puisse appliquer le théorème suivant, dû à Alinhac ([1], théorème 3), à l'opérateur P écrit dans les coordonnées T et $X = x$.

Théorème 3. *Soit P un opérateur de symbole principal $p(x,t,\xi,\tau)$.*

Supposons qu'il existe $\xi_0 \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $\tau_0 \in \mathbf{C}$ avec $\operatorname{Im}\tau_0 < 0$, tels que, en notant $m_0 = (0,0,\xi_0,\tau_0)$ on ait :

(11) $$p(m_0) = p'_\tau(m_0) = 0 \qquad p''_{\tau\tau}(m_0) \neq 0.$$

(12) *Les vecteurs $\operatorname{Re} p'_\xi(m_0)$ et $\operatorname{Im} p'_\xi(m_0)$ sont indépendants.*

(13) *$\ddot{t} \neq 0$ où le point indique la dérivation le long de la bicaractéristique (complexe) de p (complexifié) issue de m_0.*

(14) *La variété de codimension 2*

$$\sum = \{(x,\xi) \in T^* \mathbf{R}^n \setminus \{0\} |\ \textit{il existe } \tau \in \mathbf{C},\ p(x,0,\xi,\tau) = p'_\tau(x,0,\xi,\tau) = 0\}$$

contient une variété lagrangienne réelle étalée au-dessus de $\mathbf{R}^n_x$, passant par $(0,\xi_0)$.

Alors P n'a pas l'unicité de Cauchy par rapport à $\{t = 0\}$ au point 0, au sens du théorème 1.

Remarques. Parmi les quatre conditions du théorème d'Alinhac, c'est (14) la plus difficile à réaliser. C'est la réalisation de cette condition qui nous oblige ici à supposer que le symbole principal de P est analytique réel.

On suppose pour la suite que $\gamma_0 > 0$ (pour pouvoir appliquer le théorème d'Alinhac). On vérifie facilement que si $m_0 = (y_0, \eta_0 - i\gamma_0\varphi'(y_0))$ vérifie les hypothèses (1), (2) et (3), $\tilde{m}_0 = (y_0, -\eta_0 + i\gamma_0\varphi'(y_0))$ les vérifie également.

(b) *Construction de la surface et de la lagrangienne.* On fait le changement de variable

$$\begin{cases} X = x \\ T = t - \psi(x). \end{cases}$$

Notons (η,ς) les variables duales de (X,T), on a :

$$\begin{cases} \xi = \eta - \psi'(x)\varsigma \\ \tau = \varsigma \end{cases}$$

donc $\eta = \xi + \psi'(x)\tau$. On note q le symbole déduit de p par ce changement de variable.

Pour simplifier les notations, on remplace X par x et ς par τ. On a :

$$q(x,T,\eta,\tau) = p\big(x,T+\psi(x),\eta-\psi'(x)\cdot\tau,\tau\big)$$

$$q'_\tau(x,T,\eta,\tau) = p'_\tau\big(x,T+\psi(x),\eta-\psi'(x)\cdot\tau,\tau\big) \\ -\psi'(x)p'_\xi\big(x,T+\psi(x),\eta-\psi'(x)\cdot\tau,\tau\big).$$

Pour appliquer le théorème d'Alinhac, il suffit de construire une lagrangienne au-dessus de la surface $T=0$. On cherche donc des fonctions réelles $\eta(x)$, $\psi(x)$ et une fonction complexe $\tau(x)$ telles que :

(15) $$q(x,0,\eta'(x),\tau(x)) = p(x,\psi(x),\eta'(x)-\psi'(x)\cdot\tau(x),\tau(x)) = 0.$$

(16) $$q'_\tau\big(x,0,\eta'(x),\tau(x)\big) = p'_\tau\big(x,\psi(x),\eta'(x)-\psi'(x)\cdot\tau(x),\tau(x)\big) \\ -\psi'(x)\cdot p'_\xi\big(x,\psi(x),\eta'(x)-\psi'(x)\tau(x),\tau(x)\big) = 0.$$

(17) $$\eta'(0)=\xi_0,\quad \tau(0)=\tau_0.$$

(18) $$\psi(0)=0,\quad \psi'(0)=0,\quad \psi(x)\geq 0.$$

Pour cela posons :

(19) $$F(x,u,\eta,\sigma,\tau) = p'_\tau(x,u,\eta-\sigma\cdot\tau,\tau) - \sigma p'_\xi(x,u,\eta-\sigma\cdot\tau,\tau)$$

où $x\in\mathbf{R}^n$, $u\in\mathbf{R}$, $\eta\in\mathbf{R}^n$, $\sigma\in\mathbf{R}^n$ et $\tau\in\mathbf{C}$. On a,

$$F(0,0,\xi_0,0,\tau_0) = p'_\tau(0,0,\xi_0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial\tau}(0,0,\xi_0,0,\tau_0) = p''_{\tau\tau}(0,0,\xi_0,\tau_0) \neq 0.$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites (version holomorphe), il existe au voisinage de $(0,0,\xi_0,0)$ une unique fonction complexe $\tau(x,u,\eta,\sigma)$ telle que :

$$\tau(0,0,\xi_0,0)=\tau_0 \qquad \text{et solution de } F(x,u,\eta,\sigma,\tau)=0.$$

Il suffit maintenant pour résoudre (15) et (16) de trouver des fonctions réelles $\psi(x)$, $\eta(x)$ telles que :

(20) $$p\big(x,\psi(x),\eta'(x)-\psi'(x)\tau(x,\psi(x),\eta'(x),\psi'(x)), \\ \tau\big(x,\psi(x),\eta'(x),\psi'(x)\big)\big) = 0.$$

Lemme 4. *Soit une fonction analytique réelle à valeurs complexes $p(x,u,v,\eta,\sigma)$ définie dans un voisinage $\mathcal{U}$ de $(x_0,u_0,v_0,\eta_0,\sigma_0)$ ($x\in\mathbf{R}^n$, $u\in\mathbf{R}$, $v\in\mathbf{R}$, $\eta\in\mathbf{R}^n$, $\sigma\in\mathbf{R}^n$) telle que : $p(x_0,u_0,v_0,\eta_0,\sigma_0)=0$. Notons $x=(x',x_n)$; $\eta=(\eta',\eta_n)$; $\sigma=(\sigma',\sigma_n)$. On suppose que :*

(21) $$\operatorname{Im}\overline{p'_{\eta_n}}\,p'_{\sigma_n}(x_0,u_0,v_0,\eta_0,\sigma_0)\neq 0.$$

Soit des fonction analytiques réelles à valeurs réelles $\psi_0(x')$, $\eta_0(x')$ vérifiant :

$$\eta'_0(x'_0) = \eta'_0 \qquad \eta(x'_0) = u_0$$
$$\psi'_0(x'_0) = \sigma'_0 \qquad \psi_0(x'_0) = v_0.$$

Alors il existe des fonctions analytiques réelles $\psi(x)$, $\eta(x)$ définies au voisinage de x_0 vérifiant :

$$\begin{cases} \eta(x',(x_0)_n) = \eta_0(x') \\ \psi(x',(x_0)_n) = \psi_0(x') \\ p(x,\eta(x),\psi(x),\eta'(x),\psi'(x)) = 0. \end{cases}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy–Kovalewski. On note :

$$p = p_1 + ip_2 \qquad \text{où} \qquad p_1 = \mathrm{Re}\,p, \ p_2 = \mathrm{Im}\,p.$$

On doit résoudre le système

$$p_j(x,\eta(x),\psi(x),\eta'(x),\psi'(x)) = 0 \qquad \text{pour } j = 1,2$$

avec les données initiales du lemme. Pour cela il suffit d'écrire ce système de la façon suivante :

$$\eta'_{x_n}(x) = q_1(x,\eta(x),\psi(x),\eta'_{x'}(x),\psi'_{x'}(x))$$

$$\psi'_{x_n}(x) = q_2(x,\eta(x),\psi(x),\eta'_{x'}(x),\psi'_{x'}(x)).$$

Pour réaliser ceci il suffit que la matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial p_1}{\partial \eta_n} & \dfrac{\partial p_1}{\partial \sigma_n} \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial \eta_n} & \dfrac{\partial p_2}{\partial \sigma_n} \end{pmatrix}$$

soit inversible. Ceci est équivalent à $\mathrm{Im}\,\overline{p'_{\eta_n}}\,p'_{\sigma_n} \neq 0$ en $(x_0,u_0,v_0,\eta_0,\sigma_0)$. Ce qui est l'hypothèse (21). □

Pour résoudre (20), appliquons le lemme 4 à la fonction G définie par :

$$G(x,v,\eta,\sigma) = p(x,v,\eta - \sigma\tau(x,v,\eta,\sigma),\tau(x,v,\eta,\sigma)).$$

On a $G(0,0,\xi_0,0) = p(0,0,\xi_0,\tau_0) = 0$,

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_n}(0,0,\xi_0,0) = p'_{\xi_n}(0,0,\xi_0,\tau_0)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma_n}(0,0,\xi_n,0) = -\tau_0 p'_{\xi_n}(0,0,\xi_0,\tau_0)$$

d'où

$$\mathrm{Im}\,\overline{G'_{\eta_n}}\,G'_{\sigma_n}\Big|_{(0,0,\xi_0,0)} = -|p'_{\xi_n}(0,0,\xi_0,\tau_0)|^2\,\mathrm{Im}\,\tau_0 \neq 0.$$

On peut donc appliquer le lemme 4 à G avec des données sur $x_n = 0$. Ces données seront fixées plus loin.

(22) Remarquons qu'on peut aussi appliquer le lemme 4 avec des données sur la surface $x_{n-1} = 0$.

On vient de construire des fonctions vérifiant (15), (16), (17), il reste à vérifier (18).

(c) *Calcul de ψ''*. On veut construire une fonction $\psi(x)$ vérifiant :

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi'(0) = 0, \qquad \psi(x) \geq 0.$$

On pose sur $x_n = 0$, $\psi(x',0) = \varepsilon|x'|^2$ avec ε positif suffisamment petit. Dérivons par rapport à x l'équation (15). On obtient :

$$p'_x + \psi' p'_t + (\eta'' - \psi''\tau)p'_\xi - (\tau)'_x(\psi' - p'_\xi) + (\tau)'_x p'_\tau = 0. \tag{23}$$

Ceci pris en $\left(x,\psi(x),\eta'(x) - \psi'(x)\tau(x,\psi(x),\eta'(x),\psi'(x)),\tau(x,\psi(x),\eta'(x),\psi'(x))\right)$, et $(\tau)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\tau(x,\psi(x),\eta'(x),\psi'(x))\right]$. En $x = 0$, on a ,

$$\psi'(0) = 0, \qquad p'_\tau(0,0,\xi_0,\tau_0) = 0,$$

donc (23) devient :

$$p'_x(0,0,\xi_0,\tau_0) + (\eta''(0) - \psi''(0)\tau_0)p'_\xi(0,0,\xi_0,\tau_0) = 0. \tag{24}$$

On a donc pour $j = 1,\ldots,n-1$; (on note $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_k}(0) = \psi_{j,k}$ et les expressions sont prises en $(0,0,\xi_0,\tau_0)$)

$$\eta_{n,j} - \psi_{n,j}\tau_0 = -\frac{p'_{x_j} + \sum_{k=1}^{n-1}(\eta_{k,j} - \tau_0\psi_{k,j})p'_{\xi_k}}{p'_{\xi_n}}. \tag{25}$$

En prenant la partie imaginaire de ceci on a :

$$\psi_{n,j}\operatorname{Im}\tau_0 = \frac{1}{|p'_{\xi_n}|^2}\left[\operatorname{Im}(p'_{x_j}\overline{p'_{\xi_n}}) + \sum_{k=1}^{n-1}\eta_{k,j}\operatorname{Im}(p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}}) - \psi_{k,j}\operatorname{Im}(\tau_0 p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}})\right].$$

Il est facile de choisir $\eta_{k,j}$ pour $j,k \in \{1,\ldots,n-1\}$ de sorte que $\psi_{n,j} = 0$ pour $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ c'est-à-dire :

$$\operatorname{Im}(p'_{x_j}\overline{p'_{\xi_n}}) + \sum_{k=1}^{n-1}\eta_{k,j}\operatorname{Im}(p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}}) - \psi_{k,j}\operatorname{Im}(\tau_0 p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}}) = 0. \tag{26}$$

En prenant la partie réelle de (25) on a :

(27) $\eta_{n.j}$

$$= -\frac{1}{|p'_{\xi_n}|^2}\{\operatorname{Re}(p'_{x_j}\overline{p'_{\xi_n}}) + \sum_{k=1}^{n-1}[\eta_{k.j}\operatorname{Re}(p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}}) - \psi_{k,j}\operatorname{Re}(\tau_0 p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}})]\}.$$

Calculons maintenant $\psi_{n,n}$ on a, d'après (24),

$$\eta_{n,n} - \psi_{n,n}\tau_0 = -\frac{p'_{x_n} + \sum_{k=1}^{n-1}(\eta_{k,n} - \psi_{k,n}\tau_0)p'_{\xi_k}}{p'_{\xi_n}}.$$

En prenant la partie imaginaire on a :

$$\psi_{n,n}\operatorname{Im}\tau_0 = \frac{1}{|p'_{\xi_n}|^2}[\operatorname{Im}(p'_{x_n}\overline{p'_{\xi_n}}) + \sum_{k=1}^{n-1}\eta_{k,n}\operatorname{Im}(p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}})]. \tag{28}$$

Car on a $\psi_{k,n} = 0$ pour $k = 1,\ldots,n-1$.

Calculons en utilisant (26), (27)

(29) $\sum_{k=1}^{n-1}\eta_{k,n}\operatorname{Im}(p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}})$

$$= -\frac{1}{|p'_{\xi_n}|^2}[\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{Re}(p'_{x_k}\overline{p'_{\xi_n}})\operatorname{Im}(p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}})$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\eta_{k,j}\operatorname{Re}(p'_{\xi_j}\overline{p'_{\xi_n}})\operatorname{Im}(p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}})$$

$$- \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\psi_{k,j}\operatorname{Re}(\tau_0 p'_{\xi_j}\overline{p'_{\xi_n}})\operatorname{Im}(p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}})]$$

$$= -\frac{1}{|p'_{\xi_n}|^2}\{\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{Re}(p'_{x_k}\overline{p'_{\xi_n}})\operatorname{Im}(p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}})$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\operatorname{Re}(p'_{\xi_j}\overline{p'_{\xi_n}})[-\operatorname{Im}(p'_{x_j}p'_{\xi_n}) + \sum_{k=1}^{n-1}\psi_{k,j}\operatorname{Im}(\tau_0 p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}})]$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\psi_{k,j}\operatorname{Re}(\tau_0 p'_{\xi_j}\overline{p'_{\xi_n}})\operatorname{Im}(p'_{\xi_k}\overline{p'_{\xi_n}})\}.$$

On remarque que $\operatorname{Im}(z\bar{z}') = \operatorname{Im} z \operatorname{Re} z' - \operatorname{Im} z \operatorname{Re} z$ donc (29) est égal à, en utilisant le fait que $\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\overline{p_{\xi_k}}\psi_{k,j}p'_{\xi_j}$ est réelle,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{Im}(p'_{x_k}\overline{p'_{\xi_k}}) - (\operatorname{Im}\tau_0)\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\overline{p'_{\xi_k}}\psi_{k,j}p'_{\xi_j}.$$

De ceci et de (28), on déduit que,

$$\psi_{n,n} = \frac{1}{|p'_{\xi_n}|^2}\left[\frac{\operatorname{Im}(p'_x\overline{p'_\xi})}{\operatorname{Im}\tau_0} - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\overline{p'_{\xi_k}}\psi_{k,j}p'_{\xi_j}\right].$$

On a $\frac{\operatorname{Im}(p'_x\overline{p'_\xi})}{\operatorname{Im}\tau_0} > 0$ (hypothèse (3)), en prenant ε suffisamment petit $\psi_{n,n} > 0$ et donc la matrice $(\psi_{k,j})_{1\le k,\le n}$ est définie positive ce qui assure (18).

Pour appliquer le théorème 3 d'Alinhac il suffit de vérifier (13).

(d) *Calcul de* $\ddot{T}(0,0,\xi_0,\tau_0)$. On a $\ddot{T}(0,0,\xi_0,\tau_0) = \{p\{p,T\}\}(0,0,\xi_0,\tau_0)$ avec $T(x,t) = t - \psi(x)$.

Calculons en $(0,0,\xi_0,\tau_0)$,

$$\begin{aligned}\{p\{p,\psi\}\} &= \sum_{j=1}^{n}\{p,p'_{\xi_j}\psi'_{x_j}\}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}p'_{\xi_j}\psi_{j,k}p'_{\xi_k} && (\text{car } \psi'(0) = 0)\\ &= \frac{1}{\operatorname{Im}\tau_0}\operatorname{Im}(p'_x\overline{p'_\xi})\frac{(p'_{\xi_n})^2}{|p'_{\xi_n}|^2} + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Si

$$\frac{1}{\operatorname{Im}\tau_0}\operatorname{Im}(p'_x\overline{p'_\xi})\frac{(p'_{\xi_n})^2}{|p'_{\xi_n}|^2} \neq \{p\{p,t\}\}$$

alors en prenant ε suffisamment petit $\{p\{p,T\}\} \neq 0$. Sinon, on refait la même construction avec des données sur $x_{n-1} = 0$, (on utilise (22)). On pourra appliquer le théorème 3 d'Alinhac sauf si,

$$\frac{(p'_{\xi_n})^2}{|p'_{\xi_n}|^2} = \frac{(p'_{\xi_{n-1}})^2}{|p'_{\xi_{n-1}}|^2}.$$

Ce qui est équivalent à $\operatorname{Im}(p'_{\xi_n}\overline{p'_{\xi_{n-1}}}) = 0$. Cela contredit (2)'.

On peut donc toujours appliquer le théorème 3 d'Alinhac soit en faisant la construction avec des données sur $x_n = 0$, soit avec des données sur $x_{n-1} = 0$. Ce qui achève la preuve du théorème 1. □

§2.2. Preuve du Corollaire 2. La preuve du corollaire consiste à montrer que les racines doubles de l'équation caractéristique ne restent pas réelles près de (y_0,η_0), par rapport à una surface "proche" de S. Il suffit alors de vérifier qu'on peut appliquer le théorème 1.

Deux cas se présentent. Soit l'équation caractéristique admet des racines doubles non réelles près de (y_0,η_0) sur S. Soit ce n'est pas le cas. On verra alors qu'on peut perturber S pour se ramener au premier cas.

On va d'abord supposer que la surface S est définie par $t=0$. Bien entendu l'opérateur P écrit dans les coordonnées (x,t) n'a pas forcément un symbole principal analytique réel. Mais ceci est sans importance; quand on aura prouvé que toutes les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées, il suffira de revenir aux coordonnées initiales pour conclure.

(a) *Premier cas.* On va supposer qu'il existe une suite (x_n,ξ_n,τ_n) telle que $(x_n,\xi_n,\tau_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x_0,\xi_0,\tau_0)$, $\operatorname{Im}\tau_n \neq 0$ et $p(x_n,0,\xi_n,\tau_n) = p'_\tau(x_n,0,\xi_n,\tau_n) = 0$. Pour n suffisamment grand, les conditions (1) et (2) du théorème 1 sont vérifiées. Il suffit donc de calculer $\frac{1}{2i\gamma}\{\overline{p_\gamma},p_\gamma\}$, c'est-à-dire ici :

$$-\frac{1}{\operatorname{Im}\tau}\operatorname{Im}\left[p'_x(x,0,\xi,\tau)\,\overline{p'_\xi(x,0,\xi,\tau)}\right] \qquad (\text{car } p'_\tau(x,0,\xi,\tau)=0.)$$

On note $\tau=\tau_1+i\tau_2$ avec $\tau_1=\operatorname{Re}\tau$, $\tau_2=\operatorname{Im}\tau$. Les hypothèses (5) et (6) impliquent qu'il existe une fonction $a(x,\xi,\tau_1)$ (où $\tau_1\in\mathbf{R}$) telle que :

$$\operatorname{Im}\left[p'_y(x,0,\xi,\tau_1)\,\overline{p'_\eta(x,0,\xi,\tau_1)}\right] = \operatorname{Re}\left[\bar a(x,0,\xi,\tau_1)\,p(x,0,\xi,\tau_1)\right]$$

avec $y=(x,t)$, $\eta=(\xi,\tau)$. On a donc :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\left[p'_y(x,0,\xi,\tau)\,\overline{p'_\eta(x,0,\xi,\tau)}\right]\\
&= \operatorname{Im}\left\{\left[p'_y(x,0,\xi,\tau_1)+i\tau_2p''_{y\tau}(x,0,\xi,\tau_1)+O(\tau_2^2)\right]\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left[\overline{p'_\eta(x,0,\xi,\tau_1)}-i\tau_2\overline{p''_{\eta\tau}(x,0,\xi,\tau_1)}+O(\tau_2^2)\right]\right\}\\
&= \operatorname{Im}\left[p'_y(x,0,\xi,\tau_1)\overline{p'_\eta(x,0,\xi,\tau_1)}\right]\\
&\qquad\qquad +\tau_2\operatorname{Re}\left[p''_{y\tau}\overline{p'_\eta}-p'_y\overline{p''_{\eta\tau}}\right](x,0,\xi,\tau_1)+O(\tau_2^2)\\
&= \operatorname{Re}\left(\bar a p\right)(x,0,\xi,\tau_1)+\tau_2\operatorname{Re}\left\{\bar p,\{p,t\}\right\}(x,0,\xi,\tau_1)+O(\tau_2^2).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
p(x,0,\xi,\tau_1) &= p(x,0,\xi,\tau_1+i\tau_2)-i\tau_2p'_\tau(x,0,\xi,\tau_1+i\tau_2)+O(\tau_2^2)\\
&= O(\tau_2^2).
\end{aligned}$$

On obtient :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\tau_2}\operatorname{Im}\left[p'_x(x,0,\xi,\tau)\overline{p'_\xi(x,0,\xi,\tau)}\,\right] \\
&= -\operatorname{Re}\left\{\bar{p}\{p,t\}\right\}(x_0,0,\xi_0,\tau_0) \\
&\qquad\qquad + O\big(\tau_2+|x_0-x|+|\xi_0-\xi|+|\tau_0-\tau_1|\big)\,.
\end{aligned}
$$

Donc pour $(x,0,\xi,\tau)$ suffisamment proche de $(x_0,0,\xi_0,\tau_0)$ la condition (3) du théorème 1 est vérifiée.

(b) *Deuxième cas.* On suppose que les racines doubles de l'équation caractéristique par rapport à S sont réelles. On va montrer que par rapport à une surface S' l'équation caractéristique admet des racines doubles non réelles.

On fait le changement de variables suivant,

$$
\begin{aligned}
T &= t-\psi(x) \qquad \text{avec } \psi(x)\geq 0 \\
X &= x
\end{aligned}
$$

(on prendra, soit $\psi\equiv 0$, soit $\psi=\varepsilon|x|^2$). C'est le changement de variable fait au §2.1b). On pose :

$$
\begin{aligned}
F(x,T,\eta,\sigma,\tau) &= p(x,T,\eta-\sigma\tau,\tau) \\
G(x,T,\eta,\sigma,\tau) &= p'_\tau(x,T,\eta-\sigma\tau,\tau)-\sigma p'_\xi(x,T,\eta-\sigma\tau,\tau)\,.
\end{aligned}
$$

On considère ces deux fonctions au voisinage de $x_0=0$, $T_0=0$, $\eta_0=\xi_0$, $\sigma_0=0$, τ_0 et on a :

$$
\begin{aligned}
F(0,0,\xi_0,0,\tau_0) &= G(0,0,\xi_0,0,\tau_0)=0 \\
G'_\tau(0,0,\xi_0,0,\tau_0) &= p''_{\tau\tau}(0,0,\xi_0,\tau_0)\neq 0\,.
\end{aligned}
$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites, il existe au voisinage de $(0,0,\xi_0,0)$ une unique fonction complexe $\tau(x,T,\eta,\sigma)$ telle que

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
G\big(x,T,\eta,\sigma,\tau(x,T,\eta,\sigma)\big) &= 0 \\
\tau(0,0,\xi_0,0) &= \tau_0\,.
\end{aligned}
$$

Posons :

$$H(x,T,\eta,\sigma)=F\big(x,T,\eta,\sigma,\tau(x,T,\eta,\sigma)\big)\,.$$

On a :

$$H'_\eta(0,0,\xi_0,0)=p'_\xi(0,0,\xi_0,\tau_0)\,.$$

Etant donné (5) on peut, après permutation des variables, supposer

$$\operatorname{Im}(p'_{\xi_1}\overline{p'_{\xi_2}})(0,0,\xi_0,\tau_0) \neq 0.$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites ceci implique qu'il existe, en notant $\tilde{\eta} = (\eta_1,\eta_2)$; $\check{\eta} = (\eta_3,\dots,\eta_n)$, au voisinage de $(0,0,\check{\xi}_0,0)$ des fonctions réelles $\eta_j(x,T,\check{\eta},\sigma)$, $j = 1,2$ telles que :

$$H(x,T,\tilde{\eta}(x,T,\check{\eta},\sigma),\check{\eta},\sigma) = 0 \tag{31}$$

$$\tilde{\eta}(0,0,\check{\xi}_0,0) = \tilde{\xi}_0.$$

On pose :

$$K(x,\check{\eta}) = \tau\big(x,\psi(x),\tilde{\eta}(x,\psi(x),\check{\eta},\psi'(x)),\check{\eta},\psi'(x)\big).$$

Il reste à prouver que $K(x,\check{\eta})$ ne reste pas réelle si $\psi(x) = \varepsilon|x|^2$, en utilisant le fait que K reste réelle si $\psi \equiv 0$.

Pour simplifier, toutes les expressions sont prises en $x = 0$, $T = 0$, $\eta = \xi_0$, $\sigma = 0$, $\tau = \tau_0$. On a :

$$K'_x = \tau'_x + \tilde{\eta}'_x\,\tau'_{\tilde{\eta}} + \psi''_{xx}\,\tilde{\eta}'_\xi\,\tau'_{\tilde{\eta}} + \psi''_{xx}\,\tau'_\xi. \tag{32}$$

En dérivant (30) on a :

$$\begin{cases} p''_{\tau x} + \tau'_x\, p''_{\tau\tau} = 0 \\ p''_{\tau\xi} + \tau'_\eta\, p''_{\tau\tau} = 0 \\ -\tau_0\, p''_{\tau\xi} + \tau'_\xi\, p''_{\tau\tau} - p'_\xi = 0. \end{cases} \tag{33}$$

En dérivant (31) on a :

$$\begin{cases} \eta'_{1x} = -\dfrac{\operatorname{Im}(p'_x\overline{p'_{\xi_2}})}{\operatorname{Im}(p'_{\xi_1}\overline{p'_{\xi_2}})} \\[2ex] \eta'_{2x} = -\dfrac{\operatorname{Im}(p'_x\overline{p'_{\xi_1}})}{\operatorname{Im}(p'_{\xi_2}\overline{p'_{\xi_1}})} \\[2ex] \eta'_{1\xi} = \dfrac{\tau_0\operatorname{Im}(p'_\xi\, p'_{\xi_2})}{\operatorname{Im}(p'_{\xi_1}\overline{p'_{\xi_2}})} \\[2ex] \eta'_{2\xi} = \dfrac{\tau_0\operatorname{Im}(p'_\xi\overline{p'_{\xi_1}})}{\operatorname{Im}(p'_{\xi_2}\overline{p'_{\xi_1}})}. \end{cases} \tag{34}$$

On déduit de (32), (33) et (34) que :

$$\begin{aligned} (35)\quad -K'_x|p''_{\tau\tau}|^2\operatorname{Im}(p'_{\xi_1}\overline{p'_{\xi_2}}) \\ = \operatorname{Im}(p'_{\xi_1}\overline{p'_{\xi_2}})\overline{p''_{\tau\tau}}\,p''_{\tau x} \\ - \operatorname{Im}(p'_x\overline{p'_{\xi_2}})p''_{\tau\xi_1}\,p''_{\tau\tau} + \operatorname{Im}(p'_x\overline{p'_{\xi_1}})p''_{\tau\xi_2}\,\overline{p''_{\tau\tau}} \\ + \psi''_{xx}\big(\tau_0\big[\operatorname{Im}(p'_\xi\, p'_{\xi_2})p''_{\tau\xi_1}\,\overline{p''_{\tau\tau}} - \operatorname{Im}(p'_\xi\overline{p'_{\xi_1}})p''_{\tau\xi_2}\,\overline{p''_{\tau\tau}} \\ - \operatorname{Im}(p'_{\xi_1}\overline{p'_{\xi_2}})p''_{\tau\tau}\,p''_{\tau\xi}\big) - p'_\xi\,\overline{p''_{\tau\tau}}\big]. \end{aligned}$$

On sait que $\operatorname{Im} K'_x = 0$ si $\psi \equiv 0$ donc la partie imaginaire des trois premiers termes de (35) est nulle. On remarque que :

$$\operatorname{Im}(p'_{\xi_j}\overline{p'_{\xi_2}})\operatorname{Im}(p''_{\tau\xi_1}\overline{p''_{\tau\tau}}) - \operatorname{Im}(p'_{\xi_j}\overline{p'_{\xi_1}})\operatorname{Im}(p''_{\tau\xi_2}\overline{p''_{\tau\tau}}) + \operatorname{Im}(\overline{p''_{\tau\tau}}\,p''_{\tau\xi_j})\operatorname{Im}(p'_{\xi_1}\overline{p'_{\xi_2}}) = 0$$

pour $j = 1{,}2$. Par contre $\operatorname{Im}(p'_{\xi_j}\overline{p''_{\tau\tau}}) \neq 0$ pour $j = 1$ ou $j = 2$. Ceci est impliqué par $\operatorname{Im}(p'_{\xi_1}\overline{p'_{\xi_2}}) \neq 0$.

On a donc $\operatorname{Im} K'_{x_1} \neq 0$ ou $\operatorname{Im} K'_{x_2} \neq 0$, si $\psi(x) = \varepsilon|x|^2$, ce qui implique que $K(x,\tilde{\eta})$ ne reste pas réelle. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC, *Non unicité du problème de Cauchy*, Ann. of Math. **117** (1983), 77–108.

[2] H. BAHOURI, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel*, Comm. Partial Differential Equations **8** (1983), 1521–1547.

[3] L. HÖRMANDER, *Linear Partial Differential Operators*, Springer–Verlag, Berlin, 1963.

[4] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Springer–Verlag, Berlin, 1985.

[5] N. LERNER, *Unicité de Cauchy pour des opérateurs faiblement principalement normaux*, J. Math. Pures Appl. **64** (1985), 1–11.

[6] L. ROBBIANO, *Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs non elliptiques à symboles complexes*, J. Differential Equations **57** (1985), 200–223.

[7] X. SAINT RAYMOND, *Non unicité de Cauchy pour des opérateurs principalement normaux*, Indiana Univ. Math. J. **33** (1984), 847–858.

[8] X. SAINT RAYMOND, *Unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires du premier ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris **299** (1984), 495–498; Enseign. Math. **32** (1986), 1–55.

[9] C. ZUILY, *Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem*, Progress in Math. **33** Birkhäuser, Boston, 1983.

Département de Mathématique
Université de Paris-Sud
91405 Orsay Cedex, France

Received December 30, 1985.

UNICITE DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS FAIBLEMENT HYPERBOLIQUES

par

H. BAHOURI et Luc ROBBIANO

Publié à Hokkaido Mathematical Journal, 16 (1987), 257-275.

