LAURE BLASCO

Paires duales réductives en caractéristique deux

Thèses d'Orsay, 1991
<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1991__0282__P0_0>

ORSAY
n° d'ordre:

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCE

Spécialité: Mathématiques

PAR

Laure BLASCO

<u>SUJET</u>: PAIRES DUALES REDUCTIVES EN CARACTERISTIQUE DEUX.

soutenue le 13 février 1991 devant la Commission d'examen

MM. Laurent CLOZEL Président

Paul GERARDIN

Guy HENNIART

Mme Colette MOEGLIN

Mme Marie-France VIGNERAS

Abstract :

Over a local field of characteristic two, A. Weil has defined the metaplectic group as an extension of a group called "pseudosymplectique". However, the pairs of reductive subgroups (G, G') of this group, dual in the sense that G and G' are each others centralizers, had not been classified. A complete classification is established here, as well as the triviality of the metaplectic extension restricted to these subgroups.

Pour m'avoir accompagnée sur le terrain des formes automorphes en faisant preuve tant de clairvoyance scientifique que de chaleur et de diligence au quotidien, je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à Guy Henniart.

Colette Mœglin a régulièrement témoigné son intérêt pour cette recherche. Elle a gracieusement accepté, avec Marie-France Vignéras, le dur travail de lecture critique du manuscrit. Je les remercie vivement.

Ma reconnaissance va également à Laurent Clozel et Paul Gérardin qui se sont penchés sur ces résultats.

Que tous les participants du séminaire "Groupes réductifs et formes automorphes" (Paris VII) qui ont accueilli mes premiers exposés émus, trouvent ici les marques de ma sympathie, ainsi que tous ceux qui, au hasard d'une rencontre, m'ont aidée ou encouragée.

Je remercie Mesdames Le Bronnec et Bonnardel de leur gentillesse et de leur patience compte tenu des exigences d'une typographie mathématique.

Introduction

Analysant les travaux de C.L. Siegel sur les formes quadratiques, A. Weil montre, en 1964, le rôle capital que joue dans la théorie des fonctions thêta, une représentation unitaire (projective) du groupe dit pseudosymplectique [W].

Poursuivant dans cette voie, R. Howe propose une théorie générale [H.R.], qui explique la dualité entre certains groupes classiques, dualité mise en évidence par de nombreux auteurs. R. Howe introduit la notion de paires duales réductives (c'est-à-dire de paires (G, G') de sous-groupes réductifs, duales au sens où G et G' sont les commutants l'un de l'autre) et définit une correspondance entre certaines représentations projectives irréductibles de ces sous-groupes à l'aide de la représentation de Weil.

Cette théorie, développée sur les corps de caractéristique nulle ou impaire, peut-elle être élargie à des corps de caractéristique paire ?

Répondre à cette question nécessite de revenir à l'article d'A. Weil [W]. Il apparaît alors que le groupe pseudosymplectique n'est plus isomorphe au groupe symplectique mais est une extension d'un groupe orthogonal.

Plus précisément, considérons un corps F de caractéristique 2, fini ou local, et W un espace vectoriel sur F muni d'une forme quadratique Q, non dégénérée et non défective, d'indice quelconque (I.1.1) (A. Weil s'intéresse au cas d'indice maximal). Notons $O(Q)$ le groupe des isométries de (W, Q). Le groupe pseudosymplectique est alors une extension de $O(Q)$ par le module $\mathcal{Q}_a(W)$ des formes quadratiques additives définies sur W. Cette extension est, en général, non triviale (I.1.3).

Nous remarquons que l'existence de formes quadratiques additives non nulles est propre à la caractéristique deux. Elle est source de nouveaux problèmes pour la recherche des paires duales et pour l'étude de l'extension métaplectique.

Cette étude fait l'objet du paragraphe I.2. Le groupe pseudosymplectique au-dessus de $O(Q)$ défini précédemment, est formé d'automorphismes d'un groupe d'Heisenberg (I.1.2), triviaux sur le centre. Par le théorème de Stone-Von Neumann, encore valable sous nos hypothèses (annexe 1), nous construisons l'extension métaplectique (I.2.1). Celle-ci présente deux particularités (que nous mettons en évidence sur sa restriction au sous-groupe $\mathcal{Q}_a(W)$ (I.1.1)) : être d'ordre exactement 2 que F soit fini ou local ; avoir des éléments qui ne commutent pas quand bien même leurs projections commuteraient dans le groupe pseudosymplectique.

Dans l'étape suivante, nous classifions les paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II.1 et 2). Elles sont de la forme : deux groupes linéaires ou un groupe symplectique et un groupe orthogonal ou deux groupes unitaires ou encore, une des deux paires duales triviales. Nous reconnaissons là les différentes "familles" obtenues pour les autres caractéristiques. Par ailleurs, quand cela doit être précisé, nous décrivons les sous-groupes du groupe pseudosymplectique qui interviennent (§ 2.1 proposition c).

Mais, revenons à la démonstration établissant la classification. Dans un premier temps, nous avons recherché les paires duales réductives de $O(Q)$ par des méthodes communes aux autres caractéristiques [M.V.W] (II.1). Nous abandonnons ensuite ces méthodes pour décrire à partir de la classification obtenue, un procédé qui nous permet de construire des paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II.2.3 et 2.4). Nous en dressons la liste (§ 2.1 proposition c). Est-elle complète ?

Le vérifier exige la connaissance de certaines propriétés des paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (§ 2.1 théorème a). De ces propriétés et du lemme 2.5, nous déduisons, pour chaque paire duale réductive non triviales (G, G') du groupe pseudosymplectique, l'existence d'une paire duale réductive (K, K') déjà répertoriée telle que les projections de K et K' sur $O(Q)$ contiennent celles de G et G' respectivement : de là, via le corollaire 2.1.b, l'exhaustivité de la liste établie (§ 2.1 théorème d).

Le dernier paragraphe traite de la restriciton de l'extension métaplectique aux paires duales réductives. Cette restriction est toujours scindée (sauf au-dessus des paires duales triviales).

Il apparaît en outre, que les images réciproques des composantes d'une paire duale non triviale commutent dans l'extension métaplectique. Ainsi donc, nous pouvons étendre la conjecture locale de Howe au cas de caractéristique deux et retrouver des situations connues.

I. EXTENSION MÉTAPLECTIQUE

II. PAIRES DUALES RÉDUCTIVES DU GROUPE PSEUDO-SYMPLECTIQUE

NOTATIONS : Soit F un corps commutatif de caractéristique 2, fini ou local dans le chapitre II. On note F^2 le sous-corps de F formé des carrés de F; si F est local, $\mathcal{O}_F$ désigne l'anneau des entiers de F et $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal.

Soit ψ un caractère additif, non trivial de F.

On considère un espace vectoriel sur F, W, de dimension finie et muni d'une forme quadratique Q dont la forme alternée associée est notée $<,>$.

$\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

I. EXTENSION MÉTAPLECTIQUE

§ 1. Groupes pseudosymplectiques

1.1. Formes quadratiques en caractéristique deux [D.J]

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur F.

Une *forme quadratique* q sur V est une application de V dans F définie à l'aide d'une forme bilinéaire b par : $q(v) = b(v, v)$, $v \in V$. Une forme bilinéaire alternée, notée $(\,,\,)$, lui est associée de la façon suivante :

$$\text{pour tout } (v, v') \in V^2, \quad (v, v') = q(v + v') + q(v) + q(v') = b(v, v') + b(v', v).$$

Ces trois objets ne se définissent pas l'un l'autre. D'une part, deux formes quadratiques q et q' ont la même forme alternée associée si et seulement si $q + q'$ est additive; d'autre part, deux formes bilinéaires b et b' définissent la même forme quadratique si et seulement si la forme bilinéaire $b + b'$ est alternée.

On note $\mathcal{Q}(V)$ l'ensemble des formes quadratiques sur V, $\mathcal{Q}_a(V)$ le sous-ensemble des formes quadratiques additives sur V et $\mathcal{Q}_a^2(V)$ le sous-ensemble de $\mathcal{Q}_a(V)$ formé des formes quadratiques additives dont les valeurs sont des carrés de F.

Soit $q \in \mathcal{Q}(V)$ et $(\,,\,)$ la forme alternée associée. Un sous-espace vectoriel X de V est *isotrope* si l'intersection de X et son orthogonal $X^\perp$ n'est pas nulle. Si, en outre, X est contenu dans $X^\perp$, X est dit *totalement isotrope*. Un sous-espace vectoriel X, totalement isotrope et sur lequel q est nulle, est dit *singulier*.

Un sous-espace vectoriel de V est *hyperbolique* s'il admet une *base hyperbolique* $(e_1, \cdots, e_p, e_{-1}, \cdots, e_{-p})$ c'est-à-dire telle que

$$\begin{aligned} &(e_i, e_j) = \delta_{i,-j} && \text{pour tout} \quad i, j \in \{-p, \cdots, -1, 1, \cdots, p\} \\ \text{et} \quad &q(e_i) = 0 && \text{pour tout} \quad i \in \{-p, \cdots, -1, 1, \cdots, p\}. \end{aligned}$$

Une base ne vérifiant que la première condition est dite *symplectique*.

On suppose que q est *non dégénérée et non défective* (i.e. la forme $(\,,\,)$ est non dégénérée).

Alors si X est un sous-espace vectoriel de V totalement isotrope, il existe, pour toute base $(e_i)_{i \in I}$ de X, des vecteurs $(e_{-i})_{i \in I}$ de V tels que

$$(e_i, e_{-j}) = \delta_{i,j} \quad \text{pour tout} \quad i, j \in I.$$

Si, de plus, X est singulier, on peut choisir les vecteurs $(e_{-i})_{i \in I}$ singuliers [D.J p. 34]. Ainsi, si X est un sous-espace vectoriel singulier de V, de dimension maximale, il existe un sous-espace vectoriel Y de V, de même dimension que X, tel que $X \oplus Y$ soit hyperbolique. Alors, $(X \oplus Y)^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel sans éléments singuliers et V se décompose en somme orthogonale

$$V = (X \oplus Y) \oplus (X \oplus Y)^{\perp}.$$

La dimension de X s'appelle *l'indice de q* et est notée $\nu(q)$.

1.2. Le groupe d'Heisenberg

Soit Q une forme quadratique sur W, non dégénérée et non défective. Alors W est de dimension paire notée $2n$. On note $<,>$ la forme alternée de Q.

Pour toute forme bilinéaire B définissant Q, on définit un groupe d'Heisenberg $H(B)$ par [W § 31] :

$$H(B) = W \times F$$

muni de la loi

$$(w,t),(w',t') \in H(B), \ (w,t)(w',t') = (w + w', t + t' + B(w,w')).$$

Si B' est une autre forme bilinéaire définissant Q, on définit de même le groupe d'Heisenberg $H(B')$. Soit q une forme quadratique dont la forme alternée est $B + B'$. Posons $\alpha_q(w,t) = (w, t + q(w))$, $(w,t) \in H(B)$. Alors, α_q est un isomorphisme entre $H(B)$ et $H(B')$.

Supposons que F est fini ou local.

D'après le théorème de Stone-Von Neumann (cf. annexe 1), il existe une représentation, unique à isomorphisme près, $(\rho_\psi, \mathcal{V})$ du groupe d'Heisenberg $H(B)$, lisse, irréductible telle que

$$\rho_\psi((0,t)) = \psi(t) id_{\mathcal{V}}, \quad t \in F.$$

Modèles de la représentation métaplectique ρ_ψ de $H(B)$ (F fini ou local).

1. Soient $W = X \oplus Y$ une *polarisation complète* de W (i.e. X et Y sont des sous-espaces vectoriels totalement isotropes, de dimension maximale) et ψ_X un caractère du sous-groupe $X \times F$ de $H(B)$ prolongeant ψ.
   On définit le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ par :
   - si F est fini, $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ est formé des fonctions ϕ sur $H(B)$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ telles que :

$$(1) \qquad \forall x \in X,\ \forall t \in F,\ \forall h \in H(B) \quad \phi((x,t)h) = \psi_X((x,t))\phi(h)$$

   - si F est local, $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ est formé des fonctions $\phi : H(B) \longrightarrow \mathbf{C}$ localement constantes, à support compact modulo $X \times F$, vérifiant (1).

Le groupe $H(B)$ agit sur $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ par translation à droite. La représentation $(\rho_\psi, \mathcal{H}(X, \psi_X))$ de $H(B)$ ainsi obtenue est un modèle de ρ_ψ.

De plus, $\mathcal{H}(X,\psi_X)$ est isomorphe au $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(Y)$ des fonctions de Y dans $\mathbb{C}$, si F est fini et, au $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(Y)$ des fonctions de Y dans $\mathbb{C}$, localement constantes à support compact, si F est local.

On a alors, pour tout $x \in X$, $y \in Y$, $t \in F$ et $\varphi \in \mathcal{S}(Y)$,

$$\rho_\psi((x+y,t))\varphi(y') = \psi(t+ < y',x > +B(x+y',y))\psi_X((x,0))\varphi(y+y'), \ y' \in Y.$$

2. On suppose que F est local.

Soit L un réseau de W. On définit le réseau L^* par

$$L^* = \{w \in W | \forall \ell \in L, < \ell, w > \in \mathcal{E}_\psi\}$$

où $\mathcal{E}_\psi$ est le plus grand sous $\mathcal{O}_F$-module contenu dans $\operatorname{Ker}\psi$. On suppose $L = L^*$. En remplaçant $X \times F$ par $L \times F$ dans le modèle précédent, on obtient un nouveau modèle de ρ_ψ.

1.3. Groupe pseudosymplectique au-dessus de $O(Q)$

Pour toute forme bilinéaire B définissant Q, on définit le groupe pseudosymplectique, PsB par [W § 31]

$$PsB = \{(\sigma,f) \in O(Q) \times \mathcal{Q}(W) | f(w+w') + f(w) + f(w') = B(\sigma w, \sigma w') + B(w,w')\}$$

avec la loi : $(\sigma,f)(\sigma',f') = (\sigma\sigma', f\cdot\sigma' + f')$

où $f \cdot \sigma'$ désigne la forme quadratique $w \longmapsto f(\sigma' w)$.

Le groupe PsB agit sur $H(B)$ par

$$(\sigma,f)\cdot(w,t) = (\sigma w, t + f(w)), \ (\sigma,f) \in PsB, \ (w,t) \in H(B).$$

Il apparaît donc comme un sous-groupe (en général propre) du groupe des automorphismes du groupe d'Heisenberg $H(B)$ qui agissent trivialement sur le centre.

PROPOSITION a. — *Tous les groupes pseudosymplectiques au-dessus de $O(Q)$ sont isomorphes.*

En effet, soient B et B' deux formes bilinéaires définissant Q. Alors $B+B'$ est alternée, et, pour toute forme quadratique q dont la forme alternée associée est $B+B'$, on note β_q l'application définie par : $\beta_q(\sigma,f) = (\sigma, f + q\cdot\sigma + q)$. C'est un isomorphisme de PsB dans PsB'.

On note $\mathcal{I}(B,B')$ l'ensemble de tels isomorphismes.

PROPOSITION b. — *Soit B une forme bilinéaire définissant Q. La suite*

$$(*) \qquad 1 \longrightarrow \mathcal{Q}_a(W) \longrightarrow PsB \longrightarrow O(Q) \longrightarrow 1$$

est exacte, scindée si et seulement si $n = 1$ ou $n = 2$ et $F = \mathbf{F}_2$.
Dans les cas où la suite $(*)$ est scindée, toutes les sections sont conjuguées sous $\mathcal{Q}_a(W)$.

La fin du paragraphe est consacrée à la démonstration de cette proposition.

La projection de PsB sur $O(Q)$ est surjective et son noyau est $\{(id, f) \in PsB\} = \{(id, f), f \in \mathcal{Q}_a(W)\}$ d'où l'exactitude de la suite (*).

Supposons la suite (*) scindée. Soit s une section.
Si $a \in W$ est non singulier, on note t_a la transvection orthogonale de vecteur a

$$t_a(w) = w + \frac{< w, a >}{Q(a)} \cdot a, \quad w \in W.$$

Soit $(t_a, q_a) = s(t_a)$. Alors, la forme alternée associée à q_a est

$$(2) \qquad (w, w') \longmapsto \frac{B(w,a)B(a,w') + B(a,w)B(w',a)}{Q(a)}.$$

Comme t_a est d'ordre 2, $s(t_a)$ également, d'où

$$Q_a \cdot t_a + q_a = 0$$

ce qui équivaut à

$$\frac{< w, a >^2}{Q(a)^2}(q_a(a) + Q(a)) = 0$$

pour tout $w \in W$, d'où

$$(3) \qquad q_a(a) = Q(a).$$

De plus, si a et b sont non singuliers, non colinéaires et orthogonaux, t_a et t_b commutent d'où

$$s(t_a)s(t_b) = s(t_b)s(t_a)$$

ce qui équivaut à

$$q_a \cdot t_b + q_b = q_b \cdot t_a + q_a,$$

ou encore

$$(4) \qquad \frac{< w, a >^2}{Q(a)^2} q_b(a) = \frac{< w, b >^2}{Q(b)^2} q_a(b)$$

pour tout $w \in W$.

1$^{\text{er}}$ cas : Si $n \geq 2$ et $F \neq \mathbf{F}_2$, il existe a, b deux vecteurs non singuliers, non colinéaires et orthogonaux entre eux. Il existe donc un vecteur w_0 de W orthogonal à a et non à b. Par (4) appliqué à $w = w_0$, on a :

$$q_a(b) = 0. \tag{5}$$

Puisque $F \neq \mathbf{F}_2$, on peut supposer que $Q(a) \neq Q(b)$. Le raisonnement précédent avec a et $a + b$ au lieu de a et b montre que : $q_a(a + b) = 0$.

Or
$$q_a(a + b) = q_a(a) + q_a(b) = Q(a) \neq 0$$
d'après (3) et (5).

La suite (*) n'est donc pas scindée dans ce cas.

2$^{\text{ème}}$ cas : Si $n \geq 3$ et $F = \mathbf{F}_2$, il existe trois vecteurs indépendants a, b, c, deux à deux orthogonaux et tels que
$$Q(a) = Q(b) = Q(c) = 1.$$

Par (3), $q_a(a) = 1$.

Par (4) appliqué successivement à a et b, a et c, a et $a + b + c$, on obtient

$$q_a(b) = q_a(c) = q_a(a + b + c) = 0.$$

Or, $q_a(a + b + c) = q_a(a) = 1$.

La suite (*) n'est pas scindée dans ce cas.

Dans les autres cas, on montre que la suite (*) est scindée en déterminant une section s de $O(Q)$ dans un groupe pseudosymplectique PsB de notre choix grâce à la proposition a.

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n, e_{-1}, \cdots, e_n\}$ une base symplectique de W (cf. § 1.1).

A chaque élément σ de $O(Q)$, de matrice $\begin{pmatrix} (a_{ij}) & (b_{ij}) \\ (c_{ij}) & (d_{ij}) \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ on associe un entier $D(\sigma)$, appelé invariant de Dickson, et défini par :

$$D(\sigma) = \sum_{i,j} (Q(e_j) a_{ij} b_{ij} + Q(e_{-j}) c_{ij} d_{ij} + b_{ij} c_{ij}).$$

L'application $D : \sigma \longrightarrow D(\sigma)$ est un homomorphisme de groupes de $O(Q)$ sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On note $O^+(Q)$ son noyau et $O^-(Q)$ l'ensemble des éléments de $O(Q)$ pour lesquels D prend la valeur 1. Le groupe $O(Q)$ est réunion disjointe de $O^+(Q)$ et $O^-(Q)$.

3$^{\text{ème}}$ cas : Si $n = 1$, l'indice ν de Q est 0 ou 1.

Si $\nu = 0$ (resp. $\nu = 1$), soit (e_1, e_{-1}) une base de W telle que

$$< e_1, e_{-1} >= 1$$

(respectivement, (e_1, e_{-1}) est une base hyperbolique de W).

On choisit B ainsi :

$$B(xe_1 + ye_{-1}, x'e_1 + y'e_{-1}) = xx'Q(e_1) + xy' + yy'Q(e_{-1}).$$

Alors, l'application $s : O(Q) \longrightarrow PsB$ définie par

$$\begin{aligned} s(\sigma) &= (\sigma, 0), \quad \sigma \in O^+(Q) \\ \text{et} \quad s(\sigma) &= (\sigma, Q), \quad \sigma \in O^-(Q) \end{aligned}$$

est une section.

En effet, les éléments $s(\sigma)$ sont bien dans PsB : Soit $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $O(Q)$ exprimé dans la base (e_1, e_{-1}). Alors :

$$(6) \qquad \begin{cases} Q(\sigma e_1) = Q(e_1) & \text{i.e.} \quad a^2Q(e_1) + ac + c^2Q(e_{-1}) = Q(e_1) \\ Q(\sigma e_{-1}) = Q(e_{-1}) & \text{i.e.} \quad b^2Q(e_1) + bd + d^2Q(e_{-1}) = Q(e_{-1}) \\ \text{et} \quad ad + bc = 1. \end{cases}$$

Calculons

$$\begin{aligned} & B(\sigma(xe_1 + ye_{-1}), \sigma(x'e_1 + y'e_{-1})) + B(xe_1 + ye_{-1}, x'e_1 + y'e_{-1}) \\ &= (ax + by)(ax' + by')Q(e_1) + (ax + by)(cx' + dy') + (cx + dy)(cx' + dy')Q(e_{-1}) \\ &\qquad + xx'Q(e_1) + xy' + yy'Q(e_{-1}) \\ &= xx'[a^2Q(e_1) + ac + c^2Q(e_{-1}) + Q(e_1)] + xy'[abQ(e_1) + ad + cdQ(e_{-1}) + 1] \\ &\qquad + yx'[baQ(e_1) + bc + cdQ(e_{-1})] + yy'[b^2Q(e_1) + bd + d^2Q(e_{-1}) + Q(e_{-1})] \\ &= (xy' + yx')[abQ(e_1) + bc + cdQ(e_{-1})] \quad \text{par (6)} \\ &= (xy' + yx') \cdot D(\sigma) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sigma \in O^+(Q) \\ xy' + yx' & \text{si} \quad \sigma \in O^-(Q). \end{cases} \end{aligned}$$

L'application s est bien à valeurs dans PsB.

De plus, si $\sigma \in O(Q)$, $\sigma' \in O(Q)$ on a :

$$\begin{aligned} s(\sigma)s(\sigma') &= \begin{cases} (\sigma\sigma', Q) & \text{si } \sigma \text{ et } \sigma' \text{ ne sont pas dans la même composante} \\ & \text{connexe de } O(Q) \\ (\sigma\sigma', 0) & \text{si } \sigma \text{ et } \sigma' \text{ sont dans la même composante connexe} \end{cases} \\ &= s(\sigma\sigma') \end{aligned}$$

Donc, s est une section.

$4^{\text{ème}}$ **cas** : Si $n = 2$, $\nu = 2$ et $F = \mathsf{F}_2$, on identifie W à l'espace vectoriel $\mathcal{M}(2, \mathsf{F}_2)$ des matrices 2×2 à coefficients dans F_2 et Q est la forme quadratique $Q(m) = \text{dét}m$, $m \in W$.

On choisit la forme bilinéaire B suivante :

$$\text{si } m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad m' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad \text{alors } B(m, m') = ad' + bc'.$$

Le groupe $O^+(Q)$ s'identifie au groupe $SL(2, \mathsf{F}_2) \times SL(2, \mathsf{F}_2)$ agissant sur W par :

$$(g_1, g_2) \cdot m = g_1 m g_2^{-1}$$

On considère les éléments de PsB suivants : soit $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$s_1 = \left(\sigma_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, id\right), \; q_1(m) = cd\right) \qquad s_1' = \left(\sigma_1' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, id\right), \; q_1'(m) = ab\right)$$

$$s_2 = \left(\sigma_2 = \left(id, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), q_2(m) = a^2 + c^2\right) \quad s_2' = \left(\sigma_2' = \left(id, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right), q_2'(m) = b^2 + d^2\right)$$

et $t = (\tau, q(m) = bc + a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ où $\tau(m) = {}^t m$.

LEMME. —

1) *L'homomorphisme* $i : O^+(Q) \longrightarrow PsB$ *défini par :*

$$i(\sigma_j) = s_j, \quad i(\sigma_j') = s_j', \quad j = 1, 2$$

est un relèvement de $O^+(Q)$ *dans* PsB.

2) i *se prolonge en un relèvement de* $O(Q)$ *dans* PsB *en posant* $i(\tau) = t$.

Démonstration : Pour la première affirmation, il suffit de vérifier que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$C.1 \quad s_1^2 = s_2^2 = {s_1'}^2 = {s_2'}^2 = (id, 0)$$

$$C.2 \quad s_i s_i' s_i = s_i' s_i s_i' \quad \text{pour } i = 1, 2$$

$$C.3 \quad g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad \text{pour } g_i = s_i \text{ ou } s_i', \; i = 1, 2.$$

En effet, $SL(2, \mathsf{F}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Pour la deuxième affirmation, il suffit de vérifier que :

$$C.4 \quad t^2 = (id, 0)$$

$$C.5 \quad t s_1 t = s_2' \quad \text{et} \quad t s_1' t = s_2.$$

Vérification de $C.1$. On remarque que q_i (resp. q'_i) est invariante sous σ_i (resp. σ'_i) : le résultat est clair.

Vérification de $C.2$. Calculons $(q_i \cdot \sigma'_i\sigma_i + q'_i \cdot \sigma_i + q_i)(m)$

$$\begin{aligned} \text{pour } i=1, \quad q_1(\sigma'_1\sigma_1 m) + q'_1(\sigma_1 m) + q_1(m) &= ab + (a+c)(b+d) + cd \\ &= q'_1(m) + q_1(\sigma'_1 m) + q_1(\sigma_1\sigma'_1 m) \\ \text{pour } i=2, \quad q_2(\sigma'_2\sigma_2 m) + q'_2(\sigma_2 m) + q_2(m) &= (b^2+d^2) + ((a+b)^2 + (c+d)^2) + (a^2+c^2) \\ &= q'_2(m) + q_2(\sigma'_2 m) + q'_2(\sigma'_2\sigma_2 m). \end{aligned}$$

La condition $C.2$ est satisfaite.

Vérification de $C.3$. On traite le cas où $g_1 = s_1$ et $g_2 = s_2$; les autres sont semblables.
On doit comparer $q_1 \cdot \sigma_2 + q_2$ et $q_2 \cdot \sigma_1 + q_1$.

On a $q_1 \cdot \sigma_2(m) + q_2(m) = c(c+d) + a^2 + c^2 = cd + a^2$

et $q_2 \cdot \sigma_1(m) + q_1(m) = (a+c)^2 + c^2 + cd = cd + a^2$

d'où $q_1 \cdot \sigma_2 + q_2 = q_2 \cdot \sigma_1 + q_1$.

La condition $C.4$ est immédiate et $C.5$ se vérifie comme précédemment. $\square$

La suite (*) est donc scindée.

5$^{\text{ème}}$ et dernier cas : Si $n = 2$, $\nu = 1$ et $F = \mathsf{F}_2$.
Soient ξ un générateur de F_4 sur F_2 et $^-$ l'élément non trivial de Gal($\mathsf{F}_4|\mathsf{F}_2$). Tout élément α de F_4 s'écrit :

$$\alpha = z + \xi t, \ z, t \in \mathsf{F}_2.$$

On identifie W à $\{m = \begin{pmatrix} x & \overline{\alpha} \\ \alpha & y \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathsf{F}_2$ et $\alpha \in \mathsf{F}_4\}$. Alors $Q(m) = \text{dét} m$, $m \in W$ et $O^+(Q)$ s'identifie à $SL_2(\mathsf{F}_4)$ agissant sur W par :

$$g \in SL_2(\mathsf{F}_4),\ m \in W, g \cdot m = gm\overline{g}^t.$$

On prend la forme bilinéaire B égale à :

si $m = \begin{pmatrix} x & \overline{z+\xi t} \\ z+\xi t & y \end{pmatrix}$, $\quad m' = \begin{pmatrix} x' & \overline{z'+\xi t'} \\ z'+\xi t' & y' \end{pmatrix}$, $\quad B(m,m') = xy' + zz' + zt' + tt'$.

