David Harari

L'obstruction de Manin : passage des fibres à l'espace total d'une fibration : applications

Thèses d'Orsay, 1993

63683

ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITÉ de PARIS–SUD
Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée

pour obtenir

le grade de Docteur en Sciences

de l'Université Paris XI Orsay

Spécialité : Mathématiques

par

David HARARI

Sujet : **L'obstruction de Manin : passage des fibres à l'espace total d'une fibration; applications**

soutenue le : 25 juin 1993 devant la Commission d'examen

Jean–Pierre SERRE Président
Jean–Louis COLLIOT–THÉLÈNE
Michel RAYNAUD
Jean–Jacques SANSUC
Alexei SKOROBOGATOV

Titre : L'obstruction de Manin : passage des fibres à l'espace total d'une fibration; applications.

Résumé : Le but de la thèse est de présenter un nouvel aspect de la méthode des fibrations qui sert à étudier la validité du principe de Hasse et de l'approximation faible pour certaines variétés définies sur un corps de nombres. La thèse se compose de deux articles. Dans le premier ("Méthode des fibrations et obstruction de Manin"), on établit sous certaines conditions que l'obstruction de Manin au principe de Hasse ou à l'approximation faible est la seule pour l'espace total d'une fibration quand les fibres ont cette même propriété. Pour cela, on s'inspire notamment d'un énoncé dégagé par Skorobogatov. Les résultats généraux obtenus s'appliquent par exemple à certaines hypersurfaces cubiques ou encore aux groupes algébriques linéaires. Dans le deuxième article ("Principe de Hasse et approximation faible sur certaines hypersurfaces"), on mène à bien dans un cas particulier des calculs explicites de groupes de Brauer qui permettent d'avoir une présentation plus concrète des résultats. On retrouve également certains énoncés arithmétiques dans ce cas particulier en utilisant non plus la méthode des fibrations mais la méthode de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc.

Mots-clés : principe de Hasse, approximation faible, groupe de Brauer, obstruction de Manin, théorème d'irréductibilité de Hilbert.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma reconnaissance à Jean-Louis Colliot-Thélène sous la direction duquel ce travail s'est effectué. Cette thèse n'aurait pu voir le jour sans l'aide constante qu'il m'a apportée à chaque étape de la réalisation de ce texte.
Mes remerciements s'adressent également à Jean-Pierre Serre et Michel Raynaud, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury, ainsi qu'à Jean-Jacques Sansuc et Alexei Skorobogatov, qui ont en outre rempli la tâche ingrate d'être rapporteurs.
Je tiens aussi à exprimer ma gratitude au département de mathématiques et informatique de l'Ecole Normale Supérieure qui m'a accueilli et m'a permis de travailler dans des conditions idéales.
Enfin, la place me manque pour citer tous les enseignants que j'ai eus et qui m'ont donné, à coup sûr pour longtemps, le goût des mathématiques. Qu'il me soit permis de leur adresser ici mes sincères remerciements.

Table des matières

Résumé de la thèse

1. Principe de Hasse, approximation faible, obstruction de Manin

Soit k un corps de nombres. On dit qu'une k-variété algébrique lisse X vérifie le *principe de Hasse* (resp. l'*approximation faible*) si la condition $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k implique $X(k) \neq \emptyset$ (resp. $X(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$, muni de sa topologie produit, pour tout ensemble fini S de places de k).

Soit X une k-variété propre, lisse, géométriquement intègre, qui a des points dans tous les complétés de k. On note Ω_k l'ensemble des places de k et $j_v : \mathrm{Br}\, k_v \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ l'invariant de la théorie du corps de classes local. Alors, la condition :

$$\forall (P_v) \in \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v) \quad \exists A \in \mathrm{Br}\, X \quad \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

$$(\text{resp. } \exists A \in \mathrm{Br}\, X \quad \exists (P_v) \in \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v) \quad \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\ )$$

est une obstruction, dite obstruction de Manin (ou de Brauer-Manin), au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour X.

Pour beaucoup de classes de variétés, notamment les hypersurfaces cubiques et les variétés rationnelles (c'est-à-dire dont le corps des fonctions devient transcendant pur sur la clôture algébrique de k), la conjecture raisonnable n'est pas que le principe de Hasse et l'approximation faible sont vérifiés, mais seulement que l'obstruction de Manin à ces propriétés est la seule.

L'objectif de la première partie de la thèse (constituée de l'article "Méthode des fibrations et obstruction de Manin") est de dégager des énoncés permettant de prouver cette conjecture pour l'espace total d'une fibration quand la base et les fibres la vérifient. On généralise ainsi la méthode des fibrations classiques (dont les premiers exemples subtils sont apparus dans les travaux de Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer) qui consistait à démontrer la validité du principe de Hasse et de l'approximation faible pour l'espace total quand la base et les fibres vérifiaient ces propriétés. Cette généralisation se révèle particulièrement utile pour traiter certains exemples, notamment dans le cas où cet espace total est de dimension au moins 3.

Dans la deuxième partie de la thèse (constituée de l'article "Principe de Hasse et approximation faible sur certaines hypersurfaces"), on étudie en détails le cas d'un type particulier de variétés, qui constituent une généralisation des surfaces de Châtelet étudiées par Colliot-Thélène, Sansuc, et Swinnerton-Dyer. Leurs résultats combinés aux résultats généraux de la première partie de cette thèse permettent très simplement de conclure que pour ces variétés, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule (c'est d'ailleurs l'étude de cet exemple qui a motivé la recherche des résultats généraux de la première partie). Il reste alors pour avoir une description plus concrète à mener des calculs explicites de groupes de Brauer; on sait alors exactement quand le principe de Hasse et l'approximation faible valent. Quelques contre-exemples numériques au principe de Hasse et à l'approximation faible montrent que les énoncés obtenus sont les meilleurs possibles. Nous donnons également un aperçu des méthodes de descente qui permettent dans certains cas de retrouver d'une autre façon nos résultats arithmétiques. Ces méthodes (introduites par Colliot-Thélène et Sansuc) ont déjà été employées avec succès dans d'autres situations.

2. Éléments ramifiés du groupe de Brauer d'un corps de fonctions

La première étape de notre travail consiste à prouver l'énoncé suivant :

Théorème 1. *Soient k un corps de nombres et X une k-variété géométriquement intègre, projective et lisse, dont on note $k(X)$ le corps des fonctions. Soient α un élément de $\mathrm{Br}\,(k(X))$ qui n'est pas dans $\mathrm{Br}\,X$ et U un ouvert de Zariski non vide de X tel que $\alpha \in \mathrm{Br}\,U$. Alors, il existe une infinité de places v de k telles que la flèche $U(k_v) \to \mathrm{Br}\,k_v$ induite par α prenne une valeur non nulle.*

On trouve déjà ce résultat chez Serre dans le cas où X est l'espace projectif (sous une forme quantitative plus précise). La preuve utilise notamment le théorème de densité de Tchebotarev, aussi bien sous sa forme arithmétique que sous sa forme géométrique. Il faut également utiliser les propriétés des flèches de résidu.
On obtient alors purement formellement le corollaire suivant :

Corollaire 1. ("Lemme formel") *Soient k un corps de nombres et X une k-variété géométriquement intègre, projective et lisse, qui a des points dans tous les complétés de k. Soient $A_1, \ldots, A_r$ des éléments de $\mathrm{Br}\,(k(X))$, et U un ouvert de Zariski non vide de X tel que tous les A_i soient dans $\mathrm{Br}\,U$. Soit S un ensemble fini de places de k. On note j_v l'invariant local de $\mathrm{Br}\,k_v$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Alors :*

- *S'il n'y a pas obstruction de Manin au principe de Hasse pour X, il existe $T \supset S$ et une famille de points locaux $(P_v)_{v \in T}$ avec $P_v \in U(k_v)$ tels que :*

$$\forall i \in \{1,...,r\} \quad \sum_{v\in T} j_v(A_i(P_v)) = 0$$

- *S'il n'y a pas obstruction de Manin à l'approximation faible pour X, alors pour toute famille $(P_v)_{v\in S}$ telle que $P_v \in U(k_v)$, il existe $T \supset S$ et une famille de points locaux $(P_v)_{v\in T\setminus S}$ (avec $P_v \in U(k_v)$ pour toute place v dans T) tels que :*

$$\forall i \in \{1,...,r\} \quad \sum_{v\in T} j_v(A_i(P_v)) = 0$$

C'est en pratique ce corollaire qui va permettre de faire fonctionner notre méthode des fibrations.

3. Application à la méthode des fibrations

On a d'abord le résultat suivant :

Théorème 2. *Soient V une k-variété géométriquement intègre et $p : V \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$ un morphisme projectif, surjectif, à fibres géométriquement intègres. Soit $K = k(T)$ le corps des fonctions de $\mathbf{A}^1_k$ et X un modèle projectif lisse de la fibre générique V_η de p, dont on suppose qu'elle admet un $\bar{k}(T)$-point lisse.*
On fait l'hypothèse que $\mathrm{Br}\,\overline{X}$ est nul et que $\mathrm{Pic}\,(\overline{X})$ est sans torsion (c'est le cas par exemple si la variété V_η est rationnelle ou bien est une intersection complète lisse de dimension au moins 3 dans $\mathbf{P}^r_K$).
On suppose enfin qu'il existe un sous-ensemble hilbertien H de $k = \mathbf{A}^1_k\,(k)$ tel que pour tout point θ de H, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de la fibre V_θ. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

(Si B est une k-variété géométriquement intègre, un sous-ensemble H de $B(k)$ est dit *hilbertien* s'il existe un ouvert de Zariski non vide U de B et un revêtement étale $\rho : R \longrightarrow U$ avec R intègre sur k tel que H soit l'ensemble des k-points M de U pour lesquels $\rho^{-1}(M)$ est connexe; en particulier, l'ensemble des k-points d'un ouvert de Zariski de B est hilbertien).

Pour prouver cet énoncé, on raffine une méthode dégagée par Skorobogatov (qui traite le cas où les fibres satisfont le principe de Hasse ou l'approximation faible) en utilisant le corollaire 1. Les hypothèses supplémentaires sur $\mathrm{Br}\,\overline{X}$ et $\mathrm{Pic}\,(\overline{X})$ dont nous avons besoin servent à assurer que le groupe de Brauer non ramifié de la fibre générique est isomorphe à celui des fibres spéciales (pour un ensemble hilbertien d'entre elles). On utilise enfin une version effective (due à Ekedahl) du théorème d'irréductibilité de Hilbert pour obtenir des propriétés d'approximation des ensembles hilbertiens.

Notre deuxième résultat principal (dont la preuve est plus simple mais repose sur les mêmes idées) concerne le cas où la fibration admet une section (dans ce cas, le principe de Hasse est automatiquement vérifié et c'est l'approximation faible à laquelle nous nous intéressons). On peut alors alléger les hypothèses, en ne supposant plus que toutes les fibres sont géométriquement intègres :

Théorème 3. *Soient V et B deux k-variétés géométriquement intègres, avec B_{lisse} satisfaisant l'approximation faible et $p : V \to B$ un morphisme dominant. Soit K le corps des fonctions de B, on suppose que la fibre générique V_η de p est géométriquement intègre, possède un K-point lisse, et que pour un modèle projectif lisse X/K de V_η, on a $\mathrm{Br}\,\overline{X}$ nul et $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ sans torsion.*
On suppose enfin qu'il existe un sous-ensemble hilbertien H de $B(k)$ tel que pour tout point θ de H, l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de la fibre V_θ. Alors, l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

4. Exemples d'application

Plusieurs exemples sont développés dans le premier article de cette thèse. Citons notamment la validité de l'approximation faible pour les hypersurfaces cubiques lisses de dimension ≥ 3 contenant une droite rationnelle et la validité du principe de Hasse et de l'approximation faible pour les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^5_k$ contenant une conique. On montre aussi que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les modèles lisses des intersections (complètes, géométriquement intègres, non coniques) de deux quadriques dans $\mathbf{P}^5_k$ possédant un point rationnel lisse (mais pouvant comporter des singularités). Enfin, on retrouve un résultat de Sansuc qui dit que cette obstruction est également la seule pour les modèles lisses des groupes algébriques linéaires connexes. Si l'on admet la conjecture (formulée et vérifiée numériquement par Colliot-Thélène, Kanevsky et Sansuc) que c'est encore le cas pour les surfaces cubiques diagonales, on en déduit aussi que les hypersurfaces cubiques diagonales de dimension au moins 3 satisfont le principe de Hasse et l'approximation faible.

5. Une étude détaillée d'un exemple

Nous exposons ici quelques-uns des résultats du deuxième article de la thèse. Nous avons d'abord le résultat arithmétique suivant, qui se déduit facilement du théorème 2. et du cas des surfaces de Châtelet traité par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer :

Proposition 1. *Soient k un corps de nombres et a un élément de $k^* \setminus k^{*^2}$. Soit V la k-hypersurface de $\mathbf{A}_k^n$ $(n \geq 3)$ d'équation :*

$$y^2 - az^2 = P(x_1, ..., x_{n-2}) \tag{1}$$

où P est un polynôme non nul de degré au plus quatre. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de V. Si P est irréductible ou bien produit d'un facteur linéaire et d'un facteur irréductible de degré 3, cette obstruction s'évanouit.

Pour savoir dans quels cas le principe de Hasse et l'approximation faible valent, il faut avoir recours à des calculs de groupe de Brauer. Deux méthodes sont possibles (selon les cas l'une ou l'autre est utilisée dans l'article) : calculer $\mathrm{Br}\, X$ via $H^1(k, \mathrm{Pic}\, \overline{X})$ après avoir trouvé une résolution de $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ par des modules de permutation, ou bien voir $\mathrm{Br}\, X$ à partir des fonctions dont les diviseurs sont des normes de l'extension $k(\sqrt{a})/k$. La deuxième méthode a l'avantage de ne pas nécessiter la construction explicite d'un modèle projectif lisse X de V, mais la première méthode a l'avantage de fournir davantage de renseignements; elle peut en particulier déboucher sur des descentes. Nous résumons les résultats principaux dans la proposition suivante :

Proposition 2. *Soit V la k-hypersurface de $\mathbf{A}_k^{m+2}$ d'équation :*

$$y^2 - az^2 = f(x_1, ..., x_m) g(x_1, ..., x_m)$$

avec $a \in k^* \setminus k^{*^2}$, les polynômes f et g étant irréductibles de degré 2 et premiers entre eux. Supposons que leurs homogénéisés respectifs $\varphi(x_1, ..., x_m, t)$ et $\psi(x_1, ..., x_m, t)$ aient l'intersection de leurs noyaux réduite à $\{0\}$. Soit X un modèle projectif lisse de V. Appelons forme quadratique de type (T) *une k-forme de rang 2 isomorphe à $< \alpha, -a\alpha >$ avec α dans k^*. Alors :*

- *Si $m \geq 4$, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X.*
- *Si $m = 3$, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X dès qu'il n'existe pas λ, μ dans k^* tels que la forme $Q = \lambda\varphi + \mu\psi$, ainsi que les restrictions de φ et ψ au noyau de Q, soient de type (T).*
- *Si $m = 2$, supposons de plus que les coniques définies par φ et ψ sont lisses et se coupent transversalement. Alors, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X dès que l'intersection des coniques définies par φ et ψ ne consiste ni en deux paires de points conjugués dans $k(\sqrt{a})$, ni en quatre points conjugués tels que l'extension de degré quatre associée contienne $k(\sqrt{a})$.*

Notons qu'on peut trouver des contre-exemples (reposant sur l'obstruction de Manin) au principe de Hasse et à l'approximation faible qui montrent qu'on ne peut pas espérer démontrer leur validité dans les cas d'exception que comporte cet énoncé.

Méthode des fibrations et obstruction de Manin

La méthode des fibrations pour établir que certaines classes de variétés définies sur un corps de nombres k vérifient le principe de Hasse ou l'approximation faible a déjà été employée avec succès dans de nombreux cas : citons les résultats de Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer sur les intersections de deux quadriques et les surfaces de Châtelet ([11]), ceux de Colliot-Thélène et Salberger sur certains types d'hypersurfaces cubiques ([8]), et les divers énoncés obtenus par Skorobogatov dans [49]. Des résultats généraux sur ce sujet, ainsi que d'autres exemples d'application, sont exposés dans [2]. Le principe de ces méthodes consiste à essayer de montrer qu'une variété fibrée vérifie le principe de Hasse ou l'approximation faible dès lors que la base et les fibres ont les mêmes propriétés.

Cependant, pour beaucoup de classes de variétés (les hypersurfaces cubiques par exemple), la conjecture raisonnable n'est pas qu'elles vérifient le principe de Hasse ou l'approximation faible mais seulement que l'obstruction de Manin à ces deux propriétés est la seule. Cette obstruction a été introduite pour le principe de Hasse par Manin en 1970 ([35]) et l'obstruction analogue pour l'approximation faible fut formulée vers 1976 par Colliot-Thélène et Sansuc ([9]). Elle a permis d'expliquer tous les contre-exemples au principe de Hasse et à l'approximation faible connus à ce jour, notamment grâce à l'utilisation des méthodes de descente (introduites par Colliot-Thélène et Sansuc, et utilisées par exemple dans [8], [11], [48]).

Le but de cet article est de relier la méthode des fibrations à l'obstruction de Manin : plus précisément, il s'agit d'établir sous certaines conditions que l'obstruction de Manin au principe de Hasse ou à l'approximation faible est la seule pour une variété fibrée en supposant que les fibres ont cette même propriété (et non plus forcément vérifient le principe de Hasse ou l'approximation faible). Ceci fait l'objet des théorèmes 4.2.1 et 4.3.1 qui sont les résultats principaux de ce travail.
L'intérêt est par exemple que l'obstruction de Manin peut très bien s'évanouir sur la variété fibrée alors que ce n'est pas le cas sur les fibres; ainsi, cela permet

d'établir le principe de Hasse et l'approximation faible pour certaines variétés là ou la méthode des fibrations classiques échouait (on verra dans ce texte des exemples de cette situation). Notre méthode semble en particulier souvent bien fonctionner pour ramener le problème du principe de Hasse et de l'approximation faible pour des variétés de dimension au moins 3 au même problème pour des surfaces (qui ont parfois pu être traitées par des méthodes de descente). Il serait évidemment intéressant de pouvoir ramener le cas des surfaces à celui des courbes mais cela semble pour l'instant hors de portée car les hypothèses nécessaires à l'application de nos résultats généraux ne sont pratiquement jamais vérifiées dans ce cas.

Le plan de l'article est le suivant : la première partie est consacrée à divers préliminaires, notamment sur le groupe de Brauer et l'obstruction de Manin. Dans la deuxième partie, on établit une propriété arithmétique des éléments ramifiés du groupe de Brauer d'un corps de fonctions (théorème 2.1.1), propriété dont on a besoin pour prouver le "lemme formel" 2.6.1 qui est un ingrédient essentiel pour la suite. Dans la troisième partie, on compare des groupes de Brauer "génériques" à des groupes de Brauer "spéciaux" (théorème 3.5.1). La quatrième partie est consacrée à la preuve des résultats principaux : on combine une méthode similaire à celle dégagée par Skorobogatov dans [49] avec le théorème 3.5.1 et le lemme formel 2.6.1 pour établir les théorèmes 4.2.1 et 4.3.1. La cinquième partie est consacrée aux exemples d'application : on y établit (parfois modulo certaines conjectures) ou on y retrouve les propriétés arithmétiques de certaines classes de variétés. Enfin, dans la sixième partie, on voit comment notre méthode permet aussi de montrer l'existence de familles infinies de contre-exemples à l'approximation faible.

Je tiens a remercier Jean-Louis Colliot-Thélène pour son aide constante tout au long de l'élaboration de cet article. Je voudrais également exprimer ma gratitude au département de mathématiques et informatique de l'Ecole Normale Supérieure pour les conditions de travail exceptionnelles qu'il m'a offertes pendant la réalisation de ce travail.

1. Préliminaires

Dans cet article, tous les anneaux seront supposés noethériens et tous les schémas localement noethériens. Quand K est un corps, nous appelerons K-variété un K-schéma séparé et de type fini. Si k est un corps de nombres et v une place de k, on notera k_v le complété de k pour la place v.

Soit k un corps de nombres. On dit qu'une classe de k-variétés intègres lisses satisfait *le principe de Hasse* (resp. *l'approximation faible*) si, pour toute variété X dans cette classe, la condition $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k implique

$X(k) \neq \emptyset$ (resp. implique que pour tout ensemble fini S de places de k, l'ensemble $X(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$ muni de la topologie produit).

1.1. Invariance birationnelle du principe de Hasse et de l'approximation faible

Proposition 1.1.1 *Soit X une k-variété intègre. Si un modèle propre lisse de X vérifie le principe de Hasse (resp. l'approximation faible), il en est de même de tout modèle propre lisse de X. Ainsi, ces propriétés ne dépendent que du corps des fonctions $k(X)$ de la variété X. Il suffit de les vérifier pour le lieu lisse X_{lisse} de X.*

Cette proposition résulte immédiatement du théorème des fonctions implicites sur k_v (qui permet en particulier de montrer que si U est un ouvert de Zariski d'une k_v-variété intègre lisse Z, l'ensemble $U(k_v)$ est dense dans $Z(k_v)$ pour la topologie v-adique; voir [3], lemme 3.1.2), combiné au lemme classique suivant, remarqué originellement par Nishimura dans [40] :

Lemme 1.1.2 (Nishimura, Lang) *Soient X une k-variété intègre lisse et Y une k-variété propre. Soit $\varphi : X \to Y$ une k-application rationnelle. Alors, si $X(k) \neq \emptyset$, on a $Y(k) \neq \emptyset$.*

1.2. Groupe de Brauer d'une variété

Soient K un corps de caractéristique zéro, de clôture algébrique $\overline{K}$, et X une K-variété géométriquement intègre, propre et lisse. On notera $\operatorname{Br} X = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ le groupe de Brauer cohomologique de la variété X et $\operatorname{Br}(K(X))$ le groupe de Brauer de son corps des fonctions $K(X)$. Par exemple, si K est algébriquement clos, le groupe de Brauer de l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ sur K est nul (ceci résultant de ce que dans ce cas, on a bien la condition "$B_2 - \rho = 0$", laquelle est équivalente à la condition $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$; cf [26], corollaire 3.4 et [6], preuve de la proposition 2.11).

Soit A un anneau de valuation discrète de caractéristique zéro de corps des fractions K' et soit κ_A le corps résiduel de A, que l'on suppose parfait. La suite spectrale de Leray associée au morphisme $g : \operatorname{Spec} K' \to \operatorname{Spec} A$ et au faisceau étale $\mathbf{G}_m$ s'écrit :

$$H^p(\operatorname{Spec} A, R^q g_* \mathbf{G}_{m,K'}) \Rightarrow H^{p+q}(\operatorname{Spec} K', \mathbf{G}_m)$$

On en déduit ([38], exemple III.2.22) la suite exacte suivante :

$$0 \to H^2_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{G}_m) \to \operatorname{Br} K' \xrightarrow{\partial_A} H^1(\kappa_A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

La flèche ∂_A est l'application *résidu* de $\operatorname{Br} K'$ dans $H^1(\kappa_A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

En particulier, quand X est une variété projective et lisse sur le corps K, on dispose pour tout anneau de valuation discrète A de corps des fractions $K(X)$ (et contenant K) de la flèche ∂_A de résidu en A. Et d'après le théorème de pureté de Grothendieck ([27], corollaire 6.2), le groupe $\mathrm{Br}\, X$ n'est autre que le groupe de Brauer non ramifié $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, (K(X)/K)$ du corps des fonctions $K(X)$ de la variété X, c'est-à-dire le sous-groupe de $\mathrm{Br}\, (K(X))$ constitué des éléments dont les résidus en tous les anneaux de valuation discrète A de corps des fractions $K(X)$ et contenant K sont triviaux. Le groupe $\mathrm{Br}\, X$ est un groupe de torsion qui est un invariant K-birationnel ([27], 7.3). Pour une autre définition des flèches de résidu et des détails supplémentaires sur le groupe de Brauer non ramifié, on pourra consulter [12] ou [13].

D'autre part, en notant $G = \mathrm{Gal}\,(\overline{K}/K)$ et $\overline{K}(X)$ le corps des fonctions de $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$, puis $\mathrm{Br}_1 X = \ker(\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, \overline{X})$, le groupe $\mathrm{Br}_1 X$ est le noyau de la flèche $H^2(G, \overline{K}(X)^*) \to H^2(G, \mathrm{Div}\, \overline{X})$ ([9], lemme 14). On a la suite exacte (cf [10], 1.5 ou [36]) :

$$\mathrm{Br}\, K \to \mathrm{Br}_1 X \to H^1(G, \mathrm{Pic}\,(\overline{X})) \to H^3(G, \overline{K}^*)$$

Cette suite est la suite des termes de bas degré de la suite spectrale de Leray pour $X \to \mathrm{Spec}\, K$ et le faisceau étale $\mathbf{G}_m$, soit $H^p(G, H^q(\overline{X}, \mathbf{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbf{G}_m)$. Quand $\mathrm{Br}\, \overline{X} = 0$, cette suite se prolonge en la suite exacte :

$$\mathrm{Br}\, K \to \mathrm{Br}_1 X \to H^1(G, \mathrm{Pic}\,(\overline{X})) \to H^3(G, \overline{K}^*) \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$$

Par abus de langage, on notera souvent encore $\mathrm{Br}\, K$ l'image de $\mathrm{Br}\, K$ dans $\mathrm{Br}_1 X$. Ainsi, si X une variété rationnelle (c'est-à-dire que $\overline{K}(X)$ est transcendant pur sur $\overline{K}$), on aura $\mathrm{Br}\, \overline{X} = 0$ (puisque le groupe de Brauer est un invariant birationnel et que celui de l'espace projectif est nul sur un corps algébriquement clos). Si l'on suppose en outre $H^3(G, \overline{K}^*) = 0$ (ce qui est le cas si K est un corps de nombres, voir [1], VII.11.4, page 199), alors $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, K \simeq H^1(G, \mathrm{Pic}\, \overline{X})$. En particulier, si X devient rationnelle sur une extension cyclique F de K, le groupe $\mathrm{Br}\, X$ est le noyau de la flèche $H^2(G', F(X)^*) \to H^2(G', \mathrm{Div}\, X_F)$ (où $G' = \mathrm{Gal}\,(F/K)$ et $X_F = X \times_K F$). En utilisant les groupes de cohomologie modifiés à la Tate (cf [45], chapitre 8), on voit que $\mathrm{Br}\, X$ s'identifie au noyau de l'application $K(X)^*/NF(X)^* \to \mathrm{Div}\, X/N(\mathrm{Div}\, X_F)$, le symbole N désignant la norme de l'extension F/K.

Notons enfin que si V est une K-variété géométriquement intègre (pas forcément projective ni lisse) et P un K-point lisse de V, alors pour tout élément A de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\, (K(V)/K) \subset \mathrm{Br}\, (K(V))$, on dispose de $A(P) \in \mathrm{Br}\, K$: en effet, on peut, grâce au théorème de résolution des singularités d'Hironaka ([30]), plonger un ouvert de Zariski lisse U de V contenant P dans un modèle projectif lisse X de V et comme A est alors dans $\mathrm{Br}\, X$, il était en fait dans $\mathrm{Br}\, U$ ce qui permet de l'évaluer en P.

1.3. Obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible

Soient k un corps de nombres et X une k-variété géométriquement intègre, propre et lisse, qui a des points dans tous les complétés de k. Si v est une place non archimédienne de k, on note $k(v)$ le corps résiduel de k_v. D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, on dispose d'une flèche de résidu en v, soit $\delta_v : \mathrm{Br}\, k_v \to H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, qui dans ce cas est un isomorphisme (ceci résultant de ce que k_v est complet et $k(v)$ fini, voir [38], III.2.22C). On a également un isomorphisme de $H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, obtenu grâce à l'identification (au moyen du Frobenius) de $\mathrm{Gal}\,(\overline{k(v)}/k(v))$ et de $\widehat{\mathbf{Z}}$. En composant, on retrouve (quand v est non archimédienne) l'invariant $j_v : \mathrm{Br}\, k_v \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ de la théorie du corps de classe local. Rappelons que pour v archimédienne, cet invariant est nul quand v est complexe et est obtenu à partir de l'isomorphisme de $\mathrm{Br}\,\mathbf{R}$ sur $\mathbf{Z}/2$ quand v est réelle. On obtient ainsi un invariant $j = (j_v)_{v \in \Omega_k}$, défini sur $\prod\limits_{v \in \Omega_k} k_v$.[1]

On appelle *obstruction de Manin* (ou de Brauer-Manin) au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour X la condition :

$$\forall (P_v) \in X(A_k) \quad \exists A \in \mathrm{Br}\, X \quad \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

$$(\text{resp. } \exists A \in \mathrm{Br}\, X \quad \exists (P_v) \in X(A_k) \quad \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\ )$$

où Ω_k désigne l'ensemble des places du corps k et $X(A_k)$ l'ensemble des points adéliques de X (comme X est complète, on a $X(A_k) = \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$). La formule de produit assure qu'il s'agit bien d'une obstruction au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible). Pour plus de détails on pourra consulter la section 3 de [10].

Pour plusieurs classes de variétés, on a pu établir que l'obstruction de Manin est la seule possible pour le principe de Hasse et l'approximation faible. Colliot-Thélène et Sansuc l'ont notamment conjecturé pour les surfaces rationnelles et de fait, tous les contre-exemples connus à ce jour au principe de Hasse et à l'approximation faible ont pu être explicités par le biais de cette obstruction.
D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, on a, si X est une variété rationnelle, l'isomorphisme $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k \simeq H^1(G, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$.

[1] En fait, l'invariant j que nous venons de définir ne coïncide avec l'invariant usuel, tel qu'il est par exemple défini dans [45], qu'*au signe près*; nous prenons cette convention de signe pour qu'il y ait bien compatibilité avec la définition générale que nous avons prise des flèches de résidu.

Soient $A_1, ..., A_r$ des éléments de $\operatorname{Br}(k(X)) \supset \operatorname{Br} X$ et Γ l'intersection de $\operatorname{Br} X$ et du sous-groupe de $\operatorname{Br}(k(X))$ engendré par $A_1, ..., A_r$. On dira qu'il y a *obstruction de Manin associée à* $A_1, ... A_r$ au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) si :

$$\forall (P_v) \in \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v) \quad \exists A \in \Gamma \quad \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

$$(\text{resp. } \exists A \in \Gamma \quad \exists (P_v) \in X(A_k) \quad \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\ )$$

Bien entendu, quand $\operatorname{Br} X$ est engendré par $\Gamma \cup \operatorname{Br} k$, ces obstructions coïncident avec les obstructions de Manin définies plus haut.

2. Éléments ramifiés du groupe de Brauer d'un corps de fonctions

2.1. Énoncé du résultat principal de la section

Le but de cette section est d'établir dans le cas d'une variété quelconque un énoncé qui était déjà apparu dans le cas de l'espace projectif (sous une forme quantitative plus précise) chez Serre ([47]).

Théorème 2.1.1 *Soient k un corps de nombres et X une k-variété géométriquement intègre, projective et lisse, dont on note $k(X)$ le corps des fonctions. Soient α un élément de* $\operatorname{Br}(k(X))$ *qui n'est pas dans* $\operatorname{Br} X$ *et U un ouvert de Zariski non vide de X tel que $\alpha \in \operatorname{Br} U$. Alors, il existe une infinité de places v de k telles que la flèche $U(k_v) \to \operatorname{Br} k_v$ induite par α prenne une valeur non nulle.*

Remarque : En fait, la preuve donnera non seulement un ensemble infini de places v qui conviennent mais un ensemble de densité de Dirichlet non nulle.

Cas particulier : Quand X devient rationnelle sur une extension cyclique F de k, ce résultat peut se formuler en termes de fonctions dont les diviseurs sont des normes. En effet, on a vu que $\operatorname{Br} X$ s'identifie dans ce cas au noyau de l'application $k(X)^*/NF(X)^* \to \operatorname{Div} X/N(\operatorname{Div} X_F)$. Le théorème 2.1.1 nous dit donc que si f est une fonction inversible sur un ouvert non vide U de X dont le diviseur n'est pas une norme pour l'extension F/k, on peut trouver, pour une infinité de places v de k, un point P_v de $U(k_v)$ tel que $f(P_v)$ ne soit pas une norme de l'extension locale $(F \otimes_k k_v)/k_v$.

La preuve du théorème 2.1.1 se fait en plusieurs étapes, qui font l'objet des paragraphes suivants.

2.2. Un résultat de densité

Pour tout corps de nombres k et toute place v non archimédienne de k, on note $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de k_v et $k(v)$ son corps résiduel. On note également $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k. L'expression "pour presque toute place de A" (où A est un sous-ensemble de Ω_k) signifiera toujours "pour toute place de A à l'exception d'un nombre fini". Quand S est un ensemble fini de places de k, on note $\mathcal{O}_{k,S}$ l'ensemble des éléments de k qui sont entiers en dehors de S.

Proposition 2.2.1 *Soient L/k une extension finie (pas nécessairement galoisienne) de corps de nombres et L' une extension galoisienne cyclique de L. Alors, il existe une infinité de places v de k telles qu'il existe une place w_L de L au-dessus de v vérifiant : $k(v) = L(w_L)$ et w_L est inerte pour l'extension L'/L.*

Preuve de la proposition 2.2.1 : Soient $\mathcal{L}$ la clôture galoisienne de L' et $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}/k)$. Notons $N = [\mathcal{L} : k]$. Choisissons un élément g de $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}/L) \subset \mathcal{G}$ dont l'image dans $\mathrm{Gal}(L'/L)$ en est un générateur. Soient v une place de k, non ramifiée pour $\mathcal{L}/k$, et de degré absolu 1; soit w une place de $\mathcal{L}$ au-dessus de v et $D_w = \{\tau \in \mathcal{G}, \tau w = w\}$ le groupe de décomposition associé. On note F_w l'élément de D_w qui induit le Frobenius de $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}(w)/k(v)) \simeq D_w$ (rappel : sa classe de conjugaison F_v ne dépend que de v, voir [1], proposition 2.2 page 164). Pour toute classe de conjugaison σ de $\mathcal{G}$, la densité de Dirichlet des v telles que $F_v = \sigma$ est $\mathrm{Card}(\sigma)/N$: c'est le théorème de Tchebotarev ([32], théorème 10, page 169). Il existe donc une infinité de places v, non ramifiées pour $\mathcal{L}/k$ et de degré absolu 1, telles que la classe de g soit F_v.
Pour une telle place v, il existe une place w de $\mathcal{L}$ au-dessus de v telle que D_w soit le sous-groupe de $\mathcal{G}$ engendré par g. Si w_L et $w_{L'}$ désignent respectivement les places de L et L' induites par w, le groupe de décomposition $D_{w_{L'}}$ associé à l'extension L'/L est égal au sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ engendré par l'image de g dans $\mathrm{Gal}(L'/L)$, donc est égal à $\mathrm{Gal}(L'/L)$ tout entier ce qui prouve déjà que w_L est inerte pour l'extension L'/L. D'autre part, si $L_1 \subset \mathcal{L}$ est la plus petite extension galoisienne de k contenant L, l'image h de g dans $\mathrm{Gal}(L_1/k)$ induit l'identité sur L. Si w_{L_1} est la place de L_1 induite par w, il en résulte, puisque D_w est engendré par g, que le groupe de décomposition $D_{w_{L_1}}$ associé à l'extension L_1/k est engendré par h (en effet, la flèche $D_w \to D_{w_{L_1}}$ est surjective, cf [1], proposition 1.2 page 163), donc est inclus dans $\mathrm{Gal}(L_1/L)$. Ainsi, on a $\mathrm{Gal}(L_1(w_{L_1})/k(v)) = \mathrm{Gal}(L_1(w_{L_1})/L(w_L))$ donc $L(w_L) = k(v)$ ce qui achève la preuve.

Remarque : On a en fait montré que l'ensemble des places v qui conviennent est de densité de Dirichlet non nulle.

2.3. Un premier résultat sur les $k(v)$-points

Nous démontrons ici une proposition qui ne fait intervenir que des $k(v)$-points (et pas encore des k_v-points). Nous utiliserons le lemme suivant, dégagé par Ekedahl dans [18] :

Lemme 2.3.1 *Soient $\mathcal{W} = \operatorname{Spec} R$ un ouvert non vide de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_k)$ et $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{W}$ un morphisme dominant dont la fibre générique B est une k-variété géométriquement intègre. Soit $\rho : \mathcal{Y} \to \mathcal{B}$ un revêtement étale galoisien de groupe G. On suppose que la fibre générique Y de $\pi \circ \rho$ est une k-variété géométriquement intègre. Soit C une classe de conjugaison de G, on pose $c = \operatorname{Card}(C)/\operatorname{Card}(G)$. Pour tout point fermé $\wp$ de $\mathcal{W}$, de corps résiduel (fini) $k(\wp)$, on note $t(\wp)$ le nombre de points x de $\mathcal{B}(k(\wp))$ pour lesquels le Frobenius F_x est dans C. Alors, on a :*

$$t(\wp)/\operatorname{Card}(\mathcal{B}(k(\wp))) - c = O(\operatorname{Card}(k(\wp))^{-1/2})$$

Nous en déduisons le résultat suivant :

Proposition 2.3.2 *Soient k un corps de nombres et $\mathcal{W}$ un ouvert non vide de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_k)$. Soient $\mathcal{B} \to \mathcal{W}$ un morphisme dominant et B la fibre générique du morphisme $\mathcal{B} \to \mathcal{W}$. On suppose que B est une k-variété intègre. Soit $\rho : \mathcal{Y} \to \mathcal{B}$ un revêtement étale, connexe, cyclique, de degré $m \geq 2$ de $\mathcal{B}$. Pour presque toute place v de k, on dispose de $\widetilde{\mathcal{B}}^v = \mathcal{B} \times_{\mathcal{W}} k(v)$ et $\widetilde{\mathcal{Y}}^v = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{W}} k(v)$, réductions respectives de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{Y}$ au-dessus de $k(v)$.*
Alors, il existe un ouvert $\mathcal{U}_1$ de $\mathcal{B}$ et un ensemble infini I de places v de k tels qu'on ait, en notant $\mathcal{U}_2 = \rho^{-1}(\mathcal{U}_1)$:

1. *Pour toute place v de I, le revêtement étale $\rho(v) : \widetilde{\mathcal{U}}_2^v \to \widetilde{\mathcal{U}}_1^v$ reste connexe.*
2. *Si Ω est un ouvert non vide de $\mathcal{U}_1$, sa réduction $\widetilde{\Omega}^v$ au-dessus de $k(v)$ admet, pour presque toute place v de I, un $k(v)$-point $P(v)$ vérifiant : la fibre de $\rho(v)$ en $P(v)$ est connexe.*

Preuve : Soit Y la fibre générique de $\mathcal{Y} \to \mathcal{W}$. Soient K le corps des fonctions de B et K' le corps des fonctions de Y, qui est une extension cyclique de degré m de K. Soient L la fermeture intégrale de k dans K et L' la fermeture intégrale de k dans K'. L'extension L'/L est une extension cyclique de corps de degré s, avec s divisant m (s est le degré de l'extension KL'/K). Quand B et Y sont géométriquement intègres (c'est-à-dire quand $k = L = L'$), le résultat découle immédiatement du lemme 2.3.1 (et on peut même imposer que I contienne presque toutes les places de k). L'idée va être, en choisissant judicieusement I, de se ramener (quand on considère v dans I) à une situation où le lemme 2.3.1 s'applique.

Nous choisissons I comme dans la proposition 2.2.1, c'est-à-dire que si $v \in I$, alors v est non ramifiée dans $\mathcal{L}$ (où $\mathcal{L}$ est la clôture galoisienne de L') et il existe une place w de L au-dessus de v, inerte pour l'extension L'/L et vérifiant $L(w) = k(v)$.

Il existe un ouvert de Zariski non vide U_1 de B tel que la flèche $U_1 \to \operatorname{Spec} k$ se factorise par une flèche $U_1 \to \operatorname{Spec} L$ et U_1 est alors un L-schéma géométriquement intègre. De ce fait, il existe un ouvert $\mathcal{U}_1$ de $\mathcal{B}$ tel que la flèche $\mathcal{U}_1 \to \mathcal{W}$ se factorise par une flèche $\mathcal{U}_1 \to \mathcal{W}_L$ (où $\mathcal{W}_L$ est un ouvert non vide de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L)$) dont la fibre générique est $U_1 \to \operatorname{Spec} L$. Posons $\mathcal{U}_2 = \rho^{-1}(\mathcal{U}_1)$; quand $v \in I$, il existe w (place de L au-dessus de v) telle que $L(w) = k(v)$. Ainsi, une fois que nous avons remplacé $\mathcal{B}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement par $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, nous pouvons supposer (quitte à raisonner au niveau L) que $L = k$, c'est-à-dire que B est géométriquement intègre.

Notons alors $\mathcal{W}'$ l'image réciproque de $\mathcal{W}$ par la flèche $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{L'}) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_k)$ et $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_1 \times_{\mathcal{W}} \mathcal{W}'$. Comme L' est la fermeture intégrale de k dans K', on peut encore supposer que le revêtement $\mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_1$ se factorise par le revêtement étale connexe $\rho' : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}_1$. Or, si la place v est dans I, elle est inerte pour l'extension L'/k. Comme la fibre générique de $\mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}'$ est géométriquement intègre (vu que L' est intégralement clos dans K'), on a bien que le revêtement $\rho(v)$ reste connexe pour presque toute place de I (et nous supposerons, quitte à restreindre I, que c'est le cas pour toute place de I). Notons que toutes les fibres du revêtement $\rho'(v) : \widetilde{\mathcal{U}}'^v \to \widetilde{\mathcal{U}}_1^v$ sont connexes si v est dans I.