With the Authors' Compliments

Unicite de Cauchy pour des operateurs faiblement hyperboliques

H. BAHOURI & L. ROBBIANO

(Received August 4, 1986)

Reprinted from Hokkaido Mathematical Journal
Vol. XVI No. 3

SAPPORO, JAPAN

September 1987

Hokkaido Mathematical Journal Vol. 16 (1987), p. 257～275

Unicite de Cauchy pour des operateurs faiblement hyperboliques

H. BAHOURI & L. ROBBIANO
(Received August 4, 1986)

1. INTRODUCTION.

Nous présentons, dans ce travail, deux théorèmes d'unicité locale du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques par rapport à une surface.

L'hyperbolicité par rapport à une surface étant une condition nécessaire pour que le problème de Cauchy soit bien posé (théorème de Lax-Mizohata), la plupart des résultats, concernant ce type d'opérateurs, traitent à la fois la question de l'existence et celle de l'unicité. (Voir Oleĭnik[13], Ivrii-Petkov [8], Hörmander [5], ...).

Dans ce travail, nous avons choisi de nous restreindre à l'étude d'opérateurs $P(y, D_y)$ $(y \in \boldsymbol{R}^{n+1})$ non effectivement hyperboliques par rapport à une surface S. (En ce qui concerne les opérateurs effectivement hyperboliques, on pourra consulter Melrose [12], Iwasaki [9], Ivrii [7]). Plus précisément, nous avons fait sur la partie principale les hypothèses d'Hörmander [5] (voir les hypothèses (H_1), (H_2)) et nous nous sommes efforcés d'améliorer les hypothèses portant sur le symbole sous-principal p_1^s pour avoir l'unicité de Cauchy. Pour cela, nous avons introduit une notion généralisée de «principale normalité» faisant intervenir le symbole total p et qui, en quelque sorte, signifie que l'Hamiltonien de Im p_1^s est orthogonal, pour la fome symplectique σ, à la partie involutive de la variété caractéristique Σ.

La méthode employée dans ce papier repose sur la technique classique des inégalités de Carleman.

2. GENERALITES ET NOTATIONS.

2. 1. Invariants.

Dans toute la suite, $P(y, D_y)$ désigne un opérateur différentiel d'ordre deux à cojfficients C^∞ dans un ouvert Ω de $\boldsymbol{R}^{n+1}$ et à symbole principal réel $p_2(y, \eta)$. Et, nous considérons l'unicité du problème de Cauchy pour l'opérateur P avec des données initiales sur la surface $S=\{\varphi(y)=\varphi(y_0)\}$ (où y_0 est un point de Ω et φ est une fonction réelle de $C^\infty(\Omega)$, telle que $d\varphi \neq 0$ sur Ω), non caractéristique pour P.

On écrit $p(y, \eta)$ le symbole total de $P(y, D_y)$ (on a donc $p(y, \eta)= p_2(y, \eta)+p_1(y, \eta)+p_0(y, \eta)$, où les p_j sont homogènes de degré j par rapport à η pour $j=0, 1, 2$). On note par p_1^s le symbole sousprincipal de P, défini de la manière suivante:

$$p_1^s(y, \eta)=p_1(y, \eta)+\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial^2 p_2}{\partial y_j \partial \eta_j}(y, \eta)$$

Et l'on adopte la terminologie suivante:

- Nous disons que P est un opérateur hyperbolique dans Ω par rapport aux surfaces de niveaux de φ, si, pour tout $(y, \eta)\in \boldsymbol{R}^{n+1}\backslash 0$, l'équation en τ:

$$p_2(y, \eta+\tau\, d\varphi(y))=0$$

n'admet que des racines réelles lorsque $d\varphi(y)$ n'est pas parallèle à η.

- Nous disons que P a l'unicité de Cauchy par rapport à la surface orientée S près de y_0, si pour tout voisinage V suffisamment petit de y_0 il existe un voisinage W de y_0 dans Ω, et pour toute solution $u\in C^\infty(V)$ du problème:

$$\begin{cases} P(y, D_y)u=0 & \text{dans } V \\ u_{|\varphi(y)<\varphi(y_0)}=0 & \end{cases}$$

s'annule identiquement dans W.

- Nous disons que P a l'uncité de Cauchy compacte par rapport à la surface orentée S près de y_0 si pour tout voisinage V suffisamment petit de y_0 il existe un voisinage W de y_0 dans Ω, et pour toute solution $u\in C^\infty(V)$ du problème:

$$\begin{cases} P(y, D_y)u=0 & \text{dans } V \\ u=_{|\varphi(y)<\varphi(y_0)}=0 & \\ \text{Supp } u\cap S\subset\subset V & \end{cases}$$

s'annule identiquement dans W.

- Enfin, is σ est la 2-forme canonique sur $T^*(\Omega)$, nous désignons par F_p la matrice fondamentale de P qu'on définit de la manière suivante:

$$\text{pour tout } X,\ Y\in T(\Omega),\ \frac{1}{2}\text{ Hess } p_2(X, Y)=\sigma(X, F_pY)$$

et qui est un invariant symplectique anx points (y, η) tels que $p_2(y, \eta)= d\ p_2(y, \eta)=0$.

2. 2. Classification des opérateurs hyperboliques.

Nous rappelons ici la classification des opérateurs hyperboliques donnée dans Hörmander [5]. Cette classification repose sur la nature des valeurs propres de F_p aux points critiques ($p_2(y, \eta)=d\ p_2(y, \eta)=0$). En fait, aux

points critiques, F_p ne peut admettre plus d'un couple $(\mu, -\mu)$ de valeurs propres réelles non nulles (cf. Hörmander [5]) ; les autres valeurs propres sont soit nulles, soit imaginaires pures. D'où la distinction de deux classes :
- Soit il existe un coupie $(\mu, -\mu)$ de valeurs propres réelles non nulles. On dit alors que P est effectivement hyperbolique.
- Soit toutes les valeurs propres réelles sont nulles. On distingue alors deux cas selon la multiplicité d de la valeur propre 0 dans le polynôme minimal de F_p (Hörmander a démontré que $d=2$ ou 4).

DÉFINITION 2. 2. 1. *Dans le cas non effectivement hyperbolique, en notant par $i\mu_j$ les valeurs propres de F_p, on définit la " trace plus " de P (qu' on écrit $Tr^+ P$) de la manière suivante*:

$$Tr^+ P = \sum_{\mu_j>0} \mu_j.$$

2. 3. Cadre géométrique.

Soit

$$\Sigma = \{(y, \eta) \in \Omega \times \boldsymbol{R}^{n+1} \backslash 0,\ p_2(y, \eta) = \{p_2, \varphi\}(y, \eta) = 0\}$$

l'on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(H_1) Σ est une variété, le rang du Hessien de p_2 est égal à la codimension de Σ en tout point de Σ et σ est de rang constant sur Σ.

(H_2) P est non effectivement hyperbolique et la multiplicité de la valeur propre 0 dans le polynôme minimal de F_p est égale à 2.

Remarques concernant les hypothèses (H_1) et (H_2) :

(2. 3. 1) Il est clair que l'hypothèse (H_1) est symplectiquement invariante.

(2. 3. 2) On peut également définir Σ par :

$$\Sigma = \{(y, \eta) \in \Omega \times \boldsymbol{R}^{n+1} \backslash 0,\ d\ p_2(y, \eta) = 0\}.$$

2. 4. Sous-principale normalité.

DÉFINITION 2. 4. 1. *On dit que P est «sous-principalement normal» en y_0 ($y_0 \in \Omega$) si*
pour tout $X \in T\Sigma \cap T\Sigma^\sigma$, il existe une constante $C>0$ telle que:

(2. 4. 1.) $|X \operatorname{Im} p^s_{1|\Sigma}| \leqq C |\operatorname{Im} p^s_{1|\Sigma}|$

près de y_0, où $T\Sigma^\sigma$ désigne l'espace orhognal à $T\Sigma$ pour la 2-forme symplectique σ.

Remarque concernant la définition 2. 4. 1.

(2. 4. 2) Si Σ est définie par $a_j(y, \eta) = 0$, $j=1, \dots, k$ ($d\ a_j$ linéairement indépendant) alors, en notant $M = (\{a_i, a_j\}) 1 \leqq i, j \leqq k$, (2. 4. 1) est

équivalente â
pour tout $\alpha=\{\alpha_1,\dots,\alpha_k)\in\boldsymbol{R}^k$ avec $\alpha\in\operatorname{Ker} M$, il existe une constante $C>0$ telle que:

$$\left|\sum_{j=1}^{k}\alpha_j H_{a_j}\operatorname{Im} p^s_{1|\Sigma}\right|\leqq C|\operatorname{Im} p^s_{1|\Sigma}|.$$

C'est une inégalité analogue á celle d'Hörmander [5] définissant la principale normalité d'où notre terminologie.

3. RESULTATS.

Dans toute la suite, on suppose que $P(y, D_y)$ est un opérateur hyperbolique par rapport aux surfaces de niveaux de φ vérifiant les hypothèses (H_1) et (H_2).

3. 1. Cas involutif.

Dans le théorème qui suit, on supposera que Σ est involutive (ce qui est équivalent an fait que $Tr^+ P=0$).

THÉORÈME 3. 1.: *On suppose que:*

(3. 1) *P est «sous-principalement normal» au voisinage de y_0.*
(3. 2) *d Im p^s_1 est non nulle et $\{\operatorname{Im} p^s_1=0\}$ est une variété transverse à Σ.*
(3. 3) Re $p^s_{1|\Sigma\cap\{\operatorname{Im} p^s_1=0\}}=0$
au voisinage de y_0.

Alors P a l'unicité de Cauchy par rapport à S près de y_0.

3. 2. Gas non involutif.

THÉORÈME 3. 2. : *On suppose que:*

(3. 1) *P est «sous-principalement normal» au voisinage de y_0.*
(3. 4) *$\{p_2, \{p_2, \varphi\}\}$ s'annule à l'ordre deux sur Σ.*
(3. 5) *Il existe une constante $C>0$ telle que:*
$Tr^+ P+\operatorname{Re} p^s_1+C|\operatorname{Im} p^s_1|>0$
sur Σ au voisinage de y_0.

Alors P a l'unicité de Cauchy compacte par rapport à S près de y_0.

3. 3. Remarques.

1) **Invariance.**

Compte tenu de la remarque (2. 3. 2), il et clair que les hypothèses (3. 1), (3. 2), (3. 3) et (3. 5) sont invariantes par changements de fonctions φ définissant les mêmes surfaces de niveaux. De plus, pour toute fonction ψ assez proche de φ dans $C^2(\Omega)$, l'opérateur $P(y, D_y)$ reste hyperbolique par rapport aux surfaces de niveaux de ψ dans Ω. Ceci entraîne que les hypothèses du théorème 3. 1 sont invariantes par convexification.

2) **Ecriture locale de la «sous-principale normalité».**

Nous rappelons qu'on peut choisir microlocalement des coordonnées symplectiques $(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$, $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$, étant les variables duales, en sorte que :

$$\Sigma = \{x_1 = \xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0\}$$

(ceci vient du fait que σ est de rang constant sur Σ, voir Grigis [4]).
Et la condition (2. 4. 1) de «sous-principale normalité» est alors équivalente à :

$$\operatorname{Im} p_1^s = a_1 x_1 + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + g(x_2, x_3, \xi_3) \text{ avec } \left|\frac{\partial g}{\partial x_2}\right| \leqq C|g|.$$

3) En fait, nous prouverons une version plus générale des théorèmes 3. 1 et 3. 2. (Voir les théorèmes 4. 3. 1. et 4. 3. 2).

4) Il est clair que les hypothèses portant sur le symbole sous-principal dans nos résultats sont plus faibles que celles de Hörmander [5]. Par ailleurs, la version généralisée améliore (dans le cas hyperbolique) les théorèmes d'Alinhac [1], Lascar-Zuily [10], Dehman [2].

5) **Exemples.**

En prenant dans $\boldsymbol{R}^3$:

$$p_2(x, t\ ;\ \xi, \tau) = \tau^2 - x_1^2 \xi_2^2 - \xi_1^2$$

p_2 vérifie (H_1) et (H_2) et (3. 4) ($\varphi(x, t) = t$, $y_0 = (0, 0)$) et $\Sigma = \{\tau = x_1 = \xi_1 = 0\}$.
La condition (2. 4. 1) de principale normalité se traduit, en écrivant :
Re $p_1^s(x, t\ ;\ \xi, \tau) = a(x, t)\tau + b(x, t)\xi_1 + c(x, t)\xi_2$ par, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\left|\frac{\partial c}{\partial t}(0, x_2, t)\right| \leqq C|c(0, x_2, t)|$$

et la condition (3. 5) se traduit, en écrivant : Re $p_1^s(x, t\ ;\ \xi, \tau) = \tilde{a}(x, t)\tau + \tilde{b}(x, t)\xi_1 + \tilde{C}(x, t)\xi_2$ par, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|\xi_2| + \tilde{C}(x, t)\xi_2 + C|c(x, t)\xi_2| > 0$$

près de $(0, 0)$ pour $\xi_2 \neq 0$.

4. PREUVE DES RESULTATS.

Dans ce qui suit, nous supposerons choisi un système de coordonnées $y = (x, t)$ ($\eta = (\xi, \tau)$) en sorte que $y_0 = (0, 0)$, $\varphi(x, t) = t$ et $p_2(x, t\ ;\ \xi, \tau) = \tau^2 - Q_2(x, t\ ;\ \xi)$.

4. 1. Préliminaires.

Du théorème 3. 2. 1 d'Hörmander [5], on déduit les corollaires suivants.

COROLLAIRE 4. 1. 1. : *Soit A un opérateur pseudodifférentiel d'ordre* 2 *dans $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ de symbole classique $a_2+a_1+\ldots$ où a_j est homogène de degré j et $a_2\geqq 0$. On note :*

$$\Lambda=\{(x,\ \xi)\in\Omega\times \boldsymbol{R}^n\backslash 0\},\ a_2(x,\ \xi)=0\}.$$

On suppose que Λ est une variété C^∞, que a_2 est transversalement elliptique à Λ et que σ est de rang constant sur Λ. On peut alors construire des vecteurs v_j vérifiant les propriétés du théorème 3. 2. 1 [5] *avec $Q=Q_{x,\xi}=Hess\ a_2(x,\ \xi)/2$. En posant $L_j(x,\ \xi)=Q_{x,\xi}(v_j,\ v)$, il existe, près de tout point $\rho_0\in\Lambda$, des fonctions réelles homogènes de degré* 1 *en ξ : $q_1(x,\ \xi),\ \ldots\ q_{2k+l}(x,\ \xi)$ telles que, près de ρ_0 (i. e. dans un voisinage conigue de ρ) on ait :*

(4. 1. 1) $a_2(x,\ \beta)=\sum_{j=1}^{2k+l} q_j^2(x,\ \xi)$

(4. 1. 2) *pour* $j=1,\ldots,k$

$d\ q_{2j-1}(\rho)=\mathrm{Re}\ L_j(\rho)$

$d\ q_{2j}(\rho)=\mathrm{Im}\ L_j(\rho)$

pour $j=1,\ \ldots,\ l$

$d\ q_{2k+j}(\rho)=L_{k+j}(\rho)$

pour $\rho\in\Lambda$ près de ρ_0.

COROLLAIRE 4. 1. 2. : *La décomposition précédente vérifie en plus les deux propriétés suivantes :*

(4. 1. 3) *Pour tout $j=1,\ldots,l$ et tout $i=1,\ \ldots,\ 2k+l$ $\{q_{2k+j},\ q_i\}=0$ sur Λ*

(4. 1. 4) *La matrice $(\{q_i,\ q_j\})_{1\leq i,j\leq 2k}$ est inversible.*

Hörmander démontre dans le paragraphe 4. 3 [5] un résultat qu'on va citer sous forme de proposition.

PROPOSITION 4. 1. 3. : *Soit $p(x,\ t\ ;\ \xi,\ \tau)=\tau^2-a(x,\ t,\ \xi)$ un symbole d'ordre* 2 *vérifiant les hypothèses (H_1) et (H_2).*
Alors il existe un symbole $b(x,\ t\ ;\ \xi)$ d'ordre 1 *tel que :*

(4. 1. 5) $\{a,\ \tau-b\}=R(x,\ t\ ;\ \xi)$ *où R s'annule l'ordre* 2 *sur $\sum'$.*

(4. 1. 6) $b|_{\Sigma'}=0$ *et* $\{\tau,\ b\}|_{\Sigma'}=0$.

(4. 1. 7) *$a-b^2$ est transversalement elliptique à $\sum'$ et $Tr^+\ P=Tr^+(a-b^2)$.*

4. 2. Une propriété de la condition de sous-principale normalité.

PROPOSITION 4. 2. 1. : *Soit $L(x,\ \xi)\in C^\infty(T^*V\backslash 0)$ homogène de degré* 1 *en ρ, on suppose que L vérifie l'hypothèse* (2. 4. 1). *Alors il existe des fonc-*

tions $L_1(x, \xi)$ *et* $L_2(x, \xi) \in C^\infty(T^* V \backslash 0)$ *homogène de degré* 1 *en* ξ *telles que :*

(4. 2. 1) $L = L_1 + L_2$.
(4. 2. 2) $L_{1|\Sigma} = 0$.
(4. 2. 3) *Pour tout* $X \in T\ \Sigma^\sigma$, *il existe une constante* $C \geqq 0$ *telle que :*
$|X\ L_{2|\Sigma}| \leqq C|L_{2|\Sigma}|$.

Preuve : Si on utilise l'écriture du corollaire 4. 1. 3 et celle de la proposition, l'hypothèse se traduit microlocalement par,

il existe une constante $C \geqq 0$ telle que :

$$|Hq_{2k+j}\ L_{|\Sigma}| \leqq C|L_{|\Sigma}|$$

pour $j = 1, \dots l$,

$$\text{et } |H_m\ L_{|\Sigma}| \leqq C|L_{|\Sigma}|.$$

où $m = \tau - b(x, t, \xi)$.
De même (4. 2. 3) devient :

Il existe une constante $C \geqq 0$ telle que :

(4. 2. 3)' $|H_{q_j}\ L_{2|\Sigma}| \leqq C|L_{2|\Sigma}|$
pour $j = 1, \dots, 2k + l$
$|H_m\ L_{2|\Sigma}| \leqq C|L_{2|\Sigma}|$.

On cherche L_1 sous la forme suivante :

$$L_1 = \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i\ q_i$$

où les α_i sont à déterminer et l'on pose $L_2 = L - L_1$ (ceci assure (4. 2. 1) et (4. 2. 2)).
On cherche α_i en sorte que pour $j = 1, \dots, 2k$

(4. 2. 4) $H_{q_j}\ L_2 = 0$ sur Σ

c'set-à-dire :

(4. 2. 5) $H_{q_j}\ L - \sum_{i=1}^{2k} \alpha_i\ H_{q_i}\ q_i = 0$ sur Σ.

Comme la matrice $(\{q_j, q_j\})_{1 \leq i, j \leq 2k}$ est inversible, on peut résoudre (4. 2. 5).
On remarque maintenant que pour : $j = 2k + 1, \dots, 2k + l$

$$H_{q_j}\ L_1 = 0$$
$$H_m\ L_1 = 0$$

sur Σ, donc :

$$|H_{q_j} L_{2|\Sigma}| = |H_{q_j} L_{|\Sigma}| \leqq C|L_{|\Sigma}| = C|L_{1|\Sigma}|$$

et

$$|H_m L_{1|\Sigma}| = |H_m L_{|\Sigma}| \leqq C|L_{|\Sigma}| = C|L_{1|\Sigma}|$$

ceci avec (4. 2. 4) nous donne (4. 2. 3)$'$. On a donc démontré la proposition microlocalement.

soit χ_j une partition de l'unité homogène de degré 0 telle que, sur support de χ_j, on ait L_1^j vérifiant

$$L_{1|\Sigma}^j = 0$$

et, pour tout $X \in T\ \Sigma^\sigma$, il existe une constante C positive telle que,

$$|X\ L - X\ L_1^j| \leqq C|L| \text{ sur } \Sigma.$$

On pose,

$$L_1 = \sum_j \chi_j\ L_1^j$$
$$L_2 = L - L_1$$

(4. 2. 1) et (4. 2. 3) sont vérifiées.
Et on a,

$$X\ L_2 = XL - \sum_j \chi_j\ X\ L_1^j - \sum_j (X\ \chi_j) L_1^j.$$

Sur Σ on a,

$$|X\ L_2| \leqq \sum_j |\chi_j||X\ L - X\ L_1^j|$$
$$\leqq \tilde{C}|L|.$$

Pour une constante $\tilde{C}$ positive.
Ce qui démontre la proposition.

4. 3. Préliminaires à la preuve.

Nous allons énoncer, dans ce paragraphe, deux théorèmes précis d'unicité de Cauchy compact. Pour simplifier les énoncés, on se place en coordonnées locales et on note :

$$\varphi(x, t) = t$$
$$p(x, t, \xi, \tau) = \tau^2 - Q_2(x, t, \xi)$$
$$\text{Re } p_1^s = Q_1$$
$$\text{Im } p_1^s = L = L_1 + L_2$$

où L_1 et L_2 sont donnés par la proposition 4. 2. 1.

L'énoncé de ces hypothèses sous une forme géométrique est assez délicat et peu satisfaisant. C'est pourquoi nous avons préféré extraire de ces théorèmes, les théorèmes 3. 1 et 3. 2.

TRÉORÈME 4. 3. 1. : *Nous supposons que Σ est une variété involutive. Nous supposons également que* :

(4. 3. 1) *P est sous principalement normal.*
(4. 3. 2) *Il existe une fonction $\alpha(x, t, \xi)$ homogène de degré 0 en ξ et une constante $C>0$ telles que,*
$|\{Q_1, L\}_{|\Sigma}+\alpha\ Q_{1|\Sigma}|\leqq C|L_{|\Sigma}|.$
(4. 3. 3) *Il existe une fonction $\beta(x, t, \xi)$ homogène de degré 0 en ξ et des constantes positives C et ε telles que,*
i) $\beta\ Q_2-Q'_{2t}\geqq\varepsilon\ Q_2$
ii) $|Q'_{1t|\Sigma}-\beta\ Q_{1|\Sigma}|\leqq C|L_{|\Sigma}|.$

Alors P possède la propriété d'unicité compacte.

REMARQUE : Σ étant involutive, il existe des fonctions β vérifiant (4. 3. 3) i). La condition (4. 3. 3) peut donc se comprendre ainsi ; parmi les fonctions β vérifiant (4. 3. 3) i), on pose la condition (4. 3. 3) ii).

THÉORÈME 4. 3. 2. : *Nous supposons que,*

(4. 3. 4) *P est sous principalement normal.*
(4. 3. 5) *Il existe une fonctions $\alpha(x, t, \xi)$ et $d(x, t, \xi)$ homogènes de degré 0 en ξ et une constante $\delta>0$ telles que,*
i) $e=a\ Q_2-Q'_{2t}\geqq\delta\ Q_2.$
ii) $Tr^+\ e-a\ Q_1+Q'_{1t}+d\ L>0$ *sur* Σ.

Alors P possède la propriété d'unicité compacte.

REMARQUE : (4. 3. 5) i) impose que $\partial_t\in T\ \Sigma$ c'est-à-dire que $H_{\{p,\varphi\}}\in T\ \Sigma$. Ceci est une condition instable par convexification c'est pourquoi de ce théorème on ne peut déduire qu'un théorème d'unicité compacte.

<u>Preuve du théorème 3. 1.</u> : Des hypothèses (3. 2) et (3. 3), on déduit que,

$$Q_1=\beta_o\ L+\sum_{j=1}^{k}\beta_j\ q_j$$

où $\{q_j=0\}=\Sigma$ et β_i des fonctions homogènes de degré 0 en ξ. On a, alors sur Σ,

$$\{Q_1, L\}=L\{\beta_o, L\}$$

car $\{q_j, L\}_{|\Sigma}=0$ (hypothèse (3. 1)).

De même sur Σ

$$Q'_{1t}=\beta_o\ L'_t+\beta'_{ot}\ L$$

car $\{\tau, q_j\}_{|\Sigma}=0$ (hypothèse (3. 1)).
Or (2. 4. 1) implique que $|L'_t|\leqq C|L|$ pour une constante C positive. On a donc (4. 3. 3) et ii) en prenant β très grand et en utilisant la remarque du théorème 4. 3. 1.

Preuve du théorème 3. 2. : . (3. 4) implique que Q'_{2t} s'annule à l'ordre 2 sur Σ.
(4. 3. 5) i) sera donc vérifiée en prenant a très grand. Dans ces conditions,

$$Tr^+\ e=a(Tr^+\ Q_2+o(1))$$

où $o(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0 quand a tend vers $+\infty$. (Tr^+ est une fonction continue voir Melin [11]).

De (3. 5), on démontre qu'il existe une fonction $d(x, t, \xi)$ homogène de degré 0 en ξ telle que,

(4. 3. 6) $Tr^+\ P+d\ L-Q_1>0.$

En effet, il existe un voisinage W de $L=0$ tel que $Tr^+\ P-Q_1>0$ sur W. Soit χ_1 (resp. χ_2) une fonction C^∞ homogène de d^o0, positive vérifiant $\chi_1=1$ sur $L<0\cap \complement W$ (resp. sur $L>0\cap \complement W$) et à support ans $L<0$ (resp. $L>0$). On définit $d=-C\chi_1+C\chi_2$.

On obtient aisément de (3. 5) que d vérifie (4. 3. 6). On a donc :

$$Tr^+e-a\ Q_1+Q'_{1t}+a\ d\ L=a[Tr^+Q_2-Q_1+dL+o(1)+\frac{Q'_1}{a}].$$

Ceci sera strictement positif en prenant a suffisamment grand et en utilisant (4. 3. 6). On a aussi utilisé le fait que $Tr^+\ P=Tr^+\ Q_2$. En effet la proposition 4. 1. 4. est vérifiée en prenant $b=0$.

4. 4. Inégalité de Carleman.

THÉORÈME 4. 4. 1. : *Sous les hypothèses du théorème* 4. 3. 1 *ou du théorème* 4. 3. 2, *il existe des constantes* $C>0$ *et* $\gamma_0>0$ *telles que, pour* $\gamma\geqq\gamma_0$

(4. 4. 1) $\|e^{-\gamma t}\ Pu\|^2\geqq C\ \gamma\|e^{-\gamma t}\ D_tu\|^2+C\ \gamma^3\|e^{-\gamma T}\ u\|^2.$

D'une telle inégalité de Carleman, on prouve l'unicité compacte pour $P+a\ D_t+b$ où a et b sont des fonctions complexes.

Modulo des termes d'ordre 0 et des termes de la forme $a(x, t)D_t$, on peut écrire l'opérateur P de la manière suivante, $P(x, t, D_x, D_t)=D_t^2-Q_2(x, t, D_x)$

$+Q_1(x,t,D_x)+i\ L_1(x,t,D_x)+i\ L_2(x,t,D_x)$ où $Q_2(x,t,D_x)=\sum_{j,k=1}^{n} D_{x_j}\ a_{jk}(x,t)D_{x_k}$ avec (a_{jk}) une matrice symétrique positive.
Q_1 est de la forme,

$$\sum_{j=1}^{n} D_{x_j}\ a_j(x,\ t)+a_j(x,\ t)D_{x_j}$$

où les fonctions $a_j(x,\ t)$ sont réelles.

Après les manipulations de la proposition les symboles L_j n'ont aucune raison d'être des formes linéaires. On utilise la quantification de Weyl, c'est-à-dire,

$$L_j(x,\ t,\ D_x)u=(2\pi)^{-n}\iint e^{i<x-y,\xi>}L_j(\frac{x+y}{2},\ t,\ \xi)u(y,\ t)dy\ d\xi. \tag{4.4.2}$$

Tout ceci implique que Q_2, Q_1, L_1, L_2 sont des opérateurs formellement auto-adjoints.

Nous allons calculer,

$$I=\|e^{-(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma}Pu\|^2$$

où μ est un grand paramètre positif à choisir.
Posons,

$$u=e^{(t-\frac{\mu t^2}{2})\gamma}v$$

où u et v sont des fonctions C^∞ à support dans$|x|^2<r_o$ et $0\leqq t\leqq t_o$, r_o et t_o à choisir.
Notons $N_\gamma v=e^{-(t-\frac{\mu t^2}{2})\gamma}Pe^{(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma}v$. Nous avons,

$$D_t\ e^{(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma}=e^{(t-\frac{\mu}{2})\gamma}\left[D_t+\frac{\gamma}{i}(1-\mu t)\right]$$
$$\left[D_x,\ e^{(t-\frac{\mu}{2}t^2)\gamma}\right]=0.$$

Donc,

$$\begin{aligned} N_\gamma(x,\ t,\ D_x,\ D_t)&=P(x,\ t,\ D_x;\ D_t+\frac{\gamma}{i}(1-\mu t)) \\ &=D_t^2+\frac{2\ \gamma}{i}(1-\mu t)D_t-\gamma^2(1-\mu t)^2+\mu\gamma-Q_2(x,\ t,\ D_x) \\ &\quad +Q_1(x,\ t,\ D_x)+i\ L_1(x,\ t,\ D_x)+i\ L_2(x,\ t,\ D_x). \end{aligned}$$

On note, dans la suite des calculs ε et C des constantes positives qui ne dépendent pas de μ et γ. ε sera supposé suffisamment petit et C suffisamment grand.

On note,

$$(u, v) = \int u\ \bar{v}\ dx\ dt$$
$$\|u\|^2 = (u, u).$$

On pose,

$$\tilde{N}_\gamma = N_\gamma - \mu\gamma - i\ L_1.$$

On a,

(4.4.3) $\|\tilde{N}_\gamma v\|^2 \leqq 2\|N_\gamma v\|^2 + C\ \mu^2\gamma^2\|v\|^2 + C\|L_1 v\|^2.$

Ecrivons $\tilde{N}_\gamma = A + B$, en développant on obtient,

$$\|\tilde{N}_\gamma v\|^2 = \|Av\|^2 + \|Bv\|^2 + 2\ \mathrm{Re}(Av, Bv)$$

avec

$$A = D_t^2 - \gamma^2(1-\mu t)^2 - Q_2 + Q_1$$
$$B = -2\ \gamma i(1-\mu t)D_t + i\ L_2.$$

Calculons 2 Re(Av, Bv) en intégrant chaque terme par partie.

$$I_1 = 2\ \mathrm{Re}(D_t^2 v,\ -2\ \gamma i(1-\mu t)D_t v)$$
$$I_1 = 2\ \gamma\mu\|D_t v\|^2$$
$$I_2 = 2\ \mathrm{Re}(-\gamma^2(1-\mu t)^2 v,\ -2\ \gamma i(1-\mu t)D_t v)$$
$$I_2 = 6\ \gamma^3\mu\|(1-\mu t)v\|^2.$$

En prenant t_o tel que,

$$6(1-\mu t_0)^2 \geqq 5 \text{ c'est-à-dire :}$$
$$t_0 \leqq \left(1 - \sqrt{\frac{5}{6}}\right)\frac{1}{\mu}.$$

On obtient,

$$I_2 \geqq 5\ \gamma^3\mu\|v\|^2$$
$$I_3 = 2\ \mathrm{Re}(-Q_2 v,\ -2\ \gamma\ i(1-\mu t)D_t v)$$
$$I_3 = 2\ \gamma\mu(Q_2 v, v) - 2\ \gamma(i[D_t, Q_2]v,\ (1-\mu t)v)$$
$$I_4 = 2\ \mathrm{Re}(Q_1 v,\ -2\ \gamma\ i(1-\mu t)D_t v)$$
$$I_4 = 2\ \gamma\mu(Q_1 v, v) + 2\ \gamma(i[D_t, Q_1]v,\ (1-\mu t)v)$$
$$I_5 = 2\ \mathrm{Re}(D_t^2 v,\ i\ L_2 v) = 2\ \mathrm{Re}(D_t v,\ i[D_t, L_2]v).$$

<u>Calcul du symbole de Weyl de i</u> $[B_t, L_2]$.