On considère les éléments de PsB suivants :
pour $\lambda = \lambda_1 + \xi\lambda_2 \in \mathsf{F}_4^\times$,

$$s_\lambda = \left(\sigma_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 + \xi\lambda_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ q_\lambda(m) = (\lambda_1 + \lambda_2)yz + \lambda_1 yt + y^2 + \lambda_1 z^2 + \lambda_2 t^2\right)$$

pour $\mu \in \mathsf{F}_4^\times$, $d_\mu = \left(\delta_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}, 0\right)$ et $w = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q\right)$.

Lemme. — *L'homomorphisme* $i : O^+(Q) \longrightarrow PsB$ *défini par*

$$\begin{aligned} i(\sigma_\lambda) &= s_\lambda, & \lambda \in \mathsf{F}_4^\times \\ i(\delta_\mu) &= d_\mu, & \mu \in \mathsf{F}_4^\times \\ i\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= w \end{aligned}$$

est un relèvement de $O^+(Q)$ *dans* PsB.

De plus, i *se prolonge en un relèvement de* $O(Q)$ *dans* PsB *en posant*

$$i(\tau) = (\tau, q_\tau(m) = zt + x^2 + z^2 + t^2 + y^2) \quad \text{où } \tau \cdot m = {}^tm.$$

Démonstration : Les éléments σ_λ, δ_μ, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et τ engendrent $O(Q)$ et i est bien défini si les relations suivantes sont satisfaites [D.E] :

$R.1$ $wd_\lambda = d_{\lambda^{-1}} w$, $\lambda \in \mathsf{F}_4^\times$
$R.2$ $w^2 = (id, 0)$
$R.3$ $ws_\lambda w = d_{\lambda^{-1}} s_\lambda w s_{\lambda^{-1}}$, $\lambda \in \mathsf{F}_4^\times$
$R.4$ $d_\lambda d_\mu = d_{\lambda\mu}$, λ et $\mu \in \mathsf{F}_4^\times$
$R.5$ $s_\lambda s_\mu = s_{\lambda+\mu}$, λ et $\mu \in \mathsf{F}_4^\times$
$R.6$ $i(\tau)^2 = (id, 0)$
$R.7$ $i(\tau) g i(\tau) = i(\tau\sigma\tau)$ où $g = (\sigma, q)$ est s_λ, d_μ ou w, $\lambda, \mu \in \mathsf{F}_4^\times$.
L'homomorphisme i est alors injectif.

Les relations ($R.1$), ($R.2$) et ($R.4$) sont claires. Pour ($R.3$), on calcule les formes quadratiques obtenues dans chaque membre. A droite, on a

$$\begin{aligned} & q_\lambda \cdot w\sigma_{\lambda^{-1}}(m) + Q(\sigma_{\lambda^{-1}} m) + q_{\lambda^{-1}}(m) \\ &= q_\lambda\left(\begin{pmatrix} y & \overline{z + t + (\lambda_1 + \lambda_2)y + \xi(t + \lambda_2 y)} \\ z + t + (\lambda_1 + \lambda_2)y + \xi(t + \lambda_2 y) & x + \lambda_1 z + \lambda_2 t + y \end{pmatrix}\right) \\ &\qquad + Q(m) + q_{\overline{\lambda}}(m) \\ &= [(\lambda_1 + \lambda_2)xz + \lambda_2 xt + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)(zt + yx) + \lambda_1 zy + (\lambda_1 + \lambda_2)ty \\ &\qquad + x^2 + \lambda_1(\lambda_2 + 1)z^2 + \lambda_2(1 + \lambda_1)t^2 + y^2] + \\ &\qquad [xy + z^2 + zt + t^2] + [\lambda_1 yz + (\lambda_1 + \lambda_2)yt + y^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)z^2 + \lambda_2 t^2] \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)xz + \lambda_2 xt + x^2 + \lambda_1 z^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)t^2 \end{aligned}$$

en remarquant que :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 = 1 & \text{pour tout } \lambda \in \mathsf{F}_4^\times \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 + 1 = \lambda_1 \\ \lambda_1\lambda_2 + 1 = \lambda_1 + \lambda_2. \end{cases}$$

A gauche, on a : $Q \cdot \sigma_\lambda w + q_\lambda \cdot w + Q = q_\lambda \cdot w$ et

$$q_\lambda \cdot w(m) = (\lambda_1 + \lambda_2)xz + \lambda_2 xt + x^2 + \lambda_1 z^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)t^2.$$

On fait de même pour $(R.5)$:

$$\begin{aligned} q_\lambda \cdot \sigma_\mu(m) + q_\mu(m) &= [(\lambda_1 + \lambda_2)yz + \lambda_1 yt + \lambda_1 z^2 + \lambda_2 t^2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + 1)y^2] \\ &\qquad +(\mu_1 + \mu_2)yz + \mu_1 yt + y^2 + \mu_1 z^2 + \mu_2 t^2 \\ &= (\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)yz + (\lambda_1 + \mu_1)yt + (\lambda_1 + \mu_1)z^2 \\ &\qquad +(\lambda_2 + \mu_2)t^2 + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)y^2 \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = \mu \\ q_{\lambda+\mu}(m) & \text{si } \lambda \neq 0 \text{ car } \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 = \lambda_2 + \mu_2. \end{cases} \end{aligned}$$

La relation $(R.6)$ est claire. Reste à examiner $(R.7)$.
Si $g = s_\lambda$,

$$\begin{aligned} q_\tau \cdot \sigma_\lambda \tau(m) + q_\lambda(\tau m) + q_\tau(m) &= [zt + \lambda_2 zy + \lambda_1 ty + x^2 + (1 + \lambda_2)z^2 + (1 + \lambda_1)t^2 \\ &\qquad +(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2)y^2] \\ &\qquad +[(\lambda_1 + \lambda_2)yz + \lambda_2 yt + \lambda_1 z^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)t^2 + y^2] \\ &\qquad +[zt + x^2 + z^2 + t^2 + y^2] \\ &= \lambda_1 zy + (\lambda_1 + \lambda_2)ty + (\lambda_1 + \lambda_2)z^2 + \lambda_2 t^2 + y^2 = q_{\overline{\lambda}}(m). \end{aligned}$$

Or

$$i(\tau)s_\lambda i(\tau) = s_{\overline{\lambda}}.$$

Si $g = d_\lambda$, $\tau\delta_\lambda\tau$ est égal à $\delta_{\lambda^{-1}}$ et la forme quadratique de $i(\tau)d_\lambda i(\tau)$ est

$$[(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)zt + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)z^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)t^2 + x^2 + y^2]$$
$$+zt + x^2 + z^2 + t^2 + y^2 = 0.$$

Si $g = w$ alors $\tau w\tau$ est égal à w et la forme quadratique de $i(\tau)wi(\tau)$ est

$$(zt + x^2 + z^2 + t^2 + y^2) + Q(x, z, t, y) + zt + y^2 + z^2 + t^2 + x^2 = Q(m).$$

Les relations $(R.7)$ sont bien satisfaites.
Ceci termine la démonstration du lemme.

Pour compléter la preuve de la proposition, il reste à montrer l'unicité (à conjugaison près par un élément de $\mathcal{Q}_a(W)$) de la section dans les cas 3, 4 et 5, c'est-à-dire la nullité de $H^1(O(Q), \mathcal{Q}_a(W))$ ou encore, celle de $H^1(O(Q), W)$ puisque celui-là est isomorphe à un produit de $[F : F^2]$ copies de celui-ci (cf. II.2.2).
Dans le cas 4, c'est un résultat de H. Pollatsek [P., théorème 4.5].

Dans les autres cas, il suffit que $H^1(O^+(Q), W)$ soit nul d'après la suite de Hochschild-Serre [Annexe 2, proposition A.1]. Or, $O^+(Q)$ est isomorphe à $F^\times$ quand $n = \nu = 1$, à $U(1, E)$ où E est une extension quadratique de F muni de l'involution canonique quand $n = 1$ et $\nu = 0$ (cf. § 2.4 cas 2), et à $SL(2, \mathbf{F}_4)$ quand $n = 2$, $\nu = 1$ et $F = \mathbf{F}_2$. Alors, $H^1(O^+(Q), W)$ est nul d'après les calculs effectués dans l'annexe 2 (proposition A.2, corollaire A.2 et proposition A.3).

La proposition est maintenant entièrement établie.

§ 2. Groupe métaplectique : cas fini ou local

2.1. Soit $(\rho_\psi, \mathcal{V})$ la représentation métaplectique de $H(B)$.
A tout s de PsB, on associe la représentation $(\rho_\psi^s, \mathcal{V})$ de $H(B)$ définie par :

$$\rho_\psi^s(h) = \rho_\psi(sh), \quad h \in H(B).$$

C'est une représentation lisse, irréductible et, pour tout $t \in F$,

$$\rho_\psi^s((0,t)) = \psi(t) id_{\mathcal{V}}.$$

Par le théorème de Stone-Von Neumann, ρ_ψ et ρ_ψ^s sont isomorphes. On construit ainsi une représentation projective $\overline{\omega}_\psi$ de PsB.

Il existe alors une extension de PsB par $\mathbf{C}^\times$, notée $\widetilde{PsB}$, et une représentation $(\omega_\psi, \mathcal{V})$ de $\widetilde{PsB}$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathbf{C}^\times \arrow[r] & \widetilde{PsB} \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "\omega_\psi"] & PsB \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\omega}_\psi"] & 1 \\
 & & GL\mathcal{V} \arrow[r] & PGL\mathcal{V} &
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{PsB}$ est *l'extension métaplectique* de PsB et ω_ψ sa représentation métaplectique.

Remarques :

1. A priori, l'extension métaplectique dépend du caractère ψ fixé. On n'abordera pas, ici, le problème de l'unicité de cette extension.

2. S'il existe deux isomorphismes $\alpha : H(B) \xrightarrow{\sim} H(B')$ et $\beta : PsB \xrightarrow{\sim} PsB'$ tels que :

$$\forall h \in H(B), \quad \forall s \in PsB, \quad \alpha(sh) = (\beta s)(\alpha(h)) \tag{7}$$

alors β se relève en un isomorphisme de $\widetilde{PsB}$ dans $\widetilde{PsB'}$.

En particulier, si B et B' définissent la même forme quadratique, les isomorphismes α_q et β_q définis respectivement aux paragraphes 1.2 et 1.3 vérifient (7) : $\widetilde{PsB}$ et $\widetilde{PsB'}$ sont isomorphes.

De même, si $B' = \lambda B$, $\lambda \in F^\times$, alors $\widetilde{P}sB'$, défini relativement au caractère $\psi_\lambda : x \longrightarrow \psi(\lambda x)$ est isomorphe à $\widetilde{PsB}$.

PROPOSITION. —

<u>a</u> *L'extension métaplectique n'est pas triviale et contient un sous-groupe $\widehat{PsB}$ tel que la restriction de p à ce sous-groupe soit surjective de noyau $\{\pm 1\}$.*

<u>b</u> *Dans les cas où PsB contient un sous-groupe isomorphe à $O(Q)$, la restriction de l'extension métaplectique à ce sous-groupe est scindée si et seulement si*

$$\begin{cases} \quad n = 1 \\ ou \quad n = \nu = 2 \;\; et \;\; F = \mathbb{F}_2. \end{cases}$$

Pour établir ce résultat, on décrit différents modèles de la représentation métaplectique en 2.2 et, en 2.3, on examine une situation produit. La proposition principale est prouvée en 2.4.

2.2. Modèles de la représentation métaplectique

On reprend les notations du § 1.2.

a. *Modèle de Schrödinger*

Soit $s = (\sigma, f)$ un élément de PsB. On suppose que, dans une polarisation complète de $(W, <,>)$, $W = X \oplus Y$, σ s'écrit $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Sur $X \cap \sigma X$, l'application $x \longrightarrow \psi_X(x \cdot s^{-1}x)\psi(Q(x))$ est un caractère. Il existe un élément w_s de W tel que

$$\psi_X(x)\psi_X(s^{-1}x)\psi(Q(x)) = \psi(< x, w_s >), \quad x \in X \cap \sigma X. \tag{8}$$

On définit un automorphisme $M(s)$ de $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ par

$$M(s)\phi(h) = \begin{cases} |\alpha|^{1/2}\phi(s^{-1}(w_s h)) \text{ si } \sigma \text{ stabilise } X \\ \int_{X/X\cap\sigma X} \psi(Q(x))\psi_X(x)\phi(s^{-1}(w_s x h))|\gamma'|^{1/2} d\dot{x} \text{ sinon} \end{cases}$$

où $\gamma' : X/\operatorname{Ker}\gamma \longrightarrow (X/\delta \operatorname{Ker}\gamma)^*$ est l'isomorphisme induit par γ, $d\dot{x}$ est une mesure de Haar sur $X/X \cap \sigma X$, et w_s un vecteur de W satisfaisant (8).

Un choix différent de w_s peut changer $M(s)$ en $-M(s)$.

On vérifie que $(s, M(s))$ appartient à PsB, par une méthode analogue à [P.P § 1].

On note $\Lambda(W) = \{(X, \psi_X)$ où X est un lagrangien de W et ψ_X un caractère sur $X \times F$ prolongeant $\psi\}$.

Le groupe PsB agit sur $\Lambda(W)$ par : $s = (\sigma, f) \in PsB$, $(X, \psi_X) \in \Lambda(W)$,

$$(\sigma, f) \cdot (X, \psi_X) = (\sigma X, \psi_X \circ s^{-1}).$$

On fixe $(X_0, \psi_0) \in \Lambda(W)$ et on désigne par $\Lambda^0(W)$ l'orbite sous PsB de (X_0, ψ_0).

Pour deux lagrangiens X et Y, on note A_{YX} l'isomorphisme de $X/X \cap Y$ sur $(Y/X \cap Y)^*$ induit par celui de W sur W^*.

Soient dx et dy des mesures de Haar sur X et Y, dt une mesure de Haar sur $X \cap Y$. On note $d\dot{x}$ et $d\dot{y}$ les mesures de Haar quotients sur $X/X \cap Y$ et $Y/X \cap Y$, et, $|A_{YX}|$ le module de A_{YX} par rapport à $d\dot{x}$ et la mesure duale de $d\dot{y}$ [P.P 1.1].

Pour deux éléments (X, ψ_X) et (Y, ψ_Y) de $\Lambda^0(W)$, on définit l'opérateur $\mathcal{F}_{Y,\psi_Y;X,\psi_X}$ de la façon suivante :

l'application $x \longmapsto \psi_X(x)^{-1}\psi_Y(x)$ définit un caractère sur $X \cap Y$. Il existe donc $w \in W$ (défini modulo $X + Y$) tel que

$$\psi_X(x)^{-1}\psi_Y(x) = \psi(< w, x >) \quad \text{pour tout } x \in X \cap Y.$$

Alors, pour $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$,

$$\mathcal{F}_{Y,\psi_Y;X,\psi_X}\phi(h) = \int_{Y/X\cap Y} \psi_Y^{-1}(y)\phi(w \cdot y \cdot h)|A_{YX}|^{1/2}d\dot{y}.$$

Soient X_1 un supplémentaire de $X \cap Y$ dans X et Y_1 un supplémentaire de $X \cap Y$ dans Y. Alors, $X_1 \oplus Y_1$ est non isotrope et son orthogonal $(X_1 \oplus Y_1)^{\perp}$ contient $X \cap Y$. On note V un supplémentaire de $X \cap Y$ dans $(X_1 \oplus Y_1)^{\perp}$. Ainsi,

$$W = X_1 \oplus X \cap Y \oplus Y_1 \oplus V,$$

$$Y/X \cap Y \simeq Y_1,$$

et

$$H(B)/X \times F \simeq Y_1 \oplus V.$$

Pour $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$, $\phi|_{Y_1 \oplus V} \in \mathcal{S}(Y_1 \oplus V)$ et un calcul simple donne :

$$h = (x_1 + u + y_1 + v, t)$$

où $x_1 \in X_1$, $u \in X \cap Y$, $y_1 \in Y_1$, $v \in V$ et $t \in F$,

$$\mathcal{F}_{Y,\psi_Y;X,\psi_X}\phi(h) = \psi(t + B(y_1, x_1 + u + v) + B(x_1 + u, v) + < w, x_1 + u >)\psi_Y(y_1)$$
$$\int_{Y_1} \psi(< x_1, y >)\psi_Y^{-1}(y)\psi(B(y, v)) \cdot \phi(w(y + v))|A_{YX}|^{1/2}dy.$$

L'opérateur $\mathcal{F}_{Y,\psi_Y;X,\psi_X}$ est donc un opérateur de transformation de Fourier : il est continu de $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ dans $\mathcal{H}(Y, \psi_Y)$ et inversible.

Soit $s = (\sigma, f) \in PsB$. Il définit une application de $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ dans $\mathcal{H}(\sigma X, \psi_X \circ s^{-1})$ par : $\phi \longrightarrow \phi^s$ où $\phi^s(h) = \phi(s^{-1}h)$.

Alors, pour $\phi \in \mathcal{H}(X_0, \psi_0)$, on a :

$$M(s)\phi = \mathcal{F}_{X_0,\psi_0;\sigma X_0,\psi_0\circ s^{-1}}\phi^s = (\mathcal{F}_{\sigma^{-1}X_0,\psi_0\circ s;X_0,\psi_0}\phi)^s.$$

L'opérateur $M(s)$ est donc un automorphisme de $\mathcal{H}(X_0, \psi_0)$.

Il reste à vérifier que $M(s)$ entrelace les représentations ρ et ρ^s : pour tout $h \in H(B)$,

$$\begin{aligned} M(s)\rho(h) &= s \circ \mathcal{F}_{\sigma^{-1}X_0,\psi_0\circ s;X_0,\psi_0} \circ \rho(h) = s \circ \rho(h) \circ \mathcal{F}_{\sigma^{-1}X_0,\psi_0\circ s;X_0\circ\psi_0} \\ &= \rho(sh) \circ s \circ \mathcal{F}_{\sigma^{-1}X_0,\psi_0\circ s;X_0,\psi_0} = \rho(sh) \cdot M(s) \end{aligned}$$

$\square$

Examinons la restriction de l'extension métaplectique à certains sous-groupes de PsB.

1. **Cas où Q est déployée** [W]. On choisit X et Y singuliers et B définie par : $B(x+y,x'+y') = <x,y'>$, $x,x' \in X$, $y,y' \in Y$.

Si $s = \left(\begin{pmatrix} \alpha & u \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix}, f\right)$ où $\alpha \in GL(X)$ et $f_{|X} = 0$,

$$\omega_\psi(s)\varphi(y) = |\alpha|^{1/2}\psi(f(\alpha^* y) + B(u\alpha^* y, y))\varphi(\alpha^* y), \; y \in Y, \; \varphi \in \mathcal{S}(Y).$$

Si $s = \left(\begin{pmatrix} 0 & \gamma^{*-1} \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, Q\right)$ où $\gamma : X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme,

$$\omega_\psi(s)\varphi(y) = \int_X \psi(<y,x>)\varphi(\gamma^{-1}x)|\gamma|^{1/2}dx.$$

L'extension métaplectique restreinte au sous-groupe de PsB formé des éléments du premier type est scindée.

2. **Cas du sous-groupe $Q_a(W)$ de PsB**

Soit $s = (id, f)$ un élément de PsB. Il existe un unique $y_0 \in Y$ tel que

$$\forall x \in X, \quad \psi \circ f(x) = \psi(<x, y_0>).$$

Alors, si $\varphi \in \mathcal{S}(Y)$, on a, pour tout $y \in Y$,

$$\omega_\psi(s)\varphi(y) = \psi(f(y+y_0) + B(y_0,y))\varphi(y+y_0).$$

On en déduit que si $s' = (\sigma', f')$ et que y_0' est défini comme précédemment, alors

$$\begin{aligned} \omega_\psi(s)\omega_\psi(s')\varphi(y) &= \psi(B(y_0,y) + f(y+y_0))\psi(B(y_0', y+y_0) \\ &\qquad + f'(y + y_0' + y_0))\varphi(y + y_0 + y_0') \\ &= \psi(B(y_0', y_0) + f(y_0'))\omega_\psi(ss')\varphi(y). \end{aligned}$$

Si l'extension métaplectique est scindée au-dessus de $Q_a(W)$, alors pour tout $s = (id, f)$, $s' = (id, f')$ de PsB,

$$\begin{aligned} \omega_\psi(s)\omega_\psi(s') &= \omega_\psi(s')\omega_\psi(s) \\ i.e. \quad \psi \circ f(y_0') &= \psi \circ f'(y_0). \end{aligned}$$

Or, y_0 (resp. y_0') ne détermine f (resp. f') que sur X. On peut trouver deux éléments s et s' de $Q_a(W)$ pour lesquels cette égalité n'est pas satisfaite.

L'extension métaplectique restreinte à $Q_a(W)$ n'est pas scindée.

b. *Modèles latticiels*

Soit F un corps local et $\mathcal{E}_\psi$ le conducteur de ψ : $\mathcal{E}_\psi = \mathfrak{p}_F^r$, $r \in \mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe un réseau L dans W, autodual relativement à ψ et $<,>$. En remplaçant X par L dans $\underline{a}$, on obtient un nouveau modèle de la représentation de Weil, dit modèle latticiel.

En général, si L' est un réseau, le *stabilisateur K de L'* est le sous-groupe de PsB formé des éléments (σ, f) tels que :

i) $\sigma L' = L'$

ii) pour tout $\ell \in L'$, $f(\ell) \in \mathfrak{p}^{2[r/2]}$ où [ ] est la partie entière.

3. Cas du stabilisateur K d'un réseau L autodual

Dans ce cas, r est nécessairement pair.

On suppose, en outre, que la restriction de B à $L \times L$ est à valeurs dans $\mathcal{E}_\psi$ et on prolonge trivialement ψ sur $L \times F$. On note ψ_L le caractère de $L \times F$ ainsi obtenu.

Pour tout $s = (\sigma, f) \in K$, le caractère $\ell \longmapsto \psi_L(\ell)^{-1}\psi_L(s^{-1}\ell)$ est trivial. D'où si $\phi \in \mathcal{H}(L, \psi_L)$,

$$M(s)\phi(h) = \phi(s^{-1}h), \ h \in H(B).$$

Par conséquent, *$\widetilde{P}sB$ est scindée au-dessus de K.*

c. Supposons que F soit fini. Soit $(\rho, \mathcal{V})$ un modèle de la représentation métaplectique de $H(B)$.

Il est alors facile d'exprimer la représentation de Weil de PsB en fonction de $(\rho, \mathcal{V})$, pour certains éléments de PsB.

LEMME. — *Soit $s = (\sigma, f) \in PsB$. On suppose que $f = 0$ sur $\mathrm{Ker}(1+\sigma)$. Soit $M(s)$ l'opérateur de $\mathcal{V}$ dans lui-même défini par : pour tout $v \in \mathcal{V}$,*

$$M(s)v = \sum_{w \in W} \rho(w^{-1})\rho(s^{-1}w)v.$$

Alors $(s, M(s))$ est un élément de $\widetilde{PsB}$.

Démonstration : Soit $s \in PsB$. L'opérateur $M(s)$ est une somme finie d'éléments de $\mathcal{V}$ donc il est bien défini, à valeurs dans $\mathcal{V}$.

Pour montrer que $M(s)$ est inversible, on calcule le produit $M(s^{-1})M(s)$: soit $v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}
M(s^{-1})M(s)v &= \sum_{w,w' \in W} \rho(w'^{-1})\rho(sw')\rho(w^{-1})\rho(s^{-1}w)v \\
&= \sum_{w,w' \in W} \rho(w'^{-1})\rho(sw')\rho(sw)\rho(w^{-1})v \\
&= \sum_{w,w' \in W} \psi(B(w',w)+ < w, \sigma(w+w') >)\rho(w'^{-1})\rho(w^{-1})\rho(s(w+w'))v \\
&= \sum_{w,w' \in W} \psi(< w, w' > + < w, \sigma(w+w') >)\rho((w+w')^{-1})\rho(s(w+w'))v \\
&= \sum_{w' \in W} \Big(\sum_{w \in W} \psi(< w, w' + \sigma w' >) \Big) \rho(w'^{-1})\rho(sw')v
\end{aligned}$$

L'homomorphisme $w \longmapsto \psi(< w, w' + \sigma w' >)$ est un caractère de W, trivial si et seulement si $w' \in \mathrm{Ker}(1+\sigma)$. Donc

$$\begin{aligned}
M(s^{-1})M(s)v = |W| \cdot \sum_{w' \in \mathrm{Ker}(1+\sigma)} \rho(w'^{-1})\rho(w', f(w'))v &= |W| \sum_{w' \in \mathrm{Ker}(1+\sigma)} \psi(f(w')) \cdot v \\
&= c \cdot v, \ c \in \mathbf{C}^\times
\end{aligned}$$

Donc, $M(s)$ est inversible.

Il ne reste plus qu'à prouver que $M(s)$ entrelace les représentations $(\rho, \mathcal{V})$ et $(\rho^s, \mathcal{V})$. Soit $(w_0, t_0) \in H(B)$, $v \in \mathcal{V}$.

$$M(s)\rho(w_0,t_0)v = \psi(t_0) \sum_{w \in W} \rho(w^{-1})\rho(s^{-1}w)\rho(w_0)v = \sum_{w \in W} \psi(t_0)\rho(sw)^{-1}\rho(w+w_0, B(w,w_0))$$
$$= \sum_{w \in W} \psi(t_0)\rho(s(w+w_0))^{-1}\rho(w_0, B(w+w_0,w_0))$$
$$= \psi(t_0) \sum_{w \in W} \rho(sw_0(sw)^{-1})\rho(w)v = \rho(s(w_0,t_0))M(s)v.$$

□

2.3. Supposons que (V, b) soit la somme orthogonale de (V_1, b_1) et (V_2, b_2) c'est-à-dire $V = V_1 \oplus V_2$ et

$$b(w_1 + w_2, w_1' + w_2') = b_1(w_1, w_1') + b_2(w_2, w_2'), \ w_i, w_i' \in W_i$$

et que la forme quadratique q_i définie par b_i soit non dégénérée et non défective. Alors

$$j : \begin{cases} H(b_1) \times H(b_2) & \longrightarrow \quad H(b) \\ ((w_1,t_1),(w_2,t_2)) & \longmapsto \quad (w_1+w_2, t_1+t_2) \end{cases}$$

est surjective de noyau $\{((0,t),(0,t)),\ t \in F\}$

Soit $(\rho_{i,\psi}, \mathcal{V}_i)$ un modèle de la représentation métaplectique de $H(b_i)$ et ρ_ψ la représentation métaplectique de $H(b)$ dans $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{V}_2$. Alors, $\rho_\psi \circ j$ est équivalente à $\rho_{1,\psi} \otimes \rho_{2,\psi}$.

L'application

$$\begin{cases} (Psb_1 \times GL(\mathcal{V}_1)) \times (Psb_2 \times GL(\mathcal{V}_2)) & \longrightarrow \quad Psb \times GL(\mathcal{V}_1 \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{V}_2) \\ \Big(((\sigma_1, f_1), S_1), ((\sigma_2, f_2), S_2)\Big) & \longmapsto \quad ((\sigma_1 \oplus \sigma_2, f_1 \oplus f_2), S_1 \otimes S_2) \end{cases}$$

définit un homomorphisme $\widetilde{j} : \widetilde{Psb_1} \times \widetilde{Psb_2} \longrightarrow \widetilde{Psb}$, de noyau

$$\Big\{ \Big(((id,0), zI), ((id,0), z^{-1}I) \Big), z \in \mathbf{C}^\times \Big\}$$

et $\omega_\psi \circ \widetilde{j}$ est équivalente à $\omega_{1,\psi} \otimes \omega_{2,\psi}$.

On en déduit les résultats suivants :

Lemme 2.3a. — *Si G est un sous-groupe de Psb isomorphe à $G_1 \times G_2$ dans $Psb_1 \times Psb_2$ et si l'image réciproque de G_i dans $\widetilde{Psb_i}$ est scindée pour $i = 1, 2$, alors l'image réciproque de G dans $\widetilde{Psb}$ est scindée.*

LEMME 2.3b. — *Soit* H_1 *un sous-groupe de* Psb_1. *Il s'identifie au sous-groupe* $H = \{(\sigma \oplus id_{V_2}, f \oplus 0), (\sigma, f) \in H\}$ *de* Psb. *Si l'image réciproque de* H *dans* $\widetilde{Psb}$ *est scindée, alors l'image réciproque de* H_1 *dans* $\widetilde{Psb}_1$ *est scindée.*

LEMME 2.3c. — *Soit* C *(resp.* c_1, c_2*) le cocycle de l'extension métaplectique* $\widetilde{Psb}$ *(resp.* $\widetilde{Psb}_1, \widetilde{Psb}_2$*). Pour* s_i, $s'_i \in Psb_i$, $i = 1,2$, *on a :*

$$C(s_1 \oplus s_2, s'_1 \oplus s'_2) = c_1(s_1, s'_1) \cdot c_2(s_2, s'_2).$$

2.4. Démonstration de la proposition 2.1

La première assertion de $\underline{a}$. est une conséquence immédiate de 2.2.2. Pour la deuxième, considérons l'espace (V, b) somme orthogonale de deux copies de (W, B) et identifions PsB au sous-groupe $\{(s,s), s \in PsB\}$ de $PsB \times PsB$.