Maintenant, écrivons $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_l^{\alpha_l}$ avec les p_i premiers et $\alpha_i \geq 1$ et supposons par exemple que $p_1, \ldots, p_t$ $(t \leq l)$ sont les p_i qui ne divisent pas $r = [L' : k]$. On dispose ainsi d'un unique corps K'' vérifiant $K \subset K'' \subset K'$ et K'' de degré $r' = p_1^{\alpha_1} \ldots p_t^{\alpha_t}$ sur K. Comme r' est premier à r, on a $K'' \cap KL' = K$ et comme la fermeture intégrale de k dans K' est L', le corps k est intégralement clos dans K''. Nous pouvons encore supposer que le revêtement $\mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_1$ se factorise par un revêtement étale connexe $\mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}''$, où la fibre générique de $\mathcal{U}''$ a pour corps des fonctions K'', ce qui implique qu'elle est géométriquement intègre sur k.
Appliquons alors le lemme 2.3.1 au revêtement $\rho'' : \mathcal{U}'' \to \mathcal{U}_1$ (ou plus exactement au revêtement $\Omega'' \to \Omega$ qu'il induit, où Ω est un ouvert de Zariski non vide de $\mathcal{U}_1$ et Ω'' son image réciproque par ρ''). On obtient pour presque toute place v de I un point $P(v)$ de $\Omega(k(v))$ en lequel la fibre de $\rho''(v) : \widetilde{\mathcal{U}}''^v \to \widetilde{\mathcal{U}}_1^v$ est connexe. Comme on l'a vu, la fibre de $\rho'(v)$ en $P(v)$ est automatiquement connexe. Mais ceci implique alors que la fibre de $\rho(v)$ en $P(v)$ est également connexe : en effet, si $F_{P(v)} \in \operatorname{Gal}(K'/K)$ est le Frobenius en $P(v)$, son image dans $\operatorname{Gal}(K''/K)$ (resp. dans $\operatorname{Gal}(KL'/K)$) est un générateur de $\operatorname{Gal}(K''/K)$ (resp. de $\operatorname{Gal}(KL'/K)$) puisque la fibre de $\rho''(v)$ (resp. de $\rho'(v)$) en $P(v)$ est connexe. Identifiant $\operatorname{Gal}(K'/K)$ avec $\mathbf{Z}/m$, l'image de $F_{P(v)}$ dans $\mathbf{Z}/p_i$ est a fortiori non nulle pour $1 \leq i \leq l$ (pour $1 \leq i \leq t$ parce que p_i divise $[K'' : K]$ et pour $t < i \leq l$ parce que p_i divise $[KL' : K]$). De ce fait, le groupe $\operatorname{Gal}(K'/K)$ est engendré par $F_{P(v)}$ d'où le résultat.

Remarque : Rappelons le théorème classique suivant ([34]) :

Théorème (Lang-Weil) *Il existe une constante $C(n,r,d)$ telle que pour tout corps fini F_q de cardinal q et toute sous-variété fermée X géométriquement intègre, de degré d et de dimension r, de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{F}_q}$, on ait :*

$$\mid \mathrm{Card}(X(\mathbf{F}_q)) - q^r \mid < C(n,r,d)q^{r-1/2}.$$

En n'utilisant que le théorème de Lang-Weil (et pas le lemme 2.3.1 dont la preuve fait intervenir des outils plus sophistiqués), on peut retrouver une forme atténuée (qui nous suffirait en fait pour la suite) de la proposition 2.3.2 consistant à remplacer la conclusion : "la fibre de $\rho(v)$ en $P(v)$ est connexe" par "l'action de $\mathrm{Gal}\,(\overline{k(v)}/k(v))$ sur les $\overline{k(v)}$-points de $\mathcal{Y}$ au-dessus de $P(v)$ n'est pas triviale". En effet, on se ramène comme on l'a vu en choisissant judicieusement I au cas où B et Y sont géométriquement intègres et un argument de dénombrement des $k(v)$-points de $\widetilde{\mathcal{B}}^v$ et $\widetilde{\mathcal{Y}}^v$ donne alors aisément le résultat.

2.4. Calcul de $\alpha(P_v)$

2.4.1. Passage à des modèles entiers

Le théorème 2.1.1 est "local", en ce sens que seul ce qui se passe au voisinage du point P_v compte; en particulier, on peut toujours restreindre l'ouvert U de l'énoncé du théorème 2.1.1. La proposition suivante va dans ce sens, afin de permettre l'application d'un résultat que nous prouverons plus bas (corollaire 2.4.3).

Proposition 2.4.1 *Soient X une k-variété géométriquement intègre, projective et lisse et α un élément de n-torsion de* $\mathrm{Br}\,(k(X))$ *qui n'est pas dans* $\mathrm{Br}\,X$*. Alors, il existe un modèle projectif et lisse $\mathcal{X}$ de X au-dessus d'un ouvert non vide $\mathcal{W} = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{k,S})$ de $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_k)$, un ouvert affine non vide et lisse $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$ et un fermé $\mathcal{B}$ intègre de codimension 1 de $\mathcal{V}$, lisse au-dessus de $\mathcal{W}$, tel que :*

- *Si $\mathcal{U}$ désigne le complémentaire de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{V}$, on a $\alpha \in \mathrm{Br}\,\mathcal{U}$.*
- *Le résidu de α au point générique de $\mathcal{B}$ est un élément non nul de $H^1_{\text{ét}}(\mathcal{B}, \mathbf{Z}/n)$.*
- *L'entier n est premier aux caractéristiques résiduelles de $\mathcal{W}$.*

Preuve : Il existe déjà un ouvert $\mathcal{W} = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{k,S})$ de $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_k)$ tel que X admette un modèle projectif et lisse $\mathcal{X}$ au-dessus de $\mathcal{W}$, dont les fibres sont géométriquement intègres, et α s'étende en un élément (noté encore abusivement α) de $\mathrm{Br}\,\mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert non vide de $\mathcal{X}$. Quitte à élargir S nous supposerons que n est inversible dans $\mathcal{O}_v$ quand $v \notin S$.
Soient $\mathcal{Z}_1, ... \mathcal{Z}_l$ les sous-schémas fermés intègres de $\mathcal{X}$ qui ne rencontrent pas $\mathcal{U}$, on peut supposer qu'ils sont tous de codimension 1 (quitte à réduire $\mathcal{U}$). On peut

aussi supposer (quitte à élargir encore S) que les $\mathcal{Z}_i$ ne sont pas des diviseurs verticaux sur $\mathcal{X}$. On dispose des résidus $\mathcal{J}_i = \delta_{\mathcal{Z}_i}(\alpha) \in H^1(\kappa_i, \mathbf{Z}/n)$, où κ_i est le corps résiduel de $\mathcal{X}$ au point générique de $\mathcal{Z}_i$. Comme α n'est pas dans $\mathrm{Br}\, X$, l'un de ces résidus est non nul (d'après les rappels de 1.2.).

Il existe pour tout i un ouvert non vide et lisse $\mathcal{B}_i$ de $\mathcal{Z}_i$, ne rencontrant pas les $\mathcal{Z}_j$ pour $j \neq i$, tel que $\mathcal{J}_i \in H^1_{\text{ét}}(\mathcal{B}_i, \mathbf{Z}/n)$. Prenons pour $\mathcal{B}$ l'un des $\mathcal{B}_i$ tel que $\mathcal{J}_i$ soit non nul et prenons pour $\mathcal{V}$ l'ouvert $\mathcal{U} \cup \mathcal{B}$ de $\mathcal{X}$. Nous pouvons enfin supposer $\mathcal{V}$ affine (quitte à le restreindre autour du point générique de $\mathcal{B}$) pour obtenir toutes les conditions de la proposition 2.4.1.

2.4.2. Le calcul

Nous allons maintenant utiliser les propriétés des flèches de résidu pour prouver un lemme qui permettra ensuite de calculer $\alpha(P_v)$ en vue d'établir le théorème 2.1.1.
Fixons d'abord quelques notations. Quand $\mathcal{V} = \mathrm{Spec}\, R$ est un schéma intègre et $\mathcal{B} = \mathrm{Spec}\,(R/t)$ un sous-schéma fermé intègre de codimension 1 de $\mathcal{V}$, on notera R_t le localisé de R par rapport à la partie multiplicative $\{t^j\}_{j \in \mathbf{N}}$ et $R_{(t)}$ le localisé de R par rapport à l'idéal premier engendré par t. On a ainsi $(\mathcal{V} \setminus \mathcal{B}) \simeq \mathrm{Spec}\,(R_t)$. Si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{B}$ sont réguliers et de corps de fonctions respectifs K et κ, on dispose quand K et κ sont de caractéristique zéro d'une flèche de résidu $\mathrm{Br}\, K \to H^1(\kappa, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ que l'on notera ∂_t : en effet, l'anneau $R_{(t)}$ est dans ce cas de valuation discrète (t en étant une uniformisante), de corps des fractions K et de corps résiduel κ et les rappels de 1.2 s'appliquent. Rappelons que pour toute place v non archimédienne de k, on note $k(v)$ le corps résiduel de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_v$ de k_v et $\delta_v : \mathrm{Br}\, k_v \to H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ l'application résidu associée.
Supposons en outre que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{B}$ soient des $\mathcal{W}$-schémas, où $\mathcal{W} = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{k,S})$ est un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_k)$. Si v est une place de k non dans S, on dira alors abusivement qu'une flèche $s : \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_v) \to \mathcal{V}$ est une "section" si, composée avec le morphisme structural $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$, elle redonne la flèche naturelle $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_v) \to \mathcal{W}$. L'homomorphisme $\Phi : R \to \mathcal{O}_v$ déduit de s envoyant t sur un élément t' de $\mathcal{O}_v$, on dira que la valuation e de t' est la *$\mathcal{B}$-multiplicité* (ou simplement la multiplicité si le contexte fait que cela ne prête pas à confusion) de la section s.

Avec ces notations, on a :

Lemme 2.4.2 *Soit $\mathcal{W} = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{k,S})$ un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_k)$. Soient $\mathcal{V} = \mathrm{Spec}\, R$ un $\mathcal{W}$-schéma intègre régulier et $\mathcal{B} = \mathrm{Spec}\,(R/t)$ un sous-schéma fermé intègre régulier de codimension 1 de $\mathcal{V}$. Soient K et κ les corps de fonctions respectifs de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$, on suppose K et κ de caractéristique zéro.*
Soit α un élément de n-torsion de $\mathrm{Br}\,(R_t) \subset \mathrm{Br}\, K$ dont le résidu $\chi_t = \partial_t(\alpha)$ au point générique de $\mathcal{B}$ est dans $H^1_{\text{ét}}(R/t, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Supposons en plus que les caractéristiques résiduelles des schémas $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont premières à n. Alors, il existe

un ouvert ω de $\mathcal{V}$, d'intersection non vide avec $\mathcal{B}$, tel que pour toute section $s : \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_v) \longrightarrow \omega \subset \mathcal{V}$, de $\mathcal{B}$-multiplicité e finie et > 0, induisant des morphismes $s_1 : \mathrm{Spec}\, k_v \longrightarrow \mathrm{Spec}\,(R_t)$ et $s_2 : \mathrm{Spec}\, k(v) \longrightarrow \mathrm{Spec}\,(R/t)$, on ait :

$$\delta_v(s_1^*(\alpha)) = es_2^*(\chi_t)$$

où $s_1^* : \mathrm{Br}\,(R_t) \rightarrow \mathrm{Br}\, k_v$ et $s_2^* : H^1_{\text{ét}}(R/t, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ sont les flèches déduites de s_1 et s_2.

Remarque : C'est l'hypothèse $0 < e < \infty$ qui permet d'écrire que les morphismes s_1 et s_2 déduits de s sont respectivement à valeurs dans $\mathrm{Spec}\,(R_t) = \mathcal{V} \backslash \mathcal{B}$ et $\mathrm{Spec}\,(R/t) = \mathcal{B}$.

Preuve : Soit $\widehat{R}$ le complété de R par rapport à l'idéal (t). La section s se factorise (vu que $\mathcal{O}_v$ est complet) par une section $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_v) \longrightarrow \mathrm{Spec}\,\widehat{R}$ et les flèches de résidu commutent avec le passage au complété. D'autre part, si $\widehat{\omega}$ est un ouvert de $\mathrm{Spec}\,\widehat{R}$ d'intersection non vide avec $\widehat{\mathcal{B}} = \mathrm{Spec}\,(\widehat{R}/t)$, on peut trouver un ouvert ω de $\mathrm{Spec}\, R$ (d'intersection non vide avec $\mathcal{B}$) dont l'image réciproque par le morphisme $p : \mathrm{Spec}\,\widehat{R} \longrightarrow \mathrm{Spec}\, R$ est incluse dans $\widehat{\omega}$ (car l'image par p du fermé complémentaire de $\widehat{\omega}$ est, d'après la proposition 6.F de [37], une intersection de constructibles ne contenant pas le point générique de $\mathrm{Spec}\, R$, donc incluse dans un fermé strict de $\mathrm{Spec}\, R$). Nous pouvons ainsi supposer que R est complet pour la topologie définie par l'idéal (t).

Avec ces nouvelles hypothèses, le résidu χ_t est un élément de $H^1_{\text{ét}}(R/t, \mathbf{Z}/n)$ qui se relève (vu que R est complet pour la topologie t-adique) en un élément χ de $H^1_{\text{ét}}(R, \mathbf{Z}/n)$. Soit $\beta = \chi \cup t$, où χ est vu dans $H^1_{\text{ét}}(R_t, \mathbf{Z}/n)$ et t dans $H^1_{\text{ét}}(R_t, \mu_n) = R_t^*/R_t^{*^n}$. On a $\beta \in H^2_{\text{ét}}(R_t, \mu_n) \subset \mathrm{Br}\,(R_t)$. D'après la proposition 1.3 de [5], on a $\partial_t(\beta) = \chi_t$ (car t est une uniformisante de $R_{(t)}$ et n est inversible dans le corps résiduel κ de $R_{(t)}$). Maintenant, l'élément $(\beta - \alpha)$ de $\mathrm{Br}\,(R_t)$ est tel que $\partial_t(\beta - \alpha) = 0$. On en déduit ([38], exemple III.2.22) que $(\beta - \alpha)$ est en fait dans $\mathrm{Br}\, R_{(t)}$ donc il existe un ouvert ω de $\mathcal{V}$, contenant le point générique de $\mathcal{B}$ (donc d'intersection non vide avec $\mathcal{B}$) tel que $(\beta - \alpha)$ soit dans $\mathrm{Br}\,\omega$. De ce fait, quand s est une section à valeurs dans ω, on aura $s_1^*(\beta - \alpha) \in \mathrm{Br}\,(\mathcal{O}_v)$ donc en particulier $\delta_v(s_1^*(\beta - \alpha)) = 0$ ([5], proposition 1.1). Ainsi pouvons-nous nous limiter à prouver l'égalité voulue avec β au lieu de α.

Or, on a $s_1^*(\beta) = \chi_1 \cup t'$ (ici $t' = \Phi(t)$ est vu dans $H^1(k_v, \mu_n)$) où χ_1 est l'image de χ par la flèche $H^1_{\text{ét}}(R_t, \mathbf{Z}/n) \longrightarrow H^1(k_v, \mathbf{Z}/n)$ déduite de s_1. C'est-à-dire que χ_1 est en fait dans $H^1_{\text{ét}}(\mathcal{O}_v, \mathbf{Z}/n)$ et est égal à l'image χ_3 de $\chi \in H^1_{\text{ét}}(R, \mathbf{Z}/n)$ par la flèche déduite de l'homomorphisme Φ. Alors, on a $\delta_v(\chi_1 \cup t') = e\chi_2$, où χ_2 est l'image de χ_3 dans $H^1(k(v), \mathbf{Z}/n)$ (toujours d'après la proposition 1.3 de [5], vu que n est inversible dans $\mathcal{O}_v$ et que la valuation de t' est e). Comme l'image de $\chi \in H^1_{\text{ét}}(R, \mathbf{Z}/n)$ dans $H^1_{\text{ét}}(R/t, \mathbf{Z}/n)$ est χ_t, l'élément χ_2 de $H^1(k(v), \mathbf{Z}/n)$ n'est autre que $s_2^*(\chi_t)$ donc on trouve finalement que $\delta_v(\chi_1 \cup t') = es_2^*(\chi_t)$ ce qui achève la preuve du lemme 2.4.2.

On peut maintenant calculer $\alpha(P_v)$ quand on s'est ramené à la situation fournie par la proposition 2.4.1 :

Corollaire 2.4.3 *Soient X une k-variété géométriquement intègre et α un élément de n-torsion de* $\mathrm{Br}(k(X))$. *Soit $\mathcal{X}$ un modèle de X au-dessus d'un ouvert non vide $\mathcal{W} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$, avec n premier aux caractéristiques résiduelles de $\mathcal{W}$. Soient $\mathcal{V}$ un ouvert affine non vide et lisse de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{B}$ un fermé intègre lisse de codimension 1 de $\mathcal{V}$. On suppose que le résidu $\mathcal{J}$ de α au point générique de $\mathcal{B}$ est dans $H^1_{\text{ét}}(\mathcal{B}, \mathbf{Z}/n)$ et qu'on a $\alpha \in \mathrm{Br}\,\mathcal{U}$, où $\mathcal{U} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{B}$.*

Alors, il existe un ouvert ω de $\mathcal{V}$, d'intersection non vide avec $\mathcal{B}$, tel que pour tout point P_v de $\mathcal{U}(k_v)$, correspondant à une section $s : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v) \to \omega \subset \mathcal{V}$ de $\mathcal{B}$-multiplicité e, on ait, en notant $P(v)$ le $k(v)$-point de $\mathcal{V}$ associé à s :

1. *Si $P(v)$ n'est pas dans $\mathcal{B}$, alors $\delta_v(\alpha(P_v)) = 0$.*
2. *Si $P(v) \in \mathcal{B}(k(v))$, alors :*

$$\delta_v(\alpha(P_v)) = e\partial$$

où ∂ est l'élément de $H^1(k(v), \mathbf{Z}/n)$ obtenu en prenant la fibre en $P(v)$ de $\mathcal{J} \in H^1_{\text{ét}}(\mathcal{B}, \mathbf{Z}/n)$.

Preuve : Notons déjà que si $P(v)$ n'est pas dans $\mathcal{B}$, la section s est en fait à valeurs dans $\mathcal{U}$ donc $\delta_v(\alpha(P_v))$ est nul puisque $\alpha(P_v)$ est dans $\mathrm{Br}(\mathcal{O}_v)$.

Si maintenant $P(v)$ est dans $\mathcal{B}$, l'ouvert ω est donné par le lemme 2.4.2 qui s'applique bien ici : en effet, les corps de fonctions de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{V}$ sont bien de caractéristique zéro, la multiplicité e est bien finie et > 0, les caractéristiques résiduelles de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont bien premières à n, et on a bien $\alpha \in \mathrm{Br}\,\mathcal{U}$. Le résultat en découle, les flèches s_1 et s_2 du lemme 2.4.2 correspondant ici aux sections $\mathrm{Spec}\,k_v \to \mathcal{U}$ et $\mathrm{Spec}\,k(v) \to \mathcal{B}$, lesquelles sont associées respectivement au k_v-point P_v et au $k(v)$-point $P(v)$.

2.5. Fin de la preuve du théorème 2.1.1

Soit X une k-variété géométriquement intègre, projective et lisse et α un élément de n-torsion de $\mathrm{Br}(k(X))$ qui n'est pas dans $\mathrm{Br}\,X$. Appliquant la proposition 2.4.1, on obtient un ouvert non vide $\mathcal{W} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k.S})$ de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$, un $\mathcal{W}$-schéma affine lisse $\mathcal{V}$ (qui est un ouvert non vide d'un modèle projectif lisse de X au-dessus de $\mathcal{W}$) et un sous-schéma fermé $\mathcal{B}$ de codimension 1 de $\mathcal{V}$, intègre et lisse, vérifiant $\alpha \in \mathrm{Br}\,\mathcal{U}$ (où $\mathcal{U} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{B}$). Si $\mathcal{J}$ est le résidu de α au point générique de $\mathcal{B}$, la proposition 2.4.1 nous permet aussi d'imposer que $\mathcal{J}$ est un élément non nul de $H^1_{\text{ét}}(\mathcal{B}, \mathbf{Z}/n)$, et que n est premier aux caractéristiques résiduelles de $\mathcal{W}$. Nous sommes donc dans les conditions d'application du corollaire 2.4.3 (et quitte à réduire encore $\mathcal{V}$ autour du point générique de $\mathcal{B}$, nous pouvons supposer que l'ouvert ω donné par ce corollaire est égal à $\mathcal{V}$ tout entier). Ainsi, il nous suffit maintenant pour prouver le théorème 2.1.1 de trouver (pour une infinité de places v) un point $P(v)$ de $\mathcal{B}(k(v))$ tel que la fibre ∂ de $\mathcal{J}$ en $P(v)$ soit un élément non nul de $H^1(k(v), \mathbf{Z}/n)$, et de relever $P(v)$ en un k_v-point de $\mathcal{U}$ tel que la $\mathcal{B}$-multiplicité e de la section $s : \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_v) \to \mathcal{V}$ associée soit 1 (puisque le corollaire 2.4.3 nous dit que $\delta_v(\alpha(P_v)) = e\partial$). La première condition va découler de la proposition 2.3.2 et la deuxième du lemme de Hensel.

En prenant l'image J de $\mathcal{J}$ dans $H^1(\kappa, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}\,(\bar{\kappa}/\kappa), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, on peut trouver une extension cyclique non triviale de corps κ'/κ tel que J soit un générateur de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}\,(\kappa'/\kappa), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Ensuite, on peut trouver un revêtement étale cyclique connexe $\mathcal{Y}$ d'un ouvert de Zariski non vide Ω de $\mathcal{B}$ dont la fibre générique est $\mathrm{Spec}\,\kappa' \to \mathrm{Spec}\,\kappa$. Ainsi, le revêtement $\mathcal{Y}$ de Ω est étale cyclique connexe d'ordre $m \geq 2$. La fibre générique Y de $\mathcal{Y}$ est une k-variété intègre. Nous pouvons alors trouver un ensemble infini I de places de k (avec I disjoint de S) comme dans la proposition 2.3.2. D'après cette proposition, pour toute place v de I, on pourra trouver un $k(v)$-point lisse $P(v)$ dans Ω, tel que la fibre en $P(v)$ du revêtement $\mathcal{Y} \to \Omega$ reste connexe. De ce fait, l'élément ∂ de $H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ obtenu en prenant la fibre en $P(v)$ de $\mathcal{J} \in H^1_{\text{ét}}(\mathcal{B}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est d'ordre $m \geq 2$ dans $H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, donc $\partial \neq 0$.

Maintenant, rappelons qu'on a $\mathcal{V} = \mathrm{Spec}\,R$ et $\mathcal{B} = \mathrm{Spec}\,(R/t)$. Fixons une uniformisante π_v de $\mathcal{O}_v$ et posons $\mathcal{B}'^v = \mathrm{Spec}\,(R'/(t - \pi_v))$, où $R' = R \otimes_{\mathcal{O}_{k,S}} \mathcal{O}_v$. Alors, les $k(v)$-fibres du $\mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_v)$-schéma $\mathcal{B}'^v$ et de $\mathcal{B}$ sont isomorphes. Ainsi, par le lemme de Hensel, on peut relever $P(v)$ en un k_v-point de $\mathcal{B}'^v$, c'est-à-dire que $P(v)$ se relève en un k_v-point P_v de $\mathcal{V}$ tel que la multiplicité e de la section $s : \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_v) \to \mathcal{V}$ associée à P_v est 1 (rappelons en effet que c'est la valuation de l'image de t par l'homomorphisme $R \to \mathcal{O}_v$ induit par s). Ceci achève la preuve.

2.6. Lien avec l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible.

Nous démontrons ici un corollaire du théorème 2.1.1, qui sera très utile en vue d'applications arithmétiques :

Corollaire 2.6.1 ("Lemme formel") *Soient k un corps de nombres et X une k-variété géométriquement intègre, projective et lisse, qui a des points dans tous les complétés de k. Soient $A_1, \ldots, A_r$ des éléments de* $\mathrm{Br}\,(k(X))$*, et U un ouvert de*

Zariski non vide de X tel que toutes les A_i soient dans $\mathrm{Br}\,U$. *Soit S un ensemble fini de places de k. On note j_v l'invariant local de* $\mathrm{Br}\,k_v$ *dans* $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. *Alors :*

- *S'il n'y a pas obstruction de Manin au principe de Hasse associée à $(A_1, ..., A_r)$ pour X, il existe $T \supset S$ et une famille de points locaux $(P_v)_{v \in T}$ avec $P_v \in U(k_v)$ tels que :*

$$\forall i \in \{1, ..., r\} \quad \sum_{v \in T} j_v(A_i(P_v)) = 0$$

- *S'il n'y a pas obstruction de Manin à l'approximation faible associée à $(A_1, ..., A_r)$ pour X, alors pour toute famille $(P_v)_{v \in S}$ telle que $P_v \in U(k_v)$, il existe $T \supset S$ et une famille de points locaux $(P_v)_{v \in T \setminus S}$ (avec $P_v \in U(k_v)$ pour toute v dans T) tels que :*

$$\forall i \in \{1, ..., r\} \quad \sum_{v \in T} j_v(A_i(P_v)) = 0$$

Preuve : Soit (pour tout i de $\{1, ..., r\}$) n_i l'ordre de A_i dans $\mathrm{Br}\,(k(X))$. Si v est une place de k, on note E_v le sous-ensemble de $\prod_{1 \le i \le r}(\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$ constitué des $(j_v(A_i(P'_v)))_{1 \le i \le r}$ pour $P'_v \in U(k_v)$. Soit Γ le sous-groupe de $\prod_{1 \le i \le r}(\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$ engendré par les éléments de $\prod_{1 \le i \le r}(\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$ qui appartiennent à une infinité de E_v. D'après la définition de Γ, il existe un ensemble fini S' de places de k tel que pour toute v non dans S' et tout P'_v dans $U(k_v)$, on ait $(j_v(A_i(P'_v)))_{1 \le i \le r}$ élément de Γ. Soit $(P_v)_{v \in \Omega_k}$ un élément de $\prod_{v \in \Omega_k} U(k_v)$. Soit S un ensemble fini de places de k contenant S' et soit W_S l'élément de $\prod_{1 \le i \le r}(\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$ dont la ième composante est $\sum_{v \in S} j_v(A_i(P_v))$. Deux cas sont possibles :

- Si W_S est dans Γ, on a $-W_S = W_1 + ... + W_r$ où les W_l $(1 \le l \le r)$ sont des éléments de $\prod_{1 \le i \le r}(\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$ qui appartiennent à une infinité de E_v. Ainsi, il existe des places deux à deux distinctes $v_1, ..., v_j$ de k, qui ne sont pas dans S, et telles que W_l soit dans E_{v_l} pour $1 \le l \le r$. En notant alors S'' l'ensemble des v_l $(1 \le l \le r)$ et $T = S \cup S''$, on voit, en prenant pour P_{v_l} un point de $U(k_{v_l})$ tel que $(j_{v_l}(A_i(P_{v_l})))_{1 \le i \le r} = W_l$, qu'on a bien $\sum_{v \in T} j_v(A_i(P_v)) = 0$ pour $1 \le i \le r$.
- Si W_S n'est pas dans Γ, il existe un caractère (c'est-à-dire ici un morphisme vers $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$) du groupe $\prod_{1 \le i \le r}(\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$ qui est nul sur Γ mais ne s'annule pas en W_S (c'est immédiat à partir des propositions 1 et 2 de [46]). Ainsi, il existe des entiers α_i $(1 \le i \le r)$ tels que $\sum_{v \in S} j_v(\prod_{i=1}^r A_i^{\alpha_i}(P_v))$ soit non nul dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, tandis que pour tout élément $(h_1, ..., h_r)$ de Γ, $\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i$ est nul dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. De ce fait, pour toute v non dans S' et tout P'_v dans $U(k_v)$, on a $(j_v(A_i(P'_v)))_{1 \le i \le r}$ élément de Γ ce qui implique que $j_v(\prod_{i=1}^r A_i^{\alpha_i}(P'_v))$ est nul dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. D'après le théorème 2.1.1, l'élément $A = \prod_{i=1}^r A_i^{\alpha_i}$ de $\mathrm{Br}\,(k(X))$ est dans $\mathrm{Br}\,X$ et on a $\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v))$ non nul dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Maintenant, s'il n'y a pas obstruction de Manin au principe de Hasse associée à $(A_1, ..., A_r)$ pour X, on peut trouver $(P_v)_{v\in\Omega_k}$ dans $\prod_{v\in\Omega_k} U(k_v)$ tel que pour tout élément B de $\mathrm{Br}\, X$, on ait $\sum_{v\in\Omega_k} j_v(B(P_v))$ nul. Ainsi, on est forcément dans le premier des deux cas envisagés ci-dessus. De même, s'il n'y a pas obstruction de Manin à l'approximation faible, on sait que pour tout élément $(P_v)_{v\in\Omega_k}$ de $\prod_{v\in\Omega_k} U(k_v)$, on est encore dans le premier cas. Ceci achève la preuve.

3. Un théorème de comparaison entre groupes de Brauer

3.1. Rappels géométriques

(Pour des définitions dans un cadre plus général, voir [7] et [23]). Soient F un corps algébriquement clos de caractéristique zéro et Z/F une F-variété intègre, projective et lisse. Si $H^2(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$, le foncteur de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{Z/F}$ est représentable par un F-schéma en groupes localement lisse. Si de plus $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$, la composante de la section unité $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{Z/F}$ est triviale (son espace tangent est en général un F-espace vectoriel dont la dimension est celle de $H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$). Ainsi, le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}\,(Z)$, conoyau de la flèche $\underline{\mathrm{Pic}}^0_{Z/F}(F) \to \underline{\mathrm{Pic}}_{Z/F}(F) = \mathrm{Pic}\,(Z)/\mathrm{Pic}\,(F)$ s'identifie à $\mathrm{Pic}\,(Z)$ (on peut identifier $\underline{\mathrm{Pic}}_{Z/F}(F)$ à $\mathrm{Pic}\,(Z)/\mathrm{Pic}\,(F)$ car $Z(F) \neq \emptyset$).
Notons que ces hypothèses sont en particulier remplies si Z est unirationnelle sur F : en effet, si $F = \mathbf{C}$, la théorie de Hodge nous dit que pour tous entiers p et q, les dimensions de $H^q(Z, \Omega^p)$ et $H^p(Z, \Omega^q)$ sont égales, où Ω est le faisceau des différentielles de Z/F; en particulier, le F-espace vectoriel $H^p(Z, \mathcal{O}_Z)$ a même dimension que $H^0(Z, \Omega^p)$ qui est nul pour $p > 0$ puisqu'un espace projectif $\mathbf{P}^r_F$ domine Z. On en déduit le résultat pour tout corps F algébriquement clos de caractéristique zéro, de degré de transcendance fini sur $\mathbf{Q}$ en plongeant F dans $\mathbf{C}$ et en utilisant la formule de Künneth, puis pour tout corps F algébriquement clos de caractéristique zéro en écrivant qu'on a $X = X_0 \times_{F_0} F$, où le corps F_0 est algébriquement clos et de type fini sur $\mathbf{Q}$ et X_0 est une F_0-variété unirationnelle. De même, les propriétés : $H^p(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ (avec $p > 0$) ou encore $\mathrm{Br}\, Z = 0$ sont des invariants F-birationnels des F-variétés projectives lisses. Rappelons également deux propriétés :

Proposition 3.1.1 *Soit Z une variété intègre, projective et lisse sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro F. Alors :*

- *Si* $\mathrm{Pic}\, Z$ *est sans torsion, le groupe* $H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$ *est nul.*
- *Si* $\mathrm{Br}\, Z$ *est nul, il en va de même de* $H^2(Z, \mathcal{O}_Z)$.

Preuve : Soit V la variété de Picard de Z : c'est une variété abélienne dont le groupe $\mathrm{Pic}^0(Z)$ des F-points est un sous-groupe de $\mathrm{Pic}\,Z$; Or, comme F est algébriquement clos de caractéristique zéro, le groupe des F-points de la variété abélienne V est de torsion ([41], application 3 page 62). Ainsi, si $\mathrm{Pic}\,Z$ est sans torsion, la variété V est triviale. Comme la dimension de son espace tangent à l'origine est celle de $H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$, ce dernier groupe est nul d'où le premier point. Supposons maintenant $\mathrm{Br}\,Z = 0$. On se ramène par l'argument déjà vu au cas $F = \mathbf{C}$ et on a alors $H^2(Z, \mathcal{O}_Z) = H^0(Z, \Omega^2) = 0$: en effet la condition $\mathrm{Br}\,Z = 0$ implique la condition "$B_2 - \rho = 0$" ([26], corollaire 3.4) et cette dernière condition est équivalente à la condition $H^0(Z, \Omega^2) = 0$ (cf [6], preuve de la proposition 2.11).

Lemme 3.1.2 *Soient R un anneau local régulier (intègre et noethérien) et S son spectre. Soit $\mathcal{X}$ un S-schéma projectif et lisse, à fibres géométriques intègres. Notons K le corps des fractions de R et X la fibre générique au-dessus de K du morphisme $p : \mathcal{X} \to S$. Alors, la flèche* $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Pic}\,X$ *est un isomorphisme.*

Preuve : Comme $\mathcal{X}$ est lisse, la flèche $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Pic}\,X$ est déjà surjective. D'autre part, considérons un diviseur intègre D de $\mathcal{X}$ qui ne rencontre pas la fibre générique. Alors, son image par p est un fermé strict de S. Comme les fibres géométriques de p sont intègres, le diviseur D est exactement l'image réciproque de ce fermé, lequel doit être de codimension 1 car D est de codimension 1 dans $\mathcal{X}$ et le morphisme p est plat. Ainsi, il suffit de prouver que pour tout point m de codimension 1 de S, la fibre $\mathcal{X}_m$ en m est un diviseur principal. Mais ceci résulte de ce que comme R est local régulier, il est factoriel ([37], théorème 48 page 142), donc $\mathrm{Pic}\,S = 0$ et le diviseur $\mathcal{X}_m$ est alors clairement défini sur $\mathcal{X}$ par une seule équation.

3.2. Ensembles hilbertiens

Soit B une k-variété géométriquement intègre, on dira qu'un sous-ensemble H de $B(k)$ est *hilbertien* s'il existe un ouvert de Zariski non vide U de B et un revêtement étale $\rho : Y \to U$ avec Y intègre sur k tel que H soit l'ensemble des k-points M de U pour lesquels $\rho^{-1}(M)$ est connexe. En particulier, l'ensemble des k-points d'un ouvert de Zariski non vide de B est hilbertien, et l'intersection de deux sous-ensembles hilbertiens de B contient encore un sous-ensemble hilbertien de B (cf [33], propositions 5.1 et 5.2). Le théorème d'irréductibilité de Hilbert dit qu'un sous-ensemble hilbertien de $\mathbf{A}^n_k(k)$ est Zariski-dense. Plus précisément, on dispose de la version "effective" suivante :

Proposition 3.2.1 *Soient $\mathcal{W} = \mathrm{Spec}\,R$ un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ et $\mathcal{B}$ un schéma intègre. Soit $\pi : \mathcal{B} \to \mathrm{Spec}\,R$ un morphisme dominant dont la fibre générique B est une k-variété géométriquement intègre. Soit $\rho : \mathcal{Y} \to \mathcal{B}$ un revêtement étale tel que la fibre générique Y/k de $\pi \circ \rho$ soit intègre. Alors, si B/k*

a la propriété d'approximation faible (resp. forte), il en va de même de l'ensemble des θ de $B(k)$ tels que la fibre de ρ en θ soit connexe.

(On dit que B a la propriété d'approximation forte si l'image de $B(k)$ est dense dans le produit restreint des $B(k_v)$, où v parcourt toutes les places de k à l'exception d'une seule).

Preuve : Cet énoncé est pratiquement le même que celui obtenu par Ekedahl dans [18] (la seule différence est qu'on suppose juste Y intègre sur k et non plus forcément géométriquement intègre). La preuve qui suit est analogue à celle du théorème 1.3 de [18] et repose sur le lemme 2.3.1 qui nous a déjà servi pour prouver le théorème 2.1.1. On pourra aussi consulter [39] pour le cas où B est la droite affine.
Soient K le corps des fonctions de B et K' le corps des fonctions de Y, on note L la fermeture intégrale de k dans K'. Notons $\mathcal{W}_L$ l'image réciproque de $\mathcal{W}$ par la flèche $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_k)$. Il existe un ouvert de Zariski non vide U de Y tel que le morphisme structural $U \to \operatorname{Spec} k$ se factorise par un morphisme $U \to \operatorname{Spec} L$. Ainsi, nous pouvons supposer (quitte à réduire $\mathcal{W}$ et à remplacer $\mathcal{B}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement par des ouverts de Zariski non vides de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{Y}$) que $\mathcal{B}$ est lisse et que ρ se factorise par un revêtement $\rho_L : \mathcal{Y} \to \mathcal{B}_L = \mathcal{B} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{W}_L$. On peut aussi supposer ρ galoisien de groupe G. On note K_L le corps des fonctions de $B_L = B \times_k L$.
Traitons par exemple le cas où B vérifie l'approximation faible (le cas de l'approximation forte est similaire). Soient T un ensemble fini de places de k et x_v un point de $B(k_v)$ pour v dans T. Soit T_L l'ensemble des places de L qui sont au-dessus d'une place de T. Appliquons le lemme 2.3.1 au revêtement ρ_L (la fibre générique de $\mathcal{Y} \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_L)$ est bien géométriquement intègre puisque L est la fermeture intégrale de k dans K'). D'après ce lemme, pour presque toute place w de L, il existe pour toute classe de conjugaison C de $G_L = \operatorname{Gal}(K'/K_L)$ un point x_C de $\mathcal{B}(L(w))$ dont le Frobenius est dans la classe C. Soit $\{C_1, ..., C_r\}$ l'ensemble des classes de conjugaison de G_L. En utilisant en outre le théorème de Tchebotarev, nous pouvons trouver des places $w_1, ..., w_r$ de L (qui ne sont pas dans T_L et qui induisent des places deux à deux distinctes $v_1, ..., v_r$ de k) vérifiant $L(w_i) = k(v_i)$, et des points $x(w_i)$ de $\mathcal{B}_L(L(w_i))$ dont le Frobenius est dans C_i. Maintenant, ces points se projettent en des points lisses $x(v_i)$ de $\mathcal{B}(k(v_i))$, que l'on peut relever par le lemme de Hensel en des points x_{v_i} de $B(k_{v_i})$. Appliquant l'approximation faible à B avec les places de $T \cup \{v_1, ..., v_r\}$, on trouve un point x de $B(k)$ arbitrairement proche de x_{v_i} pour $1 \leq i \leq r$ et des x_v pour v dans T. Le point x est ainsi dans $\mathcal{B}(\mathcal{O}_{v_i})$ pour $1 \leq i \leq r$ et sa réduction dans $k(v_i)$ est $x(v_i)$; ainsi, la fibre du revêtement ρ_L en $x \in B_L(L)$ est connexe puisqu'un sous-groupe strict de G_L ne peut rencontrer toutes les classes de conjugaison de G_L ([18], lemme 1.1). Il en va donc de même de la fibre en $x \in B(k)$ du revêtement ρ vu

que ρ est juste le composé de ρ_L et de la projection $\mathcal{B}_L = \mathcal{B} \times_{\mathcal{W}} \mathcal{W}_L \to \mathcal{B}$. D'où le résultat.

3.3. Flèches de spécialisation entre groupes de Brauer

Commençons par prouver un lemme utile :

Lemme 3.3.1 *Soit $\mathcal{K}$ un corps. Soit S une $\mathcal{K}$-variété intègre, de corps des fonctions $\mathcal{K}(S)$. Soient Y et Z deux $\mathcal{K}$-variétés intègres munies de morphismes dominants vers S. On suppose que les fibres génériques Y_η et Z_η sont géométriquement intègres et $\mathcal{K}(S)$-birationnelles. Alors, il existe un ouvert de Zariski non vide U de S tel que pour tout point rationnel t de U, les fibres Y_t et Z_t soient géométriquement intègres et $\mathcal{K}$-birationnelles.*

Preuve du lemme 3.3.1 : Quitte à remplacer S par un ouvert de Zariski non vide de S, on peut supposer que toutes les fibres des morphismes $Y \to S$ et $Z \to S$ sont géométriquement intègres. Les variétés Y et Z sont $\mathcal{K}$-birationnelles (elles ont même corps de fonctions); soient U_1 et U_2 des ouverts respectifs non vides de Y et Z tels qu'il existe un $\mathcal{K}$-isomorphisme Φ de U_1 sur U_2, alors Φ est un S-morphisme (car si p_1 et p_2 sont les projections respectives $U_1 \to S$ et $U_2 \to S$, les morphismes $p_2 \circ \Phi$ et p_1 coïncident au point générique de U_1, donc partout puisque U_1 est séparé sur S). Maintenant, pour tout point $\mathcal{K}$-rationnel t de S, les ouverts $U_{1,t}$ et $U_{2,t}$ des fibres Y_t et Z_t sont $\mathcal{K}$-isomorphes. Or, il existe un ouvert de Zariski non vide S' de S tel que pour tout point rationnel t de S', l'ouvert $U_{1,t}$ soit non vide, car l'image de l'ouvert U_1 par la projection p_1 est un constructible de S ([37], théorème 6.E) qui contient le point générique de S, donc contient un ouvert de Zariski non vide de S. Le résultat en découle.