(4.4.4) REMARQUE. Soient deux opérateurs Q et Q' de symbole de Weyl réel, Q d'ordre m, Q' d'ordre m', alors le symbole de Weyl de $i[Q, Q']$ est

$\{\sigma^W(Q), \sigma^W(Q')\}$ modulo des termes d'ordre $m+m'-3$.

Le symbole de $i[D_t, L_2]$ est, $\{\tau, L_2(x, t, \xi)\}=L'_{2t}(x, t, \xi)$. En appliquant (4.2.3), on déduit que

(4.4.5) $|L'_{2t}|^2 \leqq C\ L_2^2+C\ Q_2.$

On a d'autre part,

(4.4.6) $|2\ \mathrm{Re}(D_t v,\ i[D_t, L_2]v)| \leqq C\ \gamma\|D_t v\|^2+\dfrac{C}{\gamma}\|[D_t, L]v\|^2.$

En appliquant l'inégalité de Fefferman-Phong [3] au symbole,

$$C\ L_2^2+C\ Q_2-L_{2t}'^2.$$

On obtient de (4.4.5) et (4.4.6)

$$|2\ \mathrm{Re}|D_t v,\ i[D_t, L]v)| \leqq C\ \gamma\|D_t v\|^2+\frac{C}{\gamma}\|L_2 v\|^2+\frac{C}{\gamma}(Q_2 v,\ v)+\frac{C}{\gamma}\|v\|^2.$$

En conclusion on a,

$$I_5 \geqq -C\ \gamma\|D_t v\|^2-\frac{C}{\gamma}\|L_2 v\|^2-\frac{C}{\gamma}(Q_2 v,\ v)-\frac{C}{\gamma}\|v\|^2.$$
$$I_6=2\ \mathrm{Re}(-\gamma^2(1-\mu t)^2 v,\ i\ L_2 v)=0$$
$$I_7=2\ \mathrm{Re}(-Q_2,\ i\ L_2)=(i[L_2,\ Q_2]v,\ v).$$

Calcul du symbole de Weyl de i $[L_2, Q_2]$.

Le corollaire 4.1.1 permet d̀ecrire microlocalement,

(4.4.7) $Q_2=\sum_{j=1}^{l} q_j^2$ avec $|\{q_j,\ L_2\}| \leqq C|L_2|$sur Σ.

Globalement on a,

$$Q_2=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{lk}(q_j^k)^2\chi_k^2,$$

où χ_k^2 est une partition de l'unicité homogène de degré 0 en ξ. Modulo des termes d'ordre 0, le symbole de Weyl de $i[L_2,\ Q_2]$ est,

$$\{L_2,\ Q_2\}=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{lk}\Big[2\ q_j^k\chi_k^2\{q_j^k,\ L_2\}+(q_j^k)^2\{\chi_k^2,\ L_2\}\Big].$$

Le deuxième terme de la somme est majorée par $C\ Q_2$. On en déduit, en appliquant l'inégalité de Fefferman-Phong

$$\left|\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{lk}(Op^W(q_j^k\{\chi_k^2,\ L_2\})v,\ v)\right| \leqq C(Q_2 v,\ v)+C\|v\|^2$$

où on a noté $Op^W(a)$ l'opérateur de symbole a déduit par la formule (4. 4. 2).

En ce qui concerne le premier terme on a, modulo des termes d'ordre 0,

$$\begin{aligned}&Op^W(2\ q_j^k\chi_k^2\{q_j^k,\ L_2\}) = Op^W(q_j^k\chi_k)\,Op^W(\chi_k\{q_j^k,\ L_2\})\\&+Op^W(\chi_k\{q_j^k,\ L_2\}Op^W(q_j^k\chi_k).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}&|(Op^W(2\ q_j^k\chi_k^2\{q_j^k,\ L_2\})v,\ v)|\\&=|2\ \mathrm{Re}(Op^W(\chi_k\{q_j^k,\ L_2\})v,\ Op^W(q_j^k\chi_k)v)|\\&+O(\|v\|^2)\leqq\varepsilon\ \gamma\|Op^W(q_j^k\chi_k)v\|^2\\&+\frac{C}{\gamma}\|Op^W(\chi_k\{q_j^k,\ L_2\}v\|^2+C\|v\|^2.\end{aligned}$$

En utilisant (4. 2. 3), on obtient,

$$|\{q_j^k,\ L_2\}|^2\leqq C\ Q_2+C\ L_2^2.$$

Ceci permet, en appliquant l'inégalité de Fefferan-Phong de conclure que,

$$\begin{aligned}&I_7\geqq-\varepsilon\gamma(Q_2v,\ v)-\frac{C}{\gamma}\|L_2v\|^2-C\ \gamma\|v\|^2\\&I_8=2\ \mathrm{Re}(Q_1v,\ i\ L_2v)\\&I_8=(i[Q_1,\ L_2]v,\ v).\end{aligned}$$

En résumé, on a,

$$\begin{aligned}(4.\,4.\,8)\quad &2\ \mathrm{Re}(Av,\ Bv)\geqq2\ \gamma\mu\|D_tv\|^2+5\ \gamma^3\mu\|v\|^2\\&+2\ \gamma\mu(Q_2v,\ v)-2\ \gamma(i[D_t,\ Q_2]v,\ (1-\mu t)v)\\&+2\ \gamma\mu(Q_1v,\ v)+2\ \gamma(i[D_t,\ Q_1]v,\ (1-\mu t)v)\\&+(i[Q_1,\ L_2]v,\ v)-R_1\end{aligned}$$

où $R_1=C\ \gamma\|D_tv\|^2+C\ \gamma\|v\|^2+\varepsilon\ \gamma(Q_2v,\ v)+\dfrac{C}{\gamma}\|L_2v\|^2$.

Contrôle de $\|L_2v\|^2/\gamma$.

En utilisant l'expression B, on a

$$\frac{\mu}{\gamma}\|L_2v\|^2=\frac{\mu}{\gamma}\|[B+2\ \gamma\ i(1-\mu t)D_t]v\|^2\leqq\frac{5\mu}{\gamma}\|Bv\|^2+5\ \mu\gamma\|D_tv\|^2.$$

Donc, pour γ suffisamment grand,

$$(4.\,4.\,9)\quad \|Bv\|^2\geqq\frac{\mu}{5\gamma}\|L_2v\|^2-\mu\gamma\|D_tv\|^2.$$

Soit $k(x,\ t,\ \xi)$ un symbole en $(x,\ \xi)$ à paramètre t, homogène de degré 0 en ξ. On suppose que,

(4. 4. 10) $$\|Op^W(k)\|_{L^2\to L^2}\leqq\frac{1}{4}$$
$$\|Op^W(k)^*\|_{L^2\to L^2}\leqq\frac{1}{4}.$$

En écrivant Q_1 en fonction de A, on a,

$$\begin{aligned}&-2\,\gamma\mu\ \mathrm{Re}([Id-Op^W(k)]Q_1v,\ v)\\&=-2\,\gamma\mu\ \mathrm{Re}((Id-Op^W(k))Av,\ v)+2\,\gamma\mu\ \mathrm{Re}([Id-Op^W(k)]D_t^2v,\ v)\\&=-2\,\gamma^3\mu\ \mathrm{Re}((Id-Op^W(k))(1-\mu t)^2v,\ v)\\&\quad-2\,\gamma\mu\ \mathrm{Re}([Id-Op^W(k)]Q_2v,\ v)=①+②+③+④.\end{aligned}$$

On a, grâce à (4. 4. 10),

$$\begin{aligned}&①\leqq\varepsilon\|Av\|^2+C\ \gamma^2\mu^2\|v\|^2.\\&②=2\,\gamma\mu\|D_tv\|^2-2\,\gamma\mu(Op^W(k)D_tv,\ D_tv)\\&\quad-2\,\gamma\mu([Op^W(k),\ D_t]D_tv,\ v).\end{aligned}$$

τ étant une forme linéaire le symbole de Weyl de $[Op^W(k),\ D_t]$ est exactement (voir Hörmander [6]), $\frac{1}{i}\{k,\ \tau\}=i\ k'_t$.

On a donc en utilisant (4. 4. 10),

$$\begin{aligned}&②\geqq\gamma\mu\|D_tv\|^2-C\ \mu\gamma\|Op^W(k'_t)v\|^2.\\&|③|\geqq\frac{5}{2}\ \gamma^3\mu\|v\|^2.\end{aligned}$$

En résumé, on a,

(4. 4. 11) $$\begin{aligned}&-2\,\gamma\mu\ \mathrm{Re}(Q_1v,\ v)\geqq-2\,\gamma\mu\ \mathrm{Re}(Op^W(k)Q_1v,\ v)\\&+\gamma\mu\|D_tv\|^2-\varepsilon\|Av\|^2-3\ \gamma^3\mu\|v\|^2\\&-C\ \mu\gamma\|Op^W(k'_t)v\|^2\\&-2\,\gamma\mu\ \mathrm{Re}([Id-Op^W(k)]Q_2v,\ v).\end{aligned}$$

Et donc, en utilisant (4. 4. 8), (4. 4. 9) et (4. 4. 11),

(4. 4. 12) $$\begin{aligned}\|\tilde{N}_\gamma v\|^2\geqq&\,2\,\gamma\mu\|D_tv\|^2+2\,\gamma^3\mu\|v\|^2\\&+\frac{\mu}{5\gamma}\|L_2v\|^2+2\,\gamma\mu\ \mathrm{Re}(O^W(k)Q_2v,\ v)\\&-2\,\gamma(i[D_t,\ Q_2]v,\ (1-\mu t)v)\\&-2\,\gamma\mu\ \mathrm{Re}(Op^W(k)Q_1v,\ v)\\&+2\,\gamma(i[D_t,\ Q_1]v,\ (1-\mu t)v)\\&+(i[Q_1,\ L_2]v,\ v)-R_2\end{aligned}$$

où $R_2=R_1+C\ \mu\gamma\|Op^W(k'_t)v\|^2$.

1er cas : $Tr^+ Q_2=0$.

Contrôle de $(i[Q_1, L_2]v, v)$.

En prolongeant la fonction $\alpha(x, t, \xi)$, donnée par (4. 3. 2) hors de Σ par une fonction homogène de degrè 0 en ξ, on prouve l'inégalité suivante,

$$|\{Q_1, L_2\}+\alpha\ Q_1|\leqq C|L_2|+C\ \sqrt{Q_2}.$$

Ecrivons,

$$\begin{aligned}(4.4.13)\qquad &\mathrm{Re}(i[Q_1, L_2]v, v)=\mathrm{Re}([i[Q_1, L_2]+Op^W(\alpha)Q_1]v, v)\\ &-\mathrm{Re}(Op^W(\alpha)Q_1v, v)\geqq-\frac{C}{\gamma}(Q_2v, v)-\frac{C}{\gamma}\|L_2v\|^2-C\ \gamma\|v\|^2\\ &-\mathrm{Re}(Op^W(\alpha)Q_1v, v).\end{aligned}$$

Contrôle de $2\ \gamma(i[D_t, Q_1]v, (1-\mu t)v)$.

On prolonge $\beta(x, t, \xi)$, la fonction de l'hypothèse (4. 3. 3), hors de Σ par une fonction homogène de degrè 0 en ξ qu'on note également $\beta(x, t, \xi)$. On obtient,

$$|\{\tau, Q_1\}-\beta\ Q_1|\leqq C|L_2|+C\ \sqrt{Q_2}.$$

On a, en appliquant le calcul symbolique et l'inégalité de Fefferman-Phong,

$$\begin{aligned}(4.4.14)\qquad &2\ \gamma\ \mathrm{Re}(i[D_t, Q_1]v, (1-\mu t)v)\\ &=2\ \gamma\ \mathrm{Re}((1-\mu t)[i[D_t, Q_1]-Op^W(\beta)Q_1]v, v)\\ &+2\ \gamma\ \mathrm{Re}((1-\mu t)Op^W(\beta)Q_1v, v)\\ &\geqq-2\ C\ \gamma^3\|v\|^2-\frac{C}{\gamma}(Q_2v, v)-\frac{C}{\gamma}\|L_2v\|^2\\ &+2\ \gamma\ \mathrm{Re}((1-\mu t)Op^W(\beta)Q_1v, v).\end{aligned}$$

Ecrivons les symboles de Weyl des termes du premier ordre de (4. 4. 12) en utilisant (4. 4. 13) et (4. 4. 14).

On a, modulo des termes d'ordre 0,

$$(4.4.15)\qquad -2\ \gamma\mu\ k\ Q_1+2\ \gamma(1-\mu t)\beta\ Q_1-\alpha\ Q_1.$$

Posons

$$(4.4.16)\qquad k=\frac{(1-\mu t)}{\mu}\ \beta-\frac{\alpha}{2\ \gamma\mu}.$$

De sorte que (4. 4. 15) est nul. De plus $\mu\ k$ est un symbole de $S^0_{1,0}$ uniformément par rapport à t et γ.

Donc en prenant μ suffisamment grand (4. 4. 10) sera vérifié.

On vérifie facilement que k'_t est un symbole de $S^0_{1,0}$ uniformément par rapport à t et γ. Donc

(4.4.17) $\quad C\ \mu\gamma\|Op^W(k'_t)v\|^2 \leqq C\ \mu\gamma\|v\|^2.$

Contrôle des termes du deuxième ordre.

Modulo des termes d'ordre 0 le symbole de Weyl des termes du deuxième ordre de (4.4.12) est,

(4.4.18) $\quad 2\ \gamma\mu\ k\ Q_2 - 2\ \gamma(1-\mu t)Q'_{2t} - \varepsilon\gamma\ Q_2.$

En utilisant (4.4.16), (4.4.18) devient,

(4.4.19)
$$2\ \gamma(1-\mu t)\beta\ Q_2 - 2\ \gamma(1-\mu t)Q'_{2t} - \varepsilon\gamma\ Q_2 - \alpha\ Q_2$$
$$= 2\ \gamma(1-\mu t)\left[\beta\ Q_2 - Q'_{2t} - \frac{\varepsilon\ Q_2}{2(1-\mu t)} - \frac{\alpha\ Q_2}{2\ \gamma(1-\mu t)}\right].$$

Il existe une constante positive δ telle que, $\beta\ Q_2 - Q'_{2t} \geqq \delta\ Q_2$. (Voir (4.3.3)). L'expression (4.4.19) est donc supérieure à,

(4.4.20) $$2\ \gamma(1-\mu t)\left[\delta - \frac{\varepsilon}{2(1-\mu t)} - \frac{\varepsilon}{2\ \gamma(1-\mu t)}\right] Q_2.$$

Pour ε suffisamment petit, γ suffisamment grand, (4.4.20) est supérieur à $\gamma\delta\ Q_2$.

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Feffermn-Phong pour conclure que,

(4.4.21) $\quad \|\tilde{N}_\gamma v\|^2 \geqq \gamma\mu\ D_t v\|^2 + \gamma^3\mu\|v\|^2 + \gamma\delta(Q_2 v,\ v).$

En utilisant le fait que L_1 s'annule sur Σ, on déduit que,

$$\|N_\gamma v\|^2 \geqq \frac{\gamma\mu}{2}\|D_t v\|^2 + \frac{\gamma^3\mu}{2}\|v\|^2.$$

Ce qui donne de manière classique l'inégalité de Carleman (4.4.1).

2ème cas: $Tr^+\ Q_2 > 0$.

Utilisons le symbole $a(x,\ t,\ \xi)$ de l'hypothèse (4.3.5), et posons,

$$k(x,\ t,\ \xi) = \frac{(1-\mu t)\ a\ (x,\ t,\ \xi)}{\mu},$$

de sorte que, comme pour le ler cas, (4.4.10) est vérifiée et,

$$\|Op^W(k'_t)v\|^2 \leqq C\|v\|^2.$$

Le symbole de Weyl des termes du deuxième ordre de l'expression (4.4.12) est, modulo des termes d'ordre 0,

(4.4.22) $\quad 2\ \gamma(1-\mu t)a\ Q_2 - 2\ \gamma(1-\mu t)Q'_{2t} - \varepsilon\gamma\ Q_2.$

En utilisant (4.3.5), il existe une constante positive δ telle que (4.4.22) est supérieure à $2\ \delta\gamma\ Q_2$.

Au terme (4. 4. 12) ajoutons et retranchons

$$2\ \gamma\ \mathrm{Re}((1-\mu t)Op^{W}(d(x,\ t,\ D_x))L_2v,\ v).$$

Ce terme est majoré par $C\ \gamma^3\|v\|^2+\frac{C}{\gamma}\|L_2v\|^2$, ce qui est contrôlé par

$$\mu\gamma^3\|v\|^2+\frac{\mu}{5\gamma}\|L_2v\|^2$$

si on prend μ assez grand.

Nous allons appliquer l'inégalité de Melin-Hörmander [5] au symbole,

$$\begin{aligned}K=&(1-\mu t)a\ Q_2-(1-\mu t)Q'_{2t}-\frac{\varepsilon}{2}Q_2-\frac{\delta}{2}Q_2\\&-(1-\mu t)a\ Q_1+(1-\mu t)Q'_{1t}+(1-\mu t)d\ L_2+\frac{1}{2\ \gamma}\{Q_1,\ L_2\}.\end{aligned}$$

Le terme d'ordre deux de K est transversalement elliptique à Σ (voir §. 2. 3) et sa trace plus est,

$$(1-\mu t)\,Tr^+e+|\xi|O(\varepsilon)+|\xi|O(\delta)$$

où e est donné par (4. 3. 5).

(En effet la trace plus est une fonction continue, voir Melin [11]).

Donc l'opérateur de symbole K sera positif (modulo $C\|v\|^2$) si,

$$\begin{aligned}K_1=&(1-\mu t)\,Tr^+e+|\xi|Q(\varepsilon)+|\xi|O(\delta)-(1-\mu t)a\ Q_1\\&+(1-\mu t)Q'_{1t}+(1-\mu t)d\ L_2+\frac{1}{2\ \gamma}\{Q_1,\ L_2\}\geqq 0 \text{ sur } \Sigma.\end{aligned}\tag{4.4.23}$$

Or de (4. 3. 5), on déduit

$$Tr^+e-a\ Q_1+Q'_{1t}+d\ L_2>\tilde{\delta}|\xi| \text{ sur } \Sigma,$$

donc

$$K_1\geqq(1-\mu t)\tilde{\delta}|\xi|+|\xi|O(\varepsilon)+|\xi|O(\delta)+\frac{1}{2\ \gamma}\{Q_1,\ L_2\}.$$

Si on prend ε, δ, et $\frac{1}{\gamma}$ suffisamment petit par rapport à $\tilde{\delta}$, on aura $K_1>0$.

On peut donc appliquer l'inégalité de Melin-Hörmander à K.

On a donc

$$\|\tilde{N}_\gamma\|^2\geqq\mu\gamma\|D_tv\|^2+\mu\gamma^3\|v\|^2+\delta\gamma(Q_2v,\ v).$$

Ce qui est l'inégalité (4. 4. 21). On achève alors la preuve de (4. 4. 1) comme pour le premier cas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC : Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs du second ordre à symboles réels, Annales de l'Institut de Fourier, 34 (2) (1984) 89-109.

[2] B. DEHMAN : Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs quasi-homogènes, Journal of Mathematics of Kyoto University 24 (1984), 453-471.

[3] C. FEFFERMAN, D. H. PHONG : On positivity of pseudo-differential operators, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 75 (10) (1978), 4673-4674.

[4] A. GRIGIS : Hypoellipticité et parametrix pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques doubles, Astérisque 34-35 (1976), 183-205.

[5] L. HÖRMANDER : The Cauchy problem for differential equations with double characteristics, Journal d'Analyse Math. 32 (1977), 110-196.

[6] L. HÖRMANDER : The Weyl calculus of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), 359-443.

[7] V. Ia IVRII : Sufficient conditions for regular and completely regular hyperbolicity, Trudy Moskov Mat. Obx 23 (1976), 3-65, English transl. in Frans. Moscow. Math. Isue 1 (1978), 1-65.

[8] V. Ia. IVRII, V. M. PETKOV : Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations, Uspehi Mat. Mauk 29 (5) (1974), 3 -70.

[9] N. IWASAKI : Cauchy problems for effectively hyperbolic equations,
(Part 1) J. Math. Kyoto Univ. 23 (1983), 503-562.
(Part 2) Publ. RIMS Kyoto Univ. 20 (1984), 543-584.

[10] L. LASCAR, C. ZUILY : Unicité et non-unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques doubles, Duke Math. J. 49 (1) (1982), 137-162.

[11] A. MELIN : Lower bounds for pseudo-differential operators, Arkiv Für Matematik 9 (1) (1971), 117-140.

[12] R. MELROSE : The Cauchy problem for effectively hyperbolic operators, Hokkaido Math. J. 12 (1983), 371-391

[13] O. A. OLEĬNIK : On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 569-586.

Université de Paris-Sud

THEOREME D'UNICITE ADAPTE AU CONTROLE DES SOLUTIONS DES PROBLEMES HYPERBOLIQUES

par

Luc ROBBIANO

A paraître au Communications in Partial Differential Equations.

Théorème d'unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques

LUC ROBBIANO
UNIVERSITÉ DE PARIS-VAL DE MARNE
U.F.R. DE SCIENCES
AVENUE DU GÉNÉRAL DE GAULLE
94010 CRETEIL CEDEX
ET
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
91405 ORSAY CEDEX

CNRS ORSAY URA 760

Résumé.

On démontre un théorème d'unicité pour les problèmes hyperboliques. Conséquence, on peut toujours, pour un temps suffisamment grand, appliquer la méthode H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method).

Abstract.

We prove a uniqueness theorem for hyperbolic problem. This theorem implicate that we always can apply the Hilbert Uniqueness Method.

Mots clés.

Unicité, Contrôle.

Code Matière AMS (1980).

35 A 07, 35 R 25.

0. Introduction.

La méthode H.U.M. (Hilbert Uniqueness Method) développée par J.L. LIONS [7] permet d'étudier le contrôle des solutions d'équations aux dérivées partielles. Notre discussion se bornera au cas des équations hyperboliques. Le contrôle au sens le plus fort, c'est-à-dire l'existence de contrôle pour des données dans des espaces fonctionnels classiques (ici $L^2 \times H^{-1}$) a été résolu par BARDOS, LEBEAU et RAUCH [2]. Mais H.U.M. permet aussi de construire de façon implicite, des espaces de données pour lesquelles il existe un contrôle. Ce résultat repose sur un théorème d'unicité, (voir le théorème 3.1 de Lions). Ce théorème n'est démontré que dans deux cas, pour des opérateurs à coefficients analytiques, c'est alors une conséquence du théorème d'Holmgren et dans le cadre étudié par Bardos, Lebeau et Rauch.

Nous démontrons, ici, ce théorème pour des opérateurs à coefficients peu réguliers. Notre méthode repose sur une idée de RAUCH et TAYLOR [8] reprise également par LERNER [6]. Essentiellement, ces auteurs démontrent le résultat suivant, si $u(t,x)$ est solution d'une équation hyperbolique $\left[D_t^2 - A(x, D_x)\right] u(t,x) = 0$ où A est elliptique, $A > 0$ et $u(t,x) = 0$ pour tout $x \in B(0,r)$, $r > 0$ et tout $t \in \mathbf{R}$ alors $u = 0$ pour tout x et t.

La méthode est la suivante. Ils posent :

$$v_\lambda(s,x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int e^{-\frac{\lambda}{2}(is+t_0-t)^2} u(t,x)\,dt \ .$$

On a :

$$D_t^2 v_\lambda + A v_\lambda = 0 \quad \text{et} \quad v_\lambda = 0$$

pour $(t,x) \in \mathbf{R} \times B(0,r)$.

On applique le théorème d'unicité pour les opérateurs elliptiques, on obtient que $v_\lambda = 0$, ce qui implique que $u = 0$ car

$$v_\lambda(0,x) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} u(t,x) \ .$$

Notre théorème 1 est une version locale de ce résultat. On pose :

$$v_\lambda(s,x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{\lambda}{2}(is+t_0-t)^2} u(t,x)\,dt$$

On a alors :

$$D_t^2 v_\lambda + A v_\lambda = \mathcal{O}(e^{-C\lambda})$$

et

$$v_\lambda = 0 \quad \text{pour} \quad (t,x) \in]-T,T[\times B(0,r) \ .$$

Ce qui ne permet pas d'appliquer le théorème d'unicité. Mais on reporte ceci dans une inégalité de Carleman, démontrée par HÖRMANDER [3], ce qui permet de prouver que $v_\lambda = \mathcal{O}(e^{-C\lambda})$. En faisant tendre λ vers l'infini, cela implique que $u(t_0, x) = 0$.

Je remercie M. Saut et M. Scheurer pour m'avoir indiqué ce problème.

1. Résultats.

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$.

Soit $A(x, D_x)$ un opérateur elliptique

$$A(x, D_x) = \sum_{n \geq i,j \geq 1} a_{i,j}(x) D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) D_{x_i} + a_0(x) \ .$$

$(a_{ij}(x))$ est une matrice réelle définie positive, et il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que pour tout $x \in \Omega$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$C_2 \, |\xi|^2 \geq \sum_{n \geq i,j \geq 1} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq C_1 \, |\xi|^2 \ .$$

Les applications $a_{ij}(x)$ sont $C^1(\bar{\Omega})$, il existe donc une constante positive C_3 telle que $\left|\dfrac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x}\right| \leq C_3$ pour $x \in \bar{\Omega}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Les applications a_j, $j = 0, \ldots, n$ appartiennent à L^∞.

Soit $u(t, x)$ vérifiant :

$$D_t^2 u(t, x) - A(x, D_x) u(t, x) = 0$$

pour $(t, x) \in \,]-T, T[\, \times \Omega$.

On suppose que $u \in H^2_{\text{loc}}(]-T, T[\times \Omega)$ ou que $u \in C^0(]-T, T[\, , H^1_{\text{loc}}(\Omega)) \cap C'(]-T, T[\, , L^2_{\text{loc}}(\Omega))$. On suppose que :

$$u(t, x) = 0 \quad \text{pour} \quad (t, x) \in \,]-T, T[\, \times B(x_0, r_0) \ ,$$

où $x_0 \in \Omega$, $r_0 > 0$ et $B(x_0, r_0) \subset \Omega$.

On note $|x - y|$ la distance euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et $d(x, y)$ la distance géodésique dans Ω, pour la métrique euclidienne.

On note $D = \text{Sup}\,\{d(x_0, x), \text{ pour } x \in \Omega\}$. On suppose que $D \neq +\infty$. (Il est facile de construire des ouverts connexes de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ vérifiant $D = +\infty$).

THÉORÈME 1. *Il existe un réel K strictement positif (K ne dépend que de C_1 et C_2) tel que si $T > KD$ alors*

$$u(t,x) = 0 \quad \text{pour} \quad (t,x) \in]-T_1, T_1[\times \Omega \quad \text{ou} \quad T_1 = T - KD \ .$$

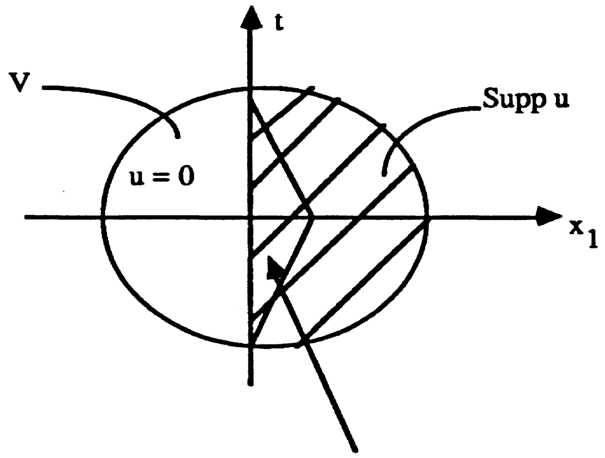
COMMENTAIRES :

i) Ce théorème peut être appliqué d'une manière purement locale. Pour T fixé on peut trouver un domaine de $]-T, T[\times \Omega$ sur lequel u s'annule. En particulier le théorème 1 est faux si A dépend de t. En effet, en prenant pour A le Laplacien positif le théorème d'ALINHAC [1] permet de trouver $u(t,x)$ et $a(t,x)$ des fonctions C^∞ vérifiant :

$$\left[D_t^2 - \Delta + a(t,x)\right] u(t,x) = 0$$

dans V un voisinage de $(t,x) = (0,0)$ et $\operatorname{Supp} u = \{x_1 \geq -\delta \, |x'|^2\} \cap V$, où $x = (x, x')$, $\delta > 0$. Ce qui est contradictoire avec le théorème 1.

On résume la situation dans ce schéma.



Domaine d'annulation de u
quand le théorème 1 est vrai

ii) Quand A est à coefficients analytiques, (A peut alors dépendre de t), ce théorème est une conséquence du théorème d'Holmgren. Dans ce cas la constante K trouvée dans le théorème 1 est bien moins bonne que celle donnée par le théorème d'Holmgren.

iii) Ces deux remarques, et la méthode de démonstration suggèrent que l'analyticité par rapport à t est la bonne hypothèse pour obtenir le théorème 1.

iv) Ce théorème permet de résoudre un problème posé dans le livre de LAVRENTÈV, ROMANOV et SHISTATSKII [5], étudié par RAUCH et TAYLOR [8] et par LERNER [6]. La question est la suivante : si u vérifie

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u + a(x,y)\, u = 0 \\ u \,\big|_{x<0} = 0 \ , \end{cases}$$

a-t-on $u = 0$?

Lerner a donné une réponse positive à cette question si les hypothèses sont globales sur $\mathbb{R}^2_{(x,y)} \times \mathbb{R}_t$. Le théorème 1 donne une réponse positive si les hypothèses sont locales en (x, y, t).

Ce type de résultat permet d'aborder le problème de détermination d'une source connaissant le signal reçu. Ainsi le cas $a \equiv 0$ a été étudié par SYMES [9].

Application au problème du contrôle.

On suppose que $u(t, x)$ vérifie :

$$
\text{(P)} \qquad \begin{cases} \left[D_t^2 - A(x,D)\right] u(t,x) = 0 \ \text{ sur } \ ]-\infty, +\infty[\times \Omega \\ u(0,x) = u^0(x) \ \text{ avec } \ u^0 \in H_0^1(\Omega) \\ D_t u(0,x) = u'(x) \ \text{ avec } \ u' \in L^2(\Omega) \\ u(t,x) = 0 \ \text{ sur } \ ]-\infty, +\infty[\times \partial\Omega \ . \end{cases}
$$

On a alors $u \in C^0(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R} \times L^2(\Omega))$.

$$
\text{(H)} \qquad \begin{cases} \text{On suppose de plus que } \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur }]-T, T[\times \Sigma \text{ où } \Sigma \\ \text{est un ouvert de } \partial\Omega, \text{ et } \dfrac{\partial}{\partial n} \text{ est la dérivée normale à } \Sigma. \\ \text{On suppose également que } \Sigma \text{ est une hypersurface } C^2. \end{cases}
$$

Il existe donc $x_0 \in \Sigma$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \cap \partial\Omega \subset \Sigma$. On pose $\tilde{\Omega} = \Omega \cup B(x_0, r)$ et on prolonge u sur $\tilde{\Omega}$ par 0 hors de Ω. Notons $\underline{u}$ ce prolongement. On a :

$$
\left(D_t^2 - A\right) \underline{u} = 0 \quad \text{sur} \quad]-T, T[\times \tilde{\Omega}
$$

$$
\underline{u} \in C^0(]-T, T[, H_0^1(\tilde{\Omega})) \cap C^1(]-T, T[, L^2(\Omega))
$$

et

$$
\underline{u} = 0 \quad \text{sur} \quad]-T, T[\times B(x_0, r) \ .
$$

Appelons $D = \operatorname{Sup}\{d(x_0, x), x \in \tilde{\Omega}\}$. Ici d est la distance géodésique sur $\tilde{\Omega}$. On suppose $D < +\infty$. En appliquant le théorème 1 on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 2. *Soit u une solution de (P), si (u, Ω, Σ) vérifient* (H) *alors, si $T > KD$,*

$$
u^0 = u^1 = 0 \ .
$$

Ce théorème d'unicité est la première étape pour appliquer la méthode H.U.M. de J.L. LIONS [7].