Soit $X_0 = \{(w,w), w \in W\}$ un sous-espace vectoriel de V. Il est singulier de dimension celle de W. Il existe donc un sous-espace vectoriel Y_0 de V, singulier et de même dimension que X_0 tel que $V = X_0 \oplus Y_0$ soit une polarisation complète de V. On se trouve donc dans le cas décrit en 2.2.1.

De plus, si (σ, f) est un élément de PsB, son image dans Psb stabilise X_0 et $(f \oplus f)_{|X_0}$ est nulle. Par le premier résultat de 2.2.1, l'image réciproque de PsB dans $\widetilde{Psb}$ est scindée et la restriction du cocycle C de l'extension $\widetilde{Psb}$ à PsB est égale à 1.

Soit c le cocycle de $\widetilde{PsB}$. Par le lemme 2.3.c, pour tout s, s' de PsB

$$c^2(s,s') = C(s \oplus s,\ s' \oplus s') = 1.$$

D'où c est à valeurs dans $\{\pm 1\}$.

On a donc établi le $\underline{a}$ de la proposition. Pour le $\underline{b}$, on étudie successivement les différents cas. Pour ce faire, on reprend les notations du § 1.3.

Cas 1 : $n = \nu = 1$.

Pour tout élément σ de $O(Q)$, on définit l'opérateur $\omega_\psi(\sigma)$ de $\mathcal{S}(Y)$ par :

$$\text{si } \sigma \in O^+(Q) \text{ i.e. } \sigma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \alpha \in F^\times,\ \omega_\psi(\sigma)\varphi(y) = |\alpha|^{1/2}\varphi(\alpha y),\ \varphi \in \mathcal{S}(Y);$$

$$\text{si } \sigma \in O^-(Q) \text{ i.e } \sigma = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in F^\times,\ \omega_\psi(\sigma)\varphi(y) = |\alpha|^{1/2}\varphi^*(\alpha^{-1} y),\ \varphi \in \mathcal{S}(Y),$$

où φ^* désigne la transformée de Fourier de φ par rapport à la mesure autoduale.

LEMME. — $\{(\sigma, \omega_\psi(\sigma)),\ \sigma \in O(Q)\}$ *est un sous-groupe de* $\widetilde{PsB}$.

La démonstration est immédiate.

La restriction de $\widetilde{PsB}$ à $O(Q)$ est triviale.

Cas 2 : $n = 1$, $\nu = 0$.

Soit (e, f) une base de W telle que $< e, f >= Q(e)$ et ξ une racine de l'équation

$$x^2 + x + \frac{Q(f)}{Q(e)} = 0.$$

La racine ξ n'est pas un élément de F sinon le vecteur $\xi e + f$ serait singulier. On pose $E = F(\xi)$ l'extension quadratique séparable de F engendrée par ξ. Alors, W s'identifie à E (en tant que F-espace vectoriel) par φ :

$$\varphi : W \longrightarrow E \text{ est } F\text{−linéaire et } \varphi(e) = 1,\ \varphi(f) = \xi.$$

Soit Q' la forme quadratique sur E définie par :

$$Q'(x) = Q(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in E.$$

On a :

$$Q'(x) = Q(e) \cdot N_{E|F}x, \quad x \in E.$$

D'où

$$O(Q) \simeq O(Q') = O(N_{E|F}) \simeq E^1 \rtimes \mathrm{Gal}(E|F)$$

où

$$E^1 = \{x \in E | N_{E|F}x = 1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Gal}(E|F) = \{id, \tau\}.$$

En particulier, $O^+(Q) \simeq E^1$.

On peut donc supposer que $W = E$ et $Q = N_{E|F}$. On note δ la norme de ξ. On choisit la forme bilinéaire B donnée par :

$$B(x + \xi y, x' + \xi y') = xx' + xy' + \delta yy', \quad x, x', y, y' \in F.$$

i) Si F est fini, $O^+(Q)$ s'identifie au groupe unitaire U de la forme hermitienne $(,)$ définie sur E, espace vectoriel sur (E, τ), par :

$$(x, y) = \tau(x)y, \quad x, y \in E.$$

Par le théorème 3.3 de [G], $\widetilde{PsB}$ est scindée au-dessus de $O^+(Q)$. Soit $s \longmapsto (s, r(s))$ une section.

De plus, il existe un élément de $\widetilde{PsB}$ au-dessus de $t = (\tau, Q)$, noté $(t, r(\tau))$, tel que $r(\tau)^2 = I$.

Pour que $\widetilde{PsB}$ soit scindée, il faut et il suffit que :

$$\forall \sigma \in O^+(Q), \quad r(\tau)r(\sigma)r(\tau) = r(\tau\sigma\tau).$$

Or, ces deux opérateurs ne diffèrent que d'un scalaire multiplicatif. Ceci équivaut donc à :

$$\forall \sigma \in O^+(Q), \quad tr(r(\tau)r(\sigma)r(\tau)) = tr(r(\tau\sigma\tau))$$

$$i.e.\ (9) \quad \forall \sigma \in O^+(Q), \quad \chi(\sigma) = \chi(\tau\sigma\tau)$$

où χ désigne le caractère de la représentation de Weil de U. Le calcul de χ, pour les éléments semi-simples de U, a été effectué par P. Gérardin [G. Cor. 4.8.2] et donne, dans notre cas :

$$\chi(\sigma) = -1 \text{ pour tout } \sigma \in U \setminus \{id\}.$$

L'assertion (9) est alors claire, et $\widetilde{PsB}$ est scindée au-dessus de $O(Q)$.

On suppose maintenant que F est local. On note $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$ et π_F une uniformisante. Le conducteur de ψ est $\mathfrak{p}_F^r$ où $r = 2s$ ou $2s+1$, $s \in \mathbb{Z}$.

On choisit ξ tel que $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_F + \xi\mathcal{O}_F$. Alors, $O(Q)$ est contenu dans le stabilisateur K du réseau $L = \mathfrak{p}_F^s + \xi\mathfrak{p}_F^s$. Deux cas se présentent :

ii) L est autodual (i.e. r est pair). On vérifie que $\psi \circ B$ est trivial sur $L \times L$. D'après § 2.3.3, $\widetilde{PsB}$ est scindée au-dessus de K donc de $O(Q)$.

iii) L n'est pas autodual (i.e. r est impair). On construit un nouveau modèle de la représentation de Weil de PsB permettant d'utiliser les résultats de i) [Wa].

Construction du modèle. :

On remarque que $L^* = \mathfrak{p}L \subset L$. On considère $V = L/L^*$. C'est un espace vectoriel sur le corps résiduel k_F de F. On munit V d'une forme bilinéaire b définie par :

$$b(\overline{\ell}, \overline{\ell}') = B(\pi^{-s}\ell, \pi^{-s}\ell') \bmod \mathfrak{p}_F$$

où $\overline{\ell}$ est l'image de $\ell \in L$ par la projection $L \longrightarrow L/L^*$.

Soit $H(b)$ le groupe d'Heisenberg "associé" et (ρ_χ, S) un modèle de la représentation métaplectique de $H(b)$ pour le caractère χ de k_F :

$$\chi(\overline{x}) = \psi(\pi^{2s}x), \quad x \in \mathcal{O}_F \text{ et } \overline{x} \text{ son image dans } k_F.$$

(χ n'est pas trivial).

Soit $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel des fonctions $\phi : H(B) \longrightarrow S$ telles que :

i) ϕ est localement constante à support compact modulo F

ii) $\phi((\ell, t)h) = \psi(t)\rho_\chi(\overline{\ell})\phi(h)$ pour $\ell \in L$, $t \in F$ et $h \in H(b)$.

Le groupe $H(B)$ agit sur $\mathcal{V}$ par translation à droite.

LEMME. — *La représentation $(\rho, \mathcal{V})$ ainsi obtenue est la représentation métaplectique de $H(B)$.*

Démonstration : $(\rho, \mathcal{V})$ est lisse et vérifie la condition sur l'action du centre.

Pour que $(\rho, \mathcal{V})$ soit un modèle de la représentation métaplectique de $H(B)$, il faut et il suffit qu'elle soit irréductible.

Considérons l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{S}$ qui à $\phi \in \mathcal{V}$ associe $\phi(0)$. C'est un homomorphisme de $L \times F$-modules. Si $\mathcal{V}'$ est un $H(B)$-sous-module de $\mathcal{V}$, il est également un $L \times F$ sous-module. L'image $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{V}'$ dans $\mathcal{S}$ est donc un sous-module de $\mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}$ est irréductible, $\mathcal{S}'$ est $\{0\}$ ou $\mathcal{S}$.

Or toute fonction ϕ de $\mathcal{V}$ est entièrement déterminée par $\phi(0)$ sous l'action de $H(B)$. Ainsi, $\mathcal{V}'$ est $\{0\}$ ou $\mathcal{V}$. La représentation $(\rho, \mathcal{V})$ est bien irréductible.

$\square$

Soit $s = (\sigma, f)$ un élément de K. Il induit un automorphisme $(\overline{\sigma}, \overline{f})$ de $H(b)$ par :

$$\begin{cases} \overline{\sigma}(\ell + L^{*}) & = \overline{\sigma \ell} \\ \overline{f}(\ell + L^{*}) & = \overline{f(\pi^{-s}\ell)} \end{cases}$$

L'automorphisme $(\overline{\sigma}, \overline{f})$ est un élément du groupe pseudosymplectique Psb.

Soit $(\omega_{\chi}, \mathcal{S})$ la représentation métaplectique de Psb et posons :

$$s = (\sigma, f) \in K, \ \phi \in \mathcal{V}, \ M(s)\phi(h) = \omega_{\chi}(\overline{s})(\phi(s^{-1}h)).$$

LEMME. — *Soit $s \in K$. Le couple $(s, M(s))$ est un élément de $\widetilde{PsB}$.*

Si $s \in O(Q) \subset K$, alors $\overline{s}$ appartient au groupe orthogonal $O(q)$ de la forme quadratique q définie par b. L'analyse dans i) du cas où F est fini assure l'existence d'une section r_{χ} de $\widetilde{Psb}$ au-dessus de $O(q)$:

$$r_{\chi} : \overline{s} \in O(q) \longmapsto (\overline{s}, r_{\chi}(\overline{s})).$$

L'homomorphisme $s \longmapsto (s, r(s))$ de $O(Q)$ dans PsB défini par :

$$r(s)\phi(h) = r_{\chi}(\overline{s})\phi(s^{-1}h), \quad \phi \in \mathcal{V},$$

est une section de $\widetilde{PsB}$ au-dessus de $O(Q)$.

cas 3 : $n = \nu = 2$ et $F = \mathbb{F}_2$

On construit une section de $\widetilde{PsB}$ au-dessus de $O(Q)$.

Pour ce faire, on reprend la description de la situation faite au § 1.3. On introduit alors, les notations suivantes :

- X est le sous-espace vectoriel de W défini par : $X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in W \right\}$,

– Y est le sous-espace vectoriel de W défini par : $Y = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W \right\}$.
Alors $X \oplus Y$ est une polarisation complète de W en espaces singuliers.

– $(\rho, \mathcal{S}(Y))$ un modèle de la représentation métaplectique de $H(B)$.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(Y)$,

$$\rho\left(\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}, t_0 \right) \varphi(a,b) = \psi(t_0 + ad_0 + bc_0)\varphi(a + a_0, b + b_0).$$

En choisissant une base de $\mathcal{S}(Y)$, on exprime ρ à l'aide de matrices. Soit φ_0 [resp. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$] la fonction de $\mathcal{S}(Y)$ prenant la valeur 1 en $(0,0)$[resp.$(1,0),(0,1),(1,1)$] et s'annulant partout ailleurs.

Le système $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $\mathcal{S}(Y)$ dans laquelle la matrice de $\rho(h)$, $h \in H(B)$, est :

$$\psi(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi(d) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi(c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi(c+d) \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad h = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, t \right)$$

$$\psi(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \psi(d) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi(c) \\ 0 & 0 & \psi(c+d) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, t \right)$$

$$\psi(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi(d) \\ \psi(c) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi(c+d) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad h = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}, t \right)$$

$$\psi(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \psi(d) & 0 \\ 0 & \psi(c) & 0 & 0 \\ \psi(c+d) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si} \quad h = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}, t \right)$$

Pour chaque élément $g = s_1, s_1', s_2, s_2'$ ou t, on détermine les matrices M_g de $\mathcal{M}(4, \mathbf{C})$ telles que

$$M_g \rho(h) = \rho(gh) M_g, \quad \text{pour tout } h \in H(B).$$

On obtient :

$$\text{si} \quad g = s_1, \qquad M_{s_1} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbf{C}^\times$$

$$\text{si} \quad g = s'_1, \quad M_{s'_1} = \alpha' \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha' \in \mathbf{C}^\times$$

$$\text{si} \quad g = s_2, \quad M_{s_2} = \beta/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbf{C}^\times$$

$$\text{si} \quad g = s'_2, \quad M_{s'_2} = \beta' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \beta' \in \mathbf{C}^\times$$

$$\text{si} \quad g = t, \quad M_t = \frac{i\gamma}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbf{C}^\times$$

Les conditions $C.1$ et $C.4$ déterminent α, α', β, β' et γ au signe près. Les conditions $C.2$ donnent le signe de α' et β' en fonction de celui de α et β respectivement, tandis que les conditions $C.5$ donnent le signe de β en fonction de celui de α. On obtient :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \pm 1 \\ \gamma = \pm 1 \end{cases}$$

On vérifie que les conditions $C.3$ sont satisfaites.
Ainsi, $\widetilde{PsB}$ est scindée au-dessus de $O(Q)$.

Cas 4 : $n = 2$, $\nu = 1$ et $F = \mathbf{F}_2$

On reprend les notations de 1.3.

Supposons que la restriction de $\widetilde{PsB}$ à $O(Q)$ soit scindée. Soit r une section de $\widetilde{PsB}$ au-dessus de $O(Q)$.

Considérons le sous-groupe H de $O(Q)$ formé des éléments id, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \bar{\xi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\left(e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0\right)$ un élément de $H(B)$. Alors, pour tout $\sigma \in H \setminus \{id\}$,

$$\sigma(e_1, 0) = (e_1, 1).$$

Comme $(\sigma, r(\sigma))$ est un élément de $\widetilde{PsB}$, on a :

$$r(\sigma)\rho((e_1,0)) = \rho((e_1,1))r(\sigma) = \psi(1)\rho((e_1,0))r(\sigma).$$

De plus, $\sigma = \sigma'\sigma''$ avec $\{\sigma, \sigma', \sigma''\} = H \setminus \{id\}$ d'où

$$r(\sigma) = r(\sigma')r(\sigma'')$$

et

$$\begin{aligned} r(\sigma)\rho((e_1,0)) &= r(\sigma')r(\sigma'')\rho((e_1,0)) = \psi(1)r(\sigma')\rho((e_1,0))r(\sigma') \\ &= \rho((e_1,0))r(\sigma')r(\sigma'') = \rho((e_1,0))r(\sigma). \end{aligned}$$

Comme ψ est le caractère non trivial de $\mathbf{F}_2$, on obtient une contradiction.

La restriction de $\widetilde{PsB}$ à $O(Q)$ n'est pas triviale.

Ceci termine la démonstration de la proposition.

Annexe 1. Sur le théorème de Stone-Von Neumann

Le but de ce paragraphe est d'établir le théorème de Stone-Von Neumann pour un groupe d'Heisenberg $H(B)$ sur un corps fini ou local F de caractéristique 2.

Pour ce faire, il suffit de modifier quelques points de la démonstration exposée dans [M.V.W, Ch. 2] dans les cas de caractéristique nulle ou impaire. Nous allons préciser ces points.

ENONCÉ du THÉORÈME. — *A isomorphisme près, il existe une et une seule représentation $(\rho, \mathcal{V})$ de $H(B)$, lisse et irréductible, telle que, pour tout $t \in F$,*

$$\rho((0,t)) = \psi(t)id_{\mathcal{V}}.$$

La démonstration de l'existence d'une telle représentation est en tout point semblable à celle de [M.V.W., Ch. 2, I.3] (il suffit de remarquer que $\delta(-a) = \delta(a)^{-1}$: en caractéristique 2, cela donne $\delta(a) \cdot (0, Q(a))$).

On déduit l'unicité de cette représentation des deux lemmes suivants.

Notons $\mathcal{S}(H(B), \psi)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : H(B) \longrightarrow \mathbf{C}$, localement constantes à support compact modulo F et telles que, pour tout $h \in H(B)$, tout $t \in F$,

$$f(h(0,t)) = \psi(t)f(h).$$

Notons ρ_d (resp. ρ_g) la représentation de $H(B)$ dans $\mathcal{S}(H(B), \psi)$ par translations à droite (resp. à gauche).

LEMME a. — *Si $(\rho, \mathcal{V})$ est une représentation vérifiant les conditions du théorème, alors ρ s'identifie à une sous-représentation de ρ_d.*

Soit $(\rho, \mathcal{S}(Y))$ le modèle décrit en 1.2.1.

LEMME b. — *La représentation $(\rho_d, \mathcal{S}(H(B), \psi))$ est isotypique de composante irréductible $(\rho, \mathcal{S}(Y))$.*

Démonstration du lemme a : Soit $(\rho, \mathcal{V})$ une représentation vérifiant les conditions du théorème et $(\rho^\vee, \mathcal{V}^\vee)$ sa contragrédiente. Pour $v \in \mathcal{V}$ et $v^\vee \in \mathcal{V}^\vee$, notons $f_{v^\vee,v}$ le coefficient défini par : $f_{v^\vee,v}(h) = v^\vee(\rho(h)v)$, $h \in H(B)$.

Montrons que $f_{v^\vee,v} \in \mathcal{S}(H, \psi)$. Il suffit de voir que $f_{s^\vee,s}$ est à support compact modulo F.

Soit $w \in W$ tel que $f_{v^\vee,v}((w,0)) \neq 0$ et L un sous-groupe ouvert compact de W tel que v et $v^\vee$ soient invariants sous $L \times \{0\}$. Alors L contient un sous-groupe L' tel que $\psi \circ Q_{|L'}$ soit trivial. Pour tout $\ell \in L'$, on a

$$f_{v^\vee,v}((w,0)) = v^\vee(\rho((w,0))v) = v^\vee(\rho((w,0)(\ell,0))) = \psi(< w, \ell >) f_{v^\vee,v}((w,0)).$$

Donc $\psi(< w, \ell >) = 1$ i.e. $w \in L'^*$ qui est compact.

Ainsi, on définit une application linéaire de $\mathcal{V}^\vee \otimes \mathcal{V}$ dans $\mathcal{S}(H(B), \psi)$ qui entrelace les représentations $\rho^\vee \otimes \rho$ et $\rho_g \times \rho_d$. Si $v^\vee \neq 0$, cette application identifie $(\rho, \mathcal{V})$ à une sous-représentation irréductible de $(\rho_d, \mathcal{S}(H(B), \psi))$. $\square$

Démonstration du lemme b : Il existe une dualité entre $\mathcal{S}(X)$ et $\mathcal{S}(Y)$ définie par :

$$< v', v > = \int_{X \times Y} v'(x) v(y) \psi(< x, y >) dx dy$$

pour $v' \in \mathcal{S}(X)$, $v \in \mathcal{S}(Y)$ et où l'on a fixé des mesures de Haar sur $X \times Y$. Ainsi, $\mathcal{S}(Y)^\vee$ s'identifie à $\mathcal{S}(X)$: la représentation $(\rho^\vee, \mathcal{S}(Y)^\vee)$ s'identifie à une représentation ρ' dans $\mathcal{S}(X)$. Comme précédemment, il existe une application $\mathcal{F} : (v', v) \longmapsto f_{v',v}$ de $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{S}(Y)$ dans $\mathcal{S}(H(B), \psi)$ qui entrelace les représentations $\rho' \otimes \rho$ et $\rho_g \times \rho_d$. Or, pour tous $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$,

$$f_{v',v}((x_0 + y_0, 0)) = \psi(B(y_0, x_0) + Q(y_0)) \psi_X((x_0, 0)) \cdot$$
$$\int_{X \times Y} v'(x) v(y) \psi(B(y, y_0) + < x, y >) \psi(< x + y, x_0 + y_0 >) dx dy.$$

Après identification de $\mathcal{S}(X) \otimes \mathcal{S}(Y)$ et $\mathcal{S}(H, \psi)$ avec $\mathcal{S}(W)$, $\mathcal{F}$ devient essentiellement une transformée de Fourier : $\mathcal{F}$ est donc inversible. D'où $\rho' \otimes \rho$ est isomorphe à $\rho_g \times \rho_d$. Comme ρ est irréductible, ρ_d est isomorphe à une somme directe de représentations isomorphes à $(\rho, \mathcal{S}(Y))$. $\square$

II. PAIRES DUALES RÉDUCTIVES DU GROUPE PSEUDOSYMPLECTIQUE

Désormais F désigne un corps fini ou local.

§ 1. Paires duales réductives de $O(Q)$

1.1. Généralités et classification

Soit (H, H') une paire duale de $O(Q)$.

DÉFINITIONS

1. La paire (H, H') est *réductive* si W est $HH'F$ absolument semi-simple. Si W n'est que $HH'F$-semi-simple, la paire (H, H') est dite *relativement réductive.*
2. La paire (H, H') est *irréductible* si l'action de HH' sur W ne laisse stable aucune décomposition en somme orthogonale de W.
3. La paire (H, H') est produit des paires duales (H_i, H_i'), $i = 1, 2$ si H (resp. H') s'identifie à $H_1 \times H_2$ (resp. $H_1' \times H_2'$) et qu'il existe une décomposition en somme orthogonale de W, $W = W_1 \oplus W_2$ telle que, pour $i = 1, 2$, (H_i, H_i') soit une paire duale de $O(Q_{|W_i})$.

Remarque : Comme W est de dimension finie sur F, W est $HH'F$ absolument semi-simple si et seulement si le centre du corps commutant de tout sous-module simple de W est une extension séparable de F [B., § 7 n° 5 prop. 7 et 6].

PROPRIÉTÉ. — *Toute paire duale réductive [resp. relativement réductive] est produit de paires duales réductives [resp. relativement réductives] et irréductibles.*

Démonstration [cf. M.V.W. Ch. 1] :
Soit (H, H') une paire duale. Si elle n'est pas irréductible, il existe une décomposition en somme orthogonale de W, $W = W_1 \oplus W_2$, stable sous HH'.

i) Le groupe H (resp. H') s'identifie à un produit $H_1 \times H_2$ (resp. $H_1' \times H_2'$) où H_i (resp. H_i') est un sous-groupe de $O(Q_{|W_i})$.

En effet, posons $H_i = \{\sigma_{|W_i}, \sigma \in H\}$, $i = 1, 2$ et considérons l'homomorphisme i de H dans $H_1 \times H_2$ défini par : $i(\sigma) = (\sigma_{|W_1}, \sigma_{|W_2})$, $\sigma \in H$. Il est injectif. De plus, si $(\sigma_1, \sigma_2) \in H_1 \times H_2$, l'élément σ de $O(Q)$ défini par

$$\sigma(w_1 + w_2) = \sigma(w_1) + \sigma_2(w_2), \quad w = w_1 + w_2 \in W,\ w_i \in W_i,$$

commute avec H', donc il appartient au bicommutant de H c'est-à-dire à H lui-même. Ainsi, i est un isomorphisme de H sur $H_1 \times H_2$.

De même, $H' \simeq H_1' \times H_2'$.

ii) LEMME. — *Soit G un groupe, G_1 et G_2 deux sous-groupes tels que $G_1 \times G_2 \subset G$. Soient $K = K_1 \times K_2$ et $K' = K_1' \times K_2'$ deux sous-groupes de G, K_i, $K_i' \subset G_i$. Si (K, K') est une paire duale de G alors (K_i, K_i') est une paire duale de G_i pour $i = 1, 2$.*

Si, de plus, (K, K') est relativement réductive (resp. réductive), (K_i, K_i') l'est aussi.

Calculons le commutant de K_1 dans G_1. Soit k' un élément de ce commutant. On prolonge trivialement k' à $G_1 \times G_2$. Alors k' commute avec K dans G i.e. $k' \in K'$. Donc $k' \in K_1'$. Le commutant de K_1 dans G_1, qui contient K_1', est donc contenu dans K_1'. Il est donc égal à K_1'.

On montre de même que le commutant de K_1' (resp. K_2, K_2') est K_1 (resp. K_2', K_2). La paire (K_i, K_i') est une paire duale de G_i.

La deuxième assertion du lemme est claire.

On déduit du lemme la propriété.

Ainsi, il suffit de déterminer les paires duales réductives et irréductibles.

Exemples de paires duales relativement réductives et irréductibles

1. Soit W_1 (resp. W_2) un F-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme alternée $<,>_1$ (resp. $<,>_2$) non dégénérée. Prenons $W' = W_1 \otimes_F W_2$ avec la forme quadratique Q' définie par :

$$Q'(w_1 \otimes w_2) = 0,$$

et la forme alternée associée à Q' est

$$< w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' >=< w_1, w_1' >_1 < w_2, w_2' >_2, \ \ w_i, w_i' \in W_i.$$

Nécessairement, $n = \frac{\dim W'}{2}$ est pair et $\nu = n$.

La paire (SpW_1, SpW_2) est duale, réductive et irréductible dans $O(Q')$.

2. Soit D une extension quadratique de F ou un corps de quaternions sur F, muni de l'involution canonique.

Soit W_1 (resp. W_2) un D-espace vectoriel à droite (resp. à gauche), de dimension finie, muni d'une forme hermitienne $<,>_1$ (resp. $<,>_2$) non dégénérée telle que : $< w_1, w_1 >_1 \in F$, $w_1 \in W_1$ (resp. $< w_2, w_2 >_2 \in F$, $w_2 \in W_2$).

Prenons $W'' = W_1 \otimes_D W_2$ avec la forme quadratique Q'' définie par :

$$Q''(w_1 \otimes w_2) =< w_1, w_1 >_1 \cdot < w_2, w_2 >_2, \ \ w_i \in W_i$$

et la forme alternée associée à Q'' est :

$$< w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' >= tr_{D|F}(< w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2).$$

Alors, $(U(W_1), U(W_2))$ *est une paire duale réductive, irréductible de $O(Q'')$.*

3. Soit D un corps dont le centre E contient F. Soit W''' un F-espace vectoriel muni d'une forme alternée $<,>$. Soit $W''' = X \oplus Y$ une polarisation complète de W'''. On définit la forme quadratique Q''' dont la forme alternée associée est $<,>$ par :

$$Q'''(x) = Q'''(y) = 0 \quad \text{pour tout } x \in X, \ y \in Y.$$

Pour toute décomposition de X en produit tensoriel, $X \simeq X_1 \otimes_D X_2$, de D-espaces vectoriels X_1 et X_2, *les sous-groupes* GLX_1 *et* GLX_2 *définissent une paire duale relativement réductive, irréductible de* $O(Q''')$, *sauf si* $F = \mathsf{F}_2$, *et* $\dim_F X_i \leq 2$ *pour* $i = 1$ *ou* 2. *Cette paire est réductive si et seulement si E est une extension séparable de F.*

4. Soit E une extension séparable (resp. séparable ou inséparable) de F et $t : E \longrightarrow F$ un F-homomorphisme tel que la forme bilinéaire $(x, y) \longmapsto t(xy)$ soit non dégénérée. On suppose que W est aussi un E-espace vectoriel. Soit q une forme quadratique sur le E-espace vectoriel W telle que

$$t \circ q = Q.$$

*Les paires duales réductives (*resp. *relativement réductives) précédentes dans* $O(q)$ *sont des paires duales réductives (resp. relativement réductives) de* $O(Q)$.

5. *La paire duale triviale* $(\{id\}, O(Q))$.