Définition d'une flèche de spécialisation entre groupes de Brauer : Soient maintenant V et B deux k-variétés intègres, dont on note $k(V)$ et K les corps de fonctions respectifs. Soit $p : V \to B$ un k-morphisme dominant, dont la fibre générique V_η est géométriquement intègre. Soit A un élément de $\mathrm{Br}\,(k(V))$. Il existe un ouvert de Zariski V' non vide et lisse de V tel que A soit dans $\mathrm{Br}\,V'$ et tel que la fibre générique $V'_\eta \hookrightarrow V_\eta$ du morphisme $V' \to B$ induit par p soit lisse. Il existe alors un ouvert de Zariski non vide B' de B et un ouvert de Zariski non vide $V_1 \hookrightarrow V'$ de V tel que p induise un morphisme dominant et lisse $p' : V_1 \to B'$ dont toutes les fibres sont géométriquement intègres; pour tout point rationnel θ de B', la fibre $V_{1,\theta}$ de p' en θ est alors un ouvert de Zariski non vide de V_θ. On note alors $k(V_\theta)$ le corps des fonctions de V_θ.
De la flèche $V_{1,\theta} \hookrightarrow V_1$, on déduit une flèche $\mathrm{Br}\,V_1 \to \mathrm{Br}\,V_{1,\theta}$. On obtient ainsi un élément A_θ de $\mathrm{Br}\,(k(V_\theta))$, défini pour tout point rationnel θ de B', avec B' ouvert de Zariski non vide de B.

Lemme 3.3.2 *Avec les notations ci-dessus, si A est dans* $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)$*, alors il existe un ouvert de Zariski non vide $B_1 \hookrightarrow B'$ de B tel que pour tout point rationnel θ de B_1, la spécialisation $A_\theta \in \mathrm{Br}(k(V_\theta))$ soit en fait dans* $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$.

Preuve : En gardant toujours les mêmes notations, on peut (d'après le théorème de résolution des singularités d'Hironaka), quitte à réduire encore V_1, plonger $V_{1,\eta}$ dans une K-variété projective et lisse X, puis trouver un morphisme projectif et lisse $p_1 : Z \to B_1$ de fibre générique $X \to \mathrm{Spec}\, K$ (où B_1 est un ouvert de Zariski non vide inclus dans B' de B), tel que pour tout point rationnel θ de B_1, la fibre Z_θ soit un modèle projectif lisse de $V_{1,\theta}$ (avec le lemme 3.3.1), et donc aussi de V_θ. Maintenant, les diviseurs de Z en lesquels A est ramifié ne rencontrent pas la fibre générique de p_1 donc quitte à restreindre encore B_1, on peut supposer que A est dans $\mathrm{Br}(Z)$ (avec le théorème de pureté de Grothendieck). Alors, si θ est un point rationnel de B_1, la spécialisation A_θ est en fait dans $\mathrm{Br}(Z_\theta)$ qui n'est autre que $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$ (d'après les rappels de 1.2.). D'où le résultat.

Remarque : Avec les hypothèses et notations du lemme 3.3.2, si A est dans $\mathrm{Br}\, K$, alors A_θ est dans $\mathrm{Br}\, k$. Ainsi, on obtient également une flèche de spécialisation de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)/\mathrm{Br}\, K$ dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)/\mathrm{Br}\, k$, définie pour tout point rationnel θ d'un ouvert de Zariski non vide B_1 de B.

3.4. Flèches de spécialisation entre groupes de Picard

Soit R un anneau local régulier (intègre et noethérien) de corps des fractions K et dont le corps résiduel κ est de caractéristique zéro. Soit $\mathcal{X}$ un schéma projectif et lisse au-dessus de $\mathrm{Spec}\, R$, à fibres (géométriques) géométriquement intègres, dont on note X la fibre générique au-dessus de K et X_m la fibre au-dessus du point fermé de $\mathrm{Spec}\, R$. Soit R' un anneau local régulier dont le corps des fractions L est une extension finie de K et l'idéal maximal est au-dessus de celui de R (on dira alors que R' "domine" R). Le corps résiduel κ' de R' est ainsi une extension finie du corps résiduel κ de R. Notons $\mathcal{X}_{R'} = \mathcal{X} \times_R R'$ et $X_{m,\kappa'}$ la fibre de $\mathcal{X}_{R'}$ au-dessus du point fermé de $\mathrm{Spec}\, R'$. On a $\mathrm{Pic}(\mathcal{X}_{R'}) = \mathrm{Pic}(X_L)$ (lemme 3.1.2) et on dispose d'une flèche de spécialisation $\mathrm{Pic}(X_L) = \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_{R'}) \to \mathrm{Pic}(X_{m,\kappa'})$ qui est obtenue par image réciproque (cf [20], 20.3).

Lemme 3.4.1 *Soient R et $\mathcal{X}$ fixés comme ci-dessus. Notons $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$ et $\overline{X_m} = X_m \times_\kappa \bar{\kappa}$.*
Considérons les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc} L & \longrightarrow & R' & \longleftarrow & \kappa' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ K & \longrightarrow & R & \longleftarrow & \kappa \end{array}$$

où l'anneau local régulier R' domine R, a pour corps des fractions L et pour corps résiduel κ'.
Alors, les flèches de spécialisation $\mathrm{Pic}(X_L) = \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_{R'}) \to \mathrm{Pic}(X_{m,\kappa'})$ *induisent par passage à la limite inductive sur ces diagrammes une flèche de spécialisation :* $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$.

Preuve : Si R'_1 et R'_2 sont deux anneaux locaux réguliers dominant R, de corps des fractions L_1 et L_2, de corps résiduels κ_1 et κ_2, il existe d'abord un anneau local R'_0 dominant R'_1 et R'_2, de corps des fractions L_1L_2 (considérer un localisé de $R'_1 \otimes_R R'_2$). Maintenant, par le théorème de résolution des singularités d'Hironaka, on peut trouver un anneau local régulier R_0 dominant R'_0 et de corps des fractions L_1L_2. Ainsi, on dispose bien d'une limite inductive (filtrante). D'autre part, toujours à cause du théorème d'Hironaka, il existe pour toute extension finie L de K un anneau local régulier R' de corps des fractions L et dominant R (La fermeture intégrale R_I de R dans L est un anneau semi-local et on prend pour R' un modèle régulier du localisé de R_I par rapport à l'un de ses idéaux maximaux). Ainsi, on obtient bien une flèche définie sur $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ tout entier. D'où le résultat.

Proposition 3.4.2 *Soit R un anneau local régulier (intègre et noethérien) de corps des fractions K et dont le corps résiduel κ est de caractéristique zéro. Soit $\mathcal{X}$ un schéma projectif et lisse au-dessus de* $\mathrm{Spec}\, R$*, à fibres (géométriques) géométriquement intègres, dont on note X la fibre générique au-dessus de K et X_m la fibre au-dessus du point fermé de* $\mathrm{Spec}\, R$*. On fait l'hypothèse supplémentaire que les groupes $H^1(\overline{X_m}, \mathcal{O}_{\overline{X_m}})$ et $H^2(\overline{X_m}, \mathcal{O}_{\overline{X_m}})$ sont nuls. Alors, la flèche de spécialisation (bien définie grâce au lemme 3.4.1)* $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$ *est un isomorphisme de groupes abéliens.*

Preuve : Soient $\widehat{R}$ le complété de R et $\widehat{K}$ son corps des fractions. Soit $\overline{\widehat{K}}$ une clôture algébrique de $\widehat{K}$ contenant $\overline{K}$. En appliquant le lemme 3.4.1 à l'anneau $\widehat{R}$ (qui est régulier) et au schéma $\mathcal{X}_{\widehat{R}} = \mathcal{X} \times_R \widehat{R}$, on obtient une flèche de spécialisation : $\mathrm{Pic}(X_{\overline{\widehat{K}}}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$. Or, si R' est local, régulier, et domine $\widehat{R}$, il existe encore (par désingularisation de son complété) un anneau local régulier complet R'' qui domine R' et a même corps des fractions (soit L) que R'. Soit κ' le corps résiduel de R''. Les groupes $H^1(X_{m,\kappa'}, \mathcal{O}_{X_{m,\kappa'}})$ et $H^2(X_{m,\kappa'}, \mathcal{O}_{X_{m,\kappa'}})$ sont nuls. De ce fait, le corollaire 1 à la proposition 3 de [22] nous dit que la flèche de spécialisation $\mathrm{Pic}(X_L) = \mathrm{Pic}(X_{R''}) \to \mathrm{Pic}(X_{m,\kappa'})$ est un isomorphisme (vu que R'' est bien complet). Ainsi, en passant à la limite inductive, on obtient déjà que la flèche de spécialisation : $\mathrm{Pic}(X_{\overline{\widehat{K}}}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$ est un isomorphisme.
Par le théorème de semi-continuité ([29], III.12.8), les groupes $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ et $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ sont encore nuls. Ainsi, le groupe $\mathrm{Pic}(X_{\overline{\widehat{K}}})$ est isomorphe à $\mathrm{NS}(X_{\overline{\widehat{K}}})$ qui est lui-même isomorphe à $\mathrm{NS}(\overline{X}) = \mathrm{Pic}(\overline{X})$ (le groupe de Néron-Séveri ne change pas par extension de corps de base algébriquement clos). Finalement,

la flèche de spécialisation : $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$ est aussi un isomorphisme de groupes, ce qui achève la preuve.

3.5. Une propriété des flèches de spécialisation

Nous en venons au résultat principal de cette section 3.

Théorème 3.5.1 *Soient k un corps de nombres et V une k-variété intègre. Soient B une k-variété géométriquement intègre et $p : V \to B$ un k-morphisme dominant. Notant K le corps des fonctions de B, on suppose que la fibre générique V_η est une K-variété géométriquement intègre et on note $\overline{V_\eta}$ la $\overline{K}$-variété $V_\eta \times_K \overline{K}$.*
Si X est un modèle projectif lisse de V_η au-dessus de K et $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$, on suppose aussi que les groupes $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ et $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$, ainsi que $\mathrm{Br}\,\overline{X}$, sont nuls.
Enfin, on fait en plus l'une des deux hypothèses suivantes :

1. *Le corps K est le corps $k(T)$.*

2. *La fibre générique V_η possède un K-point lisse.*

Alors, il existe un sous-ensemble hilbertien H de $B(k)$ tel que pour tout point m de H, la flèche de spécialisation : $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)/\mathrm{Br}\,K \to \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_m)/k)/\mathrm{Br}\,k$ est un isomorphisme de groupes abéliens (V_m désigne la fibre en m).

Preuve du théorème 3.5.1 : Comme la caractéristique de K est nulle, on peut, par le théorème de résolution des singularités d'Hironaka, trouver d'abord un modèle projectif lisse Z_η de V_η au-dessus de K. Ensuite, on peut trouver un modèle projectif $Z \to B$ de $Z_\eta \to \mathrm{Spec}\,K$. Si V_η possède un K-point lisse, alors Z_η possède un K-point (à cause du lemme de Nishimura). Ainsi, comme le groupe de Brauer non ramifié est un invariant birationnel, nous nous ramenons (avec le lemme 3.3.1) au cas où le morphisme p est projectif avec V_η lisse. Nous noterons désormais X la K-variété projective lisse V_η. Notons qu'il existe un ouvert de Zariski lisse U_1 de B tel que la fibre de p au-dessus de tout point (fermé ou non) de U_1 soit lisse et géométriquement intègre, et tel qu'on dispose, pour tout point rationnel m de U_1 de la flèche de spécialisation : $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)/\mathrm{Br}\,K \to \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_m)/k)/\mathrm{Br}\,k$ (voir la remarque suivant la preuve du lemme 3.3.2). On peut également supposer que le morphisme induit $p^{-1}(U_1) \to U_1$ est lisse.
Maintenant, les groupes $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ et $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ sont nuls. Le théorème de semi-continuité ([29], III.12.8) assure qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U de B (avec $U \subset U_1$) tel que pour tout point m de U, dont on note la fibre X_m, les groupes $H^1(\overline{X_m}, \mathcal{O}_{\overline{X_m}})$ et $H^2(\overline{X_m}, \mathcal{O}_{\overline{X_m}})$ soient encore nuls.

Considérons alors un point rationnel m de U dont on note R l'anneau local (c'est un anneau local régulier puisque U est un ouvert lisse de B). Le corps résiduel de

R est k. Soit $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec} R$ un modèle projectif, lisse de V au-dessus de $\operatorname{Spec} R$. La fibre générique est X, la fibre au-dessus du point fermé de $\operatorname{Spec} R$ est X_m. D'après la proposition 3.4.2, la flèche de spécialisation : $\operatorname{Pic}(\overline{X}) \to \operatorname{Pic}(\overline{X_m})$ est un isomorphisme de groupes abéliens.
Maintenant, pour tout entier $n \geq 1$, la suite exacte de Kummer en cohomologie étale donne les suites exactes :

$$0 \to \operatorname{Pic}(\overline{X})/n \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_n) \to {}_n\operatorname{Br}\overline{X} \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Pic}(\overline{X_m})/n \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X_m}, \mu_n) \to {}_n\operatorname{Br}\overline{X_m} \to 0$$

et d'autre part, le théorème de spécialisation lisse en cohomologie étale ([38], corollaire 4.2.) nous dit que les groupes $H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_n)$ et $H^2_{\text{ét}}(\overline{X_m}, \mu_n)$ sont isomorphes. Comme d'autre part le groupe $\operatorname{Br}\overline{X}$ est nul et les groupes $\operatorname{Pic}(\overline{X})$ et $\operatorname{Pic}(\overline{X_m})$ sont isomorphes, on obtient finalement que les groupes $\operatorname{Pic}(\overline{X_m})/n$ et $H^2_{\text{ét}}(\overline{X_m}, \mu_n)$ sont isomorphes. Or, il s'agit de groupes finis donc dans la deuxième des suites exactes ci-dessus, l'injection $\operatorname{Pic}(\overline{X_m})/n \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X_m}, \mu_n)$ est aussi surjective, c'est-à-dire que ${}_n\operatorname{Br}\overline{X_m}$ est nul. Finalement, on obtient que le groupe $\operatorname{Br}\overline{X_m}$ est nul (puisque c'est toujours un groupe de torsion).

Alors, on peut trouver une extension finie galoisienne L de K telle que X_L possède un L-point avec en plus $\operatorname{Pic}(\overline{X}) = \operatorname{Pic}(X_L)$. Au corps L correspond un revêtement séparable $\rho : Y \to U$ (avec Y intègre sur k) de groupe $\operatorname{Gal}(L/K)$, que nous pouvons supposer étale avec Y lisse (quitte à restreindre encore U et Y). Par définition, il existe un sous-ensemble hilbertien H de $U(k)$ tel que pour tout point m de H, la fibre de ρ en m soit connexe. Soit m un tel point, appliquons ce qui précède à m. Il y a un unique point fermé m' de Y au-dessus de m et l'anneau local R' de Y en m' est régulier, de corps des fractions L. Soit k' son corps résiduel. La fermeture intégrale de R dans L est R' et on a un isomorphisme $\operatorname{Gal}(L/K) \to \operatorname{Gal}(k'/k)$. La flèche de spécialisation : $\operatorname{Pic}(\mathcal{X}_{R'}) \to \operatorname{Pic}(X_{m,k'})$ est compatible avec les actions respectives de $\operatorname{Gal}(L/K)$ et $\operatorname{Gal}(k'/k)$. D'autre part, on a vu que la flèche $\operatorname{Pic}(\overline{X}) \to \operatorname{Pic}(\overline{X_m})$ est un isomorphisme de groupes donc comme $\operatorname{Pic}(\overline{X}) = \operatorname{Pic}(X_L)$, cette flèche est en fait à valeurs dans $\operatorname{Pic}(X_{m,k'})$ donc $\operatorname{Pic}(X_{m,k'}) = \operatorname{Pic}(\overline{X_m})$ et on obtient donc un isomorphisme de spécialisation de $H^1(\operatorname{Gal}(L/K), \operatorname{Pic}(X_L))$ sur $H^1(\operatorname{Gal}(k'/k), \operatorname{Pic}(X_{m,k'}))$ qui est en fait un isomorphisme de $H^1(K, \operatorname{Pic}(\overline{X}))$ sur $H^1(k, \operatorname{Pic}(\overline{X_m}))$: en effet, comme X_L possède un L-point, on a, en notant $G_L = \operatorname{Gal}(\overline{K}/L)$, l'égalité $\operatorname{Pic}(\overline{X})^{G_L} = \operatorname{Pic}(X_L)$.

Or, pour toute variété géométriquement intègre projective et lisse Z sur un corps F de caractéristique 0, et telle que $\operatorname{Br}\overline{Z} = 0$, on a la suite exacte :

$$\operatorname{Br} F \to \operatorname{Br} Z \xrightarrow{\chi} H^1(F, \operatorname{Pic}(\overline{Z})) \to H^3(F, \mathbf{G}_m) \to H^3_{\text{ét}}(Z, \mathbf{G}_m)$$

En particulier, on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H^1(K, \mathrm{Pic}\,(\overline{X})) & \xrightarrow{\sigma_1} & H^1(k, \mathrm{Pic}\,(\overline{X_m})) \\ \uparrow^{\chi} & & \uparrow^{\chi} \\ \mathrm{Br}\, X & \xrightarrow{\sigma_2} & \mathrm{Br}\, X_m \end{array}$$

où σ_1 est l'isomorphisme de spécialisation défini plus haut et σ_2 la flèche de spécialisation définie au lemme 3.3.2. Ce diagramme commute au signe près (d'après la description explicite de χ, que l'on peut trouver au paragraphe 3.1 de [10], et des flèches de spécialisation entre groupes de Picard, qui sont obtenues par image réciproque).

Comme k est un corps de nombres, le groupe $H^3(k, \mathbf{G}_m)$ est nul. Pour conclure que σ_2 induit un isomorphisme de $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, K$ sur $\mathrm{Br}\, X_m/\mathrm{Br}\, k$ (ce qui donnera le résultat voulu, vu que $\mathrm{Br}\, X$ n'est autre que $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\,(K(V_\eta)/K)$ et $\mathrm{Br}\, X_m$ est égal à $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\,(k(V_m)/k)$), il suffit donc de prouver que la flèche $H^1(K, \mathrm{Pic}\,(\overline{X})) \to H^3(K, \mathbf{G}_m)$ est nulle. Or, si X possède un K-point, le morphisme structural de X vers $\mathrm{Spec}\, K$ admet une section ce qui fait que la flèche $H^3(K, \mathbf{G}_m) \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ est injective donc on a le résultat dans ce cas.

Enfin, quand $K = k(T)$, alors $H^3(K, \mathbf{G}_m)$ est nul (ce qui permet de conclure). Ceci résulte de la suite exacte de Faddeev :

$$H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(k(T), \mathbf{G}_m) \to \bigoplus_{P \in \mathbf{A}_k^{1\ (1)}} H^2(k(P), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

et de ce que pour tout corps de nombres k', le groupe $H^2(k', \mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$ est nul ([44], 4.1). Rappelons qu'on obtient cette suite exacte de Faddeev en écrivant la suite exacte de $\mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k)$-modules :

$$0 \longrightarrow \bar{k}^* \longrightarrow \bar{k}(T)^* \longrightarrow \mathrm{Div}\,(\mathbf{A}_{\bar{k}}^1) = \bigoplus_{P \in \mathbf{A}_{\bar{k}}^{1\ (1)}} \mathbf{Z}.P \longrightarrow 0$$

(quand V est une variété pure, la notation $V^{(1)}$ désigne l'ensemble de ses points de codimension 1).

En effet, le corps $\bar{k}(T)$ est C_1 d'après le théorème de Tsen, donc de dimension cohomologique 1. De ce fait, on a $H^3(k(T), \mathbf{G}_m) = H^3(k, \bar{k}(T)^*)$ ce qui permet d'obtenir la suite exacte de Faddeev en prenant la cohomologie galoisienne de la suite exacte précédente et en utilisant les identifications habituelles $H^3(k(P), \mathbf{Z}) \simeq H^2(k(P), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Remarques :

- L'hypothèse $K = k(T)$ n'intervient en fait que parce que l'on a besoin d'avoir $H^3(K, \mathbf{G}_m) = 0$. Si l'on n'a pas l'une des hypothèses 1 ou 2 du théorème 3.5.1, on peut quand meme conclure que pour tout point m de l'ensemble hilbertien H, on a un isomorphisme de $H^1(K, \mathrm{Pic}\,(\overline{X}))$ sur $H^1(k, \mathrm{Pic}\,(\overline{X_m}))$.

- Soit X un modèle projectif lisse de V_η sur K et $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$. Si on fait l'hypothèse supplémentaire que $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ est sans torsion (rappel : ce $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}/K)$-module est, à addition près d'un $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}/K)$-module de permutation, un invariant K-birationnel, cf [10], appendice 2A), le groupe $\mathrm{Br}\,X/\mathrm{Br}\,K = H^1(\mathrm{Gal}\,(\overline{K}/K), \mathrm{Pic}\,(\overline{X}))$ est fini. Ainsi, on peut dans ce cas trouver un ensemble fini $\{A_1, ...A_r\}$ d'éléments de $\mathrm{Br}\,(k(V))$ qui engendrent (modulo $\mathrm{Br}\,K$) $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\,(K(V_\eta)/K)$ et la proposition nous dit qu'il existe un sous-ensemble hilbertien H de $B(k)$, tel que pour tout point m de H, les A_i induisent des éléments $A_{i,m}$ de $\mathrm{Br}\,(k(V_m))$ qui engendrent $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\,(k(V_m)/k)$ (modulo $\mathrm{Br}\,k$).

  Notons d'ailleurs que la condition $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = 0$ est automatiquement vérifiée quand on a $\mathrm{Br}\,\overline{X}$ nul et $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ sans torsion (proposition 3.1.1).

- Quand V_η est une variété rationnelle, on a bien $\mathrm{Br}\,\overline{X}$ nul (d'après les rappels de 3.1.) et $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ est sans torsion. Quand V_η est une intersection complète lisse de dimension au moins 3 dans $\mathbf{P}^r_K$, on a encore $\mathrm{Br}\,\overline{X}$ nul et le $\mathrm{Gal}\,(\overline{K}/K)$-module $\mathrm{Pic}\,(\overline{X})$ est même de permutation ([6], exemple 3.11). Ainsi, dans ce cas, on a $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\,(K(V_\eta)/K)/\mathrm{Br}\,K = 0$. C'est dans ces deux cas que nous utiliserons le théorème 3.5.1 en vue d'applications arithmétiques.

4. Applications arithmétiques

Dans cette section, nous établissons, sous certaines conditions, que l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour une variété V dont les fibres (pour certains morphismes) ont cette même propriété. Il s'agit donc d'une généralisation de la méthode des fibrations telle qu'elle est utilisée par exemple dans [11], [8], ou [49].

4.1. Un lemme

On établit ici un résultat qui garantira l'existence de points locaux (vérifiant certaines conditions) dans les fibres. Ce lemme est donc un raffinement de celui que prouve Skorobogatov dans [49] (théorème 1, deuxième étape). On note toujours Ω_k l'ensemble des places du corps de nombres k et pour toute place v non archimédienne de k, on note $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de k_v et $k(v)$ son corps résiduel. On note de même $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k.

Lemme 4.1.1 *Soient V une k-variété géométriquement intègre et $p : V \to \mathbf{A}^1_k$ un morphisme projectif, surjectif, à fibres géométriquement intègres. Soient U un ouvert de Zariski non vide de V et Λ un ensemble fini d'éléments de* $\mathrm{Br}\,U$.

Alors, il existe un ensemble fini S de places de k et un ensemble fini E d'éléments de $\mathrm{Br}\,(k(T)) \cap \mathrm{Br}\,U$ *tels que si S' est un ensemble fini de places de k contenant S,* *il existe un ensemble fini de places $v_1, ..., v_l$ qui ne sont pas dans S' et un élément θ_i de $\mathcal{O}_{v_i}$ (pour tout i de $\{1, ..., l\}$) ayant la propriété suivante :*

Si $\theta \in k$ est un S'-entier tel que $v_i(\theta - \theta_i) \geq 2$ pour $1 \leq i \leq l$ et si la fibre $V_\theta \cap U$ possède des points locaux lisses M_v pour $v \in S'$ vérifiant $\sum_{v \in S'} j_v(A(M_v)) = 0$ pour $A \in (\Lambda \cup E)$, alors $V_\theta \cap U$ possède des points locaux lisses P_v pour $v \in \Omega_k$ vérifiant :

$$\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) = 0 \quad \text{pour } A \in \Lambda$$

Remarque : Le morphisme p induit une flèche $\mathrm{Br}\,(k(T)) \to \mathrm{Br}\,(k(V))$; par abus de notation, on désigne encore par $\mathrm{Br}\,(k(T))$ l'image de $\mathrm{Br}\,(k(T))$ par cette flèche, ce qui permet par exemple de parler du sous-groupe $\mathrm{Br}\,(k(T)) \cap \mathrm{Br}\, U$ de $\mathrm{Br}\,(k(V))$.

Preuve : On peut supposer l'ouvert U lisse. Soit Z son complémentaire, on peut écrire $Z = Z_1 \cup Z_2$, où les composantes irréductibles du fermé Z_1 dominent $\mathbf{A}^1_k$ tandis que Z_2 est contenu dans la réunion d'un ensemble fini de fibres $V_{m_1}, ..., V_{m_l}$ (et nous pouvons supposer que Z_2 est exactement la réunion des V_{m_i}). Notons $k_i \simeq k[T]/P_i(T)$ le corps résiduel de $\mathbf{A}^1_k$ en m_i (où P_i est un polynôme irréductible unitaire de $k[T]$). Pour tout i de $\{1, ..., l\}$ et tout A de Λ, on dispose du résidu $\partial_{A,i}$ de A au point générique de V_{m_i}. Soit K_i le corps des fonctions de V_{m_i} (qui est géométriquement intègre). Pour i fixé, les $\partial_{A,i}$ (avec $A \in \Lambda$) engendrent un sous-groupe fini G_i de $H^1(K_i, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, qui est donc de la forme $H^1(\mathrm{Gal}\,(K_i'/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, où K_i' est une extension abélienne finie de K_i. Soit L_i la fermeture intégrale de k_i dans K_i'. On dispose du sous-groupe $G_i' = H^1(\mathrm{Gal}\,(K_iL_i/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq H^1(\mathrm{Gal}\,(L_i/k_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ de G_i. Rappelons la suite exacte de Faddeev ([19]) :

$$0 \to \mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\,(k(T)) \xrightarrow{\{\partial_P\}} \bigoplus_{P \in \mathbf{A}^{1\,(1)}_k} H^1(k(P), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to 0$$

D'après cette suite, on peut trouver un ensemble fini E_i d'éléments de $\mathrm{Br}\,(k(T))$ qui ne sont ramifiés qu'au point m_i de $\mathbf{A}^1_k$ et dont les résidus respectifs en m_i sont précisément les éléments de $H^1(\mathrm{Gal}\,(L_i/k_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. On pose alors $E = \bigcup_{1 \leq i \leq l} E_i$. Les éléments de E peuvent ainsi également se voir comme des éléments de $\mathrm{Br}\, U$.

On peut trouver un ensemble fini S_1 de places de k (contenant toutes les places archimédiennes et toutes les places ramifiées dans les extensions L_i/k) tel que si $\mathcal{W}_1 = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{k,S_1})$, la variété V admette un modèle projectif $\mathcal{V}$ au-dessus de $\mathbf{A}^1_{\mathcal{W}_1}$ et U s'étende en un ouvert lisse $\mathcal{U}$ au-dessus de $\mathbf{A}^1_{\mathcal{W}_1}$. Les fibres V_{m_i} s'étendent de même en $\mathcal{V}_{m_i}$ et le fermé Z_1 en $\mathcal{Z}_1$. On peut également supposer, quitte à augmenter S_1 que toutes les fibres de $\mathcal{V} \to \mathbf{A}^1_{\mathcal{W}_1}$ sont géométriquement intègres,

et que les réductions modulo v des fibres $\mathcal{V}_{m_i}$ sont deux à deux disjointes pour $v \notin S$, avec $\mathcal{V}_{m_i} \cap \mathcal{U} = \emptyset$. On supposera enfin que les éléments de $(\Lambda \cup E) \subset \operatorname{Br} U$ s'étendent en des éléments de $\operatorname{Br} \mathcal{U}$, que le polynôme $P_i(T)$ (pour $1 \leq i \leq l$) est dans $\mathcal{O}_{k,S_1}$ et que sa réduction modulo v est un polynôme séparable pour v non dans S_1.
On peut trouver pour tout i de $\{1, ..., l\}$ un ouvert lisse $\mathcal{U}_i$ de $\mathcal{V}_{m_i}$ (avec $\mathcal{U}_i$ ne rencontrant pas $\mathcal{Z}_1$) tel que les éléments de $H^1(\operatorname{Gal}(K_i'/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ soient en fait dans $H^1_{\text{ét}}(\mathcal{U}_i, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Quitte à élargir encore S_1, nous supposerons aussi que toutes les composantes irréductibles de $\mathcal{F}_i = \mathcal{V}_{m_i} \setminus \mathcal{U}_i$ dominent $\mathcal{W}_1$.

Notons que comme p est dominant et V intègre, le schéma V est plat sur $\mathbf{A}^1_k$ ([29], III.9.7). De même, le schéma Z_1 est plat sur $\mathbf{A}^1_k$ et par le caractère ouvert de la platitude ([24], 11.1.1), on peut supposer quitte à agrandir encore S_1 que les schémas $\mathcal{V}$ et $\mathcal{Z}_1$ sont plats sur $\mathbf{A}^1_{\mathcal{W}_1}$. De même, on peut supposer que les schémas $\mathcal{V}_{m_i}$ et $\mathcal{F}_i$ sont plats sur $\mathcal{W}_1$.
Or, le degré et la dimension sont constants dans une famille plate et projective car dans une telle famille, le polynôme de Hilbert est constant ([29], III.9.9). On en déduit, par le théorème de Lang-Weil, qu'il existe un ensemble fini S de places de k contenant S_1 tel que :

- si $v \notin S$ et $i \in \{1, ..., l\}$, le schéma $\widetilde{\mathcal{U}_i}^v$ (réduction modulo v de $\mathcal{U}_i$) possède un $k(v)$-point.
- si $\theta \in k = \mathbf{A}^1_k\ (k)$ est un S-entier, alors $\widetilde{\mathcal{V}_\theta}^v$ possède un $k(v)$-point hors de $\mathcal{Z}_1$ pour toute place v de k non dans S.

Ainsi, si $\theta \in k$ est un S-entier et si v est une place de k qui n'est pas dans S, la fibre $\widetilde{\mathcal{V}_\theta}^v$ possède toujours un $k(v)$-point lisse $M(v)$ (soit dans l'un des $\widetilde{\mathcal{U}_i}^v$ soit dans $\widetilde{\mathcal{U}}^v$, selon qu'il existe i tel que $v(P_i(\theta)) > 0$ ou que $v(P_i(\theta)) = 0$ pour tout i de $\{1, ..., l\}$); on peut alors relever $M(v)$ (par le lemme de Hensel) en un k_v-point lisse M_v de $U \cap V_\theta$ dès que θ n'est pas l'un des m_i. On posera $\mathcal{W} = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$.

Notons que nous pouvons aussi supposer qu'il existe (pour tout i de $\{1, ..., l\}$) un revêtement étale $\mathcal{Y}_i$ de $\mathcal{U}_i$ de groupe $\operatorname{Gal}(K_i'/K_i)$, se factorisant par un revêtement étale $\mathcal{Y}_i \to \mathcal{Y}_i'$ de groupe $\operatorname{Gal}(K_i'/K_iL_i)$ (avec $\mathcal{Y}_i' = \mathcal{Y}_i \times_{\mathcal{W}} \mathcal{W}_i'$, où $\mathcal{W}_i'$ est l'image réciproque de $\mathcal{W}$ par la flèche $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{L_i} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$).
Maintenant, si nous considérons le revêtement $\mathcal{Y}_i \to \mathcal{Y}_i'$, sa fibre générique est géométriquement intègre sur L_i car L_i est intégralement clos dans K_i'. Le lemme 1.2 de [18] nous dit que $\mathcal{Y}_i'$ possède pour tout élément σ de $\operatorname{Gal}(K_i'/K_iL_i)$, et pour presque toute place w de L_i, des $k(w)$-points $Q(w)$ tels que le Frobenius en $Q(w)$ (associé au revêtement $\mathcal{Y}_i \to \mathcal{Y}_i'$) soit σ. Nous supposerons donc que ceci est réalisé pour toute place w de L_i qui n'est pas au-dessus d'une place de S.

Il suffit maintenant de prouver le résultat voulu avec $S' = S$. Nous pouvons déjà (par le théorème de Tchebotarev) choisir des places v_i deux à deux distinctes de

k (pour $1 \leq i \leq l$) avec $v_i \notin S$ et v_i totalement décomposée dans l'extension L_i/k.
Comme v_i est totalement décomposée dans k_i/k, l'équation $P_i(X) = 0$ a une racine (simple à cause du choix de S) dans $k(v_i)$, que l'on peut relever en un élément θ_i de k_{v_i} vérifiant $v_i(P_i(\theta_i)) = 1$. Ainsi, la condition $v_i(\theta - \theta_i) \geq 2$ impose $v_i(P_i(\theta)) = 1$. Nous fixerons pour la fin de la preuve un tel θ et nous supposerons qu'il vérifie les hypothèses du lemme, c'est-à-dire que la fibre $V_\theta \cap U$ possède des points locaux lisses M_v pour $v \in S$ vérifiant $\sum_{v \in S} j_v(A(M_v)) = 0$ pour $A \in (\Lambda \cup E)$. Ainsi, on a maintenant défini des points locaux lisses M_v sur $V_\theta \cap U$ pour toute place v de k.

Il s'agit alors d'évaluer $A(M_v)$ quand $A \in \Lambda$ et $v \notin S$. Le point M_v est bien dans U mais sa réduction $M(v)$ peut être dans l'un des $\mathcal{U}_i$ (pas dans plusieurs car les $\mathcal{U}_i$ sont disjoints deux à deux). Soit Ω_0 l'ensemble des places v de k non dans S telles que $M(v)$ soit dans $\mathcal{U}$ et Ω_i l'ensemble des places v de k non dans S telles que $M(v)$ soit dans $\mathcal{U}_i$. Alors $\Omega_0, \Omega_1, ..., \Omega_l$ réalisent une partition de $\Omega_k \setminus S$. On a en particulier $v_i \in \Omega_i$.
Nous sommes dans la situation du corollaire 2.4.3 [2] : si $v \in \Omega_0$, alors $A(M_v) = 0$ et si $v \in \Omega_i$, on a :

$$\delta_v(A(M_v)) = n_i(v)\partial_{A,i,M(v)}$$

où $\partial_{A,i,M(v)} \in H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est l'évaluation de $\partial_{A,i} \in H^1_{\text{ét}}(\mathcal{U}_i, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ en $M(v)$ et $n_i(v)$ est la "multiplicité", qui est ici égale à $v(P_i(\theta))$ (on a donc en particulier $n_i(v_i) = 1$). Le symbole δ_v désigne toujours l'isomorphisme résidu de $\mathrm{Br}\, k_v$ dans $H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. En d'autres termes, si l'on note $F_{i,M(v)} \in \mathrm{Gal}\,(K_i'/K_i)$ le Frobenius en $M(v)$ (associé au revêtement $\mathcal{Y}_i \to \mathcal{U}_i$), on a :

$$j_v(A(M_v)) = n_i(v)\partial_{A,i}(F_{i,M(v)})$$

(on notera ici additivement les groupes $\mathrm{Gal}\,(K_i'/K_i)$).

Soient maintenant i dans $\{1, ..., l\}$ et A dans Λ. Montrons qu'on a déjà forcément $\sum_{v \in \Omega_i} n_i(v)F_{i,M(v)} \in \mathrm{Gal}\,(K_i'/K_iL_i)$; Soit ρ_i dans $G_i' = H^1(\mathrm{Gal}\,(K_iL_i/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, il existe (par construction) un élément A_i de $E_i \subset \mathrm{Br}\,(k(T)) \cap \mathrm{Br}\, U$ dont le seul point de ramification sur $\mathbf{A}^1_k$ est m_i et dont le résidu en E_i est précisément ρ_i. Comme la spécialisation de $A_i \in \mathrm{Br}\,(k(T)) \cap \mathrm{Br}\, U$ à la fibre $V_\theta \cap U$ est dans $\mathrm{Br}\, k$, on a $\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A_i(M_v)) = 0$ donc comme on a imposé $\sum_{v \in S} j_v(A_i(M_v)) = 0$ (vu que A_i est dans E), on a aussi $\sum_{v \notin S} j_v(A_i(M_v)) = 0$ soit $\sum_{v \in \Omega_i} j_v(A_i(M_v)) = 0$ soit $\rho_i(\sum_{v \in \Omega_i} n_i(v)F_{i,M(v)}) = 0$ (et ce pour tout ρ_i de G_i'), ce qui implique bien $\sum_{v \in \Omega_i} n_i(v)F_{i,M(v)} \in \mathrm{Gal}\,(K_i'/K_iL_i)$.

[2]Le corollaire 2.4.3 faisant intervenir un ouvert ω sur lequel le calcul fonctionne, on peut avoir besoin de restreindre encore les $\mathcal{U}_i$ pour l'utiliser ici; nous supposerons implicitement que cela a déjà été fait à chaque fois que nous en avons besoin

Comme $L_i(w) = k(v_i)$ pour toute place w de L_i au-dessus de v_i, le choix de S fait plus haut (grâce au lemme 1.2 de [18]) nous dit qu'on peut trouver (pour tout i de $\{1, ..., l\}$) un $k(v_i)$-point $P(v_i)$ dans $\mathcal{U}_i$ tel qu'on ait :

$$F_{i,P(v_i)} = F_{i,M(v_i)} - \sum_{v \in \Omega_i} n_i(v) F_{i,M(v)}$$

Relevons $P(v_i)$ en un k_{v_i}-point lisse P_{v_i} de $V_\theta \cap U$, remplaçons M_{v_i} par P_{v_i} et posons $P_v = M_v$ quand v n'est pas l'une des v_i. Alors, comme la multiplicité $n_i(v_i)$ était 1, on a bien :

$$\forall i \in \{1, ..., l\} \quad \forall A \in \Lambda \quad \sum_{v \in \Omega_i} j_v(A(P_v)) = 0$$

$$\text{car} \quad \sum_{v \in \Omega_i} j_v(A(P_v)) = \partial_{A,i}(\sum_{v \in \Omega_i} n_i(v) F_{i,P(v)}) = \partial_{A,i}(0) = 0$$

puis :

$$\forall A \in \Lambda \quad \sum_{v \notin S} j_v(A(P_v)) = 0$$

Et enfin, comme pour A dans Λ, on a la condition $\sum_{v \in S} j_v(A(P_v)) = 0$, on conclut que :

$$\forall A \in \Lambda \quad \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) = 0$$

ce qui termine la preuve du lemme 4.1.1.

Remarque : Supposons Λ réduit à un seul élément B, dont le résidu au point générique d'une des fibres V_{m_i} est un générateur de $H^1(\mathrm{Gal}\,(K_i'/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, où K_i' est une extension non triviale de $K_i L_i$. Alors, comme à la fin de la preuve du lemme 4.1.1, on pouvait imposer que $F_{i,P(v_i)}$ soit n'importe quel élément de $\mathrm{Gal}\,(K_i'/K_i L_i)$, on déduit dans ce cas particulier le fait suivant (qui est le pendant du lemme 4.1.1) :

Il existe un ensemble fini S de places de k et un ensemble fini E d'éléments de $\mathrm{Br}\,(k(T)) \cap \mathrm{Br}\, U$ tels que si $S' \supset S$ est un ensemble fini de places de k, il existe un ensemble fini de places $v_1, ..., v_l$ qui ne sont pas dans S' et un élément θ_i de $\mathcal{O}_{v_i}$ (pour tout i de $\{1, ..., l\}$) ayant la propriété :

Si $\theta \in k$ est un S'-entier tel que $v_i(\theta - \theta_i) \geq 2$ pour $1 \leq i \leq l$ et si la fibre $V_\theta \cap U$ possède des points locaux lisses M_v pour $v \in S'$ vérifiant $\sum_{v \in S'} j_v(A(M_v)) = 0$ pour $A \in (\Lambda \cup E)$, alors $V_\theta \cap U$ possède des points locaux lisses P_v pour $v \in \Omega_k$ vérifiant :

$$\sum_{v \in \Omega_k} j_v(B(P_v)) \neq 0$$

4.2. Principe de Hasse pour les fibrés au-dessus de la droite affine

Notre principal but ici est de démontrer un résultat dans l'esprit du théorème 1 de [49]. Nous allons établir :

Théorème 4.2.1 *Soient V une k-variété géométriquement intègre et $p : V \to \mathbf{A}^1_k$ un morphisme projectif, surjectif, à fibres géométriquement intègres. Soit $K = k(T)$ le corps des fonctions de $\mathbf{A}^1_k$ et X un modèle projectif lisse de la fibre générique V_η de p, dont on suppose qu'elle admet un $\bar{k}(T)$-point lisse.*
On fait l'hypothèse que $\mathrm{Br}\,\overline{X}$ est nul et que $\mathrm{Pic}\,(\overline{X})$ est sans torsion (c'est le cas par exemple si la variété V_η est rationnelle ou bien est une intersection complète lisse de dimension au moins 3 dans $\mathbf{P}^r_K$).
On suppose enfin qu'il existe un sous-ensemble hilbertien H de $k = \mathbf{A}^1_k\ (k)$ tel que pour tout point θ de H, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de la fibre V_θ. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

Remarque : Rappelons (cf [49], remarques page 209) que la condition que la fibre générique possède un $\bar{k}(T)$-point lisse est automatiquement réalisée si cette fibre générique est une surface rationnelle lisse, une quadrique lisse, une hypersurface cubique lisse de dimension au moins 2, ou encore une intersection lisse de m quadriques dans $\mathbf{P}^n_k$ avec $n \geq 2m$: ceci résulte de ce que le corps $\bar{k}(T)$ est C_1 (théorème de Tsen). En particulier, cette condition sera réalisée dans les exemples que nous traiterons dans la cinquième partie de cet article.