2. Une version locale du théorème d'unicité.

On fait les hypothèses du §.1 sur A, on suppose que

$$u \in H^2([-T,T] \times B(0,3r))$$

ou que

$$u \in C^0\Big([-T,T], H'(B(0,3r))\Big) \cap C^1\Big([-T,T], L^2(B(0,3r))\Big), \quad r > 0 \text{ fixé}.$$

LEMME 1. *Il existe une constante strictement positive K (ne dépendant que de C_1 et C_2) et r_0 (dépendant de C_1, C_2 et C_3) telle que si $(D_t^2 - A)u = 0$ et si*

$$u(t,x) = 0 \quad \text{pour} \quad (t,x) \in [-T,T] \times B(0,r), \quad \text{pour } r < r_0$$

alors

$$u(t,x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| < 2r$$

et

$$|t| < T - Kr \ .$$

Ce lemme est une version locale affaiblie du théorème 1. La démonstration va comporter plusieurs étapes.

On pose d'abord :

$$v_{a,\lambda}(s,x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} u(t,x)\, dt \ .$$

$v_{a,\lambda}$ possède plusieurs propriétés, tout d'abord, celle qui permet de conclure à la fin du calcul, c'est-à-dire,

$$v_{a,\lambda}(0,x) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} u(a,x) \text{ si } \quad |a| < T \ ,$$

et

(1) $$\|v_{a,\lambda}\|_{H^1([-s_0,s_0]\times B(0,3(r-\delta)))} \leq C\lambda^{1/2} e^{\frac{\lambda}{2} s_0^2} \ ,$$

(2) $$v_{a,\lambda}(s,x) = 0 \quad \text{pour } x \in B(0,r) \ .$$

LEMME 2. *Il existe une constante C (qui dépend de u), telle que :*

$$\|Q\, v_{a,\lambda}\|_{L^2([-s_0,s_0]\times B(0,3r))} \leq C\lambda^{3/2} e^{-\frac{\lambda}{2}[(T-|a|)^2 - s_0^2]}$$

où $Q = D_t^2 + A(x, D_x)$.

Dans le cas où $u \in C^0\,([-T,T], H^1(B(0,3r))) \cap C^1([-T,T], L^2(B(0,3r)))$, on déduit de ce lemme et du fait que $v_{a,\lambda} \in H^1_{\text{loc}}$ que $v_{a,\lambda} \in H^2_{\text{loc}}$.

Il suffit d'appliquer, par exemple le théorème 17.2.7 de HÖRMANDER [3] de régularité H^2_{loc} des fonctions $u \in H^1_{\text{loc}}$ vérifiant $Bu \in L^2_{\text{loc}}$, où B est un opérateur elliptique à coefficients Lipschitziens.

PREUVE DU LEMME 2 : Un calcul élémentaire montre que :

$$\begin{aligned} D_s v_{a,\lambda}(s,x) &= i\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} D_t u \, dt \\ &\quad - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left[e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} u(T,x) - e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} u(-T,x) \right] . \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} D_s^2 v_{a,\lambda}(s,x) &= -\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-t)^2} D_t^2 u(t,x) \, dt \\ &\quad - i\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \left[e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} D_t u(T,x) - e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} D_t u(-T,x) \right] \\ &\quad - \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \Big[-\lambda(is+a-T) e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a-T)^2} u(T,x) \\ &\qquad - \lambda(is+a+T) e^{-\frac{\lambda}{2}(is+a+T)^2} u(-T,x) \Big] . \end{aligned}$$

La majoration de $(D_s^2 + A) v_{a,\lambda}$ s'en déduit immédiatement.

Le deuxième ingrédient de la preuve est une inégalité de Carleman précise, ce qui va faire l'objet du lemme suivant pour lequel on pose :

$$\varphi = \frac{s^2 + |x|^2}{2} \quad \text{et} \quad \psi = e^{-\beta\varphi} \quad \beta > 0 .$$

LEMME 3 : (Inégalité de Carleman). *Il existe une constante $\widetilde{K} > 0$ (ne dépendant que de C_1 et C_2) et r_0 (dépendant de C_1, C_2 et C_3) telle que si $\beta \geq \frac{\widetilde{K}}{r^2}$ où $r < r_0$, il existe $C > 0$ et $\gamma_0 > 0$, telles que pour tout $\gamma > \gamma_0$ et tout $w \in H^2$ à support compact dans $\left\{(s,x), \frac{r^2}{2} < s^2 + x^2 < 9r^2\right\}$, on a*

$$\gamma^{3/2} \, \|e^{\gamma\psi} w\| \leq C \, \|e^{\gamma\psi} Q w\| .$$

Ici $\|\ \|$ est la norme dans L^2.

Ceci est une conséquence du théorème 8.3.1 de HÖRMANDER [3] qu'on va rappeler pour la commodité du lecteur.

THÉORÈME 8.3.1 [3]. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, soit ψ une fonction $C^\infty(\overline{\Omega})$ vérifiant* $\operatorname{grad}\psi(x) \neq 0$ *pour $x \in \overline{\Omega}$, et $P(x,D)$ un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$. On suppose de plus que* *les coefficients de la partie principale* $P_m(x,D)$ *sont dans* $C^1(\bar\Omega)$, *et que* P_m *est elliptique dans* $\bar\Omega$. *Alors si*

$$(3)\qquad \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial P_m}{\partial\xi_j}(x,\zeta)\overline{\frac{\partial P_m}{\partial\xi_k}(x,\zeta)} + \gamma^{-1}\,\mathrm{Im}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial P_m}{\partial x_k}(x,\zeta)\overline{\frac{\partial P_m}{\partial\xi_k}(x,\zeta)} > 0$$

pour $\zeta = \xi + i\gamma\,\mathrm{grad}\,\psi$, *où* $x\in\bar\Omega$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\gamma\in\mathbb{R}$, *et* $P_m(x,\xi)=0$, *il existe des constantes* $C>0$ *et* $\gamma_0>0$ *telles que pour* $\gamma>\gamma_0$ *on a :*

$$\sum_{|\alpha|\le m}\gamma^{2(m-|\alpha|)-1}\int |D^\alpha u|^2\, e^{2\gamma\psi}\,dx \le C\int |P(x,D)u|^2\, e^{2\gamma\psi}\,dx$$

quand $u\in C_0^\infty(\Omega)$.

Evidemment on peut remplacer $u\in C_0^\infty(\Omega)$ par $u\in H^m\cap\varepsilon'(\Omega)$ et pour nous $m=2$. Il est probable que pour $m=2$, l'hypothèse $P_m(x,D)$ à coefficients Lipschitziens suffise.

Il suffit donc pour prouver le lemme de vérifier (3) dans notre cas. On a :

$$\psi' = -\beta\varphi'\,e^{-\beta\varphi}$$
$$\psi'' = (-\beta\varphi'' + \beta^2\varphi'\,{}^t\varphi')\,e^{-\beta\varphi}\ .$$

On pose $\Gamma = \beta\gamma e^{-\beta\varphi}$. On a donc $\zeta = \xi - i\gamma\beta\varphi'_x e^{-\beta\varphi} = \xi - i\Gamma x$ et $\theta = \tau - i\gamma\beta\varphi'_s e^{-\beta\varphi} = \tau - i\Gamma s$.

On note $q(x,\tau,\xi) = \frac{1}{2}(\tau^2 + {}^t\xi A\xi)$ où A est une matrice qui dépend de x. $q(x,\theta,\zeta)=0$ est équivalent à :

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\tau^2 + {}^t\xi A\xi = \Gamma^2\left[s^2 + {}^t x A x\right]\ , \quad \text{et}\\ &s\tau + {}^t\xi A x = 0 \end{aligned}$$

La relation (3) devient, en notant $\eta = (\tau,\xi)$,

$$(5)\qquad -\left|\frac{\partial q}{\partial\eta}(x,\theta,\zeta)\right|^2 + \beta\left|\varphi'\frac{\partial q}{\partial\eta}(x,\theta,\zeta)\right|^2 + \frac{1}{\Gamma}\,\mathrm{Im}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}{}^t(\xi - i\Gamma x)\frac{\partial A}{\partial x_k}(\xi - i\Gamma x)\cdot[A(\xi + i\Gamma x)]_k\right] > 0$$

où $[V]_k$ est la $k-$ème coordonnée de V. Or

$$\left|\frac{\partial q}{\partial\eta}(x,\theta,\xi)\right|^2 = \tau^2 + \Gamma^2 s^2 + {}^t\xi A^2\xi + \Gamma^2\,{}^t x A^2 x$$

$$\left|\varphi' \frac{\partial q}{\partial \eta}(x,\theta,\zeta)\right|^2 = (s\tau + {}^t x A\xi)^2 + \Gamma^2(s^2 + {}^t x A x)^2$$
$$= \Gamma^2(s^2 + {}^t x A x)^2$$

grâce à (4).

Le terme Im[ ] de (5) est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n} + \frac{1}{2}\left[{}^t\xi \frac{\partial A}{\partial x_k}\xi - \Gamma^2 x \frac{\partial A}{\partial x_k} x\right]\Gamma[Ax]_k + \left[-\Gamma {}^t x \frac{\partial A}{\partial x_k}\xi\right][A\xi]_k \ .$$

De (4) on déduit que :

$$|\xi| \leq C\Gamma\sqrt{\varphi} \quad \text{et} \quad |\tau| \leq C\Gamma\sqrt{\varphi}$$

où C ne dépend que de C_1 et C_2. On a donc :

$$\left|\frac{1}{\Gamma}\,\mathrm{Im}[\ ]\right| \leq C\Gamma^2\varphi^{3/2}$$
$$\left|\frac{\partial q}{\partial \eta}(x,\theta,\zeta)\right|^2 \leq \widetilde{C}\Gamma^2\varphi$$
$$\left|\varphi' \frac{\partial q}{\partial \eta}(x,\theta,\zeta)\right|^2 \geq c\Gamma^2\varphi$$

où C ne dépend que de C_1, C_2, C_3, $\widetilde{C}$ ne dépend que de C_1, C_2 et c ne dépend que de C_1.

Donc (5) est impliquée par :

$$c\beta\Gamma^2\varphi^2 \geq \Gamma^2\varphi(C + \widetilde{C}\varphi^{1/2}) \ .$$

Si r_0 est assez petit, (r_0 ne dépend que de C_1, C_2 et C_3), on a $\widetilde{C}\varphi^{1/2} < \dfrac{C}{2}$. Il suffit donc de prendre $\beta \geq \dfrac{\widetilde{K}}{r^2}$ où $\widetilde{K}$ ne dépendant que de C_1 et C_2 (sur l'ouvert considéré $\varphi \geq \dfrac{r^2}{2}$).

Preuve du lemme 1 : Pour simplifier les notations on note $v_{a,\lambda} = v_\lambda$. On applique l'inégalité de Carleman à $w_\lambda = \chi(2\varphi(s,x))v_\lambda$ où

$$\chi(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 r^2 \leq \alpha \leq \alpha_2 = \left(\frac{5r}{2}\right)^2 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha \leq (1-\varepsilon)^2 r^2 \\ & \quad\text{ou} \ \ \alpha \geq \alpha_3 = \left(\frac{11r}{4}\right)^2 \ . \end{cases}$$

On posera $\alpha_1 = (2r)^2$. (On a $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$).

On choisit $\beta = \dfrac{2\tilde{K}}{r^2}$ et on pose $\gamma = \nu\lambda$ où ν sera choisi ultérieurement. On écrit :

$$Q\,w_\lambda = \chi(2\varphi)Q\,v_\lambda + [Q, \chi(2\varphi)]\,v_\lambda \; .$$

Le lemme 2 et les propriétés de la troncature χ impliquent :

$$\|e^{\gamma\psi}\chi(2\varphi)Q\,v_\lambda\| \le \lambda^{3/2}C_u\, e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}} - \lambda(T-|a|)^2 + \lambda s_0^2} \; . \tag{6}$$

D'autre part, $[Q, \chi(2\varphi)]$ est un opérateur d'ordre 1 dont le support des coefficients est inclus dans :

$$\left\{(s,x)\Big/(1-\varepsilon)^2 r^2 \le 2\varphi \le \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 r^2 \;\text{ ou }\; \alpha_2 \le 2\varphi \le \alpha_3\right\} \; .$$

Si $\alpha_2 \le 2\varphi \le \alpha_3$, on obtient :

$$e^{\gamma\psi} \le e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_2}{r^2}}} \; .$$

On déduit des faits précédents, de (1), et de (2) que :

$$\|e^{\gamma\psi}[P, \chi(2\varphi)]\,v_\lambda\| \le e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_2}{r^2}} + \lambda s_0^2} \; . \tag{7}$$

De même, si $\alpha_1 \ge 2\varphi$, alors :

$$e^{\gamma\psi} \ge e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_1}{r^2}}} \; ,$$

ce qui implique :

$$\gamma^{3/2}\,\|e^{\gamma\psi}w_\lambda\| \ge e^{\nu e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_1}{r^2}}}\, \|v_\lambda\|_{L^2(2\varphi\le\alpha_1)} \; . \tag{8}$$

Les formules (6), (7) et (8) impliquent que :

$$\|v_\lambda\|_{L^2(2\varphi\le\alpha_1)} \le C_u\,\lambda^{3/2}\Bigg[e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_2}{r^2}} + \lambda s_0^2 - \nu\lambda e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_1}{r^2}}} + e^{\nu\lambda e^{-\tilde{K}} - \lambda(T-|a|)^2 + \lambda s_0^2 - \nu\lambda e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_1}{r^2}}}\Bigg] \; . \tag{9}$$

Pour prouver le lemme, il suffit que $\|v_\lambda\|_{L^2(2\varphi\le\alpha_1)}$ tende vers 0 quand λ tend vers l'infini. Pour cela, il suffit d'après (9) que

$$\begin{aligned} &\nu e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_2}{r^2}} + s_0^2 - \nu e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_1}{r^2}} < 0 \\ &\text{et } \nu e^{-\tilde{K}} - (T-|a|)^2 + s_0^2 - \nu e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_1}{r^2}} < 0 \; . \end{aligned} \tag{10}$$

Donc, si

$$s_0^2\left(e^{-\tilde{K}} - e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_1}{r^2}}\right) < \left(e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_1}{r^2}} - e^{-\tilde{K}\frac{\alpha_2}{r^2}}\right)\left[(T-|a|)^2 - s_0^2\right] \; ,$$

on pourra trouver ν pour que (10) soit vérifiée. C'est-à-dire, puisque

$$\frac{\alpha_1}{r^2} = 4 \; , \quad \frac{\alpha_2}{r^2} = \frac{25}{4} \quad \text{et} \quad s_0 = 3r \; ,$$

$$9r^2 \frac{e^{-\tilde{K}} - e^{-4\tilde{K}}}{e^{-4\tilde{K}} - e^{-\frac{25}{4}\tilde{K}}} < (T - |a|)^2 - 9r^2 ,$$

c'est-à-dire $|a| < T - Kr$ pour un certain K.

Ce qui achève la preuve du lemme 1.

3. Démonstration du théorème 1.

Pour démontrer le théorème 1, on va construire une suite de boules permettant d'appliquer successivement le lemme 1.

DÉFINITION. On dit qu'une suite de boules $B(y_j, \delta)$ $j = 0, \ldots, N$ est une $\delta-$suite de boules reliant x_0 à x si

$$y_0 = x_0$$

$$x \in B(y_N, 2\delta)$$

$$B(y_{j+1}, \delta) \subset B(y_j, 2\delta) \quad j = 0, \ldots, N-1$$

$$B(y_j, 3\delta) \subset \Omega .$$

REMARQUE. S'il existe une $\delta-$suite de boules reliant x_0 à x, avec $\delta < r_0$ alors $u(t, y) = 0$ pour y près de x et $|t| < T - K\delta N$. Il suffit d'appliquer le lemme 1 N fois.

On va prouver l'assertion suivante : pour tout $x \in \Omega$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta < r_0$ et une $\delta-$suite de boules reliant x_0 à x avec $\delta N \leq D + \varepsilon$.

Soit Γ un arc joignant x_0 à x (suffisamment régulier) tel que longueur $(\Gamma) \leq D + \varepsilon$. On note g une paramétrisation de Γ

$$g : [0, 1] \to \Omega \text{ avec } g(0) = x_0 \text{ et } g(1) = x .$$

Soit $\mu = \inf_{t \in [0,1]} d(g(t), \complement\Omega)$, on a $\mu > 0$. Pour chaque $\delta \in \left]0, \inf\left(\frac{\mu}{3}, \delta_0\right)\right[$, on va construire une $\delta-$suite de boules reliant x_0 à x de la manière suivante. On construit par récurrence $\alpha_0 = 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N = 1$ en posant si $\alpha_j \neq 1$

$$\alpha_{j+1} = \sup\left\{\alpha \in [0, 1],\ |g(\alpha) - g(\alpha_j)| < \delta\right\} .$$

La suite α_j est croissante. On va voir que cette procédure s'arrête et que la suite α_j est strictement croissante. Cela est une conséquence du lemme suivant.

LEMME 4. *Si $\alpha_j \neq 1$ alors $|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha_j)| = \delta$.*

PREUVE : On a bien sûr $|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha_j)| \leq \delta$. D'autre part, par construction de α_j, $\forall \alpha > \alpha_j$ $|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha)| \geq \delta$, donc par continuité de g, $|g(\alpha_{j-1}) - g(\alpha_j)| \geq \delta$.

Supposons que pour tout j $\alpha_j < 1$ cela implique que α_j converge donc que $g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})$ tend vers 0. Ce qui contredit le lemme.

On va prouver que $B(g(\alpha_j), \delta)$ $j = 0, \ldots, N-1$, est une δ−suite de boules reliant x_0 à x.

1) $|x - g(\alpha_{N-1})| = |g(\alpha_N) - g(\alpha_{N-1})| \leq \delta < 2\delta$ donc

$$x \in B(g(\alpha_{N-1}), 2\delta) .$$

2) Si $y \in B(g(\alpha_{j+1}), \delta)$ $j = 0, \ldots, N-2$ alors

$$|y - g(\alpha_j)| \leq |y - g(\alpha_{j+1})| + |g(\alpha_j) - g(\alpha_{j+1})| < 2\delta .$$

Donc $B(g(\alpha_{j+1}), \delta) \subset B(g(\alpha_j), 2\delta)$.

3) $B(g(\alpha_j), 3\delta) \subset \Omega$ car $3\delta < \mu$.

Il reste donc à majorer $\delta(N-1)$. On remarque que le segment $I_j = [g(\alpha_j) ; g(\alpha_{j+1})]$, $j = 0, \ldots, N-2$ est contenu dans Ω. En effet pour $z \in I_j$ et $y \in \complement\Omega$, on a

$$\begin{aligned} |z - y| &\geq |g(\alpha_j) - y| - |z - g(\alpha_j)| \\ &\geq \mu - \delta \geq 2\delta > 0 . \end{aligned}$$

On a donc que, $|g(\alpha_j) - g(\alpha_{j+1})|$ est inférieur à la longueur de Γ prise entre $g(\alpha_j)$ et $g(\alpha_{j+1})$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-2} |g(\alpha_j) - g(\alpha_{j+1})| &\leq \text{longueur } (\Gamma) \\ &\leq D + \varepsilon . \end{aligned}$$

Le lemme 4 implique que $\delta(N-1) \leq D+\varepsilon$. Ce qui implique le théorème 1.

Bibliographie

[1] S. ALINHAC : *Non unicité du problème de Cauchy,* Annals of Mathematics, 117 (1983), 77-108.

[2] C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH : Annexe livre de J.L. LIONS [7].

[3] L. HÖRMANDER : *Linear partial differential operators,* Springer Verlag, Berlin, 1963.

[4] L. HÖRMANDER : *The analysis of linear partial differential operators,* Springer Verlag.

[5] M.M. LAVRENTÈV, V.G. ROMANOV, S.P. SHISHATSKII : *Ill-posed problems in mathematical physics and analysis,* in "Translations of Mathematical Monograph", Vol. 64, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[6] N. LERNER : *Uniqueness for an ill-posed problem,* Journal of Differential Equations, 71, (1988), 255-260.

[7] J.L. LIONS : *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués,* T. 1 : Contrôlabilité exacte, Masson.

[8] J. RAUCH, M. TAYLOR : *Penetrations in shadow regions and unique continuation properties in hyperbolic mixed problems,* Indiana Univ. Math. J., 22, (1972), 277-285.

[9] W. SYMES : *A trace theorem for solutions of the wave equation, and the remote determination of acoustic sources,* Math. Meth. in the Appl. Sci., 5, (1983), 131-152.

II

ENSEMBLES NODAUX

SUR LES ZEROS DE SOLUTIONS

D'INEGALITES DIFFERENTIELLES

ELLIPTIQUES

par

Luc ROBBIANO

Publié au Communication in Partial Differential Equations, 12 (1987), 903-919.

COMMUN. IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, 12(8), 903-919 (1987)

SUR LES ZEROS DE SOLUTIONS D'INEGALITES DIFFERENTIELLES ELLIPTIQUES.

par

Luc ROBBIANO
UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS
U.F.R. DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX (France)

Dans ce papier, nous étendons le résultat suivant dû à Caffarelli-Friedman [6].

Soit u une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ vérifiant :

$$|\Delta u| \leq C(|u| + |\nabla u|) \tag{1}$$

alors l'ensemble $\{u = 0, \ \nabla u = 0\}$ est de dimension d'Hausdorff au plus $m-2$.

On obtient ici le même résultat en remplaçant le laplacien par un opérateur elliptique d'ordre 2. En corollaire, on obtient, sous les mêmes conditions, que $\{u = 0\}$ est de dimension d'Hausdorff au plus $m-1$.

L'organisation générale de la preuve est la même que celle de Caffarelli-Friedman. L'essentiel de notre travail consiste à prouver qu'une fonction u vérifiant (1) (avec Δ remplacé par un opérateur elliptique d'ordre 2), se décompose en la somme de deux fonctions P_n et r_m, où P_n est un polynôme homogène de degré n, solution d'un opérateur elliptique à coefficients constants, et r_n s'annule à un ordre strictement supérieur à n. Ce résultat est à rapprocher du travail de Bers [4] qui démontre que la solution d'une équation elliptique, soit s'annule à l'ordre infini, soit s'écrit comme une somme d'un polynôme de degré n, solution de l'opérateur figé au point, plus un reste du même type que le nôtre.

1. *Enoncé des résultats*.

1.1.- *Résultats principaux*.

Soit $A(x,\partial_x)$ un opérateur elliptique, d'ordre 2, à coefficients lipschitziens d'un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit u une application de classe $C^{1+\delta}(\Omega)$ $(\delta > 0)$ vérifiant

Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|A(x,\partial_x)u| \leq C(|u| + |\nabla u|). \tag{2}$$

On suppose que u n'est pas identiquement nulle et on note :

$$S = \{x \in \Omega,\ u(x) = 0,\ \nabla u(x) = 0\}$$

et, H^k la k-mesure d'Hausdorff.

Théorème 1.-
Pour tout $\varepsilon > 0$,
$H^{m-2+\varepsilon}(S) = 0$.

Remarques :

a) S étant un fermé, c'est un ensemble mesurable. Les mesures d'Hausdorff qui sont extérieurement régulières, sont pour un ensemble mesurable, intérieurement régulières. Le théorème est donc de nature locale. Il suffit pour cela d'écrire Ω comme une réunion dénombrable de boules.

b) Le théorème est équivalent à :

La dimension d'Hausdorff de S est inférieur ou égale à $m-2$.

L'exemple suivant montre que la dimension est optimale. En effet, prenons $A = \Delta$ et $u(x) = x_1^2 - x_2^2$, on a, $S = \{x_1 = x_2 = 0\}$.

c) Dans le cas $m = 2$, on démontre que S est formé de point isolé. La généralisation de ceci serait

$$H^{m-2}(S \cap K) < +\infty \text{ , pour tout compact } K \subset \Omega.$$

Nous ne savons pas si ceci est vrai pour $m > 2$.

d) L'hypothèse (2) permet de traiter des problèmes non linéaires de type

$$A(x,\partial_x)u = f(x,u,\nabla u)$$

avec $|f(x,u,\nabla u)| \leq C(|u| + |\nabla u|)$.

f peut aussi dépendre de $\nabla^2 u$, $\nabla^3 u$ etc... du moment que la majoration (2) reste vraie (Voir Caffarelli-Friedman [6] pour des exemples).

Du théorème 1, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.-

Soit $\tilde{S} = \{x \in \Omega,\ u(x) = 0\}$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$H^{m-1+\varepsilon}(\tilde{S}) = 0.$$

Remarque :

Ici aussi, dans le cas $m = 2$, on peut prouver que $H^1(\tilde{S} \cap K) < +\infty$ pour tout compact $K \subset \Omega$. On ne sait pas généraliser ceci pour $m > 2$.

1.2.- *Propriété locale de la solution.*

On suppose de plus que :

$$A(x,\partial_x) = \Delta + B(x,\partial_x)$$

où $B(x,\partial_x) = \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_i} a_{ij}(x)\partial_{x_j}$ avec $a_{ij}(0) = 0$ et $\Delta = \sum_{j=1}^{m} \partial_{x_j}^2$.

On note $B_1 = \{|x| \leq 1\}$.

Théorème 3.-

On suppose que $u(0) = 0$, $\nabla u(0) = 0$ et que u n'est pas identiquement nulle.

Alors, il existe un entier $n \geq 2$ tel que

$$u = P_n + \Gamma_n \quad ,$$

où P_n est un polynôme harmonique homogène de degré n, non identiquement nul, et Γ_n est une fonction vérifiant :

il existe une constante positive C, telle que

$$|\Gamma_n(x)| \leq C|x|^{n+\delta/2} \quad \text{sur } B_1$$

$$|\nabla_n(x)| \leq C|x|^{n-1+\delta/2} \quad \text{sur } B_1.$$

Remarques :

a) Pour ce théorème, on peut prendre pour B un opérateur à coefficients $a_{ij}(x)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

b) Ce théorème est l'analogue du théorème 1.2. de Caffarelli-Friedman [6]. Par contre, nous n'avons pas l'analogue du lemme 1.1. (Essentiellement ce lemme est le suivant. Si $|\Delta u(x)| \leq C|x|^\beta$, avec β non entier alors

$$u = P_n + \Gamma_n \quad \text{avec} \quad n - [\beta] + 2,$$

P_n harmonique de degrés $\leq n$ et Γ_n du même type que celui du théorème 3).

Ceci vient du fait que P_n appartient au noyau de Δ mais pas au noyau de A.

c) Si A ne se décompose pas sous la forme $\Delta + B$, le théorème 3 reste vrai avec $P_n(x)$ remplacé par $P_n(\Lambda x)$ où Λ est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^m \to R^m$. En effet, il suffit de figer les coefficients de A en 0, et on vérifie aisément qu'un opérateur à coefficient constant est un laplacien modulo un changement de variables linéaire.

d) En raffinant la preuve du théorème 3, on peut prouver, si les coefficients de A sont de classe C^ε $(\varepsilon > 0)$, que u, soit se décompose comme dans le théorème, soit s'annule à l'ordre infini au sens, $u = O(|x|^N)$ pour tout N. Dans ce cas, on n'a pas de résultat d'unicité forte (il existe des contre-exemples voir Plis [9], Alinhac [1]), on ne peut donc pas éliminer la deuxième éventualité. Ce résultat étend le théorème de Bers [4] à des opérateurs avec des termes d'ordre inférieur à coefficients L^∞.

2. *Preuves*.

La preuve du théorème 1 repose sur une décomposition de u au voisinage des points de S (voir le théorème 3). On peut la trouver dans Caffarelli-Friedman au § 2 et 3 de [6] (certains détails se trouvent également dans [5]). Nous nous contenterons de démontrer le théorème 3, qui repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.1.-

Sous les hypothèses du théorème 3.

On suppose de plus qu'il existe, un entier $k \geq 1$, une constante $C > 0$ et un réel μ, $\delta \geq \mu > \frac{\delta}{2}$ tels que

(3) $$|u(x)| \leq C|x|^{k+\mu} \quad \text{sur } B_1$$

(4) $$|\nabla u(x)| \leq C|x|^{k+\mu-1} \quad \text{sur } B_1 .$$

Alors il existe un polynôme harmonique homogène P_{k+1} de degré $k+1$, une fonction Γ_{k+1} et un réel ν, $\mu > \nu > \frac{\delta}{2}$ tels que

$$u = P_{k+1} + \Gamma_{k+1} \quad \text{avec}$$

$$|\Gamma_{k+1}(x)| \leq \tilde{C}|x|^{k+1+\nu} \quad \text{sur } B_1 , \tag{5}$$

$$|\nabla\Gamma_{k+1}(x)| \leq \tilde{C}|x|^{k+\nu} \quad \text{sur } B_1 , \tag{6}$$

où $\tilde{C}$ est une constante positive.

Preuve du théorème 3 :

On démontre le théorème 3 par récurrence sur k.

Pour $k = 1$, les hypothèses du lemme sont vérifiées avec $\mu = \delta$. Il existe donc P_2 et Γ_2 vérifiant [5] et [6].

Si $P_2 \equiv 0$ alors on peut appliquer le lemme 2.1 avec $k = 2$. Par récurrence, on démontre donc, soit la conclusion du théorème 3, soit que $u = O(|x|^N)$ pour tout N. On applique alors un résultat d'unicité forte (voir Hörmander [8] , qui a généralisé les résultats de Cordes [7], Aronszajn [3], Alinhac-Baouendi [2]). On en déduit que $u \equiv 0$ sur B_1 , ce qui contredit l'hypothèse.

Preuve du lemme 2.1. :

On reprend ici les idées contenues dans Caffarelli-Friedman, en particulier le lemme 3.1 de [5] et le lemme 1.1 de [6].

On se contente de faire un certain nombre de rappels, et on se place dans le cas $m \geq 3$. Le cas $m = 2$ se traite de la même façon, à la différence près que la solution élémentaire du laplacien est $\frac{1}{2\pi}$ Log r.

On a :

(7) $$\frac{1}{|x-y|^{m-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|y|^{n+m-2}} \Gamma_n^y(x) \qquad \text{pour} \quad |x| < |y|,$$

où $\Gamma_n^y(x)$ est un polynôme harmonique homogène de degré n en x, dépendant d'une façon régulière de y. La convergence est uniforme sur tout compact contenu dans $|x| < |y|$. Les dérivées de $\Gamma_n(x)$ vérifient également ces propriétés. On a :

(8) $$|\nabla_x^k \Gamma_n^y(x)| \leq C|x|^{n-k} n^{m-3+2k} \qquad k = 0,1,2$$

où la constante C, ne dépend pas de n.