PROPOSITION. — *Soit* (H, H') *une paire duale réductive (resp. relativement réductive) et irréductible de* $O(Q)$. *Alors,* (H, H') *est l'une des paires suivantes :*

1. *Avec les notations de l'exemple* 1, *si W est identifié à W' et que Q est égale à Q', la paire* (SpW_1, SpW_2).
2. *Avec les notations de l'exemple* 2, *si W est identifié à W'' et que Q est égale à Q'', la paire* $(U(W_1), U(W_2))$.
3. *Avec les notations de l'exemple* 3, *si le centre de D est une extension séparable (*resp. *quelconque) de F, que W est identifié à W''' et que Q est égale à Q''', la paire* $(GL\ X_1, GL\ X_2)$ *sauf si* $F = \mathsf{F}_2$ *et* $\dim_F X_i \leq 2$, $i = 1$ *ou* 2.
4. *Les paires obtenues par restriction des scalaires comme dans l'exemple* 4.
5. *La paire duale triviale* $(O(Q), \{id\})$.

Remarque : Si Q est défective, les paires duales réductives (resp. relativement réductives) de $O(Q)$ sont en bijection avec les paires duales réductives (resp. relativement réductives) de $O(Q_{|W_1})$ où W_1 est un supplémentaire de $W^{\perp}$ dans W.

Dans la suite du paragraphe, on établit cette proposition.

On note $Z_G(H)$ le commutant de H dans G.

La démonstration se déroule ainsi. Dans un premier temps, on détermine les paires duales irréductibles et relativement réductives. Pour ce faire, on montre d'abord deux lemmes (§ 1.2 et § 1.3) puis on différencie deux types de paires duales (H, H') :

1. celles dont l'action de $HH'F$ est irréductible (§ 1.4), dites de type hermitien (ou de type I).
2. celles dont l'action de $HH'F$ est réductible (§ 1.5), dites de type linéaire (ou de type II).

Dans un deuxième temps, on extrait de la liste obtenue les paires duales réductives.

1.2 LEMME. — *Soit V un espace vectoriel sur F muni d'une forme bilinéaire $(,)$ ou d'une forme quadratique q et $U(V)$ son groupe d'isométries.*

1. *Si (H, H') est une paire duale de $U(V)$ et si V est $HH'F$ simple, alors il existe une décomposition de V en produit tensoriel*

$$V \simeq V_1 \otimes_D V_2$$

où V_1 (resp. V_2) *est un espace vectoriel à droite (*resp. *à gauche) sur un corps D contenant F dans son centre, telle que $H = \mathrm{End}_D V_1 \cap U(V)$ et $H' = \mathrm{End}_D V_2 \cap U(V)$.*

2. *Si, en outre, la forme bilinéaire $(,)$ est non dégénérée, D est muni d'une involution τ et les espaces vectoriels V_1 et V_2 possèdent une structure hermitienne déterminée à similitude près par celle de V.*

Démonstration [M.V.W Ch. 1] :

Par hypothèse, V est $HH'F$-simple. Comme H et H' commutent, V est $H'F$-semi-simple et isotypique : $V = mV'$ où V' est $H'F$-simple.

Par conséquent, la sous-algèbre $B = \mathrm{End}_{H'F} V$ de $\mathrm{End}_F V$ est simple.

Par le théorème du bicommutant [B], B est égale au commutant de $B' = \mathrm{End}_{BF} V$. D'où $B = \mathrm{End}_{B'F} V = \mathrm{End}_{H'F} V$. De même, $B' = \mathrm{End}_{BF} V = \mathrm{End}_{HF} V$.

Les algèbres B et B' agissent semi-simplement sur V donc (B, B') est une paire duale réductive de $\mathrm{End}_F V$ [M.V.W ch. 1 § 18]. Elle est irréductible car B et B' contiennent respectivement H et H' et (H, H') est nécessairement irréductible.

Ainsi, la paire duale (B, B') correspond à une décomposition en produit tensoriel de V : $V \simeq V_1 \otimes_D V_2$ où $D = \mathrm{End}_{H'F} V'$ est un corps contenant F dans son centre. De plus, $B = \mathrm{End}_D V_1$ et $B' = \mathrm{End}_D V_2$.

Montrons que $H = \mathrm{End}_D V_1 \cap U(V)$. Le groupe H est contenu dans B et $U(V)$ donc

$$H \subset \mathrm{End}_D V_1 \cap U(V).$$

De plus, $B \cap U(V)$ est un sous-groupe de $U(V)$ qui commute avec H'. Donc

$$B \cap U(V) \subset Z_{U(V)} H' = H$$

d'où l'égalité voulue. On montre de même que $H' = \mathrm{End}_D V_2 \cap U(V)$. La première partie du lemme est donc démontrée.

On suppose désormais que $(,)$ est non dégénérée. Alors, $(,)$ définit une involution ι sur $\mathrm{End}_F V$ qui laisse stable H et H'. Comme B et B' sont les commutants de H' et H respectivement dans $\mathrm{End}_F V$, $B = \mathrm{End}_D V_1$ et $B' = \mathrm{End}_D V_2$ sont stables sous ι. Il s'en suit que D est muni d'une involution τ [S.W. Ch. 8, cor. 8.3] et que les espaces V_i possèdent une structure hermitienne, définie à similitude près par celle de V [S.W Ch. 8 § 7]. Ceci termine la démonstration du lemme.

1.3. Un lemme géométrique

Soit D un corps contenant F dans son centre et muni d'une involution τ. On suppose, en outre, que D est de dimension finie sur son centre. Soit V un espace vectoriel à droite sur D muni d'une forme hermitienne *tracique* (i.e. ses valeurs sur les couples (v, v), v parcourant V, appartiennent à $\{d + \tau(d), d \in D\}$) ou d'une forme alternée ou d'une forme quadratique q, non dégénérée et non défective. Dans les deux derniers cas, τ est triviale.

On note $U(V)$ son groupe d'isométries.

LEMME. — *Le commutant de $U(V)$ dans $\mathrm{End}_F V$ est isomorphe à $\mathsf{F}_2[X]/X^2$ si V est orthogonal hyperbolique de dimension 2 sur F_2 et est isomorphe à D sinon.*

Démonstration :

1° On rappelle [D.J] qu'une *quasi-symétrie de vecteur a*, non isotrope, est une isométrie de V qui laisse invariant point par point l'orthogonal de a et laisse globalement invariante la droite engendrée par a. Le rapport α d'une quasi-symétrie vérifie : $\alpha \cdot \tau(\alpha) = 1$.

Une *transvection* est une isométrie de V de la forme :

$$\text{pour tout } v \in V,\ v \longmapsto v + a \cdot \alpha < a, v >,\ \alpha \in D \text{ tel que } \tau(\alpha) = \alpha$$

(a nécessairement isotrope. Dans le cas orthogonal, a est non singulier et $\alpha = q(a)^{-1}$).

Un élément σ de $Z_{\mathrm{End}_F V}(U(V))$ commute avec toutes les quasi-symétries et toutes les transvections de $U(V)$.

2° Supposons V non orthogonal; alors σ laisse stables toutes les droites de V. Par conséquent, si $\dim_D V \geq 2$, il existe $\alpha \in D$ tel que

$$\sigma v = v\alpha \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Donc, σ est une homothétie, et $Z_{\mathrm{End}_F V}(U(V)) \simeq D$.

Si $\dim_D V = 1$, alors V s'identifie à D et la forme (,) est donnée par :

$$\forall d_1, d_2 \in D,\ (d_1, d_2) = \tau(d_1) a d_2 \quad \text{où } a \in \{d + \tau(d), d \in D\}.$$

Comme D est de dimension finie sur son centre F', D est commutatif ou un corps de quaternions : a est un élément de F' et $U(V)$ s'identifie à $D^1 = \{d \in D | \tau(d)d = 1\}$.

Soit E le sous-corps engendré par D^1 et F. Pour que D soit le commutant de $U(V)$ dans $\mathrm{End}_F V$, il faut et il suffit que $E = D$ [M.V.W p. 20].

Le corps D est un E-espace vectoriel.

Si D est commutatif, montrons que $\dim_E D = 1$ [Wa]. Pour tout $d \in D$, $d^{-1}\tau(d)$ est un élément de D^1 donc de E. Il existe donc $k \in E$ tel que $\tau(d) = dk$. Si $\dim_E D \geq 2$, alors k est indépendant de d. En prenant, $d = 1$, on trouve $k = 1$ d'où $\tau = id$ ce qui est exclu. Par conséquent, $\dim_E D = 1$ i.e. $D = E$.

Si D est un corps de quaternions et si $(1, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est une base standard de D sur F' [S.W p. 314], on considère les sous-corps commutatifs $K_i = F'(\xi_i)$, $i = 1, 2, 3$. Alors, E contient les sous-corps E_i de D engendrés respectivement par $\{d \in K_i | \tau(d)d = 1\}$ et F. Comme K_i est commutatif, $K_i = E_i$ et $E \supset \bigcup_i K_i$. D'où $E \supset D$ et, par suite, $E = D$.

Dans ce cas, $Z_{\mathrm{End}_F\, W}(U(W)) \simeq D$.

3° Supposons V orthogonal; alors D est commutatif. On note $\nu(q)$ l'indice de q. Un élément σ de $Z_{\mathrm{End}_F\, V}(O(q))$ commute avec toutes les transvections orthogonales et laisse donc invariantes toutes les droites régulières. Si V_1 est un D-espace vectoriel sans éléments singuliers non nuls, alors $\sigma_{|V_1}$ est une homothétie : $\sigma_{|V_1} = \alpha id_{V_1}$, $\alpha \in D$.

- Donc si $\nu(q) = 0$, $\sigma \in Did$ et $Z_{\mathrm{End}_F\, V}(O(q)) \simeq D$.
- Supposons $0 < \nu(q) < n$ et décomposons V en $V = H \oplus H^{\perp}$ où H est hyperbolique de dimension maximale $2\nu(q)$.

Comme $H^{\perp}$ est alors sans éléments singuliers, $\sigma_{|H^{\perp}}$ est une homothétie. Soit $z \in H^{\perp} \setminus \{0\}$. Pour tout $h \in H$ singulier, $q(z+h) = q(z) \neq 0$. Il existe donc $\lambda_h \in D^{\times}$ tel que $\sigma(z+h) = (z+h)\lambda_h$ et par le théorème de Witt [D.J.], il existe $u \in O(q)$ tel que $u(z+h) = z$.

Les endomorphismes σ et u commutent donc : pour tout $h \in H$ singulier,

$$\begin{aligned} u\sigma(z+h) &= \sigma u(z+h) &&= \sigma z \\ &= u(z+h)\lambda_h &&= z\lambda_h. \end{aligned}$$

Donc, $\lambda_h = \lambda$ ne dépend pas de h et $\sigma(h) = h\lambda$ pour tout $h \in H$ singulier. Comme tout élément de H est somme d'éléments singuliers, $\sigma_{|H}$ est λid_H et $\sigma_{|H^{\perp}} = \lambda id_{H^{\perp}}$. Ainsi, σ est une homothétie.

$$Z_{\mathrm{End}_F\, V}(O(q)) \simeq D.$$

Supposons désormais $\nu(q) = n$.

- Si $n > 1$ et $D \neq \mathsf{F}_2$, soit $\{e_i, e_{-i}; i = 1, \ldots, n\}$ une base hyperbolique. Le vecteur $e_1 + e_{-1}$ est non singulier donc : $\sigma(e_1 + e_{-1}) = (e_1 + e_{-1})\lambda$, $\lambda \in D$. Soit z un vecteur non singulier dans l'orthogonal H de e_1 et e_{-1} tel que $q(z) \neq 1$.

Alors $e_1 + e_{-1} + z$ est non singulier : il existe $\lambda_z \in D$ tel que

$$\sigma(e_1 + e_{-1} + z) = (e_1 + e_{-1})\lambda_z + z\lambda_z$$

ce qui équivaut à

$$(e_1 + e_{-1})\lambda + \sigma z = (e_1 + e_{-1})\lambda_z + z\lambda_z$$

d'où

$$\lambda = \lambda_z \text{ et } \sigma z = z\lambda.$$

Si $z \in H$ est singulier, z s'écrit comme somme de deux éléments de H non singuliers : $z = z_1 + z_2$ tels que $q(z_i) \neq 1$, $i = 1, 2$.

D'après, ce qui précède, $\sigma z = z\lambda$.

Ainsi, σ restreint à l'orthogonal de e_1 et e_{-1} est une homothétie. Par le même raisonnement à partir de e_2 et e_{-2}, on conclut que $\sigma \in Did$.

• Si $n > 1$ et $D = \mathbb{F}_2$, il suffit de montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{F}_2$ tel que pour tout i, $\sigma e_i = e_i \lambda$.

Pour $i > 1$, on considère les vecteurs non singuliers $e_1 + e_{-1}$, $e_1 + e_{-1} + e_i$ et $e_1 + e_{-1} + e_{-i}$. Il existe λ, λ_i et λ_{-i} tels que

$$\begin{aligned} \sigma(e_1 + e_{-1}) &= (e_1 + e_{-1})\lambda \\ \sigma(e_1 + e_{-1} + e_i) &= (e_1 + e_{-1})\lambda_i + e_i\lambda_i \\ \sigma(e_1 + e_{-1} + e_{-i}) &= (e_1 + e_{-1})\lambda_{-i} + e_{-i}\lambda_{-i} \end{aligned}$$

d'où $\sigma(e_i + e_{-i}) = (e_i + e_{-i})(\lambda_i + \lambda_{-i}) + e_i\lambda_i + e_{-i}\lambda_{-i}$.

Or $\sigma(e_i + e_{-i})$ est colinéaire à $e_i + e_{-i}$ donc $\lambda_i = \lambda_{-i}$.

De plus, il existe $u \in O(q)$ tel que $u(e_i + e_{-i}) = e_1 + e_{-1}$. D'où $\lambda_i = \lambda$. En faisant de même avec e_2 et e_{-2}, on obtient : $\sigma \in D id$.

Il reste le cas où $n = 1 = \nu(q)$.

• Si $D = \mathbb{F}_2$, un simple calcul montre que

$$Z_{\mathrm{End}_F V}(O(q)) = \left\{0, id, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

et cet anneau est isomorphe à $\mathbb{F}_2[X]/X^2$.

Si $D \neq \mathbb{F}_2$. Soit (e, f) une base hyperbolique de V.

Soient z_1 et z_2 tels que $q(z_1) = q(z_2) = \alpha \neq 0$. Comme z_1 et z_2 sont réguliers, il existe μ_1, $\mu_2 \in D$, tels que $\sigma z_1 = z_1\mu_1$, $\sigma z_2 = z_2\mu_2$. Par le théorème de Witt, il existe $u \in O(q)$ tel que $uz_1 = z_2$. D'où

$$z_2\mu_2 = \sigma z_2 = u\sigma z_1 = z_2\mu_1 \Longrightarrow \mu_2 = \mu_1.$$

Pour tout α, il existe $\mu_\alpha \in D$ tel que, pour tout $z \in V$, tel que $q(z) = \alpha$, $\sigma z = z\mu_\alpha$.

• Si $D = \mathbb{F}_4$ et que $\alpha \notin \mathbb{F}_2$, $q(e\alpha + f(1+\alpha)) = 1$. D'où

$$\sigma(e\alpha + f(1+\alpha)) = (e\alpha + f(1+\alpha))\mu_1$$

ce qui équivaut à

$$\sigma(e+f)\alpha + \sigma(f) = (e+f)\mu_1\alpha + f\mu_1$$

d'où $\sigma(f) = f\mu_1$ et, par suite, $\sigma(e) = e\mu_1$. D'où $\sigma = \mu_1 id$.

• Sinon, soit $\alpha \in D^\times$. Il existe α_1, $\alpha_2 \in D^\times$ tel que

$$\begin{cases} \alpha_i \neq 0 \quad \text{et} \quad 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 1 \neq 0 \\ \alpha_1(\alpha_2 + 1) = \alpha \end{cases}$$

Alors
$$\sigma(e+f) = \sigma(e\alpha_1 + f(1+\alpha_2)) + \sigma(e(\alpha_1+1) + f\alpha_2)$$
$$\iff (e+f)\mu_1 = (e\alpha_1 + (1+\alpha_2))\mu_\alpha + (e(\alpha_1+1) + f\alpha_2)\mu_{(\alpha_1+1)\alpha_2}$$
$$\iff \mu_1 = \mu_\alpha\alpha_1 + \mu_{(\alpha_1+1)\alpha_2}(\alpha_1+1) = \mu_\alpha(1+\alpha_2) + \mu_{(\alpha_1+1)\alpha_2}\alpha_2$$
d'où $\mu_1 = \mu_\alpha$.

Donc, pour tout élément z régulier, $\sigma z = \mu_1 z$. On en déduit que σ est $\mu_1 id$.

Ainsi s'achève la démonstration du lemme.

Remarque : L'hypothèse sur la dimension de D sur F' n'intervient que dans le calcul du commutant du groupe unitaire sur un espace vectoriel de dimension 1.

1.4. Paires duales relativement réductives irréductibles de type hermitien.

Dans ce paragraphe, W est $HH'F$-simple.

D'après le lemme 1.2, il existe une décomposition en produit tensoriel de W,

$$W \simeq W_1 \otimes_D W_2$$

où D est un corps muni d'une involution τ, W_i est un D-espace vectoriel muni d'une forme hermitienne $<,>$, telle que $H = \mathrm{End}_D W_1 \cap O(Q)$ et $H' = \mathrm{End}_D W_2 \cap O(Q)$. Grâce à la classification des involutions [M.V.W Ch. 1], on identifie (D,τ). Cela peut être :

- $\underline{a}$ F et l'involution triviale,
- $\underline{b}$ une extension quadratique séparable F' de F et l'involution définie par l'élément non trivial de Gal(F'/F),
- $\underline{c}$ un corps de quaternions sur F et l'involution canonique,
- $\underline{d}$ un des trois cas précédents où F est remplacée par une extension finie E de F.

Dans les cas $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, la trace réduite $tr_{D|F}$ de D sur F définit une forme bilinéaire non dégénérée par : $(d,d') \longmapsto tr_{D|F}(dd')$.

Dans le cas $\underline{d}$, on considère $t \subset \mathrm{Hom}_F(E,F) \setminus \{0\}$ et la trace réduite $tr_{D|E}$ de D sur E. Alors $t \circ tr_{D|E}$ définit une forme bilinéaire non dégénérée comme précédemment.

On note $t_{D|F}$ l'homomorphisme $tr_{D|F}$ ou $t \circ tr_{D|E}$ selon les cas.

i) On définit alors une forme bilinéaire $\ll,\gg$ sur $W_1 \otimes_D W_2$ par :

$$\ll w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' \gg = t_{D|F}(< w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2), \; w_i, w_i' \in W_i.$$

Les formes bilinéaires $<,>$ et $\ll,\gg$ définissent des involutions sur $\mathrm{End}_F W$. Par le théorème de Skolem-Nœther [S.W. Ch. 8, th. 4.2], ces dernières diffèrent d'un automorphisme intérieur. De plus, elles coïncident sur $\mathrm{End}_D W_1$ et $\mathrm{End}_D W_2$. Nécessairement, cet automorphisme intérieur est défini par un élément du centre de D. Quitte à modifier les formes $<,>_i$ par un élément du centre de D, on peut supposer que la forme alternée $<,>$ est égale à $\ll,\gg$. Les formes hermitiennes $<,>_i$ sont nécessairement non dégénérées comme $<,>$. De plus, $H = \mathrm{End}_D W_1 \cap O(Q) = U(W_1) \cap O(Q)$ et $H' = U(W_2) \cap O(Q)$.

ii) *Identification de* $<,>_1$ et $<,>_2$

On étudie chaque cas séparément :

- *Cas* $\underline{a}$. Comme $<,>$ est alternée, il en va de même d'une des formes $<,>_i$. Par exemple, $<,>_1$ est alternée. Alors, $<,>_2$ est symétrique.

Soit $V = \{v \in W_2, < v, v >_2 = 0\}$. Le sous-espace vectoriel $W_1 \otimes_F V$ est un sous-espace vectoriel de W $HH'F$-stable. Donc, $W_1 \otimes_F V$ est 0 ou W.

Si $W_1 \otimes_F V = 0$ i.e. $V = 0$, alors $U(W_2)$ est réduit à $\{id\}$ (car $u(w_2) + w_2 \in V$ pour tout $w_2 \in W_2$ et tout $u \in U(W_2)$) d'où $H' = \{id\}$. On n'obtient pas de paire duale non triviale.

Si $W_1 \otimes_F V = W$ i.e. $V = W_2$, $<,>_2$ est alternée.

Dans ce cas, les formes $<,>_i$ sont alternées.

- *Cas* $\underline{b}$. Toute forme hermitienne $<,>_i$ définie sur W_i est tracique. La forme $(w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2') \longmapsto tr_{F'/F}(< w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2)$ est donc alternée. Aucune hypothèse supplémentaire n'est nécessaire.

- *Cas* $\underline{c}$. Considérons le sous-espace vectoriel V_1 de W_1 formé des vecteurs w_1 de W_1 tels que $< w_1, w_1 >_1$ soit une trace de D (i.e. $< w_1, w_1 >_1 \in F$). Alors $V_1 \otimes_F W_2$ est $HH'F$-stable : $V_1 \otimes_F W_2$ est donc $\{0\}$ ou W.

Dans le premier cas, $U(W_1)$ est réduit à l'identité [D.J2] : on n'obtient pas de paire duale non triviale.

On s'intéresse donc au deuxième cas c'est-à-dire le cas où $<,>_1$ est tracique. Pour des raisons analogues, seul le cas où $<,>_2$ est tracique peut fournir une paire duale non triviale.

Quand $<,>_1$ et $<,>_2$ sont traciques, on vérifie comme précédemment, que la forme $<,>$ est bien alternée.

Les formes hermitiennes $<,>_i$ sont donc traciques.

- *Cas* $\underline{d}$. On a alors

$$< w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2' > = t \circ tr_{D|E}(< w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2).$$

Prouvons qu'elle est alternée si et seulement si

$$(w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2') \longmapsto tr_{D|E}(< w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2)$$

est alternée.

Il suffit de montrer que si $(,)$ est une forme bilinéaire HH'-invariante sur le E-espace vectoriel W telle que $t\circ(,)$ soit alternée, alors $(,)$ est alternée.

Nécessairement, $(,)$ est symétrique. Soit V le sous-E-espace vectoriel de W formé des vecteurs v tels que $(v,v) = 0$. Ce sous-espace est stable sous HH'. L'hypothèse sur l'action de $HH'F$ sur W implique que V est $\{0\}$ ou W.

Si $V = \{0\}$, le groupe des isométries de $(,)$ est réduit à l'identité car, pour tout élément σ de ce groupe et tout vecteur w de W, $\sigma w + w$ appartient à V. Par conséquent, $H = H' = \{id\}$: ceci ne convient pas.

Donc $V = W$ c'est-à-dire $(,)$ est alternée.

On obtient les mêmes résultats que précédemment.

iii) *Identification de H et H'.*

LEMME. — *Il existe une unique forme quadratique q dont la forme alternée est $<,>$ et telle que $U(W_i) \subset O(q)$ pour $i = 1$ ou 2.*

Démonstration : – Existence de q.

On détermine une forme quadratique q vérifiant les hypothèses voulues dans les cas $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$. Comme q est "associée" à $<,>$, il suffit de la déterminer sur les $w_1 \otimes w_2$, $w_1 \otimes w_2 \in W_1 \otimes_D W_2$.

Cas $\underline{a}$: $q(w_1 \otimes w_2) = 0$ pour tout $w_1 \otimes w_2 \in W$

Cas $\underline{b}$ et $\underline{c}$: $q(w_1 \otimes w_2) = < w_1, w_1 >_1 < w_2, w_2 >_2$

Cas $\underline{d}$: $q(w_1 \otimes w_2) = t \circ q'(w_1 \otimes w_2)$ où q' est l'une des formes quadratiques précédentes sur E.

Vérifions que $U(W_i) \subset O(q)$. Il est clair que $U(W_i)$ est formé d'isométries de $<,>$. Il suffit donc de montrer que, pour tout $u \in U(W_i)$, $w_1 \otimes w_2 \in W$,

$$q(u(w_1 \otimes w_2)) = q(w_1 \otimes w_2).$$

Les trois premiers cas sont clairs. Le dernier est une conséquence des précédents.

La forme quadratique q existe donc.

– Unicité de q.

Soit q' une autre forme quadratique sur W ayant les mêmes propriétés que q. Alors $U(W_i)$ est contenu dans $O(q) \cap O(q')$, donc dans $O(q+q')$. Or, $q+q'$ est additive et définit une forme semi-linéaire de V dans F. Si $q+q'$ est non nulle, son noyau $\mathrm{Ker}(q+q')$ est un sous-espace vectoriel de V stable sous $O(q+q')$ donc sous HH'. Puisque (H,H') est de type hermitien, $\mathrm{Ker}(q+q')$ est nul. Alors $O(q+q')$ est $\{id\}$ (car, pour tout $\sigma \in O(q+q')$, pour tout $v \in V$, $\sigma v + v \in \mathrm{Ker}(q+q')$). D'où $H = H' = \{id\}$ ce qui est impossible. La forme quadratique $q + q'$ est donc nulle.

La forme q est donc unique et le lemme est démontré.

On en déduit :

LEMME. — *Si (H,H') est une paire duale de type hermitien de $O(Q)$, alors Q est la forme quadratique du lemme précédent. Par conséquent, $H = U(W_1)$ et $H' = U(W_2)$.*

La démonstration est analogue à la précédente où Q remplace q' : en effet, H et H' sont contenus dans $O(Q)$ et $O(q)$ donc dans $O(Q+q)$.

La deuxième assertion est immédiate d'après i).

Ainsi, les paires duales relativement réductives de type hermitien sont parmi les paires :

$\underline{a}$ (SpW_1, SpW_2) où W_i est un F-espace vectoriel muni d'une forme alternée $<,>_i$ non dégénérée ;

$\underline{b}$ $(U(W_1), U(W_2))$ où W_i est un F'-espace vectoriel muni d'une forme hermitienne $<,>_i$ non dégénérée et F' une extension quadratique séparable de F muni de l'involution $\tau \in \mathrm{Gal}(F'/F) \setminus \{id\}$;

$\underline{c}$ $(U(W_1), U(W_2))$ où W_i est un D-espace vectoriel muni d'une forme hermitienne tracique $<,>_i$ non dégénérée, et D est un corps de quaternions sur F muni de l'involution canonique ;

$\underline{d}$ l'une des trois précédentes où F est remplacé par E, extension finie de F; à condition que $W_1 \otimes W_2 \simeq W$ et la forme quadratique associée aux formes $<,>_i$ soit Q.

Il reste à s'assurer que ce sont bien des paires duales relativement réductives. On considère la sous-algèbre A de $\mathrm{End}_F W$ engendrée par $U(W_1)$. Dans les trois premiers cas, A est contenue dans $\mathrm{End}_F W_1$ et son commutant dans $\mathrm{End}_F W_1$ est D par le lemme 1.3.

Dans le dernier cas, A est contenue dans $\mathrm{End}_E W_1$ et son commutant dans $\mathrm{End}_E W_1$ est encore D par le lemme 1.3.

Par le théorème du bicommutant, $A = \mathrm{End}_D W_1$. D'où

$$Z_{\mathrm{End}_F W}(A) = \mathrm{End}_D W_2$$

$$\text{et} \quad Z_{O(Q)}(U(W_1)) = \mathrm{End}_D W_2 \cap O(Q) = U(W_2).$$

De même, le commutant de $U(W_2)$ est $U(W_1)$. On obtient bien des paires duales relativement réductives.

1.5. Paires duales relativement réductives de type linéaire.

On suppose maintenant que W n'est pas $HH'F$-simple.

Par hypothèse, il existe un sous-espace vectoriel propre V de W $HH'F$-stable. Comme (H, H') est irréductible, V est nécessairement isotrope. Posons $X = V \cap V^{\perp}$. Alors X est stable sous HH' et est totalement isotrope. De même, $X^{\perp}$ est stable sous HH'. Soit Y un supplémentaire de $X^{\perp}$ dans W stable sous HH'. Alors $X \oplus Y$ est stable sous HH', et est non isotrope. L'espace vectoriel W se décompose en $(X \oplus Y) \oplus (X \oplus Y)^{\perp}$, qui est stable sous HH'. Comme (H, H') est irréductible, $(X \oplus Y)^{\perp}$ est nul. D'où $W = X \oplus Y$ et $\dim X = \dim Y = n$. Montrons que Y est totalement isotrope.