Preuve du théorème 4.2.1 : Nous allons adapter la méthode qu'utilise Skorobogatov dans [49].
Soit $\Lambda = \{A_1, ..., A_r\}$ un ensemble fini d'éléments de $\mathrm{Br}\,(k(V))$ qui engendrent (modulo $\mathrm{Br}\,K$) $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\,(K(V_\eta)/K)$. Soit U un ouvert de Zariski de V inclus dans l'ouvert de lissité de V et tel que pour tout i de $\{1, ..., r\}$, on ait $A_i \in \mathrm{Br}\,U$. Soit M'_v un point de $U(k_v)$ pour $v \in \Omega_k$ et S_1 un ensemble fini de places de k. Nous pouvons alors trouver un ensemble fini $S \supset S_1$ de places de k et un ensemble fini E d'éléments de $\mathrm{Br}\,K \cap \mathrm{Br}\,U$ comme dans le lemme 4.1.1. S'il n'y a pas obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les modèles projectifs lisses de V, on peut supposer (quitte à modifier certains M'_v pour $v \notin S$) qu'il existe un ensemble fini $S_2 \supset S$ de places de k tel que pour tout A de $\Gamma = \Lambda \cup E$, on ait $\sum_{v \in S_2} j_v(A(M'_v)) = 0$: cela découle du corollaire 2.6.1.

Soit $H' \subset H$ un sous-ensemble hilbertien de k, tel que pour tout point θ de H', les $A_{i,\theta}$ engendrent $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}\,(k(V_\theta)/k)$ modulo $\mathrm{Br}\,k$ (les hypothèses permettent bien d'appliquer la première remarque qui suit le théorème 3.5.1). Comme V_η possède un $\bar{k}(T)$-point lisse, il existe une extension finie galoisienne F de k vérifiant : V_η possède un $F(T)$-point lisse $P(T)$. Comme $\Gamma \subset \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)$, on dispose, pour A dans Γ, de $A(P(T)) \in \mathrm{Br}\, F(T)$ (voir rappel à la fin du paragraphe 1.2). Mais d'après le théorème de Tsen, le corps $\bar{k}(T)$ est C_1 (donc de groupe de Brauer nul) et il existe une extension finie galoisienne L de K telle que l'image de $A(P(T))$ dans $\mathrm{Br}\,(L(T))$ soit nulle pour tout A de Γ. D'après le théorème de Tchebotarev, il existe une infinité de places de k totalement décomposées dans l'extension L/k. Choisissons une telle place w non dans S_2, alors toutes les k-fibres au-dessus d'un ouvert non vide W de $\mathbf{A}^1_k$ ont un k_w-point lisse P_w tel que $j_w(A(P_w)) = 0$ pour tout A de Γ. On choisit alors un ensemble fini $v_1, ..., v_l$ de places de E non dans $S' = S_2 \cup \{w\}$ et un élément θ_i de $\mathcal{O}_{v_i}$ (pour tout i de $\{1, ..., l\}$) comme dans le lemme 4.1.1.

Alors, comme on a le théorème d'approximation forte pour les ensembles hilbertiens (proposition 3.2.1), on peut approcher $p(M'_v)$ pour v dans S_2 par un θ de $W \cap H'$ qui est un S'-entier, et tel que $v(\theta - \theta_i) \geq 2$ pour $1 \leq i \leq l$; l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de V_θ, et les $A_{i,\theta}$ engendrent $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$ modulo $\mathrm{Br}\, k$. Par le théorème des fonctions implicites, on obtient alors (cf par exemple [11], preuve de la proposition 3.9), pour $v \in S_2$, des k_v-points lisses M_v sur V_θ arbitrairement proches de M'_v (donc en particulier dans $U(k_v)$). Comme $\sum_{v \in S_2} j_v(A(M'_v)) = 0$ pour A dans Γ, on peut supposer (quitte à rapprocher encore θ des $p(M'_v)$ et les M_v des M'_v) que $\sum_{v \in S_2} j_v(A(M_v)) = 0$ pour A dans Γ. On a aussi vu que V_θ a un k_w-point lisse M_w tel que $j_w(A(M_w)) = 0$ pour tout A de Γ, donc on a finalement $\sum_{v \in S'} j_v(A(M_v)) = 0$ pour A dans Γ. Ainsi, d'après le lemme 4.1.1, on dispose pour toute place v de k d'un k_v-point lisse P_v de $(V_\theta \cap U)$ vérifiant $\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A_{i,\theta}(P_v)) = 0$ pour $1 \leq i \leq r$ et comme les $A_{i,\theta}$ engendrent $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$ modulo $\mathrm{Br}\, k$, il en résulte que l'on peut trouver un k-point lisse (resp. un k-point lisse arbitrairement proche des M'_v pour v dans S_2) sur V_θ puisque l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de V_θ. Ceci achève la preuve.

Remarque : Il serait intéressant (à l'instar de Skorobogatov dans [49]) d'établir le même type de résultat en remplaçant la droite affine par l'espace affine $\mathbf{A}^n_k$ mais on se heurte au problème que le théorème 3.5.1 ne s'applique a priori pas. Il est cependant facile de voir que le théorème 4.2.1 est encore valable dans ce cas si l'on fait l'hypothèse plus forte que le groupe de Brauer non ramifié de la fibre générique de p est tué par passage à une extension du type $L(T_1, ..., T_n)$ de $k(T_1, ..., T_n)$, où L est une extension cyclique de k (le théorème 3.5.1 fonctionnant encore parce qu'en prenant L cyclique, on a $H^3(\mathrm{Gal}\,(L/k), L^*) = 0$).

4.3. Cas d'une fibration admettant une section

Quand la fibre générique admet un K-point lisse, on n'a plus besoin d'avoir l'hypothèse que toutes les fibres sont géométriquement intègres et on peut également prouver le résultat avec une base quelconque vérifiant l'approximation faible. Ceci fait l'objet du théorème suivant :

Théorème 4.3.1 *Soient V et B deux k-variétés géométriquement intègres, avec B_{lisse} satisfaisant l'approximation faible et $p : V \to B$ un morphisme dominant. Soit K le corps des fonctions de B, on suppose que la fibre générique V_η de p est géométriquement intègre, possède un K-point lisse, et que pour un modèle projectif lisse X/K de V_η, on a $\operatorname{Br}\overline{X}$ nul et $\operatorname{Pic}(\overline{X})$ sans torsion.*
On suppose enfin qu'il existe un sous-ensemble hilbertien H de $B(k)$ tel que pour tout point θ de H, l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de la fibre V_θ. Alors, l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

Remarque : Bien entendu, la variété V a ici automatiquement des k-points lisses; seul le problème de l'approximation faible se pose.

Preuve : Soit encore $\{A_1, ..., A_r\}$ un ensemble fini d'éléments de $\operatorname{Br}(k(V))$ qui engendrent (modulo $\operatorname{Br} K$) $\operatorname{Br}_{\text{nr}}(K(V_\eta)/K)$ (la première remarque qui suit le théorème 3.5.1 s'applique bien ici) et $H' \subset H$ un sous-ensemble hilbertien de $B_{\text{lisse}}(k)$, tel que pour tout point rationnel θ de H', les $A_{i,\theta}$ engendrent le groupe $\operatorname{Br}_{\text{nr}}(k(V_\theta)/k)/\operatorname{Br} k$. Par hypothèse, V_η a un K-point lisse $P(\eta)$. Pour tout i de $\{1, ..., r\}$, on dispose de $A_i(P(\eta))$ qui est un élément A_i' de $\operatorname{Br}(k(\eta))$ et quitte à remplacer A_i par $A_i - A_i'$, nous pouvons supposer que $A_i(P(\eta)) = 0$. Il existe un ouvert de Zariski W de B tel que $P(\eta)$ induise une k-section s de p sur W telle que pour $t \in W$, on ait $s(t)$ dans le lieu lisse de V_t.
Soit U un ouvert de Zariski de $V_{\text{lisse}} \cap p^{-1}(B_{\text{lisse}})$ tel que pour tout i de $\{1, ..., r\}$, on ait A_i dans $\operatorname{Br} U$. Soit P_v un point de $U(k_v)$ pour $v \in \Omega_k$ et S un ensemble fini de places de k. S'il n'y a pas obstruction de Manin à l'approximation faible associée à $(A_1, ..., A_r)$ pour les modèles projectifs lisses de V, on peut encore supposer, quitte à élargir S, que pour tout i de $\{1, ..., r\}$, on a $\sum_{v \in S} j_v(A_i(P_v)) = 0$. On trouve alors un point θ de $H' \cap W(k)$ arbitrairement proche de $M_v = p(P_v)$ pour $v \in S$. La fibre en θ admet alors des k_v-points lisses P_v' (pour $v \in S$) arbitrairement proches des P_v, donc tels que $\sum_{v \in S} j_v(A_i(P_v')) = 0$. La section s induit un k-point lisse P sur V_θ tel que pour tout i on ait $A_i(P) = 0$. Posons $P_v' = P$ pour $v \notin S$, il vient : $\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A_i(P_v')) = 0$. Comme l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de V_θ, le résultat est prouvé.

Remarque : Dans les exemples qui suivent, quand nous appliquerons les théorèmes 4.2.1 et 4.3.1, nous pourrons toujours prendre comme ensemble hilbertien de fibres pour lesquelles l'obstruction de Manin est la seule l'ensemble des k-points d'un ouvert de Zariski non vide de la base.

5. Exemples d'application

Nous présentons divers exemples d'application des théorèmes 4.2.1 et 4.3.1.

5.1. Approximation faible pour les hypersurfaces cubiques possédant deux points singuliers conjugués

Soit X une k-hypersurface cubique de $\mathbf{P}_k^n$, géométriquement intègre, non conique, possédant un ensemble globalement rationnel de deux points singuliers conjugués. Notons que X possède une droite k-rationnelle, et donc satisfait automatiquement le principe de Hasse. Nous allons en fait appliquer nos résultats pour répondre complètement à la question posée dans la remarque 8.3. de [11], en montrant que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour X. Notons que X est (d'après la proposition 9.8. de [11]) k-birationnelle soit à $\mathbf{P}_k^{n-1}$, soit à une hypersurface affine de $\mathbf{A}_k^n$ dont l'équation est du type :

$$y^2 - az^2 = P(x_1, ..., x_{n-2}) \tag{1}$$

où $a \in k^* \setminus k^{*^2}$ et P est un polynôme non nul de degré au plus quatre. C'est plus généralement pour ce type d'hypersurfaces que nous avons le résultat suivant :

Proposition 5.1.1 *Soient k un corps de nombres et a un élément de $k^* \setminus k^{*^2}$. Soit V la k-hypersurface de $\mathbf{A}_k^n$ $(n \geq 3)$ d'équation :*

$$y^2 - az^2 = P(x_1, ..., x_{n-2}) \tag{2}$$

où P est un polynôme non nul de degré au plus quatre. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

Remarque : Quand P est irréductible, le principe de Hasse et l'approximation faible valent automatiquement; c'est un des résultats de [11].

Preuve de la proposition 5.1.1 : Soit $m = (n-2)$. Pour $m = 1$ (cas des surfaces de Châtelet), le résultat est connu : c'est un théorème prouvé par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer ([11], 8.11); nous supposerons donc $m \geq 2$. Quitte à faire un changement de variables k-linéaire, on peut supposer que P est de la forme :

$$P(x_1, ..., x_m) = cx_1^D + \sum_{i=1}^{D} Q_i(x_2, ..., x_m)x_1^{D-i}$$

où $c \in k^*$ et D est le degré total de P. Nous procédons par récurrence en supposant le résultat connu pour $m-1$.
La variété V est fibrée (via x_m) au-dessus de $\mathbf{A}^1_k$. Notons p le morphisme associé, toutes les fibres de p sont des variétés géométriquement intègres, et par hypothèse de récurrence, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour leurs modèles projectifs lisses. Soit V' la k-variété définie dans $\mathbf{P}^{m+1}_k \times_k \mathbf{A}^1_k$ par l'équation :

$$t^2(y^2 - az^2) = t^4 P(x_1/t, ..., x_{m-1}/t, x_m)$$

La variété V' est k-birationnelle à V. Elle est encore fibrée via x_m au-dessus de $\mathbf{A}^1_k$, le morphisme p' associé étant cette fois projectif. Les fibres de p' sont bien géométriquement intègres, ce sont des modèles projectifs de celles de p. En particulier, la fibre générique V'_η de p', qui est $k(\sqrt{a})(\eta)$-rationnelle, a des $k(\sqrt{a})(\eta)$-points lisses. Nous pouvons alors conclure en appliquant le théorème 4.2.1 au morphisme p'.

On peut dans cet exemple calculer explicitement le groupe de Brauer d'un modèle projectif lisse X de V. Quand le polynôme P est irréductible, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X ([11]). C'est également le cas quand P contient un facteur irréductible de degré 3. Le cas le plus compliqué est celui où le polynôme P est produit de deux facteurs f, g, irréductibles de degré 2. Soient $\varphi(x_1, ..., x_m, t)$ et $\psi(x_1, ..., x_m, t)$ les formes quadratiques obtenues en homogénéisant ces deux facteurs, supposons que l'intersection de leurs noyaux est réduite à zéro (condition qui traduit qu'"il ne manque pas une variable"). Appelons forme quadratique de type (T) une k-forme de rang 2 isomorphe à $< \alpha, -a\alpha >$ avec α dans k^*. Dans ces conditions, on a :

Proposition 5.1.2 *Soit V la k-hypersurface de $\mathbf{A}^{m+2}_k$ d'équation :*

$$y^2 - az^2 = f(x_1, ..., x_m)g(x_1, ..., x_m)$$

avec $a \in k^* \setminus k^{*2}$, les polynômes f et g étant irréductibles de degré 2 et premiers entre eux. Supposons que leurs homogénéisés respectifs $\varphi(x_1, ..., x_m, t)$ et $\psi(x_1, ..., x_m, t)$ aient l'intersection de leurs noyaux réduite à $\{0\}$. Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors :

- *Si $m \geq 4$, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X.*
- *Si $m = 3$, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X dès qu'il n'existe pas λ, μ dans k^* tels que la forme $Q = \lambda\varphi + \mu\psi$, ainsi que les restrictions de φ et ψ au noyau de Q, soient de type (T).*
- *Si $m = 2$, supposons de plus que les coniques définies par φ et ψ sont lisses et se coupent transversalement. Alors, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X dès que l'intersection des coniques définies*

par φ et ψ ne consiste ni en deux paires de points conjugués dans $k(\sqrt{a})$, ni en quatre points conjugués tels que l'extension de degré quatre associée contienne $k(\sqrt{a})$.

Preuve : Ces résultats découlent du calcul de $\mathrm{Br}\, X$. Ce calcul, ainsi que le traitement de tous les cas résiduels non couverts par la proposition précédente, est fait dans [28].

5.2. Intersections complètes dans $\mathbf{P}_k^n$ de dimension au moins 3

Il s'agit ici de se ramener, au moyen de sections hyperplanes, à des résultats connus (ou conjecturés) pour les surfaces. On dispose tout d'abord du résultat suivant (dû à Zak) qui va permettre d'appliquer le théorème 4.2.1 :

Proposition 5.2.1 *Soit $X \subset \mathbf{P}_k^m$ une intersection complète, géométriquement intègre et lisse, de dimension n. Soit Y une section hyperplane de X. Alors, les singularités de Y sont en nombre fini. En particulier, si X est de dimension au moins 3, Y est géométriquement intègre.*

Preuve : [21], remarque 7.5.
Nous en déduisons deux propositions :

Proposition 5.2.2 *Soit X une hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}_k^{n+1}$ $(n \geq 3)$. Si la conjecture que l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les surfaces cubiques lisses est vraie, X satisfait le principe de Hasse (resp. l'approximation faible).*

Preuve : Supposons d'abord $n = 3$. Soit H_0 un hyperplan de $\mathbf{P}_k^4$ tel que $X \cap H_0$ soit lisse (H_0 existe à cause du théorème de Bertini). Considérons une sous-variété linéaire $\mathcal{V}$ de dimension 1 de la variété des hyperplans de $\mathbf{P}_k^4$, la variété $\mathcal{V}$ est isomorphe à $\mathbf{P}_k^1$. Notons X' l'ouvert de X constitué de X privée des points base du système linéaire $\mathcal{V}$. Soit V la sous-variété de $X \times_k \mathcal{V}$ constituée des (x, λ) tels que l'hyperplan λ passe par x. Alors, la variété V est k-birationnelle à X (considérer le morphisme $V \to X$ induit par la projection $X \times_k \mathcal{V} \to X$, il induit un isomorphisme de V' sur X', où V' est l'ouvert de V constitué des (x', λ) avec $x' \in X'$), il suffit donc de prouver le résultat pour V. Or, la projection $V \to \mathcal{V}$ est un morphisme projectif, surjectif. La fibre en un point λ de $\mathbf{P}_k^1$ est isomorphe à la section hyperplane $X \cap \lambda$, elle est donc géométriquement intègre d'après la proposition 5.2.1. La fibre générique est une surface cubique lisse (car $X \cap H_0$ était lisse), donc c'est une variété rationnelle ([36], théorème 24.1). Ainsi, il existe un ouvert de Zariski non vide U de $\mathbf{P}_k^1$ tel que la fibre au-dessus de tout k-point de U

soit une surface cubique lisse, pour laquelle l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est conjecturalement la seule. Le résultat découle alors du théorème 4.2.1 et du fait que comme X est une intersection complète lisse, de dimension au moins 3, le groupe $\mathrm{Br}\, X$ est trivial (c'est-à-dire réduit à $\mathrm{Br}\, k$).
Pour traiter le cas $n > 3$, on procède par récurrence sur n en utilisant exactement la même méthode, vu qu'une section hyperplane générique est une intersection complète lisse de dimension au moins 3, ce qui permet bien d'appliquer le théorème 4.2.1.

Proposition 5.2.3 *Soit X une intersection complète, lisse, de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^n$ ($n \geq 5$). Si la conjecture que l'obstruction de Manin au principe de Hasse est la seule pour les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^4$ est vraie, alors X satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.*

Remarque : Cet énoncé a déjà été établi (en utilisant des calculs explicites de groupe de Brauer) dans un texte de 1986 (non publié) de Colliot-Thélène et Sansuc.

Preuve : Notons d'abord que Salberger et Skorobogatov ont démontré dans [42] que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^4$ possédant un point rationnel, ce qui fait que la conjecture de la proposition implique la conjecture analogue pour l'approximation faible. D'autre part, la proposition 5.2.1 assure encore que les sections hyperplanes de X sont géométriquement intègres. Le cas $n = 5$ se traite alors exactement par la même méthode que l'exemple précédent, vu que les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^r$ ($r \geq 4$) sont des variétés rationnelles. On en déduit par récurrence le cas $n > 5$.
Quelques cas particuliers de ces propositions sont intéressants à étudier et font l'objet des paragraphes suivants.

5.2.1. Cas des hypersurfaces cubiques diagonales.

Dans le particulier des surfaces cubiques diagonales, il semble raisonnable de conjecturer que l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule. Ce problème a déjà été discuté dans [31] et [4], avec notamment des résultats de tests numériques qui corroborent cette conjecture. Nous allons ici retrouver la proposition 7 de [4] (qui ramène le cas des hypersurfaces cubiques diagonales à celui des surfaces cubiques diagonales) comme un corollaire immédiat du théorème 4.2.1 (en particulier sans avoir besoin de faire des calculs explicites de groupes de Brauer).

Proposition 5.2.4 *Si la conjecture que l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les surfaces cubiques diagonales est vraie, alors les hypersurfaces cubiques diagonales de dimension au moins 3 satisfont le principe de Hasse (resp. l'approximation faible).*

Preuve : Soit X une hypersurface cubique diagonale de $\mathbf{P}_k^n$ ($n \geq 3$) d'équation :

$$a_0 x_0^3 + ... + a_n x_n^3 = 0$$

Soit V l'ouvert de X défini par ($x_0 \neq 0$), on applique le théorème 4.2.1 au morphisme $V \to \mathbf{A}_k^1$ qui envoie $(x_0, ..., x_n)$ sur (x_n/x_0). Les fibres sont des hypersurfaces cubiques diagonales géométriquement intègres de $\mathbf{P}_k^{n-1}$ et la fibre générique V_η est $K(\eta)$-rationnelle (où K est une extension finie de k dans laquelle tous les a_i sont des cubes), donc les hypothèses du théorème 4.2.1 sont bien vérifiées. On conclut alors par récurrence sur n (en utilisant encore que pour $n \geq 3$, le groupe $\mathrm{Br}\, X$ est trivial).

5.2.2. Cas des hypersurfaces cubiques contenant une droite rationnelle

Salberger et Skorobogatov ont traité dans [42] le cas difficile des surfaces cubiques lisses contenant une droite rationnelle (en combinant la méthode de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc et des méthodes de K-théorie) : ils ont prouvé que pour ces surfaces, l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule. En utilisant leur résultat, nous pouvons maintenant démontrer l'analogue pour les hypersurfaces :

Proposition 5.2.5 *Soit X une hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}_k^{n+1}$ ($n \geq 3$) contenant une droite rationnelle D. Alors X satisfait l'approximation faible.*

Preuve : L'hypothèse $n \geq 3$ nous permet d'affirmer qu'il existe un hyperplan H_1 de $\mathbf{P}_k^{n+1}$ **contenant** D et tel que $H_1 \cap X$ soit lisse : en effet, il existe un ouvert non vide $\mathcal{U}$ de la variété $\mathcal{H}$ des hyperplans de $\mathbf{P}_k^{n+1}$ qui contiennent D (la variété $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathbf{P}_k^{n-1}$) tel que pour H dans $\mathcal{U}$, la variété $H \cap X$ soit lisse en-dehors de D (c'est encore un théorème de Bertini, cf [29], remarque 10.9.2) et d'autre part, l'ensemble des hyperplans de $\mathcal{H}$ tangents à X en un point de D est de dimension $\leq 1 < n - 1$.
Maintenant, on peut appliquer la même méthode que précédemment : on choisit un système linéaire $\mathcal{V}$ de dimension 1 constitué d'hyperplans de $\mathcal{H}$ et contenant un hyperplan H_1 tel que $H_1 \cap X$ soit lisse et on considère la sous-variété V de $X \times_k \mathcal{V}$ constituée des (x, λ) de $X \times_k \mathcal{V}$ tel que l'hyperplan λ passe par x. La variété V est k-birationnelle à X et on applique le théorème 4.3.1 à la projection $p : V \to \mathcal{V}$. Les fibres sont les sections de X par les hyperplans de $\mathcal{V}$. Ainsi,

d'après ce qu'on a vu plus haut, la fibre générique de p est une hypersurface cubique lisse géométriquement intègre. Cette fibre générique possède évidemment des $k(T)$-points puisqu'elle contient D. Alors, presque toutes les k-fibres sont des hypersurfaces cubiques lisses de dimension $n-1$ contenant la droite rationnelle D, et le théorème 4.3.1 joint au résultat de Salberger et Skorobogatov permet de conclure par récurrence sur n que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour X. Le résultat découle de ce que comme n est au moins égal à 3, le groupe $\mathrm{Br}\,X$ est trivial.

5.2.3. Intersections lisses de deux quadriques contenant une conique

Soit X une intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4_k$ contenant une conique définie sur k. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour X ([11]). Une méthode de fibration a permis à Debbache dans [17] d'en déduire le principe de Hasse et l'approximation faible pour les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_k$ contenant une conique définie sur k dans le cas $n=7$, et Salberger (dans une note non publiée de 1991), a étendu ce résultat à $n \geq 5$. C'est ce que nous allons retrouver ici, l'avantage d'utiliser le théorème 4.2.1 étant qu'aucun calcul explicite de groupe de Brauer n'est nécessaire pour faire fonctionner la méthode.

Proposition 5.2.6 *Soit X une intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_k$ (où n est au moins égal à 5) contenant une conique C définie sur k. Alors X satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.*

Preuve : On utilise le fait que toutes les sections hyperplanes de X sont géométriquement intègres (à cause de la proposition 5.2.1) et qu'il existe une section hyperplane lisse de X contenant la conique C (toujours par un théorème de Bertini : la variété des hyperplans de $\mathbf{P}^n_k$ contenant le plan de la conique C est de dimension $(n-3) \geq 2$ alors que la variété des hyperplans tangents à X en un point de C est de dimension 1). On peut alors faire fonctionner exactement la même méthode que précédemment, en utilisant le théorème 4.2.1 au lieu du théorème 4.3.1.

5.2.4. Approximation faible pour les intersections de deux quadriques dans $\mathbf{P}^5_k$

Le résultat de Salberger et Skorobogatov mentionné plus haut permet de voir que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour tout modèle projectif lisse d'une intersection V de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4_k$ (complète, géométriquement intègre et non conique) qui a un point rationnel lisse (le cas où V est singulière étant connu d'après les résultats de [15] et de [11]).
Ceci permet alors, en utilisant notre méthode, de fournir une nouvelle démonstration du résultat analogue pour les intersections de deux quadriques dans $\mathbf{P}^5_k$ qui

avait été prouvé par Colliot-Thélène et Skorobogatov dans [14] (ce qui achevait l'étude de l'approximation faible pour les intersections de deux quadriques possédant un point rationnel).

Proposition 5.2.7 *Soit V une intersection complète, géométriquement intègre et non conique de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^5$ possédant un point rationnel lisse P. Alors, l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour un modèle projectif lisse X de V.*

Preuve : Soient φ et ψ deux formes quadratiques en 6 variables qui définissent V. On peut supposer que toute forme du pinceau est de rang au moins 4 et que le polynôme homogène $\det(\lambda\varphi + \mu\psi)$ n'est pas identiquement nul (sinon V est k-rationnelle, voir le paragraphe 3 de [11]). Soit H un hyperplan passant par P, alors dès que H n'est pas tangent à V, le lemme 16 de [11] nous dit que les formes φ_H, ψ_H induites par φ et ψ sur H sont telles que $\det(\lambda\varphi + \mu\psi)$ n'est pas identiquement nul; en particulier, l'intersection des deux quadriques définies par φ_H et ψ_H n'est pas conique. D'autre part, comme V est géométriquement intègre et de dimension au moins 3, un théorème de Bertini prouvé par Coray ([16], théorème 1) dit qu'il existe un ouvert non vide U de la variété des hyperplans de $\mathbf{P}_k^5$ passant par P tel que pour H dans U, l'intersection $V \cap H$ reste géométriquement intègre. Ainsi, on peut trouver un hyperplan H_1 dans U qui n'est pas tangent à la variété V. Alors, la variété $V \cap H_1$ est une intersection complète, géométriquement intègre, non conique, de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^4$, contenant le point rationnel lisse P (puisque H_1 n'est pas tangent à V en P).
De ce fait, nous pouvons encore fibrer V par un système linéaire d'hyperplans passant par M, de sorte que la fibre générique soit une intersection complète, géométriquement intègre, non conique de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4$ contenant le point rationnel lisse M et on applique le théorème 4.3.1 pour conclure.

5.3. Approximation faible pour les groupes algébriques linéaires

Dans ce paragraphe, nous nous servons de l'approche utilisée par Kunyavskiĭ et Skorobogatov dans l'appendice de [49] pour retrouver dans toute sa généralité le résultat de Sansuc ([43]) qui concerne l'approximation faible pour un groupe algébrique linéaire, en n'utilisant que le résultat analogue pour les tores (qui était dejà esquissé dans [50]).

Théorème 5.3.1 *Soit $\mathcal{G}$ un groupe linéaire connexe sur un corps de nombres k. Alors, l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de $\mathcal{G}$.*

Preuve : Soient $\mathcal{G}_r$ le groupe réductif quotient de $\mathcal{G}$ par son radical unipotent et $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}_r$ la projection associée. Il existe un ouvert de Zariski $\mathcal{G}_0$ de $\mathcal{G}_r$, une variété k-rationnelle Y, et un morphisme surjectif $p : \mathcal{G}_0 \longrightarrow Y$ dont les fibres sont des ouverts denses des tores maximaux de $\mathcal{G}_r$ (on prend pour $\mathcal{G}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{G}_r$ constitué des éléments réguliers semi-simples et pour Y la variété quotient de $\mathcal{G}_r$ par le normalisateur dans $\mathcal{G}_r$ de l'image par ϕ d'un tore maximal de $\mathcal{G}$. La k-rationalité de Y vient du théorème de Chevalley-Grothendieck, cf [25], XIV.6.1). Soit T_η le tore associé à la fibre générique de p, les $k(\eta)$-points sont Zariski-denses sur T_η car d'après [25], XIII.3.4, le tore T_η est $k(\eta)$-unirationnel. Comme T_η est $\overline{k(\eta)}$ -rationnel, nous sommes dans les conditions d'application du théorème 4.3.1. Or, du fait que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les compactifications lisses d'un k-tore ([43]), on déduit immédiatement qu'il en va de même pour les modèles projectifs lisses des fibres de p. Ainsi, avec le théorème 4.3.1, on en déduit le résultat pour les modèles projectifs lisses de $\mathcal{G}_0$ (ou $\mathcal{G}$).

6. Familles de contre-exemples non explicites à l'approximation faible

6.1. Un résultat général

Le théorème 2.1.1 et les méthodes employée pour prouver le lemme 4.1.1, ainsi que les théorémes 4.2.1 et 4.3.1 permettent également de trouver très simplement des familles de contre-exemples à l'approximation faible; plus précisément, on a l'énoncé suivant :

Proposition 6.1.1 *Soient V une k-variété géométriquement intègre et $p : V \longrightarrow \mathbf{A}^1_k$ un morphisme projectif, surjectif, à fibres géométriquement intègres. On note $K = k(T)$ le corps des fonctions de $\mathbf{A}^1_k$ et on suppose que la fibre générique V_η admet un $\overline{k}(T)$-point lisse.*
On suppose que V a des points lisses dans tous les complétés de k et que le groupe $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V)/k)/\mathrm{Br}\,k$ est nul (ces deux hypothèses sont par exemple vérifiées si V est k-rationnelle) mais que $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)/\mathrm{Br}\,K$ n'est pas nul.
Alors, il existe une infinité de points rationnels θ de $\mathbf{A}^1_k$ tels qu'un modèle projectif lisse de la fibre V_θ soit un contre-exemple à l'approximation faible.

Remarque : On notera les similitudes et les différences avec les hypothèses du théorème 4.2.1.

Preuve : Choisissons A dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)$ mais non dans $\mathrm{Br}\,K$, et notons U un ouvert de Zariski non vide et lisse de V tel que A soit dans $\mathrm{Br}\,U$. Il existe un ouvert de Zariski non vide W de $\mathbf{A}^1_k$ tel que pour θ dans $W(k)$, l'algèbre A

induise un élément A_θ de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$ (lemme 3.3.2). Comme dans la preuve du lemme 4.1.1, on note $V_{m_1}, ..., V_{m_l}$ les fibres au point générique desquelles A est ramifiée (et on peut supposer que ces fibres ne rencontrent pas U) et K_i le corps des fonctions de V_{m_i} (qui est géométriquement intègre). Deux cas peuvent alors se présenter :

1. Suppposons que pour tout i de $\{1, ..., l\}$, le résidu de A au point générique de V_{m_i} soit un générateur de $H^1(\mathrm{Gal}\,(L_iK_i/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, où L_i est une extension finie du corps résiduel k_i de $\mathbf{A}^1_k$ en m_i. Dans ce cas, on peut trouver un élément A_0 de $\mathrm{Br}\,K \cap \mathrm{Br}\,U$ tel que (pour tout i de $\{1, ..., l\}$) l'algèbre $B = A - A_0$ ne soit plus ramifiée au point générique de V_{m_i} (en effet, comme $H^1(\mathrm{Gal}\,(L_iK_i/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq H^1(\mathrm{Gal}\,(L_i/k_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, la suite exacte de Fadeev permet de trouver un élément A_0 de $\mathrm{Br}\,K$, non ramifié sur $\mathbf{A}^1_k$ en dehors des m_i, et dont le résidu au point m_i de $\mathbf{A}^1_k$ correspond exactement au résidu de A au point générique de V_{m_i} pour $1 \leq i \leq l$). Alors, il existe un ensemble fini S de places de k tel que pour tout ensemble fini $S' \supset S$ de places de k et tout S'-entier θ de k, la fibre $V_\theta \cap U$ a, pour tout $v \notin S'$, un k_v-points lisse P_v tel que $j_v(B(P_v)) = 0$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (l'argument étant exactement le même que dans la preuve du lemme 4.1.1). D'autre part, l'ouvert U a des k_v-points dans tous les complétés de k. Comme B n'est pas dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V)/k)$ (qui est réduit à $\mathrm{Br}\,k$ alors que B n'est même pas dans $\mathrm{Br}\,K$), on peut supposer, quitte à agrandir S, qu'il existe des points $P'_v \in U(k_v)$ pour v dans S tels que $\sum_{v \in S} j_v(B(P'_v)) \neq 0$: cela résulte du théorème 2.1.1.

   Comme V_η possède un $\bar{k}(T)$-point lisse, il existe une place w de k non dans S telle que pour tout point rationnel θ d'un ouvert de Zariski non vide de $\mathbf{A}^1_k$ (que nous supposerons, quitte à réduire, égal à W), la fibre en θ ait un k_w-point lisse P_w vérifiant $B(P_w) = 0$ (l'argument est exactement le même que celui de la preuve du théorème 4.2.1). Par approximation forte, on trouve alors un θ dans $W(k)$, entier en dehors de $S' = S \cup \{w\}$, et arbitrairement proche de $p(P_v)$ pour v dans S. Alors, la fibre V_θ possède pour v dans S des points lisses P_v arbitrairement proches des P'_v donc tels que $\sum_{v \in S} j_v(B(P_v)) \neq 0$. Pour v non dans $S \cup \{w\}$, on choisit un point lisse P_v dans $(V_\theta \cap U)(k_v)$ tel que $B(P_v) = 0$. Ainsi, on a finalement :

$$\sum_{v \in \Omega_k} j_v(B(P_v)) \neq 0$$

   Comme A_0 est dans $\mathrm{Br}\,K \cap \mathrm{Br}\,U$, on a $\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A_0(P_v)) = 0$ et on a finalement trouvé un élément A_θ de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$ et des k_v-points lisses P_v sur V_θ tels que :

$$\sum_{v\in\Omega_k} j_v(A_\theta(P_v)) \neq 0$$

ce qui prouve bien qu'il y a obstruction de Manin à l'aproximation faible pour les modèles projectifs lisses de la fibre V_θ. Comme on peut restreindre l'ouvert W, on peut trouver un tel point θ dans tout ouvert de Zariski non vide de $\mathbf{A}^1_k$ c'est-à-dire qu'il en existe une infinité.

2. Supposons que l'on n'est pas dans le cas précédent; cela signifie qu'il existe i dans $\{1, ..., l\}$ tel que le résidu $\partial_{A,i}$ de A au point générique de V_{m_i} soit un générateur de $H^1(\mathrm{Gal}\,(K_i'/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, où K_i' est une extension non triviale de K_iL_i (on note ici L_i la fermeture intégrale de k_i dans K_i'). On peut alors appliquer la remarque qui suit la preuve du lemme 4.1.1 pour conclure : en effet, en utilisant exactement la même méthode que dans la preuve du théorème 4.2.1, on arrive bien cette fois-ci à trouver un point rationnel θ dans $W(k)$ et des points locaux lisses P_v sur $V_\theta \cap U$ tels que :

$$\sum_{v\in\Omega_k} j_v(A_\theta(P_v)) \neq 0$$

Cas où il y a une section. Si la fibre générique admet un K-point lisse, on peut alléger les hypothèses comme dans le théorème 4.3.1 et on obtient l'énoncé suivant :

Proposition 6.1.2 *Soient V et B deux k-variétés géométriquement intègres, avec B_{lisse} satisfaisant l'approximation faible et $p : V \to B$ un morphisme dominant.*
Soit K le corps des fonctions de B, on suppose que la fibre générique V_η de p est géométriquement intègre et possède un K-point lisse.
On suppose enfin que V a des points lisses dans tous les complétés de k et que $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V)/k)/\mathrm{Br}\,k$ est nul mais que $\mathrm{Br}^1_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)/\mathrm{Br}\,K$ n'est pas nul.
Alors, il existe un ensemble Zariski-dense de points rationnels θ de B tels qu'un modèle projectif lisse de la fibre V_θ soit un contre-exemple à l'approximation faible.

Preuve : On procède exactement comme dans le théorème 4.3.1 à part qu'une fois qu'on a trouvé un élément A de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)$ qui n'est pas dans $\mathrm{Br}\,K$ et un point lisse $P(\eta)$ de la fibre générique V_η tel que $A(P(\eta)) = 0$, on utilise le fait que A n'est pas dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V)/k)$ pour trouver un ensemble fini S de places de k et des points lisses P_v de $U(k_v)$ (où U est un ouvert de Zariski non vide de V tel que $A \in \mathrm{Br}\,U$) tels que $\sum_{v\in S} j_v(A(P_v)) \neq 0$ et non plus tels que $\sum_{v\in S} j_v(A(P_v)) = 0$.

6.2. Un exemple d'application

Soient a un élément de k^* qui n'est pas un carré et b, c, d, e des éléments de k^*. Considérons la k-hypersurface V de $\mathbf{A}_k^4$ définie par :

$$y^2 - az^2 = (tx^2 + bx + c)(x^2 + dx + e)$$

La variété V est fibrée (via t) au-dessus de $\mathbf{A}_k^1$ et toutes les fibres sont géométriquement intègres. La fibre générique est une variété $k(\sqrt{a})$-rationnelle : c'est une surface de Châtelet dont le groupe de Brauer non ramifié est (modulo $\mathrm{Br}\,(k(T))$) isomorphe à $\mathbf{Z}/2$ ([3], proposition 5.1). D'autre part, la variété V est k-rationnelle (t s'exprime en fonction des autres variables). Le morphisme p n'est pas projectif mais nous pouvons (comme dans la preuve de la proposition 4.1.1) compactifier ce morphisme, c'est-à-dire trouver un modèle V' de V, fibré au-dessus de $\mathbf{A}_k^1$ et dont les fibres sont des modèles projectifs de celles de p. Nous pouvons alors appliquer la proposition 6.1.1 pour en déduire qu'il existe une infinité de valeurs rationnelles de t telles que la surface de Châtelet :

$$y^2 - az^2 = (tx^2 + bx + c)(x^2 + dx + e)$$

ait ses modèles lisses qui soient des contre-exemples à l'approximation faible.

Remarque : Les propositions 6.1.1 et 6.1.2 expliquent pourquoi en pratique, quand on a une famille de k-variétés dont le groupe de Brauer non ramifié est non trivial, on arrive assez facilement à trouver parmi les variétés de cette famille des contre-exemples à l'approximation faible (alors que pour le principe de Hasse, il faut en général plus d'efforts). Il serait intéressant de trouver un énoncé analogue pour le principe de Hasse mais cela semble nettement plus difficile (ne serait-ce que parce que le principe de Hasse est automatiquement vérifié si la fibre générique du morphisme p admet un K-point).