La formule de Green permet d'écrire :

$$C_m u(x) = - \int_{|y|=1} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right) - \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \frac{\partial}{\partial \nu} u(y) \right] dS_y$$

$$- \int_{|y|<1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \Delta u(y) dy$$

$$= - \int_{|y|=1} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right) - \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \frac{\partial}{\partial \nu} u(y) \right] dS_y - \int_{|y|<1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} Au(y) dy$$

$$+ \int_{|y|<1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} Bu(y) dy = J_1 - J_2 - J_3 .$$

Avec $C_m = \dfrac{+\, 2(m-2)(\pi)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ est la dérivée dans la direction de la normale extérieure.

Il est clair qu'il suffit de prouver le lemme 2.1 pour $|x| \leq C \leq 1$ car $u \in C^{1+\delta}$.

Pour traiter J_1 , il suffit de développer $\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right)$ et $\frac{1}{|x-y|^{m-2}}$ en série de polynômes harmoniques et de regrouper les termes d'homogénéïté inférieure ou égale à $k+1$ et les termes de degré strictement supérieur à $k+1$. Ce terme a d'ailleurs été traité intégralement dans Caffarelli-Friedman [5] pour $m = 3$, mais le cas général est similaire.

Traitons le terme J_2 :

$$J_2 = \int_{|y|<1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} Au(y)dy + \int_{\substack{|y|<1 \\ |y|>\beta(x)}} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} Au(y)dy = I_1(x) + I_2(x)$$

où β est une constante fixée $\beta \in]1,2[$.

Contrôle de I_1.

Les hypothèses (3), (4) et le fait que $|y| \leq \beta|x|$ montrent que

$$|Au(y)| \leq C|x|^{k+\mu-1} \tag{9}$$

et

$$\int_{\substack{|y|<1 \\ |y|<\beta|x|}} \frac{dy}{|x-y|^{m-2}} \leq \int_{|x-y|\leq(\beta+1)|x|} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} dy \leq C|x|^2 .$$

On a donc

$$|I_1(x)| \leq C|x|^{k+1+\mu}.$$

I_1 est un terme de Γ_{k+1} et vérifie (5).

Contrôle des dérivées de I_1.

On a :

$$\frac{\partial I_1}{\partial x_i} = \int_{|y|\leq\beta|x|}(m-2)\,\frac{y_i - x_i}{|x-y|^m}\,Au(y)dy + \beta\,\frac{x_i}{|x|}\int_{|y| = \beta|x|}\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\,Au(y)dS_y$$

$$= I_1' + I_1'' .$$

En traitant le terme I_1' , comme le terme I_1 , on a

$$|I_1'| \leq C|x|^{k+\mu}$$

ce qui vérifie (6).

Quant à I_1'' , sur $|y| = \beta|x|$ on a

$$|x - y| \geq |y| - |x| \geq (\beta-1)|x|$$

donc

$$\frac{1}{|x-y|^{m-2}} \leq C\,\frac{1}{|x|^{m-2}} .$$

On en déduit que :

$$|I_1''| \leq C\,\frac{|x|^{k+\mu-1}}{|x|^{m-2}}\int_{|y|=\beta|x|} dS_y = C|x|^{k+\mu}.$$

Ceci vérifie (6).

Contrôle de $I_2(x)$.

Quand $|y| > \beta(x)$, on peut appliquer (7), on a alors

$$I_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} I_2^n(x) \quad \text{avec}$$

$$I_2^n(x) = \int_{\substack{|y|<1\\ |y|>\beta|x|}} \frac{1}{|y|^{n+m-2}}\,\Gamma_n^y(x)Au(y)dy.$$

Pour $n \leqslant k+1$, on ajoute à chaque terme

$$I_2^n = \int_{\substack{|y|<1 \\ |y|<\beta|x|}} \frac{1}{|y|^{n+m-2}} \Gamma_n^y(x) A u dy.$$

On vérifie facilement que le terme ainsi obtenu est un polynôme harmonique de degré n.

Il suffit de prouver que $\tilde{I}_2^n$ vérifie (5).

On a :

$$|\tilde{I}_2^n| \leqslant C|x|^n \int_{|y|<\beta|x|} |y|^{k-1+\mu-n-m+2} dy$$

$$\leqslant C|x|^n |x|^{k+\mu-n+1}$$

$$\leqslant C|x|^{k+1+\mu} .$$

$\tilde{I}_2^n$ vérifie donc (5).

On traite les dérivées de la même façon en remarquant que $\frac{\partial \Gamma_n^y}{\partial x_i}(x)$ est un polynôme harmonique homogène de degré $n-1$. Le terme de bord ne pose pas de problème particulier. On majore alors les dérivées par $|x|^{k+\mu}$. Il suffit de prendre $\nu \leqslant \mu$ pour que (6) soit vérifiée.

Si $n > k+1$, on a :

$$|I_2^n| \leqslant Cn^{m-3}|x|^n \int_{|y|>\beta|x|} |y|^{k-1+\mu-n-m+2} dy$$

$$\leqslant Cn^{m-3}|x|^{k+\mu+1}(\beta)^{k+\mu-n+1}$$

où C ne dépend pas de n.

Un calcul analogue montre qu'avec une constante C indépendante de n, on a :

$$\left|\frac{\partial I_2^n}{\partial x}\right| \leq C n^{m-1} |x|^{k+\mu} \beta^{-n}$$

$\sum_{n=k+2}^{\infty} I_2^n$ vérifie donc (5).

Contrôle de J_3.

On a $B = \sum_{i,j=1}^{m} \partial_{x_i} a_{ij} \partial_{x_j}$ avec $a_{ij}(0) = 0$.

On va traiter un terme générique $\partial_{x_i} a(x) \partial_{x_j}$ avec $a(0) = 0$.

On a

$$\int_{|y|<1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} \partial_{y_i} a(y) \partial_{y_j} u(y) dy = - \int_{|y|<1} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right) a(y) \partial_{y_j} u(y) dy$$

$$+ \int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} a(y) \partial_{y_j} u(y) \omega_i$$

$$= - \int_{\substack{|y|<1 \\ |y|>\beta|x|}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right) a(y) \partial_{y_j} u(y) dy \; - \int_{\substack{|y|<1 \\ |y|>\beta|x|}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right) a(y) \partial_{y_j} u(y) dy$$

$$+ \int_{|y|=1} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} a(y) \partial_{y_j} u(y) \omega_i \quad = \; - K_1 - K_2 + K_3$$

où ω_i est une $(n-1)$-forme différentielle sur $|y| = 1$.

Contrôle de K_1.

$$K_1 = \int_{|y|<\beta|x|} (m-2) \frac{x_i - y_m}{|x-y|^m} a(y) \partial_{y_j} u(y) dy.$$

En appliquant (4) et en remarquant que $|a(y)| \leq C|y|$, on trouve

$$|K_1| \leq C|x|^{k+\mu} \int_{|x-y|<(\beta+1)|x|} \frac{1}{|x-y|^{m-1}} dy \quad \leq C|x|^{k+1+\mu}.$$

Donc K_1 vérifie (5).

Contrôle de $\frac{\partial K_1}{\partial x_\nu}$.

A priori $\frac{\partial K_1}{\partial x_\nu}$ n'a de sens que dans les distributions. Cependant un calcul élémentaire montre que, pour $|x| < \frac{1}{2}$ et $M >> 1$, on a :

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_\nu} = \int_{\substack{|y|>\beta|x| \\ M>|x-y|}} g(x,y)a(x)\partial_{x_j}u(x)dy$$

$$+ \int_{|y|<\beta|x|} g(x,y)(a(y)\partial_{y_j}u(y) - a(x)\partial_{x_j}u(x))dy$$

$$+ \beta \frac{x_\nu}{|x|} \int_{|y|=\beta|x|} (m-2) \frac{x_i - y_m}{|x-y|^m} a(y)\partial_{y_j}u(y)dS_y$$

$$= ① + ② + ③$$

où $g(x,y) = (m-2)(\frac{\delta_{i\nu}}{|x-y|^m} - \frac{m(x_i-y_i)(x_\nu-y_\nu)}{|x-y|^{m+2}})$

(δ_{ij} est le symbole de Krönecker).

Contrôle de ①.

On a $g(x,y) = - \frac{-\partial^2}{\partial x_i \partial x_\nu}(\frac{1}{|x-y|^{m-2}})$.

On peut donc développer $g(x,y)$ en polynômes harmoniques, on a :

$$g(x,y) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{|y|^{m-2+n}} \tilde{\Gamma}^y_{n-2}(x)$$

où $\tilde{\Gamma}_k^y(x)$ est un polynôme harmonique de degré k. De (8), on déduit que

$$|\tilde{\Gamma}_{n-2}^y(x)| \leq C|x|^{n-2}\, n^{m+1} .$$

On a donc

$$\left|\int_{\substack{|y|>\beta|x| \\ M>|x-y|}} \frac{\tilde{\Gamma}_{n-2}^y(x)}{|y|^{m-2+n}}\, dy\right| \leq C|x|^{n-2}\, n^{m+1} \int_{2M>|y|>\beta|x|} \frac{1}{|y|^{m-2+n}}$$

$$\leq C|x|^{n-2}\, n^{m+1}\, \beta^{-n}|x|^{2-n} \qquad \text{si } n > 2$$

et
$$\leq C\left[\mathrm{Log}\, 2M - \mathrm{Log}\, \beta|x|\right] \qquad \text{si } n = 2.$$

On en déduit que :

$$| \text{①} | \leq C|x|^{k+\nu} \qquad \text{si } \nu < \mu.$$

Contrôle de ② .

$\nabla u \in C^\delta$, $a \in C^1 \cap C^\delta$, on a donc

$$|a(y)\partial_{y_i} u(y) - a(x)\partial_{x_i} u(x)| \leq C|x-y|^\delta .$$

D'autre part, on a :

$$|a(y)\partial_{y_i} u(y) - a(x)\partial_{x_i} u(x)| \leq C|x|^{k+\mu} \qquad \text{si } |y| < \beta|x| .$$

Pour $s \in]0,1[$, qu'on fixera plus loin, on a :

$$|a(y)\partial_{y_i}u(y) - a(x)\partial_{x_i}u(x)| \leqslant C|x|^{|k+\mu|(1-s)+\delta s} \quad .$$

En reportant dans ②, on a :

$$|\,②\,| \leqslant C|x|^{(k+\mu)(1-s)}\int_{|y|<\beta|x|} \frac{|x-y|^{\delta s}}{|x-y|^{m}}\,dy$$

$$\leqslant C|x|^{(k+\mu)(1-s)+\delta s} \ .$$

Choisissons s de sorte que :

$$(k+\mu)(1-s) = k + \nu$$

avec $\nu = \dfrac{\mu + \frac{\delta}{2}}{2}$.

On a : $s = 1 - \dfrac{k + \dfrac{\mu+\frac{\delta}{2}}{2}}{k+\nu}$.

On a bien $s \in]0,1[$ et $\mu > \nu > \frac{\delta}{2}$.

Contrôle de ③ .

$$|\,③\,| \leqslant C\int_{|y|=\beta|x|} \frac{|y|^{k+\mu}}{|y|^{m-1}}\,dy$$

$$\leqslant C|x|^{k+\mu}$$

Ceci vérifie (6) .

Contrôle de K_2.

La méthode est identique à celle utilisée pour le contrôle de I_2. Il suffit de développer $\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\dfrac{1}{|x-y|^{m-2}}\right) = +\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{1}{|x-y|^{m-2}}\right)$ en série de polynômes harmoniques.

Contrôle de K_3.

Le terme se traite comme J_2.

On a prouvé qu'il existait un polynôme P_{k+1} de degré $k+1$, mais vu l'hypothèse (3), P_{k+1} est nécessairement homogène de degré $k+1$.

ANNEXE

Preuve du corollaire 2 :

$H^{m-2+\varepsilon}(\{u=0, \nabla u=0\}) = 0$ est équivalent du fait qu'il existe $V\eta_j$ une suite d'ouverts, constitués par la réunion de cubes d'arêtes inférieures à η_j avec $\eta_j \to 0$, telle que

$$S = \{u=0, \nabla u=0\} \subset \cap V\eta_j \qquad \text{et} \qquad H^{m-2+\varepsilon}(\cap V\eta_j) = 0.$$

Soit $\tilde{S}_K = \{u=0\} \cap K$ où K est un compact de Ω. On a $H^{m-1+\varepsilon}(\tilde{S}_K \setminus V\eta_j) = 0$ car sur le complémentaire de $V\eta_j$, S est une variété C^δ de dimension $m-1.\mu$

On a $\bigcup\limits_j (\tilde{S}_K \setminus V\eta_j) = \tilde{S}_K \setminus \bigcap\limits_j V\eta_j$, donc

$$H^{m-1+\varepsilon}(\tilde{S}_K \setminus \bigcap_j V\eta_j) \leq \sum_j H^{m-1+\varepsilon}(\tilde{S}_K \setminus V\eta_j) = 0.$$

D'autre part :

$$H^{m-1+\varepsilon}(\tilde{S}_K \setminus \bigcap_j V\eta_j) = H^{m-1+\varepsilon}(\tilde{S}_K) - H^{m-1+\varepsilon}(K \bigcap_j V\eta_j)$$

donc $\qquad H^{m-1+\varepsilon}(\tilde{S}_K) = 0.$

Il suffit de prendre une suite K_j de compacts telle que $\cup K_j = \Omega$ pour conclure.

BIBLIOGRAPHIE

----

[1] S. ALINHAC - Communication personnelle.

[2] S. ALINHAC - M.S. BAOUENDI - Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and strong unique continuation for higer order partial differential inequalities, Amer. J. Math. 102, (1980), 385-393.

[3] N. ARONSZAJN - A unique continuation of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, J. Math. Pures Appl. 36 (1957), 235-249.

[4] L. BERS - Local behavior of solutions of general linear elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 8, (1955), 473-496.

[5] L.A. CAFFARELLI - A. FRIEDMAN - The free boundary in the Thomas-Fermi atomic model, J. Differential Equations 32 (1979), 335-356.

[6] L.A. CAFFARELLI - A. FRIEDMAN - Partial regularity of zero-set of solutions of linear and superlinear elliptic equations, J. Differential Equations, 60, (1985), 420-433.

[7] H.O. CORDES - Uber die bestimmtheit der lösungen elliptisher differentialgleichungen durch anfangsvorgaben, Nachr. Akad. Götingen IIa Math. Phys. Kl. (1956), 239-258.

[8] L. HORMANDER - Uniqueness theorems for second order elliptic differential equations, Comm. in Partial Differential Equations, 8, (1983), 21-64.

[9] A. PLIŠ - On non-uniqueness in Cauchy problem for an elliptic second order differential equation, Bull. Acad. Pol. Sci., 11, (1963), 95-100.

Received September, 1986

DIMENSION DES ZEROS

D'UNE SOLUTION FAIBLE D'UN

OPERATEUR ELLIPTIQUE

par

Luc ROBBIANO

Publié au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 67 (1988), 339-357.

J. Math. pures et appl.,
67, 1988, *p.* 339 *à* 357

DIMENSION DES ZÉROS D'UNE SOLUTION FAIBLE D'UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE

Par Luc ROBBIANO

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous démontrons le résultat suivant :

Soit $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, $u \not\equiv 0$ vérifiant $|\mathrm{A}\,u| \leqq c(|u|+|\nabla u|)$ presque partout, où A est un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients lipschitziens. Alors l'ensemble sur lequel u s'annule est de mesure nulle. En fait, on démontre un résultat plus précis (en termes de dimension de Hausdorff) en définissant un représentant judicieux de u.

Ce résultat repose sur une décomposition de u en une somme d'un polynôme homogène de degré n et d'une fonction Γ qui s'annule (en termes de normes L^2) à un ordre plus grand que n. Nous généralisons ici le résultat de [13].

Introduction

Soit $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ où Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^m$, $u \equiv 0$, vérifiant :

$|\mathrm{A}\,u| \leqq c(|u|+|\nabla u|)$ presque partout où A est un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients lipschitziens. On se pose les problèmes suivants :

1° Si la mesure de Lebesgue de l'ensemble où u s'annule est strictement positive, u est-elle identiquement nulle ?

2° Plus généralement que peut-on dire sur les mesures de Hausdorff de $\{u=0\}$, de $\{u=0,\ \nabla u=0\}$, si on peut définir ces ensembles.

Si on prend pour A le laplacien et $u \in \mathrm{C}^{1+\delta}$, $\delta>0$, alors Caffarelli et Friedman [5] ont démontré que la dimension d'Hausdorff de $\{u=0,\ \nabla u=0\}$ est, au plus, $m-2$ et on en déduit que la dimension de $\{u=0\}$ est, au plus, $m-1$. Pour un A général avec $u \in \mathrm{C}^{1+\delta}$, on a prouvé dans [13] le même résultat.

Pour $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution de $\mathrm{A}u=0$, Garofalo et Fang Hua Lin [7] ont prouvé que u est un poids de Muckenhoupt (*voir* [7] pour un énoncé précis) ce qui implique que la mesure de Lebesgue de $u=0$ est nulle.

Dans cet article, nous définissons

$$f(x)=\lim_{r \to 0} \frac{1}{|\mathrm{B}_r|} \int_{|x-y|<r} u(y)\,dy$$

et

$$\nabla f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{|x-y|<r} \nabla u(y)\, dy$$

où $|B_r|$ est le volume d'une boule de rayon r.

On démontre que $f(x)$ est définie partout et est presque partout égale à $u(x)$, que $\nabla f(x)$ est presque partout égale à $\nabla u(x)$ et que si $f(x)=0$ alors $\nabla f(x)$ est définie. On démontre alors que $\{f=0\}$ est, au plus, de dimension de Hausdorff $m-1$ et que $\{f=0, \nabla f=0\}$ est, au plus, de dimension $m-2$. Toutefois, nos techniques ne sont pas suffisamment précises pour pouvoir majorer respectivement les $m-1$ et $m-2$ mesures de Haussdorff de $\{f=0\}$ et $\{f=0, \nabla f=0\}$.

Comme dans Caffarelli-Friedman [5], dont nous nous sommes beaucoup inspiré, ces résultats reposent sur une décomposition de u en une somme d'un polynôme homogène de degré n et d'une fonction s'annulant à un ordre supérieur. L'énoncé précis de ce résultat est assez technique. On le trouvera au théorème 1.

Ce type de résultats a déjà été prouvé dans un certain nombre de cas. John [11] a regardé le cas des opérateurs à coefficients analytiques. Bers [3] a traité les opérateurs à coefficients C^p, $p>0$. Caffarelli et Friedman [5] ont traité le cas des inéquations différentielles pour un laplacien, résultat que nous avons généralisé dans [13] aux opérateurs elliptiques d'ordre deux. Ces deux derniers résultats sont obtenus pour des fonctions de régularités $C^{1+\delta}$ avec $\delta>0$. C'est ce dernier point que nous améliorons ici, puisque nous supposons seulement une régularité H^1.

L'organisation de la preuve est identique à celle de [13]. Les majorations en norme L^2 sont un peu plus délicate à obtenir.

Récemment, Alessandrini-Vessella [15] ont obtenu un résultat similaire à notre théorème 1 pour des solutions d'équations paraboliques.

1. Énonce des résultats

1.1. Théorème de décomposition. — Soit $A(x, \partial_x)$ un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficients lipschitziens d'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^m$ $(m \geqq 2)$. Les coefficients sont réels.

Soit u une fonction appartenant à $H^1_{Loc}(\Omega)$ vérifiant

(1) pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $c>0$, telle que

$$|A(x, \partial_x) u| \leqq C(|u| + |\nabla u|) \text{ presque partout.}$$

On a implicitement supposé que $A(x, \partial_x) u$ est une fonction mesurable et donc que $A(x, \partial_x) u$ est localement une fonction appartenant à L^2. Ces hypothèses permettent d'appliquer un résultat de régularité sur u (*voir* par exemple le théorème 17.2.7, Hörmander [9]) et donc u appartient à $H^2_{Loc}(\Omega)$.

On suppose que l'ensemble où $u \neq 0$ est de mesure de Lebesgue strictement positive (u non trivial).

On note Λ^k la k-mesure de Hausdorff.

THÉORÈME 1. — *Soit u vérifiant* (1), *alors pour tout* $x \in K$ *et pour tout* $\delta < 0$, *il existe un entier* $n \geqq 0$, *une matrice* Λ, *un polynôme harmonique* P_n *homogène de degré n et une fonction* Γ_n *tels que,*

$$u(y) = P_n(\Lambda(y-x)) + \Gamma_n(y-x) \qquad \textit{avec} \quad P_n \not\equiv 0$$

$$\left(\int_{|y| \leqq R} |\Gamma_n(y)|^2 \, dy\right)^{1/2} \leqq C\, R^{(m/2)+n+1-\delta}$$

$$\left(\int_{|y| \leqq R} |\nabla \Gamma_n(y)|^2 \, dy\right)^{1/2} \leqq C\, R^{(m/2)+n-\delta}$$

où C *ne dépend que de* A, K, n, δ *et de la norme de u dans* $H^2(K)$.

Remarques. — 1° Supposons $x=0$ et notons A la matrice $(a_{ij}(0))_{1 \leqq i,\, j \leqq m}$, A symétrique définie, positive. Soit Λ la matrice vérifiant

$$(2) \qquad \Lambda A^t \Lambda = I$$

où I est la matrice identité.

Λ est bien défini modulo une matrice orthogonale c'est-à-dire si $\tilde{\Lambda}$ vérifie (2) alors $\tilde{\Lambda} = O \Lambda$ avec $O^t O = I$.

Si on pose $z = \Lambda y$ dans les coordonnées z l'opérateur $A(y, \partial y)$ est, en O, le laplacien. Ceci explique le terme Λ intervenant dans l'énoncé du théorème et le fait que P_n soit harmonique.

2° Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, ce type de résultats a déjà été obtenu dans un certain nombre de cas par John [11], Bers [3], Caffarelli-Friedmann [5] et Robbiano [13]. La nouveauté est qu'on prouve une sorte de développement de Taylor pour une solution « faible ».

3° On peut se demander si la condition (1) est la plus faible possible pour démontrer un résultat de décomposition. Pour comprendre en quel sens on pourrait améliorer (1), il faut expliquer le mécanisme de la preuve. Il repose sur deux résultats. Le premier est du type suivant, (*voir* le lemme 3 pour un énoncé précis) si u vérifie (1) et u s'annule à l'ordre n alors u se décompose en un polynôme homogène plus une fonction qui s'annule à un ordre strictement supérieur à n. Le deuxième est un résultat d'unicité forte qui permet d'affirmer que si u s'annule à l'ordre infini alors u est identiquement nulle. Nous utilisons dans ce papier, le résultat de Hörmander [8] qui généralise des résultats antérieurs de Muller [12], Cordes [6], Aronszajn [2], Aronszajn-Krzywicki-Szarski [14] et Alinhac-Baouendi [1]. Ce résultat n'est cependant pas optimal. Par exemple, pour l'opérateur $\Delta + V$, Jerison et Kenig [10] démontrent l'unicité forte si $V \in L^{m/2}_{Loc}$ (*voir* pour d'autres conditions l'appendice de Stein de [10] et leur bibliographie).

Nous nous sommes limités à la condition (1), d'une part, parce que le bon cadre pour obtenir l'unicité forte avec des termes dans L^q ne semble pas complètement dégagé, d'autre part, la preuve du lemme 3 pose des problèmes sous ces hypothèses.

1.2. DIMENSION DES ZÉROS DE u. — Avant d'énoncer le second théorème, nous allons définir de « bons » représentants pour u et ∇u. Si on note C_m le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^m$, le théorème de différentiation de Lebesgue permet de dire que $1/C_m R^m \int_{|x-y|<R} u(y)\,dy$ converge, presque partout vers u, quand R tend vers 0. Donc si on note $f(x)$ cette limite, $f(x)$ et $u(x)$ sont égales dans L^2. D'autre part, on remarque, en appliquant le théorème 1 que $f(x)$ est définie partout car $f(x)=P_n^{(x)}(0)$ (le polynôme P_n donné par le théorème 1 dépend de x). De même, si on note

$$\nabla f(x)=\lim_{R\to 0}\frac{1}{C_m R^m}\int_{|x-y|<R}\nabla u(y)\,dy$$

alors ∇f est presque partout égale à ∇u. ∇f n'est pas définie partout, mais si $f(x)=0$, $\nabla f(x)$ existe car dans ce cas le n de P_n^x est supérieur ou égal à 1. On a donc, dans ce cas, $\nabla f(x)={}^t\Lambda^x\nabla P_n^{(x)}(0)$. Nous noterons $\{x\in K,\ u(x)=0\}$ l'ensemble $\{x\in K,\ f(x)=0\}$ de même, nous noterons $\{x\in K,\ u(x)=0,\ \nabla u(x)=0\}$ l'ensemble $\{x\in K,\ f(x)=0,\ \nabla f(x)=0\}$.

THÉORÈME 2. — *Pour tout* $\varepsilon>0$,

$$\Lambda^{m-1+\varepsilon}(\{x\in\Omega,\ u(x)=0\})=0$$
$$\Lambda^{m-2+\varepsilon}(\{x\in\Omega,\ u(x)=0,\ \nabla u(x)=0\})=0.$$

Remarques. — 1° En particulier, la mesure de Lebesgue de $\{x\in\Omega,\ u(x)=0\}$ est nulle. Cette mesure ne dépend pas du représentant choisi pour u. Pour une fonction u vérifiant l'équation $A u=0$ où $A=\sum_{i,j}^{m}\partial_{x_j}a_{i_j}(x)\,\partial_{x_i}$, ce résultat est une conséquence du résultat de Garofalo-Fang Hua Lin [7].

2° Dans [13], nous avions prouvé le théorème 2 pour des fonctions $u\in C^{1+\varepsilon}$. Dans ce cas (il suffit de supposer que u est un continûment différentiable) les ensembles $\{x\in\Omega,\ u(x)=0\}$ et $\{x\in\Omega,\ u(x)=0,\ \nabla u(x)=0\}$ sont définis sans ambiguïté et correspondent aux définitions que nous avons données plus haut.

2. Preuve du théorème de décomposition

Comme indiqué à la remarque du théorème 1, nous nous placerons dans ce paragraphe dans des coordonnées adaptées, de sorte que $x=0$, et

$$A=\Delta+\sum_{i,j=1}^{m}\partial_{y_i}a_{ij}(y)\,\partial_{y_j}=\Delta+B$$

avec $a_{ij}(0)=0$ et a_{ij} lipschitzienne, pour $1 \leqq i, j \leqq m$.

LEMME 3. — *Soit* $u \in H^2_{\mathrm{Loc}}(\Omega)$ *vérifiant* (1).

On suppose qu'il existe une constante positive C *et une constante* $\alpha \geqq 0$ *telles que*

$$\left(\int_{|y|<R} |u|^2 \, dy\right)^{1/2} \leqq CR^\alpha \tag{3}$$

$$\left(\int_{|y|<R} |\nabla u|^2 \, dy\right)^{1/2} \leqq CR^\alpha. \tag{4}$$

Alors pour tout $\delta > 0$, *il existe* $\tilde{C} > 0$, *il existe un polynôme harmonique* P *et une fonction* $\Gamma \in H^2$ *tels que,* $u = P + \Gamma$ *avec*

$$\left(\int_{|y|<R} |\Gamma|^2 \, dy\right)^{1/2} \leqq \tilde{C} R^{\alpha+2-\delta} \tag{5}$$

$$\left(\int_{|y|<R} |\nabla \Gamma|^2 \, dy\right)^{1/2} \leqq \tilde{C} R^{\alpha+1-\delta} \tag{6}$$

Remarques. — 1° Si on décompose P en polygones homogènes de degré k, (3) à (6) impliquent que $\alpha+1 \leqq k+(m/2) < \alpha+2$ si on considère les polynômes d'homogénéïté supérieure ou égale à $\alpha+2$ comme une partie de Γ.

2° En particulier, u vérifie toujours

$$\left(\int_{|y|<R} |u|^2 \, dy\right)^{1/2} \leqq CR^{m/2}$$

$$\left(\int_{|y|<R} |\nabla u|^2 \, dy\right)^{1/2} \leqq CR^{m/2}.$$

3° Le lemme 3 est plus précis que le théorème 1. En effet, vu la remarque 2°, $u = P + \Gamma$ où Γ vérifie (5) et (6) avec $\alpha = m/2$ et P un polynôme d'ordre 1. La fonction f définie plus haut vérifie $f(0) = P(0)$ et $\nabla f(0) = \nabla P(0)$; ce qui montre que ∇f est défini partout.

Pour démontrer le théorème 1, il suffit d'appliquer le lemme 3 et, par récurrence, on obtient, soit la conclusion du théorème 1, soit que u s'annule à l'ordre infini. On applique alors le théorème d'unicité forte (Aronszajn-Krzywicki-Szarski [14] et Hörmander [8], pour éliminer cette éventualité, *voir* [13] pour un petit peu plus de détail).

Preuve du lemme 3. — La preuve s'inspire de la preuve du lemme 2.1 de [13], ainsi que de Caffarelli-Friedman ([4], [5]). Nous renverrons quelquefois à ces différents articles.

Quitte à faire un changement d'échelle, on suppose que la boule de centre 0 et de rayon 1 est incluse dans Ω.

On se place dans le cas $m \geqq 3$ (pour $m = 2$, il faut remplacer la solution élémentaire du laplacien par $(1/2\Pi) \operatorname{Log} r$).

On a (*voir* Caffarelli-Friedman [5])

$$\frac{1}{|x-y|^{m-2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|y|^{n+m-2}}\Gamma_n^y(x) \qquad \text{pour} \quad |x|<|y|, \tag{7}$$

où $\Gamma_n^y(x)$ est un polynôme harmonique homogène de degré n en x, dépendant d'une façon régulière de y. La convergence est uniforme sur tout compact contenu dans $|x|<|y|$. Les dérivées vérifient également ces propriétés, et, on a,

$$|\nabla_x^k \Gamma_n^y(x)| \leq C|x|^{n-k} n^{m-3+2k}, \qquad k=0, 1, 2 \tag{8}$$

où la constante C ne dépend pas de n.

Pour $\lambda\in[1/2, 1]$ et u suffisamment régulière, la formule de Green permet d'écrire

$$C_m u(x)=-\int_{|y|=\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right)u(y)-\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\frac{\partial}{\partial\nu}u(y)\right]dS_y$$
$$-\int_{|y|<\lambda}\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\Delta u(y)\,dy,$$

où S_y est la mesure sur $|y|=\lambda$.

On intègre de chaque côté par rapport à $\lambda\in[1/2, 1]$ et on remplace Δ par $A-B$, on obtient :

$$\frac{1}{2}C_m u(x)=-\int_{1/2<|y|<1}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right)u(y)-\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\frac{\partial}{\partial\nu}u(y)\right]dy$$
$$-\int_{1/2}^{1}\left(\int_{|y|<\lambda}\frac{1}{|x-y|^{m-2}}A\,u(y)\,dy\right)d\lambda$$
$$+\int_{1/2}^{1}\left(\int_{|y|<\lambda}\frac{1}{|x-y|^{m-2}}B\,u(y)\,dy\right)d\lambda=-J_1-J_2+J_3.$$

Avec $C_m=2(m-2)(\Pi)^{m/2}/\Gamma(m/2)$ et $\partial/\partial\nu$ est la dérivée dans la direction de la normale extérieur de la sphère $|y|=\lambda$.

Cette dernière expression est parfaitement définie pour $u\in H^2$. Il suffit d'appliquer le lemme de Schur.

LEMME DE SCHUR. — *Soit* $f(x)=\int K(x, y)g(y)\,dy$.

Si

$$\sup_x\int|K(x, y)|\,dy\leq M \qquad \textit{et} \qquad \sup_y\int|K(x, y)|\,dx\leq N$$

alors

$$\|f\|_{L^2} \leqq \sqrt{MN}\, \|g\|_{L^2}.$$

Ce lemme sera constamment appliqué pour démontrer les estimations (5) et (6).