Le sous-espace Y est nécessairement isotrope sinon $W = Y \oplus Y^{\perp}$ et $Y, Y^{\perp}$ sont $HH'F$-stables : (H, H') n'est pas irréductible.

Alors $Y \cap Y^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel non nul, totalement isotrope et invariant sous HH'. En remplaçant X par $Y \cap Y^{\perp}$ dans le raisonnement précédent, on montre que $\dim Y \cap Y^{\perp} = n = \dim Y$ d'où $Y = Y^{\perp}$.

Il existe donc une polarisation complète de $(W, <, >)$ stable sous HH'. Les groupes H et H' s'identifient à des sous-groupes de GLX. L'irréductibilité de (H, H') exige que X ne possède pas de sous-espace vectoriel propre stable sous HH'. En particulier, $X' = \{x \in X, Q(x) = 0\}$ étant un sous-espace vectoriel stable sous HH', est $\{0\}$ ou X.

Si $X' = \{0\}$, un élément u de HH' est trivial sur X (car $u(x) - x \in X$ est singulier) donc aussi sur Y : $H = H' = \{id\}$. Ce n'est pas une paire duale.

Si $X' = X$, Q est déployée et (H, H') s'identifie à une paire duale irréductible de GLX. D'après le lemme 1.2, il existe une décomposition de X en produit tensoriel

$$X \simeq X_1 \otimes_D X_2$$

où X_i est un D-espace vectoriel et D un corps contenant F dans son centre, telle que

$$H = \mathrm{End}_D X_1 \cap GL_D X = GL_D X_1 \quad \text{et} \quad H' = \mathrm{End}_D X_2 \cap GLX = GL_D X_2.$$

Réciproquement, supposons que Q soit déployée et $H = GL_D X_1$, $H' = GL_D X_2$ pour une décomposition en produit tensoriel d'un sous-espace vectoriel singulier X, de dimension maximale.

Déterminons le commutant $Z_{O(Q)}(H)$ de H dans $O(Q)$.

LEMME. — *Avec les notations précédentes, le commutant de H est :*

$$\begin{cases} O(Q) & \textit{si} \quad F = \mathbb{F}_2 \quad \textit{et} \quad \dim_F X_1 = 1 \\ Sp_D(X_2 + X_2^*) & \textit{si} \quad F = \mathbb{F}_2 \quad \textit{et} \quad \dim_F X_1 = 2 \\ GL_D(X_2) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration : L'action de H sur W définit une représentation semi-simple de H dans W. On a

$$W \simeq m_2 X_1 \oplus m_2 X_1^*$$

où X_1 est la représentation naturelle de $GL_D X_1$ dans X_1, X_1^* sa contragrédiente et $m_2 = \dim_D X_2$.

Un élément g de $Z_{O(Q)}(H)$ est un isomorphisme de cette représentation dans elle-même.

Si X_1 et X_1^* ne sont pas isomorphes, g laisse stable les composantes $m_2 X_1$ et $m_2 X_1^*$. L'élément g est donc un élément de $GLX \subset O(Q)$. D'où

$$Z_{O(Q)}(H) = Z_{GLX}(H) = H'.$$

Si X_1 et X_1^* sont isomorphes et si τ est un isomorphisme entre X_1 et X_1^* alors, pour tout $\lambda \in F^{\times}$, on a

$$\tau \circ \lambda id = \lambda^{-1} id \circ \tau.$$

Donc tout élément de $F^\times$ est de carré 1. Le corps F est nécessairement $\mathbf{F}_2$.

On suppose donc $F = \mathbf{F}_2$ et on pose

$$m_1 = \dim_D X_1, \quad d = [D : \mathbf{F}_2] \text{ et } K = \mathbf{F}^\times_{2^{dm_1}}.$$

Le groupe K s'injecte dans $GL_D X_1 \simeq GL(m_1, \mathbf{F}_{2^d})$. Les restrictions de X_1 et X_1^* à K sont encore isomorphes. Soit $\overline{\mathbf{F}}_2$ une clôture algébrique de $\mathbf{F}_2$.

Comme X_1 est isomorphe à X_1^*, $X_1 \otimes_{\mathbf{F}_2} \overline{\mathbf{F}}_2$ est isomorphe à $X_1^* \otimes_{\mathbf{F}_2} \overline{\mathbf{F}}_2$. Maintenant, $X_1 \otimes_{\mathbf{F}_2} \overline{\mathbf{F}}_2$ est une somme de caractères σ de K et X_1^* est nécessairement la somme des σ^{-1}. Il existe donc un entier r, $0 \leq r < m_1 d$ tel que, pour tout $x \in K$, $x^{2^r+1} = 1$, c'est-à-dire que $2^{m_1 d} - 1$ divise $2^r + 1$. D'où $m_1 d = 1$ ou 2,
i.e. $D = \mathbf{F}_2$ et $\dim_{\mathbf{F}_2} X_1 = 1$ ou 2 ou bien $D = \mathbf{F}_4$ et $\dim_{\mathbf{F}_2} X_1 = 2$.

Etudions donc ces trois cas :

- Quand $D = \mathbf{F}_2$ et $\dim_{\mathbf{F}_2} X_1 = 1$, H est $\{id\}$ d'où $H' = O(Q)$.

- Quand $D = \mathbf{F}_2$ et $\dim_{\mathbf{F}_2} X_1 = 2$, X_1 et X_1^* sont isomorphes et W s'identifie, comme H-module à

$$W \simeq X_1 \otimes_{\mathbf{F}_2} (X_2 \oplus X_2^*)$$

L'espace vectoriel $X_2 \oplus X_2^*$ est muni d'une forme alternée et $H = GL(2, \mathbf{F}_2) = Sp(2, \mathbf{F}_2)$. Le commutant de H dans $O(Q)$ est donc $Sp(X_2 \oplus X_2^*)$ d'après l'étude du paragraphe précédent.

- Quand $D = \mathbf{F}_4$ et $\dim_{\mathbf{F}_2} X_1 = 2$, on considère un espace vectoriel V sur $\mathbf{F}_4$ de dimension 2, muni de la forme quadratique q, non dégénérée, non défective d'indice 1. En choisissant une base hyperbolique (e, f) de V, on identifie H au sous-groupe de $O(q)$ formé des $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{F}_4^\times$. Or $O(q)$ est $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1} \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbf{F}_4^\times \right\}$ donc $H \simeq O^+(q)$.

Le commutant de H contient donc $Sp_{\mathbf{F}_4}(X_2 \oplus X_2^*)$.

Réciproquement, soit $(e_1, \ldots, e_{m_2})$ une base de X_2 sur $\mathbf{F}_4$ et $(e_{-1}, \ldots, e_{-m_2})$ la base duale dans X_2^*.

On considère la base hyperbolique $(e_i, \xi e_i, \xi e_{-i}, e_{-i})$ de W sur $\mathbf{F}_2$.

Soit $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note A_α (resp. $A_{\alpha^{-1}} = A_\alpha^{-1}$) la matrice $2m_2 \times 2m_2$, diagonale par blocs dont les m_2 blocs sont égaux à α (resp. α^{-1}).

En tant que sous-groupe de $O(Q)$, $\mathbf{F}_4^\times$ s'identifie à

$$\left\{ id, \begin{pmatrix} A_\alpha & 0 \\ 0 & A_\alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{\alpha^{-1}} & 0 \\ 0 & A_{\alpha^{-1}}^{-1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $O(Q)$ qui commute avec $\mathbf{F}_4^\times$. Alors

$$ad^* + cb^* = id \tag{10}$$

et

$$(11) \qquad \begin{cases} A_\alpha a = a A_\alpha & {}^tA_\alpha^{-1} c = c A_\alpha \\ A_\alpha b = b\,{}^tA_\alpha^{-1} & {}^tA_\alpha^{-1} d = d\,{}^tA_\alpha^{-1} \end{cases}$$

En décomposant a, b, c et d en blocs 2×2 : $a = (a_{ij})$, $b = (b_{ij})$, $c = (c_{ij})$, $d = (d_{ij})$, (11) équivaut à : pour tout (i, j)

1) a_{ij} et d_{ij} appartiennent à $\{0, id, \alpha, \alpha^{-1}\}$,

2) b_{ij} et c_{ij} appartiennent à $\left\{0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ainsi, pour tout (i, j), a_{ij} est une application $\mathbf{F}_2$-linéaire de $\mathbf{F}_4 e_j$ dans $\mathbf{F}_4 e_i$ telle que $a_{ij}(e_j) = 0$ ou e_i ou ξe_i ou $\bar{\xi} e_i$ et $a_{ij}(\xi e_j) = 0$ ou ξe_i ou $\bar{\xi} e_i$ ou e_i respectivement. Donc a_{ij} est la multiplication par un élément de $\mathbf{F}_4$.
De même, b_{ij}, c_{ij} et d_{ij} sont des multiplications par un élément de $\mathbf{F}_4$.
Ainsi a, b, c et d sont à coefficients dans $\mathbf{F}_4$ et (10) implique que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp_{\mathbf{F}_4}(X_2 \oplus X_2^*).$$

Les résultats du lemme sont donc démontrés.

On en déduit que $(GL_D X_1, GL_D X_2)$ est une paire duale relativement réductive de $O(Q)$ sauf si $F = \mathbf{F}_2$ et $\dim_{\mathbf{F}_2} X_i \leq 2$, $i = 1$ ou 2.

On connait désormais toutes les paires duales relativement réductives et irréductibles de $O(Q)$. On reconnait celles qui sont réductives grâce à la remarque 1.1.
Ceci termine la démonstration de la proposition 1.1.

Remarque : Il est clair que, si (H, H') est une paire duale réductive de $O(Q)$, les groupes H et H' sont réductifs.
Si (H, H') est une paire duale de $O(Q)$, telle que H et H' soient réductifs, alors (H, H') est relativement réductive.
En effet, l'hypothèse "W $HH'F$-semi-simple" n'intervient, dans la démonstration précédente, que pour déterminer les paires duales de type linéaire. Dans ce cas, un argument analogue à celui de [M.V.W. Ch. I, 19] utilisant l'hypothèse "H et H' réductifs" fournit le même résultat.

§ 2. Paires duales réductives du groupe pseudosymplectique

Afin de développer une théorie analogue à celle de R. Howe en caractéristique différente de deux, il nous faut déterminer les paires duales réductives d'un groupe pseudosymplectique (cf. I).

Ce paragraphe est consacré à la résolution de ce problème.

2.1. Réduction du problème

Les notations sont celles du § I.1.

Soit (G, G') une paire duale de PsB. On note $\overline{G}$ (resp. $\overline{G}'$) la projection de G (resp. G') sur $O(Q)$.

DÉFINITIONS :

La paire duale (G, G') est *réductive* si W est $\overline{GG}'F$ absolument semi-simple.

La paire (G, G') est *irréductible* s'il n'existe pas de décomposition de W en somme orthogonale stable sous $\overline{GG}'$.

PROPRIÉTÉS. —

a. Toute paire duale (resp. paire duale réductive) est produit de paires duales (resp. réductives et) irréductibles de PsB.

b. Restriction des scalaires : *Soit E une extension séparable de F. Soit $t : E \longrightarrow F$ un homomorphisme F-linéaire tel que la forme bilinéaire $(x, y) \longmapsto t(xy)$ soit non dégénérée. Supposons W muni d'une structure de E-espace vectoriel et soient Q' une E-forme quadratique sur W et B' une forme bilinéaire définissant Q' telles que*

$$t \circ Q' = Q \quad \text{et} \quad t \circ B' = B.$$

Si (G, G') est une paire duale réductive et irréductible, non triviale de PsB' alors (G, G') est une paire duale réductive et irréductible de PsB.

Démonstration de a. : Soit (G, G') une paire duale de PsB. Si elle n'est pas irréductible, on considère une décomposition de W en somme orthogonale stable sous $\overline{GG}'$: $W = W_1 \oplus W_2$.

Pour $i = 1, 2$, on note B_i la restriction de B à $W_i \times W_i$, Q_i celle de Q à W_i et PsB_i le groupe pseudosymplectique au-dessus de $O(Q_i)$ relatif à B_i.

Soit $G_i = \{(\sigma_{|W_i}, f_{|W_i}), (\sigma, f) \in G\}$ et $G'_i = \{(\sigma_{|W_i}, f_{|W_i}), (\sigma, f) \in G'\}$, $i = 1, 2$. Alors G (resp. G') s'identifie à $G_1 \times G_2$ (resp. $G'_1 \times G'_2$).

Par le lemme 1.1, (G_i, G'_i) est une paire duale de PsB_i et (G, G') est produit de (G_1, G'_1) et (G_2, G'_2).

De plus, si (G, G') est réductive alors W_i est $\overline{G}_i\overline{G}'_iF$ absolument semi-simple : (G_i, G'_i) est une paire duale réductive de PsB_i.

En itérant, on montre la propriété a.

Démonstration de b. : Comme E est séparable, l'application F-linéaire de $\mathcal{Q}_a(W_E)$ dans $\mathcal{Q}_a(W_F)$ définie par :

$$f \in \mathcal{Q}_a(W_E) \longmapsto t \circ f \in \mathcal{Q}_a(W_F)$$

est un isomorphisme. Le groupe PsB' s'identifie à un sous-groupe de PsB par : $(\sigma, f) \longmapsto (\sigma, t \circ f)$.

Soit (G, G') une paire duale réductive de PsB'. Montrons que le commutant de G dans PsB est encore G'.

En effet, si (σ', f') est un élément du commutant de G dans PsB, σ' est E-linéaire (prop. 1.1). Soit (σ', f_0') un relèvement de σ' à PsB'. Alors $t \circ f_0' + f'$ est additive, et d'après ce qui précède, il existe $f_a \in \mathcal{Q}_a(W_E)$ telle que

$$t \circ f_0' + f' = t \circ f_a \quad \text{i.e.} \quad f' = t \circ (f_0' + f_a)$$

L'élément $(\sigma', f_0' + f_a)$ appartient donc au commutant de G dans PsB' c'est-à-dire G'. $\square$

Les paires duales, réductives et irréductibles de PsB sont liées à celles de $O(Q)$ par le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1*a*. — *Soit (G, G') une paire duale réductive et irréductible de PsB.*

i) Ou bien, (G, G') est triviale c'est-à-dire de la forme $(\{(id, 0)\}, PsB)$ ou quand W est un plan hyperbolique, $(\mathcal{Q}_a(W), \mathcal{Q}_a(W))$;

ou bien, G et G' sont isomorphes à des sous-groupes de $O(Q)$.

ii) Il existe une paire duale, relativement réductive et irréductible de $O(Q)$, notée (H, H'), telle que :

$$\overline{G} \subset H \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset H'.$$

iii) On suppose que (G, G') n'est pas triviale. Alors, $H^1(\overline{GG}', \mathcal{Q}_a(W)) = 0$.

COROLLAIRE 2.1*b*. — *Si (K, K') est une paire duale, réductive et irréductible de PsB alors toute paire duale réductive et irréductible, non triviale, (G, G') telle que*

$$\overline{G} \subset \overline{K} \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset \overline{K}'$$

est de la forme : $G = sKs^{-1}$, $G' = sK's^{-1}$ pour un $s \in \mathcal{Q}_a(W)$.

On construit alors des paires duales réductives et irréductibles de PsB obtenues en relevant les paires duales réductives, non triviales, et irréductibles de $O(Q)$.

Soit H une composante d'une telle paire duale. On identifie "suffisamment" de sous-groupes K de PsB isomorphes à H (§ 2.3). En calculant les commutant et bicommutant dans PsB de chaque groupe ainsi obtenu (§ 2.4), on démontre le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1*c*. — *Les paires suivantes sont duales, réductives, irréductibles et non triviales dans PsB :*

1. *Avec les notations de l'exemple 1 § 1.1, si W est identifié à W' et que $Q = Q'$,*

   a. la paire (SpW_1, SpW_2) si W_i est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de dimension 2, $i = 1$ ou 2.

b. Sinon, la paire $(SpW_1, O(q_2))$ *où* q_2 *est une forme quadratique sur* W_2 *dont la forme alternée est* $<,>_2$.
Alors, B *est, à une forme alternée près, la forme bilinéaire* B' *définie par :*

$$B'(w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2') = b_1(w_1, w_1') < w_2, w_2' >_2, \quad w_i, w_i' \in W_i,$$

où b_1 *est une forme bilinéaire définissant* $<,>_1$.
De plus, SpW_1 *et* $O(q_2)$ [resp. SpW_2] *désignent les images respectives de*

$$G = \{(\sigma \otimes_F id_{W_2}, f_\sigma) \in PsB' | \sigma \in SpW_1$$
$$\text{et } f_\sigma(w_1 \otimes w_2) = (b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, w_1))q_2(w_2)\}$$
$$\text{et} \quad G' = \{(id_{W_1} \otimes_F \sigma, 0), \sigma \in O(q_2)\} \quad [\text{resp.}\, G' = \{(id_{W_1} \otimes_F \sigma, 0), \sigma \in SpW_2\}]$$

par un élément de $\mathcal{I}(B', B)$ *(cf. p. 7).*

2. *Avec les notations de l'exemple* 2 § 1.1, *si* W *est identifié à* W'' *et que* $Q = Q''$, *la paire* $(U(W_1), U(W_2))$.
Alors B *est, à une forme alternée près, la forme bilinéaire* B'' *définie par*

$$B''(w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2') = tr_{D|F}(\xi < w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2)$$

où ξ *est un générateur d'une extension quadratique séparable de* F *contenue dans* D.
Les groupes $U(W_1)$ *et* $U(W_2)$ *sont les images respectives de*

$$G = \{(\sigma \otimes_D id_{W_2}, 0), \sigma \in U(W_1)\} \quad \text{et} \quad G' = \{(id_{W_1} \otimes_D \sigma, 0), \sigma \in U(W_2)\}$$

par un isomorphisme de $\mathcal{I}(B'', B)$.

3. *Avec les notations de l'exemple* 3 § 1.1, *si* W *est identifié à* W''', *que le centre de* D *est une extension séparable de* F *et que* $Q = Q'''$, *la paire* $(GL_D X_1, GL_D X_2)$ *sauf si* $F = \mathbb{F}_2$ *et* $\dim_F X_i \leq 2$ *pour* $i = 1$ *ou* 2.
Alors, notons Y *un sous-espace vectoriel singulier de dimension* ν, *supplémentaire à* X *et* B''' *la forme bilinéaire définie par :*

$$B'''(x + y, x' + y') = < x, y' >, \quad x, x' \in X, \ y, y' \in Y.$$

La forme $B + B'''$ *est alternée et* $GL_D X_1$, $GL_D X_2$ *désignent les images respectives de*

$$G = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \sigma \otimes_D id_{X_2} & 0 \\ 0 & {}^t\sigma^{-1} \otimes_D id_{X_2} \end{pmatrix}, 0 \right), \sigma \in GL_D X_1 \right\}$$

$$G' = \left\{ \left(\begin{pmatrix} id_{X_1} \otimes_D \sigma & 0 \\ 0 & id_{X_1} \otimes_D {}^t\sigma^{-1} \end{pmatrix}, 0 \right), \sigma \in GL_D X_2 \right\}$$

par un isomorphisme de $\mathcal{I}(B''', B)$.

4. *Les paires précédentes dans un groupe pseudosymplectique* Psb, *défini sur une extension finie* séparable E *de* F.

THÉORÈME 2.1d. — *Si (G, G') est une paire duale, réductive et irréductible de PsB alors (G, G') est triviale ou apparaît dans la liste précédente.*

2.2. Démonstration du théorème 2.1a et de son corollaire

i) On démontre tout d'abord le

LEMME. —

1. *Si K est un sous-groupe de PsB, $K \cap Q_a(W)$ est un sous-groupe distingué de K et un sous-$\overline{K}$-module de $Q_a(W)$.*

2. *Si un sous-groupe K' de PsB commute avec K, alors $\overline{K}'$ est contenu dans $\bigcap_{f_a \in K \cap Q_a(W)} O(f_a)$ et $K \cap Q_a(W)$ est un sous $\overline{KK}'$-module de $Q_a(W)$. Si, en outre, (K, K') est une paire duale, $K \cap Q_a(W)$, $K' \cap Q_a(W)$ et $KK' \cap Q_a(W)$ sont des $\overline{KK}'F$-modules.*

En effet, $K \cap Q_a(W)$ est un sous-groupe distingué de K car $Q_a(W)$ est distingué dans PsB.

De plus, le conjugué de $(id, f_a) \in K \cap Q_a(W)$ par $(\sigma, f) \in K$ est $(id, f_a \cdot \sigma)$ qui est encore dans $K \cap Q_a(W)$: $K \cap Q_a(W)$ est un sous $\overline{K}$-module de $Q_a(W)$.

Soit $(\sigma', f') \in K'$. Si $(id, f_a) \in K$, (σ', f') commute avec (id, f_a) i.e.

$$f_a \cdot \sigma' = f_a$$

donc $\overline{K}' \subset \cap O(f_a)$, où f_a parcourt $Q_a(W) \cap K$.

Par conséquent, $K \cap Q_a(W)$ est stable sous l'action de $\overline{KK}'$ i.e. $K \cap Q_a(W)$ est un $\overline{KK}'$-module.

On suppose que (K, K') est une paire duale. Si $\lambda \in F$ et $f \in K \cap Q_a(W)$, $(id, \lambda f)$ commute encore avec K' : $(id, \lambda f)$ est un élément de $Q_a(W) \cap K$. Donc $K \cap Q_a(W)$ est un $\overline{K}\,\overline{K}'F$-module. De même, $K' \cap Q_a(W)$ et $KK' \cap Q_a(W)$ possèdent une structure de $\overline{K}\,\overline{K}'F$-modules. $\square$

Soit (G, G') une paire duale réductive et irréductible de PsB. On remarque que les sous-$\overline{G}\,\overline{G}'F^2$-modules de $Q_a(W)$ sont en bijection avec les sous-$\overline{G}\,\overline{G}'F$-modules de W ou $W \oplus W$ suivant que F est fini ou local. Cette correspondance est donnée par :

(16)

$$\text{si } F \text{ est fini,} \quad \begin{cases} Q_a(W) & \longrightarrow \quad W \\ f & \longmapsto \quad v \text{ tel que } f(w) = < w, v >^2 \quad \text{pour } w \in W \end{cases}$$

$$\text{si } F \text{ est local,} \quad \begin{cases} Q_a(W) & \longrightarrow \quad W \oplus W \\ f & \longmapsto \quad v_1 + v_2 \text{ tel que } f(w) = < w, v_1 >^2 + \pi_F < w, v_2 >^2 \\ & \qquad\qquad \text{pour } w \in W. \end{cases}$$

D'après le lemme précédent, $GG' \cap \mathcal{Q}_a(W)$ est un sous $\overline{G}\,\overline{G}'F$-module de $\mathcal{Q}_a(W)$. S'il est nul, G et G' sont isomorphes à des sous-groupes de $O(Q)$.

Sinon, $G \cap \mathcal{Q}_a(W)$ ou $G' \cap \mathcal{Q}_a(W)$ n'est pas nul, par exemple $G \cap \mathcal{Q}_a(W)$. Alors $G \cap \mathcal{Q}_a(W)$ contient un sous-$\overline{G}\,\overline{G}'F^2$-module simple de $\mathcal{Q}_a(W)$, formé de formes quadratiques additives invariantes sous $\overline{G}'$. Par (16), ce sous-module correspond à un sous-$\overline{G}\,\overline{G}'F$-module simple N, de W ou $W \oplus W$, selon que F est fini ou local, formé d'éléments invariants sous $\overline{G}'$.

Si W est $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple alors N est isomorphe à W et $\overline{G}'$ est trivial. Si $G' \cap \mathcal{Q}_a(W)$ est nul, (G, G') est la paire $(PsB, \{(id, 0)\})$. Sinon, par le même raisonnement, on montre que $\overline{G}$ est $\{id\}$. La paire (G, G') est donc une paire duale du groupe abélien $\mathcal{Q}_a(W)$ donc $G = G' = \mathcal{Q}_a(W)$. Elle est irréductible si et seulement si W est un plan (sinon W est somme orthogonale de plans stables sous $\overline{G}\,\overline{G}' = \{id\}$.).

Si W n'est pas $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple, il existe un sous-espace vectoriel X, de W, non nul, stable sous $\overline{G}\,\overline{G}'$. Quitte à considérer $X \cap X^{\perp}$ au lieu de X, on peut supposer que X est totalement isotrope. Par le même raisonnement qu'en 1.5, on prouve que $\overline{G}$ et $\overline{G}'$ s'identifient à des sous-groupes de GLX, qui commutent entre eux et que X est de dimension maximale. Comme (G, G') est irréductible, X est $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple. Par conséquent, W est somme de composantes simples X ou X^*.

Ceci entraîne que tout élément de $\overline{G}'$ est trivial sur X ou X^*. Donc, $\overline{G}'$ est réduit à $\{id\}$. On conclut comme au cas précédent.

ii) On différencie deux cas selon que W est ou n'est pas $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple.

Premier cas : W est $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple :
$(Z_{O(Q)}Z_{O(Q)}(\overline{G}), Z_{O(Q)}(\overline{G}))$ est une paire duale de $O(Q)$ telle que

$$\overline{G} \subset Z_{O(Q)}Z_{O(Q)}(\overline{G}) \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset Z_{O(Q)}(\overline{G}).$$

Elle est donc irréductible, de type hermitien donc relativement réductive (cf. § 1.5). Cette paire duale convient.

Deuxième cas : W n'est pas $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple. D'après i), il existe un sous-espace vectoriel X, totalement isotrope de dimension maximale, $\overline{G}\,\overline{G}'F$-stable et $\overline{G}\,\overline{G}'F$-simple. Donc, X est singulier ou de dimension 1 et non singulier.

Dans le premier cas, il existe une décomposition de X en produit tensoriel, $X \simeq X_1 \otimes_D X_2$, D contenant F dans son centre, telle que

$$\overline{G} \subset GL_D X_1, \quad \overline{G}' \subset GL_D X_2.$$

Si $(GL_D X_1, GL_D X_2)$ est une paire duale, elle convient. Sinon, on prend $H = Sp(2, \mathsf{F}_2)$ et $H' = Sp(n, \mathsf{F}_2)$ (cf. § 1.5).

Dans le deuxième cas, $\overline{G}\,\overline{G}'$ est réduit à $\{id\}$. La paire duale réductive triviale convient.

iii) On note (H, H') une paire duale relativement réductive et irréductible de $O(Q)$ telle que

$$\overline{G} \subset H \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset H'.$$

LEMME a. — *Si le centre de $\overline{G}\,\overline{G}'$ n'est pas trivial, alors $H^1(\overline{G}\,\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W)) = 0$.*

En effet, le centre de $\overline{G}\,\overline{G}'$ est contenu dans celui de HH' : il est formé d'homothéties centrales. Le raisonnement du lemme $A.2a$ montre que

$$H^1(\overline{G}\,\overline{G}',\ \mathcal{Q}_a(W)) = 0.$$

On suppose désormais que le centre de $\overline{G}\,\overline{G}'$ (qui est aussi celui de $\overline{G}$ et $\overline{G}'$) est trivial.

LEMME b. — *En tant que groupes, $H^1(\overline{G}\,\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W)) \simeq (H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'})^{[F:F^2]}$.*

Démonstration : On applique la suite de Hochschild-Serre au groupe $\overline{G}\,\overline{G}'$ et à son sous-groupe distingué $\overline{G}$ (prop. A.1) :

$$0 \longrightarrow H^1(\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}}) \longrightarrow H^1(\overline{G}\,\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W)) \xrightarrow{r}$$
$$H^1(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W))^{\overline{G}'} \longrightarrow H^2(\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}})$$

où l'action de $\overline{G}'$ sur $H^1(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W))$ est donnée par :
si $\sigma' \in \overline{G}'$ et $d \in Der(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W))$ alors $\sigma' \cdot d$ est l'image de la dérivation $\sigma \longmapsto (d(\sigma))\cdot\sigma'$ dans $H^1(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W))$;
et où r est l'homomorphisme induit par la restriction :

$$\sigma \in Der(\overline{G}\,\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W)) \longmapsto \delta_{|\overline{G}} \in Der(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W)).$$

Or, pour toute forme quadratique f de $\mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}}$, (id, f) commute avec G donc appartient à G' : par i), $\mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}}$ est nul. D'où

$$H^1(\overline{G}\,\overline{G}', \mathcal{Q}_a(W)) \simeq H^1(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W))^{\overline{G}'}.$$

De plus, $\mathcal{Q}_a(W) \simeq W$ ou $W \oplus W$ selon que F est parfait ou non, et $\overline{G}\,\overline{G}'$ respecte cette décomposition, donc :

$$H^1(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W))^{\overline{G}'} \simeq (H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'})^{[F:F^2]}.$$

$\square$

Montrons donc que $H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'}$ est nul. On distingue deux cas suivant le type de (H, H').

1. (H, H') est de type hermitien : il existe une décomposition de W en produit tensoriel hermitien : $W \simeq W_1 \otimes_D W_2$ telle que

$$\begin{aligned} \overline{G} \subset H &= U(W_1), \\ \overline{G}' \subset H' &= U(W_2). \end{aligned}$$

D'où,

$$H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'} \simeq H^1(\overline{G}, W_1 \otimes_D W_2)^{\overline{G}'} \simeq H^1(\overline{G}, W_1) \otimes_D W_2^{\overline{G}'}.$$

On conclut par :

LEMME c. — $W_2^{\overline{G}'} = \{0\}$.

Démonstration : Il suffit de remarquer que :

- l'irréductibilité de (G, G') implique que $\overline{G}'$ ne laisse stable aucune décomposition en somme orthogonale de W_2.

- l'action de $\overline{G}'$ sur W_2 est semi-simple.

Si $W_2^{\overline{G}'}$ est non nul, un raisonnement analogue à celui du § 1.5 démontre l'existence d'une polarisation complète de W_2 stable sous $\overline{G}'$: $W_2 = X_2 \oplus Y_2$, où $X_2 \subset W_2^{\overline{G}'}$. En outre, tout élément σ' de $\overline{G}'$ agit trivialement sur X_2, donc sur W_2. Par conséquent, G' est $\{(id, 0)\}$ ce qui est exclu. □

2. (H, H') est de type linéaire : soit $X \oplus Y$ une polarisation complète de W stable sous $\overline{G}\,\overline{G}'$. Alors, $H^1(\overline{G}, W)^{\overline{G}'}$ s'identifie à deux copies de $H^1(\overline{G}, X)^{\overline{G}'}$. Comme précédemment, il existe une décomposition en produit tensoriel de X : $X \simeq X_1 \otimes_D X_2$ telle que $\overline{G} \subset GL_D X_1$, $\overline{G}' \subset GL_D X_2$.

Donc

$$H^1(\overline{G}, X)^{\overline{G}'} \simeq H^1(\overline{G}, X_1) \otimes_D X_2^{\overline{G}'}.$$

L'irréductibilité de (G, G') implique que $X_2^{\overline{G}'}$ est nul ou X_2.

Si $X_2^{\overline{G}'} = X_2$, $G' = \{(id, 0)\}$. Ce cas est exclu.
Si $X_2^{\overline{G}'} = 0$ alors $H^1(\overline{G}, X)^{\overline{G}'} = \{0\}$.

Ceci termine la démonstration du théorème.

Démonstration du corollaire :

S'il existe $s \in Q_a(W)$ tel que $G \subset sKs^{-1}$ et $G' \subset sK's^{-1}$ alors $G = sKs^{-1}$ et $G' = sK's^{-1}$ (car (G, G') est une paire duale).

Par hypothèse, tout élément g de $\overline{G}\,\overline{G}'$ s'écrit : $g = k \cdot (id, \delta(g))$, $k \in KK'$, $\delta(g) \in Q_a(W)$. Alors δ définit une dérivation sur $\overline{G}\,\overline{G}'$ à valeurs dans $Q_a(W)$. Par le théorème précédent (iii), δ est nécessairement intérieure : il existe $f \in Q_a(W)$ telle que :

$$\forall \sigma \in \overline{G}\,\overline{G}', \quad \delta(\sigma) = f \cdot (\sigma + 1).$$

Alors $s = (id, f)$ convient. □

Compte tenu de la propriété 2.1b, on ne considère désormais que des paires duales réductives, irréductibles, non triviales et qui ne sont pas obtenues par restriction des scalaires.

2.3. Relèvements de SpW_1, $U(W_1)$ et GLX_1 à PsB

On reprend les notations du paragraphe 1.1.

PROPOSITION. — *Soit H un membre d'une paire duale réductive, irréductible, non triviale de $O(Q)$.*

1. *Il existe un relèvement de H à PsB. Ce relèvement est unique à conjugaison près par un élément de $Q_a(W)$ sauf si H est symplectique ou isomorphe à $GL(3, \mathbb{F}_2)$, et peut être, si H est unitaire sur un corps de quaternions.*

2. *Les relèvements de $H = SpW_1$ dans PsB sont (à conjugaison près par un élément de $Q_a(W)$) paramétrés par les $[F : F^2]$-uplets $(q_{2,i})_{i \in I}$ de formes quadratiques sur W_2 dont la forme alternée associée est $<,>_2$, de la façon suivante :*
supposons que $B(w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2') = b_1(w_1, w_1') < w_2, w_2' >_2$ où $b_1(w_1, w_1') + b_1(w_1', w_1) =< w_1, w_1' >_1$.

$$Sp_{(q_{2,i})_{i \in I}} W_1 = \{(\sigma \otimes_F id, f_\sigma) \in PsB | \sigma \in SpW_1, \text{ et}$$
$$f_\sigma(w_1 \otimes w_2) = \textstyle\sum_{i \in I} p_i(b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, w_1)) q_{2,i}(w_2)\}$$

où $|I| = [F : F^2]$, $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ est une base de F sur F^2 et p_i la projection : $p_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j} \varepsilon_i$.

3. *Les relèvements de $H = GL(3, \mathbb{F}_2)$ sont paramétrés (à conjugaison près par un élément de $Q_a(W)$) par les couples de formes quadratiques additives $Q_a(X) \times Q_a(Y)$:*

$$GL_{q,q'}(3, \mathbb{F}_2) = \{(\sigma, f_a) \in PsB / \sigma \in GL(3, \mathbb{F}_2) \text{ et}$$
$$f_a(x_1 \otimes x_2 + y_1 \otimes y_2) =< y_1, d_{X_1} \sigma^{-1} >^2 q(x_2) + < x_1, d_{Y_1} {}^t\sigma >^2 q'(y_2)\}$$

où d_{X_1} et d_{Y_1} sont définies au paragraphe A.2.

Remarque : Cet énoncé contient plus de renseignements que nécessaire. Seule l'existence de ces relèvements est utilisée par la suite.

Suit la démonstration de la proposition :

Existence de relèvements :
Dans le cas 2, on vérifie aussitôt que les groupes $Sp_{(q_{2,i})_{i \in I}} W_1$ sont des sous-groupes de PsB.
Dans les autres cas, on choisit B de la façon suivante :
Si H est linéaire, $B(x + y, x' + y') =< x, y' >$, $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$.
Si H est unitaire, $B(w_1 \otimes_D w_2, w_1' \otimes_D w_2') = tr_{D|F}(\xi < w_1, w_1' >_1 < w_2', w_2 >_2)$ où ξ désigne un générateur d'une extension quadratique séparable contenue dans D.
Alors, $\{(\sigma, 0), \sigma \in H\}$ est un relèvement de H à PsB.

Exhaustivité : On compte les relèvements de H à l'aide de $H^1(H, Q_a(W))$.

- Cas hermitien : En tant que groupes,

$$\begin{aligned} H^1(H,Q_a(W)) &\simeq H^1(H,W)^{[F:F^2]} \simeq H^1(H, W_1 \otimes_D W_2)^{[F:F^2]} \\ &\simeq (H^1(H,W_1)\otimes_D W_2)^{[F:F^2]} \text{ car } W_2^H = W_2 \\ &\simeq H^1(H,W_1)\otimes_D Q_a(W_2). \end{aligned}$$

Or, on connait $H^1(H,W_1)$ (cf. § A.3 et A.4).

Si H est unitaire sur un corps commutatif $H^1(H,Q_a(W))$ est donc trivial : le relèvement de H à PsB est bien unique.

Si H est symplectique, l'isomorphisme de groupes entre $H^1(H,Q_a(W))$ et $H^1(H,W_1)\otimes_F Q_a(W_2)$ est :

$$\begin{cases} H^1(H,W_1)\otimes_F Q_a(W_2) & \longrightarrow \quad H^1(H,Q_a(W)) \\ \qquad \delta\otimes f & \longmapsto \quad D \text{ où } (D\sigma)(\sum_k w_1^k \otimes w_2^k) \\ & \qquad\quad = \sum_k < w_1^k, \delta\sigma^{-1} >_1^2 \cdot f(w_2^k) \end{cases}$$

avec $\sigma \in H$, $w_i^k \in W_i$.

On identifie $H^1(H,W_1)\otimes_F Q_a(W_2)$ à $Q_a(W_2)^{[F:F^2]}$ en choisissant la base $(\delta_i)_{i\in I}$ de $H^1(H,W_1)$ (cf. § A.4).

De plus, $Q_a(W_2)^{[F:F^2]}$ est en bijection avec les $[F:F^2]$-uplets d'éléments de $Q(W)$ dont la forme alternée associée est donnée, par exemple $<,>_2$.

On a alors le paramétrage voulu.

- Cas linéaire. On procède comme précédemment :

$$\begin{aligned} H^1(H,Q_a(W)) &\simeq H^1(H,W)^{[F:F^2]} \simeq H^1(H, X_1\otimes_D X_2 \oplus Y_1 \otimes_D Y_2)^{[F:F^2]} \\ &\simeq (H^1(H,X_1\otimes_D X_2)\oplus H^1(H,Y_1\otimes_D Y_2))^{[F:F^2]} \end{aligned}$$

car H stabilise $X_1\otimes_D X_2$ et $Y_1\otimes_D Y_2$ d'où

$$H^1(H,Q_a(W)) \simeq H^1(H,X_1)\otimes_D Q_a(X_2)\oplus H_1(H,Y_1)\otimes_D Q_a(Y_2).$$

Si $H \neq GL(3,\mathsf{F}_2)$, $H^1(H,Q_a(W))$ est donc nul, (cf. § A.2).
Si $H = GL(3,\mathsf{F}_2)$, $H^1(H,Q_a(W))$ s'identifie à $Q_a(X_2)\oplus Q_a(Y_2)$ par :

$$(f,f') \in Q_a(X_2)\times Q_a(Y_2) \longrightarrow D \in H^1(H,Q_a(W))$$

où, pour tout $\sigma\in H$, tout $x_i^k \in X_i$, $y_i^k \in Y_i$,

$$D\sigma(\sum_k x_1^k\otimes x_2^k + y_1^k \otimes y_2^k) = \sum_k (< y_1^k, d_{X_1}\sigma^{-1} >^2 f(x_2^k) + < x_1^k, d_{Y_1}{}^t\sigma >^2 f'(y_2^k)).$$

Ceci termine la démonstration de la proposition.

2.4. Calculs des commutants et bicommutants

On différencie trois cas selon la nature de G : unitaire, symplectique ou linéaire. Les définitions de B dans les différents cas sont celles du paragraphe 2.3. Dans le cas où G est symplectique, B dépend du choix de b_1 : pour faciliter les calculs, on choisit b_1 définissant la forme quadratique q_1 du lemme a § A.4.

Les notations sont empruntées au paragraphe 1. On note G' le commutant de G dans PsB.

Cas unitaire : $G = \{(\sigma, 0), \sigma \in U(W_1)\}$. Soit $(\sigma', f') \in G'$. Comme $\overline{G}' \subset U(W_2)$, f' est nécessairement additive et invariante sous $\overline{G}$.

Soit $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ une base orthogonale de W_1 et s_i une quasi-symétrie de vecteur e_i. Puisque (σ', f') commute avec s_i, on obtient :

$$f'((s_i + id)e_i \otimes w) = 0 \text{ pour tout } w \in W_2$$

$$\iff f'(e_i \otimes w) = 0, \text{ pour tout } w \in W_2 \text{ car } (s_i + id)e_i \text{ est non nul, colinéaire à } e_i$$

$$\iff f' = 0 \text{ sur } W.$$

Ainsi $G' = \{(\sigma, 0), \sigma \in U(W_2)\}$.

Par symétrie des rôles de G et G', le bicommutant de G' est G : (G, G') est une paire duale de PsB.

Supposons qu'il existe un sous-groupe isomorphe à un groupe unitaire qui n'est pas conjugué à G par un élément de $Q_a(W)$. Par le corollaire 2.1.b, ce groupe ne peut pas être une composante d'une paire duale réductive et irréductible de PsB.

Cas symplectique : On étudie, tout d'abord le cas où $G = Sp_{q_2,q_2} W_1$. Alors $\overline{G}'$ est contenu dans SpW_2. Soit $(\sigma', f') \in G'$. Alors

(17) $\qquad f'$ est additive car $G' \subset PsB$,

(18) $\qquad f' + f_\sigma \cdot \sigma' = f_\sigma + f' \cdot \sigma$ pour tout $(\sigma, f_\sigma) \in G$

i.e. $f'((\sigma + 1)w_1 \otimes w_2) = (b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, w_1))(q_2(\sigma' w_2) + q_2(w_2))$, $w_i \in W_i$, $\sigma \in SpW_1$.

En particulier, si $\sigma \in O(q_1) \subset SpW_1$

$$f'((\sigma + id)w_1 \otimes w_2) = 0.$$

Par choix de q_1, $O(q_1)$ contient un élément σ tel que $(\sigma + id)$ soit inversible. Donc $f' = 0$.

- Si $F \neq \mathbf{F}_2$ ou $\dim_F W_1 > 2$, il existe un élément $\sigma \in SpW_1$, n'appartenant pas à $O(q_1)$. On déduit alors de (18) que $\sigma' \in O(q_2)$.

Ainsi $G' \subset \{(\sigma', 0), \sigma' \in O(q_2)\} \subset G'$: $G' = \{(\sigma', 0), \sigma' \in O(q_2)\}$.

• Si $F = \mathsf{F}_2$, et $\dim_F W_1 = 2$, $G' \subset \{(\sigma', 0), \sigma \in SpW_2\} \subset G'$, donc

$$G' = \{(\sigma, 0), \sigma \in SpW_2\}.$$

Calculons G'', le commutant de G'.

• Si $F \neq \mathsf{F}_2$ ou $\dim_F W_1 > 2$, $\overline{G}''$ est contenu dans $Z_{O(Q)}(O(q_2))$. On déduit du lemme 1.3 que

$$Z_{O(Q)}(O(q_2)) \begin{cases} = SpW_1 \text{ si } (W_2, q_2) \text{ n'est pas un plan hyperbolique sur } \mathsf{F}_2; \\ \text{contient } SpW_1 \text{ et } O(q_2) \text{ si } (W_2, q_2) \text{ est un plan hyperbolique sur } \mathsf{F}_2. \end{cases}$$

Dans le premier cas, on déduit que $\overline{G}'' = SpW_1$. Soit $(\sigma, f) \in G''$. Alors

$$f = f_\sigma + f_a, \quad f_a \in \mathcal{Q}_a(W_1)$$

$$\text{et} \quad f_a \cdot \sigma' = f_a \quad \text{pour tout} \quad \sigma' \in O(q_2) \quad \text{i.e. } f_a = 0.$$

Donc, $G'' = \{(\sigma, f_\sigma), \sigma \in SpW_1\} = G$.

La paire (G, G') est duale.

Dans le deuxième cas, G'' contient G et $O(q_2)$. De plus, $O(q_2)$ permute les deux copies de W_1 : il n'est donc pas contenu dans G. Ainsi

$$G'' \supsetneq G$$

et on n'obtient pas de paire duale.

• Si $F = \mathsf{F}_2$ et $\dim W_1 = 2$, $G' = SpW_2$ a pour commutant $O(q_1)$ et $O(q_1) = SpW_1$ d'où (SpW_1, SpW_2) est une paire duale.

On a donc les paires duales :

$(Sp_{q_2} W_1, O(q_2))$ où W_1 n'est pas un F_2−espace vectoriel de dimension 2 et (W, q_2) n'est pas un plan hyperbolique sur F_2

$(Sp_{q_2} W_1, SpW_2)$ où W_1 est un F_2−espace vectoriel de dimension 2.

On étudie maintenant le cas où $G = Sp_{q_{2,1}, q_{2,2}} W_1$ où $q_{2,1} \neq q_{2,2}$ (F est local).

Remarque : Soit i un relèvement de SpW_1 à PsB. Le groupe SpW_1 contient $O(q_1)$ et la restriction d'une dérivation sur SpW_1 à $O(q_1)$ est intérieure (cf. § A.4). L'image par i de $O(q_1)$ est à conjugaison près par un élément de $\mathcal{Q}_a(W)$, le sous-groupe $\{(\sigma, f_\sigma) \in PsB, \sigma \in O(q_1)\}$. Il suffit donc de considérer les relèvements i tels que $i(O(q_1)) = \{(\sigma, f_\sigma) \in PsB, \sigma \in O(q_1)\}$.

Ainsi, G' est contenu dans le commutant de $O(q_1) = \{(\sigma, f_\sigma), \sigma \in O(q_1)\}$ qui, d'après ce qui précède est $Sp_0 W_2 = \{(\sigma, 0), \sigma \in SpW_2\}$.

Soit $(\sigma',0) \in G'$. Alors $f_\sigma = f_\sigma \cdot \sigma'$ pour tout $(\sigma, f_\sigma) \in G$, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1,2} p_i(q_1(\sigma w_1) + q_1(w_1))(q_{2,i}(\sigma' w_2) + q_{2,i}(w_2)) = 0$$

pour tout $\sigma \in SpW_1$, $w_i \in W_i$.

On peut choisir $w_1 \in W_1$ et $\sigma \in SpW_1$ pour que $q_1(\sigma w_1) + q_1(w_1) \in F^2 \setminus \{0\}$ ou $\pi_F F^2 \setminus \{0\}$ (car q_1 est déployée). D'où les deux conditions :

$$q_{2,i}(\sigma' w_2) = q_{2,i}(w_2), \quad w_2 \in W_2, \quad i = 1,2.$$

Par conséquent,

$$(\sigma',0) \in O(q_{2,1}) \cap O(q_{2,2}) \quad \text{et} \quad G' = O(q_{2,1}) \cap O(q_{2,2}).$$

Le bicommutant G'' de G contient le commutant de $O(q_{2,1})$ et $O(q_{2,2})$, c'est-à-dire $Sp_{q_{2,1},q_{2,1}} W_1$ et $Sp_{q_{2,2},q_{2,2}} W_1$ d'où

$$(id, (b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, w_1)) \cdot (q_{2,1} + q_{2,2})(w_2)) \in G'', \ \sigma \in SpW_1$$

$$\text{et} \qquad G'' \neq G.$$

Le groupe G n'est pas une composante d'une paire duale.

Cas linéaire : Soit $G = \{(\sigma,0), \sigma \in GL_D X_1\}$. Alors $\overline{G}'$ est contenu dans $GL_D X_2$. Donc $(\sigma, f) \in G'$ si et seulement si

$$\begin{cases} \sigma \in GL_D X_2 \\ f \text{ est additive et invariante sous } \overline{G}. \end{cases}$$

Or $\overline{G}$ agit transitivement sur X_1 et X_1^*. La forme quadratique f est donc nulle sur chaque copie de $X_1 \oplus X_1^*$ donc f est nulle sur W. D'où

$$G' = \{(\sigma,0), \ \sigma \in GL_D X_2\}.$$

Par symétrie, le commutant de G' est G. On obtient donc une paire duale de PsB sous les hypothèses de la proposition 1.1.

Si $G = GL_{q,q'}(3, \mathsf{F}_2)$, $q \neq q'$, G ne peut être une composante d'une paire duale réductive et irréductible, par le corollaire 2.1.b.

La proposition 2.1c est la synthèse des résultats obtenus au § 2.4.

2.5. Démonstration du théorème 2.1d

On peut supposer que (G, G') est une paire réductive et irréductible non triviale de PsB.

Soit (H, H') une paire duale réductive de $O(Q)$ telle que :

$$\overline{G}' \subset H \quad \text{et} \quad \overline{G}' \subset H' \quad \text{(théorème 2.1}a\text{.ii)}.$$

Si (H, H') n'est pas (SpW_1, SpW_2) alors par le corollaire 2.1b, (G, G') est un des relèvements de (H, H') à PsB décrits dans la proposition 2.1c.

On suppose donc que $H = SpW_1$ et $H' = SpW_2$. Grâce au corollaire 2.1b, il suffit d'établir le

LEMME. — *Si* $\overline{G} \subset H$ *et* $\overline{G}' \subset H'$, *alors* $\overline{G} \subset O(q_1)$ *ou* $\overline{G}' \subset O(q_2)$ *pour une certaine forme quadratique* q_i *sur* W_i, *dont la forme alternée associée est* $<,>_i$.

Démonstration : Montrons d'abord que $SpW_2 = \bigcup_q O(q)$ où q parcourt l'ensemble $\mathcal{E}$ des formes quadratiques sur W_2 dont la forme alternée est $<,>_2$.

Soit $\sigma \in SpW_2$. On choisit une base $(e_1 \ldots, e_m)$ de W_2 telle que $(e_{r+1}, \ldots, e_m)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(1+\sigma)$. La matrice de $(\sigma - id)$ dans cette base est de la forme

$$m = (\underbrace{\Sigma}_{r} \mid \underbrace{0}_{m-r}) \quad \text{où } \Sigma \text{ est une matrice } m \times r \text{ de rang } r.$$

On note Σ_2 la matrice obtenue à partir de Σ en élevant chaque coefficient au carré. Alors, Σ_2 est de même rang r que Σ puisque, pour toute matrice carrée M, on a

$$\text{dét } M_2 = (\text{dét } M)^2.$$

Si $q \in \mathcal{E}$, q est invariante sous σ si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \quad q(\sigma e_i) = q(e_i)$$

$$\text{i.e.} \quad {}^t\Sigma_2 \cdot \begin{pmatrix} q(e_1) \\ \vdots \\ q(e_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} \quad \text{où les } \alpha_i \text{ ne dépendent que de } \sigma.$$

Or, le système

$${}^t\Sigma_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix}$$

possède au moins une solution : il existe donc $q \in \mathcal{E}$ telle que $\sigma \in O(q)$.

D'où, $SpW_2 \subset \bigcup_{q \in \mathcal{E}} O(q)$. L'inclusion inverse étant claire, on a l'égalité.

Ainsi, $\overline{G}' = \bigcup_{q \in \mathcal{E}} \overline{G}'_q$ avec $\overline{G}'_q = \overline{G}' \cap O(q)$.

Quitte à transporter la situation par un isomorphisme convenable, on peut supposer $B = b_1 <,>_2$ où b_1 est une forme bilinéaire définissant $<,>_1$.

Soit $q \in \mathcal{E}$. Alors, $O(q)$ se relève à PsB par : $\sigma \longmapsto (\sigma, 0)$. Ce relèvement se prolonge à $SpW_1 O(q)$ par :

$$\sigma \in SpW_1 \longmapsto (\sigma, f_{q,\sigma}) \in PsB \quad \text{où} \quad f_{q,\sigma}(w_1 \otimes w_2) = (b_1(\sigma w_1, \sigma w_1) + b_1(w_1, w_1))q(w_2).$$

Pour chaque $q \in \mathcal{E}$, on définit donc une dérivation d_q de $\overline{G}\,\overline{G}'_q$ à coefficients dans $\mathcal{Q}_a(W)$. Soit δ_q son image dans $H^1(\overline{G}\,\overline{G}'_q, \mathcal{Q}_a(W))$. Par la proposition A.1 appliquée à $\overline{G}\,\overline{G}'_q$ et son sous-groupe $\overline{G}'_q$,

$$0 \longrightarrow H^1(\overline{G}, \mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}'_q}) \longrightarrow H^1(\overline{G}\,\overline{G}'_q, \mathcal{Q}_a(W)) \longrightarrow H^1(\overline{G}'_q, \mathcal{Q}_a(W))^{\overline{G}} = 0.$$

Ainsi, $\delta_{q|\overline{G}}$ est à coefficients dans $\mathcal{Q}_a(W)^{\overline{G}'}$: il en est de même pour $d_{q|\overline{G}}$.

Fixons une forme quadratique q de $\mathcal{E}$.

Considérons une autre forme quadratique q' de $\mathcal{E}$ et $d_{q'}$ la dérivation de $\overline{G}\,\overline{G}'_{q'}$ définie comme précédemment. Pour tout $\sigma \in \overline{G}$,

$$\begin{aligned} & (d_q + d_{q'})(\sigma) && = f_{q,\sigma} + f_{q',\sigma} \\ \Longleftrightarrow\quad & d_q(\sigma) + f_{q,\sigma} && = d_{q'}(\sigma) + f_{q',\sigma} \end{aligned}$$

Le membre de droite est invariant sous $\overline{G}'_{q'}$. D'où, pour tout $\sigma \in \overline{G}$, et toute forme quadratique q' de $\mathcal{E}$, la forme quadratique $d_q(\sigma) + f_{\sigma,q}$ est invariante sous $\overline{G}'_{q'}$: elle est donc invariante sous $\overline{G}'$.

Si $\overline{G}$ conserve la forme quadratique $q_1 : w_1 \longmapsto b_1(w_1, w_1)$ alors

$$\overline{G} \subset O(q_1).$$

Sinon, il existe $\sigma \in \overline{G}$ et $w_1 \in W_1$ tels que

$$q_1(\sigma w_1) + q_1(w_1) \neq 0.$$

Alors, la forme quadratique définie sur W_2 par

$$q_2(w_2) = \frac{1}{q_1(\sigma w_1) + q_1(w_1)} d_q(\sigma)(w_1 \otimes w_2) + q(w_2), \quad w_2 \in W_2,$$

est un élément de $\mathcal{E}$, invariant sous $\overline{G}'$ i.e. $\overline{G}' \subset O(q_2)$. $\square$

§ 3. Restriction de l'extension métaplectique aux paires duales réductives

Si G est un sous-groupe de PsB, on note $\widetilde{G}$ son image réciproque dans $\widetilde{PsB}$.

3.1. Réductions du problème

i) D'après l'étude faite au paragraphe I § 2, l'extension métaplectique n'est pas scindée au-dessus des paires duales triviales.

ii) Supposons que (G, G') soit une paire duale réductive, obtenue par restriction des scalaires. Il existe donc une extension convenable E de F, un homomorphisme $tr : E \longrightarrow F$ tels que :

- la forme bilinéaire $(x, y) \longmapsto tr(xy)$ soit non dégénérée.
- W est muni d'une structure de E-espace vectoriel et d'une forme bilinéaire B_E telle que $tr \circ B_E = B$.

Soit ψ_E le caractère de E défini par $\psi_E = \psi \circ tr$. Alors

$$\psi_E \circ B_E = \psi \circ B$$

et en utilisant le modèle décrit en I § 2.2, on montre que :

$$r_{\psi_E} = r_{\psi|PsB_E}$$

où r_{ψ_E} (resp. r_ψ) est la représentation métaplectique de PsB_E (resp. PsB) relativement au caractère ψ_E (resp. ψ).

Démonstration : On définit le caractère $\psi_{X,E}$ du sous-groupe $X \times E$ de $H(B_E)$ par :

$$\psi_{X,E}((x,0)) = \psi_X((x,0)) \quad \text{pour tout} \quad x \in X$$
$$\text{et} \qquad \psi_{X,E}((0,t)) = \psi_E(t) \qquad \text{pour tout} \quad t \in E.$$

Alors

$$\begin{cases} \mathcal{H}(X, \psi_X) & \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(Y) \xrightarrow{\sim} \quad \mathcal{H}(X, \psi_{X,E}) \\ \quad \phi & \longmapsto \qquad \phi' \ \text{ telle que } \ \phi'(x+y, t) = \phi(x+y, trt) \end{cases}.$$

On note i cet isomorphisme. Il entrelace les représentations $r_\psi|_{PsB_E}$ et r_{ψ_E}.

En effet, soit $s = (\sigma, f) \in PsB_E$. On note $s' = (\sigma, trf)$ son image dans PsB. On a :

$$\{w_s \in W / \forall x \in X \cap \sigma X, \ \psi_{X,E}(x)\psi_{X,E}(s^{-1}x)\psi_E(B_E(x,x)) \ = \psi_E(< x, w_s >)\}$$
$$= \{w_{s'} \in W / \forall x \in X \cap \sigma X, \ \psi_X(x)\psi_X(s'^{-1}x)\psi_X(B(x,x)) \ = \psi(< x, w_{s'} >)\}.$$

D'où si $\sigma \in StabX$, pour tout $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$, tout $h \in H(B_E)$,

$$r_{\psi_E}(s)i(\phi)(h) = i(\phi)(s^{-1}(w_s h)) = \phi(s'^{-1}(w_s(w, trt))) = i(r_\psi(s')\phi)(h).$$

Si $\sigma \notin StabX$, pour tout $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$, pour tout $h \in H(B_E)$, un calcul analogue montre que : $r_{\psi_E}(s)(i(\phi))(h) = i(r_\psi(s')\phi)(h)$.

Ainsi

$$r_{\psi_E} \circ i = i \circ r_{\psi|PsB_E}.$$

Par conséquent, si l'image réciproque de GG' dans $\widetilde{PsB_E}$ est scindée, elle l'est encore dans $\widetilde{PsB}$.

Les cas où $E = F$ suffisent.

On ne considère donc que les paires duales réductives et irréductibles, non triviales et non obtenues par restriction des scalaires. On les regarde dans un groupe pseudosymplectique PsB de notre choix, le résultat étant indépendant de ce choix. On prend, dans chaque cas, la forme bilinéaire B définie au paragraphe 2.4.

iii) La dernière réduction se fait grâce au

LEMME. — *Soient K et K' deux sous-groupes de PsB. On suppose que*

1) K et K' commutent,

2) pour tout élément $(\sigma, f) \in K$, la restriction de $\psi \circ f$ à $\operatorname{Ker}(id + \sigma)$ est triviale. Alors $\widetilde{K}$ et $\widetilde{K}'$ commutent dans $\widetilde{PsB}$.

Si (G, G') est une paire duale réductive, irréductible, non triviale, alors G et G' vérifient les hypothèses du lemme. En effet, par le choix de B, l'un au moins des deux groupes, par exemple G est de la forme $G = \{(\sigma, 0), \sigma \in \overline{G}\}$. La condition 2 est satisfaite ainsi que la première.

Ainsi $\widetilde{G}$ et $\widetilde{G}'$ commutent dans $\widetilde{PsB}$. Si l'extension métaplectique est scindée au-dessus de G et de G', alors elle l'est au-dessus de GG'.

Il suffit donc d'étudier la restriction de l'extension métaplectique au-dessus de chaque composante.

Auparavant, démontrons le lemme ci-dessus. La démonstration est semblable à celle des autres caractéristiques [M.V.W Ch. II].

Dans un premier temps, on définit pour chaque élément s de PsB satisfaisant la deuxième hypothèse, un élément M tel que $(s, M) \in \widetilde{PsB}$.

Dans un deuxième temps, on montre que si s' est un élément de PsB qui commute avec s alors un élément de $\widetilde{PsB}$ au-dessus de s' commute avec (s, M). D'où, le lemme précédent.

Soit $s = (\sigma, f) \in PsB$ tel que $\psi \circ f = 1$ sur $\operatorname{Ker}(id + \sigma)$.

Alors, la fonction $w \longmapsto \psi(Q(w) + f(w) + B(\sigma w, w))$ est constante sur les classes modulo $\operatorname{Ker}(id + \sigma)$. On définit M comme suit.

Soit dw une mesure de Haar sur l'espace vectoriel $W/\operatorname{Ker}(id + \sigma)$.

- Si F est fini

$$M \cdot v = \int_{W/\operatorname{Ker}(1+\sigma)} \psi(Q(w) + <\sigma w, w>)\rho_\psi((s + id)w) \cdot v dw, \ v \in \mathcal{V}$$

où $(s + id)w$ désigne l'élément $s(w, 0) \cdot (w, 0)$ de $H(B)$.

– Si F est local, pour un réseau L de $W/\operatorname{Ker}(id+\sigma)$, on définit

$$M_L v = \int_L \psi(Q(w) + <\sigma w, w>) \rho_\psi((s+id)w) \cdot v dw, v \in \mathcal{V}$$

Pour tout v, il existe un réseau L_v de $W/\operatorname{Ker}(id+\sigma)$ tel que pour tout réseau L contenant L_v, $M_L v$ est indépendant de L. Soit M cet élément.

Tout le reste de la démonstration se déroule comme dans [M.V.W Ch II].

3.2. Scindage au-dessus des composantes des paires duales

Cas de GLX_1 et GLX_2.

On est alors dans la situation décrite en I § 2.2.1. Les groupes GLX_1 et GLX_2 sont des sous-groupes de GLX et $\widetilde{PsB}$ est scindée au-dessus de GLX donc également au-dessus de ces sous-groupes.

Cas de SpW_1 et $O(q_2)$.

Comme précédemment, $O(q_2)$ est un sous-groupe de GLX. L'extension métaplectique est scindée sur $O(q_2)$. Le même argument est valable pour montrer que la restriction de $\widetilde{PsB}$ à $\widetilde{SpW_1}$ est scindée quand q_2 est déployée.

En effet, il suffit de considérer le groupe pseudosymplectique PsB' où

$$B'(w_1 \otimes w_2, w_1' \otimes w_2') = < w_1, w_1' >_1 < x_2, y_2' >_2$$

avec $X_2 \oplus Y_2 = W_2$ une polarisation complète en espaces singuliers,

$$w_2 = x_2 + y_2 \text{ et } w_2' = x_2' + y_2', x_2, x_2' \in X_2, \ \ y_2, y_2' \in Y_2.$$

Alors, $X' = W_1 \otimes_F X_2$ est singulier et il existe un isomorphisme entre PsB et PsB' tel que l'image de SpW_1 soit contenue dans GLX'.

Si q_2 n'est pas déployée, on considère l'espace vectoriel quadratique W_2', somme orthogonale de deux copies de W_2, muni de la forme quadratique déployée q_2' telle que, pour tout $(w, w') \in W_2'$, $q_2'(w, w') = q_2(w) + q_2(w') = b_2(w, w) + b_2(w', w')$. Le groupe SpW_1 se plonge dans $Ps(<,>_1 \otimes (b_2 \oplus b_2))$ en prolongeant chaque élément par $(id, 0)$ sur le deuxième facteur. D'après ce qui précède, l'image réciproque de SpW_1, dans $\widetilde{Ps}(<,>_1 \otimes (b_2 \oplus b_2))$ est scindée et par le lemme I 2.3b, l'extension métaplectique $\widetilde{PsB}$ au-dessus de SpW_1 est encore scindée.

Dans tous les cas, la restriction de l'extension métaplectique à SpW_1, $O(q_2)$ et SpW_2 est scindée.

Cas de $U(W_1)$ et $U(W_2)$

Quand F est fini, cette question a été étudiée par P. Gérardin [G] : l'extension métaplectique restreinte à $U(W_i)$ est scindée.

On suppose donc que F est un corps local et on se ramène au cas où W_1 est un plan hermitien hyperbolique sur une extension quadratique F' de F et W_2 est de dimension 1.

i) W_2 est un D-espace vectoriel muni d'une forme hermitienne non dégénérée. L'existence d'une base orthogonale et le lemme I.2.3a permettent de supposer que $\dim_D W_2 = 1$.

ii) Supposons que D soit un corps de quaternions sur F. Alors W_2 s'identifie à D muni de la forme hermitienne : $< d, d' >_2 = \overline{d}ad'$ où $a \in F$.

Le corps D s'écrit :

$$D = F(\xi_1) + F(\xi_1)\xi_2$$

où ξ_1 engendre une extension quadratique séparable de F notée F', et ξ_2 engendre une extension inséparable, quadratique de F.

Soit p : $\left\{\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & F' \\ x + y\xi_2 & \longmapsto & x \end{array}\right.$. L'espace vectoriel $(W_1, p(<,>_1\ a))$ est un espace vectoriel hermitien sur F' noté W'. On a

$$<,> = tr_{F'|F}\, p(<,>_1\ a)$$

$$\text{et} \quad U(W_1) \subset U(W') \subset PsB.$$

S'il existe une section de $U(W')$ dans $\widetilde{U}(W')$, alors sa restriction à $U(W_1)$ définit une section de $U(W_1)$ dans $\widetilde{U}(W_1)$: il suffit donc de montrer que $\widetilde{U}(W')$ est scindée au-dessus de $U(W')$.

On suppose désormais que $D = F'$ est une extension quadratique séparable de F.

iii) En considérant l'espace vectoriel $W_1 \oplus W_1$ muni de la forme hermitienne

$$\ll (w, w'), (v, v') \gg = < w, v >_1 + < w', v' >_1, \quad w, w', v, v' \in W_1$$

et à l'aide du lemme I.2.3b, on se restreint au cas où W_1 est hermitien hyperbolique.

Supposons que W_1 soit de dimension supérieure ou égale à 4. Alors $SU(W_1)$ est le groupe des commutateurs de $U(W_1)$ [D.J, p 47-48] et $H^1(SU(W_1), \mathbf{C}^\times)$ est donc trivial. On applique alors la suite de Hochschild-Serre à $U(W_1)$ est son sous-groupe distingué $SU(W_1)$:

$$0 \longrightarrow H^2(F'^1, \mathbf{C}^\times) \longrightarrow H^2(U(W_1), \mathbf{C}^\times) \longrightarrow H^2(SU(W_1), \mathbf{C}^\times).$$

L'homomorphisme d'inflation est : $\chi \longmapsto \chi \circ (\text{dét}, \text{dét})$. Or, par le théorème 9.5 de [P.R], $SU(W_1)$ n'a pas d'extension d'ordre 2. Il existe donc un élément χ de $H^2(F'^1, \mathbf{C}^\times)$ tel que le cocycle c de $\widetilde{U}(W_1)$ s'écrive : $c(\sigma, \sigma') = \chi(\text{dét}\ \sigma, \text{dét}\ \sigma')$, pour tout σ, σ' de $U(W_1)$. Considérons V un plan hyperbolique contenu dans W_1. Le groupe $U(V)$ s'identifie à un sous-groupe de $U(W_1)$ en prolongeant trivialement chaque élément et la restriction de $\widetilde{U}(W_1)$ à $U(V)$ est isomorphe à $\widetilde{U}(V)$.

Si $\widetilde{U}(V)$ est triviale alors, pour tout σ, σ' de $U(V)$,

$$c(\sigma, \sigma') = 1 \quad \text{i.e. } \chi(\text{dét}\ \sigma, \text{dét}\ \sigma') = 1$$

d'où, χ est trivial. Par suite, c est trivial.

Il reste à prouver que $\widetilde{U}(W_1)$ est scindée quand W_1 est un plan hermitien hyperbolique.

iv) On est donc dans le cas où

$$W \simeq W_1 \otimes_{F'} F' \simeq W_1$$

et $B(w_1, w_1') = tr_{F'|F}(\xi < w_1, w_1' > a_1)$, $a_1 \in F$ et $(1, \xi)$ est une base de F' sur F.

Quitte à transformer ξ en ξa_1, on peut supposer $a_1 = 1$.

Le groupe $U(W_1)$ s'identifie au sous-groupe de $GL(2, F')$ engendré par $SL(2, F)$ et $M = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \overline{d}^{-1} \end{pmatrix},\ d \in F'^* \right\}$.

Pour que $\widetilde{U}(W_1)$ soit scindée, il suffit que le cocycle métaplectique c soit trivial sur $SL(2, F) \times SL(2, F)$, $M \times M$, $SL(2, F) \times M$ et $M \times SL(2, F)$.

Soit (e, f) une base hyperbolique de W_1 sur F'. On note δ la norme de ξ. Dans la base $(e, \xi e, \xi f, f)$, B s'écrit

$$B((x_i), (x_i')) = x_1 x_4' + x_4 x_1' + \delta(x_2 x_3' + x_2' x_3)) + x_2' x_4 + x_1' x_3$$

où

$$(x_i) \text{ représente } (x_1 + \xi x_2)e + (x_4 + \xi x_3)f,$$

$$(x_i') \text{ représente } (x_1' + \xi x_2')e + (x_4' + \xi x_3')f.$$

On considère B' définie par : $B'((x_i), (x_i')) = x_1' x_3 + x_2' x_4$ et la forme quadratique q : $q((x_i)) = x_1 x_4 + \delta x_2 x_3$. La forme quadratique q, étant associée à $B + B'$, définit un isomorphisme entre PsB et PsB'.

L'image de $U(W_1)$ dans PsB' est $\{(\sigma, q \cdot \sigma + q), \sigma \in U(W_1)\}$.

En particulier, si $\sigma \in M$, σ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & & \\ b\delta & a+b & \multicolumn{2}{c}{0} \\ & & a + b/n & \delta b/n \\ \multicolumn{2}{c}{0} & b/n & a/n \end{pmatrix}$$

où $n = a^2 + ab + \delta b^2$ et $q \cdot \sigma + q$ est nulle.

Donc, M est contenu dans GLX où X est l'espace vectoriel singulier engendré par e et ξe. On sait alors que c est trivial sur $M \times M$ (I. §2.2.1).

Par [P.R. th. 9.4], $SL(2, F)$ n'a pas d'extension d'ordre 2 : $\widetilde{SL(2, F)}$ est nécessairement triviale.

Calculons $c(s, s')$ et $c(s', s)$ pour $s \in M$ et $s' \in SL_2(F)$ à partir des formules de r_ψ données en (I §2.2). Pour ce faire, on choisit ψ_X trivial sur X. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble

$$\Big\{ s, s', ss', s's \Big| \quad s = \left(\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha}^{-1} \end{pmatrix}, 0\right),\ \alpha \in F'^*$$

$$\text{et} \qquad s' = \left(\sigma' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, f_{\sigma'}\right) \Big\}.$$

Pour tout $s'' = (\sigma'', f'')$ de $\mathcal{E}$, $X \cap \sigma''X$ est $\{0\}$ ou X, on définit $w_{s''}$ par :

$$\begin{cases} w_{s''} = 0 & \text{si} \quad X \cap \sigma''X = \{0\} \\ w_{s''} \in Y & \text{si} \quad X \cap \sigma''X = X \end{cases}.$$

Soit $\phi \in \mathcal{H}(X, \psi_X)$,

$$\begin{aligned} r_\psi(s)r_\psi(s')\phi(h) &= r_\psi(s)\int_X \phi(s'^{-1}(w_{s'}xh))|c|dx \\ &= |\alpha|^{1/2}\int_X \phi(s'^{-1}(w_{s'}x)\cdot(ss')^{-1}h)|c|dx \\ &= |\alpha|^{1/2}\int_X \phi((ss')^{-1}(sw_{s'}\cdot\sigma x\cdot h))|c|dx \\ &= \textstyle\int_X \phi((ss')^{-1}(sw_{s'}\cdot x\cdot h)|\alpha|^{-1/2}|c|dx = r_\psi(ss')\phi(h) \end{aligned}$$

d'où $c(s,s') = 1$.

De même,

$$\begin{aligned} r_\psi(s')r_\psi(s)\phi(h) &= |\alpha|^{1/2}r_\psi(s')\phi(s^{-1}h) = \textstyle\int_X \phi(s^{-1}s'^{-1}(w_{s'}xh))|c|\ |\alpha|^{1/2}dx \\ &= r(s's)\phi(h) \end{aligned}$$

d'où $c(s',s) = 1$.

Donc, $\widetilde{U}(W_1)$ est scindée.

On a donc montré :

PROPOSITION. — *La restriction de l'extension métaplectique à toute paire duale réductive, irréductible, non triviale, est scindée.*

Annexe 2. Calcul des premiers groupes de cohomologie de certains groupes classiques à coefficients dans leurs modules standard.

A.1. Généralités.

On suit la présentation de [N. Ch. I § 3].

Soient G un groupe et V un G-module à gauche. Le premier groupe de cohomologie de G à coefficients dans V est défini comme suit : une ***dérivation*** (ou 1-*cocycle*) de G dans V est une fonction $\delta : G \to V$ telle que, pour tout $g, g' \in G$, $\delta gg' = \delta g + g\delta g'$.

Les dérivations de G dans V forment un groupe noté $\mathrm{Der}(G, V)$. Ce dernier contient un sous-groupe distingué $\mathrm{Int}(G, V)$ formé des ***dérivations intérieures*** (ou 1-*cobord*) de G dans V c'est-à-dire des fonctions $\delta : G \to V$ de la forme : $\delta g = (g - id)v$, $v \in V$. Par définition, $H^1(G, V) = \mathrm{Der}(G, V)/\operatorname{Int}(G, V)$.

On note V^G l'ensemble des éléments de V invariants sous G.

PROPOSITION [S]. — *Si G' est un sous-groupe distingué de G et V un G-module alors la suite*

$$0 \to H^1(G/G', V^{G'}) \to H^1(G, V) \to H^1(G', V)^{G/G'} \to H^2(G/G', V^{G'})$$

est exacte.

On considère, désormais, un des trois cas particuliers suivants : soit K un corps de caractéristique 2, k son centre.

1) G est un groupe linéaire et V est son module standard i.e.

$$G \simeq GL(m, K) \quad \text{et} \quad V \simeq K^m, \; m \in \mathbb{N}^*.$$

2) G est un groupe symplectique (alors $K = k$) et V son module standard i.e.

$$G \simeq Sp(2m, k) \quad \text{et} \quad V \simeq k^{2m}, \; m \in \mathbb{N}^*.$$

3) G est un groupe unitaire et V son module standard :

$$G \simeq U(m, K) \quad \text{et} \quad V \simeq K^m.$$

Dans le dernier cas, on suppose K commutatif.

Alors $H^1(G, V)$ est muni d'une structure de K-espace vectoriel et est donc déterminé par la donnée d'une base.

Les méthodes utilisées sont empruntées à H. Pollatsek [P]. On généralise ses résultats aux groupes symplectiques sur des corps non parfaits et aux groupes unitaires. D'après H. Pollatsek, le cas des groupes linéaires est étudié par Higman [H].

A.2. Cas linéaire.

On examine, ici, le premier cas où G est un groupe linéaire.

Proposition. — *$H^1(GL(m,K),K^m)$ est nul sauf si $m=3$ et $K=\mathsf{F}_2$.*
L'espace vectoriel $H^1(GL(3,\mathsf{F}_2),\mathsf{F}_2^3)$ est de dimension 1 sur F_2.

Démonstration :

Lemme a. — *Si le centre $Z(G)$ de G n'est pas réduit à $\{id\}$ alors $H^1(Z(G),V)$ est nul.*

En effet, soient g et g' deux éléments de $Z(G)$. La relation $gg'=g'g$ implique que

$$\delta gg' = \delta g'g$$

ce qui équivaut à $(g-id)\delta g' = (g'-id)\delta g$.

Or $Z(G)$ est $k^* id$. Si g et g' sont distincts de id, alors $g-id$ et $g'-id$ sont inversibles et

$$(g-id)^{-1}\delta g = (g'-id)^{-1}\delta g' \text{ pour tout } g,g' \in Z(G)\backslash\{id\}.$$

Il existe donc $v \in V$ tel que $\delta g = (g-id)v$ pour tout $g \in Z(G)$: δ est intérieure et $H^1(Z(G),V)=0$.

On applique alors la proposition A.1, avec $G' = Z(G)$ et on déduit que $H^1(G,V)$ est isomorphe à $H^1(G/Z(G),V^{Z(G)})$. Or $V^{Z(G)} = 0$. Donc $H^1(G,V) = 0$ dès que $Z(G) \neq \{id\}$ i.e. $k \neq \mathsf{F}_2$.

Etudions maintenant le cas où $k=\mathsf{F}_2$. Si $K=\mathsf{F}_2$, G est égal à $SL(m,\mathsf{F}_2)$. Sinon, par la proposition A.1, la nullité de $H^1(SL(m,K),V)$ entraîne celle de $H^1(G,V)$. Calculons donc le premier groupe de cohomologie de $G' = SL(m,K)$ à coefficients dans V.

On note

- $(e_1,\ldots,e_m)$ une base de V sur K,
- $I=\{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}^2 \mid i\neq j\}$,
- pour $(i,j)\in I$, E_{ij} l'élément de G tel que $E_{ij}(e_k) = \delta_{k,j}e_i$, $k\in\{1,\ldots,m\}$, et $B_{ij}(\lambda) = id + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in K^*$.

Proposition b [D.E]. — *Le groupe G' est engendré par les éléments $B_{ij}(\lambda)$, $(i,j)\in I$, $\lambda\in K^*$. Ces derniers sont soumis aux relations :*

(i) $B_{ij}^2(\lambda) = id$ et $B_{ij}(\lambda)B_{ij}(\mu) = B_{ij}(\lambda+\mu)$ pour tout λ,μ de K^*, $\lambda\neq\mu$.

(ii) $B_{ij}(\lambda)$ commute avec $B_{k\ell}(\mu)$ pour tout $k\neq j$ et $\ell \neq i,k$; tout λ et μ de K^*.

(iii) $(B_{ij}(\lambda)B_{jk}(\mu))^2 = B_{ik}(\lambda\mu)$, i, j, k deux à deux distincts, λ et μ dans K^*.

(iv) $B_{ij}(\lambda)B_{ji}(\mu)B_{ij}(\nu) = B_{ji}(\mu\nu\kappa^{-1})B_{ij}(\kappa)B_{ji}(\lambda\mu\kappa^{-1})$ pour tout $(i,j)\in I$, $(\lambda,\mu,\nu)\in K^{*3}$ tel que $\kappa = \lambda+\mu+\lambda\mu\nu \neq 0$.

De plus, si $m=3$ et $K=\mathsf{F}_2$, ces relations caractérisent $SL(3,\mathsf{F}_2)$ à isomorphisme près.

LEMME C. — *Une dérivation $\delta : G' \to V$ est déterminée par ses valeurs sur les générateurs $B_{ij}(\lambda)$.*

Si $m \neq 3$ ou $K \neq \mathsf{F}_2$, il existe m constantes dans K, α_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$, telles que pour tout couple (i,j) de I, tout $\lambda \in K^*$, $\delta B_{ij}(\lambda) = \alpha_j \lambda e_i$.

Si $m = 3$ et $K = \mathsf{F}_2$, il existe $m(m-1)+1$ constantes dans F_2, α_{ij}, $(i,j) \in I$, et β, telles que pour tout $(i,j) \in I$, $\alpha_{ik} + \alpha_{jk} = \beta$ et $\delta B_{ij} = \alpha_{ij} e_i + \beta e_k$ où k est distinct de i et j.

Démonstration : Soient $\delta \in \mathrm{Der}(G', V)$ et $B_{ij}(\lambda)$ un générateur de G'. La relation (i) implique que
$$\delta B_{ij}^2(\lambda) = \lambda E_{ij} \delta B_{ij}(\lambda) = 0 \iff \delta B_{ij}(\lambda) \in \operatorname{Ker} E_{ij}.$$

La j^e coordonnée de $\delta B_{ij}(\lambda)$ est donc nulle.

Supposons d'abord $m = 2$. Alors $\delta B_{ij}(\lambda)$ est donc colinéaire à e_i :
$$\delta B_{ij}(\lambda) = \alpha_j(\lambda) e_i, \ \ \alpha_j : K^* \to K.$$

Si $K = \mathsf{F}_2$, α_j est une constante et le lemme est démontré.
Si $K \neq \mathsf{F}_2$, on considère la relation (iv) : soit $\lambda, \mu, \nu \in K$ tels que $\kappa = \lambda\mu\nu + \lambda + \nu \neq 0$. Alors,
$$\begin{aligned} &\delta B_{ij}(\lambda) B_{ji}(\mu) B_{ij}(\nu) \\ &= \delta B_{ij}(\lambda) + (1 + \lambda E_{ij}) \delta B_{ji}(\mu) + (1 + \lambda E_{ij})(1 + \mu E_{ji}) \delta B_{ij} \\ &= [\alpha_j(\lambda) + \alpha_j(\nu) + \alpha_i(\mu)\lambda + \alpha_j(\nu)\mu\lambda] e_i + [\alpha_i(\mu) + \alpha_j(\nu)\mu] e_j. \end{aligned}$$
De même,
$$\begin{aligned} \delta B_{ji}(\mu\nu\kappa^{-1}) B_{ij}(\kappa) B_{ji}(\lambda\mu\kappa^{-1}) = [\alpha_j(\kappa) + \alpha_i(\lambda\mu\kappa^{-1})\kappa] e_i + [\alpha_i(\mu\nu\kappa^{-1}) + \\ \alpha_i(\lambda\mu\kappa^{-1}) + \alpha_j(\kappa)\kappa^{-1}\nu\mu + \alpha_i(\lambda\mu\kappa^{-1})\nu\mu] e_j. \end{aligned}$$

Si $\mu = \nu = 1$ alors $\kappa = 1$ et (iv) implique
$$\alpha_i(\lambda) + \alpha_j(\lambda) = \alpha_i(1)\lambda + \alpha_j(1)\lambda. \tag{12}$$

Si $\lambda = \mu = 1$, $\nu \neq 1$, alors $\kappa = \nu$ et (iv) implique
$$\alpha_i(\nu^{-1}) + \alpha_i(\nu^{-1})\nu = 0$$
d'où $\alpha_i(\nu) = 0$ pour tout $\nu \neq 1$ et tout i.

Par (i), α_i est additive. Donc, $\alpha_i(1) = 0$. L'application α_i est constante, égale à 0.
Le lemme est donc démontré pour $m = 2$.

On suppose dorénavant $m \geq 3$. On considère alors la relation (ii). On obtient
$$\delta B_{ij}(\lambda) + B_{ij}(\lambda) \delta B_{k\ell}(\mu) = \delta B_{k\ell}(\mu) + B_{k\ell}(\mu) \delta B_{ij}(\lambda)$$

ce qui équivaut à $\lambda E_{ij}\delta B_{k\ell}(\mu) = \mu E_{k\ell}\delta B_{ij}(\lambda)$ pour tout $k \neq i,j$, $\ell \neq i,k$ et $\lambda,\mu \in K^*$. Or l'image de E_{ij} est engendrée par e_i tandis que celle de $E_{k\ell}$ est engendrée par e_k d'où

$$\delta B_{ij}(\lambda) \in \operatorname{Ker} E_{k\ell} \text{ pour tout } k \neq i,j,\ \ell \neq i,k$$

i.e. $\delta B_{ij}(\lambda)$ est combinaison linéaire de e_i et e_k pour tout $k \neq i,j$

i.e. $$\begin{cases} si\ m > 3,\ \delta B_{ij}(\lambda) \text{ est colinéaire à } e_i : \delta B_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij}(\lambda)e_i \\ si\ m = 3,\ \delta B_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij}(\lambda)e_i + \beta_{ij}(\lambda) \end{cases}$$

où α_{ij} et β_{ij} sont des fonctions de K^* dans K.

On sépare les deux cas :

1er cas : $m > 3$. Montrons que les fonctions α_{ij} sont de la forme $\alpha_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij}\lambda$, $\alpha_{ij} \in K$.

Pour ce faire, soit $(i,j,k) \in \{1,\ldots,m\}^3$ tous distincts. La relation (iii) affirme que :

$$\delta(B_{ij}(\lambda)B_{jk}(\mu))^2 = \delta B_{ik}(\lambda\mu),\ \lambda,\mu \in K^*.$$

$\Longleftrightarrow (1 + B_{ij}(\lambda)B_{jk}(\mu))(\delta B_{ij}(\lambda) + B_{ij}(\lambda)\delta B_{jk}(\mu)) = \delta B_{ik}(\lambda\mu)$
$\Longleftrightarrow (\mu E_{jk} + \lambda E_{ij} + \lambda\mu E_{ik})[(\alpha_{ij}(\lambda) + \alpha_{jk}(\mu)\lambda)e_i + \alpha_{jk}(\mu)e_j] = \alpha_{ik}(\lambda\mu)e_i$
$\Longleftrightarrow \alpha_{jk}(\mu)\lambda e_i = \alpha_{ik}(\lambda\mu)e_i$.
En prenant $\mu = 1$, $\lambda \in K^*$, $\alpha_{jk}(1)\lambda = \alpha_{ik}(\lambda)$ pour tout $i,j \neq k$. On pose $\alpha_{jk}(1) = \alpha_{ik}$. Alors, pour tout $j \in \{1,\ldots,m\}$, il existe $\alpha_j \in K$ tel que, pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}\backslash\{j\}$, $\alpha_{ij} = \alpha_j$.

La démonstration de la première assertion du lemme est terminée.

2ème cas : m=3. Si i,j,k,λ et μ sont comme précédemment, alors,

$$\delta B_{ij}(\lambda) + B_{ij}(\lambda)\delta B_{jk}(\mu) = [\alpha_{ij}(\lambda) + \beta_{jk}(\mu) + \alpha_{jk}(\mu)\lambda]e_i + \alpha_{jk}(\mu)e_j + \beta_{ij}(\lambda)e_k$$

et (iii) équivaut à

$$(\alpha_{jk}(\mu)\lambda + \beta_{ij}(\lambda)\mu\lambda e_i + \beta_{ij}(\lambda)\mu e_j = \alpha_{ik}(\lambda\mu)e_i + \beta_{ik}(\lambda\mu)e_j$$

$$\Longleftrightarrow (13) \qquad \begin{cases} \beta_{ik}(\lambda) = \beta_{ij}(1)\lambda \\ \alpha_{ik}(\lambda\mu) + \alpha_{jk}(\mu)\lambda = \beta_{ij}(\lambda)\mu\lambda \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} \beta_{ij}(\lambda) = \beta_i\lambda\ ,\ \beta_i \in K \\ \alpha_{ik}(\lambda) + \alpha_{jk}(1)\lambda = \beta_i\lambda^2\ . \end{cases}$$

Pour $$\begin{aligned} \lambda = \mu, \alpha_{ik}(\lambda^2) &= \alpha_{jk}(\lambda)\lambda + \beta_i\lambda^3 = (\alpha_{ik}(1)\lambda + \beta_j\lambda^2)\lambda + \beta_i\lambda^3 \\ &= \alpha_{jk}(\lambda^2) + \beta_i\lambda^2 = (\alpha_{ik}(1)\lambda^2 + \beta_j\lambda^4) + \beta_i\lambda^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\beta_j(1+\lambda)\lambda^3 = \beta_i(1+\lambda)\lambda^2 .$$

Si $K \neq \mathbf{F}_2$ alors, $\beta_j = \beta_i = 0$ pour tout i,j, et on conclut comme au cas précédent.
Si $K = \mathbf{F}_2$, (13) s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \beta_{ik} = \beta_{ij} \\ \alpha_{ik} + \alpha_{jk} = \beta_{ij}. \end{cases}$$

Comme $\alpha_{ik} + \alpha_{jk}$ est symétrique en i et j, on a $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. En combinant avec la première équation, on montre que tous les β_{ij} sont égaux entre eux. Il existe donc $\beta \in \mathbf{F}_2$, tel que pour tout $(i,j) \in I$,

(14) $\qquad \beta = \alpha_{ik} + \alpha_{jk}$ et $\delta\beta_{ij} = \alpha_{ij}e_i + \beta e_k$ où $\{i,j\} \cup \{k\} = \{1,2,3\}$.

Il reste à examiner (iv) :

$$\delta B_{ij}B_{ji} = \delta\beta_{ij} + B_{ij}\delta B_{ji} = (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})e_i + \alpha_{ji}e_j$$

d'où

$$\delta B_{ij}B_{ji}B_{ij} = \delta B_{ij}B_{ji} + B_{ij}B_{ji}\delta B_{ij} = \delta B_{ji} + B_{ji}\delta B_{ij}B_{ji} = \delta B_{ji}B_{ij}B_{ji}$$

$$\iff (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})e_i + \alpha_{ji}e_j + \alpha_{ij}e_j + \beta e_k = \beta e_k + (\alpha_{ij} + \alpha_{ji})(e_i + e_j).$$

On n'obtient aucune condition supplémentaire. Pour toute valeur de β, les relations (14) définissent une dérivation de $\mathrm{Der}(G', V)$.

Le lemme est entièrement établi.

Conséquences : 1. Si $m > 3$ ou $m = 3$ et $K \neq \mathbf{F}_2$, on définit $v \in V$ par $v = \sum_j \alpha_j e_j$ où les α_j sont déterminés par le lemme c.

Pour tout $(i,j) \in I$, pour tout $\lambda \in K^*$, $\delta B_{ij}(\lambda) = \alpha_j \lambda e_i = (B_{ij}(\lambda) - 1)v$.

Donc, δ est intérieure et $H^1(G', V)$ est nul.

2. Si $m = 3$ et $K = \mathbf{F}_2$, β est égal à 0 ou 1. La dérivation δ est intérieure si et seulement si $\beta = 0$. D'où

$$H^1(G', V) \simeq \mathbf{F}_2.$$

$\square$

Dans la suite, on note d_V l'élément non nul de $H^1(G, V)$.

COROLLAIRE. — *Pour tout corps K, tout entier $m \in \mathbf{N}^*$, $H^1(SL(m,K), K^m)$ est nul sauf si $K = \mathbf{F}_2$ et $m = 3$. De plus, $H^1(SL(3,\mathbf{F}_2), \mathbf{F}_2^3)$ est de dimension 1 sur $\mathbf{F}_2$.*

A.3. Cas unitaire.

Le corps commutatif K est muni d'une involution τ. Soit $V = K^m$ le K-espace vectoriel à droite de dimension m muni d'une forme sesquilinéaire $<,>$, linéaire en la deuxième variable, tracique, non dégénérée et telle que

$$< w, w' > = \tau(< w', w >).$$

Proposition. — *$H^1(U(m,K),K^m)=0$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.*

En effet, le centre $Z(U(m,K))$ de $U(m,K)$ est non trivial, formé des homothéties unitaires. Par le lemme A.2.a, $H^1(Z(U(m,K)),K^m)$ est nul. On conclut, alors, grâce à la proposition A.1.

A.4. Cas symplectique.

On examine le cas où G est un groupe symplectique.

Soit k^2 le corps formé par les carrés de k. On suppose que k admet une base $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ sur k^2, I contenant 0 (on prend $\varepsilon_o = 1$).

Soient $V = X \oplus Y$ une polarisation complète de V et $(e_1,\dots,e_m,e_{-1},\dots,e_{-m})$ une base symplectique de V sur k adaptée à cette polarisation.

On note pour tout $i \in I$, p_i la i^e fonction coordonnée : $p_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$, $j \in I$.

Lemme a. — *Soit q une forme quadratique sur V dont la forme alternée associée est $<,>$. Pour $i \in I$, on définit l'application $\delta_i : SpV \to V$ par :*

$$\forall g \in SpV \ , \ \forall v \in V \ , \ < \delta_i g, gv >= \sqrt{p_i(q(gv)+q(v))}.$$

Alors $\delta_i \in \mathrm{Der}(SpV,V)$ et son image dans $H^1(G,V)$ est indépendante du choix de q.

De plus, $\{\delta_i, i \in I\}$ est un système libre dans $H^1(G,V)$ si et seulement si $k \neq \mathbb{F}_2$ ou $m \neq 1$.

Si $k = \mathbb{F}_2$ et $m = 1$, δ_i est intérieure.

Démonstration : Soit $i \in I$ fixé et $g \in SpV$. L'application $v \mapsto \sqrt{p_i(q(gv)+q(v))}$ est une forme linéaire sur V. Il existe donc un unique vecteur w_g de V tel que

$$< w_g, v >= \sqrt{p_i(q(gv)+q(v))}.$$

Alors $\delta_i g = gw_g$: δ_i est bien définie sur SpV. De plus, si g et g' sont des éléments de SpV, alors pour tout v

$$< \delta_i gg', gg'v >= \sqrt{p_i(q(gg'v)+q(v))}.$$

Or $q(gg'v)+q(v) = q(g(g'v)) + q(g'v) + q(g'v) + q(v)$
d'où

$$< \delta_i gg', gg'v >=< \delta_i g, gg'v > + < \delta_i g', g'v >=< \delta_i g + g\delta_i g', gg'v >$$

i.e.

$$\delta_i gg' = \delta_i g + g\delta_i g' \ .$$

L'application δ est un élément de $\mathrm{Der}(G,V)$.

Considérons une autre forme quadratique q' dont la forme alternée est $<,>$. Elle définit par le procédé précédent, une dérivation δ_i'. Comme $q+q'$ est additive, l'application

$v \mapsto \sqrt{p_i((q+q')(v))}$ est linéaire. Il existe $v_o \in V$ tel que $\sqrt{p_i((q+q')(v))} =< v, v_o >$ pour tout $v \in V$.

D'où

$$< (\delta_i + \delta_i')(g), gv >=< v_o, gv > + < v_o, v >=< gv_o + v_o, gv >$$
$$\text{i.e. } (\delta_i + \delta_i')(g) = (g + id)v_o \text{ pour tout } g \in G .$$

La dérivation $\delta_i + \delta_i'$ est donc intérieure : δ_i ne dépend donc pas du choix de q.

Désormais, on choisit q comme suit :
si $k = \mathsf{F}_2$ et $m = 1$, q est la forme quadratique d'indice 0;
si $k = \mathsf{F}_2$ ou $m \neq 1$, q est la forme quadratique déployée.

On déduit alors la deuxième assertion du lemme a de :

LEMME b. — *Toute dérivation intérieure de SpV, nulle sur $O(q)$, est nulle partout.*

Admettons le lemme b pour l'instant.

Toute combinaison linéaire finie de δ_i, $\sum_{i\in I'} \alpha_i\delta_i$, est nulle sur $O(q)$. Si elle est intérieure, par le lemme b, elle est donc nulle partout : $\forall g \in SpV$, $\sum_{i\in I'} \alpha_i\delta_i g = 0$.

Si $k = \mathsf{F}_2$ et $m = 1$, $SpV = O(q)$ d'où δ_i est intérieure.

Si $k \neq \mathsf{F}_2$ ou $m \neq 1$, on considère les transvections. Si t est une transvection de vecteur a, alors

$$< \delta_i t, tv >=< a, v > \sqrt{p_i(1 + q(a))} \text{ pour tout } i \in I'.$$

Si I' contient 0, en prenant a singulier non nul, on obtient : $\sum_{i\in I'} \alpha_i\delta_i = 0$ d'où $\alpha_o a = 0$ i.e. $\alpha_o = 0$.

On peut donc supposer que $0 \notin I'$.

Pour tout $j \in I'$, on considère $a_j = e_1 + \varepsilon_j e_{-1}$ et t_j la transvection de vecteur a_j. Pour tout $i \in I'$,

$$\delta_i t_j = \sqrt{p_i(1 + q(a_j))}.a_j = \delta_{i,j} a_j$$

d'où

$$\sum_{i\in I'} \alpha_i\delta_i = 0 \implies \forall j \in I',\ \sum_{i\in I'} \alpha_i\delta_i t_j = 0 \implies \forall j \in I',\ \alpha_j = 0.$$

Toute combinaison linéaire finie nulle de δ_i, a tous ses coefficients nuls. La famille $\{\delta_i, i \in I\}$ est un système libre.

Il reste à prouver le lemme b. Si $k = \mathsf{F}_2$ et $m = 1$, $SpV = O(q)$ et le résultat est clair.

Si $k \neq \mathsf{F}_2$ ou $m \neq 1$, soit $\delta \in \mathrm{Int}(SpV, V)$: il existe $v_o \in V$ tel que

$$\forall g \in SpV \ ,\ \delta g = (g - id)v_o.$$

Il suffit de montrer que $O(q)$ contient un élément t tel que $t + id$ soit inversible car, si un tel t existe

$$\delta|_{O(Q)} = 0 \implies \delta t = 0 = (t + id)v_o \implies v_o = 0$$

donc $\delta = 0$ sur SpV.

Construisons t. Grâce aux hypothèses sur k et m, V contient une base $(v_1, \ldots, v_{2n})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, 2n\}$, $q(v_i) = 1$.

Soit t_i la transvection orthogonale de vecteur v_i, $i \in \{1, \ldots, 2n\}$.

Alors $t = \prod_{i=1}^{2n} t_i$ appartient à $O(q)$ et $t + id$ est inversible. $\square$

Quelques calculs sur les δ_i

On suppose $k \neq \mathbf{F}_2$ ou $m \neq 1$. Soit $W = X \oplus Y$ une polarisation complète de W en espaces singuliers pour q. Soit $P \subset SpV$ le stabilisateur de X. Le groupe P est un sous-groupe parabolique. On note ${}^uP$ son radical unipotent, L un sous-groupe de Lévi tel que $L\ {}^uP = P$. Soit $J \in SpV$ défini par : $J(e_k) = e_{-k}$, $J(e_{-k}) = e_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$.

LEMME c. — *Pour tout $i \in I$, $\delta_i|_L = 0$ et $\delta_i J = 0$.*
Si $B = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in {}^uP$ et $u = (u_{k\ell})$ alors $\delta_i B = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{p_i(u_{kk})} e_k$.

Démonstration : Soit $g \in L$. Alors $gX = X$ et $gY = Y$ donc $q(gx) = q(x) = 0$, pour tout $x \in X$ et $q(gy) = q(y) = 0$ pour tout $y \in Y$. Donc $\delta_i g \in X^\perp \cap Y^\perp = X \cap Y = \{0\}$.

La dérivation δ_i est nulle sur L.

De même, J permute X et Y donc $q(Jv) = q(v) = 0$ pour $v \in X \cup Y$ et $\delta_i J \in X^\perp \cap Y^\perp = \{0\}$.

Soit B comme dans l'énoncé. Pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$,

$$< \delta_i B, Be_k >=< \delta_i B, e_k >= 0 \text{ car } q(Be_k) = q(e_k) = 0$$

donc $\delta_i B \in X$.

De plus,

$$\begin{aligned} < \delta_i B, Be_{-k} >=< \delta_i B, e_{-k} > &= \sqrt{p_i(q(Be_{-k}) + q(e_{-k}))} \\ &= \sqrt{p_i[q(e_{-k}) + q(ue_{-k}) + < e_{-k}, ue_{-k} > + q(e_{-k})]} \\ &= \sqrt{p_i(u_{kk})} \end{aligned}$$

d'où $\delta_i B = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{p_i(u_{kk})} e_k$. $\square$

PROPOSITION. — *Si $k = \mathbf{F}_2$ et $m = 1$, $H^1(SpV, V)$ est trivial.*
Si $k \neq \mathbf{F}_2$ ou $m \neq 1$, $H^1(SpV, V)$ est un k-espace vectoriel admettant $\{\delta_i, i \in I\}$ comme base.

Démonstration : [due à H. Pollatsek quand $m \geq 4$, F parfait].

Si $k = \mathbf{F}_2$ et $m = 1$, $SpV = GL(V)$ et le résultat a été établi au § A.2.
On suppose donc $K \neq \mathbf{F}_2$ ou $m \neq 1$. Il suffit de montrer que $\{\delta_i, i \in I\}$ est une famille génératrice de $H^1(SpV, V)$.

Le groupe SpV est engendré par L, $\{id, J\}$ et ${}^uP$. On étudie successivement les restrictions d'une dérivation δ à l'un de ces sous-groupes.

i) *Restriction à L.*

LEMME d. — *Si $k = \mathbf{F}_2$ ou $m \neq 3$, $H^1(L, V)$ est trivial.*
Si $k = \mathbf{F}_2$ et $m = 3$, $H^1(L, V)$ contient quatre éléments distincts.

Démonstration : Les éléments de L sont de la forme $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix}$ où $\alpha \in GLX$ et α^* désigne l'isomorphisme de Y dans Y, dual de α.

On écrit δ sous la forme $\delta A = x(A) + y(A)$ où $x : L \to X$ et $y : L \to Y$.

Alors, puisque $\delta \in \mathrm{Der}(L, V)$,

$$\begin{cases} x(AA') = x(A) + Ax(A') \\ y(AA') = y(A) + Ay(A') \end{cases}$$

et x, y définissent des éléments de $\mathrm{Der}(GLX, X)$ et $\mathrm{Der}(GLY, Y)$ respectivement.

Si $k \neq \mathbf{F}_2$ ou $m \neq 3$, on en déduit que x et y sont intérieures : il existe $u \in X$, $v \in Y$ tels que $x(A) = (\alpha + id)u$, $y(A) = (\alpha^{*-1} + id)v$ d'où $\delta A = (A + id)(u + v)$. La dérivation δ appartient à $Int(L, V)$.

Si $k = \mathbf{F}_2$ et $m = 3$, $H^1(GLX, X) = \{0, d_X\}$ et $H^1(GLY, Y) = \{0, d_Y\}$ (§ A.2) donc

$$\delta A = 0,\ d_X(\alpha),\ d_Y(\alpha^{*-1}) \text{ ou } d_X(\alpha) + d_Y(\alpha^{*-1}) .$$

Ces dérivations sont toutes distinctes sinon d_X ou d_Y serait intérieure. Ceci établit le lemme d.

ii) COROLLAIRE. — *Soit $\delta \in H^1(SpV, V)$. La restriction de δ à $\{1, J\}$ est intérieure.*

Démonstration : Supposons d'abord que $\delta_{|L}$ est intérieure. Quitte à lui ajouter un élément de $\mathrm{Int}(G, V)$, on peut supposer $\delta_{|L} = 0$.

Alors
$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix} J = J \begin{pmatrix} \alpha^{*-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ pour tout } \alpha \in GLX$$
d'où $\delta J = 0$.

Ensuite, supposons que $\delta_{|L}$ ne soit pas intérieure sur L ($k = \mathbf{F}_2$ et $m = 3$). Puisque J est d'ordre 2, δJ est un vecteur de $\mathrm{Ker}(id + J)$: il existe $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbf{F}_2^3$ tels que $\delta J = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i(e_i + e_{-i})$.

Avec les notations du paragraphe A.2, on considère
$A = \begin{pmatrix} B_{ij}(1) & 0 \\ 0 & B_{ji}(1) \end{pmatrix} \in L : \delta A = \alpha_{ij}e_i + \beta e_k + \alpha_{ji}e_{-j} + \beta' e_{-k}$ avec $\beta, \beta' \in \mathbb{F}_2$
et $A' = \begin{pmatrix} B_{ji}(1) & 0 \\ 0 & B_{ij}(1) \end{pmatrix} \in L : \delta A' = \alpha_{ji}e_j + \beta e_k + \alpha_{ij}e_{-i} + \beta' e_{-k}$ avec $\beta, \beta' \in \mathbb{F}_2$.
Alors $AJ = JA'$ d'où $\delta A + J\delta A' = (A + id)\delta J$

$$\iff (\beta + \beta')(e_k + e_{-k}) = \gamma_j e_i + \gamma_i e_{-j}$$
$$\iff \beta + \beta' = \gamma_j = \gamma_i = 0 \text{ pour tout } i, j$$
$$\text{donc } \delta J = 0 \ .$$

Remarque : On a montré, en plus, que si $k = \mathbb{F}_2$ et $m = 3$, seules les images des dérivations 0 et $d_X \oplus d_Y$ dans $H^1(L, V)$ peuvent se prolonger à SpV.

iii) *Restriction à* ${}^uP$.

Soit $\mathcal{S}$ le groupe additif des matrices $m \times m$ symétriques. Le sous-groupe ${}^uP$ s'identifie à $\mathcal{S}$ par $u \in \mathcal{S} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in {}^uP$.
En particulier, ${}^uP$ est abélien.

LEMME e. — *Soit $\delta \in H^1(SpV, V)$, $\delta_{|\,{}^uP}$ est additive et son image est contenue dans X.*

Démonstration : On pose, pour tout $B \in {}^uP$, $\delta(B) = x(B) + y(B)$ où $x : {}^uP \to X$ et $y : {}^uP \to Y$.
Alors, si B et B' appartiennent à ${}^uP$,

$$\text{(15)} \qquad \delta BB' = \delta B + B\delta B' \iff \begin{cases} x(BB') = x(B) + x(B') + By(B') \\ y(BB') = y(B) + y(B') \ . \end{cases}$$

En prenant $B = B'$, (15) implique que $By(B) = 0$.
Si $B = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec u inversible, $y(B) = 0$.
Si $B = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec u quelconque, on considère $B' \in {}^uP$ avec u' inversible.
Comme $BB' = B'B$, $u'y(B) = uy(B') = 0$ d'où $y(B) = 0$ pour tout $B \in {}^uP$, i.e. $\delta = x$. L'image de δ est donc contenue dans X et, par (15),

$$\delta BB' = \delta B + \delta B'.$$

□

LEMME f. — *Si $k = \mathbb{F}_2$ et $m = 3$, seul l'élément trivial de $H^1(L, V)$ se prolonge en un élément de $H^1(G, V)$.*

Démonstration : Soit $\delta \in H^1(L,V)$ se prolongeant en une dérivation sur SpV.
Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & E'_{ij}+E'_{ji} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in {}^uP$ où $E'_{ij}(e_k) = \delta_{k,j}e_i$, et $A = \begin{pmatrix} B_{k\ell}(1) & 0 \\ 0 & B_{\ell k}(1) \end{pmatrix} \in L$.
Si $AB = BA$ alors $\begin{pmatrix} 0 & E'_{ij}+E'_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta A = \begin{pmatrix} E_{k\ell} & 0 \\ 0 & E_{\ell k} \end{pmatrix} \delta B = E_{k\ell}\delta B$.

Or A commute avec B si $\ell \neq i,j$ donc $E_{k\ell}\delta B = \beta_{\ell k}$ ou si $(k,\ell) = (j,i)$ donc $E_{ji}\delta B = \alpha_{ij}e_j$ ou si $(k,\ell) = (i,j)$ donc $E_{ij}\delta B = \alpha_{ji}e_i$ (cf. notations § A.2).
D'où $\delta B = \alpha_{ij}e_i + \alpha_{ji}e_j + \beta e_k$.
Si $(k,\ell) = (k,i)$ alors $AB = B\begin{pmatrix} 1 & E'_{kj}+E'_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$

$$\text{d'où} \begin{pmatrix} 0 & E'_{kj}+E'_{jk}+E'_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta A = (1+A)\delta B + \delta \begin{pmatrix} 1 & E'_{kj}+E'_{jk} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $\beta e_i + \alpha_{ik}e_j + \beta e_k = \alpha_{ij}e_k + (\alpha_{kj}e_k + \alpha_{jk}e_j + \beta e_i) = \beta e_i + \alpha_{jk}e_j + \beta e_k$. Donc, $\alpha_{ik} + \alpha_{jk} = 0$ i.e. $\beta = 0$.

Ainsi δ est intérieure sur L. $\square$

On reprend l'étude de la restriction d'un élément $\delta \in H^1(SpV,V)$ à ${}^uP$. On suppose que δ est nulle sur L et $\{1,J\}$.

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ le sous-groupe de $\mathcal{S}$ formé des matrices alternées et $\mathcal{D}$ celui formé des matrices diagonales. On note encore $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ leurs images dans ${}^uP$. Alors

$$\delta|_{{}^uP} = \delta|_{\mathcal{A}} + \delta|_{\mathcal{D}}.$$

LEMME g. — *Si $\mathcal{A}$ est non nul (i.e. $m > 1$), la restriction de δ à $\mathcal{A}$ est nulle.*

Démonstration : Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix} \in L$. Alors

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha\beta\alpha^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A$$

d'où

$$\alpha.\delta B = \delta \begin{pmatrix} 1 & \alpha\beta\alpha^* \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier si $\beta = bE'_{12} + bE'_{21}$, $b \in k^\times$ et si α est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m=2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } m=3, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & \alpha' \end{pmatrix} \text{ si } m \geq 4$$

avec $\alpha' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ si m pair et $\alpha' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
si m impair.

Alors $\alpha\beta\alpha^* = \beta$ et $(\alpha + id)$ est inversible d'où $\delta B = 0$.

En raisonnant de même pour tous les couples d'indices $(i,j) \in I$, on montre que δ est nulle pour toute matrice B de la forme $\begin{pmatrix} 1 & bE'_{ij} + bE'_{ji} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \in k^\times$.

Or tout élément de $\mathcal{A}$ est somme de telles matrices et δ est additive donc δ est nulle sur $\mathcal{A}$.

LEMME h. — *$\delta|_{\mathcal{D}}$ coïncide avec une combinaison linéaire de δ_i, $i \in I$.*

En effet, soit E'_{ii} l'homomorphisme de Y dans X tel que $E'_{ii}(e_{-j}) = \delta_{i,j}e_i$ pour tout $j \in \{1,\ldots,m\}$.

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\beta = bE'_{11}$, $b \in k^*$, et si $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix}$ avec

$$\alpha = \begin{cases} (1) & \text{si } m = 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } m = 2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } m = 3 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ & & \alpha' \end{pmatrix} & \text{où } \alpha' \text{ est défini comme ci-dessus si } m \geq 4\ . \end{cases}$$

alors $\alpha\beta\alpha^* = \beta$ d'où $\delta\beta \in \operatorname{Ker}(A - id) = ke_1$ i.e. $\delta B = a_1(b)e_1$ où $a_1 : k \to k$ est additive.

On montre de même que pour $i \in \{1,\ldots,m\}$, il existe un homomorphisme additif $a_i : k \to k$ tel que $\delta \begin{pmatrix} 1 & bE'_{ii} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a_i(b)e_i$.

De plus, pour tout $(i,j) \in I$, soit $\alpha \in GLX$ défini par :

$$\alpha(e_k) = \begin{cases} e_k & si \quad k \neq i,j \\ e_i & si \quad k = j \\ e_j & si \quad k = i \end{cases}$$

alors $\alpha E'_{ii}\alpha^* = E'_{jj}$ d'où $a_i = a_j = a$.

Puis, en prenant $\alpha \in GL(X)$ tel que $\alpha(e_j) = e_j$ si $j \neq i$ et $\alpha(e_i) = \lambda e_i$, on montre que $\lambda a(b) = a(\lambda^2 b)$ pour tout $\lambda \in k^*$.

Ainsi, si $B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in {}^u P$, β s'écrit $\beta = \beta_o + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$ où $\beta_o \in \mathcal{A}$ et $\lambda_i \in k$, et il existe un sous-ensemble fini I' de I tel que

$$\delta B = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in I'} \sqrt{p_j(\lambda_i)} a(\varepsilon_j) e_i = \sum_{j \in I'} a(\varepsilon_j) \sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_j(\lambda_i)} e_i = \sum_{j \in I'} a(\varepsilon_j) \delta_j(B)$$

d'après le lemme c.

Le lemme h est donc démontré.

On conclut de cette étude, que, si $\delta \in H^1(SpV, V)$, il existe des constantes a_i, $i \in I$, telles que δ coïncide avec $\sum_{i \in I} a_i \delta_i$ sur L, $\{1, J\}$ et ${}^u P$. D'où

$$\delta = \sum_{i \in I} a_i \delta_i \ .$$

La famille $\{\delta_i, i \in I\}$ est une famille génératrice de $H^1(SpV, V)$.

La proposition est donc établie.

BIBLIOGRAPHIE

[B] N. Bourbaki. — *Algèbre*, Ch. 8, Hermann, Paris.

[D.E] E. Dickson. — *The abstract form of the special linear homogeneous group in an arbitrary field*, Collected papers, Vol. 6, 127-131.

[D.J] J. Dieudonné. — *La géométrie des groupes classiques*, Springer, (1971).

[D.J2] J. Dieudonné. — *On the structure of unitary groups* II, Amer. J. of Math. 75, (1973), 665-678.

[G] P. Gérardin. — *Weil representations associated to finite fields*, J. of Algebra 46, (1977), 54-101.

[H] D.G. Higman. — *Flag-transitive collineation groups of finite projective spaces*, Illinois J. Math. Vol. 6, (1962), 434-446.

[H.R] R. Howe. — *θ-series and invariant theory, in Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Sym. in Pure Math. XXXIII, AMS 1979, 275-286.

[M.V.W] C. Mœglin, M.-F. Vignéras et J.-L. Waldspurger. — *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, Springer, LN 1291.

[N] J. Neukirch. — *Class field Theory*, Springer, (1986).

[P.P] P. Perrin. — *Représentation de Schrödinger, indice de Maslov et groupe métaplectique*, Springer LN 880, 370-407.

[P] H. Pollatsek. — *First cohomology groups of some linear groups over fields of characteristic two*, Illinois J. of Math. 15, (1971), 393-417.

[P.R] G. Prasad et M.S. Raghunathan. — *Topological central extensions of semi-simple groups over local fields*, Ann. of Math. 119, (1984), 143-201.

[S.W] W. Scharlau. — *Quadratic and hermitian forms*, Springer-Verlag, (1985).

[S] J.-P. Serre. — Cohomologie des extensions de groupes, C.R.A.S. Paris 231, (1950), 643-646.

[Wa] J.-L. Waldspurger. — *Notes manuscrites d'un cours à Paris VII en 1989.*

[W] A. Weil. — *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. 111, (1964), 143-211.