Bibliographie

[1] J.W.S. Cassels, A. Fröhlich : *Algebraic number theory* , Academic press, London and New-York, 1967

[2] J.-L. Colliot-Thélène : *L'arithmétique des variétés rationnelles*, exposé fait à l'occasion de la remise du prix Fermat, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse (à paraître)

[3] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray, J.-J. Sansuc : *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. reine angew. Math. **320**, 150-191 (1980)

[4] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky, J.-J. Sansuc : *Arithmétique des Surfaces Cubiques Diagonales*, Springer Lecture Notes in Math., 1-106 (1987)

[5] J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren : *Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97**, 141-158 (1989)

[6] J.-L. Colliot-Thélène, W. Raskind : *$\mathcal{K}_2$-cohomology and the Second Chow Group*, Math. Ann. **270**, 165-199 (1985)

[7] J.-L. Colliot-Thélène, W. Raskind : *Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres : un théorème de finitude pour la torsion*, Invent. Math. **105**, 221-245 (1991)

[8] J.-L. Colliot-Thélène, P. Salberger : *Arithmetic on singular cubic hypersurfaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **58**, 519-549 (1989)

[9] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sc. E.N.S. **10**, 175-229 (1977)

[10] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : *La descente sur les variétés rationnelles* II , Duke Math. J. **54**, 375-492 (1987)

[11] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer : *Intersection of two quadrics and Châtelet surfaces*, J. reine angew. Math. **373** (1987); **374** (1987)

[12] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group)*, IX escuela latinoamericana de Matematicas, Santiago de Chile, Juillet 1988

[13] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : *Non-rationalité de corps d'invariants sous un groupe fini*, manuscrit 1988

[14] J.-L. Colliot-Thélène, A.-N. Skorobogatov : *Approximation faible pour les intersections de deux quadriques en dimension 3*, C. R. Acad. Sc. Paris **314**, série I, 127-132 (1992)

[15] D. Coray, M.-A. Tsfasman : *Arithmetic on singular Del Pezzo surfaces*, Proc. London Math. Soc. **57**, 25-87 (1988)

[16] D. Coray : *Two remarks on the Bertini theorems*, (non publié) 1980

[17] A. Debbache : Principe de Hasse pour certaines intersections de deux quadriques, prépublication 1990

[18] T. Ekedahl : *An effective version of Hilbert's irreductibility theorem*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989, éd. C. Goldstein, Progress in Math. Birkhäuser **91**, 241-248 (1990)

[19] D.-K. Faddeev : *Algèbres simples sur un corps de fonctions d'une variable* (en russe), Publ. Inst. Steklov **38**, 321-344 (1951); trad. anglaise : A.M.S. Transl. **3** (série 2), 15-38 (1956)

[20] W. Fulton : *Intersection theory* (Ergeb. der Math. und ihr. Grenzgeb., 3. Folge, Bd. 2), Springer Verlag, Berlin Heidelberg New-York 1984

[21] W. Fulton, R. Lazarsfeld : *Connectivity and its applications in algebraic geometry*, Lecture notes in Mathematics **862**, 26-92, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New-York 1981

[22] A. Grothendieck : *Géométrie algébrique et géométrie formelle* (exposé Bourbaki **182** (1958/1959)). Reproduit dans : *Fondements de la géométrie algébrique.* Paris : Secrétariat mathématique de l'institut Henri Poincaré 1962

[23] A. Grothendieck : *Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique.* V Les Schémas de Picard. Théorème d'existence (exposé Bourbaki **232** (1961-62)); VI Les Schémas de Picard. Propriétés générales (exposé Bourbaki **236** (1961-62)). Reproduit dans : *Fondements de la géométrie algébrique.* Paris : Secrétariat mathématique de l'institut Henri Poincaré 1962

[24] A. Grothendieck, J. Dieudonné : *Éléments de géométrie algébrique*, IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Publ.Math. IHES **28** (1966)

[25] A. Grothendieck, M. Demazure : *Séminaire de géométrie algébrique*, Schémas en groupes (SGA 3), I, II, III, Lecture notes in Math. **151, 152, 153**, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New-York 1970

[26] A. Grothendieck : *Le groupe de Brauer*, II, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson-North-Holland, Amsterdam 1968

[27] A. Grothendieck : *Le groupe de Brauer*, III : exemples et compléments, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson-North-Holland, Amsterdam 1968

[28] D. Harari : *Principe de Hasse et approximation faible sur certaines hypersurfaces*, manuscrit 1993

[29] R. Hartshorne : *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin 1977

[30] H. Hironaka : *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, I, II, Ann. of Math. **79**, 109-326 (1964)

[31] D. Kanevsky : *Application of the conjecture on the Manin obstruction to various Diophantine problems*, in *Journées arithmétiques de Besançon 1985*, Soc. Math. de France, Astérisque **147-148**, 307-314 (1987)

[32] S.Lang : *Algebraic number theory*, Springer Verlag, New-York Berlin Heidelberg 1986

[33] S.Lang : *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, New-York Berlin Heidelberg, 1983

[34] S. Lang, A. Weil : *Number of points of varieties in finite fields*, Amer. J. Math. **76**, 819-827 (1954)

[35] Yu. I. Manin : *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, in sl Actes Congrès Intern. Math. (Nice 1970), Gauthiers-Villars, Paris 1971, Tome **1** 401-411

[36] Yu. I. Manin : *Cubic forms*, North-Holland, Amsterdam 1974/1986

[37] H. Matsumura : *Commutative Algebra*, W. A. Benjamin Co., New York 1969/1980

[38] J.-S. Milne : *Étale Cohomology*, Princeton University Press **33**, Princeton N.J. 1980

[39] Y. Morita : *A note on the Hilbert Irreductibility Theorem*, Proc. Japan acad., **66**, Ser. A (1990)

[40] H. Nishimura : *Some remark on rational points*, Mem. Coll. Sci. Kyoto, Ser. A, **29**, 189-192 (1955)

[41] D. Mumford : *Abelian Varieties*, Tata Institute of fundamental research, Bombay, Oxford University Press 1970

[42] P. Salberger, A. N. Skorobogatov : *Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms*, Duke Math. J. **63**, 517-536 (1991)

[43] J.-J. Sansuc : *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327**, 12-80 (1981)

[44] P. Schneider : *Über gewisse Galoiscohomologiegruppen*, Math. Zeitschrift **168**, 180-205 (1979)

[45] J.-P. Serre : *Corps Locaux*, Hermann, Paris 1968

[46] J.-P. Serre : *Cours d'arithmétique*, PUF, Paris 1970

[47] J.-P. Serre : *Spécialisation des éléments de* $\mathrm{Br}_2(\mathbf{Q}(T_1, ..., T_n))$, C.R. Acad. Sci. Paris **311**, Série 1, 397-402 (1990)

[48] A.-N. Skorobogatov : *Arithmetic on certain quadric bundles of relative dimension 2*, J. reine angew. Math. **407**, 57-74 (1990)

[49] A.-N. Skorobogatov (avec B. Kunyavskiĭ pour l'appendice) : *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989, éd. C. Goldstein, Progress in Math. Birkhäuser **91**, 205-219 (1990)

[50] V.E. Voskresenskiĭ : *Tores algébriques*, (en russe), Nauka, Moscou, 1977

Principe de Hasse et approximation faible sur certaines hypersurfaces

Soit k un corps de nombres. On dit qu'une classe de k-variétés lisses satisfait le *principe de Hasse* si, pour toute variété X dans cette classe, la condition $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k implique $X(k) \neq \emptyset$. On dit qu'une k-variété lisse X satisfait l'*approximation faible* si $X(k) \neq \emptyset$ implique que pour tout ensemble fini S de places de k, l'ensemble $X(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$ muni de la topologie produit.

Le principe de Hasse et l'approximation faible ont dejà fait l'objet d'une étude pour plusieurs classes de variétés. En particulier :

- Les intersections de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^n$ ([5]).
- Les surfaces de Châtelet, c'est-à-dire les hypersurfaces affines de $\mathbf{A}_k^3$ d'équation $y^2 - az^2 = P(x)$ avec $a \in k^* \setminus k^{*^2}$ et $P(x)$ polynôme séparable de degré 4 de $k[x]$ ([5]).
- Les k-hypersurfaces cubiques possédant un ensemble globalement rationnel de trois points singuliers conjugués ([4]).
- Les fibrés en coniques au-dessus de la droite projective, dont au plus quatre fibres géométriques sont dégénérées ([2]).
- Les fibrés en quadriques au-dessus de la droite projective ([13]).

Dans la suite, nous nous intéresserons au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les modèles projectifs lisses X des hypersurfaces affines V de $\mathbf{A}_k^n$ $(n \geq 4)$ dont l'équation est du type :

$$y^2 - az^2 = P(x_1, ..., x_{n-2}) \tag{1}$$

avec $a \in k^* \setminus k^{*^2}$ et P polynôme non nul de degré total au plus 4.

Rappelons (proposition 1.1.1) que ces propriétés ne dépendent pas du modèle projectif lisse X de V choisi; notons aussi que les variétés que nous considérons sont des exemples de fibrés en coniques au-dessus de $\mathbf{P}_k^m$ (où $m = n - 2$ est au moins égal à deux), elles constituent une généralisation des surfaces de Châtelet, qui sont fibrées en coniques au-dessus de $\mathbf{P}_k^1$; d'autre part, les k-hypersurfaces cubiques de $\mathbf{P}_k^n$, géométriquement intègres, non coniques, possédant un ensemble globalement rationnel de deux points singuliers conjugués, sont k-birationnelles à des hypersurfaces de ce type (proposition 1.2.1). Enfin, notons que Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer ont démontré dans [5] la validité du principe de Hasse et de l'approximation faible quand le polynôme P de l'équation (1) est irréductible; ce sont donc les cas de factorisation de P qui retiendront notre attention.

Une conjecture standard, au moins pour les variétés rationnelles, est que la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible est l'obstruction de Manin. La définition précise de cette obstruction, qui fait intervenir de manière essentielle le groupe de Brauer $\operatorname{Br} X$ de la variété propre et lisse X, sera rappelée en 1.5. Cette conjecture a été démontrée pour plusieurs des classes de variétés citées ci-dessus, par des méthodes de fibrations et de descente. Il est prouvé dans [8] (au moyen d'un théorème sur les fibrations qui généralise ceux utilisés dans [5], [4] ou [14]) que cette conjecture est vraie pour les variétés que nous considérons ici.

De ce fait, cet article a essentiellement pour but le calcul du groupe de Brauer $\operatorname{Br} X$ de la variété propre et lisse X. En effet, quand celui-ci est trivial (c'est-à-dire réduit à $\operatorname{Br} k$), l'obstruction de Manin s'évanouit et ainsi, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X. (C'est ce qui se passe quand le polynôme P est irréductible, voir [5]). On obtiendra en particulier que (sous réserves qu'il "ne manque pas une variable" : on définira plus loin ce que signifie exactement cette condition) le principe de Hasse et l'approximation faible valent quand $n \geq 6$ et on donnera explicitement les cas d'exception qui peuvent se produire quand n est égal à 4 ou à 5.

Le plan de l'article est le suivant : la première partie rassemble divers préliminaires; on y rappelle notamment la définition de l'obstruction de Manin (paragraphe 1.4) et les arguments qui font qu'elle est la seule pour les variétés que nous considérons ici (paragraphe 1.5). La deuxième section est consacrée à deux cas simples que l'on peut traiter directement au moyen de transformations birationnelles. La troisième partie est consacrée à quelques résultats généraux sur le groupe de Brauer qui seront utilisés pour faire son calcul. Ce calcul proprement dit commence à la partie 4, où l'on traite les cas où n vaut au moins 5; le résultat principal de cette partie est le théorème 4.2.1 qui établit la trivialité du groupe de Brauer en dehors d'un cas exceptionnel (E) qui est explicité. Dans la partie 5, nous commençons à nous occuper du cas où n est égal à 4, en traitant un premier cas de factorisation de P (théorème 5.2.1); ce cas est essentiellement une application des résultats obtenus par Skorobogatov dans [13]. La partie 6 traite le cas général avec $n = 4$ (théorème 6.1.1); on y calcule le groupe de Brauer en construisant explicitement un modèle projectif lisse X de V et en utilisant une résolution de $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ par des G-modules de permutation (où l'on note $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ et $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$); quelques cas dégénérés font l'objet de la proposition 6.7.1. Dans la section 7, on retrouve une partie des résultats arithmétiques sans avoir recours au théorème sur les fibrations de [8], mais en utilisant la technique de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc, laquelle avait déjà été employée avec succès pour plusieurs classes de variétés, notamment pour les surfaces de Châtelet ([5]). Enfin, la partie 8 donne quelques contre-exemples numériques au principe de Hasse et à l'approximation faible, qui montrent que les énoncés obtenus sont les meilleurs possibles.

1. Résultats préliminaires

1.1. Invariance birationnelle du principe de Hasse et de l'approximation faible

Proposition 1.1.1 *Soit X une k-variété. Si un modèle propre lisse de X vérifie le principe de Hasse (resp. l'approximation faible), il en est de même de tout modèle propre lisse de X. Ainsi, ces propriétés ne dépendent que du corps des fonctions $k(X)$ de la variété X. Il suffit de les vérifier pour le lieu lisse X_{lisse} de X.*

Cette proposition résulte immédiatement du théorème des fonctions implicites sur k_v (qui permet en particulier de montrer que si U est un ouvert de Zariski d'une k_v-variété intègre lisse Z, alors $U(k_v)$ est dense dans $Z(k_v)$ pour la topologie v-adique; voir [3], lemme 3.1.2), combiné au lemme classique suivant :

Lemme 1.1.2 (Nishimura, Lang) *Soient X une k-variété intègre lisse et Y une k-variété propre. Soit $\varphi : X \to Y$ une k-application rationnelle. Si $X(k) \neq \emptyset$, alors $Y(k) \neq \emptyset$.*

Preuve : Cf [3], lemme 3.1.1 ou [10].

1.2. Un cas particulier du problème

Proposition 1.2.1 *Soit V une k-hypersurface cubique de $\mathbf{P}_k^n$, géométriquement intègre, non conique, possédant un ensemble globalement rationnel de deux points singuliers conjugués. Alors, la variété V est k-birationnelle soit à $\mathbf{P}_k^{n-1}$, soit à une hypersurface affine de $\mathbf{A}_k^n$ dont l'équation est du type (1).*

Preuve : [5], Proposition 9.8.

Remarque : Quand V vérifie les conditions de la proposition 1.2.1, on voit facilement ([5]) que V ne contient pas, sur la droite passant par les deux points singuliers conjugués, d'autres points singuliers. Cette droite étant k-rationnelle et contenue dans V, la variété V a des k-points lisses et par le lemme de Nishimura, il en est de même d'un modèle propre lisse de V. Dans ce cas, le principe de Hasse est donc automatiquement vérifié et c'est l'approximation faible qui retiendra notre attention.

1.3. Rappels de quelques résultats sur les quadriques, les intersections de deux quadriques, et les pinceaux de quadriques

Soient Φ_1 et Φ_2 deux formes quadratiques en $n+1$ variables $X_0, X_1, ..., X_n$, à coefficients dans k ($n \geq 2$). Chacune définit une quadrique de $\mathbf{P}^n_k$, on note W l'intersection de ces deux quadriques. Nous supposerons toujours que Φ_1 et Φ_2 n'ont pas de facteur commun non constant.

Lemme 1.3.1 *Avec les hypothèses ci-dessus, la variété W est pure de codimension 2. Si W est de plus lisse, le pinceau $(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2)_{(\lambda,\mu)\in\mathbf{P}^1_k}$ ne contient que des formes de rang au moins n.*

Preuve : [5], lemmes 1.1. et 1.13

Lemme 1.3.2 *W est lisse si et seulement si* $\det(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2)$ *a $n+1$ racines distinctes dans $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$.*

Preuve :

- Supposons W non lisse, il existe alors $X = (X_0, X_1, ..., X_n)$ dans $\bar{k}^{n+1} \setminus \{0\}$, vérifiant :

$$\Phi_1(X_0, X_1, ..., X_n) = 0$$
$$\Phi_2(X_0, X_1, ..., X_n) = 0$$

  et tel que la famille des deux vecteurs $V_1 = (\partial\Phi_1/\partial X_0, ..., \partial\Phi_1/\partial X_n)_X$ et $V_2 = (\partial\Phi_2/\partial X_0, ..., \partial\Phi_2/\partial X_n)_X$ soit liée. L'un de ces deux vecteurs est alors le produit de l'autre par un élément de $\bar{k}$; par exemple, il existe $\alpha \in \bar{k}$ tel que $V_2 = \alpha V_1$. On peut supposer, quitte à faire un changement de variable linéaire, que $X = (1, 0, ..., 0)$. Soient alors M_1 et M_2, les matrices représentatives des formes quadratiques Φ_1 et Φ_2 dans la base canonique de

$\bar{k}^{n+1}$. Les hypothèses s'écrivent, en désignant par $<,>$ le produit scalaire canonique de $\bar{k}^{n+1}$:

$$< M_1X, X >= 0 \qquad < M_2X, X >= 0 \quad (M_2 - \alpha M_1)X = 0$$

(la dernière équation résulte de ce que $d\Phi_1(X) \cdot H = 2 < M_1X, H >$). Considérons le polynôme $\varphi(\lambda) = \det(-\lambda M_1 + M_2)$, nous allons montrer que $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = 0$, ce qui impliquera que $\det(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2)$ n'a pas $n+1$ racines distinctes dans $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$.

On a $\varphi(\alpha) = 0$ car $(M_2 - \alpha M_1)X = 0$ avec $X \neq 0$ donc $(M_2 - \alpha M_1)$ n'est pas inversible. La formule de la différentielle du déterminant donne $\varphi'(\alpha) = -\mathrm{tr}(\ \widetilde{(M_2 - \alpha M_1)}\ M_1)$ où l'on note $\widetilde{M}$ pour la transposée de la matrice des cofacteurs d'une matrice M. Or, la matrice $(M_2 - \alpha M_1)$ est symétrique et $(M_2 - \alpha M_1)X = 0$ avec $X = (1, 0, ..., 0)$. De ce fait, sa matrice est du type :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice $\widetilde{(M_2 - \alpha M_1)}$ est du type :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $< M_1X, X >= 0$, la matrice M_1 est du type :

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

On voit alors que tous les termes diagonaux de $(\ \widetilde{(M_2 - \alpha M_1)}\ M_1)$ sont nuls donc la trace de cette matrice est nulle et $\varphi'(\alpha) = 0$.

- En sens inverse, si $\det(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2)$ n'a pas toutes ses racines distinctes dans $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$, l'un des polynômes $\det(-\lambda\Phi_1 + \Phi_2)$ ou $\det(-\lambda\Phi_2 + \Phi_1)$ a une racine multiple dans $\bar{k}$; supposons par exemple que $\varphi(\alpha) = \det(-\lambda M_1 + M_2)$ admette $\alpha \in \bar{k}$ comme racine multiple, soit $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = 0$. On peut alors encore supposer que $(-\alpha M_1 + M_2)X = 0$ avec $X = (1, 0, ..., 0)$. On en déduit que $\widetilde{(M_2 - \alpha M_1)}$ est du type :

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La condition $\varphi'(\alpha) = 0$ donne alors que M_1 est du type :

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

D'où $< M_1X, X >= 0$ et $< M_2X, X >= \alpha < M_1X, X >= 0$ c'est-à-dire que $\Phi_1(X) = \Phi_2(X) = 0$ et d'autre part $V_2 = \alpha V_1$ car $(M_2 - \alpha M_1)X = 0$ donc $\mathrm{d}\Phi_2(X) = \alpha \cdot \mathrm{d}\Phi_1(X)$. La variété V n'est donc pas lisse puisque $X = (1, 0, ..., 0)$ correspond à un point singulier.

(On a en fait repris à l'envers le calcul de l'implication en sens inverse).

Lemme 1.3.3 *Si le polynôme homogène* $\det(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2)$ *est identiquement nul, la variété W a un point singulier k-rationnel.*

Preuve : [5], lemme 1.14

Lemme 1.3.4 *Si W contient un espace linéaire de codimension 2, alors toute forme du pinceau $(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2)$ est de rang au plus 4.*

Preuve : [5], lemme 1.9

Lemme 1.3.5 *Si la décomposition du cycle $[\overline{W}]$ est de la forme $[\overline{W}] = 2[C]$, avec C variété géométriquement intègre de degré 2, alors il existe une forme de rang 1 dans le pinceau $(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2)$ avec λ et μ dans k. Si cette décomposition est de la forme $[\overline{W}] = [C_1] + [C_2]$ avec $[C_1]$ et $[C_2]$ quadriques géométriquement intègres et conjuguées dans une extension quadratique F de k, ou bien si $[\overline{W}] = [L_1] + [L_2] + [L_3] + [L_4]$, avec (L_1, L_2), ainsi que (L_3, L_4), couple de droites gauches conjuguées dans F, alors il existe une forme de rang 2 (déployée sur F) dans le pinceau $(\lambda\Phi_1 + \mu\Phi_2)$ avec λ et μ dans k.*

Preuve : [5], lemmes 1.10, 1.7 et 4.2

1.4. Obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible

Dans tout cet article, nous allons être amenés à plusieurs reprises à calculer le groupe de Brauer (cohomologique) $\mathrm{Br}\, X = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ de la variété X. Ce qui suit permet de comprendre la motivation de ce calcul.

Soit X une k-variété algébrique, géométriquement intègre, propre et lisse, qui a des points dans tous les k_v. On appelle *obstruction de Manin* au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour X la condition :

$$\forall (P_v) \in \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v) \quad \exists A \in \operatorname{Br} X \quad \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

$$(\text{resp. } \exists A \in \operatorname{Br} X \quad \exists (P_v) \in X(A_k) \quad \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\ )$$

où Ω_k désigne l'ensemble des places de k et $X(A_k)$ l'ensemble des points adéliques de X. Le symbole j_v désigne le plongement $\operatorname{Br} k_v \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ donné par la théorie du corps de classe local ([1], VI).

On rappelle le diagramme commutatif suivant, valable pour $A \in \operatorname{Br} X$, et qui résulte de la formule du produit :

$$\begin{tikzcd}
X(k) \arrow[r] \arrow[d, "A"'] & X(A_k) \arrow[d, "A"'] \arrow[dr, "i_A"] & \\
\operatorname{Br} k \arrow[r] & \bigoplus_v \operatorname{Br} k_v \arrow[r, "\sum_v j_v"] & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}
\end{tikzcd}$$

Notons que X étant complète, on a $X(A_k) = \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$. Pour plus de détails on pourra consulter [6].

Pour plusieurs classes de variétés (notamment certaines de celles que nous évoquions dans l'introduction), on a pu établir que l'obstruction de Manin est la seule possible pour le principe de Hasse et l'approximation faible. Comme nous l'avons dit plus haut, c'est notamment le cas pour les variétés que nous étudions dans cet article (voir 1.5 pour quelques détails supplémentaires à ce sujet). C'est pourquoi nous serons amenés en particulier à établir sous quelles conditions $\operatorname{Br} X / \operatorname{Br} k = 0$, auquel cas l'obstruction de Manin à l'approximation faible et au principe de Hasse s'évanouit, lorsque X est un modèle propre lisse des variétés que nous étudions. Notons enfin que k étant un corps de nombres et X une variété rationnelle (c'est-à-dire que $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$ est $\bar{k}$-birationnelle à $\mathbf{P}^d_{\bar{k}}$, avec $d \in \mathbf{N}^*$), on aura $H^3(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k), \bar{k}^*) = 0$ et $\operatorname{Br} \overline{X} = 0$ d'où $\operatorname{Br} X / \operatorname{Br} k = H^1(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k), \operatorname{Pic} \overline{X})$ (d'après la suite exacte de [6], 1.5.).

1.5. Rappel d'un résultat arithmétique

Comme annoncé dans l'introduction, pour ramener le problème arithmétique au seul problème algébrique du calcul du groupe de Brauer, nous utilisons le théorème suivant :

Théorème 1.5.1 *Soient k un corps de nombres et $a \in k^* \setminus k^{*2}$. Soit V une k-hypersurface de $\mathbf{A}^n_k$ $(n \geq 3)$ dont l'équation est du type :*

$$y^2 - az^2 = P(x_1, ..., x_{n-2})$$

où P est un polynôme non nul de degré au plus quatre. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

Ce résultat est démontré dans [8], en fibrant la variété V (via l'une des variables x_i) au-dessus de $\mathbf{A}^1_k$ ce qui permet par récurrence de se ramener au cas $n = 3$, traité par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer dans [5]. Le théorème 1.5.1 apparaît alors comme un corollaire du théorème plus général de [8] sur les fibrations (qui s'inspire de [14]) que voici :

Théorème 1.5.2 *Soient V une k-variété géométriquement intègre et $p : V \to \mathbf{A}^1_k$ un morphisme projectif, surjectif, à fibres géométriquement intègres. Soient $K = k(T)$ le corps des fonctions de $\mathbf{A}^1_k$ et X un modèle projectif lisse de la fibre générique V_η de p, dont on suppose qu'elle admet un $\bar{k}(T)$-point lisse. On note $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$.*
On fait l'hypothèse que les groupes $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ et $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$, ainsi que $\mathrm{Br}\,\overline{X}$, sont nuls, et que $\mathrm{Pic}\,(\overline{X})$ est sans torsion (c'est le cas par exemple si la variété V_η est rationnelle ou bien est une intersection complète lisse de dimension au moins 3 dans $\mathbf{P}^r_K$).
On suppose enfin qu'il existe un sous-ensemble hilbertien H de $k = \mathbf{A}^1_k\,(k)$ tel que pour tout point θ de H, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de la fibre V_θ. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

(Un sous-ensemble H de k est dit *hilbertien* s'il existe un ouvert de Zariski non vide U de $\mathbf{A}^1_k$ et un revêtement étale $\rho : R \to U$ avec R intègre sur k tel que H soit l'ensemble des k-points M de U pour lesquels $\rho^{-1}(M)$ est connexe; en particulier, l'ensemble des k-points d'un ouvert de Zariski de $\mathbf{A}^1_k$ est hilbertien).

2. Deux cas simples

2.1. Notations et énoncé des résultats

Soit $V : y^2 - az^2 = P(x_1, ..., x_{n-2})$ une k-hypersurface de $\mathbf{A}^n_k$ $(n \geq 4)$ dont l'équation est du type (1). Soit X un modèle propre lisse de V. Le but de toute cette section est de démontrer la proposition suivante :

Théorème 2.1.1 *Avec les notations ci-dessus, la variété X satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible dans les cas suivants :*

- *P est produit d'un facteur linéaire et d'un facteur irréductible de degré 3.*
- *P est le produit de quatre facteurs linéaires et V n'est pas k-birationnelle au produit d'un espace linéaire et d'une surface de Châtelet.*

Nous traitons ces deux cas directement, sans avoir recours au calcul de $\mathrm{Br}\, X$ et en distinguant suivant les cas de factorisation de P.

2.2. Le cas "1×3"

Proposition 2.2.1 *Soit V l'hypersurface : $y^2 - az^2 = L(x_1, ... x_{n-2})C(x_1, ..., x_{n-2})$ dans $\mathbf{A}_k^n$ avec L facteur du premier degré et C polynôme irréductible de degré 3 ($n \geq 3$). Alors, un modèle propre lisse X de V satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.*

Preuve : Quitte à faire un changement de variables k-linéaire, on peut supposer que $L(x_1, ..., x_{n-2}) = x_1$. Notons $R(x_1, ..., x_{n-2}, t)$ la forme cubique obtenue en homogénéisant C. On peut, d'après le théorème d'irréductibilité de Hilbert, trouver un α dans k^* tel que le polynôme $R(\alpha, x_2, ..., x_{n-2}, t)$ reste irréductible. La variété V est alors k-birationnelle à l'hypersurface de $\mathbf{P}_k^n$ définie par :

$$x_1(y^2 - az^2) = R(x_1, ... x_{n-2}, t)$$

et celle-ci est encore k-birationnelle à l'hypersurface de $\mathbf{A}_k^n$ d'équation :

$$\alpha(y^2 - az^2) = R(\alpha, x_2, ..., x_{n-2}, t)$$

et cette dernière vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible (et en fait on en déduit aussi $\mathrm{Br}\, X / \mathrm{Br}\, k = 0$) car le polynôme $R(\alpha, x_2, ..., x_{n-2}, t)$ est irréductible (c'est le résultat de Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer que nous avons rappelé dans l'introduction). D'où le résultat.

2.3. Le cas "$1 \times 1 \times 1 \times 1$"

Proposition 2.3.1 *Soit V l'hypersurface d'équation $y^2 - az^2 = P(x_1, ..., x_{n-2})$ dans $\mathbf{A}_k^n$ ($n \geq 4$), avec P produit de quatre facteurs linéaires. Si V n'est pas k-birationnelle au produit d'un espace linéaire et d'une surface de Châtelet, un modèle projectif lisse X de V vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible.*

Preuve : On peut écrire $P = L_1L_2L_3L_4$, où L_1, L_2, L_3, L_4 sont des formes affines en $x_1, ..., x_{n-2}$.
Supposons d'abord $n = 4$. Les droites $L_1 = 0$ et $L_2 = 0$ ont un point d'intersection (en projectif), soit C. De même, les droites L_3 et L_4 s'intersectent en D. Si $C = D$, on se ramène par changement de variable affine à $C = D = 0$ et l'hypersurface s'écrit $y^2 - az^2 = x_1x_2\varphi_3(x_1, x_2)\varphi_4(x_1, x_2)$ avec φ_3 et φ_4 formes linéaires. En posant $\lambda = x_2/x_1$, on voit que V est k-birationnelle au produit d'une droite et d'une surface de Châtelet, cas que nous avons exclu dans l'hypothèse. On est donc réduit au cas $C \neq D$. On expédie alors la droite (CD) à l'infini par transformation k-birationnelle. On peut alors se ramener à une équation du type :

$$y^2 - az^2 = u(u - \alpha)x(x - \beta) \quad \alpha, \beta \in k^*$$

C'est une famille de quadriques de dimension relative 2 (paramétrée par x). Il y a un point rationnel (dans le corps $k(x)$) sur la quadrique générique (qui est lisse). Ainsi, la famille admet une section et l'hypersurface est k-birationnelle à $\mathbf{P}_k^2 \times \mathbf{A}_k^1$ (cet argument est dû à Tfasman et Skorobogatov).
Pour $n \geq 4$, on considère X comme fibrée par $x_3, ..., x_{n-2}$ au dessus de $\mathbf{A}_k^{n-4}$. La même opération que dans le cas $n = 4$ (en raisonnant dans $k(x_3, ..., x_{n-2})$) permet de se ramener à $y^2 - az^2 = u(u - \alpha)x(x - \beta)$ avec $\alpha, \beta \in k(x_3, ..., x_{n-2})^*$, que l'on peut considérer comme une famille de quadriques de dimension 2 paramétrées par $x, x_3, ..., x_{n-2}$ (donc au-dessus de $\mathbf{A}_k^{n-3}$). Là encore, la quadrique générique est lisse et possède un point rationnel, il y a donc birationalité avec $\mathbf{P}_k^2 \times \mathbf{A}_k^{n-3}$.

Remarques :

- Quand V se ramène au produit d'un espace et d'une surface de Châtelet (cas où "il manque une variable"), l'approximation faible ne vaut pas forcément : par exemple, pour $k = \mathbf{Q}$, l'hypersurface $y^2 - 17z^2 = x_1x_2(x_2 - x_1)(x_2 - 17x_1)$ se ramène à la surface de Châtelet $y^2 - 17z^2 = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 17)$ qui ne vérifie pas l'approximation faible ([7]).
- Vu les propositions 2.2.1 et 2.3.1, nous considérerons désormais le cas où P est divisible par un facteur irréductible de degré 2 et nous aurons recours à des calculs de groupes de Brauer.

3. Généralités sur le calcul du groupe de Brauer

3.1. Un lemme fondamental

Rappelons d'abord le très important lemme suivant qui permet de relier le groupe de Brauer de X aux fonctions dont les diviseurs sont des normes pour l'extension $k(\sqrt{a})/k$:

Lemme 3.1.1 *Soit F/k une extension finie cyclique de corps de nombres, de groupe $\mathcal{G}$. Soit X une k-variété géométriquement intègre, propre et lisse, qui est F-rationnelle (c'est-à-dire que $F(X)$ est transcendant pur sur F), qui a des points dans tous les complétés de k. Alors, le groupe* $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ *est égal au noyau de la flèche $\phi : k(X)^*/k^*NF(X)^* \to \mathrm{Div}\, X/N\mathrm{Div}\, X_F$. Si I est un système de générateurs de ce groupe et $\{f_i\}_{i\in I}$ un système de représentants de I dans $k(X)^*$, il y a obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour X si et seulement si :*

$$\forall (P_v) \in \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v) \quad \exists i \in I \quad \sum_{v\in\Omega_k} j_v(f_i(P_v)) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

$$(\text{resp. } \exists (P_v) \in \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v) \quad \exists i \in I \quad \sum_{v\in\Omega_k} j_v(f_i(P_v)) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\ )$$

où le symbole N désigne la norme de F à k et j_v le plongement : $k_v^*/NF_v^* \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ donné par la théorie du corps de classe local; on note $F_v = k_v \otimes_k F$.

Le grand intérêt de ce résultat est qu'il permet de calculer $\mathrm{Br}\, X$ sans avoir à construire explicitement un modèle lisse X de V puisque seul intervient le corps des fonctions de X (qui est le même que celui de V). Ce lemme est prouvé dans [3], où il est également prouvé que $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ est fini et que toutes les sommes sur Ω_k qui interviennent sont en fait finies.

3.2. Application au calcul de certains groupes de Brauer

L'objet de ce paragraphe est de prouver les deux résultats suivants :

Proposition 3.2.1 *Soit X un modèle projectif lisse de la k-variété V définie dans $\mathbf{A}_k^{m+2}$ par l'équation :*

$$y^2 - az^2 = \prod_{i=1}^{r} P_i(x_1, ..., x_m)$$

où les P_i sont des polynômes irréductibles sur k, deux à deux premiers entre eux. Soit $K = k(\sqrt{a})$. Alors, le groupe $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ *est inclus dans le sous-groupe de $k(X)^*/k^*NK(X)^*$ engendré par les classes des P_i (en particulier, comme $\prod_{i=1}^r P_i$ est une norme, le groupe* $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ *s'identifie à un sous-groupe de $(\mathbf{Z}/2)^{r-1}$).*

Théorème 3.2.2 *Avec les notations de la proposition 3.2.1, on suppose qu'en tout point de codimension 2 de $\mathbf{A}_k^m$ où deux des P_i s'annulent, il n'y en a pas un troisième qui s'annule. On suppose également que pour toute partition de $\{1, ..., r\}$ en deux sous-ensembles non vides A et B, il existe $i_A \in A$ et $i_B \in B$ tels qu'on puisse trouver un point de codimension 2 de $\mathbf{A}_k^m$, où les hypersurfaces définies par P_{i_A} et P_{i_B} se coupent transversalement, et dont le corps résiduel ne contienne pas $K = k(\sqrt{a})$. Alors, on a* $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k = 0$.

Preuve de la proposition 3.2.1 : Soit f une fonction sur X (ou sur V) dont le diviseur est une norme de l'extension K/k. Montrons d'abord que f est égale modulo $k^*NK(X)^*$ à une fonction $h(x_1, ..., x_m)$ ne dépendant plus de (y, z). La k-variété V peut être vue comme fibrée en coniques (par $(x_1, ..., x_m)$) au-dessus de $\mathbf{A}_k^m$. La fibre générique est une conique lisse sur le corps $L = k(T_1, ..., T_m)$. Soit C la conique projective associée. Posons $\mathcal{L} = K(T_1, ..., T_m)$. Si $\mathcal{L}(C)$ désigne le corps des fonctions de C sur $\mathcal{L}$ et $\operatorname{Pic} C_{\mathcal{L}}$ le groupe de Picard de C sur $\mathcal{L}$, on a la suite exacte :

$$1 \to \mathcal{L}(C)^*/\mathcal{L}^* \to \operatorname{Div} C_{\mathcal{L}} \to \operatorname{Pic} C_{\mathcal{L}} \to 1$$

Notons $G_K = \operatorname{Gal}(K/k)$. Comme C est une conique projective lisse, le G_K-module $\operatorname{Pic} C_{\mathcal{L}}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ avec action triviale de G_K; on en déduit que $\widehat{H}^{-1}(G_K, \operatorname{Pic} C_{\mathcal{L}}) = 0$ d'où la suite exacte :

$$0 \to \widehat{H}^0(G_K, \mathcal{L}(C)^*/\mathcal{L}^*) \to \widehat{H}^0(G_K, \operatorname{Div} C_{\mathcal{L}}) = \operatorname{Div} C/N\operatorname{Div} C_{\mathcal{L}}$$

(où le symbole N désigne la norme de K à k).
De même, de la suite exacte :

$$1 \to \mathcal{L}^* \to \mathcal{L}(C)^* \to \mathcal{L}(C)^*/\mathcal{L}^* \to 1$$

on tire, vu que $H^1(G_K, \mathcal{L}^*) = 0$ (Hilbert 90) la suite exacte :

$$1 \to L^*/N\mathcal{L}^* \to L(C)^*/N\mathcal{L}(C)^* \to \widehat{H}^0(G_K, \mathcal{L}(C)^*/\mathcal{L}^*) \to 1$$

Donc $\widehat{H}^0(G_K, \mathcal{L}(C)^*/\mathcal{L}^*) = L(C)^*/L^*N\mathcal{L}(C)^*$ et le noyau de la flèche $L(C)^* \to \operatorname{Div} C/N\operatorname{Div} C_{\mathcal{L}}$ est réduit à $L^*N\mathcal{L}(C)^*$. Ainsi, la fonction de $L(C)^*$ induite par f est, à une norme près, constante sur le corps L. Le résultat annoncé en découle.

Soit alors $h(x_1, ..., x_m)$ une fonction dont le diviseur est une norme, c'est-à-dire que pour tout anneau de valuation discrète A ($k \subset A \subset k(X) = \operatorname{Frac} A$) avec $A \otimes_k K$ restant local, la valuation $v_A(h)$ est paire. On peut supposer que les facteurs irréductibles de h sur k ne sont pas dans $k^*NK(X)^*$. Soit alors r un tel facteur, le polynôme r est encore irréductible au niveau K. Comme X est régulière en codimension 1, la sous-variété de X définie par :

$$\begin{cases} y^2 - az^2 = \prod_{i=1}^{r} P_i(x_1, ..., x_m) \\ r(x_1, ..., x_m) = 0 \end{cases}$$

définit, dès que r n'est pas l'un des P_i, un anneau de valuation discrète A qui reste local au niveau K. Ainsi, la valuation de h par rapport à A est paire et r ne peut diviser h (qui est sans facteur carré). D'où la proposition.

Preuve du théorème 3.2.2 : Soit $A \subset \{1, ..., r\}$. Soit B le complémentaire de A dans $\{1, ..., r\}$. Supposons A et B non vides. Par hypothèse, on peut trouver i_A dans A et i_B dans B tels que les hypersurfaces définies par P_{i_A} et P_{i_B} se coupent transversalement en un point M de codimension 2 de l'espace affine $\mathbf{A}_k^m$, dont le corps résiduel ne contient pas K. Alors, la variété X est k-birationnelle à la k-variété Y définie dans $\mathbf{A}_k^{m+2}$ par l'équation :

$$(y^2 - az^2) \prod_{i \in A} P_i(x_1, ..., x_m) = \prod_{i \in B} P_i(x_1, ..., x_m)$$

Sur Y, le point M définit un anneau de valuation discrète A (car M correspond à un point de codimension 1 sur Y), qui reste local au niveau K dès que a n'est pas un carré dans le corps résiduel en M. Comme la valuation de $\prod_{i \in A} P_i$ par rapport à A est 1 (car les hypersurfaces définies par P_{i_A} et P_{i_B} se coupent transversalement en M et les hypersurfaces définies par les autres P_i ne passent pas par M), son diviseur ne peut être une norme. D'où le résultat avec la proposition 3.2.1

Nous allons maintenant appliquer le théorème 3.2.2 aux variétés que nous considérons.

4. Les cas $n \geq 6$ et $n = 5$

4.1. La condition "il ne manque pas une variable"

Soit V l'hypersurface de $\mathbf{A}_k^n$ $(n \geq 4)$ d'équation :

$$y^2 - az^2 = P(x_1, ..., x_{n-2})$$

où $P = fg$ avec f et g de degré 2. Notons φ et ψ les homogénéisés respectifs de f et g. La condition qu'"il ne manque pas une variable" se traduit par le fait que l'intersection de leurs noyaux $N(\varphi), N(\psi)$ est réduite à 0 : cela signifie bien qu'on ne peut pas, par un changement de variable linéaire, se ramener à une équation comportant moins de variables.

4.2. Énoncé des résultats

On dira qu'une forme quadratique de rang 2 définie sur k est *du type* (T) si elle est isomorphe à $< \theta, -a\theta >$ avec $\theta \in k^*$.

Théorème 4.2.1 *Soit V l'hypersurface d'équation $y^2 - az^2 = P(x_1, ..., x_{n-2})$ dans $\mathbf{A}_k^n$ $(n \geq 5)$. On suppose que $P = fg$ avec f et g de degré 2 et on appelle φ et ψ leurs homogénéisés respectifs. On suppose que l'intersection $N(\varphi) \cap N(\psi)$ de leurs noyaux est réduite à 0. Alors, un modèle projectif lisse X de V vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible en dehors du cas exceptionnel* (E) *suivant :*

(E) $n = 5$ *et il existe* λ *et* μ *dans* k^* *tels que la forme* $Q = (\lambda\varphi + \mu\psi)$, *ainsi que les restrictions de* φ *et* ψ *au noyau* N *de* Q, *soient du type* (T).

Toute la fin de cette section est consacrée à la preuve de la proposition 4.2.1.

4.3. Remarques préliminaires

Notons d'abord que la variété V est k-birationnelle à la k-hypersurface V' définie dans $\mathbf{A}^2_k \times \mathbf{P}^{n-2}_k$ par l'équation :

$$\varphi(x_1, ..., x_{n-2}, t)(y^2 - az^2) - \psi(x_1, ..., x_{n-2}, t) = 0 \quad (x_1, ..., x_{n-2}, t) \in \mathbf{P}^{n-2}_k \quad (y, z) \in \mathbf{A}^2_k$$

Démontrons alors un lemme qui nous sera souvent utile :

Lemme 4.3.1 *Soit* V' *l'hypersurface de* $\mathbf{A}^2_k \times \mathbf{P}^{n-2}_k$ *d'équation :*

$$(y^2 - az^2)\varphi(x_1, ..., x_{n-2}, t) = \psi(x_1, ..., x_{n-2}, t)$$

(où φ *et* ψ *sont des formes quadratiques), avec* $n \geq 4$. *On suppose que l'intersection des noyaux de* φ *et* ψ *est réduite à 0. Si les quadriques définies par* φ *et* ψ *ont un point* k*-rationnel commun, alors* V' *est* k*-rationnelle.*

Preuve du lemme 4.3.1 : Soit M un point k-rationnel de l'intersection des quadriques de $\mathbf{P}^{n-2}_k$ définies par φ et ψ. On peut voir V' comme une famille de quadriques projectives dont la fibre générique admet le point rationnel M. Si M est un point conique de cette quadrique générique, ce point M est dans l'intersection des noyaux des formes quadratiques φ et ψ, cas exclu par l'hypothèse. Ainsi, la fibre générique admet un point rationnel non conique, elle est donc birationnelle à $\mathbf{P}^{n-3}$ et V' est k-birationnelle à $\mathbf{P}^{n-3}_k \times \mathbf{A}^2_k$ (la projection sur $\mathbf{A}^2_k$ admettant une section via M). D'où le lemme.

Cas où f ou g n'est pas irréductible :

Proposition 4.3.2 *Si* f *ou* g *n'est pas irréductible, le groupe* $\mathrm{Br}\,X/\mathrm{Br}\,k$ *est nul et de ce fait, la variété* X *satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.*

Preuve : Supposons par exemple que g est produit de deux facteurs linéaires. Quitte à expédier l'une des droites associées à l'infini, on peut supposer que V est définie dans $\mathbf{A}^n_k$ par l'équation :

$$y^2 - az^2 = x_1 f(x_1, ..., x_{n-2})$$

avec f irréductible. Maintenant, il suffit de considérer le cas où la forme quadratique $\varphi(0, x_2, ..., x_{n-2}, t)$ est de rang $n - 2$ (sinon le lemme 4.3.1 permet de conclure immédiatement). Comme $(n-2) \geq 3$, la sous-variété de $\mathbf{A}_k^{n-2}$ définie par $x_1 = f(0, ..., x_{n-2}) = 0$ est géométriquement intègre et le théorème 3.2.2 permet de conclure.

Remarque : Nous pourrons donc supposer désormais que les polynômes f et g sont irréductibles sur k. Si l'un des polynômes f ou g est une norme de l'extension $k(\sqrt{a})/k$, la variété V est k-birationnelle à une quadrique et la validité du principe de Hasse et de l'approximation faible (ainsi que la nullité de $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$) est triviale. Nous pourrons donc exclure ce cas dans la suite et supposer les polynômes f et g irréductibles (et sans facteur commun) sur $K = k(\sqrt{a})$.

4.4. Le cas $n \geq 6$

Il nous suffit, d'après le théorème 1.5.1, de prouver l'énoncé suivant :

Proposition 4.4.1 *Soit V' l'hypersurface de $\mathbf{A}_k^2 \times \mathbf{P}_k^{n-2}$ $(n \geq 6)$ d'équation :*

$$(y^2 - az^2)\varphi(x_1, ..., x_{n-2}, t) = \psi(x_1, ..., x_{n-2}, t)$$

où φ et ψ sont des formes quadratiques dont l'intersection des noyaux est réduite à 0. Soit X un modèle projectif lisse de V'. Alors le groupe $\mathrm{Br}\, X$ est réduit à $\mathrm{Br}\, k$.

Preuve de la proposition 4.4.1 : On peut supposer que les polynômes φ et ψ sont irréductibles sur $K = k(\sqrt{a})$. Soit W l'intersection dans $\mathbf{P}_k^3$ des quadriques définies par φ et ψ. Si W contient un point k-rationnel, la variété V' est k-rationnelle par le lemme 4.3.1. De ce fait, nous pouvons supposer grâce au lemme 1.3.3 que le polynôme homogène $\det(\lambda\varphi + \mu\psi)$ n'est pas identiquement nul, autrement dit qu'il existe une forme de rang ≥ 5 dans le pinceau $(\lambda\varphi + \mu\psi)$. Alors, le lemme 1.3.4 garantit qu'il n'y a pas de cycle irréductible de degré 1 dans la décomposition du cycle $[\overline{W}]$. Ainsi, d'après le théorème 3.2.2, les seuls cas où $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ pourrait ne pas être nul sont : $[\overline{W}] = [C_1] + [C_2]$, avec C_1 et C_2 quadriques géométriquement intègres conjuguées sur $K = k(\sqrt{a})$, ou bien $[\overline{W}] = 2[C]$ avec C quadrique k-rationnelle géométriquement intègre.

- Dans le premier cas, il existe d'après le lemme 1.3.5 une forme de rang 2 se factorisant sur K (donc du type (T) car si cette forme se factorisait sur k, les quadriques C_1 et C_2 seraient définies sur k et non pas conjuguées) qui s'écrit $Q = (\lambda\varphi + \mu\psi)$ avec λ et μ dans k^* (λ et μ sont non nuls car les polynômes φ et ψ sont irréductibles sur K). On peut supposer par exemple que $Q(x_1, ..., t) = \alpha(x_1^2 - at^2)$ avec $\alpha \in k^*$. La variété V' est k-birationnelle à l'intersection X_1 dans $\mathbf{P}_k^{n+1}$ des deux variétés :

$$\begin{cases} t(y^2 - az^2) = u\psi(x_1, ..., t) \\ \varphi(x_1, ..., t) = ut \end{cases}$$

Considérons alors la sous-variété Y de codimension 1 de X_1 définie dans $\mathbf{P}_k^{n+1}$ par les équations :

$$x_1 = t = 0, \ \psi(0, x_2, ..., x_{n-2}, 0) = 0$$

(Remarquons que $\psi(0, x_2, ..., x_{n-2}, 0) = 0 \Leftrightarrow \varphi(0, x_2, ..., x_{n-2}, 0) = 0$, car Q n'est proportionnelle ni à φ, ni à ψ, qui sont irréductibles sur K). Alors, les restrictions de φ et ψ au noyau N de Q sont proportionnelles, et de rang au moins 3 (sinon, vu que $n \geq 6$, ces restrictions seraient dégénérées et l'intersection des noyaux de φ et ψ ne serait pas réduite à 0), donc Y est géométriquement intègre et définit un anneau de valuation discrète (au niveau K également) par rapport auquel la valuation de $\varphi(x_1, ..., t)/t^2$ (fonction correspondant à φ dans le nouveau modèle) est -1. Le lemme 3.1.1 et la proposition 3.2.1 permettent de conclure dans ce cas, puisque sur la sous-variété de $\mathbf{A}_k^n$ d'équation :

$$y^2 - az^2 = f(x_1, ..., x_{n-2})g(x_1, ..., x_{n-2})$$

le diviseur de la fonction f n'est pas une norme de l'extension K/k.

- Dans le deuxième cas, le lemme 1.3.5 dit qu'il existe une forme $Q = (\lambda\varphi + \mu\psi)$ de rang 1 avec λ et μ dans k^* soit par exemple $Q = \alpha t^2$ et $\psi = \beta\varphi + Q$ avec $\beta \in k^*$. La variété V' est alors k-birationnelle à l'intersection X_2 dans $\mathbf{P}_k^{n+1}$ des deux variétés :

$$\begin{cases} (y^2 - az^2) = u(\beta u + \alpha t) \\ \varphi(x_1, ..., t) = ut \end{cases}$$

  On conclut alors en considérant la sous-variété de codimension 1 de X_2 définie par $t = 0$, qui est géométriquement intègre vu que la forme quadratique $\varphi(x_1, ..., x_{n-2}, 0)$ est encore de rang au moins 3 (et même 4).

4.5. Le cas $n = 5$

Pour conclure la discussion, nous allons prouver, par la même méthode que précédemment, le résultat suivant :

Proposition 4.5.1 *Soit V' l'hypersurface de $\mathbf{A}_k^2 \times \mathbf{P}_k^3$ d'équation :*

$$(y^2 - az^2)\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \psi(x_1, x_2, x_3, t)$$

où φ et ψ sont des formes quadratiques irréductibles sur $K = k(\sqrt{a})$ et dont l'intersection des noyaux est réduite à 0. Soit X un modèle projectif lisse de V'. Alors, le groupe $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ est nul sauf dans le cas exceptionnel (E) *où il est isomorphe à $\mathbf{Z}/2$.*

Preuve de la proposition 4.5.1 : Supposons $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ non nul et considérons encore la décomposition du cycle $[\overline{W}]$. On ne peut avoir $[\overline{W}] = [C] + ...$, avec C quadrique k-rationnelle géométriquement intègre sinon le théoréme 3.2.2 est contredit. On ne peut pas non plus avoir $[\overline{W}] = [L_1] + [L_2] + ...$ avec L_1 et L_2 droites conjuguées se rencontrant sinon le point d'intersection serait k-rationnel et X serait k-rationnelle. Ainsi, restent les cas : $[\overline{W}] = 2[C]$ avec C quadrique k-rationnelle géométriquement intègre, $[\overline{W}] = [C_1] + [C_2]$ avec C_1 et C_2 quadriques géométriquement intègres conjuguées sur K, et $[\overline{W}] = [L_1] + [L_2] + [L_3] + [L_4]$ (où les L_i sont des droites deux à deux distinctes) avec L_1 et L_2 (resp. L_3 et L_4) conjuguées sur K et ne se rencontrant pas. Mais dans ce dernier cas, le lemme 1.3.5 nous donne encore une forme de type (T) dans le pinceau. On procède alors comme dans le cas $n \geq 6$.

- Dans le cas où il y a une forme de type (T) dans le pinceau, soit par exemple $Q(x_1, x_2, x_3, t) = \alpha(x_1^2 - at^2)$ avec $\alpha \in k^*$, on écrit que la variété V' est k-birationnelle à l'intersection X_1 dans $\mathbf{P}_k^6$ des deux variétés :

  $$\begin{cases} t(y^2 - az^2) = u\psi(x_1, x_2, x_3, t) \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) = ut \end{cases}$$

  et on considère la sous-variété Y de codimension 1 de X_1 définie dans $\mathbf{P}_k^6$ par les équations :

  $$x_1 = t = 0, \ \psi(0, x_2, x_3, 0) = 0$$

  Vu que $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k \neq 0$, celle-ci ne peut être intègre au niveau K (toujours à cause du théorème 3.2.2) donc les restrictions de φ et ψ sont du type (T) et on est dans le cas exceptionnel (E) (ces restrictions ne peuvent être de rang 1 à cause de l'hypothèse que l'intersection des noyaux de φ et ψ est réduite à 0).

- Dans le cas où il y a une forme de rang 1 dans le pinceau, on peut encore supposer que $\psi = \beta\varphi + \alpha t^2$ et écrire que V' est k-birationnelle à l'intersection X_2 dans $\mathbf{P}_k^6$ des deux variétés :

$$\begin{cases} (y^2 - az^2) = u(\beta u + \alpha t) \\ \varphi(x_1, x_2, x_3, t) = ut \end{cases}$$

On obtient alors une contradiction en considérant la sous-variété de codimension 1 de X_2 définie par $t = 0$, qui est géométriquement intègre vu que la forme $\varphi(x_1, x_2, x_3, 0)$ est ici de rang exactement 3.

Finalement, on a bien prouvé que la condition $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k \neq 0$ implique que l'on est dans le cas exceptionnel (E). Il reste à prouver que quand on est dans ce cas (E), le groupe $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ est effectivement isomorphe à $\mathbf{Z}/2$.
Si l'on est dans le cas (E), on peut supposer, après avoir effectué des changements de variables linéaires, que $\psi(x_1, x_2, x_3, t) = \gamma\varphi(x_1, x_2, x_3, t) + Q(x_3, t)$ avec $Q(x_3, t) = \alpha(x_3^2 - at^2)$ et $\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \beta(x_1^2 - ax_2^2) + tL_1(x_1, x_2, x_3, t) + x_3L_2(x_1, x_2, x_3, t)$ où L_1 et L_2 sont des formes linéaires et (α, β, γ) est un triplet d'éléments de k^*. Passons à un modèle affine de V' en faisant $t = 1$. La variété V' est alors k-birationnelle à l'hypersurface V de $\mathbf{A}_k^5$ d'équation :

$$y^2 - az^2 = f(x_1, x_2, x_3)g(x_1, x_2, x_3)$$

avec $f(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3, 1)$ et $g(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2, x_3, 1)$.

Soit A un anneau de valuation discrète, avec $k \subset A \subset k(X) = \mathrm{Frac}\, A$, le restant au niveau K; soit v la valuation associée. Supposons $v(f(x_1, x_2, x_3))$ impaire. Alors, comme $v(x_3^2 - a)$ est paire et négative ou nulle, on a $v(f(x_1, x_2, x_3)) = v(g(x_1, x_2, x_3)) = 2k+1$ avec $k < 0$ (en effet $v(f-g) = v(x_3^2 - a)$ donc $v(f-g)$ est paire donc $v(f-g) > \min(v(f), v(g))$). Ainsi, on a $v(x_3) \geq k+1$ (sinon $v(x_3^2 - a) < v(f)$ et on aurait $v(g) = v(x_3^2 - a)$). Supposons par exemple $v(x_2) \leq v(x_1)$. Si $v(x_2) \geq k + 1$, alors $v(L_1(x_1, x_2, x_3, 1)) \geq k + 1$ et $v(x_3L_2(x_1, x_2, x_3, 1)) \geq 2k + 2$ ce qui contredit $v(f(x_1, x_2, x_3)) = 2k+1$. Si $v(x_2) \leq k$, alors $v(L_1(x_1, x_2, x_3, 1)) \geq v(x_2)$ et $v(x_3L_2(x_1, x_2, x_3, 1)) \geq v(x_2) + k + 1$ alors que $v(x_1^2 - ax_2^2) = 2v(x_2) < v(x_2) + k + 1 \leq v(x_2)$ donc $v(f(x_1, x_2, x_3)) = 2v(x_2)$ et on obtient encore une contradiction. Donc le diviseur de f est une norme de l'extension K/k (et f, qui est irréductible sur K, n'est pas le produit d'une constante et d'une norme); la proposition 3.2.1, jointe au lemme 3.1.1, permet de conclure que $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2$ et engendré par la classe de la fonction f.

5. Un premier cas avec $n = 4$

Dans cette section, nous commençons à nous occuper du cas $n = 4$: nous traitons le cas où le polynôme P est produit de deux facteurs de degré 1 et d'un facteur irréductible de degré 2.

5.1. Mise sous forme canonique

On considère $V/k : y^2 - az^2 = L_1(x_1, x_2)L_2(x_1, x_2)P(x_1, x_2)$ avec L_1 et L_2 de degré 1 et P irréductible de degré 2. Il s'agit de calculer le groupe de Brauer d'un modèle projectif lisse X de V. La proposition suivante permet de simplifier l'étude en la ramenant à un cadre déjà étudié par Skorobogatov dans [13].

Proposition 5.1.1 *V est k-birationnelle soit au produit d'une droite et d'une surface de Châtelet, soit à $\mathbf{A}^3_k$, soit à la k-hypersurface Z de $\mathbf{P}^3_k \times \mathbf{A}^1_k$ d'équation :*

$$y^2 - az^2 = u(v^2 - r(u)t^2) \tag{2}$$

(avec $u \in \mathbf{A}^1_k$, $(y, z, v, t) \in \mathbf{P}^3_k$ et r polynôme non nul de degré ≤ 2). Dans ce dernier cas, si $r(u)$ est un carré dans $\bar{k}(u)$, alors Z est encore k-rationnelle.

Preuve : En expédiant l'une des droites à l'infini, on est ramené à l'hypersurface d'équation $y^2 - az^2 = uf(u, v)$ avec f irréductible de degré 2. Si f ne dépend que de u, on est ramené au produit d'une droite et d'une surface de Châtelet. Sinon, supposons que $f(u, v)$ soit linéaire en v, soit $f(u, v) = P(u)v + Q(u)$ avec P et Q polynômes en une variable et $P \neq 0$. La transformation $(u, v) \mapsto (u, P(u)v + Q(u))$ est alors k-birationnelle ce qui nous ramène à $Y/k : y^2 - az^2 = uv$, soit $u = (y^2 - az^2)/v$ c'est-à-dire que Y est k-birationnelle à $\mathbf{A}^3_k$.
Supposons donc que $f(u, v) = \alpha(v^2 + \beta uv + \gamma v + \delta u^2 + \epsilon u + \phi)$ avec $\alpha \in k^*$ et $(\beta, \gamma, \delta, \epsilon, \phi) \in k^5$. Le changement $v \mapsto v + (\beta/2)u + \gamma/2$ ramène à $f(u, v) = \alpha(v^2 - Q(u))$ avec Q polynôme de degré ≤ 2. Le changement $u \mapsto \alpha u$ nous ramène alors, en posant $r(u) = Q(u/\alpha)$ et en homogénéisant le polynôme $v^2 - r(u)$ par rapport à (y, z, v), à la forme voulue. Enfin, si $r(u) = \theta(u - e)^2$ avec $\theta \in k^*$ et $e \in k$, le changement de t en $(\theta - e)t$ montre alors que Z est k-birationnelle à $y^2 - az^2 = u(v^2 - \theta t^2)$, donc à $u = (y^2 - az^2)/(v^2 - \theta t^2)$ ce qui prouve que Z est k-rationnelle.

5.2. Énoncé des résultats

Une fois que l'on est ramené à la forme précédente, on a l'énoncé suivant :

Théorème 5.2.1 *Soit Z une k-hypersurface dont l'équation est du type (2). Soit $s(u)$ le polynôme $u^2 r(1/u)$. Alors, pour tout modèle propre lisse W de Z, on a* $\mathrm{Br}\, W/\mathrm{Br}\, k = 0$, *sauf si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $r(0) \in ak^{*2}$
2. $s(0) \in ak^{*2}$
3. $r(u) \notin a(k(u)^*)^2$

auquel cas $\mathrm{Br}\, W/\mathrm{Br}\, k$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}/2$. *De ce fait, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour* W *à moins que ces trois conditions ne soient vérifiées.*

Remarque : Notons que dans le cas où l'hypersurface initiale se ramène au produit d'une droite et d'une surface de Châtelet, l'approximation faible ne vaut pas toujours (voir [5]).

5.3. Preuve du théorème 5.2.1

On supposera toujours que $r(u) \notin a(k(u)^*)^2$ (sans quoi on a vu que Z est k-rationnelle). Il s'agit alors d'appliquer les résultats obtenus par Skorobogatov dans [13]. L'hypersurface Z est en effet fibrée par u au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$ (on autorise maintenant $u = \infty$) en quadriques projectives de dimension 2. Ce fibré en quadriques est k-birationnel à un fibré "admissible" au sens de [13] : la fibre générique est définie par la forme $Q_u =< 1, -a, -u, ur(u) >$ sur le corps $k(u)$. Si $r(0) = 0$, le fibré est k-birationnel à un fibré admissible dont la fibre générique est définie par la forme $< 1, -a, -u, r'(u) >$ avec $r'(u) \neq 0$ (car $r(u)$ n'est pas un carré dans $\bar{k}(u)$) donc seule la fibre à l'infini peut être essentiellement singulière (c'est-à-dire définie par une forme de rang 2). De même, si $s(0) = 0$, seule la fibre en zéro peut être essentiellement singulière. Si $r(0)s(0) \neq 0$, il y a deux fibres essentiellement singulières (c'est-à-dire où cette forme est de rang 2) qui sont la fibre en zéro et la fibre à l'infini. Le discriminant de Q_u n'est pas un carré dans $\bar{k}(u)$, c'est-à-dire que selon la terminologie de [13], le fibré Z est de type I. Soit W le modèle lisse "canonique" de Z (cf [13] pour sa construction). Il s'agit de calculer $\mathrm{Br}\, W$. On posera $G = \mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k)$.
Soit e_i l'un des deux points de $\mathbf{P}^1_k$ où la fibre est essentiellement singulière, écrivons que la forme quadratique qui la définit est isomorphe à $< 1, -\alpha_i, \pi_i, -\pi_i\beta_i >$, avec α_i et β_i de valuation 0 (par rapport à l'anneau local de $\mathbf{P}^1_k$ en e_i) et π_i de valuation 1. On introduit alors, selon la méthode utilisée dans [13], deux extensions quadratiques ou triviales F_i et L_i de k, soit $L_i = k(\sqrt{\beta_i})$ et $F_i = k(\sqrt{\alpha_i})$. Ainsi, les deux extensions F_0 et L_0 sont $k(\sqrt{a})$ et $k(\sqrt{r(0)})$; les deux extensions F_∞ et L_∞ sont $k(\sqrt{a})$ et $k(\sqrt{s(0)})$. Les extensions F_i et L_i sont indistingables mais la condition $F_i = L_i$ est bien définie. Si f est le nombre de fibres essentiellement singulières pour lesquelles ces deux extensions sont égales, on a (d'après [13]) $\mathrm{Br}\, W/\mathrm{Br}\, k \subset (\mathbf{Z}/2)^{f-1}$ (en convenant que $(\mathbf{Z}/2)^s$ est nul pour $s \leq 0$) car dans notre cas les e_i correspondant aux fibres essentiellement singulières sont définis sur k. Ainsi, le groupe $\mathrm{Br}\, W/\mathrm{Br}\, k$ est nul dès que $r(0)s(0) = 0$ (puisqu'alors il y a au plus une fibre essentiellement singulière), et même dès que l'on n'a pas $r(0) \in ak^{*2}$ et $s(0) \in ak^*$. Supposons donc que $r(0) \in ak^{*2}$ et $s(0) \in ak^*$, alors comme Z est de type I, d'après les lemmes 3.2. et 3.5. de [13], on a $\mathrm{Br}\, W/\mathrm{Br}\, k = \ker \delta$, où $\delta : \bigoplus_{i \in \{0,\infty\}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}\,(F_i/k), \mathbf{Z}/2) \to \mathrm{Hom}(G, \mathbf{Z}/2)$ est définie par $\delta = \bigoplus_{i \in \{0,\infty\}} \delta_i$

et δ_i associe au générateur θ_i de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}\,(F_i/k), \mathbf{Z}/2)$ le caractère χ_i de G qui envoie $g \in G$ sur -1 si g permute les deux composantes de la fibre en e_i, sur 1 sinon. Pour $i \in \{0, \infty\}$, le caractère χ_i est ici non trivial et δ est non triviale. On a $\delta_0 = \delta_\infty$ donc le noyau de δ n'est pas trivial car il contient $\alpha_0 \oplus \alpha_\infty$. Ainsi, dans ce cas, $\mathrm{Br}\, W/\mathrm{Br}\, k = \mathbf{Z}/2$ ce qui achève de prouver le théorème 5.2.1.

6. Le cas général avec $n = 4$

Nous traitons ici le cas où $n = 4$ et où le polynôme P est produit de deux facteurs irréductibles de degré 2. Nous utiliserons une fibration en produit de deux coniques permettant de calculer $\mathrm{Pic}\,(\overline{X})$ (ce qui permet d'ailleurs ensuite de retrouver en partie le résultat arithmétique du théorème 1.5.1 par des méthodes de descente, voir la partie 7 de cet article).

6.1. Énoncé du résultat principal

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.1.1 *Soit V/k l'hypersurface de $\mathbf{A}^4_k$ définie par l'équation :*

$$y^2 - az^2 = f(u,v)g(u,v)$$

avec f et g polynômes irréductibles de degré 2 premiers entre eux. On suppose que les coniques de $\mathbf{P}^2_k$ définies par f et g sont lisses et se coupent transversalement. On suppose aussi que V a des points lisses dans tous les complétés de k. Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors, le groupe $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ est nul (et donc le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X) sauf dans les cas suivants, où il est égal à $\mathbf{Z}/2$:

- *Les quatre points d'intersection des coniques définies par f et g forment deux paires de points conjugués dans $k(\sqrt{a})$.*
- *Ces quatre points sont conjugués et l'extension L/k de degré 4 associée contient $k(\sqrt{a})$.*

Notons que V est k-birationnelle à la variété (qui est fibrée en λ) définie dans $\mathbf{A}^5_k$ par les équations :

$$\begin{cases} y^2 - az^2 = \lambda \\ f(u,v) = \lambda g(u,v) \end{cases}$$

La méthode va consister, pour un modèle propre lisse X de V, à construire une résolution de $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ par des G-modules de permutation (rappelons qu'on note $G = \mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k)$ et $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$) et à en déduire $H^1(G, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$. On notera encore φ et ψ les homogénéisés respectifs de f et g.

6.2. Construction d'un modèle projectif lisse de V

Soit X_1 la k-variété définie dans l'espace $\mathbf{A}^1_k \times \mathbf{P}^2_k \times \mathbf{P}^2_k$, dont on note les coordonnées $(\lambda; y, z, t_1; x_1, x_2, t_2)$, par les équations :

$$\begin{cases} y^2 - az^2 = \lambda t_1^2 \\ \varphi(x_1, x_2, t_2) = \lambda\psi(x_1, x_2, t_2) \end{cases}$$

Soit X_2 la k-variété définie dans une copie du même espace, dont on note les coordonnées $(\mu; Y, Z, T_1; X_1, X_2, T_2)$ par les équations :

$$\begin{cases} Y^2 - aZ^2 = \mu T_1^2 \\ \mu\varphi(X_1, X_2, T_2) = \psi(X_1, X_2, T_2) \end{cases}$$

On définit alors X via le recollement :

$$\begin{array}{ccc} X_1 - \{\lambda = 0\} & \longrightarrow & X_2 - \{\mu = 0\} \\ (\lambda; y, z, t_1; x_1, x_2, t_2) & \longmapsto & (1/\lambda; y/\lambda, z/\lambda, t_1; x_1/\lambda, x_2/\lambda, t_2/\lambda) \end{array}$$

Proposition 6.2.1 *X est une k-variété propre lisse.*

Preuve : Soit $\pi : X \to \mathbf{P}^1_k$ le k-morphisme obtenu par recollement des projections de X_1 et X_2 sur $\mathbf{A}^1_k$. Le morphisme π est propre donc X est propre sur k. Par ailleurs, la conique $y^2 - az^2 = \lambda t_1^2$ est dégénérée si et seulement si $\lambda = 0$ et la conique $\varphi(x_1, x_2, t_2) = \lambda\psi(x_1, x_2, t_2)$ est dégénérée pour trois valeurs distinctes non nulles de $\lambda \in \bar{k}$ (parce que φ et ψ définissent par hypothèse des coniques projectives lisses se coupant transversalement). De même, pour $\mu \in \bar{k}$, les deux coniques $Y^2 - aZ^2 = \mu T_1^2$ et $\mu\varphi(X_1, X_2, T_2) = \psi(X_1, X_2, T_2)$ ne peuvent dégénérer simultanément. Le critère jacobien montre alors immédiatement que X est lisse.

6.3. Une suite exacte

Comme les deux coniques définies par φ et ψ sont en position générale, elles se coupent en quatre points distincts de $\mathbf{P}^2_{\bar{k}}$, que nous noterons R_1, R_2, R_3, R_4. On notera $(\alpha_i)_{1\leq i\leq 3}$ les valeurs de λ pour lesquelles la conique définie par $\varphi - \lambda\psi$ est dégénérée, ce sont les racines dans $\bar{k}$ du polynôme $\det(\varphi - \lambda\psi)$. Pour tout point fermé P de $\mathbf{P}^1_k$ tel que la fibre de $X/\mathbf{P}^1_k$ en P soit dégénérée (on notera S l'ensemble de ces points dits de "mauvaise réduction"), on note K'_P le corps résiduel de $\mathbf{P}^1_k$ en P; alors, pour $1 \leq i \leq 3$, on a $\varphi(x_1, x_2, t_2) - \alpha_i\psi(x_1, x_2, t_2) = A_i(x_1, x_2, t_2)B_i(x_1, x_2, t_2)$ où A_i et B_i sont deux formes linéaires définies sur une extension quadratique ou triviale K''_P de K'_P (où P est le point fermé de $\mathbf{P}^1_k$ correspondant à α_i), soit $K''_P = K'_P(\sqrt{a_P})$; quitte à permuter, on peut supposer que les formes linéaires A_1 et B_1 représentent respectivement les droites (R_3R_4) et (R_1R_2), que les formes A_2 et B_2 représentent les droites (R_2R_4) et

(R_1R_3), et enfin que les formes A_3 et B_3 représentent les droites (R_2R_3) et (R_1R_4). On note enfin $G' = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k(\sqrt{a}))$ et $G'_P = \mathrm{Gal}(\bar{k}/K'_P)$, ainsi que $G''_P = \mathrm{Gal}(\bar{k}/K''_P)$; on a donc $G''_P \subset G'_P \subset G$. On fixe $\theta \in k \setminus \{0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. On a les diviseurs effectifs intègres sur $\overline{X}$:

F_0 défini sur $\overline{X}_1$ par $\lambda = 0, y = \sqrt{a}\, z$.

$\widetilde{F_0}$ défini sur $\overline{X}_1$ par $\lambda = 0, y = -\sqrt{a}\, z$.

F_P et $\widetilde{F_P}$ définis comme les composantes irréductibles de la fibre en P de $X/\mathbf{P}^1_k$ $(P \in S)$, et de même F_{α_i} et $\widetilde{F_{\alpha_i}}$, composantes irréductibles de la fibre définie sur $\overline{X}_1$ par $\lambda = \alpha_i$ pour $1 \leq i \leq 3$.

F défini sur $\overline{X}_1$ par $\lambda = \theta$ ("fibre générale").

F_∞ défini sur $\overline{X}_2$ par $\mu = 0, Y = \sqrt{a}\, Z$.

$\widetilde{F_\infty}$ défini sur $\overline{X}_2$ par $\mu = 0, Y = -\sqrt{a}\, Z$.

On désigne par $f_0, \widetilde{f_0}, f_P, \widetilde{f_P}, f, f_\infty, \widetilde{f_\infty}$ leurs images respectives dans $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ et on pose également $E_P = -F + F_P + \widetilde{F_P}$, $E_i = -F + F_i + \widetilde{F_i}$ pour $P \in S$ et $i \in \{0, \infty\}$. Avec ces notations, on a le résultat suivant :

Proposition 6.3.1 *La suite suivante de G-modules est exacte :*

$$0 \to T \to M \to \mathrm{Pic}\,\overline{X} \xrightarrow{\omega} \mathrm{Pic}\,\overline{X}_{\bar{k}(\eta)} \to 0$$

avec :

$$T = \mathbf{Z}E_0 \oplus \mathbf{Z}E_\infty \oplus \bigoplus_{P \in S} \mathbf{Z}[G/G'_P].E_P$$
$$M = \mathbf{Z}F \oplus (\mathbf{Z}F_0 \oplus \mathbf{Z}\widetilde{F_0}) \oplus (\mathbf{Z}F_\infty \oplus \mathbf{Z}\widetilde{F_\infty}) \oplus \bigoplus_{P \in S} (\mathbf{Z}[G/G'_P].F_P \oplus \mathbf{Z}[G/G'_P].\widetilde{F_P})$$

(C'est-à-dire que T et M sont les sous G-modules de $\mathrm{Div}\,\overline{X}$ *respectivement engendrés par $\{E_0, E_\infty, (E_P)_{P \in S}\}$ et $\{F, F_0, F_\infty, (F_P)_{P \in S}\}$ et ω est la flèche induite par la restriction à la fibre générique).*

Preuve : On a les égalités :

$$\mathrm{div}(\lambda - \theta) = F - F_\infty - \widetilde{F_\infty}$$
$$\mathrm{div}(\lambda) = F_0 + \widetilde{F_0} - F_\infty - \widetilde{F_\infty}$$
$$\mathrm{div}(\lambda - \alpha_i) = F_{\alpha_i} + \widetilde{F_{\alpha_i}} - F_\infty - \widetilde{F_\infty}$$

donc dans $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ on a les relations $f = f_\infty + \widetilde{f_\infty} = f_0 + \widetilde{f_0} = f_{\alpha_i} + \widetilde{f_{\alpha_i}}$. De ce fait, l'image de la flèche $T \to M$ est bien incluse dans le noyau de $M \to \mathrm{Pic}\,\overline{X}$. D'autre part, on sait que le noyau de la flèche ω est engendré par les composantes des fibres réductibles, d'où l'exactitude de $M \to \operatorname{Pic} \overline{X} \to \operatorname{Pic} \overline{X}_{\bar{k}(\eta)}$. Pour prouver l'exactitude de $T \to M \to \operatorname{Pic} \overline{X}$, on est ramené, vu les relations ci-dessus, à prouver que la famille $(f_0, f_\infty, f, f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, f_{\alpha_3})$, est libre dans $\operatorname{Pic} \overline{X}$. Notons qu'on sait déjà que le $\mathbf{Z}$-module $\operatorname{Pic} \overline{X}$ est libre de type fini car la variété X est rationnelle.

On fixe, pour $1 \leq i \leq 4$, un système de coordonnées homogènes (x_1^i, x_2^i, t_2^i) de $R_i \in \mathbf{P}^2_{\bar{k}}$. On dispose alors de sections de la projection $\bar{\pi} : \overline{X} \to \mathbf{P}^1_{\bar{k}}$, soit $\varphi_{\varepsilon,R_i}$, définies sur $\overline{X}_1$ pour $1 \leq i \leq 4$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ par $\lambda \mapsto (\lambda, \varepsilon\sqrt{a}, 1, 0, x_1^i, x_2^i, t_2^i)$. Ces sections induisent par image réciproque des morphismes $\widetilde{\varphi_{\varepsilon,R_i}} : \operatorname{Pic} \overline{X} \to \operatorname{Pic} \mathbf{P}^1_{\bar{k}} = \mathbf{Z}$. Notons que $\varphi_{\varepsilon,R_i}$ rencontre F_0 (resp. F_∞) si et seulement si $\varepsilon = 1$. Soit alors $(a_0, a_\infty, a, a_1, a_2, a_3)$ dans $\mathbf{Z}^6$ tel que :

$$a_0 f_0 + a_\infty f_\infty + af + a_1 f_{\alpha_1} + a_2 f_{\alpha_2} + a_3 f_{\alpha_3} = 0$$

Appliquons $\widetilde{\varphi_{\varepsilon,R_i}}$ aux deux membres, il vient :

- Avec $\varepsilon = 1$:
$$\begin{aligned} &C = 0 \\ &C + a_2 + a_3 = 0 \\ &C + a_1 + a_3 = 0 \\ &C + a_1 + a_2 = 0 \end{aligned}$$
  Où $C = \varphi_{1,R_i}(a_0 f_0 + a_\infty f_\infty + af) = a_0 + a_\infty + a$ car φ_{1,R_i} rencontre F_0 et F_∞, ainsi que F. On en tire $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et $a_0 f_0 + a_\infty f_\infty + af = 0$.

- Avec $\varepsilon = -1$, on obtient alors $a = 0$ et comme $C = 0$, on a $a_0 = -a_\infty$. Ainsi, on a $a_0(f_0 - f_\infty) = 0$ d'où $a_0 = a_\infty = 0$. Ceci achève la preuve.

On notera θ la flèche $H^2(G, T) \to H^2(G, M)$ induite par la suite exacte de la proposition 6.3.1 et ω' la restriction de $\omega : \operatorname{Pic} \overline{X} \to \operatorname{Pic} \overline{X}_{\bar{k}(\eta)}$ à $\operatorname{Pic} X$.

Corollaire 6.3.2 *On a l'égalité :* $H^1(G, \operatorname{Pic} \overline{X}) = \ker \theta / \operatorname{coker} \omega'$

Preuve : Introduisons l'image N de la flèche $M \to \operatorname{Pic} \overline{X}$. On a les suites exactes courtes :

$$\begin{aligned} &0 \to N \xrightarrow{\lambda} \operatorname{Pic} \overline{X} \xrightarrow{\omega} \operatorname{Pic} \overline{X}_{\bar{k}(\eta)} \to 0 \\ &0 \to T \to M \to N \to 0 \end{aligned}$$

- La deuxième donne, vu que $H^1(G, T) = H^1(G, M) = 0$ (T et M sont des G-modules de permutation), la suite exacte :
$$0 = H^1(G, M) \to H^1(G, N) \to H^2(G, T) \xrightarrow{\theta} H^2(G, M)$$
  D'où $H^1(G, N) = \ker \theta$.

- La première donne naissance à la suite exacte :

$$0 \to N^G \to (\operatorname{Pic}\overline{X})^G = \operatorname{Pic} X \xrightarrow{\omega'} \operatorname{Pic}\overline{X}_{\bar{k}(\eta)} \to H^1(G,N) \to H^1(G,\operatorname{Pic}\overline{X}) \to 0$$

En effet, l'égalité $(\operatorname{Pic}\overline{X})^G = \operatorname{Pic} X$ est vérifiée car X a des points dans tous les complétés de k et d'autre part $\overline{X}_{\bar{k}(\eta)}$ est le produit de deux coniques sur $\bar{k}(\eta)$ qui ont des $\bar{k}(\eta)$-points, donc $\overline{X}_{\bar{k}(\eta)}$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ sur $\bar{k}(\eta)$. Son groupe de Picard est donc $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ avec action triviale de G et $H^0(G, \operatorname{Pic}\overline{X}_{\bar{k}(\eta)}) = \operatorname{Pic}\overline{X}_{\bar{k}(\eta)}$; on a aussi $H^1(G, \operatorname{Pic}\overline{X}_{\bar{k}(\eta)}) = 0$.

Ainsi, on a bien :

$$H^1(G,\operatorname{Pic}\overline{X}) = H^1(G,N)/\operatorname{coker}\omega' = \ker\theta/\operatorname{coker}\omega'$$

6.4. Calcul de $\operatorname{coker}\omega'$

Proposition 6.4.1 *On a* $\operatorname{coker}\omega' = \mathbf{Z}/2$ *si les coniques définies dans* $\mathbf{P}^2_k$ *par* φ *et* ψ *ont un point rationnel commun, et* $\operatorname{coker}\omega' = (\mathbf{Z}/2)^2$ *sinon.*

Nous aurons besoin d'un lemme :

Lemme 6.4.2 *Soient* C_1 *et* C_2 *deux coniques (projectives, lisses) sur un corps* F. *Si* C_1 *n'est pas isomorphe à* C_2, *alors* $\operatorname{Pic}(C_1 \times C_2) = \operatorname{Pic} C_1 \oplus \operatorname{Pic} C_2$.

Preuve du lemme 6.4.2 : Au niveau de la clôture algébrique $\overline{F}$, on a déjà $\operatorname{Pic}(\overline{C}_1 \times \overline{C}_2) = \operatorname{Pic}(\overline{C}_1) \oplus \operatorname{Pic}(\overline{C}_2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ (avec action triviale de $\operatorname{Gal}(\overline{F}/F)$). Notons e_1 un générateur de $\operatorname{Pic}(\overline{C}_1)$ et e_2 un générateur de $\operatorname{Pic}(\overline{C}_2)$. On a le diagramme commutatif suivant, où les suites horizontales sont exactes, valable pour $1 \le i \le 2$:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Pic}(C_i) & \xrightarrow{j_i} & \operatorname{Pic}(\overline{C}_i) & \xrightarrow{\zeta_i} & \operatorname{Br} F \\
 & & p_i^* \downarrow & & \bar{p}_i^* \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Pic}(C_1 \times C_2) & \xrightarrow{j} & \operatorname{Pic}(\overline{C}_1 \times \overline{C}_2) & \xrightarrow{\xi} & \operatorname{Br} F
\end{array}$$

Si α_i désigne l'image de e_i par l'application $\zeta_i : \operatorname{Pic}(\overline{C}_i) \to \operatorname{Br} F$, on a (dans $\operatorname{Br} F$) $2\alpha_i = 0$ et $\alpha_1 \neq \alpha_2$ parce que les deux coniques C_1, C_2 ne sont pas isomorphes. Identifiant $\operatorname{Pic}(C_i)$ avec son image dans $\operatorname{Pic}(\overline{C}_i)$, on a $\operatorname{Pic}(C_i) = \mathbf{Z}e_i$ si C_i a un F-point, $\operatorname{Pic}(C_i) = 2\mathbf{Z}e_i$ sinon. Identifions de même $\operatorname{Pic}(C_1 \times C_2)$ avec son image dans $\operatorname{Pic}(\overline{C}_1 \times \overline{C}_2) = \mathbf{Z}e_1 \oplus \mathbf{Z}e_2$. Alors, si e_i est dans $\operatorname{Pic}(C_1 \times C_2)$, son image par ξ dans $\operatorname{Br} F$ est nulle c'est à dire que $\alpha_i = 0$ et C_i a un F-point. De même, l'élément $e_1 + e_2$ ne peut être dans $\operatorname{Pic}(C_1 \times C_2)$ sinon son image par ξ dans $\operatorname{Br} F$ serait nulle et on aurait $\alpha_1 = \alpha_2$. Ainsi :

- Si C_1 a un F-point et pas C_2, alors $\mathrm{Pic}\,(C_1) \oplus \mathrm{Pic}\,(C_2) = \mathbf{Z}e_1 \oplus 2\mathbf{Z}e_2$ mais comme e_2 n'est pas dans $\mathrm{Pic}\,(C_2)$, on a vu qu'il n'était pas non plus dans $\mathrm{Pic}\,(C_1 \times C_2)$ donc forcément $\mathrm{Pic}\,(C_1 \times C_2) = \mathbf{Z}e_1 \oplus 2\mathbf{Z}e_2$.
- Si ni C_1 ni C_2 n'ont de F-points, alors $\mathrm{Pic}\,(C_1) \oplus \mathrm{Pic}\,(C_2) = 2\mathbf{Z}e_1 \oplus 2\mathbf{Z}e_2$ et $\mathrm{Pic}\,(C_1 \times C_2)$ ne peut contenir ni e_1, ni e_2, ni $e_1 + e_2$, donc là encore la seule possibilité est $\mathrm{Pic}\,(C_1 \times C_2) = 2\mathbf{Z}e_1 \oplus 2\mathbf{Z}e_2$.

Remarque : On peut voir de façon plus géométrique que $e_1 + e_2$ n'est pas dans $\mathrm{Pic}\,(C_1 \times C_2)$. En effet, en notant $D = e_1 + e_2$, si D est dans $\mathrm{Pic}\,(C_1 \times C_2)$, on peut introduire le F-espace vectoriel $L(D)$ des fonctions sur $C_1 \times C_2$ dont le diviseur est $\geq -D$. Au niveau $\overline{F}$, on a, par le théorème de Riemann-Roch : $\dim_{\overline{F}} L(D) \otimes_F \overline{F} = 4$ donc la dimension sur F de $L(D)$ est aussi 4 et il existe un diviseur effectif D' de $\mathrm{Pic}\,(C_1 \times C_2)$ linéairement équivalent à $e_1 + e_2$. Le bidegré de D' étant (1,1), il induit un isomorphisme de C_1 sur C_2 (associant à un point M_1 de C_1 le point M_2 de C_2 tel que D' passe par (M_1, M_2)) ce qui est exclu.

Preuve de la proposition 6.4.1 : La flèche $\omega' : \mathrm{Pic}\, X \to \mathrm{Pic}\, \overline{X}_{\bar{k}(\eta)}$ se factorise via la flèche $\mathrm{Pic}\, X_{k(\eta)} \to \mathrm{Pic}\, \overline{X}_{\bar{k}(\eta)}$ dont on est ramené à chercher le conoyau. $\mathrm{Pic}\, X_{k(\eta)}$ est le produit des deux coniques projectives lisses sur le corps $k(\eta)$ définies par $C_1 : y^2 - az^2 = \eta t^2$ et $C_2 : \varphi(x_1, x_2, t_2) = \eta\psi(x_1, x_2, t_2)$. Pour une conique (projective, lisse) C sur $k(\eta)$, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Pic}\, C \to \mathrm{Pic}\,(\overline{C})^G = \mathbf{Z} \to \mathrm{Br}\, k(\eta)$$

où $\overline{C} = C \times_{k(\eta)} \overline{k(\eta)}$ mais les coniques C_1 et C_2 ont déjà un $\bar{k}(\eta)$-point donc $\mathrm{Pic}\,(\overline{C_i}) = \mathrm{Pic}\,(C_i \times_{k(\eta)} \bar{k}(\eta))$.
La flèche $\mathbf{Z} \to \mathrm{Br}\, k(\eta)$ associe à l'élément 1 de $\mathbf{Z}$ un élément α_C de $\mathrm{Br}\, k(\eta)$ tel que $2\alpha_C = 0$ et $\alpha_C = 0$ si et seulement si la conique C a un $k(\eta)$-point. Rappelons que, d'après le théorème d'Amer-Brumer, la conique C a un $k(\eta)$-point (resp. un $\bar{k}(\eta)$-point) si et seulement si elle a un $k(\eta)$-point (resp un $\bar{k}(\eta)$-point) appartenant à k (resp. à $\bar{k}$). Ainsi, la conique C_1 n'a jamais de $k(\eta)$-point. La conique C_2 a un $k(\eta)$-point si et seulement si φ et ψ ont un k-point commun. D'autre part, les coniques C_1 et C_2 ne sont jamais isomorphes sur $k(\eta)$ sinon les éléments $\alpha_{C_1}, \alpha_{C_2}$ associés dans $\mathrm{Br}\, k(\eta)$ auraient en particulier même résidu en zéro alors que α_{C_2} a un résidu trivial puisque $\varphi(x_1, x_2, t_2)$ est non dégénérée et α_{C_1} a un résidu égal à a (vu comme élément de $k^*/k^{*^2} = H^1(G, \mathbf{Z}/2) \subset H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$), donc non trivial. D'après le lemme, on est ramené au conoyau de $\mathrm{Pic}\, C_1 \oplus \mathrm{Pic}\, C_2 \to \mathrm{Pic}\, \overline{C}_1 \oplus \mathrm{Pic}\, \overline{C}_2$. Si φ et ψ ont un k-point commun, alors $\alpha_{C_2} = 0$ et $\alpha_{C_1} \neq 0$ donc $\mathrm{Pic}\, C_1 \to \mathrm{Pic}\, \overline{C}_1$ a pour conoyau $\mathbf{Z}/2$ et $\mathrm{Pic}\, C_2 \to \mathrm{Pic}\, \overline{C}_2$ a pour conoyau 0; dans ce cas, le conoyau de ω' est $\mathbf{Z}/2$. Sinon, on a $\alpha_{C_2} \neq 0$, et $\alpha_{C_1} \neq 0$ donc le conoyau cherché est $(\mathbf{Z}/2)^2$.

6.5. Calcul de $\ker\theta$

Proposition 6.5.1 *$\ker\theta$ s'identifie aux éléments de $k^*/k^{*2} \times k^*/k^{*2} \times \prod_{P\in S} K_P'^*/K_P'^{*2}$ de la forme $(a^m, a^n, (a_P{}^{r_P})_{P\in S})$ (où m, n, r_P sont dans $\mathbf{Z}/2$) tels que :*

$$a^{m+n} \prod_{P\in S} N_{K_P'/k}(a_P)^{r_P} = 1 \text{ dans } k^*/k^{*2}$$

Preuve : Par le lemme de Schapiro, on a, pour tout sous-groupe H de G, $H^2(G, \mathbf{Z}[G/H]) = H^1(H, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Ainsi, si K_P'' est une extension non triviale de K_P', on a :

$$H^2(G,T) = H^1(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus H^1(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus (\bigoplus_{P\in S} H^1(G_P', \mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$$
$$H^2(G,M) = H^1(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus H^1(G',\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus H^1(G',\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus (\bigoplus_{P\in S} H^1(G_P'', \mathbf{Q}/\mathbf{Z}))$$

(Si $K_P'' = K_P$, on a $G_P'' = G_P'$ et il faut, dans la deuxième égalité, remplacer $H^1(G_P'', \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ par $H^1(G_P'', \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus H^1(G_P'', \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$).

Le noyau de $H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(G', \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est $\mathrm{Hom}((G/G'), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, c'est-à-dire $\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}\,(K/k), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}\,(K/k), \mathbf{Z}/2)$ donc ce noyau n'est autre que $H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k), \mathbf{Z}/2)$. De même, le noyau de $H^1(G_P', \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(G_P'', \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est $H^1(\mathrm{Gal}\,(K_P''/K_P'), \mathbf{Z}/2)$. Or, d'après la théorie de Kummer, $H^1(G, \mathbf{Z}/2) \simeq k^*/k^{*2}$ et $H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k), \mathbf{Z}/2)$ correspond au sous-groupe de k^*/k^{*2} engendré par a. De manière similaire, le groupe $H^1(\mathrm{Gal}\,(K_P''/K_P'), \mathbf{Z}/2)$ s'identifie au sous-groupe de $K_P'^*/K_P'^{*2}$ engendré par a_P. Un élément de $\ker\theta$ s'identifie donc bien à un élément du groupe multiplicatif $k^*/k^{*2} \times k^*/k^{*2} \times \prod_{P\in S} K_P'^*/K_P'^{*2}$ de la forme $(a^m, a^n, (a_P{}^{r_P})_{P\in S})$. Un tel élément est effectivement dans $\ker\theta$ si et seulement s'il est dans le noyau de $H^2(G,T) \xrightarrow{\xi} H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, application composée de θ et de la projection de $H^2(G,M)$ sur $H^1(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Pour tout sous-groupe d'indice fini H de G, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^q(G, \mathbf{Z}[G/H]) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & H^q(H, \mathbf{Z}[G/H]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(G, \mathbf{Z}) & \xleftarrow{\mathrm{Cores}} & H^q(H, \mathbf{Z}) \end{array}$$

La flèche $\pi^q_{G/H} : H^q(G, \mathbf{Z}[G/H]) \to H^q(G, \mathbf{Z})$ étant induite par le morphisme d'augmentation $\mathbf{Z}[G/H] \to \mathbf{Z}$ et $p^q_{G/H} : H^q(H, \mathbf{Z}[G/H]) \to H^q(H, \mathbf{Z})$ par la projection $\mathbf{Z}[G/H] \to \mathbf{Z}$ (cf [11], exercice 3 p.128). Comme la flèche $\mathbf{Z}[G/G_P'].E_P \to \mathbf{Z}F$ correspondait (au signe près) au morphisme d'augmentation $\mathbf{Z}[G/G_P'] \to \mathbf{Z}$, la flèche $H^2(G_P', \mathbf{Z}) \to H^2(G, \mathbf{Z})$ induite par ξ correspond à la corestriction (l'isomorphisme $H^2(H, \mathbf{Z}) \simeq H^2(G, \mathbf{Z}[G/H])$ déjà utilisé n'est autre que $(p^2_{G/H} \circ \mathrm{Res})^{-1}$).

La corestriction étant un δ-foncteur, on a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
H^2(G'_P,\mathbf{Z}) & \xleftarrow{\text{Cores}} & H^2(G,\mathbf{Z}) \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow \\
H^1(G'_P,\mathbf{Z}/2) & \xleftarrow{\text{Cores}} & H^1(G,\mathbf{Z}/2) \\
\delta\uparrow & & \delta\uparrow \\
H^0(G'_P,\bar{k}^*) = K'^*_P & \xleftarrow{\text{Cores}} & H^0(G,\bar{k}^*) = k^*
\end{array}$$

On sait que pour $q=0$, la corestriction n'est autre que la norme. Ainsi, la flèche ${K'_P}^*/{K'_P}^{*2} \to k^*/k^{*2}$ induite par ξ est bien $N_{K'_P/K}$, ce qui démontre la proposition.

6.6. Preuve du théorème 6.1.1 : les différents cas

Avant de passer à la discussion, donnons un lemme qui simplifiera les calculs dans certains cas :

Lemme 6.6.1 *Avec les mêmes notations que précédemment, on a :*

$$\prod_{P\in S} N_{K'_P/k}(a_P) = 1 \quad \text{dans } k^*/k^{*2}$$

Preuve du lemme 6.6.1 : D'après ce qu'on a vu dans la preuve de la proposition 6.5.1, il s'agit de prouver que si ζ_P désigne le générateur du groupe $H^1(\mathrm{Gal}\,(K''_P/K'_P),\mathbf{Z}/2)$, l'image de $(\zeta_P)_{P\in S}$ par la flèche (qu'induit θ) :

$$\bigoplus_{P\in S} H^1(\mathrm{Gal}\,(K''_P/K'_P),\mathbf{Z}/2) \to H^1(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

est triviale. Mais pour cela, il suffit d'appliquer la remarque suivant la preuve du lemme 1 de [7] au fibré en coniques défini par $\phi(x_1,x_2,t) = \lambda\psi(x_1,x_2,t)$.

Nous démontrons alors le théorème 6.1.1 en distinguant suivant les extensions de k où R_1,R_2,R_3,R_4 sont définis.

- Si les R_i sont tous définis sur k, d'après ce qui précède on a $\operatorname{coker}\omega' = \mathbf{Z}/2$ et $\ker\theta$ est le noyau de la flèche :

  $$\begin{array}{rcl}
  H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k),\mathbf{Z}/2)\times H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k),\mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & k^*/k^{*2} \\
  (a^m,a^n) & \longmapsto & a^{m+n}
  \end{array}$$

  (rappelons que $H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k),\mathbf{Z}/2)$ s'identifie au sous-groupe de k^*/k^{*2} engendré par a).

  Ainsi, on a $\ker\theta = \mathbf{Z}/2$ et $H^1(G,\mathrm{Pic}\,\overline{X}) = 0$.

- Supposons R_1 et R_2 k-rationnels mais R_3 et R_4 conjugués dans l'extension quadratique $k(\sqrt{b})$ $(b \in k^* \setminus k^{*^2})$. On a encore $\operatorname{coker} \omega' = \mathbf{Z}/2$. Les droites (R_1R_2) et (R_3R_4) sont toutes deux globalement k-rationnelles et la paire de droites $(R_2R_4), (R_1R_3)$ est conjuguée de la paire $(R_2R_3), (R_1R_4)$. On en déduit que α_1 est dans k et α_2, α_3 sont conjugués dans $k(\sqrt{b})$. Pour le point P_0 de S correspondant à α_2, α_3, on a $K''_{P_0} = K'_{P_0} = k(\sqrt{b})$. Ainsi, on obtient que $\ker \theta$ est le noyau de :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k), \mathbf{Z}/2) \times H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k), \mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & k^*/k^{*^2} \\ (a^m, a^n) & \longmapsto & a^{m+n} \end{array}$$

C'est-à-dire qu'on a finalement $\ker \theta = \mathbf{Z}/2$ et $H^1(G, \operatorname{Pic} \overline{X}) = 0$.

Remarque : Dans les deux cas précédents, V est en fait k-rationnelle par le lemme 4.3.1.

- Supposons R_1, R_2 conjugués dans l'extension quadratique $k(\sqrt{b})$ et R_3, R_4 conjugués dans l'extension quadratique $k(\sqrt{c})$ avec $k(\sqrt{b}) \neq k(\sqrt{c})$. Les droites (R_1R_2) et (R_3R_4) sont toutes deux globalement k-rationnelles; on a $\alpha_1 \in k$ mais α_2 et α_3 sont conjugués dans $k(\sqrt{bc})$. Pour le point P_0 de S correspondant à α_2, α_3, on a $K'_{P_0} = k(\sqrt{bc})$ et $K''_{P_0} = K'_{P_0}(\sqrt{b})$, on peut donc prendre $a_{P_0} = b$. Alors, on a $N_{K_{P_0}/k}(a_{P_0})) = b^2 = 1$ dans k^*/k^{*^2}. Ainsi, le groupe $\ker \theta$ est le noyau de :

$$\begin{array}{ccc} [H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k), \mathbf{Z}/2)]^2 \times H^1(\mathrm{Gal}\,(K''_{P_0}/K_{P_0}), \mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & k^*/k^{*^2} \\ (a^m, a^n, b^r) & \longmapsto & a^{m+n} \end{array}$$

De ce fait, on a $\ker \theta = (\mathbf{Z}/2)^2$ et $H^1(G, \operatorname{Pic} \overline{X}) = 0$.

- Supposons R_1, R_2 conjugués dans l'extension quadratique $k(\sqrt{b})$ et R_3, R_4 conjugués dans la même extension quadratique. Alors, les droites (R_1R_2) et (R_3R_4) sont toutes deux globalement k-rationnelles et les droites (R_2R_4) et (R_1R_3) (ainsi que (R_2R_3) et (R_1R_4)) forment un couple de droites conjuguées. On en déduit que α_i est dans k pour $1 \leq i \leq 3$. Pour P_i dans S correspondant à α_i $(2 \leq i \leq 3)$, on a $K'_{P_i} = k$ et $K''_{P_i} = k(\sqrt{b})$. Le groupe $\ker \theta$ est le noyau de :

$$\begin{array}{ccc} [H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k), \mathbf{Z}/2)]^2 \times H^1(\mathrm{Gal}\,(k(\sqrt{b})/k), \mathbf{Z}/2)^2 & \longrightarrow & k^*/k^{*^2} \\ (a^m, a^n, b^r, b^s) & \longmapsto & a^{m+n}.b^{r+s} \end{array}$$

De ce fait, on a $\ker \theta = (\mathbf{Z}/2)^2$ si $k(\sqrt{b}) \neq k(\sqrt{a})$ mais $\ker \theta = (\mathbf{Z}/2)^3$ si $k(\sqrt{b}) = k(\sqrt{a})$. Donc, $H^1(G, \operatorname{Pic} \overline{X}) = 0$ si $k(\sqrt{b}) \neq k(\sqrt{a})$ et $H^1(G, \operatorname{Pic} \overline{X}) = \mathbf{Z}/2$ si $k(\sqrt{b}) = k(\sqrt{a})$. Ces résultats sont bien conformes à l'énoncé du théorème 6.1.1 .

- Supposons enfin que les quatre points R_1, R_2, R_3, R_4 sont conjugués. Soit L/k l'extension de degré 4 correspondant et $\mathcal{L}$ la clôture galoisienne de L. Alors, le groupe $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\mathcal{L}/k)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_4$ agissant transitivement sur $\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ et il y a à nouveau plusieurs cas à distinguer :

  - Si $\mathcal{G}$ est égal à $\mathcal{S}_4$ ou à $\mathcal{A}_4$, alors le polynôme $\det(\varphi - \lambda\psi)$ est irréductible sur k et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont conjugués par G. De ce fait, l'ensemble S est constitué d'un seul point fermé de $\mathbf{P}^1_k$, donc $\ker\theta \subset (\mathbf{Z}/2)^2$ et ainsi on a forcément $H^1(G, \mathrm{Pic}\,\overline{X}) = 0$. Comme $\mathcal{A}_4$ n'a pas de quotient d'ordre 2, on sait déjà que si $\mathcal{G} = \mathcal{A}_4$, le corps $\mathcal{L}$ (et a fortiori L) ne contient pas $k(\sqrt{a})$, et si $\mathcal{G} = \mathcal{S}_4$ avec $\mathcal{L} \supset K = k(\sqrt{a})$, alors $\mathrm{Gal}(\mathcal{L}/K) = \mathcal{A}_4$ donc on ne peut avoir $L \supset k(\sqrt{a})$, toujours parce que $\mathcal{A}_4$ n'a pas de quotient d'ordre 2. Ainsi, on trouve bien un résultat conforme à l'énoncé du théorème 6.1.1 .
  - Si $\mathcal{G}$ est égal au sous-groupe de Klein V_4 de $\mathcal{S}_4$ constitué de l'identité et des doubles transpositions, alors pour $1 \leq i \leq 3$, la fibre f_{α_i} admet $\widetilde{f_{\alpha_i}}$ pour unique conjuguée par G. Ainsi, les éléments $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont dans k. Par la théorie de Galois, il y a exactement trois extensions quadratiques de k incluses dans $L = \mathcal{L}$ (correspondant aux trois quotients d'ordre 2 G_1, G_2, G_3 de $\mathcal{G}$), soit $k(\sqrt{b}), k(\sqrt{c}), k(\sqrt{bc})$ qui sont les extensions K_i'' où les fibres f_{α_i} dégénèrent. Ainsi, $\ker\theta$ est le noyau de :

$$\begin{array}{rcl} [H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k), \mathbf{Z}/2)]^2 \times \prod_{i=1}^{3} H^1(G_i, \mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & k^*/k^{*^2} \\ (a^m, a^n, b^r, c^s, (bc)^t) & \longmapsto & a^{m+n}.b^r.c^s.(bc)^t \end{array}$$

    Il en résulte que $H^1(G, \mathrm{Pic}\,\overline{X}) = \mathbf{Z}/2$ si $L \supset K = k(\sqrt{a})$; sinon, on a $H^1(G, \mathrm{Pic}\,\overline{X}) = 0$.
  - Si $\mathcal{G}$ est cyclique d'ordre 4 engendré par exemple par le cycle $(1,2,3,4)$, alors α_2 est dans k et α_1, α_3 sont conjugués dans l'unique extension quadratique de k contenue dans $L = \mathcal{L}$ ($\mathcal{G}$ n'a ici qu'un quotient d'ordre 2, noté $\mathcal{G}/H$), soit $k(\sqrt{b})$. Si Q est le point fermé de $\mathbf{P}^1_k$ correspondant à α_2, on a donc forcément $K_Q' = k$ et $K_Q'' = k(\sqrt{b})$ d'où $N_{K_Q'/k}(a_Q) = b$. Par le lemme 6.6.1, on en déduit que si β désigne un générateur de $H^1(H, \mathbf{Z}/2)$, le groupe $\ker\theta$ est le noyau de :

$$\begin{array}{rcl} H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k), \mathbf{Z}/2)^2 \times H^1(\mathcal{G}/H, \mathbf{Z}/2) \times H^1(H, \mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & k^*/k^{*^2} \\ (a^m, a^n, b^r, \beta^s) & \longmapsto & a^{m+n}.b^{r+s} \end{array}$$

    On a donc encore $H^1(G, \mathrm{Pic}\,\overline{X}) = \mathbf{Z}/2$ si $L \supset K = k(\sqrt{a})$; sinon, on a $H^1(G, \mathrm{Pic}\,\overline{X}) = 0$.
  - Si $\mathcal{G}$ est diédral d'ordre 8, engendré par exemple par la transposition $(2,4)$ et la double transposition $(1,2)(3,4)$, α_2 est dans k, mais α_1 et

α_3 sont conjugués. Si Q est le point fermé de $\mathbf{P}^1_k$ correspondant à α_2, alors K''_Q est l'extension quadratique de k incluse dans L : en effet, l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}$ laissant fixe R_1 est le sous groupe G_1 d'ordre 2 engendré par $(2,4)$. Si L_1 est le corps fixe de G_1, on a L_1 isomorphe à L et comme il existe un unique sous-groupe d'ordre 4 de $\mathcal{G}$ contenant G_1 (le sous-groupe G_2 engendré par $(2,4)$ et $(1,3)$), le corps L contient une unique extension quadratique de k, soit $k(\sqrt{b})$. Comme K''_Q est l'extension quadratique de k dans laquelle les droites (R_1R_3) et (R_2R_4) sont conjuguées, on a bien $\mathrm{Gal}\,(\mathcal{L}/K''_Q) = G_2$ et $K''_Q = k(\sqrt{b})$. Maintenant, en appliquant le lemme 6.6.1, on voit que $\ker\theta$ est le noyau de :

$$\begin{array}{ccc} [H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k),\mathbf{Z}/2)]^2 \times \prod_{P\in S} H^1(\mathrm{Gal}\,(K''_P/K'_P),\mathbf{Z}/2) & \longrightarrow & k^*/k^{*2} \\ (a^m,a^n,b^r,\beta^s) & \longmapsto & a^{m+n}.b^{r+s} \end{array}$$

(Si P_0 est le point fermé de $\mathbf{P}^1_k$ correspondant à α_1 et α_3, on note β un générateur du groupe $H^1(\mathrm{Gal}\,(K''_{P_0}/K'_{P_0}),\mathbf{Z}/2)$ qui est d'ordre 2).

On a donc encore $H^1(G,\mathrm{Pic}\,\overline{X}) = \mathbf{Z}/2$ si $L \supset K = k(\sqrt{a})$ et sinon $H^1(G,\mathrm{Pic}\,\overline{X}) = 0$.

Ceci achève la preuve du théorème 6.1.1.

6.7. Cas dégénérés avec $n = 4$

Nous achevons ici notre étude en examinant le cas où l'on n'est pas dans les hypothèses du théorème 6.1.1.

Proposition 6.7.1 *Soit V la k-hypersurface de $\mathbf{A}^4_k$ d'équation :*

$$y^2 - az^2 = f(x_1,x_2)g(x_1,x_2)$$

avec f et g polynômes irréductibles de degré 2 premiers entre eux; on note $\varphi(x_1,x_2,t)$ et $\psi(x_1,x_2,t)$ les formes quadratiques associées à f et g. On suppose que l'intersection des noyaux des formes quadratiques φ et ψ est réduite à 0. Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors :

- *Si les coniques φ et ψ ne se coupent pas transversalement, elles se coupent en deux points d'intersection définis sur une extension quadratique ou triviale de k. On a $\mathrm{Br}\,X/\mathrm{Br}\,k = 0$ sauf si cette extension est $k(\sqrt{a})$, auquel cas $\mathrm{Br}\,X/\mathrm{Br}\,k$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2$.*

- *Si l'une des formes φ,ψ est dégénérée, on a encore $\mathrm{Br}\,X/\mathrm{Br}\,k = 0$ sauf quand les deux conditions suivantes sont remplies (auquel cas $\mathrm{Br}\,X/\mathrm{Br}\,k$ est isomorphe à $\mathrm{Z}/2$) :*

1. *Ni φ ni ψ n'est du type* (T).
2. *L'intersection des coniques φ et ψ consiste en quatre points conjugués dans une extension du type $k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ avec $k(\sqrt{a}) \neq k(\sqrt{b})$.*

Preuve :

- Si les deux coniques définies par φ et ψ ne se coupent pas transversalement, on peut supposer que :

$$f(x_1, x_2) = (\alpha(x_1^2 - bx_2^2) + C)$$
$$g(x_1, x_2) = (\beta(x_1^2 - bx_2^2) + C')$$

avec α, β dans k^* et C, C' dans k (non tous deux nuls). La proposition 3.2.1 et le théorème 3.2.2 nous disent déjà que $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ est un sous-groupe de $\mathbf{Z}/2$ et qu'une condition nécessaire pour qu'il soit non trivial est $k(\sqrt{a}) = k(\sqrt{b})$. Supposons réciproquement que $k(\sqrt{a}) = k(\sqrt{b})$; la variété V est ainsi k-birationnelle à la k-hypersurface V' de $\mathbf{A}_k^4$ d'équation :

$$y^2 - az^2 = (\alpha(x_1^2 - ax_2^2) + C)(\beta(x_1^2 - ax_2^2) + C')$$

On conclut alors que $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ est non nul par un raisonnement analogue à celui de la fin de la preuve de la proposition 4.5.1 : soit A un anneau de valuation discrète, avec $k \subset A \subset k(X) = \operatorname{Frac} A$, le restant au niveau $K = k(\sqrt{a})$ et soit v la valuation associée. Si $v(f(x_1, x_2))$ est impaire, alors comme $\beta f(x_1, x_2) - \alpha g(x_1, x_2) = C''$ avec C'' constante non nulle, on a forcément (vu que $v(g(x_1, x_2))$ est aussi impaire) $v(f(x_1, x_2)) = v(g(x_1, x_2)) < 0$. Mais alors, on a aussi $v(f(x_1, x_2) - C)$ impaire donc $v(x_1^2 - ax_2^2)$ impaire, d'où une contradiction. Le résultat en découle.

- Si la forme φ par exemple est dégénérée, on peut supposer que $f(x_1, x_2) = \alpha(x_1^2 - b)$ avec b, α dans k^* et $k(\sqrt{a}) \neq k(\sqrt{b})$ (si $k(\sqrt{a}) = k(\sqrt{b})$, la forme φ est du type (T) et la variété V est k-birationnelle à une quadrique donc $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k = 0$). On peut également supposer que la restriction de ψ au noyau de φ est non nulle (donc non dégénérée) sinon les coniques φ, ψ ont un point rationnel commun et la variété est k-rationnelle. Après changement de variables linéaire, on se ramène à $g(x_1, x_2) = x_2^2 - C(x_1)$ avec C polynôme non nul de degré ≤ 2 et $\beta \in k^*$. Si $C(x_1)$ est le produit de a et du carré d'un facteur de degré 1, alors ψ est du type (T) et V est encore k-birationnelle à une quadrique. Nous exclurons désormais ce cas.

  Supposons $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k \neq 0$. Alors, l'intersection des coniques φ et ψ consiste en quatre points conjugués (si elle consistait en deux paires de points conjugués dans $k(\sqrt{b})$, le théorème 3.2.2 serait contredit). Soit L l'extension de degré 4 associée et $\mathcal{L}$ sa clôture galoisienne. On a déjà $L \supset k(\sqrt{b})$ et d'après le théorème 3.2.2, on doit aussi avoir $L \supset k(\sqrt{a})$. Ceci exclut le cas où $\mathcal{L}/k$ est cyclique de degré 4, et aussi le cas où $\mathcal{L}/k$ est diédrale de degré 8 (car dans ce cas L ne contient qu'une extension quadratique, voir le dernier cas de la preuve du théorème 6.1.1). Ainsi, seul reste le cas où $\mathcal{L} = L = k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ ce qui donne déjà la condition nécessaire cherchée.

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, on a $C(x_1) = aL(x_1)^2 + \beta(x_1^2 - b)$ avec $\beta \in k^*$ et $L(x_1)$ polynôme de degré 1. Soit A un anneau de valuation discrète, avec $k \subset A \subset k(X) = \operatorname{Frac} A$, le restant au niveau $K = k(\sqrt{a})$ et soit v la valuation associée. Si $v(x_1^2 - b)$ est impaire, on a $v(x_1) = 0$; pour tout γ de k, on a aussi $v(x_1 + \gamma) = 0$ (sinon $v(\gamma^2 - b) > 0$ alors que b n'est pas un carré dans k puisque le polynôme f est supposé irréductible). Ainsi, on a également $v(L(x_1)) = 0$ donc $v(x_2^2 - aL(x_1)^2)$ est paire et ≤ 0. Comme $v(x_2^2 - aL(x_1)^2 - \beta(x_1^2 - b))$ doit être impaire (vu que $v(y^2 - az^2)$ est paire), on obtient une contradiction avec le fait que $v(x_1^2 - b)$ est impaire et > 0. Ainsi, les conditions 1 et 2 sont bien suffisantes pour avoir $\operatorname{Br} X / \operatorname{Br} k \neq 0$ d'où le résultat avec la proposition 3.2.1.

7. Méthodes de descente

Dans cette section, nous allons retrouver dans certains cas le théorème 1.5.1 en utilisant la méthode de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc. Cette méthode a déjà été employée avec succès pour plusieurs classes de variétés, comme les surfaces de Châtelet ([5]). Celles-ci servent d'ailleurs de constituants élémentaires pour la méthode de fibrations qui permet d'établir que l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les variétés que nous étudions dans cet article (cf rappels de 1.5). Il est de ce fait intéressant de voir comment cette méthode peut ici fonctionner dans certains cas, ce qui permet d'éviter le recours au théorème 1.5.2 (dont la preuve est relativement longue et délicate, cf [8]).

7.1. Le cas où le groupe de Brauer est non trivial

Théorème 7.1.1 *Soit $V/k : y^2 - az^2 = f(x_1, ..., x_m) g(x_1, ..., x_m)$ avec $m \geq 2$, f et g étant des polynômes irréductibles de degré 2 premiers entre eux. Si le diviseur de f (sur un modèle projectif lisse X de V) est une norme de l'extension K/k ($K = k(\sqrt{a})$), alors l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible pour X est la seule.*

Remarque : D'après la proposition 3.2.1, les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées si et seulement si $\operatorname{Br} X / \operatorname{Br} k \neq 0$.

Preuve : Si φ, ψ désignent les homogénéisés respectifs de f, g, nous pouvons supposer que l'intersection de leurs noyaux est réduite à 0 (sans quoi on se ramène à un m plus faible). Comme f/g est une norme, les diviseurs de f et g sont par hypothèse des normes de l'extension K/k. Soit U un ouvert de Zariski de V, inclus dans V_{lisse}, et sur lequel f et g sont inversibles. Soit $(P_v)_{v\in\Omega_k}$ une famille de points de $U(k_v)$. S'il n'y a pas obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible on a, d'après le lemme 3.1.1, en notant $P_v = (x_1^v, ..., x_m^v, y^v, z^v)$:

$$\sum_v j_v(f(P_v)) = \sum_v j_v(g(P_v)) = 0 \quad \text{dans } \mathbf{Z}/2$$

Or, on a la suite exacte, issue de la théorie du corps de classes global (cf [9], pages 194-195) :

$$0 \longrightarrow k^*/NK^* \longrightarrow \coprod_v k_v^*/NK_v^* \xrightarrow{\sum j_v} \mathbf{Z}/2 \longrightarrow 0$$

où j_v est le plongement donné par la théorie du corps de classes local et K_v est le complété de K pour une place au-dessus de v. Ainsi, il existe c_1 et c_2 dans k^* vérifiant $c_1 = f(x_1^v, ..., x_m^v)$ et $c_2 = g(x_1^v, ..., x_m^v)$ dans k_v^*/NK_v^*. Considérons alors la variété de descente Y suivante :

$$\begin{array}{lll} f(x_1, ..., x_m) & = c_1(u_1^2 - av_1^2) & \neq 0 \\ g(x_1, ..., x_m) & = c_2(u_2^2 - av_2^2) & \neq 0 \\ y^2 - az^2 & = f(x_1, ..., x_m)g(x_1, ..., x_m) & \neq 0 \end{array}$$

D'après le choix de c_1, c_2, il existe $(M_v)_{v\in\Omega_k}$, famille de points locaux de Y, dont la projection sur V est P_v (c'est-à-dire que $M_v = (x_1^v, ..., x_m^v, y^v, z^v, u_1^v, u_2^v, v_1^v, v_2^v)$). Il nous suffit donc pour conclure de montrer que Y (qui est lisse) satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible (on a donc effectué ici une descente d'un type particulièrement simple, comme dans [3]).
Effectuons le changement de variables $u_3 + \sqrt{a}v_3 = (y + \sqrt{a}z)/(u_1 + \sqrt{a}v_1)(u_2 + \sqrt{a}v_2)$, $u_3 - \sqrt{a}v_3 = (y - \sqrt{a}z)/(u_1 - \sqrt{a}v_1)(u_2 - \sqrt{a}v_2)$. On voit alors que Y est k-birationnelle à la variété Y_1 définie dans $\mathbf{A}_k^{m+6}$ par les équations :

$$\begin{array}{rll} u_3^2 - av_3^2 = & c_1c_2 & \neq 0 \\ f(x_1, ..., x_m) = & c_1(u_1^2 - av_1^2) & \neq 0 \\ g(x_1, ..., x_m) = & c_2(u_2^2 - av_2^2) & \neq 0 \end{array}$$

Soit Z la k-variété définie dans $\mathbf{P}_k^n$ par les équations :

$$\begin{array}{rl} \varphi(x_1, ..., x_m, t) = & c_1(u_1^2 - av_1^2) \\ \psi(x_1, ..., x_m, t) = & c_2(u_2^2 - av_2^2) \end{array}$$

C'est l'intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^r$ $(r = m+4)$ avec $r \geq 6$, qui n'est pas un cône (car l'intersection des noyaux de φ et ψ est réduite à 0), contenant une paire de droites gauches conjuguées, soit $(x_1 = ... = x_m = t = 0,\ u_1 = \varepsilon\sqrt{a}v_1,\ u_2 = \varepsilon\sqrt{a}v_2)$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. D'après le théorème 13.2 de [5], un modèle projectif lisse de Z vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible. Il en va donc de même de Y_1 (qui est k-birationnelle au produit de Z et d'une conique). D'où le résultat.

7.2. Le cas où le groupe de Brauer est trivial, avec $n = 4$

Le but de ce paragraphe est de retrouver que le principe de Hasse et l'approximation faible valent dans certains cas où le groupe de Brauer est trivial. Plus précisément, nous établissons, par une méthode de descente :

Proposition 7.2.1 *Soit X un modèle projectif et lisse de la k-variété d'équation :*

$$y^2 - az^2 = f(u,v)g(u,v)$$

avec f et g polynômes irréductibles de degré 2 premiers entre eux. On suppose que les coniques de $\mathbf{P}^2_k$ définies par f et g sont lisses et se coupent transversalement suivant deux paires de points conjugués. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible sur X est la seule.

Preuve :

Première étape : équations des variétés de descente. Nous utilisons la théorie générale de la descente qui est développée dans [6]. Plus précisément, nous allons calculer les équations des torseurs d'un certain type et utiliser ensuite le théorème 3.8.1 et le corollaire 3.8.8 de [6] qui nous disent que si ces torseurs vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible, alors l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible pour X est la seule. La variété considérée admet comme modèle projectif lisse X la k-variété construite dans la proposition 6.2.1 (nous gardons les notations de ce paragraphe), qui est fibrée au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$. Notons U_0 l'ouvert de $\mathbf{P}^1_k$ complémentaire de l'ensemble $\{0, \infty, \theta\} \cup \{e_P\}_{P \in S}$, où θ est tel que la fibre en θ n'est pas dégénérée (fibre générale) et les fibres en $0, \infty, e_P$ sont les fibres dégénérées (cf 6.3), et U l'image réciproque de U_0 par la projection $\pi : X \to \mathbf{P}^1_k$. Nous allons démontrer :

Lemme 7.2.2 *Soit λ la flèche $N \to \operatorname{Pic} \overline{X}$ définie dans la preuve du corollaire 6.3.2. Alors :*

- *X possède des torseurs de type λ.*

- *Un torseur de type λ est k-birationnel à une k-variété définie dans $\mathbf{A}_k^{10} \times \prod_{P\in S} R_{K'_P/k}\mathbf{A}^2$ par les équations :*

$$\begin{array}{ll} u = \theta_1(u_1^2 - av_1^2) & \\ v = \theta_2(u_2^2 - av_2^2) & \\ u - e_P v = \theta_P(u_P^2 - a_P v_P^2) & \qquad (P \in S) \\ v(y^2 - az^2) = u & \\ vf(x_1, x_2) = ug(x_1, x_2) & \end{array}$$

où $u, v, y, z, u_1, v_1, u_2, v_2, x_1, x_2$ sont des variables à valeurs dans k et u_P, v_P des variables à valeurs dans K'_P. La constante ($\theta_1, \theta_2, (\theta_P)$) est dans $k^* \times k^* \times \prod_{P\in S} K'_P$

Remarque : Pour tout P de S, l'équation $u - e_P v = \theta_P(u_P^2 - a_P v_P^2)$ correspond en fait à $[K'_P : k]$ équations sur k, que l'on peut obtenir, si $s = [K'_P : k]$ et $K'_P = k(\chi)$, en écrivant :

$$u_P = U_0 + U_1\chi + \ldots + U_{s-1}\chi^{s-1}$$

$$v_P = V_0 + V_1\chi + \ldots + V_{s-1}\chi^{s-1}$$

$$e_P = E_0 + E_1\chi + \ldots + E_{s-1}\chi^{s-1}$$

$$a_p = A_0 + A_1\chi + \ldots + A_{s-1}\chi^{s-1}$$

et en identifiant les coefficients de χ^j pour $0 \leq j \leq s-1$. Les nouvelles variables, qui elles sont à valeurs dans k sont alors les U_j et les V_j $(1 \leq j \leq s-1)$. Cet abus de notation se révèle toutefois pratique pour éviter d'alourdir encore les équations des torseurs.

Preuve du lemme 7.2.2 : Posons $Y = X - U$. La suite exacte de la proposition 6.3.1 s'écrit :

$$0 \to \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \to \mathrm{Div}_{\overline{Y}}\overline{X} \to \mathrm{Pic}\,\overline{X} \xrightarrow{\omega} \mathrm{Pic}\,\overline{U} \to 0$$

$(\mathrm{Pic}\,\overline{U} = \mathrm{Pic}\,\overline{X}_{\bar{k}(\eta)} = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z})$. Il lui correspond les deux suites exactes courtes :

$$\begin{array}{l} 0 \to N \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Pic}\,\overline{X} \xrightarrow{\omega} \mathrm{Pic}\,\overline{X}_{\bar{k}(\eta)} \to 0 \\ 0 \to T \to M \to N \to 0 \end{array}$$

(cf preuve du corollaire 6.3.2). Les G-modules T et M sont respectivement isomorphes à $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus(\oplus_{P\in S}\mathbf{Z}[G/G'_P])$ et à $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}[G/G']\oplus\mathbf{Z}[G/G']\oplus(\oplus_{P\in S}\mathbf{Z}[G/G''_P])$, sauf si $G''_P = G'_P$, auquel cas il faut remplacer $\mathbf{Z}[G/G''_P]$ par $\mathbf{Z}[G/G'_P]\oplus\mathbf{Z}[G/G'_P]$; rappelons aussi que la flèche $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus(\oplus_{P\in S}\mathbf{Z}[G/G'_P]) \to \mathbf{Z}$ induite par projection sur $\mathbf{Z}$ de la flèche $T \to M$ est l'opposée de la flèche d'augmentation.

Par dualité, on obtient (si K''_P est une extension non triviale de K'_P), en notant S, S', S_0, S_1 les k-tores dont les duaux sont respectivement $N, \operatorname{Pic}\overline{X}, M, T$, les suites exactes de k-tores :

$$1 \to \mathbf{G}^2_{m,k} \to S' \to S \to 1$$

$$1 \to S \to \mathbf{G}_{m,k} \times (R_{K/k}\mathbf{G}_m)^2 \times \prod_{P\in\mathcal{S}} R_{K''_P/k}\mathbf{G}_m \xrightarrow{v} \mathbf{G}^2_m \times \prod_{P\in\mathcal{S}} R_{K'_P/k}\mathbf{G}_m \to 1$$

où v associe à l'élément $(t, t_0, t_\infty, (t_p))$ de $\mathbf{G}_{m,k} \times (R_{K/k}\mathbf{G}_m)^2 \times \prod_{P\in\mathcal{S}} R_{K''_P/k}\mathbf{G}_m$ l'élément $(\, t^{-1}N_{K/k}(t_0), t^{-1}N_{K/k}(t_\infty), (t^{-1}N_{K''_P/K'_P}(t_P))\,)$ de $\mathbf{G}^2_m \times \prod_{P\in\mathcal{S}} R_{K'_P/k}\mathbf{G}_m$. (Si $K''_P = K'_P$, il faut remplacer $R_{K''_P/k}\mathbf{G}_m$ par $(R_{K'_P/k}\mathbf{G}_m)^2$ et l'image par v de $(t_P, t'_P) \in (R_{K'_P/k}\mathbf{G}_m)^2$ est $t_P t'_P$ au lieu de $N_{K''_P/K'_P}(t_P)$).

Comme le G-module $T = \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$ est de permutation, la proposition 2.2.8. de [6] nous dit qu'il existe des torseurs de type λ sur X (rappel : si $\mathcal{T}$ est un S-torseur sur X, le *type* de $\mathcal{T}$ est défini comme l'image de la classe de $\mathcal{T}$ par l'application canonique de $H^1(X, S)$ dans $\operatorname{Hom}_G(\widehat{S}, \operatorname{Pic}\overline{X})$) . Leur description locale est tout à fait analogue à celle que l'on obtient pour les fibrés en coniques (cf [6], 2.6). La restriction $\mathcal{T}_U$ à U d'un torseur de type λ est définie par le diagramme commutatif de produits fibrés :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{T}_U & \longrightarrow & \mathcal{W}_0 & \longrightarrow & S_0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow v \\
U & \xrightarrow{\pi} & U_0 & \xrightarrow{\phi} & S_1
\end{array}$$

avec $\phi : x \mapsto (\, \zeta_1 x, \zeta_2, (\zeta_P(x - e_P))\,)$; ici $(\, \zeta_1, \zeta_2, (\zeta_P)\,)$ est une constante de $k^* \times k^* \times \prod_{P\in\mathcal{S}} K'_P$ et U_0, qui ne contient pas le point à l'infini, est vu comme sous ensemble de $\mathbf{A}^1_k$. Ainsi, la variété $\mathcal{W}_0$ est défini dans $\mathbf{A}^2_k \times \mathbf{A}^2_k \times \mathbf{A}^2_k \times \prod_{P\in\mathcal{S}} R_{K'_P/k}\mathbf{A}^2$ par les équations :

$$\begin{array}{ll}
\zeta_1 x = t^{-1}(u_1^2 - a v_1^2) \neq 0 & \\
\zeta_2 = t^{-1}(u_2^2 - a v_2^2) \neq 0 & \\
\zeta_P(x - e_P) = t^{-1}(u_P^2 - a_P v_P^2) \neq 0 & \qquad (\forall P \in \mathcal{S}) \\
t \neq 0 &
\end{array}$$

(ceci si K''_P est une extension non triviale de K'_P; sinon il faut remplacer l'expression $(u_P^2 - a_P v_P^2)$ par $u_P v_P$, mais comme on peut prendre dans ce cas $a_P = 1$, la variété définie ci-dessus reste bien de toute façon k-birationnelle à $\mathcal{W}_0$).

En posant $u = xt, v = t$, on voit alors que $\mathcal{T}_U$ (qui est le produit fibré de $\mathcal{W}_0$ et de U au-dessus de U_0), et donc également $\mathcal{T}$, est k-birationnel à la k-variété de $\mathbf{A}^{10}_k \times \prod_{P\in\mathcal{S}} R_{K'_P/k}\mathbf{A}^2$ d'équation :

$$
\begin{array}{ll}
u = \theta_1(u_1^2 - av_1^2) & \\
v = \theta_2(u_2^2 - av_2^2) & \\
u - e_P v = \theta_P(u_P^2 - a_P v_P^2) & \qquad (\forall P \in S) \\
v(y^2 - az^2) = u & \\
vf(x_1, x_2) = ug(x_1, x_2) &
\end{array}
$$

où $u, v, y, z, u_1, v_1, u_2, v_2, x_1, x_2$ sont des variables à valeurs dans k et u_P, v_P des variables à valeurs dans K'_P. La constante $(\ \theta_1, \theta_2, (\theta_P)\ )$ est dans $k^* \times k^* \times \prod_{P \in S} K'_P$ (c'est l'inverse de $(\ \zeta_1, \zeta_2, (\zeta_P)\ )$). Ceci achève de prouver le lemme 7.2.2.

Deuxième étape : étude des différents cas Si nous excluons le cas où $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ n'est pas trivial (cas traité au paragraphe précédent) et le cas où X est k-rationnelle (ce qui correspond aux deux premiers cas étudiés en 6.6.), il reste, pour démontrer le théorème 7.2.1, à traiter les cas suivants (on utilise toujours les notations de 4.3.):

- Supposons R_1, R_2 conjugués dans l'extension quadratique $k(\sqrt{b})$ et R_3, R_4 conjugués dans la même extension quadratique. On peut supposer qu'aucune des droites (R_iR_j) $(1 \leq i \leq j < 4)$ n'est la droite à l'infini du plan projectif. Alors, la droite (R_2R_4) a pour équation affine $L_1(x_1, x_2) = 0$ et la droite (R_2R_3) $L_2(x_1, x_2) = 0$, avec L_1, L_2 formes affines définies sur $k(\sqrt{b})$. Comme les droites (R_1R_3) et (R_1R_4) sont leurs conjuguées respectives dans $k(\sqrt{b})$, il est facile de voir que la condition que les deux coniques définies par f et g passent par les R_i s'exprime par :

$$f(x_1, x_2) = c_1 N_{k(\sqrt{b})/k}(L_1(x_1, x_2)) + c_2 N_{k(\sqrt{b})/k}(L_2(x_1, x_2))$$

$$g(x_1, x_2) = c_3 N_{k(\sqrt{b})/k}(L_1(x_1, x_2)) + c_4 N_{k(\sqrt{b})/k}(L_2(x_1, x_2))$$

  avec les c_i constantes non nulles de k. On a $\alpha_2 = c_1/c_3$ et $\alpha_3 = c_2/c_4$; les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont dans k. D'après le lemme 7.2.2, un torseur de type λ est k-birationnel à la k-variété définie dans $\mathbf{A}_k^{16}$ par les équations :

$$
\begin{array}{l}
u = \theta_1(u_1^2 - av_1^2) \\
v = \theta_2(u_2^2 - av_2^2) \\
v(y^2 - az^2) = u \\
vf(x_1, x_2) = ug(x_1, x_2) \\
u - \alpha_1 v = \theta_3(u_3 v_3) \\
u - \alpha_2 v = \theta_4(u_4^2 - bv_4^2) \\
u - \alpha_3 v = \theta_5(u_5^2 - bv_5^2)
\end{array}
$$

(avec toutes les variables à valeurs dans k; les notations sont toujours celles de 4.3.). Une transformation k-birationnelle évidente ramène ceci à :

$$\begin{array}{l}
u = \theta_1(u_1^2 - av_1^2) \\
v = \theta_2(u_2^2 - av_2^2) \\
Y^2 - aZ^2 = \theta_1/\theta_2 \\
c_3(u - \alpha_2 v)N_{k(\sqrt{b})/k}(L_1(x_1, x_2)) = -c_4(u - \alpha_3 v)N_{k(\sqrt{b})/k}(L_2(x_1, x_2)) \\
u - \alpha_1 v = \theta_3(u_3 v_3) \\
u - \alpha_2 v = \theta_4(u_4^2 - bv_4^2) \\
u - \alpha_3 v = \theta_5(u_5^2 - bv_5^2)
\end{array}$$

(Y, Z étant de nouvelles variables à valeurs dans k, avec $Y + \sqrt{a}Z = (y + \sqrt{a}z)(u_2 + \sqrt{a}v_2)/(u_1 + \sqrt{a}v_1)$). Ceci est encore k-birationnel à :

$$\begin{array}{l}
u = \theta_1(u_1^2 - av_1^2) \\
v = \theta_2(u_2^2 - av_2^2) \\
Y^2 - aZ^2 = \theta_1/\theta_2 \\
N_{k(\sqrt{b})/k)}[(u_4 + \sqrt{b}v_4)L_1(x_1, x_2)/(u_5 + \sqrt{b}v_5)L_2(x_1, x_2)] = -c_4\theta_5/c_3\theta_4 \\
u - \alpha_1 v = \theta_3(u_3 v_3) \\
u - \alpha_2 v = \theta_4(u_4^2 - bv_4^2) \\
u - \alpha_3 v = \theta_5(u_5^2 - bv_5^2)
\end{array}$$

Et en posant $X_1 + \sqrt{b}X_2 = [(u_4 + \sqrt{b}v_4)L_1(x_1, x_2)/(u_5 + \sqrt{b}v_5)L_2(x_1, x_2)]$, on voit que ceci est encore k- birationnel à :

$$\begin{array}{l}
u = \theta_1(u_1^2 - av_1^2) \\
v = \theta_2(u_2^2 - av_2^2) \\
Y^2 - aZ^2 = \theta_1/\theta_2 \\
N_{k(\sqrt{b})/k)}(X_1 + \sqrt{b}X_2) = -c_4\theta_5/c_3\theta_4 \\
v_3 = (u - \alpha_1 v)/\theta_3 u_3 \\
u - \alpha_2 v = \theta_4(u_4^2 - bv_4^2) \\
u - \alpha_3 v = \theta_5(u_5^2 - bv_5^2)
\end{array}$$

En effet, si on note $L_1(x_1, x_2) = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1$ et $L_2(x_1, x_2) = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2$ (les a_i, b_i, c_i sont des constantes de $k(\sqrt{b})$), les constantes c_1 et c_2 ne peuvent être simultanément nulles puisque le point d'intersection des droites affines définies par L_1 et L_2 n'est pas k-rationnel. Pour vérifier que la transformation effectuée est bien birationnelle, il suffit alors de montrer que le déterminant du système en (x_1, x_2) associé n'est pas nul. Ceci est équivalent à dire que :

$$[(u_5+\sqrt{b}v_5)(X_1+\sqrt{b}X_2)a_2-(u_4+\sqrt{b}v_4)a_1]/[(u_5+\sqrt{b}v_5)(X_1+\sqrt{b}X_2)b_2-(u_4+\sqrt{b}v_4)b_1]$$

n'est pas défini sur k. Mais ceci résulte de ce que les droites affines définies par L_1 et L_2 sont sécantes en R_2, donc $a_2 b_1 - a_1 b_2 \neq 0$.

Alors, la nouvelle variété obtenue est encore k-birationnelle au produit de deux coniques, d'une droite, et de la k-variété affine d'équation :

$$\begin{array}{l} \theta_1(u_1^2 - av_1^2) - \alpha_2\theta_2(u_2^2 - av_2^2) = \theta_4(u_4^2 - bv_4^2) \\ \theta_1(u_1^2 - av_1^2) - \alpha_3\theta_2(u_2^2 - av_2^2) = \theta_5(u_5^2 - bv_5^2) \end{array}$$

Cette dernière vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible, toujours d'après le théorème 13.2 de [5] car c'est un cône dont la variété projective associée est l'intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^7$ contenant la paire de droites conjuguées $u_4 = v_4 = u_5 = v_5 = 0, u_1 = \varepsilon\sqrt{a}v_1, u_2 = \varepsilon\sqrt{a}v_2, \varepsilon \in \{-1, 1\}$. Maintenant, les résultats de [6] (théorème 3.8.1. et corollaire 3.8.8.) nous disent que comme les torseurs de type λ satisfont le principe de Hasse et l'approximation faible, l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible pour la variété initiale X est la seule; en particulier, dans ce cas, la variété X vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible puisque $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k = 0$ (théorème 6.1.1).

- Supposons R_1, R_2 conjugués dans l'extension quadratique $k(\sqrt{b})$ et R_3, R_4 conjugués dans l'extension quadratique $k(\sqrt{c})$ avec $k(\sqrt{b}) \neq k(\sqrt{c})$. Notons $\mathcal{K} = k(\sqrt{bc})$ et $\mathcal{F} = k(\sqrt{b}, \sqrt{c})$. On suppose encore que les droites (R_2R_4) et (R_2R_3) sont respectivement définies par les $\mathcal{F}$-formes affines $L_1(x_1, x_2)$ et $L_2(x_1, x_2)$. Les droites (R_1R_3) et (R_1R_4) sont leurs conjuguées respectives dans $\mathcal{K}$. Ainsi :

$$f(x_1, x_2) = c_1 N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(L_1(x_1, x_2)) + c_2 N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(L_2(x_1, x_2))$$

$$g(x_1, x_2) = c_3 N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(L_1(x_1, x_2)) + c_4 N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(L_2(x_1, x_2))$$

(où c_1, c_2, c_3, c_4 sont non nuls dans $\mathcal{K}$). On a $\alpha_2 = c_1/c_3$ et $\alpha_3 = c_2/c_4$. La constante α_1 est dans k, tandis que α_2 et α_3 sont conjugués dans $\mathcal{K}$. D'après le lemme 7.2.2, un torseur de type λ est k-birationnel à la k-variété définie dans $\mathbf{A}_k^{12} \times R_{\mathcal{K}/k}\mathbf{A}^2$ par les équations :

$$\begin{array}{l} u = \theta_1(u_1^2 - av_1^2) \\ v = \theta_2(u_2^2 - av_2^2) \\ v(y^2 - az^2) = u \\ vf(x_1, x_2) = ug(x_1, x_2) \\ u - \alpha_1 v = \theta_3(u_3 v_3) \\ u - \alpha_2 v = \theta_4 N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(u_4 + \sqrt{b}v_4) \end{array}$$

(Rappelons que α_1 est dans k, tandis que les constantes $\alpha_2, \theta_3, \theta_4$ ainsi que les variables u_4, v_4 sont dans $\mathcal{K}$). Cette variété est encore k-birationnelle à :

$$\begin{aligned}
&u = \theta_1(u_1^2 - av_1^2)\\
&v = \theta_2(u_2^2 - av_2^2)\\
&Y^2 - aZ^2 = \theta_1/\theta_2\\
&vf(x_1, x_2) = ug(x_1, x_2)\\
&u - \alpha_1 v = \theta_3(u_3 v_3)\\
&u - \alpha_2 v = \theta_4 N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(u_4 + \sqrt{b}v_4)
\end{aligned}$$

Vu les expressions de f et g, les équations précédentes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&u = \theta_1(u_1^2 - av_1^2)\\
&v = \theta_2(u_2^2 - av_2^2)\\
&Y^2 - aZ^2 = \theta_1/\theta_2\\
&c_3(u - \alpha_2 v)N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(L_1(x_1, x_2)) = -c_4(u - \alpha_3 v)N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(L_2(x_1, x_2))\\
&u - \alpha_1 v = \theta_3(u_3 v_3)\\
&u - \alpha_2 v = \theta_4 N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(u_4 + \sqrt{b}v_4)
\end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned}
&u = \theta_1(u_1^2 - av_1^2)\\
&v = \theta_2(u_2^2 - av_2^2)\\
&Y^2 - aZ^2 = \theta_1/\theta_2\\
&c_3\theta_4 N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(u_4 + \sqrt{b}v_4)N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(L_1(x_1, x_2)) = -c_4\theta_5 N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(u_5 + \sqrt{b}v_5)N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(L_2(x_1, x_2))\\
&u - \alpha_1 v = \theta_3(u_3 v_3)\\
&u - \alpha_2 v = \theta_4 N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(u_4 + \sqrt{b}v_4)
\end{aligned}$$

(u_5, v_5 sont les variables conjuguées dans $\mathcal{K}$ de u_4, v_4, tandis que θ_5 est la constante conjuguée dans $\mathcal{K}$ de θ_4). Et ceci est encore k-birationnel (en "simplifiant" les normes de la quatrième équation) à :

$$\begin{aligned}
&u = \theta_1(u_1^2 - av_1^2)\\
&v = \theta_2(u_2^2 - av_2^2)\\
&Y^2 - aZ^2 = \theta_1/\theta_2\\
&N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(X_1 + \sqrt{b}X_2) = -c_3\theta_4/c_4\theta_5\\
&u - \alpha_1 v = \theta_3(u_3 v_3)\\
&u - \alpha_2 v = \theta_4 N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(u_4 + \sqrt{b}v_4)
\end{aligned}$$

(où X_1, X_2 sont de nouvelles variables à valeurs dans $\mathcal{K}$). Ceci est k-birationnel au produit d'une conique, d'une droite, et des deux k-variétés V_1 et V_2 d'équations affines respectives :

$$V_1 : N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(X_1 + \sqrt{b}X_2) = -c_3\theta_4/c_4\theta_5$$

$$V_2 : \theta_1(u_1^2 - av_1^2) - \alpha_2\theta_2(u_2^2 - av_2^2) = \theta_4 N_{\mathcal{F}/\mathcal{K}}(u_4 + \sqrt{b}v_4)$$

(Les variables X_1, X_2, u_4, v_4 sont à valeurs dans $\mathcal{K}$, et les variables u_1, v_1, u_2, v_2 à valeurs dans k).

En posant $X_1 = x_1 + \sqrt{bc}x_1', X_2 = x_2 + \sqrt{bc}x_2'$ (les nouvelles variables x_1, x_1', x_2, x_2' sont à valeurs dans k), on voit que V_1 est k-birationnelle à la k-variété V_1' de $\mathbf{P}_k^4$ d'équation :

$$\begin{aligned} &x_1^2 - bx_2^2 + bc(x_1'^2 - bx_2'^2) = c_5 t^2 \\ &x_1x_1' - bx_2x_2' = c_6 t^2 \end{aligned}$$

(où c_5, c_6 sont des constantes de k : on a $-c_3\theta_4/c_4\theta_5 = c_5 + \sqrt{bc}c_6$).

Avec la proposition 5.2 de [5], on voit que V_1' satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible puisque cette intersection de deux quadriques contient une paire de droites conjuguées ($t = 0, x_1' = \varepsilon\sqrt{b}x_1', x_2' = \varepsilon\sqrt{b}x_2'$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$).

D'autre part, la variété V_2 est un cône dont la k variété projective associée est une intersection de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^7$ contenant la paire de droites gauches conjuguées : $u_4 = v_4 = 0, u_1 = \varepsilon\sqrt{a}v_1, u_2 = \varepsilon\sqrt{a}v_2, \varepsilon \in \{-1, 1\}$. Donc V_2 vérifie aussi le principe de Hasse et l'approximation faible. Ainsi, il en va de même des torseurs de type λ et on conclut avec les résultats de [6].

Remarque : A priori, la méthode que nous avons employée pour établir la proposition 7.2.1 échoue quand les deux coniques définies par f et g se coupent suivant quatre points conjugués (et non plus suivant deux paires de points conjugués) : par exemple, quand les quatre points sont définis sur une extension $L = k(\sqrt{b}, \sqrt{c})$ de k avec $\mathrm{Gal}(L/k) = (\mathbf{Z}/2)^2$ (c'est dans ce cas que les calculs sont les plus simples), on se ramène, pour prouver que les torseurs de type λ satisfont le principe de Hasse et l'approximaton faible, à établir ces propriétés pour la k-variété définie dans $\mathbf{A}_k^{10}$ par les équations :

$$\begin{aligned} \theta_1(u_1^2 - av_1^2) - \alpha_1\theta_2(u_2^2 - av_2^2) &= \theta_3(u_4^2 - bv_4^2) \\ \theta_1(u_1^2 - av_1^2) - \alpha_2\theta_2(u_2^2 - av_2^2) &= \theta_4(u_5^2 - cv_5^2) \\ \theta_1(u_1^2 - av_1^2) - \alpha_3\theta_2(u_2^2 - av_2^2) &= \theta_5(u_6^2 - bcv_6^2) \end{aligned}$$

(les constantes θ_i sont dans k^*, les α_i sont tous dans k mais ici, aucune des trois extensions K_i'' n'est triviale, ces extensions sont $k(\sqrt{b}), k(\sqrt{c}), k(\sqrt{bc})$). On tombe donc sur une intersection de trois quadriques (et non plus deux) que nous ne savons a priori pas traiter. C'est ce qui justifie le recours aux méthodes de fibration basées sur le théorème 1.5.2 pour couvrir tous les cas.

8. Contre-exemples au principe de Hasse et à l'approximation faible

Nous donnons dans cette section des contre-exemples numériques au principe de Hasse et à l'approximation faible . On pourra consulter le paragraphe 5 de [8] pour une approche différente, consistant à prouver l'existence de familles (non explicites) de contre-exemples à l'approximation faible.

8.1. Un contre-exemple à l'approximation faible dans le cas $n = 4$

Proposition 8.1.1 *Soit V la $\mathbf{Q}$-hypersurface de $\mathbf{A}^4_{\mathbf{Q}}$ d'équation :*

$$y^2 + z^2 = ((x_1 - 2)^2 + x_2^2 - 3)((x_1 + 2)^2 + x_2^2 - 3)$$

Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors X ne vérifie pas l'approximation faible (il y a obstruction de Manin).

Notons que d'après le théorème 6.1.1, on est bien dans le cas où $\mathrm{Br}\, X$ n'est pas trivial, mais égal à $\mathbf{Z}/2$ car si nous posons $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 - 3$ et $g(x_1, x_2) = (x_1 + 2)^2 + x_2^2 - 3$, les coniques projectives associées à f et g ont quatre points d'intersection formant deux paires de points conjugués dans $K = \mathbf{Q}(i)$. On notera U l'ouvert de Zariski de X défini par $y^2 + z^2 = f(x_1, x_2)g(x_1, x_2) \neq 0$. Cet ouvert est lisse. Pour tout p, on fixe une place de K au-dessus de p et on note K_p la complétion de K associée.

Nous utiliserons deux lemmes :

Lemme 8.1.2 *Soit $M_p \in U(\mathbf{Q}_p)$ un point local avec p premier et $p \notin \{2, \infty\}$. Alors $f(M_p)$ est trivial dans $\mathbf{Q}_p^*/NK_p^*$.*

Preuve du lemme 8.1.2 : On peut se limiter à p inerte (sinon $\mathbf{Q}_p^*/NK_p^*$ est trivial) c'est-à-dire à p tel que -1 n'est pas un carré dans $\mathbf{Q}_p^*$, ou encore à $p \equiv -1\,[4]$. Alors, rappelons (cf [12]) que si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$, alors $\alpha \in NK_p^* \iff v_p(\alpha)$ est paire. Supposons donc $v_p(f(x_1, x_2))$ impaire avec $(y, z, x_1, x_2) \in U(\mathbf{Q}_p)$. Alors $v_p(f(x_1, x_2)) \geq 0$ car sinon $v_p(f(x_1, x_2)) = v_p(f(x_1, x_2) + 3)$ $(v_p(3) \geq 0)$ or $f(x_1, x_2) + 3 = (x_1 - 2)^2 + x_2^2$ est une norme de l'extension $K_p/\mathbf{Q}_p$ donc sa valuation p-adique est paire. Ainsi, $v_p(f(x_1, x_2)) > 0$ et comme $v_p(f(x_1, x_2))$ et $v_p(g(x_1, x_2))$ ont même parité ($f(x_1, x_2)g(x_1, x_2) = y^2 + z^2$ est une norme de $K_p/\mathbf{Q}_p$), le même raisonnement que pour f prouve que $v_p(g(x_1, x_2)) > 0$. Donc, on a $v_p(f(x_1, x_2) - g(x_1, x_2)) > 0$, c'est-à-dire que $v_p(8x_1) > 0$ soit $v_p(x_1) > 0$. Mais alors, on a $v_p(f(x_1, x_2)) = v_p(x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 + 1)$ et comme $v_p(x_2^2 + 1)$ est paire $v_p(x_2^2 + 1) \geq v_p(x_1^2 - 4x_1)$ (sinon $v_p(f(x_1, x_2)) = v_p(x_2^2 + 1)$). Alors, comme

$v_p(x_1) > 0$, on a $v_p(x_1^2 - 4x_1) > 0$ d'où $v_p(x_2^2 + 1) > 0$ et en particulier $x_2 \in \mathbb{Z}_p$. Mais alors, $x_2^2 + 1 \equiv 0\,[p]$ ce qui est exclu car $p \equiv -1\,[4]$. Ainsi, $v_p(f(x_1, x_2))$ est paire et on a le résultat.

Lemme 8.1.3 *L'image de $U(\mathbb{Q}_2)$ par l'application $\varphi_2 : U(\mathbb{Q}_2) \to \mathbb{Q}_2^*/NK_2^*$ qui à un point local (y, z, x_1, x_2) associe la classe de $f(x_1, x_2)$ est égale à $\mathbb{Q}_2^*/NK_2^*$ tout entier.*

Preuve du lemme 8.1.3 : L'extension $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ est ramifiée en 2. Si $\alpha \in \mathbb{Q}_2^*$, on a $\alpha \in NK_2^* \iff u \equiv 1\,[4]$, où $\alpha = 2^n u, u \in \mathbb{Z}_2^*, n \in \mathbb{Z}$ (cf [12]). Le cardinal de $\mathbb{Q}_2^*/NK_2^*$ est 2.
Considérons le point local de $U(\mathbb{Q}_2)$ défini par $y = 0, z = 2, x_1 = 0, x_2 = 1$. Alors, on a $f(x_1, x_2) = 2 \in NK_2^*$ donc φ_2 envoie ce point sur l'élément trivial de $\mathbb{Q}_2^*/NK_2^*$.
Prenons maintenant $x_1 = 3, x_2 = 0$ dans $\mathbb{Q}_2$. Alors $f(x_1, x_2) = -2 \notin NK_2^*$ (car $-1 \not\equiv 1\,[4]$) et $g(x_1, x_2) = 22 \notin NK_2^*$ (car $11 \not\equiv 1\,[4]$). Par contre, on a $f(x_1, x_2)g(x_1, x_2) \in NK_2^*$ (car $-44 = 4.(-11), -11 \equiv 1\,[4]$) donc il existe y, z dans $\mathbb{Q}_2^*$ avec $y^2 + z^2 = f(x_1, x_2)g(x_1, x_2)$ et on a bien trouvé un point local envoyé par φ_2 sur l'élément non trivial de $\mathbb{Q}_2^*/NK_2^*$.

Preuve de la proposition 8.1.1 : On a $f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 1 > 0$ et $f(x_1, x_2)g(x_1, x_2) = y^2 + z^2 \geq 0$ donc l'image de $\varphi_\infty : U(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*/N\mathbb{C}^*$ est triviale.
On utilise alors la suite exacte issue du corps de classes global (voir la section précédente) avec $k = \mathbb{Q}$; ici $\mathbb{Q}_p^*/NK_p^*$ est isomorphe à 0 ou à $\mathbb{Z}/2$; dans ce dernier cas, la flèche j_p envoie le générateur de $\mathbb{Q}_p^*/NK_p^*$ sur celui de $\mathbb{Z}/2$.
Pour un point global M de $X/\mathbb{Q}$, on a donc $\sum_p j_p(\varphi_p(M)) = 0$ dans $\mathbb{Z}/2$ (notons que pour toute famille de points locaux (M_p), on sait que $\sum_p j_p(\varphi_p(M_p))$ a bien un sens puisque l'on a vu que $(\varphi_p(M_p))$ est trivial pour presque tout p). D'après les lemmes 8.1.2 et 8.1.3, si M est un point global, alors $\varphi_2(M)$ est l'élément trivial de $\mathbb{Q}_2^*/NK_2^*$. Mais l'on a vu qu'il existait un point local M_2 de $U(\mathbb{Q}_2)$ pour lequel $\varphi_2(M_2)$ n'est pas trivial dans $\mathbb{Q}_2^*/NK_2^*$. L'application φ_2 est continue de $U(\mathbb{Q}_2)$ (muni de la topologie 2-adique) dans l'ensemble fini $\mathbb{Q}_2^*/NK_2^*$ muni de sa topologie discrète. Comme pour tout point global $M \in X(\mathbb{Q})$, on a $\varphi_2(M) \neq \varphi_2(M_2)$ dans $\mathbb{Q}_2^*/NK_2^*$, on en déduit que M_2 n'est pas dans l'adhérence de $X(\mathbb{Q})$ et de ce fait X ne peut vérifier l'approximation faible (notons que $U(k) \neq \emptyset$: il suffit de prendre $y = 0, z = 1, x_1 = 0, x_2 = 0$).

Remarques :

- Le fait essentiel qui permet de mener à bien un calcul comme le précédent est l'existence d'un ensemble fini S de places en dehors duquel pour tout point local $M_p, p \notin S$, l'élément $f(M_p)$ est une norme locale. Dans ce cas, on peut bien définir, pour toute famille (M_p) de points locaux, la somme $\sum_p j_p(\varphi_p(M_p))$ (mêmes notations que plus haut) dans $\mathbf{Z}/2$. Si son image contient l'élément non trivial de $\mathbf{Z}/2$, il y a obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible. Si l'image ne contient pas l'élément trivial de $\mathbf{Z}/2$, il y a même obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse.

- Cette condition d'existence de l'ensemble S comme dans la remarque précédente est en particulier réalisée quand le diviseur de f est une norme (cf [3], proposition 4.3.). Du reste, la pratique montre que lorsque l'on a pu établir l'existence d'un tel ensemble S, il est souvent possible de montrer directement que le diviseur de f est une norme, les calculs arithmétiques et algébriques étant formellement les mêmes. C'est d'ailleurs le cas dans notre exemple : si A est un anneau de valuation discrète contenant k, avec $\operatorname{Frac} A = k(X)$, tel que $\widetilde{k_A} \otimes_k K$ reste un corps ($\widetilde{k_A}$ désigne le corps résiduel de A), alors $v_A(x_2^2+1) \leq 0$ (sinon $\widetilde{k_A} \otimes_k K$ n'est plus un corps car $x_2^2+1 = (x_2+i)(x_2-i)$ et l'idéal premier de A se coupe alors en deux au niveau K). On voit alors comme dans la preuve du lemme 8.1.2 que $v_A(f)$ impaire est impossible (il suffit de changer v_p en v_A).

  En réalité, on peut montrer que ce phénomène est général et c'est d'ailleurs une étape importante dans la preuve du théorème 1.5.2 (cf [8], théorème 2.1.1 et corollaire 2.7.1).

- L'hypersurface de la proposition 8.1.1 est k-birationnelle (avec $k = \mathbf{Q}$) à l'hypersurface cubique de $\mathbf{P}_k^4$ dont l'équation homogène est :

$$t(x_1^2+x_2^2)+2x_1(x_3^2+x_4^2+t^2)+16x_3^2t=0$$

  Cela se voit immédiatement à partir de la preuve de la proposition 1.2.1 (cf [5]).

8.2. Un contre-exemple à l'approximation faible dans le cas $n = 5$

Proposition 8.2.1 *Soit V la $\mathbf{Q}$-hypersurface de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^5$ d'équation :*

$$y^2+z^2=((x_1^2+1)+(x_2^2+x_3^2+3))(x_2^2+x_3^2+3)$$

Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors X ne vérifie pas l'approximation faible (il y a obstruction de Manin).

Preuve : La preuve est similaire à la précédente : les deux lemmes du contre-exemple précédent valent encore (pour le premier, on utilise encore le fait que la valuation de x_1^2+1 est paire et ≤ 0, et celle de $x_2^2+x_3^2+3$ paire ou ≥ 0 et pour le deuxième, on considère le point 2-adique $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 0$) et on conclut de la même manière. Notons que V a des $\mathbf{Q}$-points lisses (par exemple $y = 2, z = 4, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$).

8.3. Un contre-exemple au principe de Hasse dans le cas $n = 5$

Proposition 8.3.1 *Soit V la $\mathbf{Q}$-hypersurface de $\mathbf{A}^5_{\mathbf{Q}}$ d'équation :*

$$y^2 + z^2 = (28(x_1^2 + 1) + 79(x_2^2 + x_3^2))(95(x_1^2 + 1) + 268(x_2^2 + x_3^2))$$

Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors X ne vérifie pas le principe de Hasse (il y a obstruction de Manin).

Preuve : Posons $\alpha = 28, \beta = 79, \gamma = 95, \delta = 268$. On a $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ et $\alpha = 4(4k-1), \beta = 4l - 1, \gamma = 4k' - 1, \delta = 4(4l' - 1)$ avec $(k, l, k', l') \in \mathbf{N}$ (ces deux propriétés sont en fait essentiellement les seules dont on va se servir dans la preuve). On notera encore $f(x_1, x_2, x_3) = (28(x_1^2 + 1) + 79(x_2^2 + x_3^2))$ et $g(x_1, x_2, x_3) = (95(x_1^2 + 1) + 268(x_2^2 + x_3^2))$; on désigne par U l'ouvert de X défini par $y^2 + z^2 = f(x_1, x_2, x_3)g(x_1, x_2, x_3) \neq 0$. Nous utiliserons deux lemmes analogues à ceux des contre-exemples précédents.

Lemme 8.3.2 *Soit $M_p \in U(\mathbf{Q}_p)$ un point local avec p premier et $p \notin \{2, \infty\}$. Alors $f(M_p)$ est trivial dans $\mathbf{Q}_p^*/NK_p^*$, où $K_p = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(i)$.*

Preuve du lemme 8.3.2 : Soit encore p premier inerte dans l'extension $\mathbf{Q}(i)/\mathbf{Q}$. Supposons $v_p(f(x_1, x_2, x_3)) = 2r + 1$ avec $(y, z, x_1, x_2, x_3) \in U(\mathbf{Q}_p)$. Alors, on a $v_p(g(x_1, x_2, x_3)) = 2s+1$ avec par exemple $s \geq r$. De $v_p(\alpha g(x_1, x_2, x_3) - \gamma f(x_1, x_2, x_3)) \geq 2r+1$, on tire $v_p(x_2^2 + x_3^2) \geq 2r+1$ et de même, de $v_p(\beta g(x_1, x_2, x_3) - \delta f(x_1, x_2, x_3)) \geq 2r + 1$, on tire $v_p(x_1^2 + 1) \geq 2r + 1$. Comme la valuation p-adique d'une norme est paire, on en déduit $v_p(x_1^2 + 1) \geq 2r + 2$ et $v_p(x_2^2 + x_3^2) \geq 2r + 2$ ce qui contredit $v_p(f(x_1, x_2, x_3)) = 2r + 1$.

Lemme 8.3.3 *Soit $M_2 \in U(\mathbf{Q}_2)$ un point local 2-adique. Alors $f(M_2)$ est non trivial dans $\mathbf{Q}_2^*/NK_2^*$.*

Preuve du lemme 8.3.3 : Posons $M_2 = (y, z, x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Q}_2^5$. Comme $(x_1^2 + 1)$ et $(x_2^2 + x_3^2)$ sont des normes, on peut écrire $(x_1^2 + 1) = 2^u(4r + 1)$ et $(x_2^2 + x_3^2) = 2^v(4s + 1)$ avec u, v dans $\mathbf{Z}$ et r, s dans $\mathbf{Z}_2$. Si $u \geq v$, alors $\alpha(x_1^2 + 1) + \beta(x_2^2 + x_3^2) = 2^v(\alpha 2^{(u-v)}(4r + 1) + \beta(4s + 1))$. Comme $\alpha = 4(4k - 1)$ et $\beta = 4l - 1$, l'élément $(\alpha 2^{(u-v)}(4r + 1) + \beta(4s + 1))$ de $\mathbf{Z}_2$ est de la forme $4t - 1$ avec $t \in \mathbf{Z}_2$ donc $f(x_1, x_2, x_3)$ n'est pas une norme 2-adique. De même, si $v \geq u$, c'est $g(x_1, x_2, x_3)$ qui ne peut être une norme 2-adique, d'où le résultat.

Preuve de la proposition 8.3.1 : Pour tout point réel M_∞, on a trivialement $f(M_\infty)$ positif. D'après la première remarque à la fin de la preuve de la proposition 8.1.1 et les deux lemmes précédents, il suffit de prouver que U a des points dans tous les complétés de $\mathbf{Q}$ pour conclure. Or en faisant $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = 1$, on obtient un point 2-adique puisque $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = 107.3.11^2$ est une norme 2-adique. De même, en faisant $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = 1$, on obtient un point p-adique pour $p \notin \{3, 11, 107\}$ et en faisant $x_1 = 1/p, x_2 = 0, x_3 = 1$, on obtient un point p-adique pour $p \in \{3, 11, 107\}$. Ceci achève la preuve.

8.4. Un contre-exemple au principe de Hasse dans le cas $n = 4$

Proposition 8.4.1 *Soit V la $\mathbf{Q}$-hypersurface de $\mathbf{A}^4_{\mathbf{Q}}$ d'équation :*

$$y^2 + z^2 = (28(x_1^2 + 1) + 79(x_2^2 + 1))(95(x_1^2 + 1) + 268(x_2^2 + 1))$$

Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors X ne vérifie pas le principe de Hasse (il y a obstruction de Manin).

Preuve : La variété V est simplement obtenue en prenant la section par l'hyperplan $x_3 = 1$ de la variété de la proposition 8.3.1. De ce fait, il est déjà clair que X n'a pas de $\mathbf{Q}$-points. D'autre part, la variété V a des points lisses dans tous les complétés de $\mathbf{Q}$ (en effet, ceci a en fait déjà été vu à la fin de la preuve de la proposition 8.3.1).

Appendice : un autre exemple de descente

Dans cet appendice, nous donnons, sans rentrer dans les détails, les étapes d'une descente dans le cas $n = 5$. Combiné à des méthodes de fibration ad hoc (n'utilisant pas le théorème 1.5.2 mais seulement le cas particulier où les fibres sont des quadriques, c'est-à-dire le théorème 3.10 de [5]), ceci permettrait de retrouver le théorème 1.5.1 dans tous les cas où n vaut 5.

Proposition *Soit X un modèle projectif lisse de l'hypersurface V définie dans $\mathbf{A}^5_k$ par l'équation :*

$$y^2 - az^2 = f(x_1, x_2, x_3)g(x_1, x_2, x_3)$$

avec f et g irréductibles sur $K = k(\sqrt{a})$, de degré 2, premiers entre eux. On suppose que l'intersection des noyaux des formes quadratiques φ, ψ associées à f, g est réduite à 0, et qu'il existe une et une seule forme $Q = \lambda\varphi + \mu\psi$ de rang 2 avec λ, μ dans k^*. On suppose enfin que les restrictions de φ, ψ au noyau N de Q sont du type (T). *Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible pour X est la seule.*

Preuve (esquisse) : On se ramène au cas où $f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1^2 - a) + q(x_2, x_3)$ et $g(x_1, x_2, x_3) = \gamma f(x_1, x_2, x_3) + \beta(x_3^2 - bx_2^2)$ avec α, β dans k^* et $q(x_2, x_3)$ forme quadratique non nulle. On suppose aussi $k(\sqrt{b}) \neq k(\sqrt{a})$ (sinon $\operatorname{Br} X$ est non trivial et on a vu au théorème 7.1.1 qu'une descente plus simple fonctionnait dans ce cas). On utilise alors que V est k-birationnelle au produit fibré (en λ) au dessus de $\mathbf{P}^1_k$ de la conique C d'équation $y^2 - az^2 = \lambda$ et de la quadrique $\mathcal{Q}$ d'équation $g(x_1, x_2, x_3) = \lambda f(x_1, x_2, x_3)$. On utilise alors un modèle projectif lisse W de $\mathcal{Q}$ construit comme dans [13] pour construire (comme dans le début de la preuve du théorème 6.1.1) un modéle projectif lisse X de V. Utilisant à nouveau une résolution de $\operatorname{Pic} \overline{X}$ par des G-modules de permutation (résolution qui se déduit aisément du calcul analogue fait dans [13] pour W) et les résultats de [6], on obtient des équations explicites pour les torseurs d'un certain type (qui est admissible); on trouve que ces torseurs sont définis dans $\mathbf{A}^{15}$ par :

$$\begin{aligned}
&u = \theta_1(U_1^2 - aV_1^2)\\
&v = \theta_2(U_2^2 - aV_2^2)\\
&u - \gamma v = \theta_3(u_3^2 - av_3^2)(u_4^2 - bv_4^2)\\
&y^2 - az^2 = u/v\\
&uf(x_1, x_2, x_3) = vg(x_1, x_2, x_3)
\end{aligned}$$

où $u, v, U_1, V_1, U_2, V_2, u_3, v_3, u_4, v_4, y, z, x_1, x_2, x_3$ sont des variables à valeurs dans k et $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ des constantes de k^*.
Des transformations birationnelles simples permettent de se ramener à la k-variété $\mathcal{T}$ de codimension 2 de $\mathbf{A}^9_k$ d'équation :

$$\theta_1(u_1^2 - av_1^2) - \gamma\theta_2(u_2^2 - av_2^2) = \theta_3(u_4^2 - bv_4^2)$$
$$\theta_3/\theta_2(\alpha(x_1^2 - a) + q(u_4X_3 + bX_2v_4, v_4X_3 + X_2u_4)) = \beta(u_2^2 - av_2^2)(X_3^2 - bX_2^2)$$

(Rappel : dans ces équations, les lettres grecques désignent des constantes non nulles et q est une forme quadratique non nulle).

Maintenant, soit $\mathcal{B}$ la quadrique lisse de $\mathbf{P}_k^5$ d'équation :

$$\theta_1(u_1^2 - av_1^2) - \gamma\theta_2(u_2^2 - av_2^2) = \theta_3(u_4^2 - bv_4^2)$$

et $\mathcal{C}$ le cône associé dans $\mathbf{A}_k^6$. On observe que $\mathcal{T}$ est fibrée en quadriques au-dessus de $\mathcal{C}$, l'ensemble des fibres non géométriquement intègres étant de codimension au moins 2. Or, dans ce cas, on peut conclure que les modèles lisses de $\mathcal{C}$ vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible : en effet, on utilise exactement la même méthode (basée sur une astuce de Salberger et apparue pour la première fois dans [4]) que celle qu'emploie Skorobogatov dans la preuve du théorème 1 de [14] (quand il ramène le cas où la base de la fibration est l'espace affine au cas où cette base est la droite affine) pour nous ramener au cas où la base est une conique affine lisse Z incluse dans le cône $\mathcal{C}$ et possédant un point rationnel. Comme Z est k-isomorphe à la droite affine, on conclut encore avec le théorème 1 de [14] que les modèles lisses de $\mathcal{C}$ vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible et les résultats généraux de [6] donnent le résultat voulu pour X.

Bibliographie

[1] J.W.S. Cassels, A. Fröhlich : *Algebraic number theory*, Academic press 1967

[2] J.-L. Colliot-Thélène : *Surfaces rationnelles fibrées en coniques*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989, éd. C. Goldstein, Progress in Math. Birkhäuser **91**, 43-55 (1990)

[3] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray, J.-J. Sansuc : *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. reine angew. Math. **320**, 150-191 (1980)

[4] J.-L. Colliot-Thélène, P. Salberger : *Arithmetic on singular cubic hypersurfaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **58**, 519-549 (1989)

[5] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir P. Swinnerton-Dyer : *Intersection of two quadrics and Châtelet surfaces*, J. reine angew. Math. **373** (1987); **374** (1987)

[6] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : *La descente sur les variétés rationnelles* II Duke Math. J. **54**, 375-492 (1987)

[7] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : *On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S.Bloch*, Duke math. **48**, 421-447 (1981)

[8] D.Harari : *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, manuscrit 1993

[9] S. Lang : *Algebraic number theory*, Springer Verlag 1986

[10] H. Nishimura : *Some remark on rational points*, Mem. Coll. Sci. Kyoto, Ser. A, **29**, 189-192 (1954)

[11] J.-P. Serre : *Corps Locaux*, Hermann, Paris 1968

[12] J.-P. Serre : *Cours d'arithmétique*, PUF 1970

[13] A.-N. Skorobogatov : *Arithmetic on certain quadric bundles of relative dimension 2*, J. reine angew. Math. **407**, 57-74 (1990)

[14] A.-N. Skorobogatov : *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989, éd. C. Goldstein, Progress in Math. Birkhäuser **91**, 205-219 (1990)