Contrôle de J_1. — On prend $R < 1/10$ de sorte que pour $|y| < [1/2, 1]\, |x| < |y|$. On développe $1/|x-y|^{m-2}$ et $\partial/\partial\nu(1/|x-y|^{m-2})$ en polynômes harmoniques. On obtient des expressions du type

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{1/2<|y|<1} \frac{1}{|y|^{n+m-2}} \Gamma_n^y(x)\, v(y)\, dy.$$

Chaque terme est un polynôme harmonique et v est soit u, soit $\partial u/\partial\nu$. Il suffit de voir que pour $n+(m/2) \geqq \alpha+2$, le reste de la série vérifie (5) et (6). Faisons, par exemple, la preuve avec $v = \partial u/\partial \nu$. [Dans l'autre cas $\Gamma_n^y(x)$ est homogène de degré $n-1$.] On a

$$\int_{|x|<R} \left(\int_{1/2<|y|<1} \frac{1}{|y|^{n+m-2}} \Gamma_n^y(x)\, v(y)\, dy \right)^2 dx$$
$$\leqq C \int_{|x|<R} |x|^{2n_2\, 2n+2m}\, dx \int |v(y)|^2\, dy \leqq C \frac{R^{2n+m}}{2n+m} 2^{2n+m} \|v\|_{L^2}^2.$$

La somme pour $n+(m/2) \geqq \alpha+2$ est majorée par

$$C R^{2(\alpha+2)} \|v\|_{L^2}^2 \frac{1}{1-R^2L^2}.$$

Ce qui vérifie (5) car $R<1/10$. La majoration (6) s'obtient de manière identique.

Contrôle de J_2. — On écrit

$$J_2 = \int_2^3 \int_{1/2}^1 \left(\int_{\substack{|y|<\lambda \\ |y|<\beta|x|}} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} A\, u(y)\, dy \right) d\lambda\, d\beta$$
$$+ \int_2^3 \int_{1/2}^1 \left(\int_{\substack{|y|<\lambda \\ |y|>\beta|x|}} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} A\, u(y)\, dy \right) d\lambda\, d\beta = I_1(x) + I_2(x).$$

On verra plus tard l'intérêt de l'intégration par rapport à β.

Contrôle de I_1. — On a

$$|I_1(x)| \leqq \int_{\substack{|y|<1 \\ |y|<3|x|}} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} |A\, u(y)|\, dy.$$

Donc

$$\int_{|x|<R} |I_1(x)|^2\,dx \leqq \int\left(\int K(x, y)\,v(y)\,dy\right)^2 dx$$

avec

$$K(x, y) = 1_{|x|<R}\,1_{|y|<3R}\frac{1}{|x-y|^{m-2}} \qquad \text{et} \qquad v(y) = 1_{|y|<3R}\,|A\,u(y)|.$$

On vérifie que $\sup_x \int |K(x, y)|\,dy \leqq CR^2$ et que $\sup_y \int |K(x, y)|\,dx \leqq CR^2$.

On obtient en appliquant le lemme de Schur, (1), (3), (4) que $\int_{|x|<R} |I_1(x)|^2\,dx \leqq CR^{2\alpha+4}$ ce qui donne (5).

Contrôle de $\partial I_1/\partial x_i$. — On a

$$\frac{\partial I_1}{\partial x_i} = \int_2^3 \int_{1/2}^1 \int_{|y|\leqq\beta|x|} (m-2)\frac{y_i - x_i}{|x-y|^m} A\,u(y)\,dy\,d\lambda\,d\beta$$
$$+ \int_2^3 \int_{1/2}^1 \beta\frac{x_i}{|x|} \int_{|y|=\beta|x|} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} A\,u(y)\,dS\,y\,d\lambda\,d\beta = I_1' + I_1''.$$

I_1'' n'a pas de sens écrit ainsi mais un calcul élémentaire montre que (pour $|x| < R < 1/10$)

$$I_1''(x) = \frac{x_i}{|x|^3} \int_{1/2}^1 \int_{2|x|<|y|<3\,x|} \frac{|y|}{|x-y|^{m-2}} A\,u(y)\,dy\,d\lambda.$$

Le terme I_1' se traite avec le lemme de Schur comme le terme I_1 et on a

$$\int_{|x|<R} |I_1'(x)|^2\,dx \leqq CR^{2\alpha+2}.$$

Ce qui donne (6). Et on a

$$\int_{|x|<R} |I_1''(x)|^2\,dx \leqq C\int\left(\int K(x, y)\,v(y)\,dy\right)^2 dx$$

avec

$$K(x, y) = \frac{1}{|x|}\,\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\,1_{|x|<R}\,1_{2|x|<|y|<3|x|} \qquad \text{et} \qquad v(y) = |A\,u(y)|\,1_{|y|<3R}.$$

En appliquant le lemme de Schur, le fait que $|x| \sim |y| \sim |x-y|$, et les hypothèses (1), (3), (4), on prouve que $I_1''(x)$ vérifie (6).

Contrôle de I_2. — Quand $|y|>\beta|x|>2|x|$, on peut appliquer (7), on a

$$\mathrm{I}_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{I}_2^n(x)$$

avec

$$\mathrm{I}_2^n=\int_2^3\int_{1/2}^1\left(\int_{\substack{|y|<\lambda\\|y|>\beta|x|}}\frac{\Gamma_n^y(x)}{|y|^{n+m-2}}\mathrm{A}\,u(y)\,dy\,d\lambda\,d\beta.\right.$$

Pour $n+(m/2)<\alpha+2$, on ajoute à chaque terme I_2^n le terme

$$\tilde{\mathrm{I}}_2^n=\int_2^3\int_{1/2}^1\int_{|y|<\beta|x|}\frac{\Gamma_n^y(x)}{|y|^{n+m-2}}\mathrm{A}\,u(y)\,dy\,d\beta.$$

Le terme ainsi obtenu est un polynôme harmonique. Il suffit de voir que $\tilde{\mathrm{I}}_2^n(x)$ vérifie (5) et (6).

Soit $\varepsilon>0$, on a

$$\begin{aligned}\int_{|x|<\mathrm{R}}|\tilde{\mathrm{I}}_2^n(x)|^2\,dx &\leqq \mathrm{CR}^{2n}\int_{|x|<\mathrm{R}}\left(\int_{|y|<3|x|}\frac{|\mathrm{A}\,u(y)|}{|y|^{n+m-2}}\right)^2dx\\
&\leqq \mathrm{CR}^{2n}\int_{|x|<\mathrm{R}}\left(\int_{|y|<3\mathrm{R}}\frac{1}{|y|^{m-\varepsilon}}dy\right)\left(\int_{|y|<3\mathrm{R}}\frac{|\mathrm{A}\,u(y)|^2}{|y|^{2n+m-4+\varepsilon}}dy\right)dx\\
&\leqq \mathrm{CR}^{2n+\varepsilon+m}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{3\mathrm{R}/2^{k+1}<|y|\leqq 3\mathrm{R}/2^k}\frac{|\mathrm{A}\,u(y)|^2}{|y|^{2n+m-4+\varepsilon}}dy\\
&\leqq \mathrm{CR}^{2\alpha+4}\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(2n+m-4+\varepsilon-2\alpha)}\\
&\leqq \mathrm{CR}^{2\alpha+4}.\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (1), (3) et (4), on peut choisir ε pour que $n+(m/2)<\alpha+2\Rightarrow 2n+m-4+\varepsilon-2\alpha<0$.

On a donc prouvé (5).

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\mathrm{I}}_2^n(x)}{\partial x_i}=\int_2^3\int_{1/2}\int_{|y|<\beta|x|}\frac{\partial\Gamma_n^y(x)/\partial x_i}{|y|^{n+m-2}}\mathrm{A}\,u(y)\,dy\,d\lambda\,d\beta&\\
+\int_{1/2}^1\frac{x_i}{|x|^3}\int_{2|x|<|y|<3|x|}\frac{\Gamma_n^y(x)}{|y|^{n+m-3}}\mathrm{A}\,u(y)\,dy\,d\lambda.&\end{aligned}$$

Le premier terme se traite comme $\tilde{\mathrm{I}}_2^n(x)$ [mise à part que $\partial\Gamma_n^y(x)/\partial x_i$ est homogène de degré $n-1$]. La norme L^2 au carré, du deuxième terme, sur $|x|<\mathrm{R}$ est majorée par

$$C\int\left(\int K(x, y)\, v(y)\, dy\right)^2 dx \text{ où}$$

$$K(x, y)=1_{2|x|<|y|<3|x|}\, 1_{|x|<R}\, \frac{1}{|y|^{m-1}}$$

$$v(y)=1_{|y|<3R}\, |A\, u(y)|.$$

Le lemme de Schur, les hypothèses (1), (3), (4) permettent de démontrer (6).

Pour $n+(m/2)\geqq\alpha+2$, on a, en appliquant (8)

$$\int_{|x|<R} |I_2^n(x)|^2\, dx \leqq C\, n^{2(m-3)} \int_{|x|<R} |x|^{2n}\left(\int_{2|x|<|y|<1} \frac{|A\, u(y)|}{|y|^{n+m-2}}\, dy\right)^2 dx$$

$$\leqq C\, n^{2(m-3)} \int_{|x|<R} |x|^{2n}\left(\int_{2|x|<|y|<1} \frac{1}{|y|^{m-\delta}}\, dy\right)+\left(\int_{2|x|<|y|<1} \frac{|A\, u(y)|^2}{|y|^{2n+m-4}}\, dy\right) dx.$$

En utilisant (1), (3), (4), on prouve que

$$\int_{2|x|<|y|<1} \frac{|A\, u(y)|^2}{|y|^{2n+m-4+\delta}}\, dy$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{k+1}|x|<|y|\leqq 2^{k+2}|x|} \frac{|A\, u(y)|^2}{(2^{k+1}|x|)^{2n+m-4+\delta}}\, dy$$

$$\leqq \frac{C}{2^{2n}}\, |x|^{2\alpha-2n-m+4-\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k(2n+m-2\alpha-4+\delta)}}.$$

La série converge et est majorée indépendamment de n car $n+(m/2)\geqq\alpha+2$. On prouve donc que

$$\int_{|x|<R} |I_2^n(x)|^2\, dx \leqq C\, \frac{n^{2(m-3)}}{2^{2n}}\, R^{2\alpha+4-\delta}.$$

Ce qui donne (5) après sommation par rapport à n. La majoration de $\partial I_2^n(x)/\partial x$ s'obtient comme celle de $\partial \tilde{I}_2^n(x)/\partial x$.

Contrôle de J_3. — On a $B=\sum_{i,\, j=1}^{m} \partial_{x_i} a_{ij}\, \partial_{x_j}$ avec $a_{ij}(0)=0$ et donc $|a_{ij}(x)|\leqq C|x|$.

On va traiter un terme générique $\partial_{x_i} a(x)\, \partial_{x_j}$ avec $a(0)=0$ et

$$|a(x)|\leqq C|x|. \tag{9}$$

On a, en faisant une intégration par partie

$$\int_{1/2}^{1}\left(\int_{|y|<\lambda}\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\partial_{y_i}a(y)\,\partial_{y_j}u(y)\,dy\,d\lambda\right)$$

$$=-\int_{2}^{3}\int_{1/2}^{1}\int_{\substack{|y|<\lambda\\|y|<\beta|x|}}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right)a(y)\,\partial_{y_j}u(y)\,dy\,d\lambda\,d\beta$$

$$-\int_{2}^{3}\int_{1/2}^{1}\left(\int_{\substack{|y|<\lambda\\|y|>\beta|x|}}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right)a(y)\,\partial_{y_j}u(y)\,dy\,d\lambda\,d\beta\right.$$

$$+\int_{1/2<|y|<1}\frac{1}{|x-y|^{m-2}}a(y)\,\partial_{y_j}u(y)\,w_i=-\mathrm{K}_1-\mathrm{K}_2+\mathrm{K}_3$$

où w_i est une m-forme différentielle. Elle ne dépend pas de x.

Contrôle de K_1. — On a

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right)=\frac{x_i-y_i}{|x-y|^m}$$

ce qui est une fonction intégrable

La majoration (5) s'obtient, en utilisant (9), comme celle sur I_1.

Contrôle de $\partial\mathrm{K}_1/\partial x_\nu$. — Ce terme n'est défini que dans les distributions, mais on montre, en reprenant la formule de [13] que pour $|x|<1/5$, $\mathrm{M}\gg 1$, on a presque partout

$$\frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_\nu}=\int_{2}^{3}\int_{1/2}^{1}\int_{\substack{|y|>\beta|x|\\ \mathrm{M}>|x-y|}}g(x,y)\,a(x)\partial_{x_j}u(x)\,dy\,d\lambda\,d\beta$$

$$+\int_{2}^{3}\int_{1/2}^{1}\int_{|y|<\beta|x|}g(x,y)\,[a(y)-a(x)]\,\partial_{y_j}u(y)\,dy\,d\lambda\,d\beta$$

$$+\int_{2}^{3}\int_{1/2}^{1}\int_{|y|<\beta|x|}g(x,y)\,a(x)\,[\partial_{y_j}u(y)-\partial_{x_j}u(x)]\,dy\,d\lambda\,d\beta$$

$$+\int_{2}^{1}\frac{x_\nu}{|x|^3}\int_{2|x|<|y|<3|x|}|y|\,(m-2)\frac{(x_i-y_i)}{|x-y|^m}a(y)\,\partial_{y_j}u(y)\,dy\,d\lambda$$

$$=\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2+\mathrm{L}_3+\mathrm{L}_4,$$

où

$$g(x,y)=(m-2)\left(\frac{\delta_{ij}}{|x-y|^m}-\frac{m\,(x_i-y_i)\,(x_\nu-y_\nu)}{|x-y|^{m-2}}\right).$$

δ_{ij} est le symbole de Krönecker; on remarque que $\displaystyle\int_{\mathrm{M}>|x-y|>\varepsilon}g(x,y)\,dy=0.$

Contrôle de L_1. — On a vu dans [13] qu'on contrôle $\int_{\substack{|y|>\beta|x| \\ M>|x-y|}} g(x, y)\,dy$ par $\operatorname{Log}|x|$ donc, pour tout $\delta>0$, on a presque partout

$$|L_1| \leqq C_\delta |r|^{-\delta+1} |\partial x_j u(x)|$$

ceci implique (6).

Contrôle de L_2. — On remarque que $g(x, y)(a(x)-a(y))$ est une fonction intégrable par rapport à x (ou y), car $|a(x)-a(y)| \leqq C|x-y|$. On peut donc appliquer le lemme de Schur et ce terme se traite comme I_1. La majoration (6) en découle.

Contrôle de L_3. — On a

$$|a(x)| \leqq C|x| \leqq CR$$

$$|g(x, y)| \leqq \frac{C}{|x-y|^m}.$$

On note $\partial_{x_j} u(x) = v(x)$.

On a, presque partout, pour $|x| \leqq R$

$$|L_3| \leqq CR \int_{|y|<3|x|} \frac{|v(y)-v(x)|}{|x-y|^m}\,dy.$$

L'idée pour contrôler L_3 est d'utiliser d'une part (4) et, d'autre part, la propriété suivante

$$\int\left(\int \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{m+2s}}\,dy\right)dx < +\infty$$

si $v \in H^s$ pour $0<s<1$.

Soit p et q tels que $(1/p)+(1/q)=1$, $p>1$ sera choisi plus loin.

On a

$$(11) \quad \int_{|y|<3|x|} \frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^m}\,dy \leqq \left(\int_{|y|<3|x|} \frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{m+\varepsilon q}}\,dy\right)^{1/q} \left(\int_{|y|<3|x|} \frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{m-\varepsilon q}}\,dy\right)^{1/q}$$

où ε sera fixé plus loin.

On a

$$(12)\quad \int_{|y|<3|x|} \frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{m+\varepsilon q}}\,dy \leqq \left(\frac{|v(x)-v(x)|^2}{|x-y|^{m+2\varepsilon q+\varepsilon}}\,dy\right)^{1/2}$$
$$\times\left(\int_{|y|<\beta|x|}\frac{1}{|x-y|^{m-\varepsilon}}\,dy\right)^{1/2} \leqq C\left(\int \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{m+2\varepsilon q+\varepsilon}}\,dy\right)^{1/2}.$$

En utilisant (10), (11), (12) et en supposant que $2\varepsilon q+\varepsilon<2$, on a, en appliquant l'inégalité d'Hölder

$$\int_{|x|<R}\left(\int_{|y|\leqq 3|x|}\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^m}\,dy\right)^2 dy\Big)^2\,dx$$
$$\leqq C\left(\int_{|x|<R}\left(\int_{|y|<3|x|}\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^{m-\varepsilon p}}\,dy\right)^2 dx\right)^{1/p}$$
$$\leqq C\left[\left(\int_{|x|<R}\left(\int_{|y|<3|x|}\frac{|v(x)|}{|x-y|^{m-\varepsilon p}}\,dy\right)^2\right.\right.$$
$$\left.+\left(\int_{|x|<R}\left(\int_{|y|<3|x|}\frac{|v(y)|}{|x-y|^{m-\varepsilon p}}\,dy\right)^2 dx\right)^{1/2}\right]^{2/p} \leqq CR^{(2\alpha/p)-2\varepsilon}.$$

Pour cette dernière inégalité, on a appliqué le lemme de Schur et l'estimation (4). On pose $p=1/(1-\eta)$ $1>\eta>0$. Pour avoir (6), il suffit de prendre $\eta=\delta/4\alpha$ (pour $\alpha=0$, on prend $\eta=1/2$) et $\varepsilon=\inf(\delta/4\alpha,\ \delta/4)$, on a alors

$$2\varepsilon q+\varepsilon<2 \qquad \text{et} \qquad \eta\alpha+\varepsilon<\delta.$$

Contrôle de L_4. — On a

$$\int_{|x|<R}|L_4|^2\,dx \leqq C\int\left(\int K(x,y)\,v(y)\,dy\right)^2 dx$$

avec :

$$K(x,y)=1_{|x|<R}\,1_{2|x|<|y|<3|x|}\frac{1}{|x-y|^{m-1}} \qquad \text{et} \qquad v(y)=\partial_{y_j}u(y)\,1_{|y|<3R}.$$

En appliquant le lemme de Schur, et l'estimation (4), on obtient la majoration (6).

Contrôle de K_2. — La méthode est identique à celle utilisée pour le contrôle de I_2. Il suffit de remarquer que

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right)$$

et de développer ce dernier terme en série de polynômes harmoniques.

Contrôle de K_3. — Ce terme se traite comme J_1.

Ce qui achève la preuve du lemme 3.

3. Preuve du théorème sur la dimension de Hausdorff

Nous utiliserons un certain nombre de notions se trouvant dans Caffarelli-Friedman ([4], [5]). Pour la clarté de la preuve, nous les rappelerons ici.

Soit P_n un polynôme harmonique homogène de degré n, dépendant de m variables. En un point x_0, on définit des polynômes Q_k, homogènes de degré k, par le développement de Taylor de P_n au point x_0, de sorte que

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} Q_k(x-x_0).$$

On définit

$$\alpha_m(P_m)=\inf_{|x_0|=1}\ \max_{0\leqq k\leqq n-1}\|Q_k\|_{L^2(B_1)}$$

où B_1 est la boule de centre 0 et de rayon 1.

On démontre (*voir* la preuve du lemme 5.1 [5]) que si $\alpha_m(P_n)=0$ alors dans un système de coordonnées, obtenu par une rotation, P_n ne dépend au plus que de $m-1$ variables.

On peut alors définir $\alpha_{m-1}(P_n)$ dans ces nouvelles coordonnées. Et, par récurrence, on définit $\alpha_j(P_n)$ pour $m\geqq j\geqq 3$. Dans le cas, où un des α_j est non nul, on peut définir des α_μ pour $\mu<j$, *voir* Caffarelli-Friedman [5], remarque 2.1, mais nous ne les utiliserons pas ici.

Notons Λ^{x_0} le changement de variables qui permet de transformer l'opérateur $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x_0)\partial_i\partial_j$ en $\Delta=\sum_{j=1}^{m}\partial_j^2$. En tout point x_0, le théorème 1 permet d'écrire

$$u(x)=P_n^{x_0}(\Lambda^{x_0}(x-x_0))+\Gamma_n(x-x_0)$$

avec Γ_n vérifiant les estimations

$$\left(\int_{|y|\leqq R}|\Gamma_n(y)|^2\,dy\right)^{1/2}\leqq CR^{(m/2)+n+1-\delta} \tag{13}$$

$$\left(\int_{|y|\leqq R}|\nabla\Gamma_n(y)|^2\,dy\right)^{1/2}\leqq CR^{(m/2)+n-\delta}. \tag{14}$$

On définit les ensembles suivants

pour $n \geqq 2,\ k \geqq 3,\ j \geqq 1$

$$A_{n,j,k} = \left\{ x \in K / u(y) = P_n^x(\Lambda^x(y-x)) + \Gamma_n(y-x) \text{ avec } \Gamma_n \text{ vérifiant (13) et (14)}, \right.$$

$$\left. \alpha_\mu(P_n^x) = 0 \text{ pour } \mu > k \text{ et } \alpha_k(P_n^x) \geqq \frac{1}{j} \right\};$$

pour $n \geqq 2,\ j \geqq 1$

$$A_{n,j,2} = \left\{ x \in K / u(y) = P_n^x(\Lambda^x(y-x)) + \Gamma_n(y-x) \text{ avec } \Gamma_n \text{ vérifiant (13) et (14)}, \right.$$

$$\left. \alpha_\mu(P_n^x) = 0 \text{ pour } \mu \geqq 3 \text{ et } \| P_n^x \|_{L^2(B_1)} \geqq \frac{1}{j} \right\};$$

pour $j \geqq 1$

$$A_{1,j,1} = \left\{ x \in K / u(y) = P_1^x(\Lambda^x(y-x)) + \Gamma_1(y-x) \text{ avec } \Gamma_1 \text{ vérifiant (13), (14)} \right.$$

$$\left. \text{et } \| P_1^x \|_{L^2(B_1)} \geqq \frac{1}{j} \right\}.$$

Il est clair que

$$\{ x \in K / u(x) = 0 \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m} A_{n,j,k}$$

et

$$\{ x \in K / u(x) = 0,\ \nabla u(x) = 0 \} = \bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=2}^{m} A_{n,j,k}.$$

(*Les* $A_{n,j,k}$ non définis sont vides.)

Nous allons étudier la géométrie des $A_{n,j,k}$ dans les trois cas suivants

1° $n=1$;

2° $k \geqq 3,\ n \geqq 2$;

3° $k=2,\ n \geqq 2$.

Nous noterons $d(x, \Pi)$ la distance de x à Π où Π est un espace affine.

1° $n=1$.

Lemme 4. — *Il existe* $\varepsilon > 0$, *pour tout* j, *il existe des constantes* C *et* C′ *tels que, pour tout* $x_0 \in A_{1,j,1}$, *il existe un espace affine* Π_{x_0} *de dimension* $m-1$ *tel que*

(15) $$C\,|x - x_0|^{1+\varepsilon} \geqq d(x, \Pi_{x_0})$$

pour $x \in A_{1,j,1}$ *et* $|x-x_0| \leqq C'$.

Preuve. — On peut supposer que $x_0=0$, $\Lambda^{x_0}=\mathrm{Id}$ et que $P_n(x)=\alpha x_1$, où $x=(x_1, \ldots, x_m)$. On a $|\alpha| \geqq c_m/j$ et $u(x)=P_n(x)+\Gamma_n(x)$ avec Γ_n vérifiant (13) et (14).

Soit $x \in A_{1,j,1}$ et $\lambda>1$ qui sera fixé plus loin.

On a $u(y)=\tilde{P}_1(y-x)+\tilde{\Gamma}_1(y-x)$ en appliquant le théorème 1.

On en déduit que

$$\int_{|x-y| \leqq |x_1|^\lambda} |u(y)|\,dy \leqq \left(\int_{|x-y| \leqq |x|^\lambda} |u(y)|^2\,dy\right)^{1/2} |x|^{\lambda m/2}$$
$$\leqq C|x|^{\lambda+\lambda m}.$$

D'autre part

$$\int_{|x-y| \leqq |x_1|^\lambda} |u(y)|\,dy \geqq \int_{|x-y| \leqq |x_1|^\lambda} |\alpha y_1|\,dy - \int_{|y| \leqq 2|x|} |\Gamma_1(y)|\,dy. \tag{17}$$

Si $|x_1| \ll 1$ et $|x-y| \leqq |x_1|^\lambda$ alors $|y_1|>|x_1|/2$ donc

$$\int_{|x-y| \leqq |x_1|^\lambda} |\alpha| \,.\, |y_1|\,dx \geqq C\alpha |x_1|^{\lambda m+1}.$$

En posant $\lambda=1+(\tilde{\delta}/(1+m))$ où $\tilde{\delta}=1-\delta$, et en appliquant (13), (16), (17), on déduit que

$$C|x|^{(1+m)\lambda} \geqq |\alpha| \,.\, |x_1|^{\lambda m+1},$$

c'est-à-dire avec $\varepsilon=\tilde{\delta}/m^2+2m+\delta m+1$, $C|x|^{1+\varepsilon} \geqq (1/j)^{1/\lambda m+1}|x_1|$.

Ce qui prouve (15) avec $\Pi=\{x_1=0\}$.

2° $k \geqq 3$, $n \geqq 2$.

Lemme 5. — *Soit* $n \geqq 2$, *il existe* $\varepsilon>0$, *pour tout* $j \geqq 1$ *et* $k \geqq 3$, *il existe des constantes* C *et* C' *tels que pour tout* $x_0 \in A_{n,j,k}$, *il existe un espace affine* Π_{x_0} *de dimension* $m-k$ *tel que :*

$$C|x-x_0|^{1+\varepsilon} \geqq d(x, \Pi_{x_0}) \tag{18}$$

pour $x \in A_{n,j,k}$ *et* $|x-x_0| \leqq C'$.

Preuve. — On peut supposer que $x_0=0$, $\Lambda^{x_0}=\mathrm{Id}$ et que $P_n(y)=P_n(y_1, \ldots, y_k)$ en faisant une rotation. On pose

$$y'=(y_1, \ldots, y_k)$$
$$y''=(y_{k+1}, \ldots, y_m)$$
$$\rho=|x'| \quad \text{avec} \quad x'=(x_1, \ldots, x_k)$$
$$R=|x|.$$

On suppose $\rho \neq 0$ (sinon le lemme est trivialement vérifié).

Le développement de Taylor de P_n au point x s'écrit

$$P_n(y) = P_n(y') = \sum_{\mu=0}^{n} Q_\mu(y'-x').$$

Posons $\bar{y}' = y'/\rho$ et $\bar{x}' = x'/\rho$.

Le développement de Taylor de $P_n(\bar{y}')$ au point $\bar{x}'$ s'écrit :

$$P_n(\bar{y}') = \sum_{\mu=0}^{n} \tilde{Q}_\mu(\bar{y}'-\bar{x}').$$

On en déduit que $Q_\mu = \rho^{n-\mu}\tilde{Q}_\mu$. La définition de α_{m-k} montre qu'il existe μ_0, $0 \leqq \mu_0 \leqq n-1$ tel que

$$\|\tilde{Q}_{\mu_0}\|_{L^2(B_1)} \geqq \alpha_{m-k}(P_n) \geqq \frac{1}{j}.$$

Soit $\lambda > 1$, qui sera fixé plus loin, on a, en notant

$$C_{\rho^\lambda}(x) = \left\{ (y', y'') \in \mathbb{R}^m \Big/ \begin{array}{l} |y'-x'| \leqq \rho^\lambda \\ |y''-x''| \leqq \rho^\lambda \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \|P_n\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(x))} &= \Big\| \sum_{\mu=0} Q_\mu(u) \Big\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(0))} \\ &\geqq C \max_\mu \|Q_\mu(u)\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(0))}. \end{aligned}$$

Cette inégalité vient du fait que les Q_μ sont harmoniques et que

$$\Big\| \sum_{\mu=0}^{n} Q_\mu \Big\|^2_{L^2(B)} = \sum_{\mu=0}^{n} \|Q_\mu\|^2_{L^2(B)}$$

où B est une boule entrée en 0 (*voir* Caffarelli-Friedman [4]).

On a donc

$$\begin{aligned} \|P_n\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(x))} &\geqq \rho^{n-\mu_0} \|\tilde{Q}_{\mu_0}\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(0))} \\ &\geqq \rho^{n-\mu_0}\rho^{\lambda m/2}\frac{\rho^{\lambda\mu_0}}{j}. \end{aligned}$$

D'où

(19) $$\|P_n\|_{L^2(C_{\rho^\lambda}(x))} \geqq \frac{1}{j}\rho^{1+\lambda((m/2)+n-1)}.$$

Ceci est obtenu, d'une part, par homogénéité de $\tilde{Q}_{\mu_0}$ et, d'autre part, en remarquant que c'est pour $\mu_0 = n-1$ que l'expression de droite est la plus petite.

D'autre part

$$u(y) = \tilde{P}_n(\Lambda^x(y-x)) + \tilde{\Gamma}_n(y-x)$$

où $\tilde{\Gamma}_n$ vérifie (13).

On a :

$$\begin{aligned} \| P^n \|_{L^2(C_\rho^\lambda(x))} &\leqq \| u \|_{L^2(C_R^\lambda(x))} + \| \Gamma_n \|_{L^2(B_{CR}(0))} \\ &\leqq CR^{\lambda n + (\lambda m/2)} + CR^{n+(m/2)+\tilde{\delta}} \qquad \text{avec} \quad \tilde{\delta} = 1-\delta. \end{aligned}$$

Donc

$$\| P_n \|_{L^2(C_\rho^\lambda(x))} \leqq CR^{n+(m/2)+\tilde{\delta}}. \tag{20}$$

En posant $\lambda = 1 + \tilde{\delta}/(n+(m/2))$.

De (19) et (20), on déduit (18).

3° $R=2$, $n \geqq 2$.

Lemme 6. — *Pour tout $n \geqq 2$, il existe $\varepsilon > 0$ et des constantes C, C' tels que pour tout $x_0 \in A_{n,j,2}$, il existe un espace affine Π_{x_0} de dimension $m-2$ tel que*

$$C|x-x_0|^{1+\varepsilon} \geqq d(x, \Pi_{x_0}) \tag{21}$$

pour $x \in A_{n,j,2}$ et $|x-x_0| \leqq C'$.

Preuve. — On suppose comme pour les lemmes précédents que $x_0 = 0$, $\Lambda^{x_0} = \mathrm{Id}$ et on suppose que $P_n(y)$ ne dépend que de (y_1, y_2); après une rotation, on peut donc écrire en coordonnées polaires (S, θ) :

$$P_n(y) = \alpha S^n \cos n\theta.$$

On a $|\nabla P_n(y)| \geqq C|\alpha| S^{n-1}$ avec $|\alpha| \geqq C/j$ car $\| P_n \|_{L^2(B_1)} \geqq 1/j$.

Posons $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $R = |x|$.

Soit $\lambda > 1$, on a

$$\| \nabla P_n \|_{L^2(C_\rho^\lambda(x))} \geqq \frac{c}{j} \rho^{(\lambda m/2)+n-1}. \tag{22}$$

D'autre part

$$\| \nabla P_n \|_{L^2(C_\rho^\lambda(x))} \leqq \| \nabla u \|_{L^2(B_{CR^\lambda}(x))} + \| \nabla \Gamma_n \|_{L^2(B_{CR^\lambda}(0))}$$

$$\| \nabla P_n \|_{L^2(C_\rho^\lambda(x))} \leqq CR^{(\lambda m/2)+\lambda(n-1)} + CR^{(m/2)+n-1+\tilde{\delta}}, \qquad \text{avec} \quad \tilde{\delta} = 1-\delta. \tag{23}$$

En posant $\lambda = 1 + (\tilde{\delta}/(m/2)+n-1)$, on déduit de (22) et (23) la formule (21).

Pour finir la preuve, on applique le résultat de Caffarelli-Friedman.

LEMME (Caffarelli-Friedman [5], lemme 3.3). — *Soit* ε, l_0, c_0 *des réels positifs et soit* T *un ensemble borné vérifiant la condition suivante :*

(24) *Pour tout cube* K *d'arête* l ($l \leqq l_0$), *l'ensemble* $T \cap K$ *est contenu dans un* $2_0 l^{1+\varepsilon}$ *voisinage d'un espace affine de dimension* R.

Alors pour tout $\delta > 0$, $\Lambda^{k+\delta}(T) = 0$.

Par $c_0 l^{1+\varepsilon}$ voisinage, on entend l'ensemble des points x dont la distance à l'espace affine est inférieur à $c_0 l^{1+\varepsilon}$. Il est clair que les lemmes 4, 5, 6 impliquent la condition (24) pour chaque $A_{n,j,k}$ et on en déduit que la dimension de Hausdorff de $A_{n,j,k}$ est au plus $m-k$. Le théorème 2 est donc une conséquence de ce lemme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC et M. S. BAOUENDI, *Uniqueness for the Characteristic Cauchy Problem and Strong Unique Continuation for Higher Order Partial Differential Inequalities* (*Amer. J. Math.*, vol. 102, 1980, p. 385-393).

[2] N. ARONSZAJN, *A Unique Continuation of Elliptic Partial Differential Equations or Inequalities of Second Order* (*J. Math. Pures Appl.*, vol. 36, 1957, p. 235-249).

[3] L. BERS, *Local Behavior of Solutions of General Linear Elliptic Equations* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 8, 1955, p. 473-496).

[4] L. A. CAFFARELLI et A. FRIEDMAN, *The Free Boundary in the Thomas-Fermi Atomic Model* (*J. Differential Equations*, vol. 32, 1979, p. 335-356).

[5] L. A. CAFFARELLI et A. FRIEDMAN, *Partial Regularity of Zero-Set of Solutions of Linear and Superlinear Elliptic Equations* (*J. Differential Equations*, vol. 60, 1985, p. 420-433).

[6] H. O. CORDES, *Über die bestimmtheit der lösungen elliptisher differentialgleichungen durch anfangsvorgaben* (*Nachr. Akad. Göttingen IIa Math. Phys.*, vol. K1, 1956, p. 239-258).

[7] N. GAROFALO et FANG HUA LIN, *Monotonicity Properties of Variational Integrals,* A_p *Weights and Unique Continuation* (*Indiana University Mathematics Journal*, vol. 35, 1986, p. 245-268).

[8] L. HÖRMANDER, *Uniqueness Theorems for Second Order Elliptic Differential Equations* (*Comm. in Partial Differential Equations*, vol. 8, 1983, p. 21-64).

[9] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Springer Verlag.

[10] D. JERISON et C. E. KENIG (Appendix by E. M. STEIN), *Unique Continuation and Absence of Positive Eigenvalues for Schrödinger Operators* (*Annals of Mathematics*, vol. 121, 1985, p. 463-494).

[11] F. JOHN, *The Fundamental Solution of Linear Elliptic Differential Equations with Analytic Coefficients* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 3, 1950, p. 273-304).

[12] C. MULLER, *On the Behavior of the Solution of the Differential Equation* $\Delta u = f(x, u)$ *in the Neighborhood of a Point* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 7, 1954, p. 505-515).

[13] L. ROBBIANO, *Sur les zéros de solutions d'inégalités différentiels elliptiques* (*Pub. I.R.M.A.*, Lille, vol. 4, n° 2, 1986 et *Comm. in Partial Differential Equations*, vol. 12, 1987, p. 903-919).

[14] N. ARONSZAJN, A. KRZYWICKI et J. SZARSKI, *An Unique Continuation Theorem for Exterior Differential Forms on Riemann Manifolds* (*Arkiv för Matematik*, vol. 4, 1963, p. 417-453).

[15] G. ALESSANDRINI et S. VESSELA, *Local Behavior of Solutions to Parabolic Equations* (*Publicazioni dell'istituto di Analisi globale e Applicazioni*, vol. 16, 1987).

(Manuscrit reçu en février 1987.)

L. ROBBIANO,
Université des Sciences et Techniques
de Lille-Flandres-Artois,
U.F.R. de Mathématiques
pures et appliquées,
59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex

DIMENSION DE HAUSDORFF ET CAPACITE DES POINTS SINGULIERS D'UNE SOLUTION D'UN OPERATEUR ELLIPTIQUE

par

Luc ROBBIANO et Jorge SALAZAR

Publié au Bulletin des Sciences Mathématiques, 114 (1990), 329-336.

Bull. Sc. math., 2e série,
114, 1990, p. 329-336.

DIMENSION DE HAUSDORFF ET CAPACITÉ DES POINTS SINGULIERS D'UNE SOLUTION D'UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE

PAR

LUC ROBBIANO et JORGE SALAZAR (*)

[Université des Sciences et Techniques
de Lille-Flandres-Artois]
[Université de Paris-Sud]

RÉSUMÉ. — Soit u une fonction de $H^1(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^N)$ non constante, solution de $|Lu| \leqslant C|\nabla u|$ presque partout sur $V(\bar{V} \subset \Omega)$ où L est un opérateur elliptique et C une constante positive. Le résultat principal de cet article est le suivant : l'ensemble $\{\nabla u = 0\}$ est de dimension de Hausdorff au plus égale à $N-2$ et de capacité newtonnienne nulle.

ABSTRACT. — Take $U \in H^1(\Omega)(\Omega \subset \mathbb{R}^N)$ be a solution of $|LU| \leqslant C|\nabla U|$ a.e. (here, L is an elliptic operator). Our main results states that the Hausdorff dimension of the set $\{\nabla U = 0\}$ is at most $N-2$ and it is a polar set.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 2)$. Considérons un opérateur elliptique

$$L = \sum\sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

(*) Texte présenté par P. MALLIAVIN, reçu janvier 1989.

Classification A.M.S. (MOS) : 35 J 20.

Mots-clés : opérateurs elliptiques, mesures de Hausdorff, capacités.

Luc ROBBIANO, Université des Sciences et Techniques de Lille-Flandres-Artois, U.F.R. de Mathématiques pures et appliquées, 59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex, France.

Jorge SALAZAR, Université de Paris-Sud, Bât. n° 425, Mathématiques, 91405 Orsay Cedex, France.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES — 0007-4497/90/03/329 08/$ 2.80

On suppose que les a_{ij} sont des fonctions lipschitziennes et la matrice $a_{ij}(x)$ est, en tout $x \in \Omega$, une matrice symétrique définie positive.

Soit V un ouvert relativement compact de Ω et soit $u \in H^1(\Omega)$ non constante. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|Lu| \leqslant C |\nabla u|$ presque partout sur V. Il est implicite dans cette hypothèse que Lu est mesurable, ceci implique que u est en fait une fonction de $H^2(V)$ (*voir* HÖRMANDER [7], théorème 17.2.7).

D'après [9], on peut donner un sens ponctuel à $u(x)$ et $\nabla u(x)$ sur V. Rappelons le résultat :

Pour tout $\delta > 0$, pour tout $x \in V$, il existe un réel a_x, une matrice symétrique Λ_x, un polynôme harmonique homogène $P_x \not\equiv 0$ de degré $n (n \geqslant 1)$, et une fonction $\Gamma_x \in H^1$ tels que :

$$
(1) \quad
\begin{aligned}
&\text{(i)} && u(y) = a_x + P_x(\Lambda_x(y-x)) + \Gamma_x(y-x)\\
&\text{(ii)} && \left(\int_{|y|<r} |\Gamma_x(y)|^2\, dy\right)^{1/2} \leqslant C r^{(N/2)+n+1-\delta}\\
&\text{(iii)} && \left(\int_{|y|<r} |\nabla \Gamma_x(y)|^2\, dy\right)^{1/2} \leqslant C r^{(N/2)+n-\delta}
\end{aligned}
$$

où C ne dépend que de L, V, n, δ et de la norme de u dans $H^2(\bar{V})$.

Nous avons, bien sûr, $u(x) = a_x$ et $\nabla u(x) = \Lambda_x \nabla_y P_x(0)$ presque partout sur V (théorème de différentiation de Lebesgue).

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant.

THÉORÈME. — *L'ensemble* $\{x \in V;\ \nabla u = 0\}$ *est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure de Hausdorff* $(N-2)$*-dimensionnel finie. Sa dimension de Hausdorff est donc inférieur ou égale à* $N-2$ *et de capacité newtonienne nulle.*

Remarques. — (*a*) Du résultat de [9], on déduit simplement que $\{u = c,\ \nabla u = 0\}$ est de dimension de Hausdorff au plus égale à $N-2$ quelque soit $c \in R$. Intuitivement, $\nabla u = 0$ contient plus d'équations que nécessaire. Les points génériques sont isolés. En effet, c'est aux points où u est très dégénérée que l'ensemble $\{\nabla u = 0\}$ est gros. Mais en ces points, u est comparable à un polynôme harmonique dépendant de deux variables. Ce sont les propriétés de ces polynômes qui expliquent le résultat.

(*b*) La conclusion (ii) du théorème est très importante pour des problèmes liés à la théorie du potentiel. Dans [10], on utilise ce résultat pour étendre les propriétés des lignes de Green (courbes intégrales du champ Grad G_x où G_x est la fonction de Green de pôle x) (*voir* [2]) au cadre des opérateurs elliptiques sous forme divergence.

(c) Les techniques utilisées ici s'appliquent aux solutions de $|Lu| \leqslant C(|u|+|\nabla u|)$ traitées dans [9] ce qui nous donne les mêmes renseignements supplémentaires concernant la mesure de Hausdorff et la capacité.

Pour les lecteurs qui ne sont pas familiarisé avec les notions de mesures de Hausdorff et de capacité nous renvoyons à [1], [5] et [6].

Preuve.

Notations. — Soit P un polynôme harmonique homogène de degré n défini sur $\mathbb{R}^N$. On pose $\Pi(P)=\{x\in\mathbb{R}^N;\ x.\nabla P(y)=0$ pour tout $y\in\mathbb{R}^N\}$.

$\Pi(P)$ est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$. Notons $i(P)=\dim\Pi(P)$. P ne dépend que de $N-i(P)$ variables indépendantes. P est en fait un polynôme sur $\Pi(P)^\perp$.

On note :

$$\alpha(P)=\inf_{|x|=1,\ x\in\Pi(P)^\perp}\left(\int_{|y|<1}|x.\nabla P(y)|^2\,dy\right)^{1/2}.$$

Remarques. — (a) $\alpha(P)=0 \Leftrightarrow i(P)=N \Leftrightarrow n=0$.

Donc, comme nous ne considérons que des polynômes harmoniques de degré supérieur ou égale à un, vu la décomposition (1) de u, on aura $\alpha(P)>0$.

(b) $i(P)=N-1 \Leftrightarrow n=1$.

En effet, si $i(P)=N-1$, P ne dépend que d'une variable, comme P est harmonique $n=1$.

Lemme 1. — *Soit P un polynôme harmonique homogène de degré* $n\geqslant 2$. *Alors,*

$$\int_{|y-x|<r}|(y-x).\nabla P(y)|^2\,dy \geqslant (n-1)^2\rho^2 r^{N+2(n-1)}(\alpha(P))^2$$

où $\rho=\operatorname{dist}(x,\Pi(P))$.

Démonstration. — Posons $Q_1(y)=x.\nabla P\{y\}$.

Q_1 est un polynôme harmonique homogène de degré $n-1$. Soit $Q_2(y)=P(x+y)-Q_1(y)$. En développant $P(x+y)$ par la formule de Taylor, on remarque que Q_2 est la somme de polynômes harmoniques homogènes de degré différent de $n-1$. Donc Q_1 et Q_2 sont orthogonaux dans $L^2(B_r)$ où $B_r=\{x\in R^N;\ |x|<r\}$.

D'autre part, par l'homogénéité de Q_1,

$$(y-x).\nabla P(y)=(n-1)\,Q(y-x)+(y-x).\nabla Q_2(y-x).$$

De plus, par le même argument que ci-dessus, $Q_1(y)$, $y.\nabla Q_2(y)$ sont orthogonaux dans $L^2(B_r)$. Donc

$$\begin{aligned}\int_{|y-x|<r}|(y-x).\nabla P(y)|^2\,dy &\geqslant (n-1)^2\int_{|y|<r}|Q_1(y)|^2\,dy\\ &=(n-1)^2\,r^{N+2(n-1)}\int_{|y|<1}|Q_1(y)|^2\,dy\\ &=(n-1)^2\,r^{N+2(n-1)}\,\rho^2\int_{|y|<1}\left|\frac{x''}{\rho}.\nabla P(y)\right|^2 dy\end{aligned}$$

où on a posé $x=x'+x''$ avec $x'\in\Pi(P)$ et $x''\in\Pi(P)^{\perp}$ et $\rho=|x''|$.

La dernière intégrale est supérieure ou égale à $(\alpha(P))^2$, ce qui achève la preuve du lemme 1.

En s'inspirant des idées de CAFFARELLI et FRIEDMAN ([3], [4]) et de ([8] et [9]). Posons

$$A_{n,i,j}=\left\{x\in V;\ \text{degré de } P_x=n;\ i(\Pi_x)=i;\ \alpha(P_x)\geqslant\frac{1}{j}\right\}$$

où $\Pi_x=\Pi(P_x)$ il est clair que

$$\{x\in V;\ \nabla u(x)=0\}=\cup_{n\geqslant 2}\cup_{i=0}^{N-2}\cup_{j\geqslant 1}A_{n,i,j}.$$

LEMME 2. — *Pour n, i, j fixés, il existe des constantes positives $\varepsilon\,(\varepsilon(n))$ et $C_1\,(C_1(n, i, j))$ telles que pour tout $x_0\in A_{n,i,j}$, il existe un espace affine Π_{x_0} de dimension i tels que pour tout $x\in A_{n,i,j}$,*

$$C_1\,|x-x_0|^{1+\varepsilon}\geqslant \operatorname{dist}(x,\Pi_{x_0}).$$

Démonstration. — On pose $x_0 = 0$. On va appliquer la formule (1) de décomposition de u en 0 et en x. Avec des notations évidentes,

$$u(y) = u(0) + P(\Lambda y) + \Gamma(y)$$
$$u(y) = u(x) + \tilde{P}(\tilde{\Lambda}(y-x)) + \tilde{\Gamma}(y-x).$$

Donc

$$\Lambda(y-x).\nabla P(\Lambda y) = n\tilde{P}(\tilde{\Lambda}(y-x)) + (y-x)\nabla_y\tilde{\Gamma}(y-x) - (y-x)\nabla_y\Gamma(y).$$

Soit $\lambda > 1$ (qu'on fixera plus bas). On prend la norme L^2 sur $|y-x| < \rho^\lambda$ avec $\rho = \text{dist}(x, \Pi_0)$.

On utilise le lemme 1 pour minorer à gauche par $(n-1)(1/j)\rho^{1+\lambda((N/2)+n-1)}$.

A droite, on pose $|x| = r$, $(\rho \leqslant r)$ et on majore,

$$\left[n\int_{|y-x|<\rho^\lambda} |\tilde{P}(\tilde{\Lambda}(y-x))|^2\, dy\right]^{1/2} \leqslant C r^{\lambda((N/2)+n)},$$

$$\left[\int_{|y-x|<\rho^\lambda} |(y-x).\nabla_y\tilde{\Gamma}(y-x)|^2 . dy\right]^{1/2} \leqslant C r^{\lambda((N/2)+n+1-\delta)}$$

$$\left[\int_{|y-x|<\rho^\lambda} |(y-x).\nabla_y\Gamma(y)|^2\right]^{1/2}$$

$$\leqslant r^\lambda\left[\int_{|y|<2r} |\nabla_y\Gamma(y)|^2\, dy\right]^{1/2} \leqslant C r^{\lambda+(N/2)+n-\delta}$$

car $\lambda > 1 \Rightarrow \{y;\ |y-x| < \rho^\lambda\} \subset \{y;\ |y| < 2r\}$. Donc,

$$\rho^{1+\lambda((N/2)+n-1)} \leqslant C(r^{\lambda((N/2)+n)} + r^{\lambda+(N/2)+n-\delta})$$

posons

$$\lambda = 1 + \frac{1-\delta}{(N/2)+n-1} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \frac{1-\delta}{((N/2)+n-1)((N/2)+n+1-\delta)}$$

ceci donne

$$\rho \leqslant C_1 r^{1+\varepsilon}.$$

Démonstration du théorème. — Fixons $A_{n,i,j}$ avec $n \geqslant 2$, $j \geqslant 1$ et $i = N-2$. Si $i < N-2$, la mesure de Hausdorff $(N-2)$-dimensionnel est nulle et, par conséquent, la capacité est nulle. Néanmoins, on peut faire le raisonnement qui suit avec $0 \leqslant i \leqslant N-2$ et trouver que $A_{n,0,j}$ est composé de points isolés; ce qui est le cas de la dimension 2. Supposons donc $N \geqslant 3$. Nous allons compter le nombre de boules de rayon r nécessaire pour recouvrir $A_{n,i,j}$. Pour cela, nous allons décomposer cet ensemble en un nombre fini de sous-ensembles regroupés suivant la direction des 2-plans associés. Plus précisément :

Considérons l'ensemble $\mathscr{P}$ de tous les sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{R}^N$.

Pour φ_1 et $\varphi_2 \in \mathscr{P}$, on pose :

$$\operatorname{dist}(\varphi_1, \varphi_2) = \| \mathrm{P}_{\varphi_1} - \mathrm{P}_{\varphi_2} \| = \sup_{|x|=1} | P_{\varphi_1}(x) - P_{\varphi_2}(x) |$$

où P_φ est la projection orthogonale sur φ. C'est une distance sur $\mathscr{P}$ adaptée à la topologie naturelle (de grassmaniennes). $\mathscr{P}$ est un espace compact.

Soit $\{\mathscr{P}_k\}_{k=1,\ldots,J}$ un recouvrement fini de $\mathscr{P}$ par des boules de rayon θ (à fixer plus bas) et de centre $\varphi_1, \ldots, \varphi_J$.

Posons

$$A_k = \{x \in A_{n,i,j};\ \Pi_x^\perp \in \mathscr{P}_k\}.$$

Nous allons montrer que A_k est de mesure de Hausdorff $(N-2)$-dimensionnelle finie.

Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^N$, soit $r > 0$, notons

$$B_r = (\varphi_k \cap r\,B) \times (\varphi_k^\perp \cap r\,B)$$

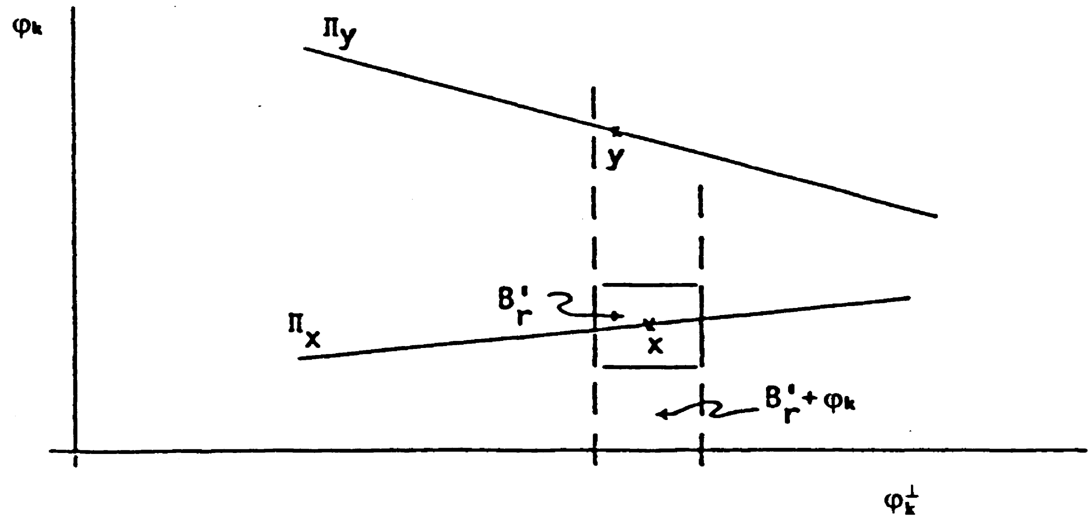
où $r\,B = \{rx;\ x \in B\}$.

Lemme 3. — *Supposons que* $\theta < 1/3$ *et fixons* $r_0 > 0$ *assez petit* (*nous préciserons sa taille plus bas*).

Alors, quel que soit $x \in A_k$, *quel que soit* $r \in]0, r_0[$,

$$B'_{r_0} \cap A_k \cap (B'_r + \varphi_k) \subset B'_r$$

où B'_{r_0} est une translatée de B_{r_0} contenant x et $B'_r = x + B_r$. Le schéma est le suivant.



Démonstration. — Soit $y \in A_k \setminus B'_r$ et $y \in B'_r + \varphi_k$ posons $y = x + y_1 + y_2$ où $y_1 \in \varphi_k$ et $y_2 \in \varphi_k^\perp$ donc, $|y_1| \geqslant r$ et $|y_2| < r$.

D'après le lemme 2,

$$\begin{aligned} C_1 |y - x|^{1+\varepsilon} &\geqslant \operatorname{dist}(y, \Pi_x) = |P_{\Pi_x^\perp}(x - y)| \\ &\geqslant |P_{\varphi_k}(y_1 + y_2)| - |P_{\Pi_x^\perp}(y_1 + y_2) - P_{\varphi_k}(y_1 + y_2)| \\ &\geqslant |y_1| - \operatorname{dist}(\Pi_x^\perp, \varphi_k) \times |x - y| \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2} - \theta\right) |x - y| \quad \text{car } |x - y| \leqslant 2 |y_1|. \end{aligned}$$

Donc $|x - y|^\varepsilon \geqslant ((1 - 2\theta)/2 c_1)$.

Il suffit de prendre $r_0 < (1/2)((1 - 2\theta)/2 C_1)^{1/\varepsilon}$.

LEMME 4. — *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $r > 0$, le nombre de boules de rayon r nécessaire pour recouvrir A_k soit inférieur à $C r^{-(N-2)}$.*

Démonstration. — Recouvrons A_k par un nombre fini de boules de rayon r_0 (lemme 3).

Notons B_0 une telle boule, on peut supposer que 0 est le centre de B_0. Recouvrons $\varphi_k^\perp \cap B_0$ par $C r^{-(N-2)}$ boules de rayon r. Soit B une telle boule. D'après le lemme 3, si $(B + \varphi_k) \cap A_k \cap B_0$ n'est pas vide, cet ensemble est contenu dans $x + B_{2r}$.

Quitte à grossir la constante C, le nombre de boules de rayon r nécessaire pour recouvrir A_k est inférieur à $C r^{-(N-2)}$.

Le théorème est une conséquence du lemme 4. La capacité est nulle d'après le théorème 1, paragraphe IV de CARLESON [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (D.) et POLKING (J.). – The equivalence of two definitions of capacity, *Proc. of A.M.S.*, vol. 37, 1973, p. 529-534.

[2] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). – Espaces et lignes de Green, *Ann. Inst. Fourier de Grenoble*, vol. 3, 1951, p. 199-263.

[3] CAFFARELLI (L.) et FRIEDMAN (A.). – The free boundary in the Thomas-Fermi atomic model, *J. Differential Equations*, vol. 32, 1979, p. 335-356.

[4] CAFFARELLI (L.) et FRIEDMAN (A.). – Partial regularity of zero-set of solutions of linear and superlinear elliptic equations, *J. Differential Equations*, vol. 60, 1985, p. 420-433.

[5] CARLESON (L.). – Selected problems on exceptional sets, *Van Nostrand Math. Studies*, vol. 13, 1967.

[6] CHOQUET (G.). – Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier de Grenoble*, Vol. 5, 1953-1954, p. 131-295.

[7] HÖRMANDER (L.). – *The analysis of linear partial differential operators*, Springer Verlag.

[8] ROBBIANO (L.). – Sur les zéros de solutions d'inégalités différentielles elliptiques, *Commun. in Partial Differential Equations*, vol. 12, 1987, p. 903-919.

[9] ROBBIANO (L.). – Dimension des zéros d'une solution faible d'un opérateur elliptique, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 67, 1988, p. 339-357.

[10] SALAZAR (J.). – *Thèse de Doctorat*, Université de Paris-Sud, 1988.

III

REGULARITE DES PROBLEMES ELLIPTIQUES

EXPOSANT CRITIQUE DE SOBOLEV

ET REGULARITE DES SOLUTIONS

D'EQUATIONS ELLIPTIQUES

par

A. BENMOHAMED et Luc ROBBIANO

A paraître aux Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 7 (1990).

PUB. IRMA, LILLE - 1988
Vol.16, N° IV

Exposant critique de Sobolev
et régularité des solutions d'équations elliptiques.

par

A. BENMOHAMED et L. ROBBIANO

Résumé : Nous étudions la régularité des solutions de problèmes elliptiques avec des termes d'ordre un [resp. zéro] à coefficients dans $L^n(\mathbf{R}^n)$ [resp. $L^{n/2}(\mathbf{R}^n)$]. Cela permet de déduire la régularité des solutions de certains problèmes elliptiques non linéaires avec exposant critique de Sobolev.

CLASSIFICATION A.M.S. (M.O.S.) : **35 B 65 - 35 J 60**

KEY WORDS : **Opérateurs elliptiques, régularité, exposant critique de Sobolev.**

dépôt du manuscrit le 26 octobre 1988

INTRODUCTION

Ce travail a pour but l'étude systématique de la régularité des solutions d'équations elliptiques où interviennent des problèmes liés aux exposants critiques de Sobolev.

Ces problèmes se recontrent, par exemple, dans les trois équations suivantes :

(1) Métriques conformes.

$$\Delta u = Ru^{\frac{n+2}{n-2}},\ n \geq 3,\ u \in H^1(\mathbf{R}^n)\,.$$

(2) Problème d'école, voir [1] pour un problème voisin.

$$\Delta u = |\nabla_u|^{1+2/n},\ n \geq 3,\ u \in H^1(\mathbf{R}^n)\,.$$

(3) Surface à courbure moyenne constante.

$$\Delta u = 2H\partial_x u \wedge \partial_y u$$

où $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ et $u \in H^1(\mathbf{R}^2)$.

Ces trois problèmes sont critiques car le gain de régularité des solutions ne s'obtient pas en appliquant seulement l'injection de Sobolev et la régularité des solutions des problèmes elliptiques.

Le premier théorème étudie la régularité des solutions u de

$$Au = V_1 u + V_2 \nabla u + \sum_{i=1}^{n} \nu_i \partial_{x_i}(V_3^i u)$$

où A un opérateur elliptique d'ordre 2.

Ce théorème permet de traiter les exemples (1) et (2) ((1) est bien connu voir Trudinger [12] et Brezis-Kato [5]).

L'exemple (3), dont la régularité des solutions est par ailleurs connue (Wente [13]) ne rentre pas dans le cadre du premier théorème. Néanmoins, la méthode de démonstration s'adapte à ce cas, ce qui fait l'objet du deuxième théorème.

1 - Résultats.

a) Enoncé du théorème 1.

Soit A un opérateur d'ordre deux mis sous forme divergence

$$A = \sum_{1 \leq i,j \leq m} \partial_i (a_{ij} \partial_j)$$

où $a_{ij} \in C^s(\Omega)$, $0 < s < 1$, Ω est un ouvert de R^n. $C^s(\Omega)$ est l'espace de Holder i.e. $u \in C^s(\Omega)$ si $u \in L^\infty$ et

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^s} \leq C$$

pour $x, y \in \Omega$. On suppose A elliptique près d'un point $x_0 \in \Omega$,

$$(\text{i.e. } \sum_{i,j} a_{ij}(x_0) \xi_i \xi_j \neq 0 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbf{R}^n / \{0\}) \; .$$

Pour $1 < p < +\infty$, $s \in \mathbf{R}$, on note

$$H^{s,p} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) / (1 - \Delta)^{s/2} u \in L^p\} \; .$$

On dit que $u \in H^{s,p}_{x_0}$ s'il existe une fonction $\chi \in C_0^\infty$, $\chi = 1$ près de x_0 telle que $\chi u \in H^{s,p}$.

Soit $u \in H^{1,p}_{x_0}$, $1 < p < +\infty$ vérifiant

$$Au = V_1 u + \sum_{i=1}^{n} V_2^i \partial_i u + \sum_{i=1}^{n} \nu_i \partial_i (V_3^i u) + f \; . \tag{4}$$

Avec $V_1 \in L^{n/2}_{x_0}$, V_2^i, $V_3^i \in L^n_{x_0}$,

$$\nu_i \in Lip \qquad \text{c.} \quad (\nu_i, \nabla \nu_i \in L^\infty) \; ,$$

et $f \in H^{\sigma - 1,p}_{x_0}$ avec $\sigma < s$.

(5) On suppose que $p < n$.

De plus,

(6) si $V_1 \neq 0$ ou $V_2^i \neq 0$ alors $\frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{p}$.

(7) si $V_3^i \neq 0$ alors $\frac{1+\sigma}{n} < \frac{1}{p}$.

Théorème 1. *Soit u une solution du problème 4) vérifiant les conditions 5), 6) et 7) alors*

$$\text{si } V_3^i = 0,\ u \in H_{x_0}^{1+\sigma,p}$$

$$\text{si } V_3^i \neq 0,\ u \in H_{x_0}^{1,r}$$

avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{n}$.

Remarques :

1) Les hypothèses très faibles faites sur les fonctions V_j^i permettent d'appliquer ce théorème à des situations non linéaires avec exposant critique de Sobolev. Par exemple :

$$u \in H_{x_0}^1\ (H^1 = H^{1,2}),$$

$$Au = |\nabla u|^{1+\frac{2}{n}} = \sum_{i=1}^{n} V_i \partial_i u$$

avec $V_i = |\nabla u|^{\frac{2}{n}-1} \partial_i u$. On a bien $V_i \in L_{x_0}^n$.

2) C'est une généralisation d'un théorème de Brezis et Kato [5]. Ces auteurs se place dans le même cadre que nous mais avec $V_2^i = V_3^i = 0$.

3) Notre méthode de démonstration repose sur le calcul pseudo-différentiel ou plutôt le calcul paradifférentiel puisque les coefficients de A sont peu réguliers. La difficulté essentielle provient de la présence de certains opérateurs à coefficient dans L^p pour lesquels nous n'avons aucun calcul symbolique ; ce qui, en partie, explique l'absence d'une version microlocale du théorème 1. Cependant, on peut inverser (localement) ces opérateurs, puis étudier l'action, sur les espaces $H^{s,p}$, des inverses.

4) Beaucoup de travaux ont été fait sur la régularité (voir par exemple Trudinger [12]) ou sur l'existence (Brezis-Nirenberg [7]) des solutions d'équations du type $Au = u^{\frac{n+2}{n-2}}$. Mais peu de choses semblent connues pour des équations contenant des termes non linéaires d'ordre un avec exposant critique de Sobolev. Ce qui a motivé notre étude est le problème de Plateau qui consiste à résoudre l'équation $\Delta u = 2Hu'_x \wedge u'_y$ où $u : \Omega \to \mathbf{R}^3$, $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, avec des conditions au bord de Ω, (voir Brezis et Coron [6] et leur bibliographie sur le problème de l'existence). Si $u \in H^1$ avec les conditions au bord C^∞ (voir Wente [13], s'appuyant sur un résultat de Morrey [11]) alors $u \in C^\infty$.

Le théorème 1 ne s'applique pas à cette équation car l'hypothèse $p < n$ n'est pas vérifiée (ici $p = n = 2$). Plus précisément, la difficulté est la suivante, $u'_x \wedge u'_y \in L^1$ donc $\Delta u \in L^1$.

De cela on ne peut pas déduire que

$$u \in H^{2,1} = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n),\ \partial^\alpha u \in L', |\alpha| \leq 2\} .$$

Cependant, la technique développée pour démontrer le théorème 1 s'adapte à ce cas. Ce qui fait l'objet du théorème 2.

b) Enoncé du théorème 2.

Soit $u \in H^1_{(x_0,y_0)}$

$$u : \Omega \to \mathbf{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbf{R}^2 .$$

On appelle (x, y) les variables de $\mathbf{R}^2$. Soit A un opérateur matricielle d'ordre 2 elliptique près de (x_0, y_0) où chaque élément de la matrice s'écrit sous formes divergence avec des coefficients C^s $(0 < s < 1)$.

La fonction u vérifie

$$Au = H(x,y)[\partial_x u \wedge \partial_y V - \partial_y u \wedge \partial_x V] + f \tag{8}$$

où $V \in H^1_{(x_0,y_0)}$, $V : \Omega \to \mathbf{R}^3$, $f \in H^{\sigma-1}_{(x_0,y_0)}$, $\sigma < s$, et $H \in Lip$.

Théorème 2. *Soit $u \in H^1_{(x_0,y_0)}$ vérifiant l'équation (8) alors $u \in H^{1+\sigma'}_{(x_0,y_0)}$, pour $\sigma' < \sigma$.*

Remarques :

1) Bien entendu, l'énoncé de ce théorème est moins satisfaisant que celui du théorème 1. Mais comme il traite un problème géométrique important il nous a semblé intéressant. Il est probable que pour des problèmes voisin le théorème 1 ne s'applique pas mais que la technique de démonstration s'adapte.

2) Les résultats de régularité connus sur le problème de Plateau sont de nature différente. En effet, dans Wente [13], ce sont les points critiques d'une certaine fonctionnelle prise sur un certain espace, qui sont C^∞ jusqu'au bord si les données sont C^∞ (et analytiques si les données sont analytiques).

Le théorème 2 est un résultat local, seules les propriétés locales de A, de u, de V, et de f, interviennent. Ce qui est la situation habituelle pour un problème elliptique.

2 - Résultats préliminaires.

a) Rappels sur les opérateurs paradifférentiels.

Nous allons rappeler quelques résultats classiques.

• Soit $k > 1$ et soit (ψ, φ) un couple de fonctions de $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ tel que $\operatorname{supp}\psi \subset \{\eta \in \mathbf{R}^n | |\eta| \leq 1\}$ et $\psi(\eta) = 1$ quand $|\eta| \leq \frac{1}{K}$ et $\operatorname{supp}\varphi \subset \{\eta \in \mathbf{R}^n | \frac{1}{k} \leq |\eta| \leq 2K\}$.

(K, ψ, φ) est une décoposition dyadique de l'unité si :
pour tout $\eta \in \mathbf{R}^n$, $\psi(\eta) + \sum_{j\geq 0} \varphi(2^{-j}\eta) = 1$.

• Une classe de symbole

Pour $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$ et $m \in \mathbf{R}$, on notera par Σ_σ^m l'ensemble des fonctions a : $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ vérifiant pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$

(9) $x \mapsto \partial_\eta^\alpha a(x, \eta)$ est une fonction de $C^\sigma(\mathbf{R}^n)$;

(10) Il existe une constante positive C^α telle que

$$\|\partial_\eta^\alpha a(\cdot, \eta)\|_{C^\sigma} \leq C_\alpha(1 + |\eta|)^{m-|\alpha|} .$$

Σ_σ^m peut être muni d'une structure d'espace de Frechet. A cette classe de symbole, on peut associer des opérateurs de C_0^∞ dans $\mathcal{D}'$ de la manière suivante.

• Opérateurs para-différentiels et pseudo-différentiels.

Une décomposition dyadique étant choisie. Soit $a \in \Sigma_\sigma^m$ pour $u \dot{\in} C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, on note par T_a l'opérateur défini par :

$$T_a u(x) = \sum_K (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\eta} A_{k-N_0}(x, \eta) \hat{u}_k(\eta) d\eta, \tag{11}$$

où

$$A_{k-N_0}(x, \eta) = \mathcal{F}^{-1}\big(\psi(2^{-k+N_0-1})\mathcal{F}a(\cdot, \eta)\big)(x)$$

et N_0 étant choisi assez grand pour que le spectre de $x \mapsto \int e^{ix\eta} A_{k-N_0}(x, \eta)\hat{u}_k(\eta)d\eta$ soit dans une couronne de type $\{\eta \in \mathbf{R}^n | \frac{1}{2^{-k}\tilde{K}} \leq |\eta| \leq 2^{k+1}\tilde{K}\}$.

Les opérateurs T_a jouissent des propriétés suivantes :

(12) T_a est un opérateur borné de $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ avec $s \in \mathbf{R}$, $1 < p < +\infty$ dans $H^{s-m,p}(\mathbf{R}^n)$ avec une norme d'opérateur majorée par une semi-norme de a.

(13) T_a dépend du choix de N_0 et de la décomposition dyadique, cependant une modification du choix de N_0 ou de la décomposition pour T_a, modifie cet opérateur par l'addition d'un opérateur σ-régularisant, c'est-à-dire borné de $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{s-m+\sigma-\varepsilon,p}$, pour tout $\varepsilon > 0$, et dont la norme d'opérateur est majorée par une semi-norme de a. Désormais, nous appellerons opérateur paradifférentiel, tout opérateur qui ne diffère de T_a que d'un opérateur σ-régularisant.

Les opérateurs paradifférentiels ont été introduit par Bony [3], les propriétés ci-dessus découlent des travaux de Meyer [10], Metivier [9], et Benmohamed [2].

On pourra consulter Bourdaud [4] et Hörmander [8] pour une étude détaillée de ces classes.

Si $a \in \Sigma_\sigma^m$, on note par $a(x,D)$ l'opérateur pseudo-différentiel défini par

$$a(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\eta} a(x,\eta)\hat{u}(\eta)d\eta \text{ pour } u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) .$$

La différence entre $a(x,D)$ et T_a est, dans certains cas, régularisante voir [2].

Proposition 3. *Soit $a \in \Sigma_\sigma^m$ et $s \in \mathbf{R}$ tels que $\sigma + s - m > 0$. $a(x,D) - T_a$ est un opérateur borné de $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{s',p}(\mathbf{R}^n)$ avec $1 < p < +\infty$ et $s' <$ $\min(\sigma, \sigma + s - m)$.*

Ce qui, dans ces cas, permet de remplacer $a(x,D)$ par $T_a + R$.

En vue d'inverser les opérateurs elliptiques, nous aurons besoin d'un calcul symbolique sur la classe Σ_σ^m.

Proposition 4. *Soit $a \in \Sigma_\sigma^m$ et $b \in \Sigma_\sigma^{m'}$. Il existe $C \in \Sigma_\sigma^{m+m'}$ tel que*

$$c - a \# b \in \bigcap_{0<\varepsilon d \leq \sigma - [\sigma]} \Sigma_\varepsilon^{m+m'-\sigma+\varepsilon} \; (\text{où } a \# b = \sum_{|\alpha| \leq [\sigma]} \partial_\eta^\alpha a D_x^\alpha b / \alpha!)$$

et $T_a \circ T_b \equiv T_c$ modulo un opérateur σ-régularisant. On a note par $[\sigma]$ la partic entière de σ.

Remarquons que si $0 < \sigma < 1$, $[T_a, T_b] = T_a \circ T_b - T_b \circ T_a$ est un opérateur d'ordre $m + m'$ et de régularité σ, mais de symbole nul et, par conséquent, il est σ-régularisant.

Proposition. *Soit $a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ avec $a \in \Sigma^2_\sigma$, on suppose que $a(0,\xi) \neq 0$ pour tout $\xi \neq 0$. Il existe alors une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ égale à 1 au voisinage de zéro et un symbole $b \in \Sigma_\sigma^{-2}$ tels que*

$$T_b \circ T_a \equiv \chi \quad \text{modulo un opérateur} \quad \sigma - \text{régularisant}$$

En tant qu'opérateur, χ est définie par $\chi : u \mapsto \chi \cdot u(x) = \chi(x)u(x)$.

b) Réduction du problème.

Les hypothèses sont locales, pour se placer dans des espaces globaux il suffit de tronquer u avec une fonction $\chi \in C_0^\infty$ χ valant 1 près de x_0, et de multiplier l'équation (4) par une autre fonction C_0^∞ a support $\subset \{\chi = 1\}$ et valant 1 près de x_0. La forme de l'équation (4) est alors conservée, avec des hypothèses globales sur les V, u et f.

Nous allons montrer qu'on peut remplacer l'opérateur

$$A = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j)$$

par un paradifférentiel de symbole

$$a(x,\xi) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \, .$$

En effet, $a_{ij} \in \Sigma^0_s$ d'après la proposition 3, $a_{ij} - T_{a_{ij}}$ est borné de $H^{\sigma,p}$ dans $H^{\sigma',p}$ pour $\sigma' < \min(s, \sigma + s)$.

Pour $u \in H^{1,p}$, $\partial_j u \in H^{0,p} = L^p$ donc $a_{ij}\partial_j u - T_{a_{ij}}\partial_j u \in H^{\sigma,p}$ pour $\sigma < s$. Donc $\partial_i a_{ij}\partial_j u - \partial_i T_{a_{ij}}\partial_j u \in H^{\sigma-1,p}$. Le calcul symbolique (proposition 4) permet d'écrire $\partial_i T_{a_{ij}}\partial_j u = T_{a_{ij}\xi_i\xi_j} u$ modulo un terme dans $H^{\sigma-1,p}$. Donc

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) = T_a u + f \, .$$

ou $f \in H^{\sigma-1,p}$ avec $\sigma < s$ et $a(x,\xi)$ comme annoncé ci-dessous. Pour finir, nous remplaçons les V_i, $i = 1,2,3$ par $\tilde{V}_i + \hat{V}_i$ où $\tilde{V}_1 \in L^{n/2}$ avec $\|\tilde{V}_1\|_{L^{n/2}} \leq \varepsilon$. $\tilde{V}_2, \tilde{V}_3 \in L^n$ avec $\|\tilde{V}_i\|_{L^n} \leq \varepsilon$, $i = 2,3$ et $\hat{V}_i \in C_0^\infty$.

ε sera choisi au paragraphe 3. On vérifie facilement que les termes provenant de $\hat{V}_i$ peuvent être incorporés au reste f.

3 - Preuves des théorèmes de régularités.

a) Preuve du théorème 1.

Après les réductions du paragraphe 2b), la solution u du problème vérifie l'équation suivante

$$T_a u = V_1 u + \sum_{i=1}^{n} V_2^i \partial_i u + \sum_{i=1}^{n} \nu_i(\partial(V_3^i u) + f \tag{14}$$

où

$$\begin{aligned}
&u \in H^{1,p}\\
&a \in \Sigma_s^2\\
&V_1 \in L^{n/2} \text{ avec } \|V_1\|_{L^{n/2}} \leq \varepsilon\\
&V_2^i, V_3^i \in L^n \text{ avec } \|V_j^i\|_{L^n} \leq \varepsilon, j = 1,2\\
&\nu_i \in Lip\\
&f \in H^{\sigma-1,p} \quad s > \sigma > 0
\end{aligned}$$

Appelons Z_1, Z_2 et Z_3, les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned}
Z_1 u &= V_1 u\\
Z_2 u &= \sum_{i=1}^{n} V_2^i \partial_i u\\
Z_3 u &= \sum_{i=1}^{n} \nu_i \partial_i (V_3^i u)
\end{aligned}$$

(15) On a

$$\begin{aligned}
&Z_j : H^{1,p} \to L^q \quad j = 1,2\\
&Z_3 : H^{1,p} \to H^{-1,p}
\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}$, et des normes opérateurs majorées sur une constante fois ε.

En effet : $u \in H^{1,p} \subset L^{q_1}$ avec $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, si $\frac{1}{n} < \frac{1}{p}$.

Donc

$$\begin{aligned}
\|Z_1 u\|_{L^q} = \|V_1 u\|_{L^q} &\leq \|V_1\|_{L^{n/2}} \|u\|_{L^{q_1}}\\
&\leq C\varepsilon \|u\|_{H^{1,p}} .
\end{aligned}$$

$\left(\frac{1}{n} < \frac{1}{p}; \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1\right)$

$$\begin{aligned}
\|Z_2 u\|_{L^q} \leq \sum_{i=1}^{n} \|V_2^i \partial_i u\|_{L^q} &\leq \sum_{i=1}^{n} \|V_2^i\|_{L^n} \|\partial_i u\|_{L^p}\\
&\leq C\varepsilon \|u\|_{H^{1,p}}
\end{aligned}$$

$(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}<1)$

$$\begin{aligned}\|Z_3u\|_{H^{-1,p}} &\leq C\sum_{i=1}^{n}\partial_i(V_3^iu)\|_{H^{-1,p}}\\ &\leq C\sum_{i=1}^{n}\|V_3^iu\|_{L^p}\\ &\leq C\sum_{i=1}^{n}\|V_3^i\|_{L^n}\|u\|_{L^{q_1}}\\ &\leq C\varepsilon\|u\|_{H^{1,p}}\end{aligned}$$

$\left(\frac{1}{n}<\frac{1}{p}\right)$.

Soit $b\in\sum_s^{-2}$ tel que $T_bT_a=\chi(x)+R$ où $R:H^{\delta,t}\to H^{\delta+\sigma,t}\quad(\sigma<s)$ pour tout $\delta\in\mathbf{R}$, $1<t<+\infty$ et $\chi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

On applique T_b à (14), on a :

$$\chi u=T_bZ_1u+T_bZ_2u+T_bZ_3u+h \tag{17}$$

où $h=T_bf-Ru\in H^{1+\sigma,p}$ car $f\in H^{\sigma-1,p}$.

D'après (12), (15) et (16) $T_bZ_ju\in H^{2,q}\hookrightarrow H^{1,p}$ $j=1,2$ et $T_bZ_3u\in H^{1,p}$.

De plus,

$$\|T_bZ\|_{H^{1,p}\to H^{1,p}}\leq C\varepsilon\ .$$

On note $Z=Z_1+Z_2+Z_3$. L'idée est la suivante ; on a un opérateur $\chi-T_bZ$ qui envoit $H^{1,p}$ dans $H^{1,p}$ avec T_bZ de norme petite. On va l'inverser avec une série de Neumann, χ étant presque l'identité.

D'une façon précise, on pose :

$$\chi u=v\in H^{1,p}$$

(17) devient

$$v-T_bZv=T_bZ(1-\chi)u+h \tag{18}$$

avec $h\in H^{1+\sigma,p}$.

Il s'ensuit que

$$v=\sum_{k=1}^{\infty}(T_bZ)^k(1-\chi)u+\sum_{k=0}^{\infty}(T_bZ)^kh\ .$$

Si ε est pris suffisamment petit pour que

$$\|T_b Z\|_{H^{1,p}\to H^{1,p}} \leq \frac{1}{2}\,.$$

Commençons par démontrer que le deuxième terme de v vérifie les affirmations du théorème. On remarque que $T_b Z_j$ opère de $H^{1+\sigma,p}$ dans $H^{1+\sigma,p}$ avec une norme petite si $j = 1$ ou 2 et que $T_b Z_3$ opère de $H^{1,r}$ dans $H^{1,r}$ avec une norme petite. En effet, si g est dans $H^{1+\sigma,p}$

$$\begin{aligned}\|T_b Z_1 g\|_{H^{1+\sigma,p}} &\leq C\|T_b Z_1 g\|_{H^{2,\mu}} \\ &\leq C\|V_1 g\|_{L^\mu} \\ &\leq C\varepsilon\|g\|_{L^\nu} \\ &\leq C\varepsilon\|g\|_{H^{1+\sigma,p}}\end{aligned} \tag{19}$$

avec $\frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1-\sigma}{n}$ et $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{p} - \frac{1+\sigma}{n}$.

$$\begin{aligned}\|T_b Z_2 g\|_{H^{1+\sigma,p}} &\leq C\|T_b Z_2 g\|_{H^{2,\mu}} \\ &\leq C\sum_{i=1}^{n}\|V_1^i \partial_i g\|_{L^\mu} \\ &\leq C\varepsilon\|\nabla g\|_{L^r} \\ &\leq C\varepsilon\|g\|_{H^{1+\nu}} \\ &\leq C\varepsilon\|g\|_{H^{1+\sigma,p}}\end{aligned} \tag{20}$$

avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{n}$.

$$\begin{aligned}\|T_b Z_3 g\|_{H^{1+\nu}} &\leq C\sum_{i=1}^{n}\|\partial_i(V_3^i g)\|_{H^{-1,r}} \\ &\leq C\sum_{i=1}^{n}\|V_3^i g\|_{L^r} \\ &\leq C\varepsilon|g\|_{L^\nu} \\ &\leq C\varepsilon\|g\|_{H^{1+\nu}}\end{aligned} \tag{21}$$

$g \in H^{1+\sigma,p} \subset H^{1,r}$.

Il reste à traiter le premier terme. On va utiliser le fait que le support de $1-\chi$ est loin de x_0.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, avec support φ compact dans un ouvert contenu dans $\{\chi = 1\}$. De sorte que $\varphi(1-\chi) = 0$.

Lemme 5.

$$\varphi T_b = T_b \varphi + R\,, \tag{22}$$

avec $R : H^{\delta,t} \to H^{\delta+2+\sigma,t}$ *pour* $\delta \in \mathbf{R}$ *et* $1 < t < \infty$.

$$\varphi Z_2 = Z_2 \varphi + \tilde{V}_2\,, \tag{23}$$

avec $\tilde{V}_2 \in L^n$

$$\varphi Z_3 = Z_3 \varphi + \tilde{V}_3 \text{ avec } \tilde{V}_3 \in L^n\,. \tag{24}$$

■ (22) résulte de la proposition 4.

$$\varphi Z_2 w - Z_2 \varphi w = -\sum_{i=1}^{n} V_2^i (\partial_i \varphi) w\,. \tag{23}$$

$$\varphi Z_3 w - Z_3 \varphi w = -\sum_{i=1}^{n} \nu_i V_3^i (\partial_i \varphi) w\,. \tag{24}$$

Avec le R du (22) du lemme 5 et une fonction $V \in L^n$, on a :

$$\varphi (T_b Z)^k = (T_b Z)^k \varphi + \sum_{j=0}^{k} (T_b Z)^{k-j-1} (RZ + T_b V)(T_b Z)^j\,. \tag{25}$$

On a déjà vérifié voir (17) que

$$\|T_b Z g\|_{H^{1,p}} \leq C\varepsilon \|g\|_{H^{1,p}}\,,$$

$$\|T_b Z g\|_{H^{1+\sigma,p}} \leq C\varepsilon \|g\|_{H^{1+\sigma,p}} \text{ si } V_3^i = 0$$

$$\|T_b Z g\|_{H^{1,r}} \leq C\varepsilon \|g\|_{H^{1,r}} \text{ si } V_3^i \neq 0\,,$$

il suffit d'appliquer les majorations suivantes dans (19) et (20),

$$\|g\|_{L^p} \leq C \|g\|_{H^{1,r}}$$

et

$$\|g\|_{H^{1,r}} \leq C \|g\|_{H^{1+\sigma,p}}\,.$$

On choisit $\varepsilon > 0$ tel que tous les $C\varepsilon \leq \delta$ (on peut prendre $\delta = \frac{1}{2}$).

Si $V_3^i = 0$, on a $\left(\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}\right)$

$$
\begin{aligned}
&\|(T_bZ)^{k-j-1}(RZ + T_bV)(T_bZ)^j g\|_{H^{1+\sigma,p}} \\
&\leq \delta^{k-j-1}\left[\|RZ(T_bZ)^j g\|_{H^{1+\sigma,p}} + \|(T_bV)(T_bZ)^j g\|_{H^{1+\sigma,p}}\right] \\
&\leq C\delta^{k-j-1}\left[\|RZ(T_bZ)^j g\|_{H^{1+\sigma,q}} + \|(T_bV)(T_bZ)^j g\|_{H^{2+\sigma,p}}\right] \\
&\leq C\delta^{k-j-1}\left[\|Z(T_bZ)^j g\|_{L^q} + \|V(T_bZ)^j g\|_{L^p}\right] \\
&\leq C\delta^{k-j-1}\left[\|(T_bZ)^j g\|_{H^{1,p}} + \|(T_bZ)^j g\|_{H^{1,p}}\right] \quad \text{(voir (15)} \\
&\leq C\delta^{k-1}\|g\|_{H^{1,p}}
\end{aligned}
$$

La constante C ne dépend pas de k. Si $V_3^i \neq 0$, on a de même

$$
\begin{aligned}
&\|(T_bZ)^{k-j-1}(RZ + T_bV)(T_bZ)^j g\|_{H^{1,r}} \\
&\leq \delta^{k-j-1}\left[\|RZ(T_bZ)^j g\|_{H^{1+\sigma,p}} + \|T_bV(T_bV)(T_bZ)^j g\|_{H^{1+\sigma,p}}\right] \\
&\leq C\delta^{k-j-1}\Big[\|RZ_3(T_bZ)^j g\|_{H^{1+\sigma,p}} \\
&\qquad + \|T_bV(T_bZ)^j g\|_{H^{2,p}} + \|R(Z_1 + Z_2)(T_bZ)^j_g\|_{H^{2+\sigma,q}}\Big] \\
&\leq C\delta^{k-j-1}\left[\|Z_3(T_bZ)^j g\|_{H^{-1,p}} + \|V(T_bZ)^j g\|_{L^p} + \|(Z_1 + Z_2)(T_bZ)^j\|_{L^q}\right] \\
&\leq C\delta^{k-j-1}\|(T_bZ)^j g\|_{H^{1,p}} \\
&\leq C\delta^{k-1}\|g\|_{H^{1,p}} .
\end{aligned}
$$

Or C ne dépend pas de k.

En définitive, (18) et (25) donnent

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(T_bZ)^{k+1}(1-\chi)u = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}(T_bZ)^{k-j}[RZ + T_bV](T_bZ)^j(1-\chi)u$$

et la norme $H^{1,\sigma,p}$ (où $H^{1,r}$ si $V_3 \neq 0$) de cette expression est majorée par

$$C\sum_{k=0}^{\infty} k\delta^k\|u\|_{H^{1,p}} \leq C\|u\|_{H^{1,p}} .$$

b) Preuve du théorème 2.

Après les réductions du paragraphe 2.b), la solution u du problème vérifie l'équation suivante :

(26) $$T_a u = 2H(x)(\partial_x u \wedge \partial_y V - \partial_y u \wedge \partial_x V) + f .$$

avec $f \in H^{\sigma-1}$ $1 > \sigma > 0$, $H \in Lip$.

On note :

(27) $$Z_d g = \partial_x(g \wedge \partial_y d) - \partial_y(g \wedge \partial_x d)\,.$$

où $$d \in H^1 \quad d : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$
$$g \in H^\alpha \quad g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 \quad \alpha > 0\,.$$

On remarque que

(28) $$Z_d g = \partial_x g \wedge \partial_y d - \partial_y g \wedge \partial_x d\,.$$

si $\alpha \leq 1$.

On note
$$V = \tilde{V} + \beta \quad \text{ou} \quad \tilde{V} \in H^1,\ \|\tilde{V}\|_{H^1} \leq \varepsilon$$

ε à fixer et $\beta \in Lip$.

(26) devient (en remplaçant la notation $\tilde{V}$ par V) :

(29) $$T_a u = H(x) Z_V u + \tilde{f}\,,$$

ou $\tilde{f} = f + \partial_x u \wedge \partial_y \beta - \partial_y u \wedge \partial_x \beta \in H^{\sigma-1}$.

Remarque : Il est très important pour la preuve du théorème que le second membre soit de la forme $Z_V u$ de telle façon que Z_V s'écrive, soit sous la forme (27), soit sous la la forme (28). Ce qu'on va voir dans la preuve du lemme suivant.

Lemme 6. (30) *Si* $0 < \alpha < 1$ $Z_V : H^\alpha \to H^{-1,q}$ *avec* $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

(31) *Si* $1 < \alpha < 2$, $Z_V : H^\alpha \to L^r$ *avec* $\frac{1}{r} = 1 - \frac{\alpha-1}{2}$.

Dans les deux cas, la norme opérateur de Z_V *est majorée par* $C\varepsilon$.

■ (30) Prenons la définition (27) de Z_V, $\partial_x V$ et $\partial_y V \in L^2$ et

$$g \in H^\alpha \hookrightarrow L^\nu \quad \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} > 0$$

donc $g \wedge \partial_{x_i} V \in L^q$ $(x_1 = x,\ x_2 = y)$; ce qui implique que $Z_V g \in H^{-1,q}$ et $\|Z_V g\|_{H^{-1,q}} \leq C\varepsilon \|g\|_{H^\alpha}$.

(31) Prenons la définition (28) de Z_V. On a :

$$\partial_{x_i} V \in L^2$$
$$\partial_{x_i} g \in H^{\alpha-1} \hookrightarrow L^\nu \text{ avec } \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha-1}{2}$$

donc $\partial_{x_i} g \wedge \partial_{x_j} V \in L^r$ et $\|Z_V g\|_{L^r} \leq C\varepsilon \|g\|_{H^\alpha}$.

Ce qui achève la preuve du lemme.

Soit $b \in \Sigma_s^{-2}$ tel que $T_b T_a = \chi + R$.

On a noté χ pour $\chi \cdot Id$, et R est un opérateur : $H^{\delta,t} \longrightarrow H^{\delta+\sigma,t}$ pour $\delta \in \mathbf{R}$ et $1 < t < \infty$.

On applique T_b à (29), on obtient :

$\chi u = T_b H Z_V u + h$, où $h = T_b \tilde{f} - Ru \in H^{1+\sigma}$, car $\tilde{f} \in H^{\sigma-1}$.

On va simplement donner les grandes lignes de la preuve.

Pour $\alpha < 1$,

$$T_b H Z_V : H^\alpha \longrightarrow H^{1,q} \hookrightarrow H^\alpha$$

avec $\|T_b H Z_V\|_{H^\alpha \to H^\alpha} \leq C\varepsilon$.

D'autre part :

$$T_b H Z_V : H^{1+\sigma} \longrightarrow H^{2,r} \hookrightarrow H^{1+\sigma} \quad (\frac{1}{r} = 1 - \frac{\sigma}{2})$$

Pour suivre la preuve du théorème 1, il suffit de contrôler $\varphi T_b - T_b \varphi$ et $\varphi Z_V - Z_V \varphi$. φ est la même fonction C_0^∞ que celle intervenant au théorème 1. ■

Lemme 7. (33) $\varphi T_b - T_b \varphi = R_1$ *ou* $R_1 : H^{\delta,t} \longrightarrow H^{\delta+1,t}$ *pour* $\delta \in \mathbf{R}$ $1 < t < +\infty$.

(34) $\varphi Z_V - Z_V \varphi = R_2$ *où* $R : H^\alpha \longrightarrow L^q$, $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

■ (33) provient du calcul symbolique (proposition 4).

(34) On a :

$$\partial_{x_i}(\varphi g) \wedge \partial_{x_j} V = \varphi \partial_{x_i} g \wedge \partial_{x_j} V - \partial_{x_i} \varphi (g \wedge \partial_{x_j} V) .$$

Donc, la formule (28) donne que

$$\begin{aligned}(\varphi Z_V - Z_V \varphi) g &= \partial_x \varphi (g \wedge \partial_y V) - \partial_y \varphi (g \wedge \partial_x V) \\ &= R_2 g .\end{aligned}$$

$g \in H^\alpha \hookrightarrow L^\nu$, $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Donc $g \wedge \partial_{x_i} V \in L^q$. Ce qui achève la preuve du lemme.

Pour finir la preuve comme celle du théorème 1, on obtient une formule similaire à (25), avec un terme

$$(T_b H Z_V)^{k-j-1}[R_1 Z_V + T_b R_2](T_b H Z_V)^j \ .$$

Vérifions rapidement que cet opérateur envoie H^α dans $H^{\alpha+\sigma}$.

$$H^\alpha \xrightarrow{(T_b H Z_V)^j} H^\alpha \xrightarrow{R_2} L^q$$

$$L^q \xrightarrow{T_b} H^{2,q} \subset H^{1+\alpha} \xrightarrow{(T_b H Z_V)^{k-j-1}} H^{1+\alpha}$$

avec $\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{2}$; et

$$H^\alpha \xrightarrow{(T_b H Z_V)^j} H^\alpha \xrightarrow{Z_V} H^{-1,q}$$

$$H^{-1,q} \xrightarrow{R_1} H^{1+\sigma,q} \subset H^{\alpha+\sigma}$$

$$H^{\alpha+\sigma} \xrightarrow{(T_b H Z_V)^{k-j-1}} H^{\alpha+\sigma} \ .$$

Il suffit de poser $\alpha = 1 + \sigma' - \sigma$ pour démontrer le théorème 2. ■

Bien entendu, le calcul précis des normes opérateurs permet de faire le même raisonnement que pour le théorème 1. Ceci est laissé au lecteur.

Références bibliographiques

[1] J. AGUIRRE, M. ESCOBEDO, E. ZUAZUA - Existence de solutions à moyenne donnée pour un problème elliptique dans $\mathbf{R}^N$, *C.R.A.S.* **307**, *(1988), 463-466.*

[2] A. BENMOHAMED - Espaces de Besov et propagation des singularités des solutions non bornées d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires, *Thèse d'Orsay.*

[3] J.M. BONY - Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Sc. E.N.S.* **14**, *(1981), 209-246.*

[4] G. BOURDAUD - Une algèbre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels, *Comm. in Partial Differential Equations,* **13**, *(1988), 1059-1083.*

[5] H. BREZIS - Some variationnal problems with lack of compactness, *Proc. Sympos. Pure Math.* **45**, *(1983), 165-201.*

[6] H. BREZIS - J.M. CORON - Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture. *C.P.A.M.* **37**, *(1984), 149-187.*

[7] H. BREZIS - L. NIRENBERG - Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *c.P.A.M.* **36**, *(1983), 437-477.*

[8] L. HORMANDER - Pseudo-differential operators of type 1,1, *Commun. in Partial Differential Equations,* **13**, *(1988), 1085-1111.*

[9] G. METIVIER - Intégrales singulières. *Cours de D.E.A. 1881-1982, Université de Rennes.*

[10] Y. MEYER - Remarques sur un théorème de J.M. Bony, *Suppl. ai. Rend. del Circolo, Mat. di Palermo. Atti de Seminario di Analisi Armomnica (Pisa, 1980), Serie II.1, (1981), 1-20.*

[11] C. MORREY - Multiple integrals in the calculus of variations, *Springer Verlag. New York, 1966.*

[12] N. TRUDINGER - Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Ann. della scuola normale superiore di Pisa*, **22**, *(1968), 265-274.*

[13] H. WENTE - An existence theorem for surfaces of constant mean curvature, *J. Math. Anal. Appl.*, **26**, *(1969), 318-344.*

A. B. :Université de Paris-Sud, Bâtiment 425 Mathématiques,
91 405 - Orsay Cedex (France)
L. R. : U.F.R. de Mathématiques
Université de Lille-Flandres-Artois, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex