LIONEL CIUPERCA

Équations de réaction-diffusion sur des domaines minces d'épaisseur non uniforme. Un problème de Navier-Stokes à frontière libre

Thèses d'Orsay, 1995

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1995__0406__P0_0>

63489

ORSAY
n^0 d'ordre :

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THÈSE

présentée
pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité : Mathématiques

PAR

Ionel Sorinel CIUPERCA

Sujet : **Équations de réaction-diffusion sur des domaines minces d'épaisseur non uniforme. Un problème de Navier-Stokes à frontière libre.**

Soutenue le : 23 janvier 1995 devant la Commission d'examen

MM	J.C. SAUT	Président
	F. ABERGEL	
	T. RATIU	Rapporteur
	G. RAUGEL	Directeur de thèse
	F. WEISSLER	

À mon epouse Gabriela,
à mes parents,
à mes beaux-parents.

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Geneviève RAUGEL qui a dirigé cette thèse. Son experience, sa disponibilité et sourtout ses encouragements m'ont permis de dépasser les moments difficiles que j'ai rencontré, et de mener à bien ce travail. Je voudrais qu'elle trouve dans ces quelques lignes la marque de ma plus profonde gratitude.

Je voudrais aussi exprimer toute ma reconnaissance à Frédéric ABERGEL qui a guidé mes premiers pas dans la recherche avec une gentillesse et une patience sans limites. Je lui remercie aussi d'avoir accepté d'être parmi les membres de ce jury.

J'adresse également mes remerciements à Jack K. HALE qui s'est intéressé dès le debut à ce travail, qui m'a toujours prodigué conseils et encouragements, et qui a accepté avec gentillesse de tenir le rôle de rapporteur.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude envers Jean-Claude SAUT, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je tiens aussi à remercier Tudor RATIU qui a accepté avec gentillesse d'être l'un des rapporteurs de ma thèse, et de participer au jury.

Je remercie aussi Frederic WEISSLER pour avoir accepté d'être parmi les membres de ce jury.

Je voudrais remercier Thierry GALLAY pour son aide et ses conseils précieux.

Je tiens à exprimer toute ma reconaissance envers mes professeurs de l'Université "Al.I.Cuza" de Iasi, Roumanie, notamment Viorel BARBU, Cornelius CROITORU et Viorel ARNAUTU, qui m'ont ouvert les yeux vers le monde de la recherche, et grâce auxquels j'ai pu venir en France.

Enfin je remercie tous les membres de l'équipe du laboratoire d'Analyse Numérique pour leur sympathique accueil, et notamment Danielle LE MEUR pour sa disponibilité et son efficacité.

Reaction-diffusion equations on thin domains with varying order of thinness. A Navier-Stokes equation with a free boundary.

Abstract

In the first part of this work, we consider a reaction-diffusion equation with Neumann boudary conditions in a thin domain Q^ϵ in $I\!R^2$, with varying order of thinness (of order ϵ and ϵ^p).

We show that we can compare the global attractor of the semigroup generated by this equation with the global attractor of a problem defined on the limit segment Ω. The limit problem is actually a system of three reaction-diffusion equations, with Neumann boundary conditions and some matching conditions.

We obtain a result of upper semicontinuity, and a partial result of lower semicontinuity of the attractors. We compare the spectral properties of the linearized problem on Q^ϵ with those of the linearized problem on Ω. We finally show that both semigroups have inertial manifolds.

In the second part, we study the behaviour of an incompressible, viscous fluid, with a free boundary. We suppose that the fluid fills partly the interior of a rotating cylinder. Surface tension is neglected.

We show the existence of a solution of the initial value problem on a small time interval, under some regularity and compatibility assumptions on the initial data.

Key words: Attractor, thin domain, gradient system, upper semicontinuity, lower semicontinuity, inertial manifold, free boundary

1 Introduction

1.1 Première partie

Dans de nombreux problèmes en physique (mécanique des fluides, élasticité par exemple) , on rencontre des équations aux dérivées partielles définies sur des domaines Q^ϵ dont l'épaisseur dans une ou plusieurs directions est beaucoup plus petite que dans les autres directions. Si le domaine Q^ϵ "tend vers un domaine limite Ω" , quand ϵ tend vers 0, il est naturel de chercher à déterminer une équation limite (P_0) sur Ω et de comparer les propriétés de (P_0) à celles de l'équation (P) donnée sur Q^ϵ. De nombreux études ont été menées sur ce sujet (voir, par exemple, les travaux de Ciarlet, Hale et Raugel, Le Dret, Lions . . .)

Dans [9] , [10] , [11] et [12] , Hale et Raugel ont étudié des équations d'évolution dissipatives posées sur des domaines généraux Q^ϵ d'épaisseur d'ordre ϵ. Ils ont comparé les propriétés dynamiques des équations (P) et (P_0) ; en particulier, ils ont montré que l'attracteur global $\mathcal{A}_\epsilon$ de (P) converge vers l'attracteur global $\mathcal{A}_0$ de (P_0). Ils ont aussi mené une étude comparative des points d'équilibre de (P) et (P_0) ainsi que des leurs propriétés spectrales. Dans [13] , ils ont généralisé leurs résultats à des domaines minces en L ou T, c'est à dire, des domaines minces avec des jonctions.

Nous cherchons ici à étendre les résultats de Hale et Raugel à des domaines minces dont l'ordre d'épaisseur est variable (d'ordre ϵ et ϵ^p). Nous limiterons notre étude au cas d'une équation de réaction-diffusion.

Un cas très spécial d'un tel domain Q^ϵ dans $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble

$$Q^\epsilon = \{(x_1,x_2)\ ;\ 0 \le x_1 \le a\ ,\ 0 \le x_2 \le \epsilon\} \cup \{(x_1,x_2)\ ;\ a \le x_1 \le b\ ,\ 0 \le x_2 \le \epsilon^p\}$$

$$\cup\{(x_1,x_2)\ ;\ b \le x_1 \le 1\ ,\ 0 \le x_2 \le \epsilon\}\ , \qquad \text{avec } 0 < a < b < 1\ ,\ \text{ et } p \in (1,\, 3)\ .$$

Si on utilise un "changement de variables" qui envoie le domaine mince Q^ϵ sur le domaine fixe $Q = (0,\, 1) \times (0,\, 1)$ (la fonction qui donne le "changement de variables" sera une fonction discontinue) , l'équation de réaction-diffusion se transforme en une équation de réaction-diffusion (P_ϵ), dépendant du paramètre ϵ , sur le domaine Q.

On va comparer notre problème (P_ϵ) à un problème (P_0) posé sur le domaine limite, qui, ici, est l'intervalle $(0,\, 1)$. Ce problème (P_0) est, en fait, un système des trois équations posées sur les trois intervalles ($0,\, a$) , (a , b) et (b , 1) , avec des conditions aux bord et des conditions de compatibilité aux points a et b appropriées. Comme dans les travaux ci-dessus, nous nous proposons de mener une étude comparative des propriétés asymptotiques des problèmes (P_ϵ) et (P_0). D'abord, on démontre que les semigroupes $S^\epsilon(t)$ et $S(t)$ associés aux problèmes (P_ϵ) et (P_0) admettent des attracteurs globaux $\mathcal{A}^\epsilon$ et $\mathcal{A}$. Ensuite, nous voulons montrer que ces attracteurs sont proches dans un certain sens.

Nous allons d'abord obtenir un résultat de semicontinuité superieure des attracteurs

$\mathcal{A}^\epsilon$ et $\mathcal{A}$. On compare également les orbites (sur des intervalles de temps finis) des semigroupes $S^\epsilon(t)$ et $S(t)$.
Ensuite, en utilisant le fait que $S^\epsilon(t)$ est de type gradient, et une propriété analogue pour le semigroupe $S(t)$, on peut montrer un résultat partiel de semicontinuité inférieure des attracteurs $\mathcal{A}^\epsilon$ et $\mathcal{A}$.
Une partie de la démonstration de la propriété de semi-continuité inférieure des attracteurs consiste aussi à comparer les points d'équilibre des deux problèmes et à étudier les propriétés spectrales des opérateurs linéarisés associés à ces points d'équilibre. Puisque les spectre de ces opérateurs linéarisés convergent dans un certain sens, on peut également comparer les variétés locales instables de ces points d'équilibre.
Enfin, nous montrerons que l'opérateur linéaire associé à l'équation de réaction-diffusion (P_0) admet des sauts dans son spectre, ce qui nous permettra de construire une variété inertielle pour le semigroupe $S(t)$. Puisque l'opérateur linéaire associé à l'équation (P_ϵ) admet encore des sauts dans son spectre pour ϵ assez petit, nous pouvons également construire des variétés inertielles pour $S^\epsilon(t)$.

1.2 Deuxième partie

Dans cette partie, nous étudions le comportement d'un fluide incompressible visqueux, ayant une surface libre. Nous supposons que le fluide remplit partiellement l'intérieur d'un cylindre en rotation.
Le mouvement du fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes, avec des conditions aux bords appropriées. La pesanteur est la seule force extérieure.
Nous prouvons l'existence d'une solution sur un petit intervalle de temps, si les données initiales satisfont a certaines conditions de régularité et de compatibilités, et si l'on ne tient pas compte de la tension superficielle.

Des problèmes similaires ont été étudiés auparavant par Beale [3] et Allain [2] . Nous adaptons ici les idées de ces travaux, en tenant compte du fait que la géometrie du domaine est differente et, sourtout , que les conditions aux bords imposées sont différentes. Dans les travaux de Beale et Allain, la condition limite sur le bord fixe était de type Dirichlet homogène, tandis que, dans notre travail, elle est de type Dirichlet non-homogène.
Pour démontrer notre résultat d'existence de solutions, nous introduisons un espace de Banach approprié et nous définissons une application adequate sur cet espace. Nous appliquons ensuite un théorème de point fixe.

Première partie

Équations de réaction-diffusion sur des domaines minces d'épaisseur non-uniforme.

1 Introduction

Dans [9] et [10], Hale et Raugel ont étudié une équation de reaction-diffusion (P_ϵ) sur un domaine mince Q^ϵ d'épaisseur d'ordre ϵ. Quand ϵ tend vers 0, ils ont comparé la dynamique de l'équation donnée sur Q^ϵ à celle d'une équation limite (P_0) donnée sur un ouvert Ω, qui est en quelque sort la limite de Q^ϵ. En particulier, ils ont comparé les attracteurs $\mathcal{A}_\epsilon$ et $\mathcal{A}_0$ des équations (P_ϵ) et (P_0).
Le but de ce travail consiste à essayer de généraliser leurs résultats à un domaine mince d'épaisseur d'ordre variable ϵ et ϵ^p.
Soit ϵ_0 une constante réelle strictement positive. Pour tout $\epsilon \in (0,\, \epsilon_0)$, on considère le domaine mince Q^ϵ dans $I\!R^2$, dont l'adhérence $\bar{Q}^\epsilon$ est donnée par :

$\bar{Q}^\epsilon = \bar{Q}_1^\epsilon \cup \bar{Q}_2^\epsilon \cup \bar{Q}_3^\epsilon$

avec

$Q_i^\epsilon = \{(x_1,\, x_2) \in I\!R^2 \ ,\ x_1 \in \Omega_i \ ,\ 0 < x_2 < \epsilon\, g_i(x_1)\} \ , \quad i = 1, 3 \ ,$

$Q_2^\epsilon = \{(x_1,\, x_2) \in I\!R^2 \ ,\ x_1 \in \Omega_2 \ ,\ 0 < x_2 < \epsilon^p\, g_2(x_1)\} \ ,$

où

$\Omega_1 = (0,\, a) \ , \quad \Omega_2 = (a,\, b) \ , \quad \Omega_3 = (b,\, 1) \ ,$

$0 < a < b < 1 \ , 1 < p < 3$

et $g_i \in C^1(\bar{\Omega}_i \,;\, (0,\, +\infty)) \ , \quad i = 1,2,3$ (voire figure 1).

On pose $\bar{Q} = \bar{Q}_1 \cup \bar{Q}_2 \cup \bar{Q}_3$ où $Q_i = \Omega_i \times (0,\, 1) \ , \quad i = 1,2,3 \ ,$
et $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_3 = [0,\, 1]$.

On introduit la transformation :

$\theta : \bar{Q} \rightarrow \bar{Q}^\epsilon$

$$\theta(y_1,\, y_2) = \begin{cases} (y_1,\, \epsilon\, y_2 g_i(y_1)) \ , & \text{pour } (y_1,\, y_2) \in \bar{Q}_i \ , i = 1,3 \\ \\ (y_1,\, \epsilon^p y_2 g_2(y_1)) \ , & \text{pour } (y_1,\, y_2) \in \bar{Q}_2 - \{(\bar{Q}_2 \cap \bar{Q}_1) \cup (\bar{Q}_2 \cap \bar{Q}_3)\} \ . \end{cases} \tag{1.1}$$

On fixe $\epsilon_1 > 0$, tel que $\tilde{Q} = \Omega \times (0,\, \epsilon_1)$ contienne Q^ϵ pour tout $\epsilon \in (0,\, \epsilon_0)$.

Soit $\tilde{G} : \tilde{Q} \rightarrow I\!R$, et posons :

$G^\epsilon : Q \rightarrow I\!R$, avec $G^\epsilon = \tilde{G} \circ \theta$, et

$G^0 : \Omega \rightarrow I\!R$, avec $G^0(y_1) = \tilde{G}(y_1, 0)$, $\forall\, y_1 \in \Omega$.

Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\tilde{G} \in C^0(\bar{\tilde{Q}}) \ , \tag{1.2}$$

$$\|G^\epsilon - G^0\|_{L^2(Q)} \leq c\, \epsilon \tag{1.3}$$

où c est une constante positive .
(Une condition très forte qui implique (1.2) et (1.3) est $\tilde{G} \in W^{1,+\infty}(\tilde{Q})$, comme dans [10]).

On se donne une constante α strictement positive, et on considère l'équation de réaction-diffusion suivante sur Q^ϵ :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}^\epsilon}{dt} - \Delta\tilde{u}^\epsilon + \alpha\tilde{u}^\epsilon = -f(\tilde{u}^\epsilon) - \tilde{G} \qquad \text{dans } Q^\epsilon \\ \frac{\partial\tilde{u}^\epsilon}{\partial n^\epsilon} = 0 \qquad \text{sur } \partial Q^\epsilon \\ \tilde{u}^\epsilon(0) = \tilde{u}_0^\epsilon \qquad \text{dans } Q^\epsilon \end{cases} \tag{1.4$_\epsilon$}$$

où n^ϵ désigne la normale extérieure à ∂Q^ϵ, et où
$f \in C^2(I\!R\,;\ I\!R)$ satisfait à :

$$\limsup_{|x|\to+\infty} \frac{-f(x)}{x} \leq 0 \tag{1.5}$$

$$|f'(x)| \leq c(1+|x|^{\gamma_1})\,, \quad \forall\, x \in I\!R\,,\ \text{où } \gamma_1 \in [0,\,1) \tag{1.6}$$

$$|f''(x)| \leq c(1+|x|^{\gamma_2})\,, \quad \forall\, x \in I\!R\,,\ \text{où } \gamma_2 \geq 0\,. \tag{1.7}$$

(L'hypothèse (1.5) pourrait être remplacée par une condition moins forte, voir remarque 3.14).
Il est bien connu qu'au système $(1.4)_\epsilon$, on peut associer un semigroupe
$\tilde{S}^\epsilon(t) : \tilde{u}_0^\epsilon \in H^1(Q^\epsilon) \to \tilde{u}^\epsilon(t) \in H^1(Q^\epsilon)$,
où $\tilde{u}^\epsilon(t)$ est la solution du système $(1.4)_\epsilon$. Des conditions (1.5) et (1.6) , il résulte également qu'il existe un attracteur global $\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon$ pour $\tilde{S}^\epsilon(t)$ (voir [8]). Rappelons que $\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon$ est l'attracteur global pour $\tilde{S}^\epsilon(t)$ dans $H^1(Q^\epsilon)$, si $\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon$ est compact, invariant, et attire tous les bornés de $H^1(Q^\epsilon)$, c'est à dire pour tout ensemble borné $B \subset H^1(Q^\epsilon)$, nous avons $dist_{H^1(Q^\epsilon)}(\tilde{S}^\epsilon(t)B,\, \tilde{\mathcal{A}}^\epsilon) \to 0$ pour $t \to +\infty$, où on définit
$dist_X(C_1,\, C_2) = \sup_{x\in C_1} \inf_{y\in C_2} \|x-y\|_X$, pour C_1 , C_2 des sous-ensembles arbitraires d'un espace de Banach X.

Nous montrerons dans ce travail que, si ϵ tend vers 0, le système $(1.4)_\epsilon$ tend vers le problème limite suivant, défini sur Ω. Ce problème limite consiste en trois systèmes d'équations :
Sur Ω_i , $i = 1$ or $i = 3$, on considère les équations :

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} - \frac{1}{g_i}\partial_{y_1}(g_i\partial_{y_1}u_i) + \alpha u_i = \ -f(u_i) - G_i^0 \qquad \text{dans } \Omega_i \\ \partial_{y_1}u_i = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega_i \\ u_i(y_1,\, 0) \ = \ u_i^0 \end{cases} \tag{1.8$_i$}$$

tandis que sur Ω_2 , on considère :

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dt} - \frac{1}{g_2}\partial_{y_1}(g_2\partial_{y_1}u_2) + \alpha u_2 = \ -f(u_2) - G_2^0 \qquad \text{dans } \Omega_2 \\ u_2(a,\, t) = u_1(a,\, t) \ \text{ et } u_2(b,\, t) = u_3(b,\, t) \qquad \text{pour } t > 0 \\ u_2(y_1,\, 0) \ = \ u_2^0 \end{cases} \tag{1.9}$$

où conformément à notre convention, G_i^0 désigne la restriction de G^0 à $\Omega_i, i = 1, 2, 3$, et où u_i^0, $i = 1, 2, 3$, est choisi dans $H^1(\Omega_i)$.

Dans ce travail, nous associons à $(1.8)_i$, $i = 1, 3$, et à (1.9) , un semigroupe C^0, noté $S(t)$, défini dans $H^1(\Omega)$. Nous montrons que ce semigroupe admet un attracteur global $\mathcal{A}$ dans $H^1(\Omega)$.
Si on fait le changement de variables θ , décrit ci-dessus, on peut associer à $(1.4)_\epsilon$ une équation définie sur l'ouvert Q et donc au semigroupe $\tilde{S}^\epsilon(t)$ un semigroupe $S^\epsilon(t)$ défini sur un espace X^ϵ ou Y^ϵ (voir paragraph 3). Ce semigroupe $S^\epsilon(t)$ admet évidemment un attracteur global $\mathcal{A}^\epsilon$ dans X^ϵ et Y^ϵ. Une partie de ce travail consiste alors à comparer les attracteurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^\epsilon$. Nous montrons d'abord que ces attracteurs sont semicontinus supérieurement dans X^ϵ et Y^ϵ. Puisque $S^\epsilon(t)$ et les restrictions $S_i(t)$ de $S(t)$ à Ω_i , $i = 1, 3$, sont des systèmes gradients, on peut aussi obtenir un résultat partiel de semicontinuité inférieure des attracteurs. Dans ce but, on compare les points d'équilibre de $S(t)$ et de $S^\epsilon(t)$. On compare aussi les propriétés spectrales des opérateurs linéarisés en ces points d'équilibre. En outre, on construit les variétés locales instables de ces points d'équilibre et on les compare dans l'espace X^ϵ.

On peut écrire le système $(1.8)_i$, $i = 1, 3$, et (1.9) sous la forme d'une seule équation. Puisque l'opérateur linéaire A_0 associé à cette équation admet des sauts dans son spectre, on peut construire une variété inertielle pour $S(t)$. L'étude comparative des spectres menée précédemment nous permet alors de montrer que l'opérateur A_ϵ correspondant admet des sauts dans son spectre. Finalement, sous des hypothèses plus restrictives, nous pouvons construire des variétés inertielles pour $S^\epsilon(t)$.

Des domaines dans $\mathbb{R}^2$ du même type ont été considérés par Arrieta dans [2]. Il a donné une caractérisation des valeurs propres et des vecteurs propres de l'opérateur de Laplace dans Q^ϵ, avec condition de type Neumann sur la frontière. Il a montré qu'on peut approcher dans un certain sens l'ensemble de ces valeurs propres (respectivement vecteurs propres) par la réunion des ensembles des valeurs propres (respectivement vecteurs propres) associés aux trois problèmes indépendants posés sur Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 respectivement, avec des conditions aux limites de type Neumann homogène sur Ω_1 et sur Ω_3, et de type Dirichlet homogène sur Ω_2.

Rappelons que, dans notre travail, nous avons comparé l'ensemble des valeurs propres (respectivement vecteurs propres) du même opérateur dans Q^ϵ, avec la réunion des ensembles des valeurs propres (respectivement vecteurs propres) associés aux trois problèmes posés sur le domaine limite: sur Ω_1 et sur Ω_3 nous avons des conditions aux limites comme ci-dessus, tandis que sur Ω_2, nous avons tenu compte des conditions de raccord des solutions, ce qui nous amène à considérer des conditions de type Dirichlet non homogènes.

Remarquons que le problème limite considéré par Arrieta ne donne pas de renseignements sur le comportement des vecteurs propres. En effet, Arrieta a comparé les vecteurs propres du problème sur le domaine mince avec les vecteurs propres de son problème limite dans la norme de $H^1(Q^\epsilon)$, tandis que dans ce travail nous avons fait cette comparaison dans une norme $\|\cdot\|_{Y^\epsilon}$ (voir sections 3 et 7) qui

tient compte de l'échelle du domaine mince dans lequel on se place. C'est d'ailleurs pourquoi, nous avons eu besoin de la restriction supplémentaire $p < 3$.
Comme toutefois les valeurs propres des deux problèmes limites sont les mêmes, Arrieta obtient une bonne comparaison des valeurs propres.

Un autre cas intéressant qui a été étudié et qui ressemble à notre problème, est le cas d'un domaine "dumbbell" , c'est à dire un ensemble de la forme $Q^\epsilon = Q_1 \cup Q_2^\epsilon \cup Q_3$, où Q_1 et Q_3 sont des domaines qui ne dépendent pas de ϵ , et Q_2^ϵ est un canal d'épaisseur d'ordre ϵ, qui relie les deux parties fixes, et qui tend vers un segment Ω_2 quand ϵ tend vers 0.
Arrieta dans [2] , [3] , [4] et Jimbo dans [15] et [16] ont étudié les propriétés spectrales du même opérateur dans Q^ϵ. Arrieta a comparé l'ensemble des valeurs propres et des vecteurs propres sur Q^ϵ, avec la reunion des ensembles des valeurs propres et des vecteurs propres associés aux trois problèmes indépendents posés respectivement sur Q_1 , Ω_2 et Q_3: sur Q_1 et Q_3 il a considéré des conditions de type Neumann homogène, et de type Dirichlet homogène sur Ω_2. Pour la comparaison des vecteurs propres, il a à nouveau utilisé la norme $\|\cdot\|_{H^1(Q^\epsilon)}$.
À la différence d'Arrieta, Jimbo a considéré des conditions de raccord sur Ω_2, comme dans notre travail. Il est clair que les vecteurs propres du problème limite seront différents des vecteurs propres du problème limite considéré par Arrieta, ce qui s'explique, comme dans notre cas, par le fait que Jimbo a travaillé dans une norme plus forte, à savoir, $\|\cdot\|_{L^\infty(Q^\epsilon)}$.

Des résultats analogues ont été obtenus par Jimbo dans [15] et [17], pour un problème elliptique, semilinéaire, avec conditions de type Neumann homogène, dans un domaine "dumbbell". Pour le problème limite, il a pris des conditions de raccord sur Ω_2.

Le plan de notre travail est le suivant :

Dans la section 2, nous étudions le problème limite , c'est à dire le systeme des équations (1.8); et (1.9). Nous montrons qu'on peut associer à ce problème un semigroupe C^0 noté par $S(t)$, et que ce semigroupe admet un attracteur global.

Dans la section 3 on regroupe quelques estimations utiles dans l'étude de l'attracteur $\mathcal{A}^\epsilon$ du semigroupe $S^\epsilon(t)$.

Dans la section 4 , on compare les orbites de $S^\epsilon(t)$ et de $S(t)$, et dans la cinquième section on montre la semicontinuité supérieure de l'attracteur $\mathcal{A}^\epsilon$.

Dans la section 6 on montre que sous une certaine hypothèse d'hyperbolicité pour le problème limite, hypothèse qui sera discutée dans l'annexe, on peut trouver dans un voisinage de tout point d'équilibre de $S(t)$, un point d'équilibre de $S^\epsilon(t)$, qui converge vers ce point d'équilibre .

La section 7 sera consacrée à une étude comparative des problèmes spectraux.

Dans la section 8 on va construire des variétés instables locales pour les deux semigroupes $S^\epsilon(t)$ et $S(t)$, tandis que dans la section 9 on va les comparer , et on va présenter comme conséquence immédiate , un résultat partiel de semicontinuité inférieure des attracteurs .

Dans la dixième et dernière section de ce travail , nous construisons des variétées inertielles pour $S^\epsilon(t)$ et $S(t)$.

Dans tout ce travail, si φ est une application définie sur Q (respectivement sur Ω), on désigne par φ_i pour $i = 1,2,3$, la restriction de φ à Q_i (respectivement à Ω_i).
On désigne aussi par c, éventuellement avec des indices, des constantes qui ne dépendent pas de ϵ .

2 Étude du problème limite

2.1 Notations préliminaires

Pour $i = 1, 2, 3$, on définit sur $L^2(\Omega_i)$, le produit scalaire

$$(v,\, w)_{H_{0i}} = \int_{\Omega_i} g_i v w \, dy_1 \ , \quad \text{pour tout } v,\, w \in L^2(\Omega_i) \ .$$

On note H_{0i} l'espace $L^2(\Omega_i)$ muni de ce produit scalaire.

Puisque g_i est une fonction continue sur Ω_i avec

$g_i(y_1) > 0$, $\forall\, y_1 \in \bar{\Omega}_i$,

il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2, telles que :

$$c_1 \leq g_i(y_1) \leq c_2 \ , \quad \forall\, y_1 \in \bar{\Omega}_i \ , \ i = 1, 2, 3 \ . \tag{2.1}$$

On en déduit facilement que H_{0i} est un espace de Hilbert, dont la norme est équivalente à la norme naturelle de $L^2(\Omega_i)$.

On va introduire une forme bilinéaire, continue pour i=1,3 :

a_{0i} : $H^1(\Omega_i) \times H^1(\Omega_i) \to I\!R$, donnée par

$$\begin{aligned} a_{0i}(v,\, w) &= (\partial_{y_1} v,\, \partial_{y_1} w)_{H_{0i}} \ + \ \alpha(v, w)_{H_{0i}} \\ &= \int_{\Omega_i} [g_i \partial_{y_1} v \partial_{y_1} w + \alpha g_i v w] \, dy_1 \ , \quad i = 1, 3 \ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Il est bien connu que le triple $\{H^1(\Omega_i),\, H_{0i},\, a_{0i}(\cdot, \cdot)\}$ définit un opérateur unique , non borné , A_{0i} sur H_{0i} , de domaine

$$D(A_{0i}) = \{u \in H^2(\Omega_i) \ , \ \partial_{y_1} u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i\} \ , \quad i = 1, 3 \tag{2.3}$$

avec

$$\begin{cases} A_{0i} u \ = \ -\frac{1}{g_i} \partial_{y_1}(g_i \partial_{y_1} u) + \alpha u & \text{dans } \Omega_i \\ \partial_{y_1} u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega_i \end{cases} \tag{2.4}$$

pour i=1,3.

L'opérateur A_{0i} est positif et autoadjoint sur H_{0i}.

Nous avons :

$D({A_{0i}}^{1/2}) = H^1(\Omega_i)$, $i = 1, 3$

et

$\|{A_{0i}}^{1/2} u\|^2_{H_{0i}} \ = \ a_{0i}(u,\, u)$, $i = 1, 3.$

En outre la norme $\|A_{0i}^{1/2} \cdot \|$ est équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega_i)$.

Sur le domaine Ω_2, on va introduire la forme bilinéaire, continue :

a_{02} : $H^1_0(\Omega_2) \ \times \ H^1_0(\Omega_2) \ \to \ I\!R$, avec

$$a_{02}(v,\, w) \ = \ (\partial_{y_1} v,\, \partial_{y_1} w)_{H_{02}} + \alpha(v,\, w)_{H_{02}}$$

$$= \int_{\Omega_2} (g_2 \partial_{y_1} v \partial_{y_1} w \; + \; \alpha g_2 v w)\, dy_1 \; . \tag{2.5}$$

De même , le triple $\{H_0^1(\Omega_2),\ H_{02},\ a_{02}(.,.)\}$ définit un opérateur unique, nonborné A_{02} sur H_{02}, de domaine :

$$D(A_{02}) \; = \; H_0^1(\Omega_2) \cap H^2(\Omega_2)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{02}u \; = \; -\frac{1}{g_2}\partial_{y_1}(g_2 \partial_{y_1} u) + \alpha u \qquad \text{dans } \Omega_2 \\ \\ u \; = \; 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega_2 \; . \end{array} \right. \tag{2.6}$$

L'opérateur A_{02} est positif et autoadjoint dans H_{02}.
En outre, $D(A_{02}^{1/2}) \; = \; H_0^1(\Omega_2)$, et la norme de $\|A_{02}^{1/2} \cdot \|$ est équivalente à la norme usuelle de $H_0^1(\Omega_2)$.

2.2 Étude préliminaire des équations $(1.8)_1$ et $(1.8)_3$.

Sous les hypothèses (1.5) et (1.6) , on peut définir un semigroupe :

$$S_i \; : \; u_i^0 \in H^1(\Omega_i) \rightarrow u_i(t) \; = \; S_i(t) u_i^0 \in H^1(\Omega_i)$$

où $u_i(t)$ est la solution de $(1.8)_i$ avec $u_i(0) = u_i^0$, $i = 1, 3$.

Pour $i = 1, 2, 3$, on introduit l'application suivante de $H^1(\Omega)$ dans $I\!R$:

$$V_{0i}(v_i) \; = \; \int_{\Omega_i} g_i \left[\frac{1}{2}(\partial_{y_1} v_i)^2 + \frac{1}{2}\alpha v_i^2 + F(v_i) + G_i^0 v_i \right] dy_1 \tag{2.7}$$

où

$$F(x) \; = \; \int_0^x f(s)\, ds \; , \quad \forall\, x \in I\!R \, .$$

Il est bien connu que , pour $i = 1, 3$, $S_i(t)$ est un système gradient, avec la fonctionnelle de Lyapunov V_{0i}.
Avec les notations du paragraphe 2.1 , le problème $(1.8)_i$ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_i}{dt} + A_{0i} u_i \; = \; -f(u_i) - G_i^0 \\ \\ u_i(0) \; = \; u_i^0 \end{array} \right. \tag*{$(2.8)_i$}$$

pour $i = 1,\ 3$.

Rappelons que l'hypothèse (1.5) entraîne que, pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $c_\eta > 0$, telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & -f(x)x \leq \eta x^2 + c_\eta \; , \quad \forall\, x \in I\!R \\ \\ (ii) & -F(x) \leq \eta x^2 + c_\eta \; , \quad \forall\, x \in I\!R \, . \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Grâce à (1.6), on a les inégalités :

$$\begin{cases} (i) \quad |f(x)| \le c(1+|x|^{\gamma_1+1}) \,, \quad \forall\, x \in I\!R \\ \\ (ii) \quad |F(x)| \le c(1+|x|^{\gamma_1+2}) \,, \quad \forall\, x \in I\!R \,. \end{cases} \tag{2.10}$$

On utilisera souvent la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Il existe une constante positive c , telle que pour* $i = 1,\, 2,\, 3$ *, on a :*

(i) $f(v_i) \in L^2(\Omega_i)$ *, pour tout* $v_i \in H^1(\Omega_i)$ *, et*

$$\|f(v_i)\|_{L^2(\Omega_i)} \le c\,[1 + \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)}^{\gamma_1+1}] \,.$$

(ii) *Pour tout* $v_i, \bar{v}_i \in H^1(\Omega_i)$*, on a*

$$\|f(v_i) - f(\bar{v}_i)\|_{L^2(\Omega_i)} \le c\,[1 + \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)}^{\gamma_1} + \|\bar{v}_i\|_{H^1(\Omega_i)}^{\gamma_1}]\, \|v_i - \bar{v}_i\|_{L^2(\Omega_i)} \,.$$

La Proposition 2.1 est une conséquence directe des majorations (1.6) et (2.10)(i), et de l'injection de Sobolev $H^1(\Omega_i) \subset L^\infty(\Omega_i)$.

Soit E_{0i} l'ensemble des points d'équilibre de $S_i(t)$, i=1,3 .
En utilisant la propriété (2.9)(i) , on montre facilement le résultat suivant :

Proposition 2.2. *Pour i=1,3 ,* E_{0i} *est un sous-ensemble borné de* $H^2(\Omega_i)$ *, c'est-à-dire, il existe une constante* $c > 0$ *, telle que*

$$\|\varphi_i\|_{H^2(\Omega_i)} \le c \,, \ \forall \varphi_i \in E_{0i} \,.$$

En utilisant les propriétés (2.9)(ii) and (2.10)(ii) , on montre également le lemme suivant :

Lemme 2.3. *Il existe des constantes strictement positives :* $c_3,\, c_4,\, c_5$ *, telles que pour tout* $v_i \in H^1(\Omega_i)$ *,* $i = 1, 2, 3$ *, on a :*

i)
$$V_{0i}(v_i) \ge c_3\, \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 - c_4$$

ii)
$$V_{0i}(v_i) \le c_5\, [1 + \|v_i\|_{H^1(\Omega_i)}^{\gamma_1+2}] \,.$$

Rappelons également que le semigroupe $S_i(t)$, $i = 1, 3$, a un attracteur global $\mathcal{A}_{0i}$ dans $H^1(\Omega_i)$. L'ensemble $\mathcal{A}_i$ est aussi borné dans la norme de $H^2(\Omega_i)$
(voir [8]).

Lemme 2.4. *Pour i=1,3 , nous avons les propriétés suivantes :*

(i) *Il existe une constante positive c , telle que pour tout* $u_i^0 \in H^1(\Omega_i)$ *et tout* $t \ge 0$ *, on a*

$$\|S_i(t) u_i^0\|_{H^1(\Omega_i)} \le c\, \left[1 + \|u_i^0\|_{H^1(\Omega_i)}^{1+\gamma_1/2}\right] \,.$$

(ii) Il existe une constante $R_1 > 0$ *, telle que pour tout* $r_0 > 0$ *, il existe un temps* $T_1(r_0) > 0$ *, tel que si* $\|u_i^0\|_{H^1(\Omega_i)} \leq r_0$ *, alors*

$$\|S_i(t)u_i^0\|_{H^1(\Omega_i)} \leq R_1 \ , \ \forall\, t \geq T_1(r_0).$$

La propriété (i) est une conséquence immédiate du lemme 2.3 et du fait que $V_{0i}(S_i(t)u_i^0) \leq V_{0i}(u_i^0)$.
La propriété (ii) traduit le fait que l'équation $(2.8)_i$ a un attracteur global .

2.3 Résolution du problème (1.9) .

On va commencer ce paragraphe en définissant une application lineaire, continue $\mathcal{R} \ : \ H^s(\Omega_1) \times H^s(\Omega_i) \to H^s(\Omega_2)$, pour tout $s \geq 0$.
Soit $4d = \min\{a\,,\, b-a\,,\, 1-b\}$
Soit ρ_1 , ρ_3 des fonctions appartenant à l'espace $C^\infty(\Omega_2)$, à valeurs dans $[0\,,\,1]$, telles que :

$$\rho_1(y_1) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y_1 \in [a\,,\, a+d] \\ \\ 0 & \text{pour } y_1 \in [a+2d\,,\, b] \end{cases}$$

$$\rho_3(y_1) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y_1 \in [b-d\,,\, b] \\ \\ 0 & \text{pour } y_1 \in [a\,,\, b-2d]\ . \end{cases}$$

Pour $v_1 \in H^1(\Omega_1)$ et $v_3 \in H^1(\Omega_3)$, nous introduisons les fonctions :
$\mathcal{R}_1(v_1)$ et $\mathcal{R}_3(v_3)$ de Ω_2 dans $I\!R$, de la manière suivante :

$$\mathcal{R}_1(v_1)(y_1) = \begin{cases} \rho_1(y_1)\,v_1(2a-y_1) & \text{pour } y_1 \in [a\,,\, a+3d] \\ \\ 0 \quad \text{pour } y_1 \in [a+3d\,,\, b] \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\mathcal{R}_3(v_3)(y_1) = \begin{cases} \rho_3(y_1)\,v_3(2b-y_1) & \text{pour } y_1 \in [b-3d\,,\, b] \\ \\ 0 \quad \text{pour } y_1 \in [a\,,\, b-3d] \end{cases} \tag{2.12}$$

et on pose

$$\mathcal{R}(v_1,v_3) \ = \ \mathcal{R}_1(v_1) + \mathcal{R}_3(v_3)\ . \tag{2.13}$$

Il est évident que

$$\mathcal{R} \ \in \mathcal{L}(H^s(\Omega_1) \times H^s(\Omega_3)\ ,\ H^s(\Omega_2))\ ,\ \text{pour tout } s \geq 0\ . \tag{2.14}$$

On a la proposition suivante :

Proposition 2.5. *Si* $v_i \in H^2(\Omega_i)$ *, i=1, 3 , alors on a*

$$-\frac{1}{g_2}\partial_{y_1}[g_2\partial_{y_1}\mathcal{R}_1(v_1)](y_1) = \begin{cases} -\rho_1\frac{1}{g_1}(g_1 v_1')'(2a-y_1) + \mathcal{R}_1^*(v_1)(y_1) \\ \text{pour } y_1 \in [a\,,\, a+3d] \\ \\ 0 \qquad \text{pour } y_1 \in (a+3d\,,\, b] \end{cases}$$

et de même

$$-\frac{1}{g_2}\partial_{y_1}[g_2\partial_{y_1}\mathcal{R}_3(v_3)](y_1) = \begin{cases} -\rho_3\frac{1}{g_3}(g_3 v_3')'(2b-y_1) + \mathcal{R}_3^*(v_3)(y_1) \\ \text{pour } y_1 \in [b-3d\,,\, b] \\ \\ 0 \qquad \text{pour } y_1 \in (a\,,\, b-3d] \end{cases}$$

où $\mathcal{R}_i^*$ *sont des opérateurs linéaires , différentiels d'ordre 1 , pour* $i = 1,3$ *, c'est-à-dire :*

$$\mathcal{R}_i^*(v_i)(y_1) \;=\; 2\rho_i'(y_1)\,v_i'(2a_i-y_1) - \rho_i''(y_1)\,v_i(2a_i-y_1) - \frac{g_2'(y_1)}{g_2(y_1)}\rho_i'(y_1)\,v_i(2a_i-y_1)$$
$$+\frac{g_2'(y_1)}{g_2(y_1)}\rho_i(y_1)\,v_i'(2a_i-y_1) + \frac{g_i'(2a_i-y_1)}{g_i(2a_i-y_1)}\rho_i(y_1)v_i'(2a_i-y_1) \qquad (2.15)$$

où on note $a_1 = a$ *et* $a_3 = b$ *.*

Preuve. On fait le calcul seulement pour $\mathcal{R}_1(v_1)$, sur $[a\,,\, a+3d]$.

$$-\frac{1}{g_2}\partial_{y_1}[g_2\partial_{y_1}\mathcal{R}_1(v_1)](y_1) \;=\; -\partial_{y_1y_1}\mathcal{R}_1(v_1) - \frac{g_2'}{g_2}\partial_{y_1}\mathcal{R}_1(v_1) \;=\; -\rho_1 v_1''(2a-y_1)$$
$$+2\rho_1'v_1'(2a-y_1) - \rho_1''v_1(2a-y_1) - \frac{g_2'}{g_2}\rho_1'v_1(2a-y_1) + \frac{g_2'}{g_2}\rho_1 v_1'(2a-y_1)\,.$$

Mais

$$-v_1'' \;=\; -\frac{1}{g_1}\,(g_1v_1')' + \frac{g_1'}{g_1}v_1'\,,$$

ce qui avec l'égalité précédente nous donne la relation désirée.

Notre but dans la suite est de résoudre le problème (1.9), où u_1 et u_3 sont considérés comme connus (ce sont les solutions de $(1.8)_1$ et $(1.8)_3$) , et où la donnée initiale u^0 appartient à $H^1(\Omega)$. Cette dernière condition entraîne que u_2^0 appartiènt à $H^1(\Omega_2)$, avec $u_2^0(a) \;=\; u_1^0(a)$ et $u_2^0(b) \;=\; u_3^0(b)$.

On fera le changement de la fonction inconnue

$$u_2(t) \;=\; \mathcal{R}(u_1(t), u_3(t)) + \bar{u}_2(t) \qquad \text{pour tout } t \geq 0. \qquad (2.16)$$

Il est évident de la définition de $\mathcal{R}$, que :

$$\mathcal{R}(u_1(t),\, u_3(t))(a) \;=\; u_1(a,t)$$
$$\mathcal{R}(u_1(t),\, u_3(t))(b) \;=\; u_3(b,t)$$

ce qui entraîne $\bar{u}_2 \;=\; 0$ sur $\partial\Omega_2$, donc on va chercher la fonction $\bar{u}_2(t)$ dans $H^1_0(\Omega_2)$.

Si on remplace u_2 dans (1.9) par $\mathcal{R}(u_1(t), u_3(t)) + \bar{u}_2$, on obtient l'équation

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\bar{u}_2}{dt} + A_{02}\bar{u}_2 \;&=\; \Phi(\bar{u}_2,\, t) \\ \bar{u}_2(0) \;&=\; \bar{u}_2^0 \end{aligned} \right. \tag{2.17}$$

où A_{02} est l'opérateur défini dans (2.7) ,

$$\bar{u}_2^0 \;=\; u_2^0 \;-\; \mathcal{R}(u_1^0, u_3^0) \tag{2.18}$$

et

$$\Phi(\bar{u}_2,\, t) \;=\; -f(\bar{u}_2 + \mathcal{R}(u_1(t),\, u_3(t))) - G_2^0 - \frac{d}{dt}\mathcal{R}(u_1(t),\, u_3(t))$$
$$+\frac{1}{g_2}\partial_{y_1}[g_2\partial_{y_1}\mathcal{R}(u_1(t),\, u_3(t))] - \alpha\mathcal{R}(u_1(t),\, u_3(t))\;.$$

Il vient immédiatement de la Proposition 2.5 et du fait que u_1 et u_3 satisfont aux équations $(1.8)_1$ et $(1.8)_3$, qu'on a :

$$\Phi(\bar{u}_2,\, t) \;=\; -f(\bar{u}_2 + \mathcal{R}(u_1(t),\, u_3(t))) - G_2^0 + \Phi_1(u_1(t)) + \Phi_3(u_3(t)) \tag{2.19}$$

où on a pose

$$\Phi_1(v_1)(y_1) = \left\{ \begin{array}{l} \rho_1(y_1)[f(v_1(2a-y_1)) + G_1^0(2a-y_1)] - \mathcal{R}_1^*(v_1)(y_1) \\ \text{pour } y_1 \in [a,\, a+3d] \\ 0 \qquad \text{pour } y_1 \in [a+3d,\, b] \end{array} \right. \tag{2.20}$$

et de même

$$\Phi_3(v_3)(y_1) = \left\{ \begin{array}{l} \rho_3(y_1)[f(v_3(2b-y_1)) + G_3^0(2b-y_1)] - \mathcal{R}_3^*(v_3)(y_1) \\ \text{pour } y_1 \in [b-3d,\, b] \\ 0 \qquad \text{pour } y_1 \in [a,\, b-3d]\;. \end{array} \right. \tag{2.21}$$

Des définitions de $\mathcal{R}_1^*$, $\mathcal{R}_3^*$, Φ_1, Φ_3 , et de la Proposition 2.1(i) , on déduit facilement la proposition suivante :

Proposition 2.6. *Il existe une constante positive c , telle que*

$$\|\Phi_i(u_i(t))\|_{L^2(\Omega_i)} \leq c\,[1 + \|u_i(t)\|^{\gamma_1+1}_{H^1(\Omega_i)}]\;, \quad \forall\, t \geq 0\;,\; i = 1, 3.$$

Le lemme suivant sera utile pour établir des éstimations a priori de la solution de (2.17) .

Lemme 2.7. *Il existe des constantes strictement positives c, γ_4, γ_5, telles que pour tout $T^* > 0$, et pour toute solution régulière $\bar{u}_2$ de (2.17) sur $[0, T^*]$, on a pour tout $t \in [0, T^*]$:*

$$(i) \qquad \frac{d}{dt}\|\bar{u}_2(t)\|^2_{H_{02}} + \|A_{02}^{1/2}\bar{u}_2(t)\|^2_{H_{02}} \leq c \left[1 + \sum_{i\neq 2} \|u_i(t)\|^{\gamma_4}_{H^1(\Omega_i)}\right]$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt}\|A_{02}^{1/2}\bar{u}_2(t)\|^2_{H_{02}} + \frac{1}{2}\|A_{02}\bar{u}_2(t)\|^2_{H_{02}} \leq c \left[1 + \sum_{i\neq 2} \|u_i(t)\|^{2\gamma_1+2}_{H^1(\Omega_i)} + \|\bar{u}_2(t)\|^{\gamma_5}_{H_{02}}\right].$$

Preuve. Pour simplifier, on pose dans cette preuve

$$\sigma(t) = \mathcal{R}(u_1(t),\, u_3(t))\,. \tag{2.22}$$

(i) En faisant le produit scalaire de (2.17) avec $\bar{u}_2(t)$ dans H_{02}, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}_2(t)\|^2_{H_{02}} + \|A_{02}^{1/2}\bar{u}_2(t)\|^2_{H_{02}} = (\Phi(\bar{u}_2(t),t),\, \bar{u}_2(t))_{H_{02}}\,, \quad \forall\, t \in [0,T^*]\,. \tag{2.23}$$

Il est évident que

$$\|\sigma(t)\|_{H^1(\Omega_2)} \leq c \sum_{i\neq 2} \|u_i(t)\|_{H^1(\Omega_i)}\,. \tag{2.24}$$

La définition de Φ nous donne :

$$(\Phi(\bar{u}_2(t),\, t),\, \bar{u}_2(t))_{H_{02}} = -\int_{\Omega_2} g_2 f(\bar{u}_2(t) + \sigma(t))(\bar{u}_2(t) + \sigma(t))$$

$$+\int_{\Omega_2} g_2 f(\bar{u}_2(t) + \sigma(t))\sigma(t) + \int_{\Omega_2} g_2[-G_2^0 + \Phi_1(u_1(t)) + \Phi_3(u_3(t))]\bar{u}_2(t)\,. \tag{2.25}$$

En utilisant l'inégalité de Young et la Proposition 2.6 , on obtient pour tout $\eta > 0$:

$$\int_{\Omega_2} g_2(-G_2^0 + \Phi_1 + \Phi_3)\bar{u}_2 \leq \eta\|\bar{u}_2\|^2_{H_{02}} + c_\eta \left[1 + \sum_{i\neq 2} \|u_i\|^{2\gamma_1+2}_{H^1(\Omega_i)}\right]. \tag{2.26}$$

De (2.9)(i) , (2.24) , de l'éstimation (2.10)(i) pour f , et de (2.25) et (2.26) , nous obtenons pour tout $\eta > 0$:

$$(\Phi(\bar{u}_2,\, t), \bar{u}_2)_{H_{02}} \leq 3\eta\|\bar{u}_2\|^2_{H_{02}} + 2\eta\|\sigma\|^2_{H_{02}} + c_\eta \left[1 + \sum_{i\neq 2} \|u_i\|^{2\gamma_1+2}_{H^1(\Omega_2)}\right]$$

$$+c\int_{\Omega_2} (1 + |\sigma|^{\gamma_1+1})|\sigma| + c\int_{\Omega_2} |\bar{u}_2|^{\gamma_1+1}|\sigma|\,. \tag{2.27}$$

Puisque $\gamma_1 < 1$, nous pouvons appliquer l'inégalitée de Young dans le dernier terme de droite de (2.27) , avec les exposants $\frac{2}{\gamma_1+1}$ et $\frac{2}{1-\gamma_1}$.
De (2.23) , (2.24) et (2.27) avec η assez petit, on déduit (i) avec

$\gamma_4 = \frac{2}{1-\gamma_1}$.

(ii) Maintenant on forme le produit scalaire de (2.17) avec $A_{02}\bar{u}_2(t)$ dans H_{02} . On obtient :

$$\frac{d}{dt}(\|A_{02}^{1/2}\bar{u}_2(t)\|^2_{H_{02}}) + \|A_{02}\bar{u}_2(t)\|^2_{H_{02}} \leq \|\Phi(\bar{u}_2(t), t)\|^2_{H_{02}} . \qquad (2.28)$$

Il est évident que

$$\|f(\bar{u}_2 + \sigma)\|^2_{H_{02}} \leq c\,[1 + \|\sigma\|^{2\gamma_1+2}_{H_1(\Omega_2)} + \|\bar{u}_2\|^{2\gamma_1+2}_{L^{2\gamma_1+2}(\Omega_2)}] . \qquad (2.29)$$

Grâce à l'inégalité de Gagliardo - Nirenberg , nous obtenons

$$\|\bar{u}_2\|^{2\gamma_1+2}_{L^{2\gamma_1+2}(\Omega_2)} \leq c\,\|\bar{u}_2\|^{\gamma_1/2}_{H^2(\Omega_2)}\|\bar{u}_2\|^{(3\gamma_1+4)/2}_{L^2(\Omega_2)} .$$

Puisque $\gamma_1 < 1$, nous pouvons appliquer l'inégalité de Young avec les exposants $\frac{4}{\gamma_1}$ et $\frac{4}{4-\gamma_1}$, et on déduit que pour tout $\eta > 0$, on a :

$$\|\bar{u}_2\|^{2\gamma_1+2}_{L^{2\gamma_1+2}(\Omega_2)} \leq \eta\|\bar{u}_2\|^2_{H^2(\Omega_2)} + c_\eta\,\|\bar{u}_2\|^{\gamma_5}_{L^2(\Omega_2)} \qquad (2.30)$$

avec $\gamma_5 = \frac{2(3\gamma_1+4)}{4-\gamma_1}$.

De (2.28) – (2.30) nous obtenons facilement la deuxième inégalité du lemme 2.7.

On va énoncer (sans démonstration) quelques résultats qui seront utiles pour la résolution du problème sur Ω_2 .

Théorème 2.8. *(**"Théorème de Carathéodory"**)*
Si $g : I\!R^m \times [0, T] \to I\!R^m$ satisfait aux conditions suivantes :
(i) $\forall x \in I\!R^m$, $t \to g(x,t)$ est mésurable .
(ii) Pour presque tout $t \in (0, T)$, $x \to g(x,t)$ est continue .
(iii) Pour tout $r > 0$ il existe une fonction $G_r \in L^1(0, T)$ telle que

$$\sup\{\|g(x, t)\| , \; x \in I\!R^m , \; \|x\| \leq r\} \leq G_r(t) \textit{ pour presque tout } t \in [0, T] .$$

Alors il existe une solution $v(t)$ du problème

$$v'(t) = g(v(t), t) , \textit{ avec } v(0) = v_0$$

en sens des distributions sur $I = [0, T^*)$, avec $T^* \leq T$.
En outre, si (I, v) est maximale , on a :
ou bien $I = [0, T]$,
ou bien $I = [0, T^*)$ avec $T^* \leq T$ et $\limsup_{t \nearrow T^*} \|v(t)\| = +\infty$.

Théorème 2.9. *(voir [19] , Lemme 1.2 p. 260)*
Soit V , H des espaces de Hilbert, et V' le dual de V, avec

$$V \subset H \subset V'$$

où les deux injections sont continues et denses.
Si $v(t) \in L^2(0\,,T\,,V)$ et $\frac{dv}{dt} \in L^2(0\,,T\,,V')$, alors on a :
$v(t) \in C(0\,,T\,,H)$, et de plus :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v(t)|_H^2 = < \frac{dv}{dt}\,,\, v >_{<V',V>}$$

pour tout $t > 0$.

Théorème 2.10. *(voir [19] , Theorem 2.1 p. 271)*
Soit V , H comme dans le théorème 2.9 . Supposons en outre que l'injection de V dans H est compacte.
Soit $Y = \{v \in L^2(0\,,T\,,V)$ avec $\frac{dv}{dt} \in L^2(0\,,T\,,V')\}$ muni de la norme

$$\|v\|_Y = \|v\|_{L^2(0,T,V)} + \|\frac{dv}{dt}\|_{L^2(0,T,V')}\,.$$

Alors l'injection continue de Y dans $L^2(0\,,T\,,H)$ est compacte .

En utilisant les résultats classiques ci-dessus, on obtient le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 2.11. *Pour tout $u^0 \in H^1(\Omega)$ et $T > 0$, il existe une solution (et une seule) $\bar{u}_2$ de (2.17)*

$$\bar{u}_2 \in C^0([0,T],\, H_0^1(\Omega_2)) \cap L^2(0,\, T,\, H^2(\Omega_2) \cap H_0^1(\Omega_2))$$

et $\frac{d\bar{u}_2}{dt} \in L^2(0,\, T,\, H_{02})$.
En outre , $\bar{u}_2$ peut s'écrire sous la forme integrale suivante , sur $[0,\, T]$:

$$\bar{u}_2(t) = e^{-A_{02}t}\bar{u}_2^0 + \int_0^t e^{-A_{02}(t-s)}\Phi(\bar{u}_2(s),\, s)ds\,. \tag{2.31}$$

Preuve

1. Existence.

On utilise une méthode de Galerkin.
Puisque A_{02} est un opérateur autoadjoint, positif, à résolvante compacte, son spectre n'est composé que des valeurs propres réelles et positives :

$$0 < \mu_2^1 \leq \mu_2^2 \leq \ldots\mu_2^n \ldots \to +\infty\,.$$

On note $(w_n)_{n=1,2,..}$ une base orthonormale dans H_{02} des vecteurs propres correspondants.

On pose $V_m = Vect(w_1, \dots w_m)$, et on sait que $\cup_{m=1}^{\infty} V_m$ est dense dans $H_0^1(\Omega_2)$ et dans H_{02} .

Soit $z_m \in V_m$ la solution de l'équation :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dz_m}{dt} + A_{02} z_m & = & P_m \Phi(z_m, t) \\ \\ z_m(0) & = & z_{0m} \equiv P_m \bar{u}_2^0 \end{array} \right. \tag{2.32}$$

où P_m est la projection sur V_m dans H_{02}.

On écrit

$$z_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j(t) w_j \qquad \text{avec } \beta_j(t) \in I\!R\,.$$

Il est évident que $(\beta_1(t), \dots . \beta_m(t)) \in I\!R^m$ satisfait à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \beta_j'(t) + \mu_2^j \beta_j(t) & = & (\Phi(\sum_{j=1}^m \beta_j(t) w_j, t), w_j)_{H_{02}} \,, \quad j = 1, 2, \dots m \\ \\ \beta_j(0) & = & (\bar{u}_2^0, w_j)_{H_{02}} \,. \end{array} \right. \tag{2.33}$$

On voit facilement que les conditions du théorème de Carathéodory (Théorème 2.8) sont satisfaites, donc il existe une solution de (2.33) , $(\beta_j(t)\ ,\ j = 1, 2, \dots m)$, sur un intervalle $[0, T^*)$ avec $T^* \leq T$.

On multiplie (2.33) par $\beta_j(t)$ et on somme sur j pour $j = 1, ..m$. On procède ensuite comme dans la preuve du lemme 2.7(i). Ensuite, on multiplie (2.33) par $\mu_2^j \beta_j(t)$, et on somme aussi sur j . On continue comme dans la preuve du lemme 2.7(ii).

On obtient facilement d'abord que $T^* = T$ et ensuite que

$$\|z_m\|_{L^\infty(0,T,D(A_{02}^{1/2}))} \leq c_1(u^0, T)$$

$$\|z_m\|_{L^2(0,T,D(A_{02}))} \leq c_2(u^0, T)$$

$$\|\frac{dz_m}{dt}\|_{L^2(0,T,H_{02})} \leq c_3(u^0, T) \,,$$

où les constantes $c_i(u^0, T)$ ne dependent pas de m pour $i = 1, 2, 3$.

De ces trois dernières inégalités on déduit qu'il existe une sous-suite m' de m et une fonction $\bar{u}_2 \in L^2(0, T, D(A_{02}))$, avec $\frac{d\bar{u}_2}{dt} \in L^2(0, T, H_{02})$, telles que

$$z_{m'} \to \bar{u}_2 \qquad \text{dans } L^2(0, T, D(A_{02})) \text{ - faible}$$

$$\frac{dz_{m'}}{dt} \to \frac{d\bar{u}_2}{dt} \qquad \text{dans } L^2(0, T, H_{02})) \text{ - faible .}$$

Du Théorème 2.10 , il résulte que

$$z_{m''} \to \bar{u}_2 \qquad \text{dans } L^2(0, T, D(A_{02}^{1/2})) \text{ - fort ,} \tag{2.34}$$

où m" est une sous-suite de m', qu'on va noter par m pour commodité.

En utilisant (2.34) on peut très facilement montrer que

$$\Phi(z_m, t) \to \Phi(\bar{u}_2, t) \qquad \text{dans } L^2(0, T, H_{02}) \text{ - forte .}$$

Ensuite, on utilise une technique qui est classique (voir Théorème 1.1 page 254 de [19]), à savoir, on multiplie l'équation

$$(\frac{dz_m}{dt}, w_j)_{H_{02}} + a_{02}(z_m, w_j) = (\Phi(z_m, t), w_j)_{H_{02}}$$

par une fonction $\psi \in C^1([0,T], I\!R)$ avec $\psi(T) = 0$, on intègre par raport à t entre 0 et T, on utilise l'intégration par parties par raport à t , et on passe à la limite dans la relation obtenue.

On obtient facilement que $\bar{u}_2$ est une solution du problème (2.17).

Le fait que $u_2 \in C(0, T, H_0^1(\Omega_2))$ est une conséquence directe du Théorème 2.9.

2. Unicité

Soit $\bar{u}_{21}$ et $\bar{u}_{22}$ deux solutions différentes de (2.17) dans l'espace $C(0, T, H_0^1(\Omega_2))$.

On pose $\bar{u}_{20} = \bar{u}_{21} - \bar{u}_{22}$.

La fonction $\bar{u}_{20}$ vérifie le système :

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}_{20}}{dt} + A_{02}\bar{u}_{20} = -f(\bar{u}_{21} + \sigma) + f(\bar{u}_{22} + \sigma) \\ \bar{u}_{20}(0) = 0 . \end{cases} \tag{2.35}$$

On multiplie (2.35) par $\bar{u}_{20}$ dans H_{02}, et on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}_{20}\|^2_{H_{02}} + \|A_{02}^{1/2}\bar{u}_{20}\|^2_{H_{02}} \le |\int_{\Omega_2} g_2[-f(\bar{u}_{21} + \sigma) + f(\bar{u}_{22} + \sigma)]\bar{u}_{20}| \le$$

$$\le c\left[1 + \|\sigma\|^{\gamma_1}_{H^1(\Omega_2)} + \|\bar{u}_{21}\|^{\gamma_1}_{H^1(\Omega_2)} + \|\bar{u}_{22}\|^{\gamma_1}_{H^1(\Omega_2)}\right] \|\bar{u}_{20}\|^2_{H_{02}} ,$$

ce qui entraine

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}_{20}\|^2_{H_{02}} \le c(T)\|\bar{u}_{20}\|^2_{H_{02}} \qquad \text{avec } \bar{u}_{20}(0) = 0 ,$$

ce qui donne $\bar{u}_{20} = 0$, d'où l'unicité .

3. L'équation intégrale.

Soit $t > 0$ fixé. Pour tout $s \in [0, t]$ on pose $v(s) = e^{-A_{02}(t-s)}\bar{u}_2(s)$. Il est claire que

$$v'(s) = A_{02}e^{-A_{02}(t-s)}\bar{u}_2(s) + e^{-A_{02}(t-s)}\bar{u}_2'(s) = e^{-A_{02}(t-s)}\Phi(\bar{u}_2(s), s) ,$$

et nous finissons la preuve en observant que

$$\int_0^t v'(s)\, ds = \bar{u}_2(t) - e^{-A_{02}t}\bar{u}_2^0 .$$

2.4 Le semigroupe $S(t)$

Soit $u^0 \in H^1(\Omega)$. D'après les paragraphes 2.2 et 2.3 , les équations $(1.8)_1$, $(1.8)_3$ et (1.9) ont une solution unique $u_1(t)$, $u_3(t)$ et $u_2(t)$, satisfaisant à $u_i(0) = u_i^0 \equiv u^0/\Omega_i$.

Si on introduit la fonction $u(t)$ telle que $u(t)/\Omega_i = u_i(t)$, alors $u(t)$ est encore dans $H^1(\Omega)$.

On peut donc introduire l'application

$$S(t) : u^0 \in H^1(\Omega) \to u(t) \in H^1(\Omega) .$$

Proposition 2.12. *$S(t)$ est une application qui satisfait aux propriétées suivantes :*
(i) $S(t+\tau) = S(t)S(\tau)$, $\forall\, t, \tau \geq 0$
(ii) $S(0) = I$
(iii) L'application $(t, u) \in I\!R_+ \times H^1(\Omega) \to S(t)u \in H^1(\Omega)$ *est continue en* (t, u) .
Donc $S(t)$ est un semigroupe C^0 sur $H^1(\Omega)$.

Preuve . Les propriétés (i) et (ii) sont evidentes .
Pour la preuve de (iii), soit u^0 , $v^0 \in H^1(\Omega)$ et $w^0 = u^0 - v^0$.
On pose $u(t) = S(t)u^0$ et $v(t) = S(t)v^0$.
Nous voulons estimer la difference $S(t_1)v^0 - S(t_0)u^0$, quand t_1 est proche de t_0 , et v^0 est proche de u^0 dans la norme de $H^1(\Omega)$, où (t_0, u^0) est fixé dans $I\!R_+ \times H^1(\Omega)$.
On écrit :

$$S(t_1)v^0 - S(t_0)u^0 = S(t_1)v^0 - S(t_1)u^0 + S(t_1)u^0 - S(t_0)u^0 . \tag{2.36}$$

Soit $\bar{\epsilon} > 0$, arbitraire et fixé.
Puisque pour tout $T > 0$ les fonctions $u_i(t)$ appartiennent aux espaces $C(0, T, H^1(\Omega_i))$, i = 1,2,3 , alors il est evident qu'il existe un $\bar{\delta}_1 > 0$, tel que si $|t_1 - t_0| < \bar{\delta}_1$, alors

$$\|S(t_1)u^0 - S(t_0)u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\bar{\epsilon} . \tag{2.37}$$

Il reste à majorer $S(t_1)v^0 - S(t_1)u^0$. On pose $w(t) = u(t) - v(t)$.
Il est bien connu que :

$$\|w_i(t)\|_{H^1(\Omega_i)} \leq k_1(u^0, v^0, t_1)\|w_i^0\|_{H^1(\Omega_i)} , \ \forall\, t \in [0, t_1] , \ i = 1, 3 . \tag{2.38}$$

Il reste à majorer $\|w_2(t)\|_{H^1(\Omega_2)}$. Comme en (2.16) on écrit :
$u_2 = \bar{u}_2 + \sigma_u$ et $v_2 = \bar{v}_2 + \sigma_v$,
où on a noté
$\sigma_u(t) = \mathcal{R}(u_1(t), u_3(t))$,
et de même
$\sigma_v(t) = \mathcal{R}(v_1(t), v_3(t))$.
Si on note $\bar{w}_2 = \bar{u}_2 - \bar{v}_2$, on voit facilement que $\bar{w}_2$ satisfait à :

$$\frac{d\bar{w}_2}{dt} + A_{02}\bar{w}_2 = -[f(\bar{u}_2 + \sigma_u) - f(\bar{v}_2 + \sigma_v)] + \sum_{i\neq 2}[\Phi_i(u_i(t)) - \Phi_i(v_i(t))] \quad (2.39)(i)$$

avec

$$\bar{w}_2(0) = w_2^0 - (\sigma_u(0) - \sigma_v(0)) \, . \tag{2.39)(ii}$$

On note par $\hat{\Phi}$ le membre de droite de (2.39)(i) et par $\hat{w}_2^0$ le membre de droite de (2.39)(ii).

On multiplie (2.39)(i) par $A_{02}\bar{w}_2$ dans H_{02} , et on obtient

$$\frac{d}{dt}\|A_{02}^{1/2}\bar{w}_2\|_{H_{02}}^2 + \|A_{02}\bar{w}_2\|_{H_{02}}^2 \leq \|\hat{\Phi}\|_{H_{02}}^2 \, . \tag{2.40}$$

En utilisant (2.38), on déduit que

$$\sum_{i\neq 2}\|\Phi_i(u_i(t)) - \Phi_i(v_i(t))\|_{H_{02}}^2 \leq k_2(u^0, v^0, t_1)\sum_{i\neq 2}\|w_i^0\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \tag{2.41}$$

pour $0 \leq t \leq t_1$.

D'autre part, la Proposition 2.1(ii) nous permet d'écrire

$$\|f(\bar{u}_2 + \sigma_u) - f(\bar{v}_2 + \sigma_v)\|_{H_{02}} \leq k_3(u^0, v^0, t_1)[\|\bar{w}_2\|_{H_{02}} + \|\sigma_u - \sigma_v\|_{H_{02}}] \, . \tag{2.42}$$

De (2.40) - (2.42) et de (2.38) , il résulte

$$\frac{d}{dt}\|A_{02}^{1/2}\bar{w}_2\|_{H_{02}}^2 + \|A_{02}\bar{w}_2\|_{H_{02}}^2 \leq k_3\|\bar{w}_2\|_{H_{02}}^2 + k_4\sum_{i\neq 2}\|w_i^0\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \, . \tag{2.43}$$

D'autre part, il est clair que

$$\|\hat{w}_2^0\|_{H_0^1(\Omega_2)} \leq \|w^0\|_{H^1(\Omega_2)} \, , \tag{2.44}$$

et de (2.43) et (2.44) on déduit finalement en utilisant l'inégalité de Gromwall que

$$\|\bar{w}_2(t)\|_{H^1(\Omega_2)}^2 \leq k_5(u^0, v^0, t_1)e^{k_3 t}\|w^0\|_{H^1(\Omega)}$$

pour $0 \leq t \leq t_1$, ce qui finit la preuve.

Nous voulons montrer ensuite qu'il existe un borné absorbant pour le semigroupe $S(t)$. Nous avons le lemme général suivant:

Lemme 2.13. *Soit $\bar{a} > 0$ et $x(t)$ une fonction positive, intégrable, tels que :*

$$\frac{dx}{dt} + \bar{a}x \leq h(\xi, t) \, , \; x(0) = x_0$$

où $h : I\!R_+ \times I\!R_+ \to I\!R$ satisfait aux conditions suivantes :
(i) $h(\xi, \cdot)$ est intégrable pour tout $\xi \geq 0$
(ii) $0 \leq h(\xi, t) \leq R_2(\xi)$, $\forall\, t \geq 0$
(iii) Il existe une constante positive R_3 , tel que pour tout $\xi \geq 0$, il existe un temps $T_3(\xi) > 0$, tel que :

$$h(\xi, t) \leq R_3 \, , \quad \forall\, t \geq T_3(\xi).$$

Alors on a les assertions suivantes :

$$(I) \qquad x(t) \le x_0 + \frac{1}{\bar{a}} R_2(\xi)\ , \quad \forall\, t \ge 0$$

(II) *Il existe une constante positive* R_4 , *tel que pour tout* x_0 , $\xi \ge 0$, *il existe un temps* $T_4(x_0, \xi) > 0$, *tel que* $x(t) \le R_4$, $\forall\, t \ge T_4(x_0, \xi)$.

Preuve . De (i) , on déduit grâce au lemme de Gromwall que :

$$x(t) \le x_0 e^{-\bar{a}t} + e^{-\bar{a}t} \int_0^t e^{\bar{a}s} h(\xi, s) ds$$

ce qui implique (I).

On écrit pour $t \ge T_3(\xi)$,

$$\int_0^t e^{\bar{a}s} h(\xi, s) ds = \int_0^{T_3(\xi)} e^{\bar{a}s} h(\xi, s) ds + \int_{T_3(\xi)}^t e^{\bar{a}s} h(\xi, s) ds\ .$$

En utilisant le fait que $x_0 e^{-\bar{a}t} \to 0$ et $e^{-\bar{a}t} \int_0^{T_3(\xi)} e^{\bar{a}s} h(\xi, s) ds \to 0$ pour $t \to +\infty$, ainsi que la propriété (iii) , on déduit immédiatement de l'égalité ci-dessus que (II) est satisfaite, où R_4 peut être n'importe quel nombre réel strictement supérieur à $\frac{1}{\bar{a}} R_3$.

Dans la suite on désigne par $\mu_i^1 > 0$, la plus petite valeur propre de A_{0i} , i= 1,2,3 .

Les lemmes suivants nous donnent des estimations de la solution de (2.17) dans les normes de H_{02} et $H_0^1(\Omega_2)$.

Lemme 2.14. *Pour tout* $u^0 \in H^1(\Omega)$, *la solution* $\bar{u}_2(t)$ *de (2.17) satisfait aux assertions suivantes :*

$$(i) \qquad \|\bar{u}_2(t)\|_{H_{02}} \le k_6\left(\|u^0\|_{H^1(\Omega)}\right)\ , \quad \forall\, t \ge 0$$

où k_6 *est une fonction croissante de* $\|u^0\|_{H^1(\Omega)}$.

(ii) *Il existe une constante positive* R_5 , *tel que pour tout* $r_0 > 0$, *il existe un temps* $T_5(r_0) > 0$, *tel que si* $\|u^0\|_{H^1(\Omega)} \le r_0$, *alors :*
$\|\bar{u}_2\|_{H_{02}} \le R_5$, $\forall\, t \ge T_5(r_0)$.

Preuve . On utilise le lemme 2.7 (i) , et le fait que

$$\|A_{02}^{1/2} \bar{u}_2\|_{H_{02}}^2 \ge \mu_2^1 \|\bar{u}_2\|_{H_{02}}^2\ .$$

Grâce au lemme 2.4 , on peut appliquer le lemme 2.13 , avec

$$\xi = \sum_{i \ne 2} \|u_i^0\|_{H^1(\Omega_i)}$$

et

$$h(\xi, t) = c\left[1 + \sum_{i \ne 2} \|u_i(t)\|_{H^1(\Omega_i)}^{\gamma}\right]\ ,$$

d'où le résultat .

Lemme 2.15.
Pour tout $u^0 \in H^1(\Omega)$, la solution $\bar{u}_2(t)$ de (2.17) satisfait aux assertions suivantes:

$$(i) \qquad \|\bar{u}_2(t)\|_{H_0^1(\Omega_2)} \leq k_7\left(\|u^0\|_{H^1(\Omega)}\right) , \ \forall t \ \geq 0$$

où k_7 est une fonction croissante de $\|u^0\|_{H^1(\Omega)}$.
(ii) Il existe une constante positive R_6 , tel que pour tout $r_0 > 0$, il existe un temps $T_6(r_0) > 0$, tel que si $\|u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq r_0$, alors :
$\|\bar{u}_2\|_{H_0^1(\Omega_2)} \leq R_6 , \quad \forall t \ \geq T_6(r_0)$.

Preuve . On utilise le lemme 2.7 (ii) , et le fait que

$$\|A_{02}\bar{u}_2\|^2_{H_{02}} \geq \mu_2^1 \|A_{02}^{1/2}\bar{u}_2\|^2_{H_{02}} .$$

Grâce aux Lemmes 2.4 and 2.14 , on peut appliquer le Lemme 2.13 , où h est le membre de droite de l'inégalité du lemme 2.7(ii) , et où $\xi = \|u^0\|_{H^1(\Omega)}$, et on obtient le résultat .

La proposition suivante est une conséquence directe des lemmes 2.4(i) et 2.15(i).
Proposition 2.16. *Pour tout $R > 0$, il existe une constante positive $c(R)$, telle que pour tout $u^0 \in H^1(\Omega)$, avec $\|u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq R$, nous avons :*

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega)} + \|\Phi(\bar{u}_2(t), t)\|_{L^2(\Omega)} \leq c(R) , \quad \forall t \geq 0 .$$

Puisque $u_2(t) = \bar{u}_2(t) + \mathcal{R}(u_1(t), u_3(t))$, on déduit facilement des Lemmes 2.4 , 2.15 , et du fait que $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_3), H^1(\Omega_2))$, le corollaire suivant :
Corollaire 2.17. *Il existe une constante positive R_7 , tel que l'ensemble $\{v \in H^1(\Omega) , \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq R_7\}$ est un borné absorbant pour le semigroupe $S(t)$.*

Nous voulons montrer maintenant que $S(t)$ est une application compacte de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, pour tout $t > 0$.
Il est bien connu que si u_i est une solution de $(2.8)_i$ pour i = 1,3 , alors u_i satisfait à l'équation intégrale

$$u_i(t) = e^{-A_{0i}t}u_i^0 - \int_0^t e^{-A_{0i}(t-s)}[f(u_i(s)) + G_i^0]\, ds ,$$
$$\forall t \geq 0 , i = 1,3 . \tag{2.45$_i$}$$

Lemme 2.18. *Soit $u(t) = S(t)u^0$ pour $t > 0$, $u^0 \in H^1(\Omega)$.*
Pour tout $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, il existe une constante positive $c_8 = c_8(t, \|u^0\|_{H^1(\Omega)}, \delta)$ telle que :

$$(i) \qquad \|u_i(t)\|_{D(A_{0i}^{(1/2)+\delta})} \leq c_8 , \quad i = 1,3$$

$$(ii) \qquad \|\bar{u}_2(t)\|_{D(A_{02}^{(1/2)+\delta})} \leq c_8 .$$

Preuve . De $(2.45)_i$ on déduit :

$$\|u_i(t)\|_{D(A_{0i}^{1/2+\delta})} \leq c\, t^{-\delta} e^{-\mu_i^1 t} \|u_i^0\|_{D(A_{0i}^{1/2})} + \int_0^t c\,(t-s)^{-1/2-\delta} e^{-\mu_i^1(t-s)} [\|f(u_i(s))\|_{H_{02}} + \|G_i^0\|_{H_{0i}}]\, ds$$

pour $i = 1, 3$.
Alors (i) est une consequence directe de la Proposition 2.1(i) et du Lemme 2.4(i) .

Pour montrer (ii), on utilise la formule intégrale (2.31). De même qu'auparavant, on obtient :

$$\|\bar{u}_2(t)\|_{D(A_{02}^{1/2+\delta})} \leq c\, t^{-\delta} e^{-\mu_2^1 t} \|\bar{u}_2^0\|_{D(A_{02}^{1/2})} + \int_0^t c\,(t-s)^{-1/2-\delta} e^{-\mu_2^1(t-s)} [\|\Phi(\bar{u}_2(s),\, s)\|_{H_{02}}\, ds\ .$$

L'inégalité désirée s'obtient alors en utilisant le fait que la norme L^2 de $\Phi(\bar{u}_2(s), s)$ est bornée indépendemment en s (Proposition 2.16) .

Le lemme précédent nous permet d'énoncer

Corollaire 2.19. *Pour tout $t > 0$, l'application $S(t) : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ est compacte .*

Preuve . On applique le lemme 2.18 , avec $\delta \in (0, \frac{1}{4})$. Puisque $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(H^{1+2\delta}(\Omega_1) \times H^{1+2\delta}(\Omega_3)\ ,\ H^{1+2\delta}(\Omega_2))$, alors $u_i(t) \in H^{1+2\delta}(\Omega_i)$, $i = 1, 2, 3$.
D'autre part , $u_2(a, t) = u_1(a, t)$ et $u_2(b, t) = u_3(b, t)$,
ce qui implique $u(t) \in H^{1+2\delta}(\Omega)$, et

$$\|u(t)\|_{H^{1+2\delta}(\Omega)} \leq c\,(\delta) \sum_{i=1}^{3} \|u_i(t)\|_{H^{1+2\delta}(\Omega_i)}$$

(voir [?], Théorème 11.4, Chap. 1) .
En utilisant le Lemme 2.18 et le fait que l'injection de $H^{1+2\delta}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ est compacte , on obtient le corollaire .

Maintenant on peut appliquer un théorème bien connu (voir [8], Theorem 3.4.8).
En utilisant le fait que $S(t) : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ est un semigroupe C^0 , et aussi les Corollaires 2.17 et 2.19 , nous obtenons le résultat principal de cette section:

Théorème 2.20. *Le semigroupe $S(t)$ a un attracteur global $\mathcal{A}$ dans $H^1(\Omega)$, qui est connexe . En outre , l'ensemble des points d'equilibre de $S(t)$ est non vide .*

Nous pouvons obtenir un résultat plus précis concernant les points d'équilibre de $S(t)$.
Notons par E_0 l'ensemble des points d'équilibre de $S(t)$, et par E_{0i} l'ensemble des points d'équilibre de $S_i(t)$, $i = 1, 3$.

On définit comme dans [8] pour tout $u^0 \in H^1(\Omega)$:

$$\omega(u^0) = \cap_{t \geq 0} \overline{\cup_{s \geq t} S(t) u^0}\ ,$$

où l'adhérence est prise dans $H^1(\Omega)$.
On voit facilement du lemme 2.18 que pour tout $u^0 \in H^1(\Omega)$, $\cup_{t\geq 1} S(t)u^0$ est borné dans $H^{1+\delta}(\Omega)$ avec $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, ce qui nous dit que $\cup_{t\geq 1} S(t)u^0$ est relativement compact dans $H^1(\Omega)$.
Un résultat classique (voir [8] , Lemma 3.1.2 , page 36) nous dit alors que pour tout $u^0 \in H^1(\Omega)$, $\omega(u^0)$ est un ensemble non-vide, compact, invariant, et attire u^0, c'est-à-dire :

$$dist_{H^1(\Omega)}(S(t)u^0 \ , \ \omega(u^0)) \to 0 \quad \text{pour } t \to +\infty \ .$$

On définit dans la suite l'application V_0 de $H^1(\Omega)$ dans $I\!R$, par la relation

$$V_0(v) = \sum_{i=1}^{3} V_{0i}(v_i)$$

avec V_{0i} données dans (2.7).
Un simple calcul nous montre que si $u(t) = S(t)u^0$, alors

$$\frac{d}{dt}V_0(u(t)) = -\sum_{i=1}^{3} \| \frac{du_i}{dt} \|^2_{H_{0i}} + g_2(b)\frac{du_2}{dt}(b,\, t)\partial_{y_1}u_2(b,\, t) - g_2(a)\frac{du_2}{dt}(a,\, t)\partial_{y_1}u_2(a,\, t). \tag{2.46}$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.21. *Pour tout* $(\varphi_1 \ , \ \varphi_3) \in E_{01} \times E_{03}$, *il existe une fonction* $\varphi_2 \in H^1(\Omega_2)$ *de sorte que l'application* $\varphi : \Omega \to I\!R$ *telle que* $\varphi/\Omega_i = \varphi_i$, $i = 1, 2, 3$, *est un élément de* E_0.

Preuve.
Soit $(\varphi_1 \ , \ \varphi_3) \in E_{01} \times E_{03}$, et soit $\psi \in H^1(\Omega)$ tel que $\psi/\Omega_i = \varphi_i$, $i = 1, 3$.
On pose $u(t) = S(t)\psi$ pour tout $t \geq 0$, et on voit facilement que $u_i(t) = \varphi_i$ pour $i = 1, 3$. On obtient alors de (2.46) que

$$\frac{d}{dt}V_0(u(t)) = -\| \frac{du_2}{dt} \|^2_{H_{02}} \ ,$$

et donc $V_0(u(t))$ est décroissante.
Le lemme 2.3 nous dit que $V_0(u(t))$ est borné inférieurement, ce qui nous permet de déduire qu'il existe un nombre réel ξ , tel que

$$\lim_{t\to+\infty} V_0(u(t)) = \xi \ .$$

D'autre part, le fait que $\omega(\psi)$ est non-vide , ainsi que la continuité de V_0 , nous donnent

$$V_0(v) = \xi \ , \quad \forall\, v \in \omega(\psi).$$

Soit maintenant $\varphi \in \omega(\psi)$, et posons $\hat{u}(t) = S(t)\varphi$.
Puisque $\omega(\psi)$ est invariant pour le semigroupe $S(t)$, on peut écrire $V_0(\hat{u}(t)) = V_0(\varphi) = \xi$, et donc

$$\frac{d}{dt}V_0(\hat{u}(t)) = 0 \ .$$

Il est claire que $\varphi/\Omega_i = \varphi_i$, $i = 1,3$, ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{d}{dt}V_0(\hat{u}(t)) = -\|\frac{d\hat{u}_2}{dt}\|^2_{H_{02}} \ .$$

Il résulte que $\frac{d\hat{u}_2}{dt} = 0$, donc $\varphi \in E_0$.

3 Estimations de l'attracteur $\mathcal{A}^\epsilon$

3.1 Préliminaires

Sur $H^1(Q^\epsilon)$ on introduit la forme bilinéaire, continue, coercive :

$$\tilde{a}_\epsilon(\tilde{u},\tilde{v}) = \int_{Q^\epsilon} (\nabla_x \tilde{u} \cdot \nabla_x \tilde{v} + \alpha\, \tilde{u}\, \tilde{v})\, dx \ , \tag{3.1}$$

et on a :

$$min\,\{1,\alpha\}\, \|\tilde{v}\|^2_{H^1(Q^\epsilon)} \le \tilde{a}_\epsilon(\tilde{v},\, \tilde{v}) \le max\,\{1,\alpha\}\, \|\tilde{v}\|^2_{H^1(Q^\epsilon)} \tag{3.2}$$

pour tout $\tilde{v} \in H^1(Q^\epsilon)$.

On déduit classiquement que $\{H^1(Q^\epsilon),\, L^2(Q^\epsilon),\, \tilde{a}_\epsilon(\cdot,\cdot)\}$ définit un opérateur non borné $\tilde{A}_\epsilon$ sur $L^2(Q^\epsilon)$, de domaine :
$D(\tilde{A}_\epsilon) = \{\tilde{v} \in H^1(Q^\epsilon)$, tel que $-\Delta_x \tilde{v} + \alpha\tilde{v} \in L^2(Q^\epsilon)$ et $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = 0$ sur $\partial Q^\epsilon\}$

$$\begin{cases} \tilde{A}_\epsilon \tilde{v} = -\Delta_x \tilde{v} + \alpha\tilde{v} \\ \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \partial Q^\epsilon \ . \end{cases} \tag{3.3}$$

Nous voulons passer dans les coordonnées y_1 et y_2 sur Q_i , en utilisant le changement de variables θ introduit au paragraphe 1 .
Rappelons que, sur Q_i , $i = 1,3$, on a le changement de variable :

$$x_1 = y_1 \ , \ x_2 = \epsilon\, y_2 g_i(y_1) \ , \tag{3.4)'$$

tandis que sur Q_2 , on a :

$$x_1 = y_1 \ , \ x_2 = \epsilon^p y_2 g_2(y_1) \ . \tag{3.4)"$$

Si on pose $v = \tilde{v} \circ \theta$ pour $\tilde{v} \in H^1(Q^\epsilon)$, alors on peut écrire

$$\begin{cases} \partial_{x_1} \tilde{v}_i = \partial_{y_1} v_i - \frac{g_i'}{g_i} y_2 \partial_{y_2} v_i \\ \\ \partial_{x_2} \tilde{v}_i = \frac{1}{\epsilon g_i} \partial_{y_2} v_i \end{cases} \tag{3.5)$_i$}$$

sur Q_i, $i = 1,3$, et de même

$$\begin{cases} \partial_{x_1} \tilde{v}_2 = \partial_{y_1} v_2 - \frac{g_2'}{g_2} y_2 \partial_{y_2} v_2 \\ \\ \partial_{x_2} \tilde{v}_2 = \frac{1}{\epsilon^p g_2} \partial_{y_2} v_2 \end{cases} \tag{3.6}$$

sur Q_2 .

Sur le domaine Q on introduit les espaces suivants :

$H^\epsilon = \{v : Q \to I\!R \quad$ tel que $\exists \tilde{v} \in L^2(Q^\epsilon)$, $v = \tilde{v} \circ \theta\}$
muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^\epsilon} = \sum_{i \neq 2} \int_{Q_i} u_i v_i \, dy + \epsilon^{p-1} \int_{Q_2} u_2 v_2 \, dy \ . \tag{3.7}$$

On définit aussi l'espace H_g^ϵ qui est simplement l'espace H^ϵ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H_g^\epsilon} = \sum_{i \neq 2} (u_i \, , \, v_i)_{H_{gi}^\epsilon} + \epsilon^{p-1} (u_2 \, , \, v_2)_{H_{g2}^\epsilon} \ , \tag{3.8}$$

où on pose

$$(u_i \, , \, v_i)_{H_{gi}^\epsilon} = \int_{Q_i} g_i u_i v_i \, dy \ , \quad i = 1, 2, 3.$$

Il est évident que H^ϵ et H_g^ϵ sont des espaces de Hilbert, dont les normes sont équivalentes , et les constantes apparaîssant dans les inégalités d'équivalences sont indépendantes de ϵ .
On pose :
$X^\epsilon = \{v : Q \to I\!R \quad$ tel que $\exists \tilde{v} \in H^1(Q^\epsilon)$, $v = \tilde{v} \circ \theta\}$
muni de la norme

$$\|v\|_{X^\epsilon}^2 = \sum_{i \neq 2} \|v_i\|_{X_i^\epsilon}^2 + \epsilon^{p-1} \|v_2\|_{X_2^\epsilon}^2 \ , \tag{3.9}$$

où

$$\|v_i\|_{X_i^\epsilon}^2 = \|v_i\|_{H^1(Q_i)}^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \|\partial_{y_2} v_i\|_{L^2(Q_i)}^2 \ , \quad i = 1, 3 \tag{3.10}$$

et

$$\|v_2\|_{X_2^\epsilon}^2 = \|v_2\|_{H^1(Q_2)}^2 + \frac{1}{\epsilon^{2p}} \|\partial_{y_2} v_2\|_{L^2(Q_2)}^2 \ . \tag{3.11}$$

On va introduire la forme bilinéaire, continue, coercive suivante :
$a_\epsilon : X^\epsilon \times X^\epsilon \to I\!R$, avec

$$a_\epsilon(u,v) = \frac{1}{\epsilon} \tilde{a}_\epsilon(\tilde{u}, \tilde{v})$$

où $u = \tilde{u} \circ \theta$ et $v = \tilde{v} \circ \theta$ avec $\tilde{u}$, $\tilde{v} \in H^1(Q^\epsilon)$.
En utilisant les formules $(3.5)_i$ et (3.6) , on obtient

$$a_\epsilon(u,v) = \sum_{i \neq 2} \int_{Q_i} [(\partial_{y_1} u_i - \frac{g_i'}{g_i} y_2 \partial_{y_2} u_i) \cdot (\partial_{y_1} v_i - \frac{g_i'}{g_i} y_2 \partial_{y_2} v_i)$$

$$+ \frac{1}{\epsilon^2 g_i^2} \partial_{y_2} u_i \partial_{y_2} v_i + \alpha u_i v_i] g_i \, dy + \epsilon^{p-1} \int_{Q_2} [(\partial_{y_1} u_2 - \frac{g_2'}{g_2} y_2 \partial_{y_2} u_2) \cdot (\partial_{y_1} v_2 - \frac{g_2'}{g_2} y_2 \partial_{y_2} v_2)$$

$$+ \frac{1}{\epsilon^{2p} g_2^2} \partial_{y_2} u_2 \partial_{y_2} v_2 + \alpha u_2 v_2] g_2 \, dy \ , \quad \forall \, u \, , \, v \in X^\epsilon \ . \tag{3.12}$$

Il est facile de voir qu'il existe des constantes strictement positives ϵ_2 , c_{10} , et c_{11} , telles que pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$ et $v \in X^\epsilon$, on a

$$c_{10}\|v\|^2_{X^\epsilon} \leq a_\epsilon(v, v) \leq c_{11}\|v\|^2_{X^\epsilon} \tag{3.13}$$

(voir [10] , pag 40) .

On déduit facilement de (3.13) que X^ϵ est un espace de Hilbert .
On déduit aussi que $\{X^\epsilon , H^\epsilon_g , a_\epsilon(\cdot,\cdot)\}$ définit un opérateur non borné A_ϵ sur H^ϵ_g , de domaine :

$D(A_\epsilon) = \{u \in X^\epsilon , \exists P \in H^\epsilon$ tel que $a_\epsilon(u,v) = (P,v)_{H^\epsilon_g}$, pour tout $v \in X^\epsilon\}$
et on définit A_ϵ à l'aide de l'égalité variationnelle

$$a_\epsilon(u,v) = (A_\epsilon u, v)_{H^\epsilon_g} , \quad \forall\, u \in D(A_\epsilon) , \quad \forall\, v \in X^\epsilon . \tag{3.14}$$

Remarque 3.1
(i) On peut dire que :
$D(A_\epsilon) = \{v : Q \to R$, tel que $\exists \tilde{v} \in D(\tilde{A}_\epsilon)$, $v = \tilde{v} \circ \theta\}$.
(ii) Pour $v \in D(A_\epsilon)$, l'expression de $A_\epsilon v$ s'obtient à partir de celle de $\tilde{A}_\epsilon$, en utilisant les changement de variables (3.4)' et (3.4)" (on va obtenir des expressions différentes sur Q_1 , Q_2 et Q_3) .
On obtient les conditions limites par le même procédé .

Dans la suite nous aurons besoin d'imposer une condition plus restrictive sur la fonction f.
Partout dans ce travail on va supposer qu'en dehors des conditions (1.5)-(1.7), f satisfait à l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$(H1)\begin{cases} \text{ou bien } (i) \quad \limsup_{|x|\to\infty}[-f'(x)] \leq 0 \\ \\ \text{ou bien } (ii) \quad \text{Il existe une constante positive } c \text{ et une constante } \gamma_1{}' \in [0,1) , \\ \text{telles que : } \quad |f(x) - f(y)| \leq c[1 + |x-y|^{\gamma_1{}'}] , \quad \forall x,y \in I\!R \\ \text{(ce qui est vrai si, par exemple, } f \text{ est bornée sur } I\!R \text{) .} \end{cases}$$

Lemme 3.2. *L'hypothèse **(H1)** entraine la condition (1.5) .*

Preuve. La condition $(\mathbf{H1})(ii)$ implique (1.5) de manière évidente.

Supposons que $(\mathbf{H1})(i)$ est satisfaite. Alors, pour tout $\eta > 0$, il existe $M_\eta > 0$ tel que
$-f'(s) \leq \frac{\eta}{2}$, $\forall\, s$ avec $|s| \geq M_\eta$.
Si on remarque maintenant que

$$-\frac{f(s)}{s} = -\frac{f(s) - f(\pm M_\eta)}{s \mp M_\eta}\,\frac{s \mp M_\eta}{s} - \frac{f(\pm M_\eta)}{s}$$

on déduit immédiatement (1.5).

Dans la suite, on utilisera souvent la propriété suivante :

Lemme 3.3. *De l'hypothèse* **(H1)** *il résulte que pour tout* $\eta > 0$ *, il existe une constante positive* c_η *, telle que*

$$-[f(x) - f(y)](x-y) \leq \eta(x-y)^2 + c_\eta\,, \quad \forall\, x, y \in I\!R\,.$$

Preuve.
L'hypothèse $(\mathbf{H1})(ii)$ entraine le Lemme 3.3 de manière triviale.

Supposons que $(\mathbf{H1})(i)$ est satisfaite. Alors il résulte que pour tout $\eta > 0$, il existe une constante strictement positive M_η, telle que

$-f'(s) \leq \frac{\eta}{3}$ pour tout s , $|s| \geq M_\eta$.

On peut supposer que $x \geq y$. Nous avons plusieurs cas :

Cas 1. Si x , $y \geq M_\eta$.

Dans ce cas, on peut immédiatement écrire

$$-[f(x) - f(y)](x-y) \leq \frac{\eta}{3}(x-y)^2\,.$$

Cas 2. Si $x \geq M_\eta$, $y < M_\eta$.

On décompose de la manière suivante :

$$-[f(x) - f(y)](x-y) = -[f(x) - f(M_\eta)](x-y)$$

$$-[f(M_\eta) - f(-M_\eta)](x-y) - [f(-M_\eta) - f(y)](x-y)\,.$$

Puisque f est continue, il existe une constante $a_\eta > 0$ telle que

$|f(z)| \leq a_\eta$, $\forall\, z \in [-M_\eta, M_\eta]$.

On distingue les sous-cas suivants :

Cas 2.a. Si $y > -M_\eta$, alors on déduit

$$-[f(x) - f(y)](x-y) \leq \frac{\eta}{3}(x-y)^2 + 4\,a_\eta(x-y) \leq \frac{2\,\eta}{3}(x-y)^2 + c_\eta\,.$$

Cas 2.b. Si $y < -M_\eta$, alors on a

$$-[f(x) - f(y)](x-y) \leq \frac{2\,\eta}{3}(x-y)^2 + 2\,a_\eta(x-y) \leq \eta(x-y)^2 + c_\eta\,.$$

Cas 3. Si x , $y \leq -M_\eta$,

alors on fait comme dans le cas 1 , ce qui finit la preuve .

On va introduire des applications qui seront utiles dans la suite .

Pour tout $v_i \in L^2(Q_i)$, $i = 1, 2, 3$ on définit

$M_i v_i : \Omega_i \to I\!R$, par l'expression

$$(M_i v_i)(y_1) = \int_0^1 u_i(y_1, y_2)\, dy_2\,, \qquad \text{pour presque tout } y_1 \in \Omega_i\,.$$

On va utiliser les lemmes suivants concernant les applications M_i :

Lemme 3.4. *(voir [10])*
(i) Soit s un réel positif.
Pour tout $v_i \in H^s(Q_i)$, nous avons $M_i v_i \in H^s(\Omega_i)$, avec

$$\|M_i v_i\|_{H^s(\Omega_i)} \leq c\,\|v_i\|_{H^s(Q_i)}$$

où c est une constante positive .
(ii) Soit $q \geq 1$. Pour tout $v_i \in W^{1,q}(Q_i)$, on a

$$\|v_i - M_i v_i\|_{L^q(Q_i)} \leq 2\|\partial_{y_2} v_2\|_{L^q(Q_i)}\ , \quad i = 1,2,3\ .$$

Lemme 3.5. *(voir [9])*
Il existe une constante positive c , telle que pour tout $\sigma \geq 2$, $s \in (1,2)$, on a pour i=1,2,3 :

$$\|v_i - M_i v_i\|_{L^\sigma(Q_i)} \leq c\left(\frac{s}{2-s}\right)^{\frac{s(\sigma-2)}{2(s-1)\sigma}} \epsilon^{r_i[1-\frac{s(\sigma-2)}{4(s-1)\sigma}]}\|v_i\|_{X_i^\epsilon}$$

pour tout $v_i \in H^1(Q_i)$, où on pose $r_i = 1$ pour $i = 1,3$ et $r_2 = p$.

3.2 Estimations uniformes de l'ensemble des points d'équilibre

Rappelons qu'on a noté par $\tilde{S}^\epsilon$, le semigroupe C^0 sur $H^1(Q^\epsilon)$, associé au problème $(1.4)_\epsilon$.
Si on passe dans les coordonées y_1 et y_2 sur Q , on peut définir un semigroupe $S^\epsilon(t)$ de la manière suivante :
$u_0^\epsilon \in X^\epsilon \to S^\epsilon(t)u_0^\epsilon = u^\epsilon(t) \in X^\epsilon$, où $u^\epsilon(t)$ est la solution du système

$$\frac{du^\epsilon}{dt} + A_\epsilon u^\epsilon = -f(u^\epsilon) - G^\epsilon\ , \quad u^\epsilon(0) = u_0^\epsilon\ . \qquad (3.15)_\epsilon$$

Il est évident que les semigroupes $\tilde{S}^\epsilon$ et S^ϵ sont liés par la relation

$$S^\epsilon(t)(\tilde{u}_0 \circ \theta) = (\tilde{S}^\epsilon(t)\tilde{u}_0) \circ \theta\ . \qquad (3.16)$$

On peut aussi définir l'ensemble des points d'équilibre $\tilde{E}^\epsilon$ et E^ϵ des semigroupes $\tilde{S}^\epsilon$ et S^ϵ , respectivement.
Évidemment :
$E^\epsilon = \{v \in X^\epsilon$, tel que $\exists \tilde{v} \in \tilde{E}^\epsilon$, $v = \tilde{v} \circ \theta\ \}$.
$\tilde{E}^\epsilon$ est l'ensemble des $\tilde{\varphi}^\epsilon \in H^1(Q^\epsilon)$, qui satisfont à l'équation

$$\tilde{A}_\epsilon \tilde{\varphi}^\epsilon = -f(\tilde{\varphi}^\epsilon) - \tilde{G}\ . \qquad (3.17)$$

Les points de E^ϵ vont satisfaire à l'équation :

$$A_\epsilon \varphi^\epsilon = -f(\varphi^\epsilon) - G^\epsilon\ . \qquad (3.18)$$

On introduit la fonctionnelle de Lyapunov suivante sur $H^1(Q^\epsilon)$:

$$\tilde{V}_\epsilon(\tilde{\psi}) = \int_{Q^\epsilon} \left[\frac{1}{2}| \nabla_x \tilde{\psi}|^2 + \frac{1}{2}\alpha|\tilde{\psi}|^2 + F(\tilde{\psi}) + \tilde{G}\tilde{\psi}\right] dx \,. \tag{3.19}$$

Il est bien connu que si $\tilde{u}^\epsilon = \tilde{S}^\epsilon(t)\tilde{u}_0^\epsilon$, alors pour tout $t > 0$ on a

$$\frac{d}{dt}\tilde{V}_\epsilon(\tilde{u}^\epsilon(t)) = -\|\frac{d\tilde{u}^\epsilon}{dt}(t)\|^2_{L^2(Q^\epsilon)} \,, \tag{3.20}$$

et que $\tilde{S}^\epsilon$ est un système gradient qui admet un attracteur global $\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon$ dans $H^1(Q^\epsilon)$. En outre $\tilde{E}^\epsilon$ est non-vide , et $\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon$ est l'ensemble instable de $\tilde{E}^\epsilon$ (voir [8]) .
Évidement, on peut dire la même chose de S^ϵ , c'est à dire , S^ϵ est un système gradient qui admet un attracteur global $\mathcal{A}^\epsilon$ dans X^ϵ , et $\mathcal{A}^\epsilon$ est l'ensemble instable de E^ϵ. En outre

$$\mathcal{A}^\epsilon = \{v \in X^\epsilon \text{ , tel que } \exists \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{A}}^\epsilon \text{ , } v = \tilde{v} \circ \theta\} \,.$$

La norme $\| \cdot \|_{X^\epsilon}$ définie en (3.9) n'est pas adéquate quand on veut comparer les attracteurs $\mathcal{A}^\epsilon$ et $\mathcal{A}$, à cause du coefficient ϵ^{p-1} qui apparait dans l'expression de cette norme.
C'est pourquoi, nous avons besoin d'une autre norme, et on désigne par Y^ϵ l'espace X^ϵ , muni de la norme :

$$\|v\|^2_{Y^\epsilon} = \sum_{i=1}^{3} \|v_i\|^2_{X_i^\epsilon} \tag{3.21}$$

(on a remplacé ϵ^{p-1} par 1 dans la définition du carré de la norme de X^ϵ) .

Nous voulons maintenant obtenir des estimations sur l'ensemble des points d'équilibre E^ϵ .
Dans une première étape nous montrons que E^ϵ est un ensemble uniformément borné dans la norme de X^ϵ .

Proposition 3.6. *Il existe des constantes strictement positives c et ϵ_2 , tel que pour $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$, nous avons pour tout $\varphi^\epsilon \in E^\epsilon$*

$$\|\varphi^\epsilon\|_{X^\epsilon} \leq c \,,$$

c'est à dire :

(*i*) $\|\varphi_i^\epsilon\|_{X_i^\epsilon} \leq c$, $i = 1, 3$
et
(*ii*) $\|\varphi_2^\epsilon\|_{X_2^\epsilon} \leq c\epsilon^{(1-p)/2}$.

Preuve . On fait le produit scalaire de l'équation (3.18) avec φ^ϵ dans H_g^ϵ , et on utilise la propriété (2.9)(i) et la coercivité (3.13) de a_ϵ .

En fait, on peut améliorer la majoration (ii) de la proposition 3.6 , de la manière suivante :

Proposition 3.7. *Il existe des constantes strictement positives c et ϵ_2 , telles que pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$ et $\varphi^\epsilon \in E^\epsilon$, on a*

$$\|\varphi^\epsilon\|_{Y^\epsilon} \le c \, .$$

Preuve . Il suffit de majorer $\|\varphi_2^\epsilon\|_{X_2^\epsilon}$.
On va comparer les fonctions φ_i^ϵ à des fonctions $\bar{\varphi}_i^\epsilon$, $i = 1,2,3$ définies sur Ω_i , où $\bar{\varphi}_1^\epsilon$ et $\bar{\varphi}_3^\epsilon$ sont les solutions des problèmes suivants :

$$\begin{cases} -\frac{1}{g_i}\partial_{y_1}(g_i \partial_{y_1} \bar{\varphi}_i^\epsilon) + \alpha \bar{\varphi}_i^\epsilon = -f(M_i \varphi_i^\epsilon) - G_i^0 \text{ dans } \Omega_i \\ \\ \partial_{y_1} \bar{\varphi}_i^\epsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \end{cases} \qquad (3.22)_i$$

pour $i = 1,3$, et où on pose

$$\bar{\varphi}_2^\epsilon = \mathcal{R}(\bar{\varphi}_1^\epsilon, \bar{\varphi}_3^\epsilon) \, .$$

Il est évident qu'il existe une solution unique du problème $(3.22)_i$ dans l'espace $H^1(\Omega_i)$, parce que $(-f(M_i\varphi_i^\epsilon) - G_i^0)$ appartient à $L^2(\Omega_i)$.
En outre , $\bar{\varphi}_i^\epsilon$ satisfait à l'équation variationnelle

$$a_{0i}(\bar{\varphi}_i^\epsilon , w_i) = \Big(-f(M_i\varphi_i^\epsilon) - G_i^0 \, , \, w_i\Big)_{H_{0i}} \, , \quad \forall\, w_i \in H^1(\Omega_i) \, , \, i = 1,3 \, , \qquad (3.23)_i$$

où $a_{0i}(\cdot, \, \cdot)$ a été défini en (2.2), et nous avons:

$$\|\bar{\varphi}_i^\epsilon\|_{H^1(\Omega_i)} \le c\,[\|f(M_i\varphi_i^\epsilon)\|_{L^2(\Omega_i)} + \|G_i^0\|_{L^2(\Omega_i)}] \, , \quad i = 1,3.$$

Puisque φ_i^ϵ est borné uniformément en ϵ dans la norme de $H^1(Q_i)$, $M_i\varphi_i^\epsilon$ est borné uniformément dans la norme de $H^1(\Omega_i)$.

En utilisant aussi la Proposition 2.1(i) , on obtient

$$\|\bar{\varphi}_i^\epsilon\|_{H^1(\Omega_i)} \le c \, , \; i = 1,3 \, , \qquad (3.24)_i$$

ce qui implique

$$\|\bar{\varphi}_2^\epsilon\|_{H^1(\Omega_2)} \le c \, . \qquad (3.25)$$

Puisque $\varphi^\epsilon \in E^\epsilon$, φ^ϵ satisfait à l'équation variationnelle suivante :

$$a_\epsilon(\varphi^\epsilon, v) = -\sum_{i\neq 2} \int_{Q_i} g_i f(\varphi_i^\epsilon) v_i - \epsilon^{p-1} \int_{Q_2} g_2 f(\varphi_2^\epsilon) v_2$$

$$-\sum_{i\neq 2} \int_{Q_i} g_i G_i^\epsilon v_i - \epsilon^{p-1} \int_{Q_2} g_2 G_2^\epsilon v_2 \, , \quad \forall\, v \in X^\epsilon \, . \qquad (3.26)$$

D'autre part , de la Proposition 2.5 on déduit que $\bar{\varphi}_2^\epsilon$ satisfait à

$$-\frac{1}{g_2}\partial_{y_1}(g_2 \partial_{y_1} \bar{\varphi}_2^\epsilon) + \alpha \bar{\varphi}_2^\epsilon = \bar{\Phi}_1(\bar{\varphi}_1^\epsilon, \varphi_1^\epsilon) + \bar{\Phi}_3(\bar{\varphi}_3^\epsilon, \varphi_3^\epsilon) \, , \qquad (3.27)$$

où on a posé :

$$\bar{\Phi}_1(v_1, v_1^\epsilon)(y_1) = \begin{cases} -\rho_1[f(M_1 v_1^\epsilon)(2a - y_1) + G_1^0(2a - y_1)] + \mathcal{R}_1^*(v_1)(y_1) \\ \text{pour } y_1 \in [a, a + 3d] \\ 0 \qquad \text{pour } y_1 \in [a + 3d, b) \end{cases} \tag{3.28}$$

et

$$\bar{\Phi}_3(v_3, v_3^\epsilon)(y_1) = \begin{cases} -\rho_3[f(M_3 v_3^\epsilon)(2b - y_1) + G_3^0(2b - y_1)] + \mathcal{R}_3^*(v_3)(y_1) \\ \text{pour } y_1 \in [b - 3d, b] \\ 0 \qquad \text{pour } y_1 \in [a, b - 3d) \end{cases} \tag{3.29}$$

pour $v_i \in H^1(\Omega_i)$ et $v_i^\epsilon \in H^1(Q_i)$, $i = 1, 3$.

On a aussi

$$\partial_{y_1} \bar{\varphi}_2^\epsilon = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega_2 . \tag{3.30}$$

C'est pourquoi , $\bar{\varphi}_2^\epsilon$ satisfait à l'équation variationnelle suivante :

$$a_{02}(\bar{\varphi}_2^\epsilon , w_2) = \left(\bar{\Phi}_1(\bar{\varphi}_1^\epsilon, \varphi_1^\epsilon) + \bar{\Phi}_3(\bar{\varphi}_3^\epsilon, \varphi_3^\epsilon) , w_2\right)_{H_{02}} , \quad \forall\, w_2 \in H^1(\Omega_2) . \tag{3.31}$$

Puisque, pour tout $v \in X^\epsilon$, $M_i v_i$ est dans $H^1(\Omega_i)$, on peut remplacer, dans (3.31) et $(3.23)_i$, w_i par $M_i v_i$, où v est dans X^ϵ.

Si on multiplie (3.31) par ϵ^{p-1} , et on ajoute au résultat obtenu les relations $(3.23)_1$ et $(3.23)_3$, on a

$$\begin{aligned} a_\epsilon(\bar{\varphi}^\epsilon, v) = &-\sum_{i\neq 2} \left(f(M_i\varphi_i^\epsilon) + G_i^0 , v_i\right)_{H_{gi}^\epsilon} + \epsilon^{p-1} \left(\bar{\Phi}_1(\bar{\varphi}_1^\epsilon, \varphi_1^\epsilon) + \bar{\Phi}_3(\bar{\varphi}_3^\epsilon, \varphi_3^\epsilon) , v_2\right)_{H_{g2}^\epsilon} \\ &- \sum_{i\neq 2} \int_{Q_i} g_i' y_i\, \partial_{y_1}\bar{\varphi}_i^\epsilon\, \partial_{y_2} v_i - \epsilon^{p-1} \int_{Q_2} g_2' y_2\, \partial_{y_1}\bar{\varphi}_2^\epsilon\, \partial_{y_2} v_2 , \quad \forall\, v \in X^\epsilon . \end{aligned} \tag{3.32}$$

De (3.26) et (3.32) il vient

$$\begin{aligned} a_\epsilon(\varphi^\epsilon - \bar{\varphi}^\epsilon, v) = &-\sum_{i\neq 2} (f(\varphi_i^\epsilon) - f(M_i\varphi_i^\epsilon) , v_i)_{H_{gi}^\epsilon} - \sum_{i\neq 2} \left(G_i^\epsilon - G_i^0 , v_i\right)_{H_{gi}^\epsilon} \\ &-\epsilon^{p-1} (f(\varphi_2^\epsilon) + G_2^\epsilon , v_2)_{H_{g2}^\epsilon} - \epsilon^{p-1} \left(\bar{\Phi}_1(\bar{\varphi}_1^\epsilon, \varphi_1^\epsilon) + \bar{\Phi}_3(\bar{\varphi}_3^\epsilon, \varphi_3^\epsilon) , v_2\right)_{H_{g2}^\epsilon} \\ &+\sum_{i\neq 2} \int_{Q_i} g_i' y_2\, \partial_{y_1}\bar{\varphi}_i^\epsilon\, \partial_{y_2} v_i + \epsilon^{p-1} \int_{Q_2} g_2' y_2\, \partial_{y_1}\bar{\varphi}_2^\epsilon\, \partial_{y_2} v_2 , \quad \forall\, v \in X^\epsilon . \end{aligned} \tag{3.33}$$

Puisque $\varphi^\epsilon - \bar{\varphi}^\epsilon \in X^\epsilon$, nous pouvons prendre $v = \varphi^\epsilon - \bar{\varphi}^\epsilon$ dans (3.33) , et on obtient:

$$\begin{aligned} a_\epsilon(\varphi^\epsilon - \bar{\varphi}^\epsilon, \varphi^\epsilon - \bar{\varphi}^\epsilon) = &-\sum_{i\neq 2} (f(\varphi_i^\epsilon) - f(M_i\varphi_i^\epsilon) , \varphi_i^\epsilon - \bar{\varphi}_i^\epsilon)_{H_{gi}^\epsilon} - \sum_{i\neq 2} \left(G_i^\epsilon - G_i^0 , \varphi_i^\epsilon - \bar{\varphi}_i^\epsilon\right)_{H_{gi}^\epsilon} \\ &-\epsilon^{p-1} (f(\varphi_2^\epsilon) - f(\bar{\varphi}_2^\epsilon) , \varphi_2^\epsilon - \bar{\varphi}_2^\epsilon)_{H_{g2}^\epsilon} - \epsilon^{p-1} (f(\bar{\varphi}_2^\epsilon) , \varphi_2^\epsilon - \bar{\varphi}_2^\epsilon)_{H_{g2}^\epsilon} \end{aligned}$$

$$-\epsilon^{p-1}\,(G_2^\epsilon\ ,\ \varphi_2^\epsilon-\bar\varphi_2^\epsilon)_{H^\epsilon_{g2}}-\epsilon^{p-1}\left(\bar\Phi_1(\bar\varphi_1^\epsilon,\varphi_1^\epsilon)+\bar\Phi_3(\bar\varphi_3^\epsilon,\varphi_3^\epsilon)\ ,\ \varphi_2^\epsilon-\bar\varphi_2^\epsilon\right)_{H^\epsilon_{g2}}$$

$$+\sum_{i\neq 2}\int_{Q_i} g_i'\,y_2\,\partial_{y_1}\bar\varphi_i^\epsilon\,\partial_{y_2}(\varphi_i^\epsilon-\bar\varphi_i^\epsilon)+\epsilon^{p-1}\int_{Q_2} g_2'\,y_2\,\partial_{y_1}\bar\varphi_2^\epsilon\,\partial_{y_2}(\varphi_2^\epsilon-\bar\varphi_2^\epsilon)\,. \tag{3.34}$$

On va majorer chaque terme du membre de droite de l'égalité (3.34). On a d'abord, en utilisant la majoration (1.6) sur f' :

$$\int_{Q_i} g_i[f(\varphi_i^\epsilon)-f(M_i\varphi_i^\epsilon)](\varphi_i^\epsilon-\bar\varphi_i^\epsilon)\le\eta\|\varphi_i^\epsilon-\bar\varphi_i^\epsilon\|^2_{H^\epsilon_{gi}}$$

$$+c_\eta\int_{Q_i} g_i[f(\varphi_i^\epsilon)-f(M_i\varphi_i^\epsilon)]^2\,dy\qquad\text{pour } i=1,3\,. \tag{3.35}$$

La majoration (1.6) de f' nous donne :

$$\int_{Q_i} g_i[f(\varphi_i^\epsilon)-f(M_i\varphi_i^\epsilon)]^2\le c\int_{Q_i}[1+|\varphi_i^\epsilon|^{2\gamma_1}+|M_i\varphi_i^\epsilon|^{2\gamma_1}]|\varphi_i^\epsilon-M_i\varphi_i^\epsilon|^2\,dy\,.$$

Soit $\sigma>2$. Nous appliquons l'inégalité de Hölder avec les exposants $\frac{\sigma}{\sigma-2}$ et $\frac{\sigma}{2}$, et utilisons le fait que $\|\varphi_i^\epsilon\|_{H^1(Q_i)}\le c$, $i=1,3$, d'où :

$$\int_{Q_i}[f(\varphi_i^\epsilon)-f(M_i\varphi_i^\epsilon)]^2dy\le c(\sigma)\|\varphi_i^\epsilon-M_i\varphi_i^\epsilon\|^2_{L^\sigma(Q_i)}\,.$$

On peut choisir $\sigma>2$ assez proche de 2 , tel que , si on applique le lemme 3.5 , on déduit de l'inégalité ci-dessus :

$$\int_{Q_i}[f(\varphi_i^\epsilon)-f(M_i\varphi_i^\epsilon)]^2dy\le c\epsilon^{p-1}\ ,\quad i=1,3\,. \tag{3.36}$$

En utilisant le fait que G^ϵ est borné dans $L^\infty(Q)$ uniformément en ϵ , et l'estimation (1.3) de $G^\epsilon-G^0$, on obtient :

$$\begin{cases}\int_{Q_i} g_i(G_i^\epsilon-G_i^0)(\varphi_i^\epsilon-\bar\varphi_i^\epsilon)\le\eta\|\varphi_i^\epsilon-\bar\varphi_i^\epsilon\|^2_{L^2(Q_i)}+c_\eta\epsilon^2\\[2mm] |\epsilon^{p-1}\int_{Q_2} g_2G_2^\epsilon(\varphi_2^\epsilon-\bar\varphi_2^\epsilon)|\le\eta\epsilon^{p-1}\|\varphi_2^\epsilon-\bar\varphi_2^\epsilon\|^2_{L^2(Q_2)}+c_\eta\epsilon^{p-1}\,.\end{cases} \tag{3.37}$$

Le lemme 3.3 nous donne

$$-\epsilon^{p-1}\int_{Q_2} g_2[f(\varphi_2^\epsilon)-f(\bar\varphi_2^\epsilon)](\varphi_2^\epsilon-\bar\varphi_2^\epsilon)\le\eta\epsilon^{p-1}\|\varphi_2^\epsilon-\bar\varphi_2^\epsilon\|^2_{L^2(Q_2)}+c_\eta\epsilon^{p-1}\,. \tag{3.38}$$

Puisque $\bar\varphi_2^\epsilon$ est borné dans $H^1(\Omega_2)$ uniformément en ϵ , il vient

$$|\epsilon^{p-1}\int_{Q_2} g_2f(\bar\varphi_2^\epsilon)(\varphi_2^\epsilon-\bar\varphi_2^\epsilon)|\le\eta\epsilon^{p-1}\|\varphi_2^\epsilon-\bar\varphi_2^\epsilon\|^2_{L^2(Q_2)}+c_\eta\epsilon^{p-1}\,. \tag{3.39}$$

On voit facilement que $\Phi_i(\bar\varphi_i^\epsilon,\varphi_i^\epsilon)$ est borné dans $L^2(Q_2)$ uniformément en ϵ, donc on déduit que

$$|\epsilon^{p-1}\int_{Q_2} g_2[\bar\Phi_1(\bar\varphi_1^\epsilon,\varphi_1^\epsilon)+\bar\Phi_3(\bar\varphi_3^\epsilon,\varphi_3^\epsilon)](\varphi_2^\epsilon-\bar\varphi_2^\epsilon)|$$

$$\leq \eta \epsilon^{p-1} \|\varphi_2^\epsilon - \bar{\varphi}_2^\epsilon\|^2_{L^2(Q_2)} + c_\eta \epsilon^{p-1} . \tag{3.40}$$

Finalement nous avons

$$| \int_{Q_i} g_i' y_2 \, \partial_{y_1} \bar{\varphi}_i^\epsilon \, \partial_{y_2} (\varphi_i^\epsilon - \bar{\varphi}_i^\epsilon) | \leq c \|\bar{\varphi}_i^\epsilon\|_{H^1(\Omega_i)} \epsilon^{r_i} \|\varphi_i^\epsilon - \bar{\varphi}_i^\epsilon\|_{X_i^\epsilon}$$

$$\leq \eta \|\varphi_i^\epsilon - \bar{\varphi}_i^\epsilon\|^2_{X_i^\epsilon} + c_\eta \epsilon^{2r_i} \text{ , pour } i = 1, 2, 3 . \tag{3.41}$$

De (3.34) , en utilisant la coercivité uniforme (3.13) de a_ϵ et les inégalités (3.35) – (3.41) , on déduit en choisissant η assez petit , que

$\|\varphi^\epsilon - \bar{\varphi}^\epsilon\|^2_{X^\epsilon} \leq c\epsilon^{p-1}$, donc implicitement

$\|\varphi_2^\epsilon - \bar{\varphi}_2^\epsilon\|^2_{X_2^\epsilon} \leq c$, ce qui avec (3.25) nous donne le résultat .

3.3 Estimations uniformes de l'attracteur.

Nous voulons obtenir maintenant des estimations pour les éléments de l'attracteur $\mathcal{A}^\epsilon$.

Proposition 3.8. *Si $\tilde{V}_\epsilon$ est la fonctionnelle de Lyapunov donnée en* (3.19) , *alors il existe une constante strictement positive ϵ_2 , telle que pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$, on a :*

$$(i) \qquad \tilde{V}_\epsilon(\tilde{\psi}) \geq c_{12} \|\tilde{\psi}\|^2_{H^1(Q^\epsilon)} - c_{13}\epsilon , \quad \forall \, \tilde{\psi} \in H^1(Q^\epsilon)$$

où c_{12} et c_{13} sont des constantes positives indépendantes de ϵ, et

$$(ii) \qquad \tilde{V}_\epsilon(\tilde{\psi}) \leq c\,\epsilon , \quad \forall \, \tilde{\psi} \in \tilde{\mathcal{A}}^\epsilon .$$

Preuve . La propriété (i) est évidente si on utilise (2.9)(ii).
Pour démontrer la propriété (ii) on utilise le fait que $\tilde{\mathcal{A}}^\epsilon$ est l'ensemble instable de $\tilde{E}^\epsilon$.
Pour tout $\tilde{\psi} \in \tilde{\mathcal{A}}^\epsilon$, il existe un point $\tilde{u}^0$ proche de $\tilde{E}^\epsilon$ et un temps $T > 0$, tels que $\tilde{\psi} = \tilde{S}^\epsilon(T)\tilde{u}^0$.
On peut choisir $\tilde{u}^0$ de sorte qu'il existe $\tilde{\varphi}^0 \in \tilde{E}^\epsilon$, tel que

$$\|\tilde{u}^0 - \tilde{\varphi}^0\|_{H^1(Q^\epsilon)} \leq c\epsilon^{\frac{p}{2}} .$$

Si on note $u^0 = \tilde{u}^0 \circ \theta$ et $\varphi^0 = \tilde{\varphi}^0 \circ \theta$, alors

$$a_\epsilon(u^0 - \varphi^0, u^0 - \varphi^0) \leq c\epsilon^{p-1} .$$

Puisque φ^0 est borné dans la norme de Y^ϵ uniformément en ϵ , on déduit que

$$\|u^0\|_{Y^\epsilon} \leq c . \tag{3.42}$$

D'autre part , $\tilde{V}^\epsilon$ est décroissante sur l'orbite positive de $\tilde{S}^\epsilon$, c'est à dire

$$\tilde{V}_\epsilon(\tilde{\psi}) \leq \tilde{V}_\epsilon(\tilde{u}^0). \tag{3.43}$$

En passant dans les coordonnées y sur Q , et en utilisant (3.13) et (2.10)(ii), on obtient

$$\tilde{V}_\epsilon(\tilde{u}^0) \leq c\,\epsilon\,[1 + \sum_{i\neq 2} \|u_i^0\|^2_{X_i^\epsilon} + \int_{Q_i} |u_i^0|^{\gamma_1+2}\,dy]$$

$$+c\,\epsilon^p[1 + \|u_2^0\|^2_{X_2^\epsilon} + \int_{Q_2} |u_2^0|^{\gamma_1+2}\,dy]\ ,$$

donc, grâce à (3.42) , nous déduisons

$$\tilde{V}_\epsilon(\tilde{u}^0) \leq c\,\epsilon\ ,$$

ce qui, avec (3.43), donne le résultat.

Comme conséquence directe de la Proposition 3.8 , nous avons le corollaire suivant:

Corollaire 3.9. *Il existe des constantes strictement positives c et ϵ_2 , telles que pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$ et $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$, on a*

$$\|\psi^\epsilon\|_{X^\epsilon} \leq c\ ,$$

c'est-à-dire :

(i) $\|\psi_i^\epsilon\|_{X_i^\epsilon} \leq c\ , \quad i = 1, 3$

et

(ii) $\|\psi_2^\epsilon\|_{X_2^\epsilon} \leq c\,\epsilon^{(1-p)/2}$.

Nous voulons obtenir dans la suite une majoration uniforme de $\mathcal{A}^\epsilon$ dans la norme de Y^ϵ. Pour y arriver, on va utiliser les trois résultats suivants :

Proposition 3.10. *(lemme de Gromwal) Soit $\bar{a} > 0$, $\bar{b} \geq 0$, et $x(t)$ une fonction absolument continue, positive et définie sur $(0, +\infty)$, telle que :*
$x'(t) + \bar{a}\,x(t) \leq \bar{b}$, avec $x(0) = x_0$, $x_0 \geq 0$.
Alors x satisfait à l'inégalité

$$x(t) \leq x_0\,e^{-\bar{a}t} + \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\ .$$

Si A est un opérateur sectoriel sur un espace de Banach X, tel que la partie réelle du spectre de A soit strictement positive, on note $X_\sigma = D(A^\sigma)$ pour $\sigma \in [0, 1]$.

Lemma 3.11. *On se donne trois constantes $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta} \in [0, 1]$ et $t_0 \geq 0$.*
Supposons qu'une fonction v de $(t_0, +\infty)$ à valeurs dans $D(A)$ soit solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av = h(t) & \text{pour } t \geq t_0 \\ v(t_0) = v^0 \end{cases}$$

où $v^0 \in X_{\bar\alpha}$, et où $h : (t_0, +\infty) \to X$, est telle que

$$\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-1-\bar\beta} \|h(t) - h(s)\|_X \, ds < +\infty \qquad \text{pour tout } t \geq t_0 \, .$$

Alors pour tout $T > 0$ il existe une constante positive $c(T)$, telle que

$$\|\frac{dv}{dt}(t)\|_{X_{\bar\beta}} \leq c(T)[(t-t_0)^{\bar\alpha-\bar\beta-1}\|v^0\|_{X_{\bar\alpha}} + (t-t^0)^{-\bar\beta}\|h(t)\|_X$$

$$+ \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-1-\bar\beta}\|h(t) - h(s)\|_X \, ds] \, , \quad \forall\, t \in (t_0, t_0 + T] \, .$$

Pour la preuve , il suffit d'observer que :

$$\frac{dv}{dt}(t) = -Ae^{-A(t-t_0)}v^0 + e^{-A(t-t_0)}h(t) + \int_{t_0}^{t} Ae^{-A(t-s)}[h(t) - h(s)] \, ds$$

(voir [14], preuve du Lemma 3.5.1, page 70).

Proposition 3.12. *Soit $t_0 \geq 0$ et $T > 0$. Supposons qu'il existe une constante positive c telle que pour tout trajectoire $u^\epsilon(t) = S^\epsilon(t)\varphi^\epsilon$ dans l'attracteur $\mathcal{A}^\epsilon$, on a $\|u_2^\epsilon(t)\|_{L^2(Q_2)} \leq c$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.*
Alors il existe une constante positive $c(T)$, telle que :

$$\|\frac{du^\epsilon}{dt}\|_{H^\epsilon} \leq c(T)\frac{1}{t-t_0} \qquad \text{pour tout } t \in (t_0, t_0+T] \, , \text{ et } \epsilon \in (0, \epsilon_2) \, ,$$

où ϵ_2 est une constante suffisamment petite , indépendante de la trajectoire $u^\epsilon(t)$ dans $\mathcal{A}^\epsilon$, de t_0 et de T .

Preuve. On s'inspire de la démonstration du lemme 2.3 de [10] .
On remarque que $\bar w^\epsilon = (t-t_0)\frac{du^\epsilon}{dt}$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{d\bar w^\epsilon}{dt} + A_\epsilon \bar w^\epsilon = -f'(u^\epsilon)\bar w^\epsilon + \frac{du^\epsilon}{dt} \, , \quad \forall\, t \geq t_0 \\ \\ \bar w^\epsilon(0) = 0 \, . \end{cases}$$

En multipliant cette equation par $\bar w^\epsilon$ dans H_g^ϵ , on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar w^\epsilon\|_{H_g^\epsilon}^2 + a_\epsilon(\bar w^\epsilon(t), \bar w^\epsilon(t)) = (\frac{du^\epsilon}{dt}, \bar w^\epsilon)_{H_g^\epsilon}$$

$$-(f'(u^\epsilon)\bar w^\epsilon, \bar w^\epsilon)_{H_g^\epsilon} \leq \eta\|\bar w^\epsilon\|_{H^\epsilon}^2 + c_\eta\|\frac{du^\epsilon}{dt}\|_{H^\epsilon}^2$$

$$+c\sum_{i\neq 2}\int_{Q_i}[1 + |u_i^\epsilon|^{\gamma_1}]|\bar w_i^\epsilon||\bar w_i^\epsilon| + c\,\epsilon^{p-1}\int_{Q_2}[1 + |u_2^\epsilon|^{\gamma_1}]|\bar w_2^\epsilon||\bar w_2^\epsilon| \, . \tag{3.44}$$

On applique l'inégalité de Hölder dans les deux derniers termes de la partie de droite de (3.44) , avec les exposants : $\frac{2}{\gamma_1}$, $\frac{2}{1-\gamma_1}$ et 2 .

Puisque u_i^ϵ est borné dans la norme de $L^2(Q_i)$ uniformément en ϵ pour $i = 1,2,3$, on obtient facilement en choisissant η assez petit que

$$\frac{d}{dt}\|\bar{w}^\epsilon(t)\|_{H_g^\epsilon}^2 \leq c\,\|\bar{w}^\epsilon\|_{H^\epsilon}^2 + c\,\|\frac{du^\epsilon}{dt}\|_{H_g^\epsilon}^2 .$$

On intègre cette dernière inégalité entre t_0 et t , pour $t \in (t_0, t_0 + T]$ et on utilise le fait que $\bar{w}^\epsilon(t_0) = 0$.
D'autre part , la relation (3.20) et la Proposition 3.8 nous donnent

$$\int_0^\infty \|\frac{du^\epsilon}{dt}(s)\|_{H_g^\epsilon}^2 ds \leq c ,$$

et en appliquant ensuite le lemme de Gromwall, on obtient le résultat.

Maintenant nous pouvons énoncer le résultat concernant l'estimation uniforme de l'attracteur .

Lemme 3.13. *Il existe des constantes strictement positives c et ϵ_2 , telles que pour tout $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$ et $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$, on a :*

$$\|\psi^\epsilon\|_{Y^\epsilon} \leq c .$$

Preuve. Il suffit de majorer $\|\psi_2^\epsilon\|_{X_2^\epsilon}$.
Puisque $\mathcal{A}^\epsilon$ est invariant par le semigroupe S^ϵ , pour tout $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$ et tout $T > 0$, il existe un $\varphi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$, tel que $\psi^\epsilon = S^\epsilon(T)\varphi^\epsilon$.
Soit $u^\epsilon(t) = S^\epsilon(t)\varphi^\epsilon$.
Comme dans la preuve de la Proposition 3.7 , on va comparer u^ϵ avec une fonction définie sur Ω .
Soit $\bar{u}_1^\epsilon(t)$ and $\bar{u}_3^\epsilon(t)$ les solutions des problèmes :

$$\frac{d\bar{u}_i^\epsilon}{dt} + A_{0i}\bar{u}_i^\epsilon = -f(M_i u_i^\epsilon) - G_i^0 \qquad \text{avec } \bar{u}_i^\epsilon(0) = 0 \tag{3.45$_i$}$$

pour $i = 1,3$, et

$$\bar{u}_2^\epsilon(t) = \mathcal{R}(\bar{u}_1^\epsilon(t), \bar{u}_3^\epsilon(t)) .$$

La démonstration du lemme comporte 4 étapes :
Première étape. Estimation de $\bar{u}^\epsilon$.
En multipliant (3.45)$_i$ par $A_{0i}\bar{u}_i^\epsilon$ dans H_{0i} , on obtient facilement , en utilisant le fait que $M_i u_i^\epsilon$ est borné dans $H^1(\Omega_i)$ uniformément en ϵ pour $i = 1,3$,

$$\frac{d}{dt}(\|A_{0i}^{1/2}\bar{u}_i^\epsilon\|_{H_{0i}}^2) + \mu_i^1\|A_{0i}^{1/2}\bar{u}_i^\epsilon\|_{H_{0i}}^2 \leq c .$$

À l'aide du lemme de Gromwall, on déduit

$$\|\bar{u}_i^\epsilon(t)\|_{H^1(\Omega_i)} \leq c , \quad \forall t \geq 0 , \quad i = 1,3 \tag{3.46}$$

ce qui implique

$$\|\bar{u}_2^\epsilon(t)\|_{H^1(\Omega_2)} \leq c\,, \quad \forall t \geq 0\,. \tag{3.47}$$

Deuxième étape. L'équation variationnelle satisfaite par $u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon$.
Il est connu que u^ϵ est solution du problème variationnel

$$\left(\frac{du^\epsilon}{dt}\,,\,v\right)_{H_g^\epsilon} + a_\epsilon(u^\epsilon\,,\,v) = (-f(u^\epsilon) - G^\epsilon\,,\,v)_{H_g^\epsilon}\,, \quad \forall v \in X^\epsilon\,. \tag{3.48}$$

D'autre part , exactement comme en (3.27) , on obtient

$$\frac{d\bar{u}_2^\epsilon}{dt} - \frac{1}{g_2}\partial_{y_1}(g_2\partial_{y_1}\bar{u}_2^\epsilon) + \alpha\bar{u}_2^\epsilon = \bar{\Phi}_1(\bar{u}_1^\epsilon(t),\,u_1^\epsilon(t)) + \bar{\Phi}_3(\bar{u}_3^\epsilon(t),\,u_3^\epsilon(t)) \tag{3.49}$$

où $\bar{\Phi}_1$ et $\bar{\Phi}_3$ sont définis dans (3.28) et (3.29) .
Il est evident que si on note par $\bar{u}^\epsilon$ la fonction définie de $\Omega \times I\!R_+$ dans $I\!R$, telle que $\bar{u}^\epsilon/\Omega_i \times I\!R_+ \equiv \bar{u}_i^\epsilon\,,\quad i = 1,2,3$, alors on a $\bar{u}^\epsilon(\cdot,t) \in H^1(\Omega)$, donc $\bar{u}^\epsilon(\cdot,t) \in X^\epsilon$.
Exactement comme en (3.33) , on obtient

$$\left(\frac{d}{dt}(u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon)\,,\,v\right)_{H_g^\epsilon} + a_\epsilon(u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon, v) =$$

$$= -\sum_{i\neq 2}(f(u_i^\epsilon) - f(M_i u_i^\epsilon)\,,\,v_i)_{H_{gi}^\epsilon} - \sum_{i\neq 2}\left(G_i^\epsilon - G_i^0\,,\,v_i\right)_{H_{gi}^\epsilon} - \epsilon^{p-1}\,(f(u_2^\epsilon)\,,\,v_2)_{H_{g2}^\epsilon}$$
$$-\epsilon^{p-1}\,(G_2^\epsilon\,,\,v_2)_{H_{g2}^\epsilon} - \epsilon^{p-1}\left(\bar{\Phi}_1(\bar{u}_1^\epsilon,\,u_1^\epsilon) + \bar{\Phi}_3(\bar{u}_3^\epsilon,\,u_3^\epsilon)\,,\,v_2\right)_{H_{g2}^\epsilon}$$
$$+\sum_{i\neq 2}\int_{Q_i} g_i'\,y_2\,\partial_{y_1}\bar{u}_i^\epsilon\,\partial_{y_2}v_i + \epsilon^{p-1}\int_{Q_2} g_2'\,y_2\,\partial_{y_1}\bar{u}_2^\epsilon\,\partial_{y_2}v_2\,, \quad \forall\, v \in X^\epsilon\,. \tag{3.50}$$

Troisième étape. Majoration de $u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon$ dans la norme de H^ϵ.
Puisque $u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon \in X^\epsilon$, on peut remplacer v par $u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon$ dans (3.50) . On déduit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[(u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon, u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon)_{H_g^\epsilon}] + a_\epsilon(u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon, u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon) = -\sum_{i\neq 2}(f(u_i^\epsilon) - f(M_i u_i^\epsilon)\,,\,u_i^\epsilon - \bar{u}_i^\epsilon)_{H_{gi}^\epsilon}$$

$$-\sum_{i\neq 2}\left(G_i^\epsilon - G_i^0\,,\,u_i^\epsilon - \bar{u}_i^\epsilon\right)_{H_{gi}^\epsilon} - \epsilon^{p-1}\,(f(u_2^\epsilon) - f(\bar{u}_2^\epsilon)\,,\,u_2^\epsilon - \bar{u}_2^\epsilon)_{H_{g2}^\epsilon} - \epsilon^{p-1}\,(f(\bar{u}_2^\epsilon)\,,\,u_2^\epsilon - \bar{u}_2^\epsilon)_{H_{g2}^\epsilon}$$
$$-\epsilon^{p-1}\,(G_2^\epsilon\,,\,u_2^\epsilon - \bar{u}_2^\epsilon)_{H_{g2}^\epsilon} - \epsilon^{p-1}\left(\bar{\Phi}_1(\bar{u}_1^\epsilon, u_1^\epsilon) + \bar{\Phi}_3(\bar{u}_3^\epsilon, u_3^\epsilon)\,,\,u_2^\epsilon - \bar{u}_2^\epsilon\right)_{H_{g2}^\epsilon}$$
$$+\sum_{i\neq 2}\int_{Q_i} g_i'\,y_2\,\partial_{y_1}\bar{u}_i^\epsilon\,\partial_{y_2}(u_i^\epsilon - \bar{u}_i^\epsilon) + \epsilon^{p-1}\int_{Q_2} g_2'\,y_2\,\partial_{y_1}\bar{u}_2^\epsilon\,\partial_{y_2}(u_2^\epsilon - \bar{u}_2^\epsilon)\,.$$

On peut faire exactement les mêmes majorations que dans la démonstration de la Proposition 3.7 . On obtient alors

$$\frac{d}{dt}(\|u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon\|^2_{H^\epsilon_g}) + c_{10}\|u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon\|^2_{H^\epsilon_g} \leq c\,\epsilon^{p-1} . \tag{3.51}$$

Puisque $\bar{u}^\epsilon(0) = 0$, le Corollaire 3.9 nous donne

$$\|u^\epsilon(0) - \bar{u}^\epsilon(0)\|^2_{H^\epsilon_g} \leq c .$$

On applique le Lemme de Gromwall énoncé dans la Proposition 3.10, ce qui donne

$$\|u^\epsilon(t) - \bar{u}^\epsilon(t)\|^2_{H^\epsilon_g} \leq ce^{-c_{10}t} + \frac{c}{c_{10}}\epsilon^{p-1} .$$

On choisit $T_0 > 0$ tel que

$$e^{-c_{10}T_0} \leq \epsilon^{p-1} , \quad \text{c'est à dire } T_0 \geq \frac{1}{c_{10}}\ln(\frac{1}{\epsilon^{p-1}}),$$

et on obtient

$$\|u^\epsilon(t) - \bar{u}^\epsilon(t)\|^2_{H^\epsilon_g} \leq c\,\epsilon^{p-1} , \quad \forall\, t \geq T_0 . \tag{3.52}$$

Puisque $\bar{u}_2^\epsilon(t)$ est borné dans $H^1(\Omega_2)$, uniformément en ϵ et t (voir (3.47)) , nous avons finalement

$$\|u_2^\epsilon(t)\|_{L^2(Q_2)} \leq c\,, \ \forall\, t \geq T_0 . \tag{3.53}$$

Quatrième étape.
Majoration de $u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon$ dans la norme de X^ϵ , pour $t \in [T_0 + 1, T_0 + 2]$.
Pour $t \in [T_0 + 1, T_0 + 2]$, on pose

$$\bar{w}^\epsilon(t) = (t - T_0 - 1)[u^\epsilon(t) - \bar{u}^\epsilon(t)] .$$

De (3.50) on déduit :

$$\left(\frac{d}{dt}\bar{w}^\epsilon\,, v\right)_{H^\epsilon_g} + a_\epsilon(\bar{w}^\epsilon, v) = -(t - T_0 - 1)\sum_{i\neq 2}(f(u_i^\epsilon) - f(M_i u_i^\epsilon)\,, v_i)_{H^\epsilon_{gi}} -$$

$$-(t - T_0 - 1)\sum_{i\neq 2}\left(G_i^\epsilon - G_i^0\,, v_i\right)_{H^\epsilon_{gi}} - \epsilon^{p-1}(t - T_0 - 1)\,(f(u_2^\epsilon) + G_2^\epsilon\,, v_2)_{H^\epsilon_{g2}} -$$

$$-\epsilon^{p-1}(t - T_0 - 1)\left(\bar{\Phi}_1(\bar{u}_1^\epsilon, u_1^\epsilon) + \bar{\Phi}_3(\bar{u}_3^\epsilon, u_3^\epsilon)\,, v_2\right)_{H^\epsilon_{g2}} + (u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon, v)_{H^\epsilon_g} +$$

$$+(t-T_0-1)\sum_{i\neq 2}\int_{Q_i} g_i'\, y_2\, \partial_{y_1}\bar{u}_i^\epsilon\, \partial_{y_2}v_i + \epsilon^{p-1}(t-T_0-1)\int_{Q_2} g_2'\, y_2\, \partial_{y_1}\bar{u}_2^\epsilon\, \partial_{y_2}v_2\,, \quad \forall\, v \in X^\epsilon . \tag{3.54}$$

Puisque $\frac{d}{dt}\bar{u}^\epsilon \in H^1(\Omega)$ et $\frac{d}{dt}u^\epsilon \in X^\epsilon$, nous pouvons remplacer v par $\frac{d}{dt}\bar{w}^\epsilon$ dans (3.54). En tenant compte du fait que $0 \leq t - T_0 - 1 \leq 1$, nous obtenons

$$\frac{d}{dt}a_\epsilon(\bar{w}^\epsilon,\bar{w}^\epsilon) \leq c\{\sum_{i\neq 2}\int_{Q_i}|f(u_i^\epsilon) - f(M_i u_i^\epsilon)|^2\,dy + \sum_{i\neq 2}\int_{Q_i}(G_i^\epsilon - G_i^0)^2$$

$$+\epsilon^{p-1}(t-T_0-1)^2\int_{Q_2}|f(u_2^\epsilon)|^2 + \epsilon^{p-1}\int_{Q_2}|G_2^\epsilon|^2 + \epsilon^{p-1}\int_{Q_2}[|\bar{\Phi}_1(\bar{u}_1^\epsilon,\,u_1^\epsilon)|^2 + |\bar{\Phi}_3(\bar{u}_3^\epsilon,\,u_3^\epsilon)|^2]$$

$$\cdot|u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon|^2_{H_g^\epsilon}\} + (t - T_0 - 1)\sum_{i\neq 2}\int_{Q_i} g_i'\,y_2\,\partial_{y_1}\bar{u}_i^\epsilon\,\frac{d}{dt}\partial_{y_2}\bar{w}_i^\epsilon\,dy$$

$$+\epsilon^{p-1}(t - T_0 - 1)\int_{Q_2} g_2'\,y_2\,\partial_{y_1}\bar{u}_2^\epsilon\,\frac{d}{dt}\partial_{y_2}\bar{w}_2^\epsilon\,dy\,. \tag{3.55}$$

On voit immédiatement, en utilisant aussi (3.52), que

$$\sum_{i\neq 2}\int_{Q_i}(G_i^\epsilon - G_i^0)^2 + \epsilon^{p-1}\int_{Q_2}|G_2^\epsilon|^2 + \epsilon^{p-1}\int_{Q_2}[|\bar{\Phi}_1(\bar{u}_1^\epsilon,u_1^\epsilon)|^2$$

$$+|\bar{\Phi}_3(\bar{u}_3^\epsilon,u_3^\epsilon)|^2] + |u^\epsilon - \bar{u}^\epsilon|^2_{H_g^\epsilon} \leq c\,\epsilon^{p-1}\,. \tag{3.56}$$

Comme en (3.36) , nous obtenons

$$\int_{Q_i}|f(u_i^\epsilon) - f(M_i u_i^\epsilon)|^2 \leq c\,\epsilon^{p-1}\,,\quad i = 1,3\,. \tag{3.57}$$

Nous avons aussi

$$|f(u_2^\epsilon)|^2 \leq 2\,[|f(u_2^\epsilon) - f(\bar{u}_2^\epsilon)|^2 + |f(\bar{u}_2^\epsilon)|^2]\,, \tag{3.58}$$

et il est clair aussi que

$$(t - T_0 - 1)^2\int_{Q_2}|f(\bar{u}_2^\epsilon)|^2 \leq c\,. \tag{3.59}$$

D'autre part ,

$$\int_{Q_2}|f(u_2^\epsilon) - f(\bar{u}_2^\epsilon)|^2 \leq c\int_{Q_2}(1 + |u_2^\epsilon|^{2\gamma_1} + |\bar{u}_2^\epsilon|^{2\gamma_1})(u_2^\epsilon - \bar{u}_2^\epsilon)^2\,. \tag{3.60}$$

Supposons d'abord que $\gamma_1 \in (0,1)$.
En appliquant l'inégalité de Hölder avec les exposants $\frac{1}{\gamma_1}$ et $\frac{1}{1-\gamma_1}$, et en utilisant les majorations uniformes de u_2^ϵ et $\bar{u}_2^\epsilon$ (voir (3.47) et (3.53)) , on obtient

$$\int_{Q_2}|f(u_2^\epsilon) - f(\bar{u}_2^\epsilon)|^2 \leq c\,[1 + \|u_2^\epsilon\|^{2\gamma_1}_{L^2(Q_2)} + \|\bar{u}_2^\epsilon\|^{2\gamma_1}_{L^2(Q_2)}]\,\|u_2^\epsilon - \bar{u}_2^\epsilon\|^2_{L^{2/(1-\gamma_1)}(Q_2)}$$

$$\leq c\,\|u_2^\epsilon - \bar{u}_2^\epsilon\|^2_{H^1(Q_2)}\,,$$

ce qui implique

$$(t-T_0-1)^2 \int_{Q_2} |f(u_2^\epsilon) - f(\bar{u}_2^\epsilon)|^2 \le c\, \|\bar{w}_2^\epsilon\|^2_{H^1(Q_2)} \,. \tag{3.61}$$

Si $\gamma_1 = 0$, nous obtenons (3.61) directement de (3.60) .
De (3.58) , (3.59) et (3.61) , en utilisant la coercivité (3.13) de a_ϵ , on déduit

$$\epsilon^{p-1}(t-T_0-1)^2 \int_{Q_2} |f(u_2^\epsilon)|^2 \le c\,[\epsilon^{p-1} + a_\epsilon(\bar{w}_\epsilon(t), \bar{w}_\epsilon(t))] \,. \tag{3.62}$$

Nous allons intégrer (3.55) entre T_0+1 et t, pour $t \in [T_0+1, T_0+2]$.
En intégrant par parties par raport à t les deux derniers termes du membre de droite de l'inégalité (3.55) , et en utilisant les estimations (3.56) , (3.57) et (3.62) , on obtient :

$$a_\epsilon(\bar{w}_\epsilon(t), \bar{w}_\epsilon(t)) \le c\epsilon^{p-1} + c\int_{T_0+1}^t a_\epsilon(\bar{w}_\epsilon(s), \bar{w}_\epsilon(s))\, ds + c\{(t-T_0-1)$$

$$\sum_{i\neq 2} \|\partial_{y_1}\bar{u}_i^\epsilon(t)\|_{L^2(Q_i)} \|\partial_{y_2}\bar{w}_i^\epsilon(t)\|_{L^2(Q_i)} + \sum_{i\neq 2}\int_{T_0+1}^t \|\partial_{y_1}\bar{u}_i^\epsilon(s)\|_{L^2(Q_i)} \|\partial_{y_2}\bar{w}_i^\epsilon(s)\|_{L^2(Q_i)}\, ds$$

$$+\sum_{i\neq 2}\int_{T_0+1}^t (s-T_0-1)\|\frac{d}{dt}\partial_{y_1}\bar{u}_i^\epsilon(s)\|_{L^2(Q_i)} \|\partial_{y_2}\bar{w}_i^\epsilon(s)\|_{L^2(Q_i)}\, ds + \epsilon^{p-1}(t-T_0-1)\|\partial_{y_1}\bar{u}_2^\epsilon(t)\|_{L^2(Q_2)}$$

$$\|\partial_{y_2}\bar{w}_2^\epsilon(t)\|_{L^2(Q_2)} + \epsilon^{p-1}\int_{T_0+1}^t \|\partial_{y_1}\bar{u}_2^\epsilon(s)\|_{L^2(Q_2)}\, \|\partial_{y_2}\bar{w}_2^\epsilon(s)\|_{L^2(Q_2)}\, ds$$

$$+\epsilon^{p-1}\int_{T_0+1}^t (s-T_0-1)\|\frac{d}{dt}\partial_{y_1}\bar{u}_2^\epsilon(s)\|_{L^2(Q_2)} \|\partial_{y_2}\bar{w}_2^\epsilon(s)\|_{L^2(Q_2)}\, ds\} \,. \tag{3.63}$$

Pour majorer $\|\frac{d\bar{u}_i^\epsilon}{dt}\|_{H^1(\Omega_i)}$, $i = 1,3$, on applique le lemme 3.11 avec $v = \bar{u}_i^\epsilon$, $X = H_{0i}$, $A = A_{0i}$, $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \frac{1}{2}$, $t_0 = T_0+1$ et $h = -f(M_i u_i^\epsilon) - G_i^0$.
Puisque $M_i u_i^\epsilon$ est borné dans $H^1(\Omega_i)$ uniformément en ϵ , la Proposition 2.1(ii) nous donne

$$\|f(M_i u_i^\epsilon(t)) - f(M_i u_i^\epsilon(s))\|_{L^2(\Omega_i)} \le c\|u_i^\epsilon(t) - u_i^\epsilon(s)\|_{L^2(Q_i)} \,. \tag{3.64}$$

D'autre part , pour $i = 1,3$ on a

$$\|u_i^\epsilon(t) - u_i^\epsilon(s)\|_{L^2(Q_i)} \le \int_s^t \|\frac{du_i^\epsilon}{dt}(\tau)\|_{L^2(Q_i)} d\tau \,.$$

La proposition 3.12 avec $t_0 = T_0$ nous dit que
$\|\frac{du^\epsilon}{dt}\|_{H^\epsilon} \le c$, pour $t \in [T_0+1, T_0+2]$, ce qui implique :

$$\|u_i^\epsilon(t) - u_i^\epsilon(s)\|_{L^2(Q_i)} \le c(t-s)\,, \quad i = 1,3 \,. \tag{3.65}$$

De lemme 3.11 , en utilisant (3.64) et (3.65) , on tire :

$$\|\frac{d\bar{u}_i^\epsilon(t)}{dt}\|_{H^1(\Omega_i)} \le \frac{c}{t-T_0-1} \qquad \text{pour } t \in [T_0+1, T_0+2]\,,\ i = 1,3\,, \tag{3.66}$$

et puisque $\bar{u}_2^\epsilon(t) = \mathcal{R}(\bar{u}_1^\epsilon, \bar{u}_3^\epsilon)$, il est evident que

$$\|\frac{d\bar{u}_2^\epsilon(t)}{dt}\|_{H^1(\Omega_2)} \leq \frac{c}{t - T_0 - 1} \qquad \text{pour } t \in [T_0 + 1, T_0 + 2] \,. \tag{3.67}$$

En appliquant l'inégalité de Young aux six derniers termes de (3.63) , en utilisant le fait que

$$\|\partial_{y_2} \bar{w}_i^\epsilon\|_{L^2(Q_i)} \leq c\, \epsilon^{r_i} \|\bar{w}_i^\epsilon\|_{X_i^\epsilon} \,, \quad i = 1, 2, 3$$

et que $\bar{u}_i^\epsilon(t)$, $i = 1, 2, 3$, sont bornés dans $H^1(\Omega_i)$ uniformément en ϵ , et tenant compte des estimations (3.66) et (3.67) , on déduit

$$a_\epsilon(\bar{w}_\epsilon(t), \bar{w}_\epsilon(t)) \leq c\, \epsilon^{p-1} + c \int_{T_0+1}^{t} a_\epsilon(\bar{w}_\epsilon(s), \bar{w}_\epsilon(s)) \,, \quad \forall\, t \in [T_0 + 1, T_0 + 2] \,. \tag{3.68}$$

Le lemme de Gromwall nous donne maintenant

$$a_\epsilon(\bar{w}_\epsilon(t), \bar{w}_\epsilon(t)) \leq c\, \epsilon^{p-1} \quad \forall\, t \in [T_0 + 1, T_0 + 2] \,,$$

ce qui implique

$$\|u_2^\epsilon(T_0 + 2) - \bar{u}_2^\epsilon(T_0 + 2)\|_{X_2^\epsilon} \leq c \,,$$

et la preuve est finie si nous choisissons $T = T_0 + 2$ et si nous remarquons que $\|\bar{u}_2^\epsilon(T_0 + 2)\|_{H^1(\Omega_2)} \leq c$.

Remarque 3.14

Partout dans ce travail , on peut affaiblir les hypothèses (1.5) et (H1)(i) en prennant:

$$\limsup_{|x| \to +\infty} \frac{-f(x)}{x} \leq \alpha_1$$

et

$$\limsup_{|x| \to +\infty} [-f'(x)] \leq \frac{\alpha_1}{2}$$

avec $\alpha_1 < \alpha$.

Nous avons préféré de prendre $\alpha_1 = 0$ pour alléger les démonstrations .

4 Comparaison des orbites de $S^\epsilon(t)$ et $S(t)$.

4.1 Préliminaires.

Dans cette section on va comparer une orbite qui reste dans l'attracteur $\mathcal{A}^\epsilon$, c'est-à-dire $S^\epsilon(t)\psi^\epsilon$ avec $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$, avec une orbite $S(t)u^0$ du semigroupe $S(t)$, où u^0 peut dépendre de ϵ , mais il reste borné dans la norme de $H^1(\Omega)$, uniformément en ϵ .
Nous allons montrer que pour T fixé , indépendant de ϵ , $S^\epsilon(T)\psi^\epsilon - S(T)u^0$ est petit quand $\psi^\epsilon - u^0$ est petit .
On conserve ici toutes les notations de la Section 2 et on pose $u(t) = S(t)u^0$.
Rappelons que $\bar{u}_2$ est donné par le changement de la fonction inconnue (2.16).

Nous aurons besoin dans la suite d'estimations plus fortes pour $u(t)$. On énonce d'abord une inégalité de type Gromwall.

Lemme 4.1. *(voir [14] , page 6) Si $\bar{a} \geq 0$, $\bar{b} \geq 0$, $\bar{\alpha} \in [0, 1)$, $\bar{\beta} \in [0, 1)$ et $T \in (0, +\infty)$, alors il existe une constante $C = C(\bar{b}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, T) \leq +\infty$, telle que pour toute fonction intégrable*
$x : [0, T] \to R$ qui satisfait à

$$0 \leq x(t) \leq \bar{a}\, t^{-\bar{\alpha}} + \bar{b} \int_0^t (t-s)^{-\bar{\beta}}\, x(s)\, ds$$

pour presque tout $t \in (0, T]$, on a

$$x(t) \leq C\bar{a}\, t^{-\bar{\alpha}} \ ,$$

pour présque tout $t \in (0, T]$.

Proposition 4.2. *Soit $\delta \in (0, \frac{1}{8})$, $T > 0$, et $u^0 \in H^1(\Omega)$, avec $\|u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq R$. Alors on a les majorations suivantes :*
(i) Il existe une constante positive $c(R,\delta)$, telle que

$$\|\bar{u}_2(t)\|_{D(A_{02}^{3/4+\delta})} \leq c(R,\delta)(1 + t^{-1/4-\delta} e^{-\mu_2^1 t}) \ , \quad \forall\, t > 0 \ .$$

(ii) Il existe une constante positive $c(R,\delta,T)$, telle que

$$\|\frac{d\bar{u}_2}{dt}(t)\|_{D(A_{02}^{3/4+\delta})} \leq c(R,\delta,T)\, t^{-5/4-\delta} \ , \quad \forall\, t \in (0,T] \ .$$

(iii) Il existe une constante positive $c(R,T)$, telle que

$$\|\frac{du_i}{dt}(t)\|_{H^1(\Omega_i)} \leq c(R,T)\, t^{-1} \ , \quad \forall\, t \in (0,T] \ , \ i = 1,3 \ .$$

Preuve.

(i) On utilise la représentation intégrale (2.31) de $\bar{u}_2$, et on obtient

$$\|\bar{u}_2(t)\|_{D(A_{02}^{3/4+\delta})} \leq \|A_{02}^{3/4+\delta} e^{-A_{02}t} \bar{u}_2^0\|_{L^2(\Omega_2)} + c \int_0^t (t-s)^{-3/4-\delta} e^{-\mu_2^1(t-s)} \|\Phi(\bar{u}_2(s),\, s)\|_{L^2(\Omega_2)}\, ds\ .$$

On écrit

$$A_{02}^{3/4+\delta} e^{-A_{02}t} \bar{u}_2^0 = A_{02}^{1/4+\delta} e^{-A_{02}t} A_{02}^{1/2} \bar{u}_2^0\ ,$$

et on utilise aussi la majoration uniforme de Φ donnée dans la proposition 2.16.

(ii) Nous appliquons le lemme 3.11 avec $v = \bar{u}_2$, $X = H_{02}$, $A = A_{02}$, $\bar{\beta} = \frac{3}{4} + \delta$, $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}$, $h(t) = \bar{\Phi}(\bar{u}_2(t),\, t)$ et $t_0 = 0$.

Pour pouvoir appliquer ce lemme, il nous faut une majoration de $\|\Phi(\bar{u}_2(t),\, t) - \Phi(\bar{u}_2(s),\, s)\|_{L^2(\Omega_2)}$, de l'ordre de $(t-s)^{3/4+2\delta}$.
De la définition de Φ_1 et Φ_3 (voir (2.20) et (2.21)) on déduit:

$$\|\Phi_1(u_1(t)) + \Phi_3(u_3(t)) - \Phi_1(u_1(s)) - \Phi_3(u_3(s))\|_{L^2(\Omega_2)} \leq c(R) \sum_{i \neq 2} \|u_i(t) - u_i(s)\|_{H^1(\Omega_i)}\ . \tag{4.1}$$

On voit aussi que

$$\|f(u_2(t)) - f(u_2(s))\|_{L^2(\Omega_2)} \leq c(R)\, [\|\bar{u}_2(t) - \bar{u}_2(s)\|_{L^2(\Omega_2)} + \sum_{i \neq 2} \|u_i(t) - u_i(s)\|_{L^2(\Omega_i)}]\ , \tag{4.2}$$

ce qui nous dit qu'il faudra majorer

$$\|u_i(t+h) - u_i(t)\|_{H^1(\Omega_i)} \qquad \text{pour } 0 < t \leq T\ ,\ 0 \leq h \leq T\ ,\ i = 1, 3$$

et

$$\|\bar{u}_2(t+h) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(\Omega_2)} \qquad \text{pour } 0 < t \leq T\ ,\ 0 \leq h \leq T\ .$$

Dans ce but, on utilise la réprésentation intégrale de u_i , $i = 1, 3$, donnée en $(2.45)_i$:

$$\begin{aligned} u_i(t+h) - u_i(t) &= (e^{-A_{0i}h} - I) e^{-A_{0i}t} u_i^0 + \int_0^h e^{-A_{0i}(t+h-s)} \cdot [f(u_i(s)) + G_i^0]\, ds \\ &\quad - \int_0^t e^{-A_{0i}(t-s)} [f(u_i(s+h)) - f(u_i(s))]\, ds\ . \end{aligned} \tag{4.3}$$

On a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} &\|(e^{-A_{0i}h} - I) e^{-A_{0i}t} u_i^0\|_{D(A_{0i}^{1/2})} \leq c\, h^{3/4+2\delta} \|A_{0i}^{5/4+2\delta} e^{-A_{0i}t} u_i^0\|_{L^2(\Omega_2)} \\ &\leq c\, h^{3/4+2\delta} t^{-3/4-2\delta} e^{-\mu_i^1 t} \|u_i^0\|_{D(A_{0i}^{1/2})} \leq c(\delta, R) h^{3/4+2\delta} t^{-3/4-2\delta} e^{-\mu_i^1 t}\ . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ensuite

$$\|\int_0^h e^{-A_{0i}(t+h-s)} \cdot [f(u_i(s)) + G_i^0]\, ds\|_{D(A_{0i}^{1/2})} \leq c \int_0^h (t+h-s)^{-1/2} e^{-\mu_i^1(t+h-s)}.$$

$$\cdot \|f(u_i(s)) + G_i^0\|_{L^2(\Omega_i)}\, ds \le c(R)\, h\, t^{-1/2} e^{-\mu_i^1 t} \tag{4.5}$$

et finalement

$$\| \int_0^t e^{-A_{0i}(t-s)} [f(u_i(s+h)) - f(u_i(s))]\, ds \|_{D(A_{0i}^{1/2})}$$

$$\le c(R) \int_0^t (t-s)^{-1/2} \|u_i(s+h) - u_i(s)\|_{L^2(\Omega_i)}\, ds\ . \tag{4.6}$$

De (4.3) - (4.6) , une simple application du Lemme 4.1 nous donne

$$\|u_i(t+h) - u_i(t)\|_{H^1(\Omega_i)} \le c(\delta, R, T)\, h^{3/4+2\delta} t^{-3/4-2\delta} \tag{4.7}$$

pour $i = 1, 3$, pour tout $t \in (0, T]$ et $h \in [0, T]$.

De (4.1) , (4.2) et (4.7) il résulte que

$$\|\Phi(\bar{u}_2(t), t) - \Phi(\bar{u}_2(s), s)\|_{L^2(\Omega_2)} \le c(\delta, R, T)\, s^{-3/4-2\delta} (t-s)^{3/4+2\delta}$$

$$+ c(R) \|\bar{u}_2(t) - \bar{u}_2(s)\|_{L^2(\Omega_2)}\ . \tag{4.8}$$

On va utiliser la représentation intégrale de $\bar{u}_2(t)$ donnée en (2.31):

$$\bar{u}_2(t+h) - \bar{u}_2(t) = (e^{-A_{02}h} - I) e^{-A_{02}t} \bar{u}_2^0 + \int_0^h e^{-A_{02}(t+h-s)} \Phi(\bar{u}_2(s), s)\, ds$$

$$+ \int_0^t e^{-A_{02}(t-s)} [\Phi(\bar{u}_2(s+h), s+h) - \Phi(\bar{u}_2(s), s)]\, ds\ . \tag{4.9}$$

On aura les majorations suivantes :

$$\|(e^{-A_{02}h} - I) e^{-A_{02}t} \bar{u}_2^0\|_{L^2(\Omega_2)} \le c(\delta)\, h^{3/4+2\delta}\, t^{-3/4-2\delta} e^{-\mu_2^1 t} \|\bar{u}_2^0\|_{L^2(\Omega_2)}$$

$$\le c(R, \delta)\, h^{3/4+2\delta}\, t^{-3/4-2\delta} e^{-\mu_2^1 t} \tag{4.10}$$

et

$$\| \int_0^h e^{-A_{02}(t+h-s)} \Phi(\bar{u}_2(s), s)\, ds \|_{L^2(\Omega_2)} \le c \int_0^h e^{-\mu_2^1 (t+h-s)} \|\Phi(\bar{u}_2(s), s)\|_{L^2(\Omega_2)}\, ds$$

$$\le c(R)\, h\, e^{-\mu_2^1 t}\ . \tag{4.11}$$

À l'aide de (4.8) on obtient

$$\| \int_0^t e^{-A_{02}(t-s)} [\Phi(\bar{u}_2(s+h), s+h) - \Phi(\bar{u}_2(s), s)]\, ds \|_{L^2(\Omega_2)} \le c(\delta, R, T)\, h^{3/4+2\delta} \cdot$$

$$\cdot \int_0^t e^{-\mu_2^1 (t-s)} s^{-3/4-2\delta}\, ds + c(R) \int_0^t \|\bar{u}_2(s+h) - \bar{u}_2(s)\|_{L^2(\Omega_2)}\, ds\ , \tag{4.12}$$

ce qui avec (4.9) - (4.11) nous donne

$$\|\bar{u}_2(t+h) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(\Omega_2)} \le c(\delta, R, T)\, h^{3/4+2\delta} t^{-3/4-2\delta} + c(R) \int_0^t \|\bar{u}_2(s+h) - \bar{u}_2(s)\|_{L^2(\Omega_2)}\, ds\ .$$

On applique de nouveau le Lemme 4.1 , et on obtient

$$\|\bar{u}_2(t+h) - \bar{u}_2(t)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq c(\delta,\, R,\, T)\, h^{3/4+2\delta} t^{-3/4-2\delta} \,. \tag{4.13}$$

De la définition de Φ , de (4.1) , (4.2) , (4.7) et (4.13) , on déduit que

$$\|\Phi(\bar{u}_2(t),\, t) - \Phi(\bar{u}_2(s),\, s)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq c(\delta,\, R,\, T)\, s^{-3/4-2\delta}(t-s)^{3/4+2\delta} \,, \tag{4.14}$$

ce qui nous permet d'appliquer le Lemme 3.11 , et d'obtenir le résultat.

(iii) . On utilisera la même méthode qu'auparavant. On applique aussi le lemme 3.11 avec $v = u_i$, $X = H_{0i}$, $A = A_{0i}$, $\bar{\beta} = \bar{\alpha} = \frac{1}{2}$, $h(t) = -f(u_i(t)) - G_i^0$ et $t_0 = 0$.
Il est clair que

$$\|f(u_i(t) - f(u_i(s))\|_{L^2(\Omega_i)} \leq c(R)\|u_i(t) - u_i(s)\|_{L^2(\Omega_i)}.$$

Nous pouvons utiliser l'inégalité (4.7) , et nous obtenons

$$\int_0^t (t-s)^{-3/2}\|f(u_i(t)) - f(u_i(s))\|_{L^2(\Omega_i)} \leq c(\delta,\, R,\, T) \int_0^t (t-s)^{2\delta-3/4} s^{-3/4-2\delta}\, ds \,.$$

On obtient facilement le rèsultat.

Nous finissons ce paragraphe par un lemme qui sera très utile. Remarquons d'abord que si $v_i \in H^1(Q_i)$, alors $M_i v_i \in H^1(\Omega_i)$, et nous pouvons considérer que $M_i v_i$ est bien défini et continue sur l'adhérence $\bar{\Omega}_i$ de Ω_i , $i = 1, 2, 3$.

Lemme 4.3. *Il existe des constantes strictement positives c et ϵ_2 , telles que pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$ et $v \in X^\epsilon$, si $v_i = v/Q_i$, $i = 1, 2, 3$, nous avons :*

i)

$$|(M_1 v_1)(a)| \leq c\,\|v_1\|_{X_1^\epsilon}$$

$$|(M_3 v_3)(b)| \leq c\,\|v_3\|_{X_3^\epsilon}$$

ii)

$$|(M_1 v_1)(a) - M_2 v_2(a)| \leq c\,\epsilon^{(3-p)/4}\|v_1\|_{X_1^\epsilon}$$

$$|(M_3 v_3)(b) - M_2 v_2(b)| \leq c\,\epsilon^{(3-p)/4}\|v_3\|_{X_3^\epsilon}$$

iii)

$$|(M_2 v_2)(a)| \leq c\,\|v_1\|_{X_1^\epsilon}$$

$$|(M_2 v_2)(b)| \leq c\,\|v_3\|_{X_3^\epsilon} \,.$$

Preuve. Il suffit de montrer les inégalités en a.
(i) On a d'abord

$$|(M_1 v_1)(a)| \leq \|v_1(a, .)\|_{L^2(0,1)} \leq c\,\|v_1\|_{H^1(Q_1)} \leq c\,\|v_1\|_{X_1^\epsilon} \,.$$

(ii) Supposons que $v = \tilde{v} \circ \theta$, avec $\tilde{v} \in H^1(Q^\epsilon)$. Alors :

$$v_2(a, y_2) = \tilde{v}_2(a,\ \epsilon^p g_2(a) y_2) = \tilde{v}_1(a,\ \epsilon^p g_2(a) y_2)$$

$$= \tilde{v}_1(a,\ \epsilon g_1(a) \epsilon^{p-1} \frac{g_2(a)}{g_1(a)} y_2) = v_1(a,\ \epsilon^{p-1} \frac{g_2(a)}{g_1(a)} y_2)\ ,$$

ce qui implique :

$$(M_1 v_1)(a) - (M_2 v_2)(a) = \int_0^1 \left[v_1(a,\ y_2) - v_1(a,\ \epsilon^{p-1} \frac{g_2(a)}{g_1(a)} y_2) \right] dy_2\ . \tag{4.15}$$

Soit H une fonction de $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$, définie par la relation

$$H(y_1) = \int_0^1 \left[v_1(y_1,\ y_2) - v_1(y_1,\ \epsilon^{p-1} \frac{g_2(a)}{g_1(a)} y_2) \right] dy_2\ .$$

Nous voulons majorer $\|\partial_{y_1} H\|_{L^2(\Omega_1)}$.
Il est évident que

$$\|\partial_{y_1} [\int_0^1 v_1(\cdot,\ y_2) dy_2]\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|v_1\|_{X_1^\epsilon}\ . \tag{4.16}$$

D'autre part, on peut écrire

$$\partial_{y_1} \left[\int_0^1 v_1(y_1,\ \epsilon^{p-1} \frac{g_2(a)}{g_1(a)} y_2) dy_2 \right] = \frac{g_1(a)}{g_2(a)} \frac{1}{\epsilon^{p-1}} \int_0^{\epsilon^{p-1} \frac{g_2(a)}{g_1(a)}} \partial_{y_1} v_1(y_1, z_2) dz_2\ ,$$

et puisque

$$\int_0^a \left[\int_0^{\epsilon^{p-1} \frac{g_2(a)}{g_1(a)}} \partial_{y_1} v_1(y_1, z_2)\, dz_2 \right]^2 dy_1 \leq c\epsilon^{p-1} \int_0^a [\int_0^1 |\partial_{y_1} v_1(y_1, z_2)|^2\, dz_2]\, dy_1$$

$$\leq c\epsilon^{p-1} \|\partial_{y_1} v_1\|^2_{L^2(Q_1)}\ ,$$

en utilisant (4.16), on déduit que

$$\|\partial_{y_1} H\|_{L^2(\Omega_1)} \leq c\epsilon^{\frac{1-p}{2}} \|v_1\|_{X_1^\epsilon}\ . \tag{4.17}$$

Maintenant nous voulons majorer $\frac{1}{\epsilon^\sigma} \int_{a-\epsilon^\sigma}^a |H(y_1) - H(a)|\, dy_1$, où σ sera choisi convenablement .
Il est clair que

$$|H(y_1) - H(a)| = |\int_{y_1}^a \partial_{y_1} H(\xi)\, d\xi| \leq \|\partial_{y_1} H\|_{L^2(\Omega_1)} |y_1 - a|^{\frac{1}{2}}\ ,$$

et en utilisant (4.17) , nous déduisons

$$|\frac{1}{\epsilon^\sigma} \int_{a-\epsilon^\sigma}^a H(y_1)\, dy_1 - H(a)| \leq c\epsilon^{\frac{\sigma-(p-1)}{2}} \|v_1\|_{X_1^\epsilon}\ . \tag{4.18}$$

D'autre part on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
|\int_{a-\epsilon^\sigma}^{a} H(y_1)\,dy_1| &\leq |\int_{a-\epsilon^\sigma}^{a}\int_0^1 \left[v_1(y_1,y_2) - v_1(y_1,\epsilon^{p-1}\frac{g_2(a)}{g_1(a)}y_2)\right] dy_2\,dy_1| \\
&\leq \int_{a-\epsilon^\sigma}^{a}\int_0^1 |\partial_{y_2} v_1(y_1,\xi_2)|\,d\xi_2\,dy_1 \leq \epsilon^{\frac{\sigma}{2}} \|\partial_{y_2} v_1\|_{L^2(Q_1)} ,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$|\frac{1}{\epsilon^\sigma}\int_{a-\epsilon^\sigma}^{a} H(y_1)\,dy_1| \leq c\,\epsilon^{1-(\sigma/2)}\|v_1\|_{X_1^\epsilon} . \tag{4.19}$$

Maintenant les inégalités (4.18) et (4.19) nous donnent

$$|H(a)| \leq c(\epsilon^{\frac{\sigma-(p-1)}{2}} + \epsilon^{1-(\sigma/2)})\|v_1\|_{X_1^\epsilon} .$$

On choisit la valeur optimale $\sigma = \frac{p+1}{2}$, et on obtient (ii) .
$iii)$ est une conséquence immédiate de (i) et (ii) .

4.2 Comparaison des orbites

Le théorème qui suit nous donne une estimation de $S^\epsilon(t)\psi^\epsilon - S(t)u^0$, dans la norme de $L^2(Q)$.

Théorème 4.4. *Il existe une constante strictement positiuve ϵ_2 , et pour tout $R > 0$ et $T > 0$, il existe une constante positive $c(R,T)$, telle que pour $0 < \epsilon \leq \epsilon_2$, pour tout $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$ et tout $u^0 \in H^1(\Omega)$ avec $\|u^0\|_{H^1(\Omega)} \leq R$, on a*

$$\|S^\epsilon(t)\psi^\epsilon - S(t)u^0\|_{H^\epsilon} \leq c(R,T)[\epsilon + \epsilon^{p-1} + \|\psi^\epsilon - u^0\|_{H^\epsilon}]$$

pour tout $t \in [0,T]$.

Preuve. Soit $u^\epsilon(t) = S^\epsilon(t)\psi^\epsilon$ et $u(t) = S(t)u^0$.
Puisque u_i est une solution de $(2.8)_i$ pour $i = 1,3$, il est facile de voir que u_i satisfait au problème variationnel

$$\left(\frac{du_i}{dt}, v_i\right)_{H_{0i}} + a_{0i}(u_i, v_i) = \left(-f(u_i) - G_i^0, v_i\right)_{H_{0i}} , \quad \forall\, v_i \in H^1(Q_i) ,\ i = 1,3. \tag{4.20$_i$}$$

Soit $v_2 \in H^1(Q_2)$ quelconque . Alors $M_2 v_2 \in H^1(\Omega_2)$.
On fait le produit scalaire dans H_{02} de l'équation (1.9) satisfaite par u_2 avec $M_2 v_2$. On obtient

$$\left(\frac{du_2}{dt}, v_2\right)_{H_{02}} + a_{02}(u_2, v_2) = \left(-f(u_2) - G_2^0, v_2\right)_{H_{02}}$$

$$+g_2(b)\partial_{y_1}u_2(b)(M_2v_2)(b) - g_2(a)\partial_{y_1}u_2(a)(M_2v_2)(a) , \quad \forall\, v_2 \in H^1(Q_2) . \tag{4.21}$$

En multipliant (4.21) par ϵ^{p-1} et en ajoutant à $(4.20)_1$ et $(4.20)_3$, on obtient

$$\left(\frac{du}{dt}\,,\,v\right)_{H_g^\epsilon} + +a_\epsilon(u,v) = \left(-f(u) - G^0\,,\,v\right)_{H_g^\epsilon} +$$

$$+\epsilon^{p-1}\left[g_2(b)\partial_{y_1}u_2(b)(M_2v_2)(b) - g_2(a)\partial_{y_1}u_2(a)(M_2v_2)(a)\right]$$

$$-\sum_{i\neq 2}\int_{Q_i} g_i'\, y_2\, \partial_{y_1}u_i\, \partial_{y_2}v_i - \epsilon^{p-1}\int_{Q_2} g_2'\, y_2\, \partial_{y_1}u_2\, \partial_{y_2}v_2\,, \quad \forall\, v \in X^\epsilon. \tag{4.22}$$

Nous savons que $u^\epsilon(t)$ satisfait à l'équation variationnelle (3.48) .
On note $\bar{w}^\epsilon = u^\epsilon - u$. Les égalités (3.48) et (4.22) nous donnent

$$(\frac{d\bar{w}^\epsilon}{dt}, v)_{H_g^\epsilon} + a_\epsilon(\bar{w}^\epsilon, v) = -\,(f(u^\epsilon) - f(u)\,,\,v)_{H_g^\epsilon}$$

$$-\left(G^\epsilon - G^0\,,\,v\right)_{H_g^\epsilon} - \epsilon^{p-1}\left[g_2(b)\partial_{y_1}\bar{u}_2(b)(M_2v_2)(b) - g_2(a)\partial_{y_1}\bar{u}_2(a)(M_2v_2)(a)\right]$$

$$+\sum_{i\neq 2}\int_{Q_i} g_i'\, y_2\, \partial_{y_1}u_i\, \partial_{y_2}v_i + \epsilon^{p-1}\int_{Q_2} g_2'\, y_2\, \partial_{y_1}u_2\, \partial_{y_2}v_2\,, \quad \forall\, v \in X^\epsilon \tag{4.23}$$

parce que $\partial_{y_1}u_2 = \partial_{y_1}\bar{u}_2$ sur $\partial\Omega_2$.
On remplace v par $\bar{w}^\epsilon$ dans (4.23) , et on cherche à majorer tous les termes de droite de cette égalité.
Pour $i = 1, 2, 3$, on a :

$$\int_{Q_i} |f(u_i^\epsilon) - f(u_i)| \cdot |\bar{w}_i^\epsilon| dy \le c\int_{Q_i} [1 + |u_i^\epsilon|^{\gamma_1} + |u_i|^{\gamma_1}] \cdot |\bar{w}_i^\epsilon| \cdot |\bar{w}_i^\epsilon|\, dy\,.$$

Si on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants $4, 4, 2$, et si on remarque que $\|u_i^\epsilon\|_{H^1(Q_i)}$, $i = 1, 2, 3$ est borné uniformément en ϵ , on déduit de l'inégalité précédente que

$$|\,(f(u^\epsilon) - f(u)\,,\,v)_{H_g^\epsilon}\,| \le \eta\|\bar{w}^\epsilon(t)\|_{X^\epsilon}^2 + c(R,\eta)\|\bar{w}^\epsilon\|_{H_g^\epsilon}^2\,, \quad \forall\, \eta > 0. \tag{4.24}$$

Si on utilise la majoration (1.3) de $G^\epsilon - G^0$, on obtient

$$|\left(G^\epsilon - G^0\,,\,v\right)_{H_g^\epsilon}| \le \eta\|\bar{w}^\epsilon(t)\|_{X^\epsilon}^2 + c_\eta\epsilon^2\,, \quad \forall\, \eta > 0. \tag{4.25}$$

Nous pouvons écrire une inégalité analogue à (3.41) , avec u_i à la place de $\bar{\varphi}_i^\epsilon$ et $\bar{w}_i^\epsilon$ à la place de $\varphi_i^\epsilon - \bar{\varphi}_i^\epsilon$, et on obtient

$$|\sum_{i\neq 2}\int_{Q_i} g_i'\, y_2\, \partial_{y_1}u_i\, \partial_{y_2}\bar{w}_i^\epsilon + \epsilon^{p-1}\int_{Q_2} g_2'\, y_2\, \partial_{y_1}u_2\, \partial_{y_2}\bar{w}_2^\epsilon|$$

$$\le \eta\|\bar{w}^\epsilon(t)\|_{X^\epsilon}^2 + c(\eta, R)\,\epsilon^2\,,\ \text{pour tout}\ \eta > 0. \tag{4.26}$$

Puisque

$$\|\partial_{y_1}\bar{u}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)} \le c(\delta)\|\bar{u}_2\|_{H^{3/2+2\delta}(\Omega_2)} ,$$

le lemme 4.3(iii) nous donne

$$\epsilon^{p-1}[|\partial_{y_1}\bar{u}_2(b,t)| \cdot |(M_2\bar{w}_2^\epsilon)(b,t)| + |\partial_{y_1}\bar{u}_2(a,t)| \cdot |(M_2\bar{w}_2^\epsilon)(a,t)|] \le$$

$$\le c(\delta)\epsilon^{p-1}\|\bar{u}_2\|_{H^{3/2+2\delta}(\Omega_2)} \sum_{i\neq 2} \|\bar{w}_i^\epsilon\|_{X_i^\epsilon} \le$$

$$\le \eta \sum_{i\neq 2} \|\bar{w}_i^\epsilon\|^2_{X_i^\epsilon} + c(\delta,\eta)\epsilon^{2p-2}\|\bar{u}_2\|^2_{H^{3/2+2\delta}(\Omega_2)} . \tag{4.27}$$

De (4.23) – (4.27) , pour η assez petit , en utilisant la coercivité (3.13) de a_ϵ, et en intégrant entre 0 et t avec $t \in (0,T]$, on déduit que

$$\|\bar{w}^\epsilon(t)\|^2_{H_g^\epsilon} \le \|\psi^\epsilon - u^0\|^2_{H_g^\epsilon} + c(R)T\epsilon^2 + c(\delta)\epsilon^{2(p-1)} \int_0^T \|\bar{u}_2(s)\|^2_{H^{3/2+2\delta}(\Omega_2)} ds$$

$$+c(R)\int_0^t \|\bar{w}^\epsilon(s)\|^2_{H_g^\epsilon} ds \qquad \text{pour } 0 \le t \le T .$$

Maintenant on utilise la Proposition 4.2(i) et le lemme de Gromwall , et on obtient le résultat.

Le théorème suivant donne l'estimation de $S^\epsilon(t)\psi^\epsilon - S(t)u^0$ dans la norme de X^ϵ.

Théorème 4.5. *Il existe une constante strictement positive ϵ_2 , et pour tout $R > 0$ et $T > 0$, une constante positive $c(R,T)$, telle que pour $0 < \epsilon \le \epsilon_2$, pour tout $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$ et $u^0 \in H^1(\Omega)$ avec $\|u^0\|_{H^1(\Omega)} \le R$, on a :*

$$\|S^\epsilon(t)\psi^\epsilon - S(t)u^0\|_{X^\epsilon} \le \frac{1}{t}\, c(R,T)(\epsilon + \epsilon^{p-1} + \|\psi^\epsilon - u^0\|_{H^\epsilon})$$

pour tout $t \in (0,T]$.

Preuve. On garde ici les notations de la démonstration du théorème précédent. Nous allons utiliser les idées de la quatrième étape de la démonstration du lemme 3.13.

De (4.23) nous pouvons déduire immédiatement l'égalité satisfaite par $t\bar{w}^\epsilon(t)$. Puisque $\frac{d}{dt}(t\bar{w}^\epsilon)$ appartient à X^ϵ, nous pouvons remplacer v par $\frac{d}{dt}(t\bar{w}^\epsilon)$, pour obtenir

$$\|\frac{d}{dt}(t\bar{w}^\epsilon)\|^2_{H_g^\epsilon} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}a_\epsilon(t\bar{w}^\epsilon, t\bar{w}^\epsilon) \le \|\bar{w}^\epsilon(t)\|_{H_g^\epsilon}\|\frac{d}{dt}(t\bar{w}^\epsilon)\|_{H_g^\epsilon}$$

$$+t\sum_{i\neq 2}\|f(u_i^\epsilon) - f(u_i)\|_{L^2(Q_i)}\|\frac{d}{dt}(t\bar{w}_i^\epsilon)\|_{L^2(Q_i)} + \epsilon^{p-1}t\|f(u_2^\epsilon) - f(u_2)\|_{L^2(Q_2)}\|\frac{d}{dt}(t\bar{w}_2^\epsilon)\|_{L^2(Q_2)}$$

$$+t\|G^\epsilon - G^0\|_{H_g^\epsilon}\|\frac{d}{dt}(t\bar{w}^\epsilon)\|_{H_g^\epsilon} + \epsilon^{p-1}\bar{E}_1(t) + \bar{E}_2(t) \tag{4.28}$$

où on a noté :

$$\bar{E}_1(t) = t\,\{g_2(b)\partial_{y_1}\bar{u}_2(b,t)\frac{d}{dt}[t(M_2\bar{w}_2^\epsilon)(b,t)]$$

$$-g_2(a)\partial_{y_1}\bar{u}_2(a,t)\frac{d}{dt}[t(M_2\bar{w}_2^\epsilon)(a,t)]\} \equiv \bar{E}_{1b}(t) - \bar{E}_{1a}(t) \qquad (4.29)$$

et

$$\bar{E}_2(t) = t\sum_{i\neq 2}\int_{Q_i} g_i'\, y_2\, \partial_{y_1} u_i\, \frac{d}{dt}(t\partial_{y_2}\bar{w}_i^\epsilon)\, dy$$

$$+\epsilon^{p-1} t\int_{Q_2} g_2'\, y_2\, \partial_{y_1} u_2\, \frac{d}{dt}(t\partial_{y_2}\bar{w}_2^\epsilon)\, dy\,. \qquad (4.30)$$

On déduit facilement de (4.28) , en utilisant la coercivité (3.13) de a_ϵ que

$$\frac{d}{dt}a_\epsilon(t\bar{w}^\epsilon(t),\, t\bar{w}^\epsilon(t)) \leq c\,\|\bar{w}^\epsilon(t)\|^2_{H_g^\epsilon} + c(R)\,a_\epsilon(t\bar{w}^\epsilon(t),\, t\bar{w}^\epsilon(t))$$

$$+cT^2\epsilon^2 + \epsilon^{p-1}\bar{E}_1(t) + \bar{E}_2(t)\,.$$

En utilisant le Théorème 4.4 et en intégrant entre 0 et t avec $t \in [0,T]$, on obtient

$$a_\epsilon(t\bar{w}^\epsilon(t),\, t\bar{w}^\epsilon(t)) \leq c(R)\int_0^t a_\epsilon(s\bar{w}^\epsilon(s),\, s\bar{w}^\epsilon(s))ds$$

$$+c(R,T)(\epsilon^2 + \epsilon^{2p-2} + \|\psi^\epsilon - u^0\|^2_{H^\epsilon}) + \epsilon^{p-1}\int_0^t \bar{E}_1(s)\,ds + \int_0^t \bar{E}_2(s)\,ds\,. \qquad (4.31)$$

Nous allons majorer $\int_0^t \bar{E}_{1b}(s)\,ds$. La majoration de $\int_0^t \bar{E}_{1a}(s)\,ds$ se fait de manière similaire.

On intègre par parties par raport à t , et on écrit

$$|\int_0^t \bar{E}_{1b}(s)\,ds| \leq c\,t\,|\partial_{y_1}\bar{u}_2(b,t)|\cdot|M_2(t\bar{w}_2^\epsilon)(b,t)|$$

$$+\int_0^t\{|\partial_{y_1}\bar{u}_2(b,s)| + s\,|\frac{d}{dt}\partial_{y_1}\bar{u}_2(b,s)|\}\cdot|M_2(s\bar{w}_2^\epsilon)(b,s)|\,ds\,. \qquad (4.32)$$

Rémarquons que

$$|\frac{d}{dt}\partial_{y_1}\bar{u}_2(b,s)| \leq \|\frac{d}{dt}\partial_{y_1}\bar{u}_2\|_{H^{\frac{1}{2}+2\delta}(\Omega_2)} \leq c(\delta)\,\|\frac{d}{dt}\bar{u}_2\|_{H^{3/2+2\delta}(\Omega_2)}\,. \qquad (4.33)$$

En utilisant le lemme 4.3(iii) et la Proposition 4.2(i) et (ii) , on obtient de (4.32) et (4.33) :

$$|\epsilon^{p-1}\int_0^t \bar{E}_1(s)\,ds| \leq \eta\sum_{i\neq 2}\|t\bar{w}_i^\epsilon(t)\|_{X_i^\epsilon} + c(\eta,R,T)\,\epsilon^{2p-2}$$

$$+c\int_0^t\sum_{i\neq 2}\|s\bar{w}_i^\epsilon(s)\|^2_{X_i^\epsilon}\,ds \qquad \text{pour tout } \eta > 0\,,\ t \in (0,T]. \qquad (4.34)$$

Pour majorer $\int_0^t \bar{E}_2(s)\,ds$, on commence par intégrer par parties , d'où :

$$\int_0^t \bar{E}_2(s)\,ds \le c\,\{t\sum_{i\neq 2}\|\partial_{y_1}u_i(t)\|_{L^2(Q_i)}\|\partial_{y_2}(t\bar{w}_i^\epsilon)(t)\|_{L^2(Q_i)}$$

$$+\sum_{i\neq 2}\int_0^t \|\partial_{y_1}u_i(s)\|_{L^2(Q_i)}\|\partial_{y_2}(s\bar{w}_i^\epsilon)(s)\|_{L^2(Q_i)}\,ds$$

$$+\sum_{i\neq 2}\int_0^t s\|\frac{d}{dt}\partial_{y_1}u_i(s)\|_{L^2(Q_i)}\|\partial_{y_2}(s\bar{w}_i^\epsilon)(s)\|_{L^2(Q_i)}\,ds$$

$$+\epsilon^{p-1}t\|\partial_{y_1}u_2(t)\|_{L^2(Q_2)}\|\partial_{y_2}(t\bar{w}_2^\epsilon)(t)\|_{L^2(Q_2)}+\epsilon^{p-1}\int_0^t \|\partial_{y_1}u_2(s)\|_{L^2(Q_2)}\|\partial_{y_2}(s\bar{w}_2^\epsilon)(s)\|_{L^2(Q_2)}\,ds$$

$$+\epsilon^{p-1}\int_0^t s\|\frac{d}{dt}\partial_{y_1}u_2(s)\|_{L^2(Q_2)}\|\partial_{y_2}(s\bar{w}_2^\epsilon)(s)\|_{L^2(Q_2)}\,ds\}\ . \qquad (4.35)$$

Puisque $u_2(t) = \bar{u}_2(t) + \mathcal{R}(u_1(t), u_3(t))$, nous pouvons utiliser la proposition 4.2(ii) et (iii) , et déduire que

$$|\int_0^t \bar{E}_2(s)\,ds| \le \eta\|t\bar{w}^\epsilon(t)\|^2_{X^\epsilon} + c(\eta,R,T)(\,\epsilon^2 + \epsilon^{2(p-1)})$$

$$+c\int_0^t \|s\bar{w}^\epsilon(s)\|^2_{X^\epsilon}\,ds \qquad \text{pour tout } \eta > 0\ ,\ t\in(0,T]\ . \qquad (4.36)$$

On finit la preuve en utilisant (4.31) , (4.34) et (4.36) , en prenant η assez petit , et en appliquant le lemme de Gromwall .

5 La semicontinuité supérieure de l'attracteur $\mathcal{A}^\epsilon$

Soit l'application $\bar{M} : X^\epsilon \to H^1(\Omega)$, définie comme suit :
Si $v \in X^\epsilon$ et $v_i = v/Q_i$, $i = 1,2,3$, alors
$(\bar{M}v)_i = M_i v_i$ pour $i = 1,3$
$(\bar{M}v)_2 = M_2 v_2 + L_2(v)$,
où $L_2(v)$ est une fonction linéaire par morceaux, continue :
$L_2(v) : \Omega_2 \to R$
$L_2(v)(a) = (M_1 v_1)(a) - (M_2 v_2)(a)$
$L_2(v)(b) = (M_3 v_3)(b) - (M_2 v_2)(b)$
$L_2(v)(y_1) = 0$, sur $[a + \epsilon^{(3-p)/2}, b - \epsilon^{(3-p)/2}]$ (voir figure 2) .

Proposition 5.1. *L'application $\bar{M}$ définie ci-dessus , a la propriété qu'il existe une constante positive c , telle que pour tout $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$, on a :*

$$(i) \qquad \|\bar{M}\psi^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \le c$$

$$(ii) \qquad \|(\psi^\epsilon - \bar{M}\psi^\epsilon)_i\|_{L^2(Q_i)} \le c\,\epsilon\ ,\ i = 1,3$$

$$(iii) \qquad \|(\psi^\epsilon - \bar{M}\psi^\epsilon)_2\|_{L^2(Q_2)} \le c\,\epsilon^{(3-p)/2}\ .$$

Preuve .
(i) Puisque $\|\psi^\epsilon\|_{Y^\epsilon} \le c$, nous avons

$$\|M_i \psi_i^\epsilon\|_{H^1(\Omega_i)} \le c\ ,\ i = 1,2,3\ .$$

D'autre part , le Lemme 4.3(ii) nous donne :

$$|L_2(\psi^\epsilon)(a)| \le c\,\epsilon^{(3-p)/4} \qquad \text{et } |L_2(\psi^\epsilon)(b)| \le c\,\epsilon^{(3-p)/4}\ . \tag{5.1}$$

Alors un calcul élémentaire nous montre que

$$\|L_2(\psi^\epsilon)\|_{H^1(\Omega_2)} \le c\ ,$$

ce qui montre (i).
Les inégalités (ii) et (iii) s'obtiennent facilement en utilisant le Lemme 3.4(ii) et les inégalités (5.1) .

La proposition précédente nous permet de déduire le corollaire suivant :

Corollaire 5.2. *Il existe une constante strictement positive ϵ_2 , et pour tout $T > 0$ il existe une constante positive $c(T)$, telle que pour $0 < \epsilon \le \epsilon_2$ et pour tout $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$, nous avons*

$$\|S^\epsilon(t)\psi^\epsilon - S(t)(\bar{M}\psi^\epsilon)\|_{X^\epsilon} \le \frac{1}{t}\,c(T)(\epsilon + \epsilon^{p-1})$$

et

$$\|S^\epsilon(t)\psi^\epsilon - S(t)(\bar{M}\psi^\epsilon)\|_{Y^\epsilon} \leq \frac{1}{t}\,c(T)(\epsilon^{(3-p)/2} + \epsilon^{(p-1)/2})$$

pour $0 < t \leq T$.

Preuve . La Proposition 5.1 nous dit que

$$\|\psi^\epsilon - \bar{M}\psi^\epsilon)\|_{H^\epsilon} \leq c\,\epsilon\,,$$

et on applique le Théorème 4.5 .

En utilisant le fait que $\bar{M}\psi^\epsilon$ est borné dans $H^1(\Omega)$ uniformément en ϵ pour tout $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$ (Proposition 5.1(i)) , et la propriété d'attractivité de l'attracteur $\mathcal{A}$, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 5.3. *Pour tout* $\eta > 0$ *, il existe un temps* $T(\eta)$ *, tel que pour tout* $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$ *on a*

$$dist_{H^1(\Omega)}(S(t)\bar{M}\psi^\epsilon, \mathcal{A}) \leq \frac{\eta}{2}\,, \quad \forall\, t \geq T(\eta).$$

Maintenant nous pouvons montrer la semicontinuité supérieure de l'attracteur $\mathcal{A}^\epsilon$.

Théorème 5.4. *Sous l'hypothèse* ***(H1)*** *, nous avons*

$$dist_{Y^\epsilon}(\mathcal{A}^\epsilon, \mathcal{A}) \to 0 \qquad pour\ \epsilon \to 0.$$

Preuve . Soit $\eta > 0$ fixé , et soit $v^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$.
Puisque $\mathcal{A}^\epsilon$ est invariant, il existe $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$ tel que $v^\epsilon = S^\epsilon(T(\eta))\psi^\epsilon$, où $T(\eta)$ est donné par la Proposition 5.3 .
Du Corollaire 5.2 , on déduit qu'il existe $\epsilon\,(\eta) > 0$, tel que :

$$\|v^\epsilon - S(T(\eta))\bar{M}\psi^\epsilon\|_{Y^\epsilon} \leq \frac{\eta}{2}\,, \quad \forall\,\epsilon \in (0, \epsilon\,(\eta))\,,$$

ce qui avec la Proposition 5.3 montre le résultat .

6 La convergence des points d'équilibre .

D'ici à la fin de ce travail , on va faire deux hypothèses supplémentaires : **(H2)** et **(H3)**.
D'abord une hypothèse sur γ_2 :

$$(H2) \qquad 0 < \gamma_2 < \min\{1, \frac{3-p}{p-1}\} .$$

Vue la condition (1.6), l'hypothèse **(H2)** n'est pas vraiment restrictive.
On va donner l'hypothèse **(H3)** dans le paragraph 6.1.
Nous allons montrer dans cette section que si les points d'équilibre du semigroupe $S(t)$ défini au chapitre 2 sont hyperboliques , alors il existe des points d'équilibre du semigroupe $S^\epsilon(t)$ qui convergent vers les points d'équilibre de $S(t)$.

6.1 Description de l'ensemble des points d'équilibre de $S(t)$.

Soit E_0 l'ensemble des points d'équilibre de $S(t)$, c'est-à-dire l'ensemble des points φ dans $H^1(\Omega)$ tels que si $\varphi_i = \varphi/\Omega_i$, alors φ_i satisfait à :

$$\begin{cases} -\frac{1}{g_i}\partial_{y_1}(g_i\partial_{y_1}\varphi_i) + \alpha\varphi_i = -f(\varphi_i) - G_i^0 \qquad \text{dans } \Omega_i \\ \partial_{y_1}\varphi_i = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

pour i = 1,3 , et

$$\begin{cases} -\frac{1}{g_2}\partial_{y_1}(g_2\partial_{y_1}\varphi_2) + \alpha\varphi_2 = -f(\varphi_2) - G_2^0 \qquad \text{dans } \Omega_2 \\ \varphi_2(a) = \varphi_1(a) \qquad \text{et } \varphi_2(b) = \varphi_3(b) . \end{cases} \tag{6.2}$$

Soit aussi E_{0i} l'ensemble des points d'équilibre de $S_i(t)$, pour $i = 1, 3$.
Il est clair que si $\varphi \in E_0$, alors $\varphi_i \in E_{0i}$, $i = 1, 3$.

Le Théorème 2.20 nous dit que E_0 est non vide . Puisque $E_0 \subset \mathcal{A}$, on déduit, du Théorème 2.20 et de (6.1) et (6.2) , la proposition ci-dessous :

Proposition 6.1.
(*i*) *Il existe une constante positive c telle que pour tout* $\varphi \in E_0$ *on a :* $\|\varphi_i\|_{H^2(\Omega_i)} \leq c$ *pour* $i = 1, 2, 3$.
(*ii*) *L'ensemble* E_0 *est compact dans* $H^1(\Omega)$.

On définit un opérateur $B_0 : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, de la manière suivante :

$$B_0 h = v$$

si et seulement si :

$$\begin{cases} -\frac{1}{g_i}\partial_{y_1}(g_i\partial_{y_1}v_i) + \alpha v_i = h_i & \text{dans } \Omega_i \\ \partial_{y_1}v_i = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.3}$$

pour i = 1,3 , et

$$\begin{cases} -\frac{1}{g_2}\partial_{y_1}(g_2\partial_{y_1}v_2) + \alpha v_2 = \ h_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ v_2(a) = v_1(a) \qquad \text{et } v_2(b) = v_3(b)\ . \end{cases} \tag{6.4}$$

On définit également $B_{0i}h_i$ comme étant la solution v_i de (6.3) pour $h_i \in L^2(\Omega_i)$, $i = 1,3$.
On a évidemment
$(B_0h)_i = B_{0i}h_i\ , \quad i = 1,3$.

Proposition 6.2.
(i) $B_{0i} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_i), H^2(\Omega_i))$ *pour* $i = 1,3$,
(ii) Il existe une constante $c > 0$ *telle que pour tout* $h \in L^2(\Omega)$ *, on a*

$$\|(B_0h)_i\|_{H^2(\Omega_i)} \le c\,\|h\|_{L^2(\Omega)} \qquad pour\ i = 1,2,3\ .$$

(iii) Pour tout $\sigma \in [0, \frac{3}{2})$ *,* B_0 *appartient à* $\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^\sigma(\Omega))$.

La preuve est immédiate. La résolution de (6.3) est standard , tandis que pour (6.4) on utilisera la même technique que dans la Section 2 , en faisant le changement de la fonction inconnue

$$v_2 = \bar{v}_2 + \mathcal{R}(v_1, v_3)$$

et en se ramenant à un problème de Dirichlet homogène sur Ω_2 .

On voit facilement que B_0 est injective et donc
$B_0 : L^2(\Omega) \to B_0(L^2(\Omega))$ est une application bijective .
On note $D(A_0) = B_0(L^2(\Omega))$, et on définit l'opérateur A_0 comme étant l'inverse de B_0 .
On voit immédiatement que
$D(A_0) = \{v \in H^1(\Omega)$ tel que $v_i \in H^2(\Omega_i)$ pour $i = 1,2,3$, et $\partial_{y_1}v_i = 0$ sur $\partial\Omega_i$, $i = 1,3\}$, avec

$$(A_0\,v)_i = -\frac{1}{g_i}\partial_{y_1}(g_i\partial_{y_1}v_i) + \alpha\,v_i\ , \quad \forall\,v \in D(A_0)\ ,\ i = 1,2,3\ . \tag{6.5}$$

On voit facilement que les opérateurs A_{01} et A_{03} définis au (2.3) et (2.4) sont les inverses de B_{01} et B_{03} . On remarque que

$(A_0 v)_i = A_{0i} v_i$ pour $i = 1, 3$.

On fait maintenant l'hypothèse **(H3)** .

(H3) *Tous les points d'équilibre du semigroupe $S(t)$ sont hyperboliques , c'est à dire : $\forall \varphi \in E_0$, si $v \in H^1(\Omega)$ est tel que*

$$\begin{cases} -\frac{1}{g_i}\partial_{y_1}(g_i \partial_{y_1} v_i) + \alpha v_i + f'(\varphi_i) v_i = 0 & \text{dans } \Omega_i \\ \partial_{y_1} v_i = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_i & \end{cases} \tag{6.6}$$

pour $i = 1,3$, et

$$\begin{cases} -\frac{1}{g_2}\partial_{y_1}(g_2 \partial_{y_1} v_2) + \alpha v_2 + f'(\varphi_2) v_2 = 0 & \text{dans } \Omega_2 \\ v_2(a) = v_1(a) \quad \text{et } v_2(b) = v_3(b) , & \end{cases} \tag{6.7}$$

alors $v = 0$.

(voir Annexe **A**) .

Il est clair que φ est un élément de E_0 si et seulement si φ satisfait à l'équation

$$A_0 \varphi + f(\varphi) + G^0 = 0 . \tag{6.8}$$

En appliquant B_0 , on déduit que la relation précédente est équivalente à

$$\varphi + B_0[f(\varphi) + G^0] = 0 .$$

Soit l'application

$$\mathcal{F}^0 : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$$

définie par

$$\mathcal{F}^0(\varphi) = \varphi + B_0[f(\varphi) + G^0] .$$

Il est évident que

$$\varphi \in E_0 \Leftrightarrow \mathcal{F}^0(\varphi) = 0 . \tag{6.9}$$

Nous pouvons nous restreindre à Ω_i pour $i = 1, 3$, et définir

$$\mathcal{F}_i^0 : H^1(\Omega_i) \to H^1(\Omega_i)$$

où

$$\mathcal{F}_i^0(\varphi_i) = \varphi_i + B_{0i}[f(\varphi_i) + G_i^0] .$$

On utilisera la dérivée au sens de Fréchet de $\mathcal{F}^0$:

$$D\,\mathcal{F}^0(\varphi) \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^1(\Omega))$$

où

$$D\,\mathcal{F}^0(\varphi)\,v = v + B_0[f'(\varphi)\,v] .$$

On remarque que l'expression qui donne $D\mathcal{F}^0(\varphi)$ peut s'étendre à $L^2(\Omega)$, donc on peut aussi considérer l'application

$$D\mathcal{F}^0(\varphi) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$$

(c'est un abus de notation , parce que $\mathcal{F}^0$ n'est pas définie sur $L^2(\Omega)$) .
On peut définir aussi la dérivée en sens de Fréchét de $\mathcal{F}_i^0$ pour $i = 1, 3$, c'est-à-dire:

$$D\mathcal{F}_i^0(\varphi_i) \in \mathcal{L}(H^1(\Omega_i), H^1(\Omega_i)) \qquad (\text{ ou } \mathcal{L}(L^2(\Omega_i), L^2(\Omega_i))$$

où

$$D\mathcal{F}_i^0(\varphi_i)\, v_i = v_i + B_{0i}[f'(\varphi_i)\, v_i]$$

pour $i = 1, 3$.
Nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 6.3. *Pour tout $\varphi \in E_0$, on a*
(i) $D\mathcal{F}^0(\varphi)$ est bijective de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, et de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, donc

$$(D\mathcal{F}^0(\varphi))^{-1} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^1(\Omega)) \qquad \textit{et } (D\mathcal{F}^0(\varphi))^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$$

(ii) $D\mathcal{F}_i^0(\varphi_i)$ est bijective de $H^1(\Omega_i)$ dans $H^1(\Omega_i)$, et de $L^2(\Omega_i)$ dans $L^2(\Omega_i)$, donc

$$(D\mathcal{F}_i^0(\varphi_i))^{-1} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega_i), H^1(\Omega_i)) \qquad \textit{et } (D\mathcal{F}_i^0(\varphi_i))^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_i), L^2(\Omega_i))$$

pour $i = 1, 3$.

Preuve.
La partie (i) est une conséquence directe de l'hypothèse **(H3)** et de la compacité de l'opérateur B_0.
Pour la partie (ii) on a d'abord que $D\mathcal{F}_i^0(\varphi_i)$ est surjective (parce que $D\mathcal{F}^0(\varphi)$ est surjective) , et de l'alternative de Fredholm il résulte que $D\mathcal{F}_i^0(\varphi_i)$ est injective , donc bijective .

Puisque E_0 est compact dans $H^1(\Omega)$ et que les points d'équilibre φ de E_0 sont tous hyperboliques, on obtient le résultat suivant :

Proposition 6.4. *E_0 est un ensemble fini de n_E éléments .*

6.2 Convergence des points d'équilibre

On considère à nouveau l'opérateur A_ϵ défini au paragraph 3.1.
On sait que $A_\epsilon \in \mathcal{L}(D(A_\epsilon), H^\epsilon)$ est bijectif , ce qui nous permet de définir l'inverse B_ϵ de A_ϵ, c'est à dire , si $h \in H^\epsilon$, on dit que $u = B_\epsilon h$, si et seulement si u est la solution du problème :

Trouver $u \in X^\epsilon$ tel que $a_\epsilon(u, v) = (h, v)_{H^\epsilon}$, $\forall\, v \in X^\epsilon$.
Il est évident que

$$B_\epsilon \in \mathcal{L}(H^\epsilon, X^\epsilon) \qquad \text{avec } \|B_\epsilon\|_{\mathcal{L}(H^\epsilon, X^\epsilon)} \leq c \tag{6.10}$$

où c est une constante positive qui ne dépend pas de ϵ .

Proposition 6.5. *Pour tout* $q \in (1, +\infty)$ *, il existe des constantes strictement positives* c_q *et* ϵ_q *, telles que pour tout* $h \in L^2(Q) \cap L^q(Q)$ *,* $h_0 \in L^2(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *et* $\epsilon \in (0, \epsilon_q)$ *, on a :*

(*i*) $\|B_\epsilon h - B_0 h_0\|_{X^\epsilon} \leq c_q \, [\sum_{i\neq 2} \|h_i - h_{0i}\|_{L^q(Q_i)} + \epsilon^{(p-1)/2}\|h_2 - h_{02}\|_{L^q(Q_2)} + \epsilon^{p-1}\|h_0\|_{L^2(\Omega)}]$

(*ii*) $\|B_\epsilon h - B_0 h_0\|_{Y^\epsilon} \leq c_q \, [\epsilon^{(1-p)/2} \sum_{i\neq 2} \|h_i - h_{0i}\|_{L^q(Q_i)} + \|h_2 - h_{02}\|_{L^q(Q_2)} + \epsilon^{(p-1)/2}\|h_0\|_{L^2(\Omega)}]$.

Preuve. On note $u^\epsilon = B_\epsilon h$ et $u = B_0 h_0$.
Par définition de l'opérateur B_ϵ , nous avons

$$a_\epsilon(u^\epsilon, v) = \sum_{i\neq 2} \int_{Q_i} h_i v_i + \epsilon^{p-1} \int_{Q_2} h_2 v_2 \ , \quad \forall v \in X^\epsilon \ .$$

Par définition de l'opérateur B_0 , u est la solution du système (6.3) et (6.4) , où on remplace h_i par h_{0i} , $i = 1,2,3$.

En procédant de la même manière que pour obtenir (4.22) et (4.23) , on montre que $\bar{w}^\epsilon = u^\epsilon - u$ satisfait à l'égalité variationnelle

$$\begin{aligned} a_\epsilon(\bar{w}^\epsilon, v) &= (h - h_0 \, , v)_{H^\epsilon_g} - \epsilon^{p-1}\partial_{y_1} u_2(b)(M_2 v_2)(b) + \epsilon^{p-1}\partial_{y_1} u_2(a)(M_2 v_2)(a) \\ &+ \sum_{i\neq 2} \int_{Q_i} g_i' \, y_2 \, \partial_{y_1} u_i \, \partial_{y_2} v_i + \epsilon^{p-1} \int_{Q_2} g_2' \, y_2 \, \partial_{y_1} u_2 \, \partial_{y_2} v_2 \ , \quad \forall v \in X^\epsilon \ . \end{aligned} \tag{6.11}$$

On remplace v par $\bar{w}^\epsilon$ dans (6.11). Soit $q' \in (1, +\infty)$ de sorte que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. En utilisant d'abord l'inégalité de Hölder avec les exposants q et q' , et ensuite l'injection continue de $H^1(Q_i)$ dans $L^{q'}(Q_i)$, on déduit que

$$\int_{Q_i} (h_i - h_{0i})\bar{w}_i^\epsilon \leq \eta \, \|\bar{w}_i^\epsilon\|^2_{H^1(Q_i)} + c(\eta, q)\|h_i - h_{0i}\|^2_{L^q(Q_i)} \tag{6.12}$$

pour tout $\eta > 0$, $i = 1,2,3$, $q > 1$.

En utilisant la régularité de $B_0 h_0$ (voir Proposition 6.2 (*ii*)) et le Lemme 4.3(*iii*), on obtient :

$$\begin{aligned} |\epsilon^{p-1}[\partial_{y_1} u_2(b)(M_2\bar{w}_2^\epsilon)(b) - \partial_{y_1} u_2(a)(M_2\bar{w}_2^\epsilon)(a)]| &\leq c\,\epsilon^{p-1}\|h_0\|_{L^2(\Omega)}(\sum_{i\neq 2} \|\bar{w}_i^\epsilon\|_{X_i^\epsilon}) \\ &\leq \eta \, (\sum_{i\neq 2} \|\bar{w}_i^\epsilon\|^2_{X_i^\epsilon}) + c_\eta \epsilon^{2p-2}\|h_0\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{6.13}$$

pour tout $\eta > 0$.
On fait pour les deux derniers termes de (6.11) une majoration analogue à celle de 4.26, et avec (6.12) et (6.13) , en choisissant η assez petit , on obtient le résultat désiré .

En prenant dans la proposition précédente $h_0 = M\,h$ et en utilisant le Lemme 3.4(*ii*) , on obtient :

Corollaire 6.6. *Pour tout $q \in (1, +\infty)$, il existe des constantes strictement positives c_q et ϵ_q , telles que pour tout $h \in L^2(Q)$ avec $h_i \in W^{1,q}(Q_i)$, $i = 1,2,3$, et $\epsilon \in (0, \epsilon_q)$, on a :*

(*i*) $\|B_\epsilon h - B_0(M\,h)\|_{X^\epsilon} \leq c_q \,[\sum_{i\neq 2} \|\partial_{y_2} h_i\|_{L^q(Q_i)} + \epsilon^{(p-1)/2} \|\partial_{y_2} h_2\|_{L^q(Q_2)} + \epsilon^{p-1} \|h\|_{L^2(Q)}]$

(*ii*) $\|B_\epsilon h - B_0(M\,h)\|_{Y^\epsilon} \leq c_q \,[\epsilon^{(1-p)/2} \sum_{i\neq 2} \|\partial_{y_2} h_i\|_{L^q(Q_i)} + \|\partial_{y_2} h_2\|_{L^q(Q_2)} + \epsilon^{(p-1)/2} \|h\|_{L^2(Q)}]$.

Nous aurons besoin dans la suite d'une éstimation de $B_\epsilon h$ dans la norme de Y^ϵ.

Proposition 6.7. *Pour tout $q \in (1, +\infty)$, il existe des constantes strictement positives c_q et ϵ_q , telles que pour tout $h \in L^2(Q)$ avec $h_i \in W^{1,q}(Q_i)$ pour $i = 1,3$, et $\epsilon \in (0, \epsilon_q)$, on a*

$$\|B_\epsilon h\|_{Y^\epsilon} \leq c_q [\|h\|_{L^2(Q)} + \epsilon^{(1-p)/2} \sum_{i\neq 2} \|\partial_{y_2} h_i\|_{L^q(Q_i)}] \,.$$

La proposition 6.7 est une conséquence directe des propositions 6.5(ii) , 6.2(iii) et du lemme 3.4(ii).

On rappelle que E^ϵ est l'ensemble des points d'équilibre de $S^\epsilon(t)$. On voit que φ^ϵ est un élément de E^ϵ si et seulement si φ^ϵ satisfait à l'équation

$$\mathcal{F}^\epsilon(\varphi^\epsilon) = 0 \,, \tag{6.14}$$

où $\mathcal{F}^\epsilon$ est l'application de X^ϵ dans X^ϵ définie par

$$\mathcal{F}^\epsilon(v) = v + B_\epsilon[f(v) + G^\epsilon] \,.$$

Nous allons utiliser dans la suite le théorème de point fixe suivant
(voir [10] , Lemme 4.6 , page 66) :
Soit X un espace de Banach , et $F : X \to X$ une fonction dérivable au sens de Fréchet. Soit x_0 un point de X , tel que $D\,F(x_0)$ soit inversible.
Nous faisons les notations suivantes :

$$\bar\delta = \|F(x_0)\|_X$$

$$\bar\gamma = \|(D\,F(x_0))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)}$$

$$\bar K(\bar\theta) = \sup_{x \in B_X(x_0,\bar\theta)} \|D\,F(x) - D\,F(x_0)\|_{\mathcal{L}(X,X)}$$

où $\quad B_X(x_0,\bar\theta) = \{x \in X \,,\ \|x - x_0\|_X \leq \bar\theta\}$.

Lemme 6.8. *Sous les hypothèses ci-dessus, si* $2\bar{\gamma}\bar{K}(2\bar{\gamma}\bar{\delta}) < 1$ *, alors pour tout* $\bar{\theta} \geq 2\bar{\gamma}\bar{\delta}$ *tel que* $\bar{\gamma}\bar{K}(\bar{\theta}) < 1$ *, l'équation* $F(x) = 0$ *a une solution unique* $\bar{x}$ *, dans* $B_X(x_0, \bar{\theta})$ *. En outre :*

$$\|(D\,F(\bar{x}))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq 2\bar{\gamma}$$

et

$$\|\bar{x} - x\|_X \leq \frac{\bar{\gamma}}{1 - \bar{\gamma}\bar{K}(\bar{\theta})}\|F(x)\|_X\,, \quad \forall\, x \in B(x_0, \bar{\theta})\,.$$

En particulier :

$$\|\bar{x} - x_0\|_X \leq \bar{\gamma}\bar{\delta}\,.$$

Nous voulons appliquer ce lemme pour trouver un zero de la fonction $\mathcal{F}^\epsilon$, dans un voisinage d'un point d'équilibre φ de $S(t)$, dans les espaces X^ϵ et Y^ϵ .
Notre but dans la suite est de verifier que les conditions du théorème sont satisfaites.

Lemme 6.9. *Il existe des constantes strictement positives* c *et* ϵ_2 *, telles que pour tout* $\varphi \in E_0$ *et* $\epsilon \in (0,\, \epsilon_2)$ *, on a :*

(i)
$$\|\mathcal{F}^\epsilon(\varphi)\|_{X^\epsilon} \leq c\,(\epsilon + \epsilon^{p-1})$$

(ii)
$$\|\mathcal{F}^\epsilon(\varphi)\|_{Y^\epsilon} \leq c\,(\epsilon^{(3-p)/2} + \epsilon^{(p-1)/2})\,.$$

Preuve. Puisque $\mathcal{F}^0(\varphi) = 0$, on peut écrire :

$$\mathcal{F}^\epsilon(\varphi) = \mathcal{F}^\epsilon(\varphi) - \mathcal{F}^0(\varphi) = B_\epsilon[f(\varphi) + G^\epsilon] - B_0[f(\varphi) + G^0]\,.$$

On applique la proposition 6.5 avec $h = f(\varphi) + G^\epsilon$ et $h_0 = f(\varphi) + G^0$ et on obtient le résultat.

Maintenant nous voulons estimer $\|(D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^\epsilon,X^\epsilon)}$ et $\|(D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y^\epsilon,Y^\epsilon)}$ pour ϵ petit . Rappelons que

$$D\,\mathcal{F}^\epsilon(u)\,v = v + B_\epsilon(f'(u)\,v)\,.$$

On va se servir de l'application auxiliaire $G^\epsilon_\varphi \in \mathcal{L}(H^\epsilon,\, H^\epsilon) \cap \mathcal{L}(X^\epsilon,\, X^\epsilon)$, avec

$$G^\epsilon_\varphi(v) = v + B_0[f'(\varphi)M\,v]\,. \tag{6.17}$$

Proposition 6.10. *Il existe des constantes strictement positives* c *et* ϵ_2 *, telles que pour tout* $\varphi \in E_0$ *,* G^ϵ_φ *est inversible de* X^ϵ *dans* X^ϵ*, et*

$$\|(G^\epsilon_\varphi)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^\epsilon,X^\epsilon)} + \|(G^\epsilon_\varphi)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y^\epsilon,Y^\epsilon)} \leq c\,, \quad \forall\, \epsilon \in (0,\, \epsilon_2)\,.$$

Preuve. On montre d'abord que G^ϵ_φ est injective.
Soit $u \in X^\epsilon$ tel que

$$u + B_0[f'(\varphi)M\,u] = 0\ . \qquad (6.18)$$

On applique l'opérateur M , et on obtient
$M\,u + B_0[f'(\varphi)M\,u] = 0$.
Puisque $D\,\mathcal{F}^0(\varphi)$ est injective (voir Proposition 6.3(i)) , il résulte que $M\,u = 0$, et de (6.18) on obtient $u = 0$, d'où l'injectivité .

Montrons la surjectivité. Soit $v \in X^\epsilon$ donné , il faut trouver $u \in X^\epsilon$, solution de l'équation

$$u + B_0[f'(\varphi)M\,u] = v\ . \qquad (6.19)$$

Puisque $D\,\mathcal{F}^0(\varphi)$ est inversible de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, il existe $\bar{u} \in L^2(\Omega)$, solution de
$\bar{u} + B_0[f'(\varphi)\,\bar{u}] = M\,v$, c'est à dire
$\bar{u} = (D\,\mathcal{F}^0(\varphi))^{-1}(M\,v)$.
On voit facilement que

$$u = (D\,\mathcal{F}^0(\varphi))^{-1}(M\,v) + (I - M)v \qquad (6,20)$$

est la solution cherchée de l'équation (6.19) , qui appartient à l'espace $L^2(Q)$. Puisque $v \in X^\epsilon$ et $B_0[f'(\varphi)M\,u] \in H^1(\Omega)$, il résulte de (6.19) que $u \in X^\epsilon$. De (6.20), il s'ensuit que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\|v\|_{L^2(Q)}\ . \qquad (6.21)$$

En utilisant (6.19) et le fait que $B_0 \in \mathcal{L}(L^2(\Omega),\ H^1(\Omega))$, on obtient

$$\|u\|_{Y^\epsilon} \leq c\,\|v\|_{Y^\epsilon}\ . \qquad (6.22)$$

Il faut aussi estimer $\|u\|_{X^\epsilon}$. Pour ce faire, on restreint les égalités (6.19) et (6.20) à Q_i , $i = 1, 3$. On obtient alors une inégalité analogue à (6.22) , c'est à dire :

$$\|u_i\|_{X_i^\epsilon} \leq c\,\|v_i\|_{X_i^\epsilon}\ , \quad i = 1, 3\ . \qquad (6.23)_i$$

Si on multiplie l'inégalité (6.22) par $\epsilon^{(p-1)/2}$ et on y rajoute les inégalités $(6.23)_1$ et $(6.23)_3$, on obtient

$$\|u\|_{X^\epsilon} \leq c\,\|v\|_{X^\epsilon}\ . \qquad (6.24)$$

Les inégalités (6.22) et (6.24) finissent la preuve .

La proposition précédente nous permet de montrer :

Lemme 6.11. *Il existe des constantes strictement positives c et ϵ_2 , telles que pour tout $\epsilon \in (0,\ \epsilon_2)$, et pour tout $\varphi \in E_0$, $D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi)$ est inversible de X^ϵ dans X^ϵ et*

$$\|(D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X^\epsilon, X^\epsilon)} + \|(D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi))^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y^\epsilon, Y^\epsilon)} \leq c\ .$$

Preuve. Puisque G^ϵ_φ est inversible , on peut écrire

$$D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi) = G^\epsilon_\varphi\{I + (G^\epsilon_\varphi)^{-1}[D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi) - G^\epsilon_\varphi]\}\,. \tag{6.25}$$

Pour tout $v \in X^\epsilon$, on a

$$D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi)v - G^\epsilon_\varphi(v) = B_\epsilon[f'(\varphi)v] - B_0\{M[f'(\varphi)v]\}\,.$$

Il est évident que

$$\|f'(\varphi)v\|_{L^2(Q)} \leq c\,\|v\|_{L^2(Q)}$$

et

$$\|\partial_{y_2}[f'(\varphi_i)v_i]\|_{L^2(Q_i)} \leq c\,\|\partial_{y_2}v_i\|_{L^2(Q_i)}\,, \quad i = 1,2,3.$$

Maintenant le Corollaire 6.6 nous donne

$$\|D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi)v - G^\epsilon_\varphi(v)\|_{X^\epsilon} \leq c\,\epsilon^{(p-1)/2}\|v\|_{X^\epsilon} \tag{6.26)'$$

et

$$\|D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi)v - G^\epsilon_\varphi(v)\|_{Y^\epsilon} \leq c\,(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2})\|v\|_{Y^\epsilon}\,. \tag{6.26)"$$

Puisque l'inverse de G^ϵ_φ est borné par une constante indépendente de ϵ dans les normes de $\mathcal{L}(X^\epsilon,\, X^\epsilon)$ et $\mathcal{L}(Y^\epsilon,\, Y^\epsilon)$, le résultat désiré s'ensuit.

Le lemme suivant nous donne l'ultime inégalité dont nous avons besoin pour appliquer le Théorème 6.8 .

Lemme 6.12. *Il existe des constantes strictement positives c et ϵ_2 , telles que pour tout $\epsilon \in (0,\, \epsilon_2)$, tout $\varphi \in E_0$ et $\psi^\epsilon \in X^\epsilon$, on a les inégalités suivantes :*

(*i*) $\quad \|D\,\mathcal{F}^\epsilon(\psi^\epsilon) - D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi)\|_{\mathcal{L}(X^\epsilon,X^\epsilon)} \leq c\,\epsilon^{(1-p)(1+\gamma_2)/2}[1 + \|\psi^\epsilon - \varphi\|^{\gamma_2}_{X^\epsilon}]\|\psi^\epsilon - \varphi\|_{X^\epsilon}$

(*ii*) $\quad \|D\,\mathcal{F}^\epsilon(\psi^\epsilon) - D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi)\|_{\mathcal{L}(Y^\epsilon,Y^\epsilon)} \leq c\,[1 + \|\psi^\epsilon - \varphi\|^{\gamma_2}_{Y^\epsilon}]\|\psi^\epsilon - \varphi\|_{Y^\epsilon}\,.$

Preuve. Soit $v \in X^\epsilon$. Nous avons

$$D\,\mathcal{F}^\epsilon(\psi^\epsilon)v - D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi)v = B_\epsilon\{[f'(\psi^\epsilon) - f'(\varphi)]v\}\,.$$

Puisque B_ϵ est un opérateur borné uniformément en ϵ de H^ϵ dans X^ϵ
(voir (6.10)) , on peut écrire

$$\|D\,\mathcal{F}^\epsilon(\psi^\epsilon)v - D\,\mathcal{F}^\epsilon(\varphi)v\|_{X^\epsilon} \leq c\,\|[f'(\psi^\epsilon) - f'(\varphi)]v\|_{H^\epsilon}\,. \tag{6.27}$$

Il est facile de voir que

$$\|[f'(\psi^\epsilon_i) - f'(\varphi_i)]v_i\|_{L^2(Q_i)} \leq c\,[1 + \|\psi^\epsilon_i - \varphi_i\|^{\gamma_2}_{H^1(Q_i)}]\|\psi^\epsilon_i - \varphi_i\|_{H^1(Q_i)}\|v_i\|_{H^1(Q_i)}\,, \quad i = 1,2,3\,, \tag{6.28}$$

et en tenant compte de la définition de la norme de X^ϵ , on obtient

$$\|[f'(\psi^\epsilon) - f'(\varphi)]v\|_{H^\epsilon} \leq c\,\epsilon^{(1-p)(1+\gamma_2)/2}[1 + \|\psi^\epsilon - \varphi\|_{X^\epsilon}^{\gamma_2}]\|\psi^\epsilon - \varphi\|_{X^\epsilon}\|v\|_{X^\epsilon} ,$$

ce qui avec (6.27) montre l'inégalité (i) .

Pour montrer (ii) , on va appliquer la Proposition 6.7 avec $h = [f'(\psi^\epsilon) - f'(\varphi)]v$ et q fixé, $q \in (1, 2)$. L'inégalité (6.28) entraîne immédiatement:

$$\|[f'(\psi^\epsilon) - f'(\varphi)]v\|_{L^2(Q)} \leq c\,[1 + \|\psi^\epsilon - \varphi\|_{Y^\epsilon}^{\gamma_2}]\|\psi^\epsilon - \varphi\|_{Y^\epsilon}\|v\|_{Y^\epsilon} . \tag{6.29}$$

D'autre part , pour $i = 1, 3$ nous avons

$$\partial_{y_2}\{[f'(\psi_i^\epsilon) - f'(\varphi)]v_i\} = f''(\psi_i^\epsilon)\partial_{y_2}\psi_i^\epsilon v_i + [f'(\psi_i^\epsilon) - f'(\varphi_i)]\partial_{y_2}v_i . \tag{6.30}$$

En utilisant la majoration de f'', donnée en (1.7), et l'inégalité de Hölder avec les exposants q_1 , 2 , q_1 , où q_1 sera choisi de sorte que $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{q_1}$, on obtient

$$\|f''(\psi_i^\epsilon)\partial_{y_2}\psi_i^\epsilon v_i\|_{L^q(Q_i)} \leq c\,\epsilon[1 + \|\psi^\epsilon - \varphi\|_{Y^\epsilon}^{\gamma_2}]\|\psi^\epsilon - \varphi\|_{Y^\epsilon}\|v\|_{Y^\epsilon} , \quad i = 1, 3 . \tag{6.31}$$

De même, nous avons

$$\|[f'(\psi_i^\epsilon) - f'(\varphi_i)]\partial_{y_2}v_i\|_{L^q(Q_i)} \leq c\,\epsilon\,[1 + \|\psi^\epsilon - \varphi\|_{Y^\epsilon}^{\gamma_2}]\|\psi^\epsilon - \varphi\|_{Y^\epsilon}\|v\|_{Y^\epsilon} , \quad i = 1, 3 . \tag{6.32}$$

De la Proposition 6.7 et de (6.29) - (6.32) on obtient l'assertion (ii) .

On énonce maintenant le résultat principal de cette section .

Théorème 6.13. *Il existe des constantes strictement positives c , θ_0 et ϵ_2 , telles que pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$ et tout $\varphi \in E_0$, il existe dans l'ensemble $B_{Y^\epsilon}(\varphi, \theta_0) = \{v \in Y^\epsilon , \|v - \varphi\|_{Y^\epsilon} \leq \theta_0\}$, un point d'équilibre unique du semigroupe S^ϵ , noté par φ^ϵ . Ce point d'équilibre est hyperbolique.*
En outre on a :

(i) $$\|\varphi^\epsilon - \varphi\|_{Y^\epsilon} \leq c\,(\epsilon^{(3-p)/2} + \epsilon^{(p-1)/2})$$

(ii) $$\|\varphi_i^\epsilon - \varphi_i\|_{X_i^\epsilon} \leq c\,(\epsilon + \epsilon^{p-1}) , \quad i = 1, 3 .$$

Preuve. Nous appliquons le Lemme 6.8 . L'existence d'une solution unique φ^ϵ de l'équation $\mathcal{F}^\epsilon(\varphi^\epsilon) = 0$ dans une boule $B_{Y^\epsilon}(\varphi, \theta_0)$, est une conséquence directe des lemmes 6.8 , 6.9(ii) , 6.11 et 6.12(ii) , appliquées avec $F = \mathcal{F}^\epsilon$, $X = Y^\epsilon$ et $x_0 = \varphi$.

En appliquant le même Lemme 6.8 avec $F = \mathcal{F}^\epsilon$, $X = X^\epsilon$ et $x_0 = \varphi$, on déduit l'existence d'une solution unique $\hat{\varphi}^\epsilon$, dans une boule $B_{X^\epsilon}(\varphi, \xi\epsilon^{(p-1)(1+\gamma_2)/2})$, où ξ est une constante indépendente de ϵ. Nous pouvons appliquer le Lemme 6.8 dans ce cas, grâce à l'hypothèse **(H2)**.
Puisque $B_{X^\epsilon}(\varphi, \xi\epsilon^{(p-1)(1+\gamma_2)/2}) \subset B_{Y^\epsilon}(\varphi, \theta_0)$ pour ϵ assez petit , on obtient , par unicité de φ^ϵ , que $\varphi^\epsilon = \hat{\varphi}^\epsilon$, d'où le théorème .

On peut obtenir un résultat plus précis, c'est à dire que E^ϵ a exactement n_E éléments pour ϵ assez petit .

Proposition 6.14. *Il existe une constante strictement positive ϵ_2, telle que pour tout $\epsilon \in (0,\, \epsilon_2)$, E^ϵ a exactement n_E éléments.*

Preuve. Supposons qu'il existe une suite ϵ_n qui converge vers 0 , avec $\epsilon_n > 0$, telle qu'il existe un élément $u^{\epsilon_n} \in E^{\epsilon_n}$ qui n'est pas donné par le théorème 6.13 , c'est à dire

$$dist_{Y^{\epsilon_n}}(u^{\epsilon_n}\, ,\, E_0) \geq \theta_0\, . \tag{6.33}$$

Grâce à la semicontinuité supérieure des attracteurs, et à la compacité de $\mathcal{A}$, il existe un élément $u \in \mathcal{A}$, et une sous-suite de ϵ_n notée aussi par ϵ_n pour commodité, telles que

$$dist_{Y^{\epsilon_n}}(u^{\epsilon_n}\, ,\, u) \to 0 \quad \text{pour } n \to +\infty\, . \tag{6.34}$$

Nous allons montrer que $u \in E_0$, ce qui va contredire (6.33) et va nous donner le résultat.

Nous savons que l'élément u^{ϵ_n} de E^{ϵ_n} satisfait à l'égalité variationnelle

$$a_{\epsilon_n}(u^{\epsilon_n}\, ,\, v) + (f(u^{\epsilon_n})\, ,\, v)_{H^\epsilon} + (G^\epsilon\, ,\, v)_{H^\epsilon} = 0\ , \quad \forall\, v \in X^\epsilon\, . \tag{6.35}$$

Il est clair que pour tout $v_i \in H^1(\Omega_i)$, il existe $v \in H^1(\Omega)$ tel que $v/\Omega_i = v_i$ et $v/\Omega_{4-i} = 0$, $i = 1, 3$.
Si on remplace cet élément v dans (6.35) et on passe à la limite pour $n \to +\infty$, on obtient

$$a_{0i}(u_i\, ,\, v_i) + (f(u_i)\, ,\, v_i)_{L^2(\Omega_i)} + \left(G_i^0\, ,\, v_i\right)_{L^2(\Omega_i)} = 0\ , \quad \forall\, v_i \in H^1(\Omega_i)\ ,\ i = 1, 3. \tag{6.36}$$

D'autre part, si nous prennons dans (6.35) v comme étant la fonction qui s'obtient de v_2 en prolongeant par 0 en dehors de Ω_2 et nous passons à la limite dans la relation obtenue, il vient :

$$a_{02}(u_2\, ,\, v_2) + (f(u_2)\, ,\, v_2)_{L^2(\Omega_2)} + \left(G_2^0\, ,\, v_2\right)_{L^2(\Omega_2)} = 0\ , \quad \forall\, v_2 \in H_0^1(\Omega_2)\ ,$$

ce qui avec l'égalité (6.36) nous donne le résultat, en tenant compte du fait que $u \in H^1(\Omega)$.

7 Problèmes spectraux. Cadre semiabstrait.

7.1 Préliminaires .

Partout dans les sections 7 , 8 et 9 on va considérer $\varphi \in E_0$ fixé , et $\varphi^\epsilon \in E^\epsilon$ donné par le Théorème 6.13 .

On définit l'opérateur $C_\epsilon : D(A_\epsilon) \to H^\epsilon$ par

$$C_\epsilon v = A_\epsilon v + f'(\varphi^\epsilon)v \ , \tag{7.1}$$

et on pose $\hat{\alpha} = \frac{1}{2}\min\{1,\, \alpha\}$.

Proposition 7.1. *Il existe $\hat{\gamma} > 0$, tel que pour tout $\gamma \geq \hat{\gamma}$ on a :*

$$(C_\epsilon v + \gamma v\, ,\, v)_{H_g^\epsilon} \geq \hat{\alpha}\|v\|_{X^\epsilon}^2 \, , \quad \forall\, v \in D(A_\epsilon)\, .$$

Preuve . En utilisant la majoration (1.6) de f', on obtient

$$|(f'(\varphi^\epsilon)v\, ,\, v)_{H_g^\epsilon}| \leq \sum_{i\neq 2}\int_{Q_i} c\,[1 + |\varphi_i^\epsilon|^{\gamma_1}]\,|v_i|\cdot|v_i| + \epsilon^{p-1}\int_{Q_2} c\,[1 + |\varphi_2^\epsilon|^{\gamma_1}]\,|v_2|\cdot|v_2|\, .$$

Nous utilisons l'inégalité de Hölder avec les exposants 4 , 4 , 2 , et ensuite le fait que les fonctions φ_i^ϵ sont bornées dans la norme de $H^1(Q_i)$, uniformément en ϵ , pour $i = 1, 2, 3$. On obtient

$$|(f'(\varphi^\epsilon)v\, ,\, v)_{H_g^\epsilon}| \leq c\,[\sum_{i\neq 2}\|v_i\|_{H^1(Q_i)}\|v_i\|_{L^2(Q_i)} + \epsilon^{p-1}\|v_2\|_{H^1(Q_2)}\|v_2\|_{L^2(Q_2)}]$$

$$\leq \hat{\alpha}\|v\|_{X^\epsilon}^2 + \frac{c^2}{4\hat{\alpha}}\|v\|_{H^\epsilon}^2\, .$$

En utilisant la coercivité de a_ϵ, on déduit de l'inégalité ci-dessus que

$$(C_\epsilon v\, ,\, v)_{H_g^\epsilon} \geq \hat{\alpha}\|v\|_{X^\epsilon}^2 - \frac{c^2}{4\hat{\alpha}}\|v\|_{H^\epsilon}^2\, .$$

On peut prendre $\hat{\gamma} = \frac{c^2}{4\hat{\alpha}}$, et on obtient le résultat .

Dans la suite , nous fixons un nombre réel γ , tel que $\gamma \geq \max\{\hat{\gamma}\, ,\, \|f'(\varphi)\|_{L^\infty(\Omega)}\}$, où $\hat{\gamma}$ est donnée par la Proposition 7.1 .

Nous introduisons l'opérateur O_ϵ , defini par

$$O_\epsilon v = C_\epsilon v + \gamma\, v\, , \quad \forall v \in D(A_\epsilon)\, . \tag{7.2}$$

Il résulte du choix de γ que O_ϵ satisfait à :

$$(O_\epsilon v\, ,\, v)_{H_g^\epsilon} \geq \hat{\alpha}\|v\|_{X^\epsilon}^2\, , \quad \forall v \in D(A_\epsilon)\, . \tag{7.3}$$

L'opérateur O_ϵ est strictement positif, autoadjoint et inversible. Notons $\hat{B}_\epsilon \in \mathcal{L}(H^\epsilon\,,\, X^\epsilon)$ l'inverse de O_ϵ. De (7.3), il s'ensuit directement que

$$\|\hat{B}_\epsilon\|_{\mathcal{L}(H^\epsilon,X^\epsilon)} \leq c \tag{7.4}$$

et donc $\hat{B}_\epsilon : H^\epsilon \rightarrow H^\epsilon$ est compact.
On définit également les opérateurs C_0 , C_{0i} , $i = 1,3$, O_0 et O_{0i} , $i = 1,3$ par

$$C_0 v = A_0\, v + f'(\varphi)v \ \ (\text{ respectivement } C_{0i}v_i = A_{0i}\, v_i + f'(\varphi_i)v_i \ ,\ i = 1,3) \tag{7.5}$$

et

$$O_0 v = C_0 v + \gamma\, v \ \ (\text{ respectivement } O_{0i}v_i = C_{0i}v_i + \gamma\, v_i \ ,\ i = 1,3)\ .$$

L'opérateur O_0 est inversible, d'inverse noté $\hat{B}_0$.
Rappelons que, si $h \in L^2(\Omega)$, alors $v = \hat{B}_0 h$ est la solution du système :

$$\begin{cases} -\frac{1}{g_i}\partial_{y_1}(g_i\partial_{y_1} v_i) + \alpha\, v_i + f'(\varphi_i)v_i + \gamma\, v_i = h_i & \text{dans } \Omega_i \\ \\ \partial_{y_1} v_i = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega_i \end{cases} \tag{7.6}$$

pour $i = 1,3$, et

$$\begin{cases} -\frac{1}{g_2}\partial_{y_1}(g_2\partial_{y_1} v_2) + \alpha\, v_2 + f'(\varphi_2)v_2 + \gamma\, v_2 = h_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ \\ v_2(a) = v_1(a) \qquad \text{et } v_2(b) = v_3(b)\ . \end{cases} \tag{7.7}$$

On va aussi définir $\hat{B}_{0i}h_i$ pour $i = 1,3$, comme étant la solution de (7.6) .
Il est évident que
$(\hat{B}_0 h)_i = \hat{B}_{0i}h_i\ ,\quad i = 1,3.$
Pour résoudre (7.7), on utilise toujours le changement de fonction inconnue $v_2 = \bar{v}_2 + \mathcal{R}(v_1, v_3)$ et on obtient la proposition suivante , qui est l'analogue de la proposition 6.2:

Proposition 7.2.
(*i*) $\hat{B}_{0i} \in \mathcal{L}\,(L^2(\Omega_i),\, H^2(\Omega_i))$ *pour* $i = 1,3$.
(*ii*) *Il existe une constante* $c > 0$ *tel que pour tout* $h \in L^2(\Omega)$ *on a :*

$$\|(\hat{B}_0 h)_i\|_{H^2(\Omega_i)} \leq c\,\|h\|_{L^2(\Omega)} \qquad \textit{pour } i = 1,2,3\ .$$

(*iii*) *Pour tout* $\sigma \in [0,\, \frac{3}{2})$ *nous avons :* $\hat{B}_0 \in \mathcal{L}\,(L^2(\Omega),\, H^\sigma(\Omega))$.

De la proposition 7.2, il s'ensuit que les opérateurs $\hat{B}_0 : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ et $\hat{B}_{0i} : L^2(\Omega_i) \rightarrow L^2(\Omega_i)$ sont compacts .
Nous aurons besoin dans la suite d'un résultat analogue à celui de la Proposition 6.5.

Proposition 7.3. *Pour tout $q \in (1, +\infty)$, il existe des constantes strictement positives c_q et ϵ_q , telles que pour tout $h \in L^2(Q) \cap L^q(Q)$ et tout $h_0 \in L^2(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, on a :*

$$\|\hat{B}_\epsilon h - \hat{B}_0 h_0\|_{Y^\epsilon} \leq c_q \,[\epsilon^{(1-p)/2} \sum_{i \neq 2} \|h_i - h_{0i}\|_{L^q(Q_i)} + \|h_2 - h_{02}\|_{L^q(Q_2)}$$

$$+ (\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2}) \|h_0\|_{L^2(\Omega)}] \,.$$

Preuve. On remarque que $u^\epsilon = \hat{B}_\epsilon h$ satisfait à l'égalité variationnelle

$$\hat{a}_\epsilon(u^\epsilon \,, v) = (h \,, v)_{H_g^\epsilon} \,, \; \forall \, v \in X^\epsilon \,, \tag{7.8}$$

où $\hat{a}_\epsilon$ est la forme bilineaire

$$\hat{a}_\epsilon(u \,, v) = a_\epsilon(u \,, v) + (f'(\varphi^\epsilon) u + \gamma \, u \,, v)_{H_g^\epsilon} \,, \quad \forall \, u \,, v \in X^\epsilon \,. \tag{7.9}$$

On note $u = \hat{B}_0 h_0$ et $\bar{w}^\epsilon = u^\epsilon - u$. L'élément $\bar{w}^\epsilon$ satisfait à

$$\hat{a}_\epsilon(\bar{w}^\epsilon, \, v) = (h - h_0 \,, v)_{H_g^\epsilon} + \sum_{i \neq 2} \int_{Q_i} g_i' \, y_2 \, \partial_{y_1} u_i \, \partial_{y_2} v_i + \epsilon^{p-1} \int_{Q_2} g_2' \, y_2 \, \partial_{y_1} u_2 \, \partial_{y_2} v_2$$

$$-\epsilon^{p-1} \partial_{y_1} u_2(b) (M_2 v_2)(b) + \epsilon^{p-1} \partial_{y_1} u_2(a) (M_2 v_2)(a) -$$

$$- ([f'(\varphi^\epsilon) - f'(\varphi)] u \,, v)_{H_g^\epsilon} \,, \quad \forall \, v \in X^\epsilon \,. \tag{7.10}$$

On remplace v par $\bar{w}^\epsilon$ dans (7.10). Les cinq premiers termes du membre de droite de (7.10) sont majorés comme en (6.12) et (6.13) .
On voit facilement que

$$| \int_{Q_i} [f'(\varphi_i^\epsilon) - f'(\varphi_i)] u_i \bar{w}_i^\epsilon | \leq c \, \|\varphi_i^\epsilon - \varphi_i\|_{H^1(Q_i)} \|u_i\|_{H^1(Q_i)} \|\bar{w}_i^\epsilon\|_{H^1(Q_i)} \,, \quad i = 1, 2, 3 \,.$$

On utilise les majorations de $\varphi^\epsilon - \varphi$ données dans le Théorème 6.13 , et le fait que $\hat{B}_0 \in \mathcal{L}(L^2(\Omega) \,, H^1(\Omega))$, et on obtient

$$| \sum_{i \neq 2} \int_{Q_i} [f'(\varphi_i^\epsilon) - f'(\varphi_i)] u_i \, \bar{w}_i^\epsilon + \epsilon^{p-1} \int_{Q_2} [f'(\varphi_2^\epsilon) - f'(\varphi_2)] u_2 \, \bar{w}_2^\epsilon \, | \leq$$

$$\leq \eta \|\bar{w}^\epsilon\|_{X^\epsilon}^2 + c_\eta (\epsilon^2 + \epsilon^{2p-2}) \|h_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \,, \quad \forall \, \eta > 0 \,.$$

En prenant η assez petit et en utilisant la coercivité (7.3) de $\hat{a}_\epsilon$, on obtient une estimation dans X^ϵ. En divisant par $\epsilon^{(p-1)/2}$, on trouve la majoration recherchée.

Maintenant nous introduisons une famille auxiliaire d'espaces. Pour tout $q \in [1, +\infty)$, nous posons :

$Z_q^\epsilon = \{v : Q \to I\!R \text{ tel que } v = \tilde{v} \circ \theta \ , \ \tilde{v} \in W^{1,q}(Q^\epsilon)\}$
munis de la norme

$$\|v\|_{Z_q^\epsilon} = \sum_{i=1}^{3} \|v_i\|_{Z_{qi}^\epsilon} \ ,$$

où

$$\|v_i\|_{Z_{qi}^\epsilon} = \|v_i\|_{W^{1,q}(Q_i)} + \frac{1}{\epsilon}\|\partial_{y_2} v_i\|_{L^q(Q_i)} \ , \quad i = 1, 3$$

et

$$\|v_2\|_{Z_{q2}^\epsilon} = \|v_2\|_{W^{1,q}(Q_2)} + \frac{1}{\epsilon^p}\|\partial_{y_2} v_2\|_{L^q(Q_2)} \ .$$

On remarque que pour $q = 2$, Z_q^ϵ est égal à Y^ϵ .
On remarque aussi que $W^{1,q}(Q_i)$ s'injecte continûment dans $L^2(Q_i)$, pour tout $q \geq 1$.

Le corollaire suivant est une conséquence directe du corollaire 6.6(ii), des propositions 6.7 et 7.3 (où on pose $h_0 = Mh$), et du fait que $\hat{B}_0 \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega))$.

Corollaire 7.4. *Pour tout $q \in (1\,,+\infty)$, il existe des constantes $c_q > 0$ et $\epsilon_q > 0$, telles que pour tout $h \in Z_q^\epsilon$ et $\epsilon \in (0\,,\epsilon_q)$, on a :*

$$(i) \qquad \|\hat{B}_\epsilon h - \hat{B}_0(M\,h)\|_{Y^\epsilon} \leq c_q(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2})\|h\|_{Z_q^\epsilon}$$

$$(ii) \qquad \|\hat{B}_\epsilon h\|_{Y^\epsilon} \leq c_q\|h\|_{Z_q^\epsilon}$$

$$(iii) \qquad \|B_\epsilon h - B_0(M\,h)\|_{Y^\epsilon} \leq c_q(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2})\|h\|_{Z_q^\epsilon}$$

$$(iv) \qquad \|B_\epsilon h\|_{Y^\epsilon} \leq c_q\|h\|_{Z_q^\epsilon} \ .$$

7.2 Valeurs propres de C_ϵ , C_0 , A_ϵ , A_0 .

Les preuves de tous les résultats de ce paragraphe, sauf le lemme 7.7, s'inspirent du travail de Hale, Raugel ([11] , Section 3). Voir aussi Kato ([18]).
On va donner deux lemmes qui sont très importants pour la caractérisation des valeurs propres de $\hat{B}_\epsilon$ et B_ϵ .

Lemme 7.5. *Pour tout $q \in (1,\, 2]$, et pour tout compact K dans l'ensemble résolvant de $\hat{B}_0$ (respectivement dans l'ensemble résolvant de B_0) , avec $0 \notin K$, il existe des constantes strictement positives $c_{K,q}$ et $\epsilon_{K,q}$, telles que pour tout $\epsilon \in (0,\, \epsilon_{K,q})$, on a:*

$$(i) \qquad \sup_{\lambda \in K} \|(\lambda I - \hat{B}_0 M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon, Z_q^\epsilon)} \leq c_{K,q}$$

(respectivement

$$\sup_{\lambda \in K} \|(\lambda I - B_0 M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon, Z_q^\epsilon)} \leq c_{K,q} \ )$$

(*ii*)
$$\sup_{\lambda\in K}\|(\lambda I-\hat{B}_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)}\le c_{K,q}$$

(*respectivement*
$$\sup_{\lambda\in K}\|(\lambda I-B_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)}\le c_{K,q}\ )$$

(*iii*) $$\sup_{\lambda\in K}\|(\lambda I-\hat{B}_\epsilon)^{-1}-(\lambda I-\hat{B}_0M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)}\le c_{K,q}(\epsilon^{(p-1)/2}+\epsilon^{(3-p)/2})$$

(*respectivement*
$$\sup_{\lambda\in K}\|(\lambda I-B_\epsilon)^{-1}-(\lambda I-B_0M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)}\le c_{K,q}(\epsilon^{(p-1)/2}+\epsilon^{(3-p)/2})\ ).$$

Preuve. On fait la démonstration dans le cas des opérateurs $\hat{B}_\epsilon$ et $\hat{B}_0$ seulement, celle pour les opérateurs B_ϵ et B_0 étant semblable.
Il existe une constante c_{1K} , telle que pour tout $\lambda\in K$ on a
$$\|(\lambda I-\hat{B}_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega),L^2(\Omega))}\le c_{1K}\ . \tag{7.11}$$
Pour montrer que $\lambda I-\hat{B}_0M : Z_q^\epsilon\longrightarrow Z_q^\epsilon$ est inversible , on procède comme dans la Proposition 6.10.
Pour l'injectivité , on considère un élément u de Z_q^ϵ satisfaisant à
$$\lambda u-\hat{B}_0Mu=0\ .$$
Alors en appliquant l'opérateur M et en utilisant le fait que $\lambda I-\hat{B}_0$ est injective , on déduit que $Mu=0$ et ensuite que $u=0$.
Démontrons la surjectivité. Soit $v\in Z_q^\epsilon$, nous cherchons une solution de l'équation
$$\lambda u-\hat{B}_0Mu=v\ . \tag{7.12}$$
On observe que
$$u=(\lambda I-\hat{B}_0)^{-1}(Mv)+\frac{1}{\lambda}(v-Mv) \tag{7.13}$$
est la solution cherchée .
Nous utilisons la propriété (7.11) pour déduire que
$$\|u\|_{L^2(Q)}\le c_{2K}\|v\|_{L^2(Q)}.$$
Puisque $\hat{B}_0\in\mathcal{L}(L^2(\Omega),H^1(\Omega))$, il vient
$$\|\hat{B}_0Mu\|_{H^1(\Omega)}\le c_{3K}\|v\|_{L^2(Q)}\ .$$
De cette inégalité et de (7.12) , il s'ensuit enfin que
$$\|u\|_{Z_q^\epsilon}\le c_K\|v\|_{Z_q^\epsilon}\ .$$

Pour montrer (ii) , on procède comme au lemme 6.11 . On écrit :

$$\lambda I-\hat{B}_\epsilon = \lambda I-\hat{B}_0M-(\hat{B}_\epsilon-\hat{B}_0M) = (\lambda I-\hat{B}_0M)[I-(\lambda I-\hat{B}_0M)^{-1}\cdot(\hat{B}_\epsilon-\hat{B}_0M)] .$$

La propriété (ii) est alors une conséquence directe de cette égalitée , de (i) et du Corollaire 7.4(i) .

Pour obtenir (iii) on utilise le fait que

$$(\lambda I-\hat{B}_\epsilon)^{-1}-(\lambda I-\hat{B}_0M)^{-1} = (\lambda I-\hat{B}_\epsilon)^{-1}\cdot(\hat{B}_\epsilon-\hat{B}_0M)\cdot(\lambda I-\hat{B}_0M)^{-1} ,$$

les propriétés (i) et (ii) et le Corollaire 7.4(i).

Lemme 7.6. *Il existe un compact K^* tel que pour tout $q \in (1, 2]$, il existe deux constantes strictement positives c_q et ϵ_q , telles que si $U^* = C\backslash K^*$ et $\epsilon \in (0, \epsilon_q)$, on a :*

(i)
$$\sup_{\lambda\in U^*} \|(\lambda I-\hat{B}_0M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)} \leq c_q$$

(respectivement
$$\sup_{\lambda\in U^*} \|(\lambda I-B_0M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)} \leq c_q \text{)}$$

(ii)
$$\sup_{\lambda\in U^*} \|(\lambda I-\hat{B}_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)} \leq c_q$$

(respectivement
$$\sup_{\lambda\in U^*} \|(\lambda I-B_\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)} \leq c_q \text{)}$$

(iii)
$$\sup_{\lambda\in U^*} \|(\lambda I-\hat{B}_\epsilon)^{-1}-(\lambda I-\hat{B}_0M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)} \leq c_q(\epsilon^{(p-1)/2}+\epsilon^{(3-p)/2})$$

(respectivement
$$\sup_{\lambda\in U^*} \|(\lambda I-B_\epsilon)^{-1}-(\lambda I-B_0M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)} \leq c_q(\epsilon^{(p-1)/2}+\epsilon^{(3-p)/2}) \text{)} .$$

La démonstration est tout à fait analogue à celle du Lemme 7.5 . Il faut seulement remarquer que , puisque $\hat{B}_0$ est un opérateur borné , on peut trouver un compact K^* et une constante $c > 0$, tels que :

$$\|(\lambda I-\hat{B}_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega),L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{|\lambda|}c_1$$

pour tout $\lambda \in U^* = C\backslash K^*$.

On va définir un nouvel opérateur $\hat{B}_{02} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)\,,\,L^2(\Omega))$ par $v_2 = \hat{B}_{02}h_2$ si et seulement si v_2 est la solution du problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} -\frac{1}{g_2}\partial_{y_1}(g_2\partial_{y_1}v_2) + \alpha\, v_2 + f'(\varphi_2)v_2 + \gamma\, v_2 = h_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ \\ v_2(a) = v_2(b) = 0\ . \end{cases} \tag{7.14}$$

Grâce au choix de γ , $\hat{B}_{02}h_2$ est bien défini .

On a évidemment

$$\|\hat{B}_{02}\|_{H^2(\Omega_2)} \leq c\,\|h_2\|_{L^2(\Omega_2)}\ . \tag{7.15}$$

De la même manière , on définit l'opérateur $B_{02} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)\,,\,L^2(\Omega))$ par $v_2 = B_{02}h_2$ si et seulement si v_2 est la solution du problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} -\frac{1}{g_2}\partial_{y_1}(g_2\partial_{y_1}v_2) + \alpha\, v_2 = h_2 & \text{dans } \Omega_2 \\ \\ v_2(a) = v_2(b) = 0\ . \end{cases} \tag{7.16}$$

De même ,

$$\|B_{02}\|_{H^2(\Omega_2)} \leq c\,\|h_2\|_{L^2(\Omega_2)}\ . \tag{7.17}$$

Le lemme qui suit caractérise les valeurs propres de $\hat{B}_0$ et B_0 .

Lemme 7.7.

$$VP(\hat{B}_0) = VP(\hat{B}_{01}) \cup VP(\hat{B}_{02}) \cup VP(\hat{B}_{03})$$

et

$$VP(B_0) = VP(B_{01}) \cup VP(B_{02}) \cup VP(B_{03})$$

où $VP(O)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur O .

Preuve.

Soit $\lambda \in VP(\hat{B}_0)$. Il existe une fonction $u \neq 0$ définie sur Ω , telle que
$\hat{B}_0 u - \lambda\, u = 0$.

On distingue deux cas :

Cas 1 . Si $u_i \neq 0$ pour $i = 1$ ou $i = 3$, alors étant donné que u_i satisfait à
$\hat{B}_{0i}u_i - \lambda\, u_i = 0$,
alors il resulte que λ est une valeur propre de $\hat{B}_{0i}$ pour $i = 1$ ou $i = 3$.

Cas 2 . Si $u_1 = u_3 = 0$, alors $u_2 \neq 0$, et u_2 est un vecteur propre de $\hat{B}_{02}$, avec $\lambda \in VP(\hat{B}_{02})$.

Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens , supposons d'abord que $\lambda \in VP(\hat{B}_{02})$. Alors il existe $u_2 \in H_0^1(\Omega_2)$, $u_2 \neq 0$, tel que
$\hat{B}_{02}u_2 - \lambda\, u_2 = 0$.

Alors il est evident que la fonction u définie sur Ω , telle que $u/\Omega_2 = u_2$ et $u/\Omega_i = 0$ pour $i = 1, 3$, satisfait à
$\hat{B}_0 u - \lambda\, u = 0$, ce qui entrainne $\lambda \in VP(\hat{B}_0)$.

Supposons maintenant que $\lambda \in VP(\hat{B}_{0i})$, avec $i = 1$ ou $i = 3$.
Donc $\lambda I - \hat{B}_{0i}$ n'est pas injective , et de l'alternative de Fredholm il resulte que $\lambda I - \hat{B}_{0i}$ n'est pas surjective de $L^2(\Omega_i)$ dans $L^2(\Omega_i)$ (parce que $\lambda \neq 0$ et $\hat{B}_{0i}$ est compacte de $L^2(\Omega_i)$ dans $L^2(\Omega_i)$) , donc $\lambda I - \hat{B}_0$ n'est pas surjective de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.
Puisque $\hat{B}_0$ est compacte de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, l'alternative de Fredholm nous dit que $\lambda I - \hat{B}_0$ n'est pas injective , donc $\lambda \in VP(\hat{B}_0)$.
La preuve est identique pour B_0 .

Puisque $\hat{B}_{0i}$ sont des opérateurs autoadjoints , définis positifs et compacts sur H_{0i} , $i = 1, 2, 3$, $VP(\hat{B}_{0i})$ consiste en une suite de valeurs propres réelles , positives , qui tend vers 0 , et la même propriété est vraie pour $VP(B_{0i})$. On a alors :

$$VP(\hat{B}_{0i}) = \{\tilde{\lambda}_i^n \; ; \; n = 1, 2, ...\} \qquad \text{où } \tilde{\lambda}_i^1 > \tilde{\lambda}_i^2 > ... \to 0 \, .$$

et

$$VP(B_{0i}) = \{\tilde{\mu}_i^n \; ; \; n = 1, 2, ...\} \qquad \text{où } \tilde{\mu}_i^1 > \tilde{\mu}_i^2 > ... \to 0 \, .$$

Du lemme 7.7 il résulte que $VP(\hat{B}_0)$ est aussi une suite de valeurs propres réelles, positives, qui tend vers 0 :

$$VP(\hat{B}_0) = \{\tilde{\lambda}^n \; ; \; n = 1, 2, ...\} \qquad \text{où } \tilde{\lambda}^1 \geq \tilde{\lambda}^2 \geq ... \to 0 \, ,$$

et de même

$$VP(B_0) = \{\tilde{\mu}^n \; ; \; n = 1, 2, ...\} \qquad \text{où } \tilde{\mu}^1 \geq \tilde{\mu}^2 \geq ... \to 0 \, .$$

Il est évident que $\lambda \in VP(C_0)$ si et seulement si $(\lambda + \gamma)^{-1} \in VP(\hat{B}_0)$. Donc $VP(C_0)$ est une suite des valeurs propres réelles , qui tend vers $+\infty$:

$$VP(C_0) = \{\lambda^n = \frac{1}{\tilde{\lambda}^n} - \gamma \, , \quad \tilde{\lambda}^n \in VP(\hat{B}_0)\} \, .$$

De même , $\mu \in VP(A_0)$ si et seulement si $\mu^{-1} \in VP(B_0)$. Donc $VP(A_0)$ est une suite des valeurs propres réelles positives, qui tend vers $+\infty$:

$$VP(A_0) = \{\mu^n = \frac{1}{\tilde{\mu}^n} \, , \quad \tilde{\mu}^n \in VP(B_0)\} \, .$$

Puisque $\hat{B}_0$ et B_0 sont des opérateurs compacts , on peut affirmer que
$\sigma(\hat{B}_0) \backslash \{0\} = VP(\hat{B}_0)$ et $\sigma(B_0) \backslash \{0\} = VP(B_0)$
(où on désigne en général par $\sigma(O)$ le spectre de l'opérateur O).
Puisque $\hat{B}_0 M : L^2(Q) \to L^2(Q)$ est compact et $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $\hat{B}_0 M$ si et seulement si λ est valeur propre de $\hat{B}_0$, nous avons
$\sigma(\hat{B}_0 M) \backslash \{0\} = VP(\hat{B}_0)$.
De même

$$\sigma(B_0M)\backslash\{0\} = VP(B_0)\ ,\ \sigma(\hat{B}_\epsilon)\backslash\{0\} = VP(\hat{B}_\epsilon) \ \text{ et } \ \sigma(B_\epsilon)\backslash\{0\} = VP(B_\epsilon).$$

Soit $\tilde{\lambda}^k$ une valeur propre de $\hat{B}_0$.
On introduit d'une manière classique l'opérateur de projection suivant dans $L^2(\Omega)$ (voir [18]) :
On considère dans le plan complexe le disque de centre $\tilde{\lambda}^k$ et rayon ν^k, $B(\tilde{\lambda}^k\,,\,\nu^k)$, avec ν^k assez petit , de sorte que
$0 \notin \overline{B(\tilde{\lambda}^k\,,\,\nu^k)}$ et $\overline{B(\tilde{\lambda}^k\,,\,\nu^k)} \cap \sigma(\hat{B}_0) = \{\tilde{\lambda}^k\}$.
On pose pour tout $u \in L^2(\Omega)$:

$$\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\gamma}^k}(\lambda I - \hat{B}_0)^{-1}u\,d\lambda\ , \tag{7.18}$$

où $\hat{\gamma}^k = \partial B(\tilde{\lambda}^k\,,\,\nu^k)$.

Il est bien connu que $\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega),\,L^2(\Omega))$ est une projection, et que $\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)L^2(\Omega)$ est un sous-espace de dimension finie $\hat{d}_k$.
On définit aussi l'opérateur lineaire :

$$\hat{\mathcal{P}}_0(\tilde{\lambda}^k) : L^2(Q) \to L^2(Q)$$

par la relation :

$$\hat{\mathcal{P}}_0(\tilde{\lambda}^k)u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\gamma}^k}(\lambda I - \hat{B}_0\,M)^{-1}u\,d\lambda\ . \tag{7.19}$$

Proposition 7.8.
$\hat{\mathcal{P}}_0(\tilde{\lambda}^k)u = \hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\,u\ ,\quad \forall\, u \in L^2(Q)$.

Preuve. Si $\lambda \in \hat{\gamma}^k$, alors

$$(\lambda I - \hat{B}_0\,M)^{-1}u = (\lambda I - \hat{B}_0)^{-1}M\,u + \frac{1}{\lambda}(u - M\,u)\ .$$

Puisque $\hat{\gamma}^k$ n'entoure pas le point 0 , nous avons
$\int_{\hat{\gamma}^k} \frac{1}{\lambda}(u - M\,u)\,d\lambda = 0$, d'où le résultat .

On définit ensuite pour tout $q \in (1,2]$, l'opérateur lineaire
$\hat{P}_\epsilon(\tilde{\lambda}^k) \in \mathcal{L}(Z_q^\epsilon\,,\,Z_q^\epsilon)$:

$$\hat{P}_\epsilon(\tilde{\lambda}^k)u = \frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\gamma}^k}(\lambda I - \hat{B}_\epsilon)^{-1}u\,d\lambda\ . \tag{7.20}$$

De manière analogue, on définit pour toute valeur propre $\tilde{\mu}^k$ de B_0 , la projection

$$P_0(\tilde{\mu}^k)v = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^k}(\lambda I - B_0)^{-1}v\,d\lambda \tag{7.21}$$

avec $\gamma^k = \partial B(\tilde{\mu}^k, \nu^k)$, où ν^k est choisit de sorte que

$0 \notin \overline{B(\tilde{\mu}^k\,,\,\nu^k)}$ et $\overline{B(\tilde{\mu}^k\,,\,\nu^k)} \cap \sigma(B_0) = \{\tilde{\mu}^k\}$.
$P_0(\tilde{\mu}^k)L^2(\Omega)$ est un sous-espace de dimension finie d_k .
On introduit aussi l'opérateur $\mathcal{P}_0(\tilde{\mu}^k) \in \mathcal{L}(L^2(Q)\,,\,L^2(Q))$:

$$\mathcal{P}_0(\tilde{\mu}^k)v = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^k}(\lambda I - B_0\,M)^{-1}v\,d\lambda \tag{7.22}$$

et on montre que

$$\mathcal{P}_0(\tilde{\mu}^k)v = P_0(\tilde{\mu}^k)M\,v\ ,\ \forall\, v \in L^2(Q). \tag{7.23}$$

On définit aussi, pour tout $q \in (1,2]$, l'opérateur $P_\epsilon(\tilde{\mu}^k) \in \mathcal{L}(Z_q^\epsilon\,,\,Z_q^\epsilon)$ par

$$P_\epsilon(\tilde{\mu}^k)v = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^k}(\lambda I - B_\epsilon)^{-1}v\,d\lambda\ . \tag{7.24}$$

Comme conséquence immédiate du Lemme 7.5 , on a le résultat suivant :

Lemme 7.9. *Pour tout $q \in (1,\,2]$ et $k \in I\!N$, il existe des constantes $c_{q,k} > 0$ et $\epsilon_{q,k} > 0$, telles que pour tout $\epsilon \in (0,\,\epsilon_{q,k})$ on a :*

(i)
$$\|\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)\,M\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)} \le c_{q,k}$$

$$(\textit{ respectivement}\quad \|P_0(\tilde{\mu}^k)\,M\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)} \le c_{q,k}\ )$$

(ii)
$$\|\hat{P}_\epsilon(\tilde{\lambda}^k)\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)} \le c_{q,k}$$

$$(\textit{ respectivement}\quad \|P_\epsilon(\tilde{\mu}^k)\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)} \le c_{q,k}\ )$$

(iii)
$$\|\hat{P}_\epsilon(\tilde{\lambda}^k) - \hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)\,M\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)} \le c_{q,k}(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2})$$

(respectivement

$$\|P_\epsilon(\tilde{\mu}^k) - P_0(\tilde{\mu}^k)\,M\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon,Z_q^\epsilon)} \le c_{q,k}(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2})\ )\ .$$

Du Lemme 7.5(i) , il vient immédiatement que $\hat{\mathcal{P}}_0(\tilde{\lambda}^k) \in \mathcal{L}(Z_q^\epsilon\,,\,Z_q^\epsilon)$.
D'autre part, $\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. En effet, si v est dans $\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)L^2(\Omega)$, il existe un nombre entier $d_v \ge 1$ tel que $(\tilde{\lambda}^k\,I - \hat{B}_0)^{d_v}\,v = 0$; puisque $\hat{B}_0 \in \mathcal{L}(L^2(\Omega)\,,\,H^1(\Omega))$, ceci entraîne que v est dans $H^1(\Omega)$.
Et donc

$$\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)(W^{1,q}(\Omega)) \subset \hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)(MZ_q^\epsilon) \subset \hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)(L^2(\Omega)) =$$

$$= \hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)^2(L^2(\Omega)) \subset \hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)H^1(\Omega) \subset \hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)(W^{1,q}(\Omega))\ ,$$

ce qui entraîne que $\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)(MZ_q^\epsilon) = \hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)(L^2(\Omega))$.
Puisque $\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)MZ_q^\epsilon = \hat{\mathcal{P}}_0(\tilde{\lambda}^k)Z_q^\epsilon$, on a :

$$dim\hat{\mathcal{P}}_0(\tilde{\lambda}^k)Z_q^\epsilon = \hat{d}_k \ . \tag{7.25}$$

De manière analogue, on montre que

$$dim\mathcal{P}_0(\tilde{\mu}^k)Z_q^\epsilon = d_k \ .$$

Proposition 7.10. *Il existe une constante strictement positive ϵ_k , telle que pour tout $\epsilon \in (0,\ \epsilon_k)$ on a :*

$$(i) \qquad dim\hat{P}_\epsilon(\tilde{\lambda}^k)Z_q^\epsilon = dim\hat{\mathcal{P}}_0(\tilde{\lambda}^k)Z_q^\epsilon = \hat{d}_k$$

$$(ii) \qquad dimP_\epsilon(\tilde{\mu}^k)Z_q^\epsilon = dim\mathcal{P}_0(\tilde{\mu}^k)Z_q^\epsilon = d_k \ .$$

Preuve . La preuve se fait exactement comme dans le Théorème 3.3 de [11] , en prenant
$\mathcal{R}^k = [\hat{P}_\epsilon(\tilde{\lambda}^k) - \hat{\mathcal{P}}_0(\tilde{\lambda}^k)]^2$.

Proposition 7.11 . *Il existe une constante strictement positive ϵ_k , telle que pour tout $\epsilon \in (0,\ \epsilon_k)$, il existe une base orthonormale $\hat{\Phi}_\epsilon^1$, . . . $\hat{\Phi}_\epsilon^{\hat{d}_k}$ pour $\hat{P}_\epsilon(\tilde{\lambda}^k)Y^\epsilon$, et de plus $\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon^1$, . . . $\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon^{\hat{d}_k}$ est une base pour $\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)MY^\epsilon$.
De même , il existe une base orthonormale Φ_ϵ^1 , . . . $\Phi_\epsilon^{d_k}$ pour $P_\epsilon(\tilde{\mu}^k)Y^\epsilon$, et $P_0(\tilde{\mu}^k)M\Phi_\epsilon^1$, . . . $P_0(\tilde{\mu}^k)M\Phi_\epsilon^{d_k}$ est une base pour $P_0(\tilde{\mu}^k)MY^\epsilon$.*

Preuve. On remarque d'abord que Y^ϵ peut être considéré comme un espace de Hilbert , avec le produit scalaire

$$(u,\ v)_{Y^\epsilon} = \sum_{i=1}^{3}[(u_i,\ v_i)_{L^2(Q_i)} + (\partial_{y_1}u_i,\ \partial_{y_1}v_i)_{L^2(Q_i)}$$
$$+\frac{1}{\epsilon^{2r_i}}(\partial_{y_2}u_i,\ \partial_{y_2}v_i)_{L^2(Q_i)}] \ .$$

En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on peut construire une base orthonormale $\hat{\Phi}_\epsilon^1$, . . . $\hat{\Phi}_\epsilon^{\hat{d}_k}$ dans Y^ϵ pour $\hat{P}_\epsilon(\tilde{\lambda}^k)Y^\epsilon$.

Demontrons par l'absurde que $\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon^1$, . . . $\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon^{\hat{d}_k}$ est une base pour $\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)MY^\epsilon$.
Soit β_1 , . . . $\beta_{\hat{d}_k} \in I\!R$, tels que

$$\sum_{j=1}^{\hat{d}_k}\beta_j^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{\hat{d}_k}\beta_j\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon^j = 0 \ .$$

Il résulte que

$$\sum_{j=1}^{\hat{d}_k} \beta_j \hat{\Phi}^j_\epsilon + \sum_{j=1}^{\hat{d}_k} \beta_j \left[\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k) M - \hat{P}_\epsilon(\tilde{\lambda}^k)\right] \hat{\Phi}^j_\epsilon = 0 \; .$$

Mais

$$\| \sum_{j=1}^{\hat{d}_k} \beta_j \hat{\Phi}^j_\epsilon \|_{Y^\epsilon} = 1 \; ,$$

tandis que le Lemme 7.9(iii) nous donne

$$\| [\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k) M - \hat{P}_\epsilon(\tilde{\lambda}^k)] \hat{\Phi}^j_\epsilon \|_{Y^\epsilon} \leq c \, [\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2}] \; ,$$

ce qui est une contradiction .
La deuxième partie de la proposition se demontre de même.

Le théorème qui suit nous donne la convergence des valeurs propres des opérateurs en ϵ vers les valeurs propres des opérateurs limite.

Théorème 7.12. *Pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_k)$ avec ϵ_k donné dans la Proposition 7.11 , si $\tilde{\lambda}^k_{\epsilon j}$, avec $j = 1 , \ldots \hat{d}_k$ sont les valeurs propres de $\hat{B}_\epsilon$ dans $B(\tilde{\lambda}^k, \nu^k)$, alors $\tilde{\lambda}^k_{\epsilon j} \to \tilde{\lambda}^k$ pour $\epsilon \to 0$, $j = 1 , \ldots \hat{d}_k$.*
De même , si $\tilde{\mu}^k_{\epsilon j}$, avec $j = 1 , \ldots d_k$ sont les valeurs propres de B_ϵ dans $B(\tilde{\mu}^k, \nu^k)$, alors $\tilde{\mu}^k_{\epsilon j} \to \tilde{\mu}^k$ pour $\epsilon \to 0$, $j = 1 , \ldots d_k$.

Preuve. On procède comme dans le Théorème 3.4 et Corollaire 3.5 de [11].
La Proposition 7.11 nous dit que

$$\hat{B}_\epsilon \hat{\Phi}^i_\epsilon = \sum_{j=1}^{\hat{d}_k} c^\epsilon_{ij} \hat{\Phi}^j_\epsilon \; , \qquad \text{avec } c^\epsilon_{ij} \in \mathbb{R}$$

et

$$\hat{B}_0(\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k) M \hat{\Phi}^i_\epsilon) = \sum_{j=1}^{\hat{d}_k} c^0_{ij} (\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k) M \hat{\Phi}^j_\epsilon) \; , \qquad \text{avec } c^0_{ij} \in \mathbb{R} \, .$$

Les relations précédentes peuvent s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\hat{B}_\epsilon \hat{\Phi}_\epsilon = C^\epsilon \hat{\Phi}_\epsilon \tag{7.26}$$

et

$$\hat{B}_0(\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k) M \hat{\Phi}_\epsilon) = C^0 (\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k) M \hat{\Phi}_\epsilon) \; , \tag{7.27}$$

où $C^\epsilon = (c^\epsilon_{ij})_{1 \leq i,j \leq \hat{d}^k}$ et $C^0 = (c^0_{ij})_{1 \leq i,j \leq \hat{d}^k}$ sont des matrices carées.

La seule valeur propre de la matrice C^0 est $\tilde{\lambda}^k$.
Pour montrer la proposition , il suffit de montrer que $c^\epsilon_{ij} \to c^0_{ij}$, pour $\epsilon \to 0$.
De la relation (7.27) on tire

$$\left(\hat{B}_0(\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k) M \hat{\Phi}_\epsilon), (\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k) M \hat{\Phi}_\epsilon)^T\right)_{Y^\epsilon} = C^0 \left(\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k) M \hat{\Phi}_\epsilon), (\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k) M \hat{\Phi}_\epsilon)^T\right)_{Y^\epsilon} . \tag{7.28}$$

Si on note par $\mathcal{E}^0$ la matrice dont les elements sont de la forme

$$e_{ij} = \left(\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon^i), (\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon^j)^T\right)_{Y^\epsilon}$$

alors on observe facilement en utilisant le Lemme 7.9 que

$$\delta_{ij} - e_{ij} = O(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2}) .$$

On déduit que la matrice $\mathcal{E}^0$ est inversible , avec

$$\|(\mathcal{E}^0)^{-1}\| \leq \frac{1}{2} \text{ , pour } \epsilon \text{ assez petit } .$$

On obtient facilement de (7.28) que

$$\|C^0\| \leq c , \tag{7.29}$$

où c est une constante qui ne dépends pas de ϵ .
De (7.26) et (7.27) on tire

$$(C^\epsilon - C^0)\hat{\Phi}_\epsilon = C^0[\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon - \hat{\Phi}_\epsilon] + \hat{B}_\epsilon[\hat{\Phi}_\epsilon - \hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon] + (\hat{B}_\epsilon - \hat{B}_0)(\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon) ,$$

ou encore ,

$$C^\epsilon - C^0 = C^0\left(\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon - \hat{\Phi}_\epsilon \, , \, \hat{\Phi}_\epsilon^T\right)_{Y^\epsilon} + \left(\hat{B}_\epsilon[\hat{\Phi}_\epsilon - \hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon] \, , \, \hat{\Phi}_\epsilon^T\right)_{Y^\epsilon} +$$

$$+ \left((\hat{B}_\epsilon - \hat{B}_0)[\hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)M\hat{\Phi}_\epsilon] \, , \, \hat{\Phi}_\epsilon^T\right)_{Y^\epsilon} .$$

Puisque de (7.29) la matrice C^0 est bornèe , le Lemme 7.9 (i) et (iii) et le Corollaire 7.4 (i) et (ii) avec $q = 2$, nous donnent le résultat.
La deuxième partie du théorème se démontre de même.

L'hypothèse **(H3)** nous dit que $0 \notin VP(C_0)$.
Notons par m le nombre des éléments de $VP(C_0)$, qui sont négatifs. Alors on a

$$-\gamma \leq \lambda^1 < \lambda^2 < .. < \lambda^m < 0 < \lambda^{m+1} < \lambda^{m+2} < ...$$

Proposition 7.13. *Pour tout $\eta > 0$ assez petit , il existe un $\epsilon_\eta > 0$, tel que pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_\eta)$, l'ensemble des valeurs propres $VP(\hat{B}_\epsilon)$ peut être écrit comme la réunion de deux ensembles disjoints , non vides :*

$$VP(\hat{B}_\epsilon) = VP_1(\hat{B}_\epsilon) \cup VP_2(\hat{B}_\epsilon) ,$$

où

$$VP_1(\hat{B}_\epsilon) \subset \cup_{j=1}^m (\tilde{\lambda}^j - \eta, \tilde{\lambda}^j + \eta)$$

et

$$VP_2(\hat{B}_\epsilon) \subset (0,\, \tilde{\lambda}^{m+1} + \eta)\,.$$

Preuve. Soit dans le plan complexe $\mathbb{C}$,

$$K = K^* \setminus \{B_{\mathbb{C}}(0,\, \tilde{\lambda}^{m+1} + \eta) \cup \cup_{j=1}^{m} B_{\mathbb{C}}(\tilde{\lambda}^j\,, \eta)\}$$

un ensemble compact , où K^* est le compact donné par le Lemme 7.6 . K satisfait aux conditions du Lemme 7.5 .
En appliquant ce lemme , on obtient le résultat , en rémarquant que les valeurs propres de $\hat{B}_\epsilon$ sont réelles .

En tennant compte du fait que λ est valeur propre de C_ϵ si et seulement si $(\lambda + \gamma)^{-1}$ est valeur propre de $\hat{B}_\epsilon$, on a le corollaire suivant :

Corollaire 7.14. *Soit* $\Lambda_1 = \frac{1}{4}\lambda^m < 0$ *et* $\Lambda_2 = \frac{1}{4}\lambda^{m+1} > 0$.
Il existe $\epsilon_2 > 0$, *tel que pour tout* $\epsilon \in (0,\, \epsilon_2)$, $VP(C_\epsilon)$ *peut être écrit comme la réunion de deux ensembles disjoints , non vides :*

$$VP(C_\epsilon) = VP_1(C_\epsilon) \cup VP_2(C_\epsilon)\,,$$

où

$$VP_1(C_\epsilon) \subset [-\gamma,\, 2\Lambda_1)$$

et

$$VP_2(C_\epsilon) \subset (2\Lambda_2,\, +\infty)\,.$$

Maintenant on fixe dans le demi-plan complexe $Re\,\lambda > \frac{1}{\gamma}$, une courbe σ_0 qui entoure $\{\tilde{\lambda}^1,\, ..\, \tilde{\lambda}^m\}$.
On définit l'opérateur lineaire
$\hat{P}_0 : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, par la relation

$$\hat{P}_0 v = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0} (\lambda I - \hat{B}_0)^{-1} v\, d\lambda\,. \tag{7.30}$$

On voit facilement qu'on peut écrire

$$\hat{P}_0 = \sum_{k=1}^{m} \hat{P}_0(\tilde{\lambda}^k)\,.$$

On définit aussi pour tout $q \in (1,\, 2]$ et pour ϵ assez petit , l'opérateur lineaire
$\hat{P}_\epsilon : Z_q^\epsilon \to Z_q^\epsilon$ par la relation

$$\hat{P}_\epsilon v = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0} (\lambda I - \hat{B}_\epsilon)^{-1} v\, d\lambda\,. \tag{7.31}$$

De même

$$\hat{P}_\epsilon = \sum_{k=1}^{m} \hat{P}_\epsilon(\tilde{\lambda}^k) .$$

On note

$m_0 = \hat{d}_1 + \ .. \hat{d}_{k_m}$

et on a

$$dim\, \hat{P}_0 L^2(\Omega) = dim\, \hat{P}_\epsilon Z_q^\epsilon = m_0 .$$

Soit maintenant dans le demi-plan complexe $Re\,\lambda > \frac{1}{2}(\tilde{\mu}^n + \tilde{\mu}^{n+1})$, une courbe fermé σ_n qui entoure les valeurs propres $\tilde{\mu}^1, .. \tilde{\mu}^n$ de B_0 .

On défini l'opérateur linéaire

$P_0^n : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$:

$$P_0^n v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_n} (\lambda I - B_0)^{-1} v \, d\lambda . \tag{7.32}$$

Il est clair que

$$P_0^n = \sum_{k=1}^{n} P_0(\tilde{\mu}^k) .$$

On défini aussi pour $q \in (1,\, 2]$:

$P_\epsilon^n : Z_q^\epsilon \to Z_q^\epsilon$,

$$P_\epsilon^n v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_n} (\lambda I - B_\epsilon)^{-1} v \, d\lambda . \tag{7.33}$$

De même , on peut écrire

$$P_\epsilon^n = \sum_{k=1}^{n} P_\epsilon(\tilde{\mu}^k) .$$

Il est évident que

$dim\, P_0^n L^2(\Omega) = dim\, P_\epsilon^n Z_q^\epsilon = d_1 + d_2 + \ .. d_n .$

On a un lemme analogue au Lemme 7.9 :

Lemme 7.15. *Pour tout $q \in (1,\, 2]$, il existe des constantes $c_q > 0$ et $\epsilon_q > 0$, telles que pour tout $\epsilon \in (0,\, \epsilon_q)$ on a :*

(i) $$\hat{P}_0\, M \in \mathcal{L}(Z_q^\epsilon\, ,\, Z_q^\epsilon) \text{ et } \|\hat{P}_0\, M\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon, Z_q^\epsilon)} \le c_q$$

(ii) $$\hat{P}_\epsilon \in \mathcal{L}(Z_q^\epsilon\, ,\, Z_q^\epsilon) \text{ et } \|\hat{P}_\epsilon\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon, Z_q^\epsilon)} \le c_q$$

(iii) $$\|\hat{P}_\epsilon - \hat{P}_0\, M\|_{\mathcal{L}(Z_q^\epsilon, Z_q^\epsilon)} \le c_q(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2}) .$$

Les opérateurs $\hat{P}_\epsilon$ et P_ϵ^n peuvent s'étendre sur H^ϵ , puisque l'ensemble compact σ_0 (respectivement σ_n) est inclus dans l'ensemble résolvant de $\hat{B}_\epsilon$ (respectivement de B_ϵ) .

Puisque $\hat{B}_\epsilon$ et B_ϵ sont autoadjoints , l'espace des vecteurs propres coincide avec l'espace des vecteurs propres généralisées , pour une valeur propre donnée .

On note par $\hat{V}_\epsilon^j$, $j = 1,2 \ldots$ les vecteurs propres de $\hat{B}_\epsilon$ qui correspondent aux valeurs propres $\tilde{\lambda}_\epsilon^j$, $j = 1,2 \ldots$ (avec leurs multiplicités) .

On note aussi par V_ϵ^j , $j = 1,2 \ldots$ les vecteurs propres de B_ϵ qui correspondent aux valeurs propres $\tilde{\mu}_\epsilon^j$, $j = 1,2 \ldots$
(avec leurs multiplicités) .

Il est bien connu qu'on peut choisir les éléments $\hat{V}_\epsilon^j$, $j = 1,2 \ldots$ de sorte qu'ils forment une base orthonormale dans H_g^ϵ , et de même pour V_ϵ^j , $j = 1,2 \ldots$.

Il resulte alors que $\hat{P}_\epsilon$ (respectivement P_ϵ^n) répresente la projection orthogonale dans H_g^ϵ sur l'espace engendré par l'ensemble $\{\hat{V}_\epsilon^1 , \ldots \hat{V}_\epsilon^{m_0}\}$
(respectivement $\{V_\epsilon^1 , \ldots V_\epsilon^{d_1+..d_n}\}$).

On peut réstreindre les définitions de $\hat{P}_0$ et P_0^n sur Ω_i , $i = 1,3$, et on définit :
$\hat{P}_{0i} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_i), L^2(\Omega_i))$, $i = 1,3$

$$\hat{P}_{0i}v_i = (\hat{P}_0 v)_i = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0}(\lambda I - \hat{B}_{0i})^{-1}v_i \, d\lambda \tag{7.34}$$

et aussi
$P_{0i}^n \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_i), L^2(\Omega_i))$, $i = 1,3$

$$P_{0i}^n v_i = (P_0^n v)_i = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_n}(\lambda I - B_{0i})^{-1}v_i \, d\lambda \, . \tag{7.35}$$

Les opérateurs $\hat{B}_{0i}$ et B_{0i} sont autoadjoints , donc l'espace des vecteurs propres coincide avec l'espace des vecteurs propres généralisées , pour une valeur propre donnée
(ce qui peut ne pas être valable pour $\hat{P}_0$ et P_0^n).

On note par $\hat{V}_i^j$, $j = 1,2 \ldots$ les vecteurs propres de $\hat{B}_{0i}$ qui correspondent aux valeurs propres $\tilde{\lambda}_i^j$, $j = 1,2 \ldots$ (avec leurs multiplicités) .

On note aussi par V_i^j , $j = 1,2 \ldots$ les vecteurs propres de B_{0i} qui correspondent aux valeurs propres $\tilde{\mu}_i^j$, $j = 1,2 \ldots$
(avec leurs multiplicités) .

Comme pour $\hat{B}_\epsilon$ et B_ϵ , on peut choisir les vecteurs propres $\hat{V}_i^j$, $j = 1,2 \ldots$ de sorte qu'ils forment une base orthonormale dans H_{0i} , et de même pour V_i^j , $j = 1,2 \ldots$.

Il resulte alors que $\hat{P}_{0i}$ (respectivement P_{0i}^n) répresente la projection orthogonale dans H_{0i} sur l'espace engendre par l'ensemble $\{\hat{V}_i^1 , \ldots \hat{V}_i^{m_0}\}$
(respectivement $\{V_i^1 , \ldots V_i^{d_1+..d_n}\}$) , pour $i = 1,3$.
À remarquer que la dimension de $\hat{P}_{0i}L^2(\Omega_i)$ (respectivement $P_{0i}^n L^2(\Omega_i)$) peut être inférieure à m_0 (respectivement $d_1 + ..d_n$).

7.3 Un cas particulier

D'ici à la fin de ce travail, on va faire encore une hypothèse :
On va considérer un domaine Q^ϵ plus simple, à savoir le cas où Q^ϵ peut s'écrire comme la réunion de trois rectangles , c'est à dire

$$(H4) \qquad g_1 = g_2 = g_3 = 1 \ .$$

Dans l'hypothèse **(H4)** , l'expression de A_ϵ devient :

$$\begin{cases} (A_\epsilon v)_i = -\partial_{y_1y_1} v_i - \frac{1}{\epsilon^2}\partial_{y_2y_2} v_i + \alpha v_i & \text{sur } Q_i \ , \ i = 1,3 \\ (A_\epsilon v)_2 = -\partial_{y_1y_1} v_2 - \frac{1}{\epsilon^{2p}}\partial_{y_2y_2} v_2 + \alpha v_2 & \text{sur } Q_2 \ , \end{cases}$$

les produits scalaires $(\cdot,\cdot)_{H_g^\epsilon}$ et $(\cdot,\cdot)_{H^\epsilon}$ coïncident, ainsi que les produits scalaires $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega_i)}$ et $(\cdot,\cdot)_{H_{0i}}$, i = 1,2,3.

Un calcul élémentaire nous donne :

$$\begin{cases} VP(A_{01}) = \{\alpha + (\frac{k_1\pi}{a})^2 \ , \ k_1 \in I\!N \ , \ k_1 \geq 0\} \\ VP(A_{02}) = \{\alpha + (\frac{k_2\pi}{b-a})^2 \ , \ k_2 \in I\!N \ , \ k_2 \geq 1\} \\ VP(A_{03}) = \{\alpha + (\frac{k_3\pi}{1-b})^2 \ , \ k_3 \in I\!N \ , \ k_3 \geq 0\} \ . \end{cases} \tag{7.36}$$

On va montrer dans la suite , qu'il existe un cas particulier dans lequel toutes les valeurs propres de l'opérateur A_0 , à l'exception de α , sont simples .

Théorème 7.16. *Supposons que les rapports $\frac{a}{b-a}$, $\frac{a}{1-b}$ et $\frac{b-a}{1-b}$ sont des nombres irrationnels .*
Alors toutes les valeurs propres de A_0 , à l'éxception de α , sont simples , au sens géométrique et algébrique , c'est à dire , pour tout $\mu \in VP(A_0)$ on a :

$$dim\, Ker\,(A_0 - \mu I) = 1 \ \ et \ \ Ker\,((A_0 - \mu I)^2) = Ker\,(A_0 - \mu I) \ .$$

Preuve . Soit μ une valeur propre de A_0 .
Supposons d'abord que $\mu \in VP(A_{01})\backslash\{\alpha\}$, c'est à dire
$\mu = \alpha + (\frac{k_1\pi}{a})^2$, avec $k_1 \in N$, $k_1 \geq 1$.
Les vecteurs propres w de A_0 qui correspondent à μ , satisfont à l'égalité

$$A_0 w - \mu w = 0 \ . \tag{7.37}$$

Si on réstreint (7.37) à Ω_3 , on obtient
$A_{03}w_3 - \mu w_3 = 0$, ce qui nous donne

$$w_3 = 0 \tag{7.38}$$

puisque μ ne peut pas être valeur propre de A_{03}.

La restriction w_1 de w sur Ω_1 est nécessairement de la forme

$$w_1(y_1) = e \cos\left(\frac{k_1\pi}{a} y_1\right) \ , \text{avec } e \in I\!R\,. \tag{7.39}$$

La restriction w_2 de w sur Ω_2 satisfait à l'équation différentielle

$$w_2'' + \left(\frac{k_1\pi}{a}\right)^2 w_2 = 0,$$

donc w_2 est nécessairement de la forme

$$w_2(y_1) = \beta_1 \cos\left[\frac{k_1\pi}{a}(y_1 - a)\right] + \beta_2 \sin\left[\frac{k_1\pi}{a}(y_1 - a)\right] \ ,$$

où β_1 et β_2 sont des nombres réels qui sont à determiner des conditions de continuité

$$w_2(a) = w_1(a) = e \cos k_1\pi$$

$$w_2(b) = w_3(b) = 0\ .$$

Puisque de l'hypothèse du théorème il résulte que

$$\sin \frac{k_1\pi}{a}(b-a) \neq 0\ ,\ \forall\, k_1 \in N\backslash\{0\}\ ,$$

un calcul élémentaire nous donne

$$w_2(y_1) = e\cos k_1\pi \cdot \cos\left[\frac{k_1\pi}{a}(y_1 - a)\right] - e\cos k_1\pi \cdot \mathrm{cotg}\left[\frac{k_1\pi}{a}(b-a)\right] \cdot \sin\left[\frac{k_1\pi}{a}(y_1 - a)\right]\ . \tag{7.40}$$

Ceci nous montre que $dim\,Ker(A_0 - \mu I) = 1$, et que tout vecteur propre w de μ est donné par (7.38) - (7.40) .

Supposons maintenant que

$$(A_0 - \mu I)^2 v = 0\ . \tag{7.41}$$

Alors $v_1 \in Ker(A_{01} - \mu I)^2$, mais puisque l'opérateur A_{01} est autoadjoint sur $L^2(\Omega_1)$, alors

$$Ker(A_{01} - \mu I)^2 = Ker(A_{01} - \mu I)\ ,$$

et donc v_1 est donné par (7.39).

De même

$$Ker[(A_{03} - \mu I)^2] = Ker[(A_{03} - \mu I)] = \{0\}\ . \tag{7.42}$$

La restriction v_2 de v sur Ω_2 satisfait à l'équation différentielle

$$\left[\partial_{y_1 y_1} + \left(\frac{k_1\pi}{a}\right)^2 I\right]^2 v_2 = 0\ , \tag{7.43}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} v_2(a) = v_1(a) \ , \ v_2(b) = 0 \\ \\ \partial_{y_1 y_1} v_2(a) = \partial_{y_1 y_1} v_1(a) \ , \ \partial_{y_1 y_1} v_2(b) = 0 \end{cases} \tag{7.44}$$

(parce qu'il faut avoir $v \in D(A_0^2)$, c'est à dire $A_0 v \in D(A_0)$) .
Les quatres solutions linéaires indépendentes de l'équation (7.43) sont :
$\varphi^0 = \cos[\frac{k_1\pi}{a}(y_1 - a)]$
$\varphi^1 = (y_1 - a)\cos[\frac{k_1\pi}{a}(y_1 - a)]$
$\varphi^2 = \sin[\frac{k_1\pi}{a}(y_1 - a)]$
$\varphi^3 = (y_1 - a)\sin[\frac{k_1\pi}{a}(y_1 - a)]$.
Donc v_2 va s'écrire sous la forme

$$v_2 = \sum_{j=1}^{4} \beta^j \varphi^j \ ,$$

où β^0 , . . β^3 sont des nombres réels qui sont à détérminer des conditions aux limites (7.44). Un calcul élémentaire nous montre que v_2 est donnée aussi par l'expression de (7.40), ce qui finit la démonstration du théorème dans ce cas.

Supposons maintenant que $\mu \in VP(A_{02})$, c'est à dire

$$\mu = \alpha + \left(\frac{k_2\pi}{b-a}\right)^2 \qquad \text{avec } k_2 \in I\!N \backslash \{0\} \ .$$

On voit facilement que $w \in Ker\,(A_0 - \mu I)$ si et seulement si
$w_1 = 0$
$w_3 = 0$
$w_2 = e\sin[\frac{k_2\pi}{b-a}(y_1 - a)]$, avec $e \in I\!R$.
On voit aussi immédiatement que
$Ker\,[(A_0 - \mu I)^2] = Ker\,(A_0 - \mu I)$
parce que A_{02} est un opérateur autoadjoint , ce qui finit la preuve du théorème.

8 Construction des variétés instables locales.

Dans les sections 8 et 9 on fera les deux hypothèses supplémentaires suivantes:
(H5) $\quad p \in (1,2)$
et
(H6) $\quad f \in C^3(R)$, et de plus , il existe $c > 0$ et $\gamma_3 \geq 0$, telles que
$|f^{(3)}(s)| \leq c(1 + |s|^{\gamma_3})$, $\forall s \in R$.
L'hypothèse **(H6)** n'est guère restrictive .

8.1 L'existence d'une variété instable locale pour le semigroupe S^ϵ .

Dans cette section , on va montrer l'existence d'une variété instable locale du semigroupe S^ϵ , dans un voisinage $\tilde{\mathcal{U}}_\epsilon$ de φ^ϵ dans l'espace Y^ϵ , contenant une boule de centre φ^ϵ et de rayon indépendant de ϵ .

8.1.1 Notations et résultats préliminaires .

Soit $\varphi^\epsilon \in E^\epsilon$ et $u^\epsilon(t) = S^\epsilon(t)u_0^\epsilon$. On écrit $u^\epsilon(t) = \varphi^\epsilon + w^\epsilon(t)$, où w^ϵ satisfait à

$$\frac{dw^\epsilon}{dt} + C_\epsilon w^\epsilon = \hat{F}_\epsilon(w^\epsilon) , \tag{8.1}$$

où C_ϵ est défini dans (7.1) , et où on a noté

$$\hat{F}_\epsilon(w^\epsilon) = -f(\varphi^\epsilon + w^\epsilon) + f(\varphi^\epsilon) + f'(\varphi^\epsilon)w^\epsilon . \tag{8.2}$$

On aura besoin dans la suite des inégalités suivantes :

Proposition 8.1. *Il existe une constante positive c , telle que*

(*i*) $\quad \|e^{-C_\epsilon t}(I - \hat{P}_\epsilon)v\|_{X^\epsilon} \leq c(1 + t^{-1/2})e^{-2\Lambda_2 t}\|v\|_{H^\epsilon}$, $\quad \forall\, v \in H^\epsilon$, $\forall\, t > 0$

(*ii*)
$\|e^{-C_{0i}t}(I-\hat{P}_{0i})v_i\|_{H^1(\Omega_i)} \leq c(1+t^{-1/2})e^{-2\Lambda_2 t}\|v_i\|_{L^2(\Omega_i)}$, $\quad \forall\, v_i \in L^2(\Omega_i)$, $\forall\, t > 0$, $i = 1,3$

(*iii*) $\quad \|e^{-C_{0i}t}\hat{P}_{0i}v_i\|_{H^1(\Omega_i)} \leq c\, e^{-2\Lambda_1 t}\|v_i\|_{L^2(\Omega_i)}$, $\quad \forall\, v_i \in L^2(\Omega_i)$, $\forall\, t \leq 0$, $i = 1,3.$

La preuve est classique. Pour (*i*) on décompose $v \in H^\epsilon$ sous la forme

$$v = \sum_{j=1}^{\infty}(v,\, \hat{V}_\epsilon^j)_{H^\epsilon}\hat{V}_\epsilon^j .$$

On écrit

$$e^{-C_\epsilon t}\hat{V}_\epsilon^j = e^{-\lambda_\epsilon^j t}\hat{V}_\epsilon^j$$

(puisque $C_\epsilon\hat{V}_\epsilon^j = \lambda_\epsilon^j\hat{V}_\epsilon^j$) , et on utilise le fait que $\hat{P}_\epsilon v = \sum_{j=1}^{m_0}(v,\, \hat{V}_\epsilon^j)_{H^\epsilon}\hat{V}_\epsilon^j$.
De même pour (ii) et pour (iii).

On rappèlle le résultat suivant donné dans [9] :

Proposition 8.2. *Il existe une constante positive* c , *telle que pour tout* $v \in W^{1,1}(\bar{Q})$ *où* $\bar{Q} = [\bar{a}, \bar{b}] \times (0, 1)$, *on a*

$$\|v\|_{L^2(\bar{Q})} \leq c\,[\|v\|_{L^1(\bar{Q})} + \|\partial_{y_2} v\|_{L^1(\bar{Q})}]^{1/2}[\|v\|_{L^1(\bar{Q})} + \|\partial_{y_1} v\|_{L^1(\bar{Q})}]^{1/2} .$$

Pour montrer l'existence d'une variété instable locale , nous aurons besoin d'une estimations plus forte que celle de la Proposition 8.1(i) , c'est à dire d'une estimation dans la norme de Y^ϵ .

Lemme 8.3. *Pour tout* $q > 1$ *il existe des constantes strictement positives* c_q *et* M_q , *telles que pour tout* $h \in Z_q^\epsilon$ *et* $\epsilon \in (0, \epsilon_q)$, *nous avons:*

(i) $$\|e^{-C_\epsilon t}(I - \hat{P}_\epsilon)h\|_{Y^\epsilon} \leq M_q e^{-\Lambda_2 t}(1 + t^{-1/2})\|h\|_{Z_q^\epsilon} , \quad \forall\, t > 0$$

(ii) $$\|e^{-C_\epsilon t}\hat{P}_\epsilon h\|_{Y^\epsilon} \leq M_q e^{-\Lambda_1 t}\|h\|_{Z_q^\epsilon} , \quad \forall\, t \leq 0.$$

Preuve.
(i) Soit $u^\epsilon(t) = e^{-C_\epsilon t}(I - \hat{P}_\epsilon)h$. On peut considérer u^ϵ comme étant la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{du^\epsilon}{dt} + C_\epsilon u^\epsilon = 0 \ , \quad \text{pour } t \geq 0 \\ \\ u^\epsilon(0) = (I - \hat{P}_\epsilon)h \ . \end{cases} \tag{8.3}$$

Comme on l'a déjà fait plusieurs fois , nous comparons u^ϵ avec une fonction définie sur Ω .
Soit u_i , $i = 1, 3$, la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} + C_{0i} u_i = 0 \ , \quad \text{pour } t \geq 0 \\ \\ u_i(0) = (I - \hat{P}_{0i})M_i h_i \ , \end{cases} \tag{8.4}$$

c'est-à-dire
$u_i(t) = e^{-C_{0i}t}(I - \hat{P}_{0i})M_i h_i$, $i = 1, 3$.
Nous posons aussi $u_2(t) = \mathcal{R}(u_1(t), u_3(t))$,
et donc nous obtenons $u(t) \in H^1(\Omega)$, telle que $u(t)/\Omega_i = u_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, $\forall\, t \geq 0$.
Nous introduisons la fonction $\hat{u}(t) = (I - \hat{P}_\epsilon)u(t)$.
La démonstration du théorème comporte 3 étapes :
Première étape : Majoration de $\hat{u}$.
Puisque $\hat{P}_{0i} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_i), L^2(\Omega_i))$, nous avons

$$\|(I - \hat{P}_{0i})M_i h_i\|_{L^2(\Omega_i)} \leq c\,\|h_i\|_{L^2(Q_i)} , \quad i = 1, 3 , \tag{8.5}$$

et la proposition 8.1(ii) nous donne

$$\|u_i(t)\|_{H^1(\Omega_i)} \leq c\,(1 + t^{-1/2})e^{-2\Lambda_2 t}\|h\|_{L^2(Q)} , \quad i = 1, 3 . \tag{8.6}$$

Le fait que $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_3)\ ,\ H^1(\Omega_2))$, nous donne

$$\|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq c(1+t^{-1/2})e^{-2\Lambda_2 t}\|h\|_{L^2(Q)}\ , \tag{8.7}$$

et finalement, on peut appliquer le Lemme 7.15(ii) avec $q=2$, pour déduire

$$\|\hat{u}(t)\|_{Y^\epsilon} \leq c(1+t^{-1/2})e^{-2\Lambda_2 t}\|h\|_{L^2(Q)}\ , \quad \forall\, t>0\ . \tag{8.8}$$

Deuxième étape : L'équation satisfaite par $u^\epsilon - \hat{u}$.
Il est facile de voir que $u_2(t)$ satisfait à l'équation

$$\frac{du_2}{dt} - \partial_{y_1y_1}u_2 + \alpha u_2 + f'(\varphi_2)u_2 = \sigma\ , \tag{8.9}$$

où

$$\sigma(y_1) = \rho_1'\partial_{x_1}u_1(2a-y_1) - \rho_1"u_1(2a-y_1) + [f'(\varphi_2(y_1)) - f'(\varphi_1(2a-y_1))]\rho_1 u_1(2a-y_1)$$

$$+\rho_3'\partial_{x_1}u_3(2b-y_1) - \rho_3"u_3(2b-y_1) + [f'(\varphi_2(y_1)) - f'(\varphi_3(2b-y_1))]\rho_3 u_3(2b-y_1)\ . \tag{8.10}$$

On voit immédiatement que pour tout $t>0$, $u(t) \in H^2(\Omega)$ et

$$\partial_{y_1}u(0,t) = \partial_{y_1}u(a,t) = \partial_{y_1}u(b,t) = \partial_{y_1}u(1,t) = 0\ ,$$

et donc $u(t) \in D(A_\epsilon) = D(C_\epsilon)$ (on utilise ici d'une manière essentielle le fait que g_i sont des constantes sur Ω_i , $i=1,2,3$).
De (8.4) et (8.9) on déduit que $u(t)$ satisfait à :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + C_\epsilon u = H \\ u(0) = u^0 \end{cases} \tag{8.11}$$

où

$$H = \begin{cases} [f'(\varphi_i^\epsilon) - f'(\varphi_i)]u_i & \text{sur } Q_i\ ,\ i=1,3 \\ \sigma + [f'(\varphi_2^\epsilon) - f'(\varphi_2)]u_2 & \text{sur } Q_2 \end{cases} \tag{8.12}$$

et

$$u^0 = \begin{cases} (I-\hat{P}_{0i})M_i h_i & \text{sur } Q_i\ ,\ i=1,3 \\ \mathcal{R}[(I-\hat{P}_{01})M_1h_1, (I-\hat{P}_{03})M_3h_3] & \text{sur } Q_2\ . \end{cases} \tag{8.13}$$

On applique $I-\hat{P}_\epsilon$ à (8.11) , et puisque $\hat{P}_\epsilon$ commute avec C_ϵ , on obtient

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} + C_\epsilon\hat{u} = (I-\hat{P}_\epsilon)H \\ \hat{u}(0) = (I-\hat{P}_\epsilon)u^0\ . \end{cases} \tag{8.14}$$

On note $\bar{w}^\epsilon = u^\epsilon - \hat{u}$, et de (8.3) et (8.14) on obtient

$$\begin{cases} \frac{d\bar{w}^\epsilon}{dt} + C_\epsilon \bar{w}^\epsilon = -(I - \hat{P}_\epsilon)H \\ \bar{w}^\epsilon(0) = (I - \hat{P}_\epsilon)(h - u^0) \ , \end{cases}$$

ce qui entraîne

$$\bar{w}^\epsilon(t) = e^{-C_\epsilon t}(I - \hat{P}_\epsilon)(h - u^0) - \int_0^t e^{-C_\epsilon(t-s)}(I - \hat{P}_\epsilon)H(s)\, ds \ . \tag{8.15}$$

Troisième étape : Majoration de $\bar{w}^\epsilon$ et de u^ϵ .
Nous voulons obtenir une majoration de l'ordre $\epsilon^{(p-1)/2}$ pour $\bar{w}^\epsilon$, dans X^ϵ .
De la Proposition 8.1(i) , on tire

$$\|e^{-C_\epsilon t}(I - \hat{P}_\epsilon)(h - u^0)\|_{X^\epsilon} \leq c\,(1 + t^{-1/2})e^{-2\Lambda_2 t}\|(I - \hat{P}_\epsilon)h - u^0\|_{H^\epsilon} \ . \tag{8.16}$$

On peut écrire

$$(I - \hat{P}_\epsilon)h - u^0 = h - M\,h + (I - \hat{P}_0)M\,h - u^0 + (-\hat{P}_\epsilon h + \hat{P}_0 M\,h) \ . \tag{8.17}$$

Si on applique la Proposition 8.2 avec $\bar{Q}$ remplacé par Q_i et u remplacé par $h_i - M_i\,h_i$, $i = 1, 3$, on obtient
$\|h_i - M_i h_i\|_{L^2(Q_i)} \leq c\,\epsilon^{1/2}\|h_i\|_{Z^\epsilon_{1i}}$, $i = 1, 3$, et donc

$$\|h - M\,h\|_{H^\epsilon} \leq c\,\epsilon^{1/2}\|h\|_{Z^\epsilon_q} \ . \tag{8.18}$$

De l'estimation de $\hat{P}_\epsilon - \hat{P}_0 M$ (voir Lemme 7.15(iii)) on déduit que

$$\|\hat{P}_\epsilon h - \hat{P}_0 M\,h\|_{H^\epsilon} \leq c_q\,(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2})\|h\|_{Z^\epsilon_q} \ . \tag{8.19}$$

Finalement on a

$$(I - \hat{P}_0)M\,h - u^0 = \begin{cases} 0 \qquad \text{sur } \Omega_i \ , \ i = 1, 3 \\ ((I - \hat{P}_0)M\,h)_2 - u^0_2 \qquad \text{sur } \Omega_2 \ , \end{cases}$$

ce qui donne

$$\|(I - \hat{P}_0)M\,h - u^0\|_{H^\epsilon} \leq c\,\epsilon^{(p-1)/2}\|h\|_{Z^\epsilon_q} \ . \tag{8.20}$$

En tenant compte du fait que $p \in (1,\, 2)$, on déduit de (8.17) à (8.20) que
$\|(I - \hat{P}_\epsilon)h - u^0\|_{H^\epsilon} \leq c_q\,\epsilon^{(p-1)/2}\|h\|_{Z^\epsilon_q}$,
ce qui avec (8.16) nous donne :

$$\|e^{-C_\epsilon t}(I - \hat{P}_\epsilon)(h - u^0)\|_{X^\epsilon} \leq c_q \epsilon^{(p-1)/2}(1 + t^{-1/2})e^{-2\Lambda_2 t}\|h\|_{Z^\epsilon_q} \ . \tag{8.21}$$

Maintenant on va majorer $\|H(s)\|_{H^\epsilon}$.
Pour $i = 1, 2, 3$, on a :

$$\|[f'(\varphi_i^\epsilon) - f'(\varphi_i)]u_i(s)\|_{L^2(Q_i)} \leq c\,\|\varphi_i^\epsilon - \varphi_i\|_{H^1(Q_i)}\|u_i(s)\|_{H^1(Q_i)} .$$

On utilise les estimations de $\varphi^\epsilon - \varphi$ données au théorème 6.13 et l'estimation (8.7) de $u(t)$, et on obtient

$$\|[f'(\varphi_i^\epsilon)-f'(\varphi_i)]u_i(s)\|_{L^2(Q_i)} \leq \begin{cases} c\,(\epsilon + \epsilon^{p-1})(1 + s^{-1/2})e^{-2\Lambda_2 s}\|h\|_{L^2(Q)} , & i = 1,3 \\ c\,(\epsilon^{(3-p)/2} + \epsilon^{(p-1)/2})(1 + s^{-1/2})e^{-2\Lambda_2 s}\|h\|_{L^2(Q)} , & i = 2 . \end{cases} \tag{8.22}$$

D'autre part , grâce à la définition (8.10) de σ et à (8.7) , on peut écrire

$$\|\sigma(s)\|_{L^2(Q_2)} \leq c\,(1 + s^{-1/2})e^{-2\Lambda_2 s}\|h\|_{L^2(Q)} . \tag{8.23}$$

Les inégalités (8.22) , (8.23) et la définition (8.12) de H , nous donnent

$$\|H(s)\|_{H^\epsilon} \leq c\,\epsilon^{(p-1)/2}(1 + s^{-1/2})e^{-2\Lambda_2 s}\|h\|_{L^2(Q)} . \tag{8.24}$$

En utilisant la Proposition 8.1(i) on obtient :

$$\|\int_0^t e^{-C_\epsilon(t-s)}(I-\hat{P}_\epsilon)H(s)\,ds\|_{X^\epsilon} \leq c\,\epsilon^{(p-1)/2}\int_0^t[1+(t-s)^{-1/2}]\cdot e^{-2\Lambda_2(t-s)}(1+s^{-1/2})e^{-2\Lambda_2 s}\,ds$$

$$\cdot\|h\|_{L^2(Q)} = c\,\epsilon^{(p-1)/2}e^{-2\Lambda_2 t}\|h\|_{L^2(Q)}\int_0^t[1 + (t - s)^{-1/2}]\cdot(1 + s^{-1/2})\,ds .$$

Le changement de variable $s = t\,\tau$ dans l'intégrale nous donne

$$\int_0^t[1 + (t - s)^{-1/2}]\cdot(1 + s^{-1/2})\,ds \leq c\,(1 + t^{1/2} + t) \leq 2\,c\,(1 + t)$$

ce qui nous dit que

$$\|\int_0^t e^{-C_\epsilon(t-s)}(I - \hat{P}_\epsilon)H(s)\,ds\|_{X^\epsilon} \leq c\,\epsilon^{(p-1)/2}e^{-2\Lambda_2 t}(1 + t)\|h\|_{Z_q^\epsilon} . \tag{8.25}$$

De (8.15) , (8.21) et (8.25) on obtient

$$\|u^\epsilon(t) - \hat{u}(t)\|_{X^\epsilon} \leq c_q\,\epsilon^{(p-1)/2}e^{-2\Lambda_2 t}(1 + t^{-1/2} + t)\|h\|_{Z_q^\epsilon}$$

et

$$\|u^\epsilon(t) - \hat{u}(t)\|_{Y^\epsilon} \leq c_q\,e^{-2\Lambda_2 t}(1 + t^{-1/2} + t)\|h\|_{Z_q^\epsilon} ,$$

ce qui avec (8.8) montre l'inégalité (i).

(ii) Dans le plan complexe , soit A , B , C les points de coordonnées $(\frac{\hat{\alpha}}{2}, 0)$, $(\gamma + \Lambda_1, -(\gamma + \Lambda_1))$ et $(\gamma + \Lambda_1, \gamma + \Lambda_1)$ (voir figure 3) .
Il est clair que le triangle $T(A, B, C)$ contient en son intérieur toutes les valeurs

propres $\lambda_\epsilon^1 + \gamma$, . . . $\lambda_\epsilon^m + \gamma$, et la distance entre cet ensemble et le triangle $T(A,B,C)$ est borné inférieurement par une constante indépendente de ϵ . On note par $\mathcal{S}_\epsilon$ l'espace engendré par l'ensemble $\{\hat{V}_\epsilon^1 , \ldots \hat{V}_\epsilon^m\}$.

Nous avons la formule suivante , qui est bien connue :

$$e^{-O_\epsilon t}\hat{P}_\epsilon h = \frac{1}{2\pi i}\int_{T(A,B,C)} e^{-\lambda t}(O_\epsilon - \lambda I)^{-1} h \, d\lambda \, . \tag{8.26}$$

On peut écrire

$$(O_\epsilon - \lambda I)^{-1} = \left[\lambda\, O_\epsilon \left(\frac{1}{\lambda} - \hat{B}_\epsilon\right)\right]^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} - \hat{B}_\epsilon\right)^{-1} \hat{B}_\epsilon \, .$$

On utilise l'éstimations de $\hat{B}_\epsilon$ de Corollaire 7.4(ii) , et de $(\frac{1}{\lambda} - \hat{B}_\epsilon)^{-1}$ (voir le lemme 7.5(ii) , avec $K = \{\frac{1}{\lambda} , \lambda \in T(A,B,C)\}$, et $q = 2$) .
On obtient

$$\|(O_\epsilon - \lambda I)^{-1} h\|_{Y^\epsilon} \leq c_q \|h\|_{Z_q^\epsilon} \, .$$

De (8.26) on déduit que

$$\|e^{-O_\epsilon t}\hat{P}_\epsilon h\|_{Y^\epsilon} \leq M_q e^{-(\gamma+\Lambda_1)t}\|h\|_{Z_q^\epsilon} \, ,$$

et en tenant compte du fait que $e^{-C_\epsilon t}\hat{P}_\epsilon h = e^{\gamma t}e^{-O_\epsilon t}\hat{P}_\epsilon h$, nous obtenons (ii) .

Il est facile de voir que $\hat{F}_\epsilon$ donnée par (8.2) , est définie de Y^ϵ dans Z_q^ϵ , pour tout $q \in [1, 2)$.
Nous avons le lemme suivant :

Lemme 8.4. *Pour tout $q \in [1, 2)$, on a :*
(i) $\hat{F}_\epsilon$ est de classe C^1 de Y^ϵ dans Z_q^ϵ , et en outre
$\hat{F}_\epsilon(0) = D\,\hat{F}_\epsilon(0) = 0.$
(ii) Pour tout $\xi > 0$ et tout $w \in Y^\epsilon$ tel que $\|w\|_{Y^\epsilon} \leq \xi$, on a

$$\|D\,\hat{F}_\epsilon(w)\|_{\mathcal{L}(Y^\epsilon, Z_q^\epsilon)} \leq \xi\, c_{1q}(\xi) \, ,$$

où c_{1q} est une fonction croissante de ξ .

Preuve.
Le fait que $\hat{F}_\epsilon$ est de classe C^1 se montre classiquement, et nous avons

$$D\hat{F}_\epsilon(w)U = [-f'(\varphi^\epsilon + w) + f'(\varphi^\epsilon)]U \, , \; \forall w \, , \; U \in Y^\epsilon \, ,$$

ce qui finit la partie (i) .

Pour montrer (ii) , on utilise la formule

$$D\,\hat{F}_\epsilon(w)U = -\int_0^1 f''(\varphi^\epsilon + \tau\, w) w\, U \, d\tau \, . \tag{8.27}$$

Si on utilise la majoration (1.7) de $f"$, on obtient

$$\|D\,\hat{F}_\epsilon(w_i)U_i\|_{L^q(Q_i)} \leq c\,\|(1+|\varphi_i^\epsilon|^{\gamma_2}+|w_i|^{\gamma_2})|w_i|\cdot|U_i|\|_{L^q(Q_i)}$$
$$\leq c\,\xi(1+\xi^{\gamma_2})\|U\|_{Y^\epsilon}\,,\quad i=1,2,3\,. \qquad (8.28)$$

D'autre part , on a le calcul suivant :

$$\partial_{y_j}[(D\,\hat{F}_\epsilon(w)U)_i] = -\int_0^1 f^{(3)}(\varphi_i^\epsilon+\tau w_i)(\partial_{y_j}\varphi_i^\epsilon+\tau\partial_{y_j}w_i)w_iU_i\,d\tau$$

$$-\int_0^1 f"(\varphi_i^\epsilon+\tau w_i)\partial_{y_j}w_iU_i\,d\tau-\int_0^1 f"(\varphi_i^\epsilon+\tau w_i)w_i\partial_{y_j}U_i\,d\tau = E_{i1}^j+E_{i2}^j+E_{i3}^j\,,\quad j=1,2\,. \qquad (8.29)$$

En utilisant l'hypothèse **(H6)** , on déduit que

$$|E_{i1}^1| \leq c\,[1+|\varphi_i^\epsilon|^{\gamma_3}+|w_i|^{\gamma_3}]\cdot[|\partial_{y_1}\varphi_i^\epsilon|+|\partial_{y_1}w_i|]\cdot|w_i|\cdot|U_i| \qquad \text{sur } Q_i\,,\ i=1,2,3\,.$$

On applique l'inégalité de Hölder avec les exposants : q_3 , 2, q_3, q_3 , de sorte que

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{2}+\frac{3}{q_3}$$

où q_3 est assez grand .
Ce choix est possible parce que $1<q<2$. Nous utilisons l'injection continue de $H^1(Q_i)$ dans $L^{q_3}(Q_i)$ et nous obtenons

$$\|E_{i1}^1\|_{L^q(Q)} \leq c\,\xi(1+\xi^{\gamma_3})(1+\xi)\|U\|_{Y^\epsilon}\,,\quad i=1,2,3\,.$$

D'autre part , on voit que

$$|E_{i2}^1| \leq c\,[1+|\varphi_i^\epsilon|^{\gamma_2}+|w_i|^{\gamma_2}]\cdot|\partial_{y_1}w_i|\cdot|U_i| \qquad \text{sur } Q_i\,,\ i=1,2,3\,.$$

On applique l'inégalité de Hölder avec les exposants q_4, 2, q_4 de sorte que $\frac{1}{q}=\frac{1}{q_4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{q_4}$, et on obtient

$$\|E_{i2}^1\|_{L^q(Q)} \leq c\,\xi(1+\xi^{\gamma_2})\|U\|_{Y^\epsilon}\,,\quad i=1,2,3\,.$$

La même inégalité est vraie pour E_{i3}^1 , et on obtient finalement

$$\|\partial_{y_1}[(D\,\hat{F}_\epsilon(w)U)_i]\|_{L^q(Q_i)} \leq c_{1q}(\xi)\xi\|U\|_{Y^\epsilon}\,,\quad i=1,2,3\,. \qquad (8.30)$$

Il faut estimer maintenant la dérivée par raport à y_2 .

$$\frac{1}{\epsilon^{r_i}}\partial_{y_2}[(D\,\hat{F}_\epsilon(w)U)_i] = \frac{1}{\epsilon^{r_i}}E_{i1}^2+\frac{1}{\epsilon^{r_i}}E_{i2}^2+\frac{1}{\epsilon^{r_i}}E_{i3}^2$$

où on rappèlle qu'on a posé $r_1=r_3=1$ et $r_2=p$.
On fait comme auparavant pour la dérivée par raport à y_1 :

$$\frac{1}{\epsilon^{r_i}}|E_{i1}^2| \leq c\,[1+|\varphi_i^\epsilon|^{\gamma_3}+|w_i|^{\gamma_3}]\cdot\left[\frac{1}{\epsilon^{r_i}}(|\partial_{y_2}\varphi_i^\epsilon|+|\partial_{y_2}w_i|)\right]\cdot|w_i|\cdot|U_i| \qquad \text{sur } Q_i\,,\ i=1,2,3\,.$$

On utilise aussi l'inégalité de Hölder avec les exposantes q_3, 2, q_3, q_3 , et le fait que

$$\frac{1}{\epsilon^{r_i}}\|\partial_{y_2}\varphi_i^\epsilon\|_{L^2(Q_i)} \leq c$$

et

$$\frac{1}{\epsilon^{r_i}}\|\partial_{y_2}w_i\|_{L^2(Q_i)} \leq \|w\|_{Y^\epsilon} \leq \xi \, .$$

De même pour $\frac{1}{\epsilon^{r_i}}E_{i2}^2$ et $\frac{1}{\epsilon^{r_i}}E_{i3}^2$, et on obtient finalement

$$\frac{1}{\epsilon^{r_i}}\|\partial_{y_2}[(D\,\hat{F}_\epsilon(w)U)_i]\|_{L^q(Q_i)} \leq c_{1q}(\xi)\xi\|U\|_{Y^\epsilon} \, ,$$

ce qui avec (8.28) et (8.30) montre le résultat .

8.1.2 Construction de la variété instable locale de S^ϵ .

Pour construire une variété instable locale pour le semigroupe S^ϵ autour de φ^ϵ , on utilise la méthode des intégrales.
Si on note par $\mathcal{T}_\epsilon(t)$ le semigroupe sur Y^ϵ associé à l'équation (8.1) , alors on défini l'ensemble $W_\epsilon^u(0)$ comme suit :

$W_\epsilon^u(0) = \{w_0 \in Y^\epsilon \, , \; \mathcal{T}_\epsilon(t)w_0$ existe pour tout $t \leq 0$ et $\mathcal{T}_\epsilon(t)w_0 \to 0$ pour $t \to -\infty\}$.

Si $\mathcal{U}_\epsilon$ est un voisinage de 0 dans Y^ϵ , alors l'ensemble instable local associé à $\mathcal{U}_\epsilon$ est donné par

$W_\epsilon^u(0, \mathcal{U}_\epsilon) = \{w_0 \in W_\epsilon^u(0) \, , \; \mathcal{T}_\epsilon(t)w_0 \in \mathcal{U}_\epsilon \, , \; \forall\, t \leq 0\}$.

Rappelons qu'on a noté par $\mathcal{S}_\epsilon$ l'espace engendré par $\hat{V}_\epsilon^1 \, , \ldots \, \hat{V}_\epsilon^{m_0}$.
Dans la suite, on suppose q fixé dans (1, 2), et on introduit quelques notations supplémentaires :

$$D_\epsilon = \{\beta \in I\!R^m \, , \; \|\sum_{j=1}^m \beta_j \hat{V}_\epsilon^j\|_{Y^\epsilon} \leq \alpha_0\}$$

$$\mathcal{U}_\epsilon = \{w \in Y^\epsilon \, , \; \|\hat{P}_\epsilon w\|_{Y^\epsilon} < \alpha_0 \, , \; \|w\|_{Y^\epsilon} < \alpha_1\}$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_\epsilon = \{w \in Y^\epsilon \, , \; \|\hat{P}_\epsilon w\|_{Y^\epsilon} < M_q\alpha_0 \, , \; \|w\|_{Y^\epsilon} < \alpha_1\}$$

où M_q est donné par le Lemme 8.3 , et α_0 et α_1 sont deux constantes positives , assez petites , telles que

$$\begin{cases} M_q^j c_{1q}(\alpha_1)\alpha_1\{\frac{1}{|\Lambda_1|} + \frac{1}{\Lambda_2} + \int_0^\infty e^{-\Lambda_2 t}t^{-1/2}\,dt\} < \frac{1}{4} \, , \quad j = 0,1,2 \\ M_q\alpha_0 < \frac{1}{2}\alpha_1 \, . \end{cases} \tag{8.31}$$

Nous pouvons énoncer maintenant le résultat concernant l'existence d'une variété instable locale :

Théorème 8.5. *Il existe une constante strictement positive* ϵ_2 , *telle que pour tout* $\epsilon \in (0, \epsilon_2)$, *il existe une application continue*
$\mathcal{I}_\epsilon : D_\epsilon \to \mathcal{I}_\epsilon(D_\epsilon)$ avec $\mathcal{I}_\epsilon(0) = 0$.
($\mathcal{I}_\epsilon$ *peut être considéré comme un graph au-dessus de* $\mathcal{S}_\epsilon$ *) . En outre on a :*

$$W^u_\epsilon(0, \mathcal{U}_\epsilon) \subset \mathcal{I}_\epsilon(D_\epsilon) \subset W^u_\epsilon(0, \tilde{\mathcal{U}}_\epsilon) .$$

Preuve . La preuve du théorème est tout à fait identique à celle du Théorème 5.32 de [1] .
Soit

$$w^0 = \sum_{j=1}^{m_0} \beta_j \hat{V}^j_\epsilon \qquad \text{avec } \beta \in D_\epsilon \text{ fixé.}$$

On introduit l'ensemble

$$\mathcal{E}_\epsilon = \mathcal{E}_\epsilon(w^0 , \alpha_1) = \{w^\epsilon(t) \in C^0((-\infty , 0] , Y^\epsilon) , \hat{P}_\epsilon w^\epsilon(0) = w^0$$
$$\text{et } \sup_{t \le 0} \|w^\epsilon(t)\|_{Y^\epsilon} \le \alpha_1\} .$$

Le point principal de la preuve est de trouver une solution dans $\mathcal{E}_\epsilon$ de l'équation

$$w^\epsilon(t) = \mathcal{F}^\epsilon(w^\epsilon(t)) ,$$

où

$$\mathcal{F}^\epsilon(w^\epsilon(t)) = e^{-C_\epsilon t}\hat{P}_\epsilon w^0 - \int_t^0 e^{-C_\epsilon(t-\tau)}\hat{P}_\epsilon \hat{F}_\epsilon(w^\epsilon(\tau))\, d\tau +$$
$$+ \int_{-\infty}^t e^{-C_\epsilon(t-\tau)}(I - \hat{P}_\epsilon)\hat{F}_\epsilon(w^\epsilon(\tau))\, d\tau .$$

On utilise d'une manière essentielle les Lemmes 8.3 et 8.4 pour montrer que si α_0 et α_1 satisfont aux conditions (8.31) , alors $\mathcal{F}^\epsilon$ est une contraction de $\mathcal{E}_\epsilon$ dans $\mathcal{E}_\epsilon$.
On pose ensuite $\mathcal{I}(\beta) = w^\epsilon(0)$.

8.2 L'existence d'une variété instable locale pour le semi-groupe $S(t)$.

8.2.1 Notations et résultats préliminaires

Soit $\varphi \in E$ et $u(t) = S(t)u^0$, c'est à dire $u(t)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A_0\, u = -f(u) - G_0 \\ u(0) = u^0 . \end{cases} \tag{8.32}$$

On écrit $u(t) = \varphi + w(t)$ où la fonction w satisfait à

$$\frac{dw}{dt} + C_0 w = \hat{F}_0(w) \tag{8.33}$$

où C_0 est défini à (7.5) , et où

$$\hat{F}_0(w) = -f(\varphi + w) + f(\varphi) + f'(\varphi)w \ . \tag{8.34}$$

On pose aussi

$$\hat{F}_{0i}(w_i) = -f(\varphi_i + w_i) + f(\varphi_i) + f'(\varphi_i)w_i \ , \quad i = 1,3.$$

Proposition 8.6. *C_0 est un opérateur sectoriel dans $L^2(\Omega)$.*

Preuve. Il suffit de montrer que O_0 est sectoriel .
O_0 est évidemment un opérateur fermé .
Pour montrer que $D(O_0)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, on utilise essentiellement le fait que $D(O_{0i}) = \{u_i \in H^2(\Omega_i) \ , \ \partial_{y_1} u_i = 0 \ \text{ on } \partial\Omega_i\}$, $i = 1,3$, est dense dans $L^2(\Omega_i)$, et que $H_0^2(\Omega_2)$ est dense dans $L^2(\Omega_2)$. Les détails sont laissées au lecteur.
Il reste à estimer la norme de $(\lambda I - O_0)^{-1}$.

On sait que le spectre de O_0 est situé sur le demi-axe $R^+\backslash\{0\}$.
Soit le secteur suivant dans le plan complèxe :

$S_{0,\varphi_0} = \{z \in \mathbb{C} \ , \ \arg z \in (-\varphi_0, \varphi_0)\}$ où $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$.
Soit $v \in L^2(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}\backslash S_{0,\varphi_0}$. On va étudier l'équation

$$\lambda u - O_0 u = v \ . \tag{8.35}$$

On sait qu'il existe une solution unique $u \in L^2(\Omega)$ de (8.35) , parce que $\mathbb{C}\backslash S_{0,\varphi_0} \subset \rho(O_0)$.
Si on se restreint à Ω_i , $i = 1,3$, on a

$$\lambda u_i - O_{0i} u_i = v_i \ , \ i = 1,3 \ . \tag{8.36}$$

Nous savons que O_{0i} est un opérateur séctoriel ,qui est positif et autoadjoint , donc d'après [14] , il existe une constante positive c , telle que

$$\|u_i\|_{L^2(\Omega_i)} \leq \frac{c}{|\lambda|}\|v_i\|_{L^2(\Omega_i)} \ , \ \forall \ \lambda \in \mathbb{C}\backslash S_{0,\varphi_0} \ , \ i = 1,3 \ . \tag{8.37}$$

Puisque $O_{0i}u_i = \lambda u_i - v_i$, on déduit

$$\|O_{0i}u_i\|_{L^2(\Omega_i)} \leq (c+1)\|v_i\|_{L^2(\Omega_i)} \ ,$$

ce qui donne

$$\|u_i\|_{H^2(\Omega_i)} \leq c\|v_i\|_{L^2(\Omega_i)} \ , \ \forall \ \lambda \in \mathbb{C}\backslash S_{0,\varphi_0} \ , \ i = 1,3 \ . \tag{8.38}$$

Comme auparavant, on écrit

$u_2 = \bar{u}_2 + \mathcal{R}(u_1 \ , \ u_3)$,
où $\mathcal{R}$ est donnée par (2.11)-(2.13) .

En tenant compte de (8.36) , on déduit que $\bar{u}_2$ est solution de

$$\lambda\bar{u}_2 - O_{02}\bar{u}_2 = v_2 - \rho_1 v_1(2a-y_1) - \rho_3 v_3(2b-y_1) +$$

$$+\sum_{i\neq 2}\{2\rho_i'\partial_{x_1}u_i(2a_i-y_1) - \rho_i{}'' u_i(2a_i-y_1) + [f'(\varphi_2) - f'(\varphi_i(2a_i-y_1))]\rho_i u_i(2a_i-y_1)\}, \tag{8.39}$$

où on a noté par O_{02} l'opérateur

$$O_{02}\bar{u}_2 = -\partial_{y_1 y_1}\bar{u}_2 + \alpha\bar{u}_2 + f'(\varphi_2)\,\bar{u}_2 + \gamma\,\bar{u}_2$$

avec les conditions de Dirichlet $\bar{u}_2(a) = \bar{u}_2(b) = 0$.
Puisque O_{02} est aussi un opérateur séctoriel qui est autoadjoint et positif , nous avons que

$$\|(\lambda I - O_{02})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_2),L^2(\Omega_2))} \leq \frac{c}{|\lambda|}\,, \quad \forall\,\lambda \in C\backslash S_{0,\varphi_0}\,.$$

Grâce à (8.38) et (8.39) , on a alors

$$\|\bar{u}_2\|_{L^2(\Omega_2)} \leq \frac{c}{|\lambda|}\|v\|_{L^2(\Omega)}\,, \quad \forall\,\lambda \in C\backslash S_{0,\varphi_0}\,,$$

ce qui avec (8.37) nous donne

$$\|(\lambda I - O_0)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega),L^2(\Omega))} \leq \frac{c}{|\lambda|}\,, \quad \forall\,\lambda \in C\backslash S_{0,\varphi_0}, \tag{8.40}$$

ce qui finit la démonstration .

Comme pour le problème en ϵ , on aura besoin d'estimations de $e^{-C_0 t}\hat{P}_0$ pour $t \leq 0$ et de $e^{-C_0 t}(I - \hat{P}_0)$ pour $t > 0$.

Lemme 8.7. *Il existe une constante strictement positive M_0 telle que pour tout $h \in L^2(\Omega)$, on a :*

(*i*) $$\|e^{-C_0 t}\hat{P}_0 h\|_{H^1(\Omega)} \leq M_0 e^{-\Lambda_1 t}\|h\|_{L^2(\Omega)}\,, \quad \forall\,t \leq 0$$

(*ii*) $$\|e^{-C_0 t}(I - \hat{P}_0)h\|_{H^1(\Omega)} \leq M_0 e^{-\Lambda_2 t}\left(1 + t^{-1/2}\ln\frac{1}{t}\right)\|h\|_{L^2(\Omega)}\,, \quad \forall\,t > 0\,.$$

Preuve. On va utiliser les formules suivantes :

$$e^{-O_0 t}\hat{P}_0 h = \frac{1}{2\pi i}\int_{T(A,B,C)} e^{-\lambda t}(O_0 - \lambda I)^{-1}h\,d\lambda\,, \quad \forall\,t \leq 0$$

où le triangle T(A,B,C) est le même que celui de la preuve du Lemme 8.3(*ii*), et

$$e^{-O_0 t}(I - \hat{P}_0)h = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-\lambda t}(O_0 - \lambda I)^{-1}h\,d\lambda\,, \quad \forall\,t > 0$$

où Γ est le contour suivant :

$\Gamma = [DE] \cup \Gamma' \cup \Gamma"$

où [DE] est le segment d'extrémités $D = \gamma + \Lambda_2 - i(\gamma + \Lambda_2)$ et $E = \gamma + \Lambda_2 + i(\gamma + \Lambda_2)$,

$\Gamma' = \{\gamma + \Lambda_2 + i(\gamma + \Lambda_2) + s + i\,s\,,\ s \geq 0\}$

et

$\Gamma" = \{\gamma + \Lambda_2 - i(\gamma + \Lambda_2) + s - i\,s\,,\ s \geq 0\}$ (voir figure 3) .

L'estimation (i) est évidente si on remarque que pour $\lambda \in T(A, B, C)$ on a :

$$\|(O_0 - \lambda I)^{-1} h\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,\|h\|_{L^2(\Omega)} \,.$$

(ii) Il est clair que

$$\| \int_{[DE)} e^{-\lambda t}(O_0 - \lambda\, I)^{-1} h\, d\lambda \|_{L^2(\Omega)} \leq c\, e^{-(\Lambda_2+\gamma)t} \|h\|_{L^2(\Omega)} \,. \tag{8.41}$$

Sur Γ' on utilise l'éstimation (8.40) de $(O_0 - \lambda\, I)^{-1}$, et on obtient :

$$\| \int_{\Gamma'} e^{-\lambda t}(O_0 - \lambda\, I)^{-1} h\, d\lambda \|_{L^2(\Omega)} \leq c\, | \int_{\Gamma'} e^{-Re\,\lambda t} \frac{1}{|\lambda|}\, d\lambda | \cdot \|h\|_{L^2(\Omega)} \,.$$

On fait le changement de variable : $\lambda = \gamma + \Lambda_2 + i\,(\gamma + \Lambda_2) + \frac{\mu}{t}$, et on obtient

$$| \int_{\Gamma'} e^{-Re\,\lambda t} \frac{1}{|\lambda|}\, d\lambda | \leq e^{-(\Lambda_2+\gamma)t} | \int_{\arg\,\mu=\pi/4} e^{-Re\,\mu} \frac{1}{|\mu + [\gamma + \Lambda_2 + i\,(\gamma + \Lambda_2)]\, t|} d\mu |$$

$$\leq e^{-(\Lambda_2+\gamma)t} \int_0^\infty e^{-\mu_1} \frac{1}{\mu_1 + (\Lambda_2 + \gamma)t} d\mu_1 \,.$$

On a deux cas :

Cas 1. Si $t \geq 1$, alors

$$\int_0^\infty e^{-\mu_1} \frac{1}{\mu_1 + (\Lambda_2 + \gamma)t} d\mu_1 \leq \frac{1}{(\Lambda_2 + \gamma)} \int_0^\infty e^{-\mu_1}\, d\mu_1 \leq c \,.$$

Cas 2. Si $t \in (0,\, 1)$, alors

$$\int_0^\infty e^{-\mu_1} \frac{1}{\mu_1 + (\Lambda_2 + \gamma)t} d\mu_1 \leq \int_0^1 \frac{1}{\mu_1 + (\Lambda_2 + \gamma)t} d\mu_1 + \int_1^\infty e^{-\mu_1}\, d\mu_1 \leq c \left(1 + \ln \frac{1}{t}\right) \,.$$

On a obtenu donc

$$\| \int_{\Gamma'} e^{-\lambda t}(O_0 - \lambda\, I)^{-1} h\, d\lambda \|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(1 + \ln \frac{1}{t}\right) e^{-(\Lambda_2+\gamma)t} \|h\|_{L^2(\Omega)} \,.$$

On procède exactement de la même manière sur $\Gamma"$, et avec (8.41) on obtient

$$\|e^{-O_0 t}(I - \hat{P}_0) h\|_{L^2(\Omega)} \leq c\, e^{-(\Lambda_2+\gamma)t} \left(1 + \ln \frac{1}{t}\right) \|h\|_{L^2(\Omega)} \,. \tag{8.42}$$

Pour obtenir l'estimation de $e^{-O_0 t}(I-\hat{P}_0)h$ dans la norme de $H^1(\Omega)$, on va majorer $O_0 e^{-O_0 t}(I-\hat{P}_0)h$ qui est égal à $\int_\Gamma \lambda e^{-\lambda t}(O_0 - \lambda I)^{-1} h\, d\lambda$.
Il est evident que

$$\| \int_{[DE]} \lambda e^{-\lambda t}(O_0 - \lambda I)^{-1} h\, d\lambda \|_{L^2(\Omega)} \leq c\, e^{-(\Lambda_2+\gamma)t} \|h\|_{L^2(\Omega)} . \qquad (8.43)$$

En procedant comme ci-dessus, on montre que

$$\| \int_{\Gamma'} \lambda e^{-\lambda t}(O_0 - \lambda I)^{-1} h\, d\lambda \|_{L^2(\Omega)} \leq c \frac{1}{t} e^{-(\Lambda_2+\gamma)t} \|h\|_{L^2(\Omega)} .$$

De même sur Γ" , ce qui avec (8.43) nous donne

$$\|O_0 e^{-O_0 t}(I-\hat{P}_0)h\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(1+\frac{1}{t}\right) e^{-(\Lambda_2+\gamma)t} \|h\|_{L^2(\Omega)} .$$

En utilisant la proposition 7.2 , on dèduit que $e^{-O_0 t}(I-\hat{P}_0)h \in H^1(\Omega)$ pour tout t superieur à 0 , et que

$$\|(e^{-O_0 t}(I-\hat{P}_0)h)_i\|_{H^2(\Omega_i)} \leq c \left(1+\frac{1}{t}\right) e^{-(\Lambda_2+\gamma)t} \|h\|_{L^2(\Omega)} , \quad i = 1,2,3 . \qquad (8.44)$$

Finalement , on obtient l'assertion (ii) par interpolation entre les inégalités (8.42) et (8.44).

Il est evident que la fonction $\hat{F}_0$ donné par (8.34) est de de classe C^1 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. De même, $\hat{F}_{0i}$ est de classe C^1 de $H^1(\Omega_i)$ dans $L^2(\Omega_i)$, $i = 1,3$. Nous avons l'analogue suivant du lemme 8.4 , dont la preuve est immédiate:

Lemme 8.8.
(i) $\hat{F}_0(0) = D\hat{F}_0(0) = 0$ *(respectivement* $\hat{F}_{0i}(0) = D\hat{F}_{0i}(0) = 0$, $i = 1,3$ *).*
(ii) Pour tout $\xi > 0$ *et tout* $w \in H^1(\Omega)$ *tel que* $\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq \xi$,
(respectivement $w_i \in H^1(\Omega_i)$ *tel que* $\|w_i\|_{H^1(\Omega_i)} \leq \xi$ *) , on a*

$$D\hat{F}_0(w) \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), L^2(\Omega)) , \qquad \text{avec } \|D\hat{F}_0(w)\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega),L^2(\Omega))} \leq \xi\, c_1(\xi)$$

(respectivement

$$D\hat{F}_{0i}(w_i) \in \mathcal{L}(H^1(\Omega_i), L^2(\Omega_i)) , \qquad \text{avec } \|D\hat{F}_{0i}(w_i)\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega_i),L^2(\Omega_i))} \leq \xi\, c_1(\xi) \ ) ,$$

où c_1 *est une fonction croissante de* ξ .

8.2.2 Construction des variétés instables locales de $S(t)$ et $S_i(t)$, $i = 1,3$.

Pour construire une variété instable locale pour le semigroupe $S(t)$ (respectivement $S_i(t)$, $i = 1,3$) autour de φ (respectivement φ_i) , on utilise la même methode que celle utilisée pour $S^\epsilon(t)$.

Si on note par $\mathcal{T}_0(t)$ le semigroupe sur $H^1(\Omega)$ associé à l'équation (8.33) , alors on définit l'ensemble $W_0^u(0)$ comme suit :

$W_0^u(0) = \{w^0 \in H^1(\Omega)$, $\mathcal{T}_0(t)w^0$ existe pour tout $t \leq 0$ et $\mathcal{T}_0(t)w^0 \to 0$ pour $t \to -\infty\}$.

Si on note par $\mathcal{T}_{0i}(t)$ le semigroupe sur $H^1(\Omega_i)$ associé à laréstriction de l'équation (8.33) sur Ω_i , $i = 1,3$, alors l'ensemble $W_{0i}^u(0)$ se définit de la même façon.

Si $\mathcal{U}_0$ est un voisinage de 0 dans $H^1(\Omega)$, alors l'ensemble instable local associé à $\mathcal{U}_0$ est définit par :

$W_0^u(0, \mathcal{U}_0) = \{w^0 \in W_0^u(0)$, $\mathcal{T}_0(t)w^0 \in \mathcal{U}_0$, $\forall\, t \leq 0\}$.

De même, si $\mathcal{U}_{0i}$ est un voisinage de 0 dans $H^1(\Omega_i)$, alors l'ensemble instable local associé à $\mathcal{U}_{0i}$ est définit par

$W_{0i}^u(0, \mathcal{U}_{0i}) = \{w_i^0 \in W_{0i}^u(0)$, $\mathcal{T}_{0i}(t)w_i^0 \in \mathcal{U}_{0i}$, $\forall\, t \leq 0\}$.

Rappelons qu'il existe m_0 valeurs propres négatives (comptées avec leurs multiplicités) , de l'opérateur C_0 :

λ^1 , . . . λ^{m_0} ,

avec les vecteurs propres generalisés correspondants :

$\hat{V}^1$, . . . $\hat{V}^{m_0}$.

On désigne par $\mathcal{S}_0$ l'espace engendré par $\hat{V}^1$, . . . $\hat{V}^{m_0}$.

De même, pour $i = 1,3$, λ_i^1 , . . . $\lambda_i^{m_{0i}}$ désigne les valeurs propres négatives de C_{0i} , avec les vecteurs propres generalisés correspondants :

$\hat{V}_i^1$, . . . $\hat{V}_i^{m_{0i}}$.

Nous posons dans la suite :

$$D_0 = \{\beta \in I\!R^{m_0} \text{ , } \|\sum_{j=1}^{m} \beta_j \hat{V}^j\|_{H^1(\Omega)} < \alpha_0\}$$

$$\mathcal{U}_0 = \{w \in H^1(\Omega) \text{ , } \|\hat{P}_0 w\|_{H^1(\Omega)} < \alpha_0 \text{ , } \|w\|_{H^1(\Omega)} < \alpha_1\}$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_0 = \{w \in H^1(\Omega) \text{ , } \|\hat{P}_0 w\|_{H^1(\Omega)} < M_0\alpha_0 \text{ , } \|w\|_{H^1(\Omega)} < \alpha_1\}$$

où M_0 est donné par le Lemme 8.7 , et α_0 et α_1 sont deux constantes positives qui satisfont à (8.31) et, en outre à

$$\begin{cases} M_0^j c_1(\alpha_1)\alpha_1\{\frac{1}{|\Lambda_1|} + \frac{1}{\Lambda_2} + \int_0^\infty e^{-\Lambda_2 t} t^{-1/2} \ln \frac{1}{t}\, dt\} < \frac{1}{4} \text{ , } \quad j = 0,1,2 \\ \\ M_0\alpha_0 < \frac{1}{2}\alpha_1 \text{ .} \end{cases} \tag{8.45}$$

De même , pour $i = 1,3$:

$$D_{0i} = \{\beta \in I\!R^{m_{0i}} \text{ , } \|\sum_{j=1}^{m} \beta_j \hat{V}_i^j\|_{H^1(\Omega_i)} \leq \alpha_0\}$$

$$\mathcal{U}_{0i} = \{w_i \in H^1(\Omega_i)\ ,\ \|\hat{P}_{0i}w_i\|_{H^1(\Omega_i)} < \alpha_0\ ,\ \|w_i\|_{H^1(\Omega_i)} < \alpha_1\}$$
$$\tilde{\mathcal{U}}_{0i} = \{w_i \in H^1(\Omega_i)\ ,\ \|\hat{P}_{0i}w_i\|_{H^1(\Omega_i)} < M_0\alpha_0\ ,\ \|w_i\|_{H^1(\Omega_i)} < \alpha_1\}\ .$$

Remarquons que dans la Proposition 8.1 (ii) et (iii) on peut prendre $c = M_0$, en augmentant éventuellement M_0.
Nous pouvons énoncer maintenent le résultat d'existence des variétés instables locales , qui se montre de la même facon que le Théorème 8.5 , en utilisant d'une manière essentielle les Lemmes 8.7 , 8.8 et la Proposition 8.1 (ii) et (iii) :

Théorème 8.9. *Il existe une application continue*
$\mathcal{I}_0 : D_0 \to \mathcal{I}_0(D_0)$ *avec* $\mathcal{I}_0(0) = 0$.
($\mathcal{I}_0$ *peut être vu comme un graph sur* $\mathcal{S}_0$ *) . En outre on a*

$$W_0^u(0, \mathcal{U}_0) \subset \mathcal{I}_0(D_0) \subset W_0^u(0, \tilde{\mathcal{U}}_0)\ .$$

De même, pour $i = 1, 3$ *, il existe une application continue* $\mathcal{I}_{0i} : D_{0i} \to \mathcal{I}_{0i}(D_{0i})$ *avec* $\mathcal{I}_{0i}(0) = 0$.
En outre ,

$$W_{0i}^u(0, \mathcal{U}_{0i}) \subset \mathcal{I}_{0i}(D_{0i}) \subset W_{0i}^u(0, \tilde{\mathcal{U}}_{0i})\ .$$

9 Comparaison des variétés instables locales. Conséquence sur la semicontinuité inférieure des attracteurs .

9.1 Résultats préliminaires et définitions .

On va commencer par quelques résultats supplémentaires de régularité sur l'attracteur $\mathcal{A}^\epsilon$.

Proposition 9.1. *Il existe une constante positive c , telle que pour tout $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$ on a*

$$\|\psi^\epsilon\|_{D(A^\epsilon)} \leq c.$$

Preuve. Puisque $\mathcal{A}^\epsilon$ est invariant , on peut considerer $\psi^\epsilon = S^\epsilon(1)\psi^{0\epsilon}$, avec $\psi^{0\epsilon} \in \mathcal{A}^\epsilon$. On note $u^\epsilon(t) = S^\epsilon(t)\psi^{0\epsilon}$, on remarque que

$$A_\epsilon u^\epsilon = -\frac{du^\epsilon}{dt} - f(u^\epsilon) - G^\epsilon, \tag{9.1}$$

et on utilise la Proposition 3.12 et le Lemme 3.13.

Proposition 9.2. *Soit $\sigma \in [0,1)$. Il existe une constante positive c_σ , telle que pour toute trajectoire dans $\mathcal{A}^\epsilon$: $u^\epsilon(t) = S^\epsilon(t)\psi^\epsilon$, avec $\psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$, on a*

$$\|\frac{du^\epsilon}{dt}(t)\|_{D(A_\epsilon^\sigma)} \leq c_\sigma \ , \quad \forall\, t \geq 0 \ .$$

Preuve. On peut considérer $u^\epsilon(t) = S^\epsilon(1)v^\epsilon$, avec $v^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon$.
On note $\bar{u}^\epsilon(t) = S^\epsilon(t)v^\epsilon$ et $\bar{w}^\epsilon(t) = t\frac{d\bar{u}^\epsilon}{dt}$.
La fonction $\bar{w}^\epsilon$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{d\bar{w}^\epsilon}{dt} + A_\epsilon\bar{w}^\epsilon = -f'(\bar{u}^\epsilon)\bar{w}^\epsilon + \frac{d\bar{u}^\epsilon}{dt} \\ \\ \bar{w}^\epsilon(0) = 0 \ . \end{cases} \tag{9.3}$$

On multiplie par $A_\epsilon\bar{w}^\epsilon$ dans H^ϵ , et on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}a_\epsilon(\bar{w}^\epsilon,\bar{w}^\epsilon) + \|A_\epsilon\bar{w}^\epsilon\|^2_{H^\epsilon} \leq \frac{1}{2}\| A_\epsilon\bar{w}^\epsilon \|^2_{H^2} + \frac{1}{2}\left[\| \frac{d\bar{u}^\epsilon}{dt} \|^2_{H^\epsilon_i} + \| f'(\bar{u}^\epsilon)\bar{w}^\epsilon \|^2_{H^\epsilon}\right] \ .$$

En intégrant entre 0 et t et en tenant compte du fait que $\bar{u}^\epsilon_i$ est borné dans la norme de $H^1(Q_i)$ uniformément en ϵ pour $i = 1,2,3$, on déduit que

$$a_\epsilon(\bar{w}^\epsilon,\bar{w}^\epsilon) \leq c_1\int_0^t a_\epsilon(\bar{w}^\epsilon,\bar{w}^\epsilon)ds + c_2 \ , \quad 0 \leq t \leq 1 \ .$$

En appliquant le lemme de Gromwal, on obtient

$$\| \bar{w}^\epsilon(t) \|_{X^\epsilon} \leq c \ , \quad 0 \leq t \leq 1 \ . \tag{9.4}$$

Mais la solution $\bar{w}^\epsilon$ de (9.3) s'écrit aussi sous la forme

$$\bar{w}^\epsilon(t) = \int_0^t e^{-A_\epsilon(t-s)} \left[-f'(\bar{u}^\epsilon(s))\bar{w}^\epsilon(s) + \frac{d\bar{u}^\epsilon}{dt}(s) \right] ds \ ,$$

ce qui entraîne

$$\| \bar{w}^\epsilon(t) \|_{D(A_\epsilon^\sigma)} \leq c \int_0^t [1 + (t-s)^{-\sigma}] e^{-\lambda_\epsilon^1 (t-s)} \left[\| f'(\bar{u}^\epsilon)\bar{w}^\epsilon \|_{H^\epsilon} + \| \frac{d\bar{u}^\epsilon}{dt} \|_{H^\epsilon} \right] ds \ , \quad (9.5)$$

où λ_ϵ^1 est la première valeur propre de A_ϵ .
Maintenant , (9.4) nous donne

$$\| f'(\bar{u}^\epsilon)\bar{w}^\epsilon \|_{H^\epsilon} \leq c. \qquad (9.6)$$

D'autre part, puisque $\frac{d\bar{u}^\epsilon}{dt} = -A_\epsilon \bar{u}^\epsilon - f(\bar{u}^\epsilon) - G^\epsilon$, la Proposition 9.1 nous permet d'écrire

$$\| \frac{d\bar{u}^\epsilon}{dt}(s) \|_{H^\epsilon} \leq c \ , \qquad (9.7)$$

et finalement , les relations (9.5)-(9.7) nous donnent le résultat.

Nous utiliserons aussi le resultat suivant concernant les applications M_i , $i = 1,2,3$.

Proposition 9.3. *Soit* $\sigma \in [0,1]$.
Il existe une constante $c > 0$, *telle que pour tout* $v \in D(A_\epsilon^\sigma)$, *nous avons* $M_i v_i \in H^{2\sigma}(\Omega_i)$, $i = 1,2,3$, *et en outre:*

(*i*) $$\| M_i v_i \|_{H^{2\sigma}(\Omega_i)} \leq c \| v \|_{D(A_\epsilon^\sigma)} \ , \quad i = 1,3$$

(*ii*) $$\| M_2 v_2 \|_{H^{2\sigma}(\Omega_2)} \leq c \epsilon^{\frac{1-p}{2}} \| v \|_{D(A_\epsilon^\sigma)} \ .$$

Preuve. La proposition est vraie pour $\sigma = 0$ et $\sigma = \frac{1}{2}$.
Il suffit de la montrer pour $\sigma = 1$, et l'assertion générale resultera par interpolation.

Pour $v \in D(A_\epsilon)$ il faudra estimer $\partial_{y_1 y_1}(M_i v_i)$ dans la norme de $L^2(\Omega_i)$. Puisque $v_i \in W^{2,q}(Q_i)$ avec un $q > 1$, $i = 1,2,3$, on peut dire que $\partial_{y_1 y_1}(M_i v_i) = M_i(\partial_{y_1 y_1} v_i)$, $i = 1,2,3$.

On fait le calcul suivant :

$$M_i(\partial_{y_2 y_2} v_i) = \int_0^1 \partial_{y_2 y_2} v_i(y_1, y_2) dy_2 = \partial_{y_2} v_i /_0^1 = 0 \ ,$$

ce qui donne

$$\partial_{y_1 y_1}(M_i v_i) = M_i(-(A^\epsilon v)_i + \alpha v_i) \ , \ i = 1,2,3 \ ,$$

et donc

$\| \partial_{y_1 y_1}(M_i v_i) \|_{L^2(\Omega_i)} \leq \| (A^\epsilon v)_i \|_{L^2(Q_i)} + \alpha \|v_i\|_{L^2(Q_i)}$, $i = 1,2,3$,

ce qui prouve la proposition.

En général, si $u \in D(A_\epsilon)$, on a $Mu \notin D(A_0)$ (et même $Mu \notin H^1(\Omega)$).

Nous voulons construire pour tout $r > 0$ et tout $\epsilon > 0$ une application $M^{\epsilon,r} : D(A_\epsilon) \longrightarrow D(A_0)$, tel que pour $v \in D(A_\epsilon)$, $M^{\epsilon,r}(v)$ soit proche de Mv dans un certain sens.

Si $v \in D(A_\epsilon)$ alors $M_i v_i \in H^2(\Omega_i)$ pour $i = 1,2,3$ (voir Proposition 9.3).

On introduit les fonctions $\rho_{1\epsilon^r}(v)$ et $\rho_{3\epsilon^r}(v)$ sur Ω_1 et Ω_3,

$$\rho_{1\epsilon^r}(v)(y_1) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour } y_1 \in (0,\, a - \epsilon^r) \\ -\frac{1}{2\epsilon^r}(y_1 - a + \epsilon^r)^2 \partial_{y_1}(M_1 v_1)(a) \qquad \text{pour } y_1 \in (a - \epsilon^r,\, a) \end{cases} \tag{9.8}$$

et

$$\rho_{3\epsilon^r}(v)(y_1) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour } y_1 \in (b + \epsilon^r,\, 1) \\ -\frac{1}{2\epsilon^r}(y_1 - b - \epsilon^r)^2 \partial_{y_1}(M_3 v_3)(b) \qquad \text{pour } y_1 \in (b,\, b + \epsilon^r)\ , \end{cases} \tag{9.9}$$

et on définit sur Ω_i , $i = 1,3$,

$$M_i^{\epsilon,r} v_i = M_i v_i + \rho_{i\epsilon^r}(v)\ . \tag{9.10}$$

On voit facilement que $M_i^{\epsilon,r} v_i \in D(A_i)$, $i = 1,3$.

Pour définir $M_2^{\epsilon,r} v_2$, on pose

$$\begin{cases} \rho_1^*(v) = (M_1 v_1)(a) - (M_2 v_2)(a) - \frac{1}{2}\epsilon^r \partial_{y_1}(M_1 v_1)(a) \\ \rho_3^*(v) = (M_3 v_3)(b) - (M_2 v_2)(b) - \frac{1}{2}\epsilon^r \partial_{y_1}(M_3 v_3)(b)\ . \end{cases} \tag{9.11}$$

On définit $\rho_{2\epsilon}(v)$ comme étant une fonction linéaire sur Ω_2 , qui prend les valeurs ρ_1^* et ρ_3^* aux points a et b respectivement, c'est-à-dire :

$$\rho_{2\epsilon^r}(v)(y_1) = \rho_1^* + \frac{\rho_3^* - \rho_1^*}{b - a}(y_1 - a) \qquad \text{pour } y_1 \in \Omega_2\ , \tag{9.12}$$

et on introduit la fonction

$$M_2^{\epsilon,r} v_2 = M_2 v_2 + \rho_{2\epsilon^r}(v)\ . \tag{9.13}$$

Finalement on définit la fonction $M^{\epsilon,r} v$ sur Ω, par

$(M^{\epsilon,r} v)/\Omega_i = M_i^{\epsilon,r} v_i$, $i = 1,2,3$.

On voit facilement que $M^{\epsilon,r} v \in D(A_0)$ pour tout $v \in D(A_\epsilon)$.

9.2 Comparaison des variétés locales instables .

Théorème 9.4. *Il existe des constantes strictement positives* ϵ_2 , σ_2 *et* c , *telles que pour tout* $\beta^\epsilon \in D_\epsilon$, $\beta \in D_0$ *et* $\epsilon \in (0,\, \epsilon_2]$, *on a :*

$$\|M^{\epsilon,r}\mathcal{I}_\epsilon(\beta^\epsilon) - \mathcal{I}_0(\beta)\|_{H^1(\Omega)} \leq c\left(\epsilon^{\sigma_2} + \|\hat{P}_0 M^{\epsilon,r}\mathcal{I}_\epsilon(\beta^\epsilon) - \sum_{j=1}^{m_0}\beta_j\hat{V}^j\|_{L^2(\Omega)}\right) .$$

Preuve. On note $w^{0\epsilon} = \sum_{j=1}^{m_0}\beta_j^\epsilon\hat{V}_\epsilon^j$ et $w^0 = \sum_{j=1}^{m_0}\beta_j\hat{V}^j$.
Il existe une fonction $w^\epsilon \in C((-\infty, 0], X^\epsilon)$ qui satisfait à l'équation (8.1), $w^\epsilon(0) = \mathcal{I}_\epsilon(\beta^\epsilon)$ et $\hat{P}_\epsilon w^\epsilon(0) = w^{0\epsilon}$.
De même, il existe une fonction $w \in C((-\infty, 0], H^1(\Omega))$ qui satisfait à (8.32), $w(0) = \mathcal{I}_0(\beta)$ et $\hat{P}_0 w(0) = w^0$.
On fait la démonstration du théorème en deux étapes :
Première étape . Equation satisfaite par $M^{\epsilon,r}w^\epsilon - w$.
On sait que w^ϵ satisfait à l'équation

$$\frac{dw^\epsilon}{dt} + A_\epsilon w^\epsilon = -f(\varphi^\epsilon + w^\epsilon) + f(\varphi^\epsilon) \qquad \text{pour } t \leq 0 . \tag{9.14}$$

Un simple calcul nous donne alors :

$$\frac{d}{dt}(M_i w_i^\epsilon) - \partial_{y_1y_1}(M_i w_i^\epsilon) + \alpha\,(M_i w_i^\epsilon) = \int_0^1 [-f(\varphi_i^\epsilon + w_i^\epsilon) + f(\varphi_i^\epsilon)]\,dy_2\ , \quad i = 1,2,3. \tag{9.15}$$

(remarquons que $Mw^\epsilon \notin D(A_0)$). En tennant compte de la définition de $M^{\epsilon,r}w^\epsilon$, on déduit de la relation (9.15)

$$\frac{d}{dt}(M_i^{\epsilon,r}w_i^\epsilon) - \partial_{y_1y_1}(M_i^{\epsilon,r}w_i^\epsilon) + \alpha\,(M_i^{\epsilon,r}w_i^\epsilon) = \int_0^1 [-f(\varphi_i^\epsilon + w_i^\epsilon) + f(\varphi_i^\epsilon)]\,dy_2$$

$$+\frac{d}{dt}\rho_{i\epsilon^r}(w^\epsilon) - \partial_{y_1y_1}\rho_{i\epsilon^r}(w^\epsilon) + \alpha\,\rho_{i\epsilon^r}(w^\epsilon)\ , \quad i = 1,2,3\ ,$$

où $M^{\epsilon,r}w^\epsilon(t) \in D(A_0)$, ou encore ,

$$\frac{d}{dt}(M^{\epsilon,r}w^\epsilon) + C_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon) = -f(\varphi + M^{\epsilon,r}w^\epsilon) + f(\varphi)$$

$$+f'(\varphi)(M^{\epsilon,r}w^\epsilon) + K^\epsilon\ , \qquad \text{pour } t \leq 0\ . \tag{9.16}$$

On note par $K^\epsilon(\cdot,t)$ la fonction définie sur Ω , telle que
$K^\epsilon/\Omega_i = K_i^\epsilon$ pour $i = 1,2,3$, où

$$K_i^\epsilon = -\int_0^1 f(\varphi_i^\epsilon + w_i^\epsilon)dy_2 + f(\varphi_i + M_i^{\epsilon,r}w_i^\epsilon) + \int_0^1 f(\varphi_i^\epsilon)\,dy_2 - f(\varphi_i)$$

$$+\frac{d}{dt}\rho_{i\epsilon^r}(w^\epsilon) - \partial_{y_1y_1}\rho_{i\epsilon^r}(w^\epsilon) + \alpha\,\rho_{i\epsilon^r}(w^\epsilon)\ , \quad i = 1,2,3\ . \tag{9.17}$$

On écrit : $M^{\epsilon,r}w^\epsilon(t) = \hat{P}_0 M^{\epsilon,r}w^\epsilon(t) + (I - \hat{P}_0)M^{\epsilon,r}w^\epsilon$, et on voit que l'équation (9.16) est équivalente au système

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\hat{P}_0 M^{\epsilon,r}w^\epsilon) + C_0(\hat{P}_0 M^{\epsilon,r}w^\epsilon) = \hat{P}_0\hat{F}_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon) + \hat{P}_0 K^\epsilon \\ \frac{d}{dt}((I - \hat{P}_0)M^{\epsilon,r}w^\epsilon) + C_0((I - \hat{P}_0)M^{\epsilon,r}w^\epsilon) = (I - \hat{P}_0)\hat{F}_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon) + (I - \hat{P}_0)K^\epsilon \ , \end{cases}$$

ce qui nous donne d'une part

$$(\hat{P}_0 M^{\epsilon,r}w^\epsilon)(t) = e^{-C_0 t}\hat{P}_0 M^{\epsilon,r}w^\epsilon(0) - \int_t^0 e^{-C_0(t-\tau)}\hat{P}_0[\hat{F}_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon) + K^\epsilon]\,d\tau \ , \quad (9.18)$$

et d'autre part

$$((I - \hat{P}_0)M^{\epsilon,r}w^\epsilon)(t) = e^{-C_0(t-t')}(I - \hat{P}_0)M^{\epsilon,r}w^\epsilon(t')$$
$$+ \int_{t'}^t e^{-C_0(t-\tau)}(I - \hat{P}_0)[\hat{F}_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon) + K^\epsilon]\,d\tau \ , \qquad \text{pour tout } t' \ , \ t' < t \ .$$

Comme la norme $\|M^{\epsilon,r}w^\epsilon(t')\|_{L^2(\Omega)}$ reste bornée pour tout $t' \leq 0$ (parce que $\|w^\epsilon(t')\|_{D(A_\epsilon)}$ reste borné) , on fait t' tendre vers $-\infty$ dans la dernière relation , pour obtenir

$$((I - \hat{P}_0)M^{\epsilon,r}w^\epsilon)(t) = + \int_{-\infty}^t e^{-C_0(t-\tau)}(I - \hat{P}_0)[\hat{F}_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon) + K^\epsilon]\,d\tau \ ,$$

ce qui avec (9.18) nous donne

$$(M^{\epsilon,r}w^\epsilon)(t) = e^{-C_0 t}\hat{P}_0 M^{\epsilon,r}w^\epsilon(0) - \int_t^0 e^{-C_0(t-\tau)}\hat{P}_0[\hat{F}_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon(\tau)) + K^\epsilon(\tau)]\,d\tau$$
$$+ \int_{-\infty}^t e^{-C_0(t-\tau)}(I - \hat{P}_0)[\hat{F}_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon(\tau)) + K^\epsilon(\tau)]\,d\tau \qquad (9.19)$$

pour tout $t \leq 0$.
D'autre part, w satisfait à la relation

$$w(t) = e^{-C_0 t}w^0 - \int_t^0 e^{-C_0(t-\tau)}\hat{P}_0\hat{F}_0(w(\tau))\,d\tau + \int_{-\infty}^t e^{-C_0(t-\tau)}(I - \hat{P}_0)\hat{F}_0(w(\tau))\,d\tau \qquad (9.20)$$

pour $t \leq 0$.

On pose maintenant $z(t) = M^{\epsilon,r}w^\epsilon(t) - w(t)$, et on déduit de (9.19) et (9.20) que

$$z(t) = e^{-C_0 t}\hat{P}_0[\hat{P}_0 M^{\epsilon,r}w^\epsilon(0) - w^0] - \int_t^0 e^{-C_0(t-\tau)}\hat{P}_0[\hat{F}_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon(\tau)) - \hat{F}_0(w(\tau))]\,d\tau$$
$$+ \int_{-\infty}^t e^{-C_0(t-\tau)}(I - \hat{P}_0)[\hat{F}_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon(\tau)) - \hat{F}_0(w(\tau))]\,d\tau - \int_t^0 e^{-C_0(t-\tau)}\hat{P}_0 K^\epsilon(\tau)\,d\tau$$

$$+\int_{-\infty}^{t} e^{-C_0(t-\tau)}(I-\hat{P}_0)K^\epsilon(\tau)\,d\tau\ , \quad \forall\, t\leq 0\ . \tag{9.21}$$

Deuxième étape : Majoration de $z(t)$.
Il faut majorer tous les termes du membre de droite de (9.21) .
On a d'abord :

$$\|e^{-C_0t}\hat{P}_0[\hat{P}_0M^{\epsilon,r}w^\epsilon(0)-w^0]\|_{H^1(\Omega)}\leq M_0\|\hat{P}_0M^{\epsilon,r}w^\epsilon(0)-w^0\|_{L^2(\Omega)}\ . \tag{9.22}$$

Nous savons que

$$\max\{\sup_{\tau\leq 0}\|w^\epsilon(\tau)\|_{Y^\epsilon}\ ,\ \sup_{\tau\leq 0}\|w(\tau)\|_{H^1(\Omega)}\}\leq\alpha_1\ ,$$

ce qui nous donne

$$\sum_{i=1}^{3}\|M_iw_i^\epsilon(\tau)\|_{H^1(\Omega_i)}\leq\alpha_1\ .$$

Puisque, d'après les propositions 9.1 et 9.3(i),

$$\|\partial_{y_1}(M_iw_i^\epsilon)\|_{L^\infty(\Omega_i)}\leq\|M_iw_i^\epsilon\|_{H^2(\Omega_i)}\leq c\ , \qquad \text{pour } i=1,3\ ,$$

on obtient facilement des définitions de $\rho_{i\epsilon^r}$, $i=1,3$, que

$$\|\rho_{i\epsilon^r}\|_{H^1(\Omega_i)}\leq c\,\epsilon^{r/2}\ , \quad i=1,3\ . \tag{9.23}$$

D'autre part , le Lemme 4.3(ii) nous dit que

$$|\rho_i^*|\leq c\,(\epsilon^{(3-p)/4}+\epsilon^r)\ , \quad i=1,3\ , \tag{9.24}$$

ce qui nous donne finalement

$$\sup_{\tau\leq 0}\|M^{\epsilon,r}w^\epsilon(\tau)\|_{H^1(\Omega)}\leq\alpha_1+c\,(\epsilon^{r/2}+\epsilon^{(3-p)/4})\ .$$

Du lemme 8.8, il vient

$$\|\hat{F}_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon(\tau))-\hat{F}_0(w(\tau))\|_{L^2(\Omega)}\leq[\alpha_1+c\,(\epsilon^{r/2}+\epsilon^{(3-p)/4})]\cdot$$

$$\cdot c_1[\alpha_1+c\,(\epsilon^{r/2}+\epsilon^{(3-p)/4})]\|z(\tau)\|_{H^1(\Omega)}\ , \quad \forall\,\tau\leq 0\ .$$

Si on tient compte du choix de α_1, et des inégalités du lemme 8.7, on obtient pour ϵ assez petit

$$\|-\int_t^0 e^{-C_0(t-\tau)}\hat{P}_0[\hat{F}_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon(\tau))-\hat{F}_0(w(\tau))]\,d\tau+\int_{-\infty}^{t} e^{-C_0(t-\tau)}(I-\hat{P}_0)[\hat{F}_0(M^{\epsilon,r}w^\epsilon(\tau))-$$

$$-\hat{F}_0(w(\tau))]\,d\tau\|_{H^1(\Omega)}\leq\frac{1}{2}\sup_{\tau\leq 0}\|z(\tau)\|_{H^1(\Omega)}\ . \tag{9.25}$$

Il reste à estimer les normes de K_i^ϵ , $i = 1, 2, 3$, dans $L^2(\Omega_i)$.
On utilise le fait que

$$|f(\varphi_i^\epsilon + w_i^\epsilon) - f(\varphi_i + M_i^{\epsilon,r} w_i^\epsilon)| \leq c\,[1 + |\varphi_i^\epsilon|^{\gamma_1} + |w_i^\epsilon|^{\gamma_1} + |\varphi_i|^{\gamma_1} +$$

$$+|M_i^{\epsilon,r} w_i^\epsilon|^{\gamma_1}] \cdot [(\varphi_i^\epsilon - \varphi_i) + (w_i^\epsilon - M_i w_i^\epsilon) - \rho_{i\epsilon^r}(w^\epsilon)]\ , \quad i = 1, 2, 3\ .$$

On applique l'inégalité de Hölder avec les exposants p_3 , $q_3 > 2$, tels que $\frac{1}{p_3} + \frac{1}{q_3} = \frac{1}{2}$, où on choisit q_3 assez proche de 2 . On obtient :

$$\|f(\varphi_i^\epsilon + w_i^\epsilon) - f(\varphi_i + M_i^{\epsilon,r} w_i^\epsilon)\|_{L^2(Q_i)} \leq c_{q_3}[\|\varphi_i^\epsilon - \varphi_i\|_{L^{q_3}(Q_i)} +$$

$$+\|w_i^\epsilon - M_i w_i^\epsilon\|_{L^{q_3}(Q_i)} + \|\rho_{i\epsilon^r}(w^\epsilon)\|_{L^{q_3}(Q_i)}]\ , \quad i = 1, 2, 3\ . \tag{9.26}$$

En utilisant les majorations (9.23) et (9.24) de $\rho_{i\epsilon^r}(w^\epsilon)$ et le lemme 3.5 où q_3 est choisi de façon adéquate, on obtient

$$\|-\int_0^1 f(\varphi_i^\epsilon + w_i^\epsilon) dy_2 + f(\varphi_i + M_i^{\epsilon,r} w_i^\epsilon)\|_{L^2(\Omega_i)} \leq c\,(\epsilon^{r/2} + \epsilon^{(3-p)/4} + \epsilon^{(p-1)/2})\ , \quad i = 1, 2, 3\ . \tag{9.27}$$

D'autre part , nous avons immédiatement

$$\|\int_0^1 f(\varphi_i^\epsilon)\, dy_2 - f(\varphi_i)\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/4})\ , \quad i = 1, 2, 3\ . \tag{9.28}$$

Il nous reste à majorer les trois derniers termes de K_i^ϵ (voir (9.17)) .
On considère d'abord le cas i = 1,3.

Il est clair que

$$|\frac{d}{dt}\partial_{y_1}(M_1 w_1^\epsilon)(a,\,t)| \leq c_\sigma \|\frac{d}{dt}(M_1 w_1^\epsilon)\|_{H^{2\sigma}(\Omega_1)}\ , \qquad \text{avec } \sigma > \frac{3}{4}\ .$$

En utilisant les Propositions 9.3(i) et 9.2 , on déduit

$$|\frac{d}{dt}\partial_{y_1}(M_1 w_1^\epsilon)(a,\,t)| \leq c\ . \tag{9.29}$$

Puisque (9.29) est aussi valable si a est remplacé par b, on a montré que

$$\|\frac{d}{dt}\rho_{i\epsilon^r}(w^\epsilon)\|_{L^2(\Omega_i)} \leq c\,\epsilon^{3r/2}\ , \quad i = 1, 3\ . \tag{9.30}$$

D'autre part, puisque $w^\epsilon = \tilde{w}^\epsilon \circ \theta$, et que $\partial_{y_1}\tilde{w}_1^\epsilon(a,\cdot) = 0$ sur $(\epsilon^p,\,\epsilon)$, on peut faire le calcul suivant:

$$\partial_{y_1}(M_1 w_1^\epsilon)(a) = \int_0^1 \partial_{y_1} w_1^\epsilon(a,\,y_2)\, dy_2 = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \partial_{y_1}\tilde{w}_1^\epsilon(a,\,z_2)\, dz_2 = \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon^p} \partial_{y_1}\tilde{w}_2^\epsilon(a,\,z_2)\, dz_2\ ,$$

ce qui nous donne

$\partial_{y_1}(M_1 w_1^\epsilon)(a) = \epsilon^{p-1}\partial_{y_1}(M_2 w_2^\epsilon)(a)$, et donc

$$|\partial_{y_1}(M_1 w_1^\epsilon)(a)| \leq c_\sigma \epsilon^{p-1} \|M_2 w_2^\epsilon\|_{H^{2\sigma}(\Omega_2)} , \quad \forall\, \sigma > \frac{3}{4} . \tag{9.31}$$

Le même inégalité est vraie au point b . De la majoration uniforme de w^ϵ dans $D(A_\epsilon)$ (voir Proposition 9.1) et de la Proposition 9.3(ii) , on obtient

$$\|M_2 w_2^\epsilon\|_{H^2(\Omega_2)} \leq c\, \epsilon^{(1-p)/2} .$$

D'autre part , on sait que

$$\|M_2 w_2^\epsilon\|_{H^1(\Omega_2)} \leq c ,$$

ce qui nous donne par interpolation

$$\|M_2 w_2^\epsilon\|_{H^{2\sigma}(\Omega_2)} \leq c\, \epsilon^{(1-p)(2\sigma-1)/2} , \qquad \text{pour } \sigma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] . \tag{9.32}$$

De (9.31), (9.32) et des expressions de $\rho_{i\epsilon^r}$, $i = 1, 3$, il s'ensuit que

$$\|\partial_{y_1 y_1} \rho_{i\epsilon^r}\|_{L^2(\Omega_i)} \leq c_\sigma \epsilon^{(p-1)(3/2-\sigma)-r/2} , \quad i = 1, 3 . \tag{9.33}$$

Il faudra donc choisir un nombre réel r qui satisfait à la condition

$$r \in (0,\, (p-1)(3-2\sigma)) , \qquad \text{où on a fixé } \sigma \in (\frac{3}{4}, 1] . \tag{9.34}$$

Enfin, on a

$$\|\rho_{i\epsilon^r}\|_{L^2(\Omega_i)} \leq c\, \epsilon^{3r/2} , \; i = 1, 3 , \tag{9.35}$$

ce qui avec les relations (9.27) , (9.28) , (9.30) et (9.33) nous donne

$$\|K_i^\epsilon\|_{L^2(\Omega_i)} \leq c_\sigma \left[\epsilon^{r/2} + \epsilon^{(3-p)/4} + \epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(p-1)(3/2-\sigma)-r/2}\right] , \quad i = 1, 3 . \tag{9.36}$$

Maintenant il reste à majorer les trois derniers termes du membre de droite de (9.17) , pour $i = 2$.
Observons d'abord que $\partial_{y_1 y_1} \rho_{2\epsilon^r} = 0$.
La relation (9.24) nous permet de déduire

$$\|\rho_{2\epsilon^r}\|_{L^2(\Omega_2)} \leq c\,(\epsilon^{(3-p)/4} + \epsilon^r) . \tag{9.37}$$

Pour majorer $\frac{d}{dt}\rho_{2\epsilon^r}$ dans la norme de $L^2(\Omega_2)$, il suffit de majorer $|\frac{d}{dt}\rho_1^*|$ et $|\frac{d}{dt}\rho_3^*|$.
On a

$$\frac{d}{dt}\rho_1^* = (M_1 \frac{dw_1^\epsilon}{dt})(a, t) - (M_2 \frac{dw_2^\epsilon}{dt})(a, t) - \frac{1}{2}\epsilon^r \frac{d}{dt}\partial_{y_1}(M_1 w_1^\epsilon)(a, t) . \tag{9.38}$$

Puisque $\frac{dw^\epsilon}{dt} \in X^\epsilon$, on peut appliquer le Lemme 4.3(ii) , et on obtient

$$|(M_1 \frac{dw_1^\epsilon}{dt})(a, t) - (M_2 \frac{dw_2^\epsilon}{dt})(a, t)| \leq c\, \epsilon^{(3-p)/4} \|\frac{dw_1^\epsilon}{dt}\|_{X_1^\epsilon} .$$

De la Proposition 9.2 appliquée avec $\sigma = \frac{1}{2}$, on tire

$$|(M_1 \frac{dw_1^\epsilon}{dt})(a, t) - (M_2 \frac{dw_2^\epsilon}{dt})(a, t)| \leq c\, \epsilon^{(3-p)/4} .$$

En utilisant aussi la majoration (9.29) , on déduit de (9.38) que

$$|\frac{d}{dt} \rho_1^*| \leq c\,(\epsilon^{(3-p)/4} + \epsilon^r) .$$

De même pour $\frac{d}{dt}\rho_3^*$, ce qui nous donne

$$\|\frac{d}{dt} \rho_{2\epsilon^r}\|_{L^2(\Omega_2)} \leq c\,(\epsilon^{(3-p)/4} + \epsilon^r) . \tag{9.39}$$

Finalement , en utilisant (9.27) , (9.28) , (9.37) et (9.39) , on obtient

$$\|K_2^\epsilon\|_{L^2(\Omega_2)} \leq c\,(\epsilon^{r/2} + \epsilon^{(3-p)/4} + \epsilon^{(p-1)/2}) , \tag{9.40}$$

ce qui finit la majoration de K^ϵ .

Des inégalités (9.36) et (9.40) et du lemme 8.7, on déduit que

$$\| - \int_t^0 e^{-C_0(t-\tau)} \hat{P}_0 K^\epsilon(\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^t e^{-C_0(t-\tau)} (I - \hat{P}_0) K^\epsilon(\tau)\, d\tau \|_{H^1(\Omega)} \leq c\, \epsilon^{\sigma_2} ,$$

$$\text{pour } t \leq 0 ,$$

où σ_2 est une constante strictement positive .

Finalement, de (9.21) , (9.22) , (9.25) et l'inégalité ci-dessus, on déduit le résultat.

Le théorème ci-dessus nous permet d'énoncer le résultat final de ce paragraphe:

Théorème 9.5. *Il existe des constantes strictement positives c , σ_3 et ϵ_3 , telles qu'on a*

$$dist_{L^2(Q)}(W_0^u(0, \mathcal{U}_0) , W_\epsilon^u(0, \tilde{\mathcal{U}}_\epsilon)) \leq c\, \epsilon^{\sigma_3}$$

pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_3)$.

Preuve. Soit $z \in W_0^u(0, \mathcal{U}_0)$. Il existe un $\beta \in D_0$ tel que $z = \mathcal{I}_0(\beta)$, et $\hat{P}_0 z = \sum_{j=1}^{m_0} \beta_j \hat{V}^j$.
Soit $w^{0\epsilon} = \eta\, \hat{P}_\epsilon \hat{P}_0 z = \sum_{j=1}^{m_0} \beta_j^\epsilon \hat{V}_\epsilon^j$ où η sera convenablement choisi.
Il est clair que $\hat{P}_0 M \hat{P}_0 z = M \hat{P}_0 z = \hat{P}_0 z$.
Nous pouvons écrire

$$\|w^{0\epsilon}\|_{Y^\epsilon} \leq \eta [\|\hat{P}_\epsilon \hat{P}_0 z - \hat{P}_0 M \hat{P}_0 z\|_{Y^\epsilon} + \|\hat{P}_0 z\|_{H^1(\Omega)}] ,$$

et du Lemme 7.15(iii) appliqué pour $q = 2$, on tire

$$\|\hat{P}_\epsilon \hat{P}_0 z - \hat{P}_0 M \hat{P}_0 z\|_{Y^\epsilon} \leq c\,(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2}) \|\hat{P}_0 z\|_{H^1(\Omega)} ,$$

ce qui nous donne

$$\|w^{0\epsilon}\|_{Y^\epsilon} \leq \eta[1 + c(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2})]\|\hat{P}_0 z\|_{H^1(\Omega)}] \, .$$

Puisque $\|\hat{P}_0 z\|_{H^1(\Omega)} \leq \alpha_0$, on peut choisir $\eta = [1 + c(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2})]^{-1}$, et on obtient

$\|w^{0\epsilon}\|_{Y^\epsilon} \leq \alpha_0$,

ce qui nous permet d'affirmer qu'il existe $w^\epsilon \in W^u_\epsilon(0, \tilde{\mathcal{U}}_\epsilon)$, tel que $\mathcal{I}_\epsilon(\beta^\epsilon) = w^\epsilon$ et $\hat{P}_\epsilon w^\epsilon = w^{0\epsilon}$.

Il reste à majorer $w^\epsilon - z$ dans la norme de $L^2(Q)$, et pour ce faire, on commence par l'inégalité

$$\|w^\epsilon - z\|_{L^2(Q)} \leq \|w^\epsilon - Mw^\epsilon\|_{L^2(Q)} + \|Mw^\epsilon - M^{\epsilon,r}w^\epsilon\|_{L^2(Q)} + \|M^{\epsilon,r}w^\epsilon - z\|_{L^2(Q)} \, . \tag{9.41}$$

En utilisant le fait que w^ϵ est borné dans la norme de Y^ϵ indépendemment de ϵ , et le lemme 3.4(ii) , on obtient

$$\|w^\epsilon - Mw^\epsilon\|_{L^2(Q)} \leq c\,\epsilon \, . \tag{9.42}$$

Puisque, d'après les propositions 9.1 et 9.3(i), $M_i w_i^\epsilon$ est borné dans la norme de $H^2(\Omega_i)$ indépendement de ϵ , $i = 1, 3$, on déduit facilement de la définition de $M^{\epsilon,r}$ que

$$\|M^{\epsilon,r}w^\epsilon - Mw^\epsilon\|_{L^2(Q)} \leq c(\epsilon^r + \epsilon^{(3-p)/4}) \, . \tag{9.43}$$

Pour majorer le dernier terme du membre de droite de (9.41) , on applique le Théorème 9.4. On a alors

$$\|M^{\epsilon,r}w^\epsilon - z\|_{L^2(Q)} \leq c[\epsilon^{\sigma_2} + \|\hat{P}_0 M^{\epsilon,r}w^\epsilon - \hat{P}_0 z\|_{L^2(\Omega)}] \, . \tag{9.44}$$

En utilisant (9.43) et le fait que $\hat{P}_0 \in \mathcal{L}(L^2(\Omega) \, , \, L^2(\Omega))$, on obtient

$$\|\hat{P}_0(M^{\epsilon,r} - M)w^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\epsilon^r + \epsilon^{(3-p)/4}) \, . \tag{9.45}$$

On écrit

$$\hat{P}_0 Mw^\epsilon - \hat{P}_0 M\hat{P}_\epsilon w^\epsilon = \hat{P}_0 M(\hat{P}_0 Mw^\epsilon - \hat{P}_\epsilon w^\epsilon) \, .$$

En utilisant le Lemme 7.15(i) et (iii) avec $q = 2$, on peut écrire

$$\|\hat{P}_0 Mw^\epsilon - \hat{P}_0 M\hat{P}_\epsilon w^\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2}) \, . \tag{9.46}$$

D'autre part , on a le calcul suivant :

$$\hat{P}_0 M\hat{P}_\epsilon w^\epsilon - \hat{P}_0 z = \eta\hat{P}_0 M\hat{P}_\epsilon\hat{P}_0 z - \hat{P}_0 z = (\eta - 1)\hat{P}_0 M\hat{P}_\epsilon\hat{P}_0 z + \hat{P}_0 M(\hat{P}_\epsilon\hat{P}_0 z - \hat{P}_0 M\hat{P}_0 z) \, .$$

Du choix de η , il résulte

$$|\eta - 1| \leq c\,(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2}) \, ,$$

et en utilisant toujours le Lemme 7.15 , on déduit que

$$\|\hat{P}_0 M \hat{P}_\epsilon w^\epsilon - \hat{P}_0 z)\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,(\epsilon^{(p-1)/2} + \epsilon^{(3-p)/2}) \, ,$$

ce qui avec (9.45) et (9.46) nous donne

$$\|\hat{P}_0 M^{\epsilon,r} w^\epsilon - \hat{P}_0 z)\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,(\epsilon^r + \epsilon^{(3-p)/4} + \epsilon^{(p-1)/2}) \, . \tag{9.47}$$

Finalement , de (9.41) , (9.42) , (9.43) , (9.44) et (9.47) , on obtient le résultat .

Remarque . On peut obtenir une estimation de la semi-distance entre les variétés instables locales dans la norme de X^ϵ , en utilisant le théorème 9.5 et le théorème 4.5 .

9.3 Résultat partiel de semicontinuité inférieure des attracteurs .

On voit facilement que la restriction de l'attracteur $\mathcal{A}$ de $S(t)$ sur Ω_i
(c'est à dire l'ensemble $\{\psi_i \in H^1(\Omega_i)$, tel qu'il existe $\psi \in \mathcal{A}$, $\psi_i = \psi/\Omega_i\}$)
coincide avec l'attracteur $\mathcal{A}_i$ de $S_i(t)$, pour $i = 1, 3$.
L'affirmation ci-dessus est justifiée par le fait que la restriction de l'attracteur $\mathcal{A}$ sur Ω_i a les propriétés d'un attracteur global pour le semigroupe $S_i(t)$ dans $H^1(\Omega_i)$, c'est à dire la compacité, l'invariance, et le fait qu'il attire les bornés. Les deux dernières propriétés sont faciles à vérifier puisque $(S(t)v)_i = S_i(t)v_i$, $i = 1, 3$. On utilise finalement l'unicité de l'attracteur global.

On pose aussi $\mathcal{A}_i^\epsilon = \mathcal{A}^\epsilon / Q_i$.

On énonce maintenant le résultat partiel de semicontinuite inférieure :

Théorème 9.6. *$dist_{X_i^\epsilon}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i^\epsilon) \to 0$ pour $\epsilon \to 0$, $i = 1, 3$.*

Preuve . Nous faisons la preuve pour $i = 1$, pour $i = 3$ elle sera similaire. Soit $\eta > 0$ arbitraire . Puisque $\mathcal{A}_1$ est compact , on peut trouver un ensemble fini $\{v_1^1, \,..v_1^{N_\eta}\}$ inclus dans $\mathcal{A}$, tel que

$$\cup_{k=1}^{N_\eta} B_{H^1(\Omega_1)}(v_1^k \, , \frac{\eta}{2}) \supset \mathcal{A}_1 \, .$$

Puisque $S_1(t)$ est un système gradient , l'attracteur est composé de l'union finie des ensemble instables des points d'équilibre de S_1 .
Donc v_1^k peut s'écrire sous la forme

$$v_1^k = S_1(T^k)\psi_1^k \, ,$$

où ψ_1^k est un point appartenant à la variété instable locale associé à un point d'équilibre φ_1^k de $S_1(t)$.

La proposition 2.21 nous dit qu'il existe $\varphi^k \in E_0$, tel que $\varphi_1^k = \varphi^k/\Omega_1$. On va utiliser toutes les notations des sections 6 à 9 avec $\varphi = \varphi^k$.

Nous avons : $\psi_1^k = \varphi_1^k + \hat{\psi}_1^k$, avec

$$\hat{\psi}_1^k = \mathcal{I}_{01}(\beta)$$

où β est un vecteur m_{01} - dimensionnel, et où $\mathcal{I}_{01}$ est donné dans le théorème 8.9. (Remarquons qu'on peut choisir β aussi petit qu'il nous convient).
D'autre part, soit $\tilde{\beta} \in I\!R^{m_0}$, de sorte que

$$\sum_{j=1}^{m_0} \tilde{\beta}_j \hat{V}^j = \hat{P}_0 \tilde{w} ,$$

où $\tilde{w}$ est une fonction définie sur Ω, telle que $\tilde{w}/\Omega_1 = \sum_{j=1}^{m_{01}} \beta_j \hat{V}_1^j$, $\tilde{w}/\Omega_3 = 0$ et $\tilde{w}/\Omega_2 = \mathcal{R}(\sum_{j=1}^{m_{01}} \beta_j \hat{V}_1^j \ , \ 0)$.
On pose $\hat{\psi}^k = \mathcal{I}_0(\tilde{\beta})$. Nous savons que $\hat{\psi}_1^k = w_1(0)$ et $\hat{\psi}^k = w(0)$, où $w_1(t)$, $t \leq 0$ est la solution unique d'une équation intégrale, comme au théorème 8.9, et de même $w(t)$, $t \leq 0$. Mais l'équation intégrale qui donne $w_1(t)$ est exactement la réstriction sur Ω_1 de l'équation intégrale sur Ω, qui donne $w(t)$, donc $w_1(t) = w(t)/\Omega_1$, ce qui implique $\hat{\psi}_1^k = \hat{\psi}^k/\Omega_1$.
Il résulte que $\psi^k = \varphi^k + \hat{\psi}^k$ est un élément de la variété instable locale de $S(t)$ autour de φ^k , et $\psi_i^k = \psi^k/\Omega_i$.
Il s'ensuit des théorèmes 9.5 et 6.13 , qu'il existe un élément $\psi^{\epsilon k} \in \mathcal{A}^\epsilon$, tel que

$$\|\psi^k - \psi^{\epsilon k}\|_{L^2(Q)} \leq c\,\epsilon^{\sigma_3} , \qquad \text{avec } \sigma_3 > 0 .$$

On applique maintenant le théorème 4.5 , et on obtient

$$\|S^\epsilon(T^k)(\psi^{\epsilon k}) - S(T^k)\psi^k\|_{X^\epsilon} \leq c(T^k)\frac{1}{T^k}\,\epsilon^{\sigma_3} ,$$

ce qui implique qu'il existe un $\bar{\epsilon}_k > 0$, tel que

$$dist_{X_1^\epsilon}(v_1^k\,, \mathcal{A}_1^\epsilon) \leq \frac{\eta}{2} , \quad \forall \epsilon \in (0,\ \bar{\epsilon}_k) .$$

Il résulte que si on pose $\bar{\epsilon} = \min\{\bar{\epsilon}_k \ , \ 1 \leq k \leq N_\eta\}$, alors pour tout $\epsilon \in (0,\ \bar{\epsilon})$, on a

$$dist_{X_1^\epsilon}(\mathcal{A}_1\,, \mathcal{A}_1^\epsilon) \leq \eta ,$$

et la preuve est finie .

Remarque . On peut obtenir une estimation de la distance dans la norme $\|\cdot\|_{X_i^\epsilon}$ de l'ordre de ϵ^σ, $0 < \sigma < 1$, mais c'est très technique.

10 Existence des variétées inertielles pour les semigroupes $S^\epsilon(t)$ et $S(t)$.

Le but de cette dernière section est d'utiliser les propriétés spectrales des opérateurs étudiés dans ce travail , pour montrer que les semigroupes $S^\epsilon(t)$ et $S(t)$ admettent des variétées inertielles.

On va faire ici l'hypothèse suivante :

(H7) $\quad G^0 \in H^1(\Omega)$.

10.1 L'écart spectral pour les opérateurs A_0 et A_ϵ .

Rappelons que les opérateurs A_{0i} , $i = 1, 2, 3$, sont des opérateurs positifs, autoadjoints et à inverse compact dans $L^2(\Omega)$.
On a noté l'ensemble des valeurs propres de A_{0i} par

$$VP(A_{0i}) = \{\mu_i^k \ , \ k = 1, 2, \ ..\} \ ,$$

où $\mu_i^1 < \mu_i^2 < ..$ est une suite croissante , qui tend vers $+\infty$.
Par convention, les nombres μ^k sont tous distincts.

Rappelons également que l'ensemble des valeurs propres de A_0 satisfait à

$$VP(A_0) = VP(A_{01}) \cup VP(A_{02}) \cup VP(A_{03}) \ ,$$

où les valeurs propres de A_{0i} sont donées dans (7.36).
On note par μ^k , $k = 1, 2, ...$ les valeurs propres distinctes de A_0 , rangées dans l'ordre croissant.
Nous avons le lemme suivant :

Lemme 10.1. *Il existe une constante strictement positive d_* , telle que pour tout $n_0 \in I\!N$, il existe $n \geq n_0$, tel que $\mu^{n+1} - \mu^n \geq d_* \sqrt{\mu^n}$.*

Preuve .
Supposons pour simplifier la démonstration que $a = \max\{a\, , b - a\, , 1 - b\}$.
On choisit $k_1 \in I\!N$, assez grand . Il est facile de voir que dans l'intervalle

$$I_{k_1} = [\alpha + \frac{k_1^2 \pi^2}{a^2} \ , \ \alpha + \frac{(k_1 + 1)^2 \pi^2}{a^2})$$

il existe au plus un élément $\alpha + \frac{k_2^2 \pi^2}{(b-a)^2}$ de $VP(A_{02})$, et au plus un élément $\alpha + \frac{k_3^2 \pi^2}{(1-b)^2}$ de $VP(A_{03})$.
Donc l'intervalle I_{k_1} est divisé en trois sous-intervals, au plus.
On considère le sous-intervalle le plus long, et on note μ^n et μ^{n+1} ses deux extrémités.
Un calcul élémentaire nous montre alors le résultat .

On note par μ_ϵ^k , $k = 1,2,...$ les éléments distinctes de $VP(A_\epsilon)$, rangés dans l'ordre croissant, c'est-à-dire

$VP(A_\epsilon) = \{\mu_\epsilon^k \text{ , } k = 1,2,...\}$.

Puisque les valeurs propres de A_0 sont les inverses des valeurs propres de B_0 , et que les valeurs propres de A_ϵ sont les inverses des valeurs propres de B_ϵ , il résulte du lemme 10.1 et du théorème 7.12 , le lemme suivant:

Lemme 10.2. *Pour tout $\zeta > 0$, il existe une constante $\epsilon_\zeta > 0$ assez petite , telle que pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_\zeta)$ il existe un élément $\mu_\epsilon^n \in VP(A_\epsilon)$, tel que*

$$\mu_\epsilon^n \geq \zeta \text{ , et } \mu_\epsilon^{n+1} - \mu_\epsilon^n \geq \frac{1}{2} d_* \sqrt{\mu_\epsilon^n} \text{ ,}$$

où d_* est la constante donnée dans le lemme 10.1.

10.2 Le théorème de Chow et Lu

On va énoncer ici dans un cadre général le Théorème de Chow et Lu ([5] pag 296) que nous allons utiliser dans la suite .

On fixe d'abord quelques notations qui n'ont rien à voir avec les notations faites tout au long de ce travail .

Soit X , Y , Z des espaces de Banach, et supposons qu'on a les injéction continue de X dans Y et de Y dans Z.

Soit $S(t)$ ($t \geq 0$) un semigroupe C^0 sur Z. On fait les hypothèses suivantes:

$(CL1)$ $Z = Z_1 \oplus Z_2$, où Z_1 et Z_2 sont des sous-espaces linéaires invariants par $S(t)$.

$(CL2)$ $P_iS(t) = S(t)P_i$, $i = 1,2$, où P_i est une projection de Z dans Z_i .

$(CL3)$ P_iX et P_iY $(i = 1,2)$ sont invariantes par $S(t)$, et $S(t)Y \subseteq X$ pour $t > 0$.

$(CL4)$ $S(t)$ peut s'étendre à un groupe sur Z_1 .

(CL5) Il existe des constantes α , β , γ , η , M , et M^* telles que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 \leq \gamma < 1$, $M \geq 1$, $M^* \geq 0$, et

$$\|e^{-\eta t}S(t)P_1y\|_X \leq Me^{\alpha t}\|y\|_Y \text{ , pour } t \leq 0 \text{ , } y \in Y \text{ ,} \tag{10.1}$$

$$\|e^{-\eta t}S(t)P_2x\|_X \leq Me^{-\beta t}\|x\|_X \text{ , pour } t \geq 0 \text{ , } x \in X \text{ ,} \tag{10.2}$$

$$\|e^{-\eta t}S(t)P_2y\|_X \leq (Mt^{-\gamma} + M^*)e^{-\beta t}\|y\|_Y \text{ , pour } t > 0 \text{ , } y \in Y \text{ .} \tag{10.3}$$

On définit la constante

$$K(\alpha,\beta,\gamma) = M\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2-\gamma}{1-\gamma}\,\beta^{-1+\gamma}\right) + M^*\frac{1}{\beta} \text{ .} \tag{10.4}$$

Finalement, si $F \in C^k(X,Y)$, nous considérons l'équation intégrale

$$x(t) = S(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} S(t-s)F(x(s))\, ds \text{ ,} \tag{10.5}$$

où $x(t)$ est une application d'un intervalle $J \subset R$ dans X.
Pour $x_0 \in X$, on note $x(t, t_0)$ une solution de (10.5) (c'est-à-dire une application continue de J dans X satisfaisant à (10.5)), qui est égale à x_0 en $t = t_0$.
Le théorème de Chow et Lu est le suivant :

Théorème 10.3. *Soit $\eta < 0$. Supposons que les conditions (CL1) à (CL5) sont satisfaites. Si $F \in C^k(X,Y)$, $\beta + (k-1)\eta > 0$, et*

$$K(\alpha, \beta + (k-1)\eta, \gamma)(Lip\ F) < 1\ , \tag{10.6}$$

alors il existe une variété invariante $\mathcal{M}$ de classe C^k , pour l'équation définie par (10.5) , et $\mathcal{M}$ satisfait à :
(i) $\mathcal{M} = \{x_0 \ / \ x(t, x_0)$ est défini pour tout $t \in I\!R^-$ et
$P_2x(t, x_0) \in C^0(I\!R^-, X)\}$, et
(ii) $\mathcal{M} = \{\xi + h(\xi) \ / \ \xi \in P_1X\}$,
où $h : P_1X \to P_2X$ est une application de classe C^k .
En outre , si nous supposons que $k \geq 1$, $K(\alpha,\beta,\gamma)(Lip\ F) < 1$, et

$$\frac{MK(\alpha, \beta, \gamma)Lip\ (F)}{1 - K(\alpha, \beta, \gamma)Lip\ (F)} < 1\ , \tag{10.7}$$

alors pour toute solution $x(t, x_0)$ de (10.5) sur $[0, \infty)$, il existe un élément $x_0^* \in \mathcal{M}$ unique, tel que

$$\sup_{t \geq 0} e^{-\eta t} \|x(t, x_0) - x(t, x_0^*)\|_X < +\infty\ . \tag{10.8}$$

Remarque . L'énonce du Théorème 5.1. de [5] affirme qu'il est nécessaire que F soit de classe C^1 de X dans Y.
Mais la démonstration du théorème n'utilise pas le fait que F soit de classe C^1 . Il suffit que $F \in C^{0,1}(X,Y)$ (c'est-à-dire , conformément aux notations utilisées en [5] ,

$$F \in C^0(X,Y)\ , \quad \sup_{x \in X} \|F(x)\|_Y < \infty\ , \quad \text{et} \ \sup_{x_1, x_2 \in X} \frac{\|F(x_1) - F(x_2)\|_Y}{\|x_1 - x_2\|_X} < \infty \ )$$

(donc F soit uniformément lipschitzienne) . La variété inertielle sera de classe $C^{0,1}$, seulement .

10.3 Variété inértielle pour $S(t)$.

Nous voulons montrer l'existence d'une variété inértielle pour le semigroupe $S(t)$, dans l'espace $H^1(\Omega)$.
Dans ce but, comme d'habitude, on modifie la partie non-lineaire de l'équation qui donne le semigroupe $S(t)$.
Nous savons que l'attracteur $\mathcal{A}$ de $S(t)$ est borné dans la norme de $H^1(\Omega)$.

Soit $l_1 = \sup\{\|\psi\|_{H^1(\Omega)}\ ,\ \psi \in \mathcal{A}\}$.
On considère une fonction $\xi \in C^\infty(R,\ [0,1])$ de sorte que

$$\xi(s) = \begin{cases} 1 & \text{pour } s \in (0,\ 1) \\ \\ 0 & \text{pour } s \in (2,\ \infty)\ . \end{cases}$$

On pose $F_0 : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$, avec

$$F_0(v) = -\xi\left(\frac{\|v\|^2_{H^1(\Omega)}}{4l_1^2}\right)[f(v) + G^0]\ . \tag{10.9}$$

Nous nous proposons de montrer l'existence d'une variété inértielle pour l'équation

$$\frac{du}{dt} + A_0 u = F_0(u)\ ,$$

dont la forme intégrale est

$$u(t) = e^{-A_0(t-t_0)}u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A_0(t-s)}F_0(u(s))\,ds\ .$$

Nous montrons dans la suite que les hypothèses du Théorème 10.3 sont satisfaites , où on choisit :

$$Z = L^2(\Omega)$$

$$Z_1 = P_0^n L^2(\Omega)\ ,\ \text{et}\ Z_2 = (I - P_0^n)L^2(\Omega)$$

$$P_1 = P_0^n\ ,\ \text{et}\ P_2 = I - P_0^n$$

$$S(t) = e^{-A_0 t}$$

$$X = Y = H^1(\Omega)$$

$$F = F_0\ ,\qquad \text{où } F_0 \text{ est donné au (10.9),}$$

et où n est un entier bien choisi.
Les hypothèses (CL1)-(CL4) sont évidement satisfaites.
Il est facile de voir que $F_0 \in C^1(H^1(\Omega),\ H^1(\Omega))$, avec

$$DF_0(v)U = -\frac{1}{4l_1^2}\xi'\left(\frac{\|v\|^2_{H^1(\Omega)}}{4l_1^2}\right)(v,\ U)_{H^1(\Omega)}[f(v) + G^0] - \xi\left(\frac{\|v\|^2_{H^1(\Omega)}}{4l_1^2}\right)f'(v)U\ .$$

En outre , on a

$$\sup_{v\in H^1(\Omega)} \|DF_0(v)\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega),H^1(\Omega))} + \sup_{v\in H^1(\Omega)} \|F_0(v)\|_{H^1(\Omega)} \le c(l_1)\ ,$$

où $c(l_1)$ est une constante .

On a alors

$$Lip(F_0) \le c(l_1)\ . \tag{10.10}$$

Dans la suite on va montrer que l'hypothèse (CL5) est satisfaite, et trouver des constantes α , β , γ , η , M et M^* adéquates.

Nous avons la proposition suivante qui est très facile à démontrer , en utilisant la décomposition sur la base orthonormale des vecteurs propres de A_{0i}.

Proposition 10.4. *Pour $i = 1, 2, 3$ et pour tout $d_1 \geq d_2 \geq 0$, on a*

$$\|(A_{0i}-\lambda)^{-1}v_i\|_{D(A_{0i}^{d_1})} \leq \sup_{k\geq 1} \frac{(\mu_i^k)^{d_1-d_2}}{|\lambda - \mu_i^k|} \|v_i\|_{D(A_{0i}^{d_2})} , \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\backslash VP(A_{0i}) \text{ , et } v \in D(A_{0i}^{d_2}) .$$

On va obtenir dans la suite une estimation utile de la résolvante de A_0 .

Proposition 10.5. *Il existe une constante strictement positive c , telle que*

$$\|(A_0 - \lambda)^{-1}v\|_{H^1(\Omega)} \leq c \sup_{k\geq 1} \frac{1}{|\lambda - \mu^k|} \{1 + \sup_{k\geq 1} \frac{(\mu^k)^{1/2}}{|\lambda - \mu^k|}\} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} ,$$

$\forall\, \lambda \in \mathbb{C}\backslash VP(A_{0i})$ *, et* $v \in H^1(\Omega)$.

Preuve . Pour $\lambda \in \mathbb{C}\backslash VP(A_{0i})$ et $v \in H^1(\Omega)$, soit u la solution de l'équation

$$A_0 u - \lambda u = v . \tag{10.11}$$

Si on restreint l'égalité (10.1) à Ω_i , $i = 1, 3$, on a

$$A_{0i}u_i - \lambda u_i = v_i . \tag{10.12}$$

En utilisant la Proposition 10.4 d'abord avec $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}$, et ensuite avec $d_1 = 1$ et $d_2 = \frac{1}{2}$, on tire

$$\|u_i\|_{H^1(\Omega_i)} \leq \sup_{k\geq 1} \frac{1}{|\lambda - \mu^k|} \|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{10.13}$$

et

$$\|u_i\|_{H^2(\Omega_i)} \leq \sup_{k\geq 1} \frac{(\mu_i^k)^{1/2}}{|\lambda - \mu^k|} \|v\|_{H^1(\Omega)} . \tag{10.14}$$

On restreint l'équation (10.11) à Ω_2 , et on écrit , comme on a fait très souvent dans ce travail ,

$u_2 = \bar{u}_2 + \mathcal{R}(u_1, u_3)$, où $\bar{u}_2 \in H_0^1(\Omega_2)$.

Après un calcul qui est évident, en tenant compte de (10.12) , on obtient

$$A_{02}\bar{u}_2 - \lambda\bar{u}_2 = v_2 - \sum_{i\neq 2} \rho_i v_i(2a_i - y_1) - 2\sum_{i\neq 2} \rho_i' \partial_{y_1} u_i(2a_i - y_1) + \sum_{i\neq 2} \rho_i'' u_i(2a_i - y_1) .$$

En appliquant de nouveau la propoposition 10.4 avec $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}$, on a

$$\|\bar{u}_2\|_{H_0^1(\Omega_2)} \leq c \sup_{k\geq 1} \frac{1}{|\lambda - \mu_2^k|} [\|v\|_{H^1(\Omega)} + \sum_{i\neq 2} \|u_i\|_{H^2(\Omega_i)}] ,$$

ce qui avec (10.14) et (10.13) finit la preuve.

Dans la suite on cherche à obtenir des estimations pour
$e^{-A_0 t} P_0^n v$, si $t \leq 0$,
et pour
$e^{-A_0 t}(I - P_0^n)v$, si $t \geq 0$.

Soit dans le plan complexe les points suivants :
$A_1 = \frac{\alpha}{2} + i\frac{\alpha}{2}$, $D_1 = \frac{\alpha}{2} - i\frac{\alpha}{2}$,
$B_1 = \mu^n + (\mu^n)^{1/2-\delta} + i(\mu^n + (\mu^n)^{1/2-\delta})$, $C_1 = \mu^n + (\mu^n)^{1/2-\delta} - i(\mu^n + (\mu^n)^{1/2-\delta})$
(voir figure 4) , où δ sera une constante réelle , positive , assez petite .

Il est clair que pour n assez grand , le polygone $A_1B_1C_1D_1$ noté Γ_1, entoure seulement les n premiers valeurs propres de A_0, puisque $\mu^n + (\mu^n)^{1/2-\delta} < \mu^{n+1}$.
On a alors

$$P_0^n v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} (\lambda I - A_0)^{-1} v \, d\lambda \tag{10.15}$$

et

$$e^{-A_0 t} P_0^n v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{-\lambda t} (\lambda I - A_0)^{-1} v \, d\lambda \, . \tag{10.16}$$

Proposition 10.6. *Pour tout $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, il existe un nombre naturel $n(\delta)$ et un réel positif c_δ telles que pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et $n \geq n(\delta)$, on a*

$$\int_{\Gamma_1} \|(\lambda I - A_0)^{-1} v\|_{H^1(\Omega)} \, d\lambda \leq c_\delta \, (\mu^n)^\delta \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Preuve . On va utiliser la Proposition 10.5. Il est évident que

$$\int_{[A_1 D_1]} \|(\lambda I - A_0)^{-1} v\|_{H^1(\Omega)} \, d\lambda \leq c \, \|v\|_{H^1(\Omega)} \, . \tag{10.17}$$

Sur le ségment $[A_1B_1]$ on voit immédiatement que

$$\sup_{k \geq 1} \frac{(\mu^k)^\sigma}{|\lambda - \mu^k|} \leq c \, |\lambda|^{\sigma - 1} \, , \qquad \text{pour } \sigma \in [0, 1)$$

(voir [6] , pag 922).
On peut écrire

$$\int_{[A_1 B_1]} \|(\lambda I - A_0)^{-1} v\|_{H^1(\Omega)} \, d\lambda \leq c \int_{[A_1 B_1]} |\lambda|^{-1}(1 + |\lambda|^{-1/2}) \, d\lambda \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq$$

$$\leq c \int_{[A_1 B_1]} |\lambda|^{-1} d\lambda \, \|v\|_{H^1(\Omega)} \, ,$$

et un calcul élémentaire nous donne

$$\int_{[A_1 B_1]} \|(\lambda I - A_0)^{-1} v\|_{H^1(\Omega)} \, d\lambda \leq c \ln(\mu^n) \|v\|_{H^1(\Omega)} \, . \tag{10.18}$$

Sur le segment $[B_1C_1]$ il est facile de voir que

$$\sup_{k \geq 1} \frac{(\mu^k)^\sigma}{|\lambda - \mu^k|} \leq c_\sigma \frac{(\mu^n)^\sigma}{|\lambda - \mu^n|} \, , \quad \forall \sigma \in [0, 1) \, , \, \forall \lambda \in [B_1 C_1]$$

pour n assez grand.
Grâce à la symetrie , il suffira de calculer l'intégrale sur le ségment $[B_1E_1]$, où $E_1 = \mu^n + (\mu^n)^{1/2-\delta} + 0 \cdot i$.
La majoration précédente et la Proposition 10.5 , nous donnent

$$\int_{[B_1E_1]} \|(\lambda I - A_0)^{-1} v\|_{H^1(\Omega)}\, d\lambda \le \{\int_{[B_1E_1]} \frac{1}{|\lambda - \mu^n|}\, d\lambda + (\mu^n)^{1/2} \int_{[B_1E_1]} \frac{1}{|\lambda - \mu^n|^2}\, d\lambda\} \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{10.19}$$

On pose $\lambda = \mu^n + (\mu^n)^{1/2-\delta} + i \cdot \zeta$, avec $\zeta \in [0,\, \mu^n + (\mu^n)^{1/2-\delta}]$.
On considère un point $F_1 \in [B_1E_1]$, avec $F_1 = \mu^n + (\mu^n)^{1/2-\delta} + i \cdot (\mu^n)^{1/2-\delta}$.
Chaque intégrale du membre de droite de (10.19) va s'écrire comme la somme de deux intégrales : sur $[B_1F_1]$ et sur $[F_1E_1]$.

Si $\lambda \in [B_1F_1]$ alors $\zeta \in [(\mu^n)^{1/2-\delta},\, \mu^n + (\mu^n)^{1/2-\delta}]$, et on va faire la majoration

$$\frac{1}{|\lambda - \mu^n|} \le \frac{1}{\zeta} \, .$$

Un calcul élémentaire nous donne alors

$$\int_{[B_1F_1]} \frac{1}{|\lambda - \mu^n|}\, d\lambda + (\mu^n)^{1/2} \int_{[B_1F_1]} \frac{1}{|\lambda - \mu^n|^2}\, d\lambda \le c\,[\ln(\mu^n) + (\mu^n)^{\delta}] \, . \tag{10.20}$$

Si $\lambda \in [F_1E_1]$, alors $\zeta \in (0,\, (\mu^n)^{1/2-\delta})$, et on fera la majoration

$$\frac{1}{|\lambda - \mu^n|} \le (\mu^n)^{\delta - 1/2} \, ,$$

et nous obtenons

$$\int_{[F_1E_1]} \frac{1}{|\lambda - \mu^n|}\, d\lambda + (\mu^n)^{1/2} \int_{[F_1E_1]} \frac{1}{|\lambda - \mu^n|^2}\, d\lambda \le c \cdot (\mu^n)^{\delta} \, . \tag{10.21}$$

Finalement les inégalitées (10.17) - (10.21) nous donnent le résultat .

En utilisant les représentations (10.15) et (10.16) , on déduit de la proposition précédente, le corollaire suivant:

Corollaire 10.7. *Pour tout* $\delta \in (0,\, \frac{1}{2})$ *, il existe* $n(\delta) \in \mathbb{N}$ *et* $c_\delta > 0$ *, telles que pour tout* $v \in H^1(\Omega)$ *et* $n \ge n(\delta)$ *, on a*

(*i*) $$\|P_0^n v\|_{H^1(\Omega)} \le c_\delta \cdot (\mu^n)^{\delta} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

(*ii*) $$\|e^{-A_0 t} P_0^n v\|_{H^1(\Omega)} \le c_\delta \cdot (\mu^n)^{\delta} e^{-[\mu^n + (\mu^n)^{1/2-\delta}]t} \|v\|_{H^1(\Omega)} \, , \; \forall t \le 0 \, .$$

On va considérer maintenant un autre contour dans le plan complexe.
Soit

$G_1 = \mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta} + i \cdot [\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]$
$H_1 = \mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta} - i \cdot [\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]$
$\Gamma_+ = \{G_1 + \zeta e^{(\pi/4)i} \, , \, \zeta \geq 0\}$
$\Gamma_- = \{H_1 + \zeta e^{-(\pi/4)i} \, , \, \zeta \geq 0\}$ (voir figure 4) ,
et soit finalement
$\Gamma_2 = [G_1 H_1] \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-$.
On a

$$e^{-A_0 t}(I - P_0^n)v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} e^{-\lambda t}(\lambda I - A_0)^{-1} v \, d\lambda \, . \tag{10.22}$$

Proposition 10.8. *Pour tout $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, il existe $n(\delta) \in N$ et $c_\delta > 0$ tels que pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et $n \geq n(\delta)$, on a*

(i) $$\| \int_{\Gamma_2} e^{-\lambda t}(\lambda I - A_0)^{-1} v \, d\lambda \|_{H^1(\Omega)} \leq c_\delta \cdot (\mu^{n+1})^\delta e^{-[\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]t} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\text{pour } t \geq \frac{1}{\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}}$$

et
(ii)
$$\| \int_{\Gamma_2} e^{-\lambda t}(\lambda I - A_0)^{-1} v \, d\lambda \|_{H^1(\Omega)} \leq c_\delta \cdot \left[(\mu^{n+1})^\delta + \ln \frac{1}{t} \right] \, e^{-[\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]t} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\text{pour } 0 < t \leq \frac{1}{\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}} \, .$$

Preuve . On applique la proposition 10.5.
Sur Γ_+ on utilise encore l'inégalité

$$\sup_{k \geq 1} \frac{(\mu^k)^\sigma}{|\lambda - \mu^k|} \leq c \, |\lambda|^{\sigma - 1} \qquad \text{pour } \sigma \in [0, 1) ,$$

ce qui implique

$$\int_{\Gamma_+} e^{-\lambda t} \|(\lambda I - A_0)^{-1} v\|_{H^1(\Omega)} \, d\lambda \leq c \int_{\Gamma_+} e^{-\lambda t} \frac{1}{|\lambda|} \, d\lambda \, . \tag{10.23}$$

On fait le changement de variable :

$$\lambda = \mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta} + i \cdot [\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}] + \frac{\zeta}{t} + i \frac{\zeta}{t} \text{ , avec } \zeta \in [0, \infty) \, .$$

Un calcul élémentaire nous donne

$$\int_{\Gamma_+} e^{-\lambda t} \frac{1}{|\lambda|} \, d\lambda \leq c \, e^{-[\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]t} \int_0^\infty e^{-\zeta} \frac{1}{\zeta + [\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]t} \, d\zeta \, ,$$

ce qui avec (10.23) nous permet d'écrire

$$\int_{\Gamma_+} e^{-\lambda t} \|(\lambda I - A_0)^{-1} v\|_{H^1(\Omega)} \, d\lambda \leq c \, e^{-[\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]t} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\text{pour } t \geq \frac{1}{\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}} , \tag{10.24}$$

et

$$\int_{\Gamma_+} e^{-\lambda t} \|(\lambda I - A_0)^{-1} v\|_{H^1(\Omega)} \, d\lambda \leq c(1 + \ln \frac{1}{t}) \, e^{-[\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]t} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\text{pour } 0 < t \leq \frac{1}{\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}} . \tag{10.25}$$

On procède de même sur Γ_- .

D'autre part , pour calculer l'intégrale sur $[G_1 H_1]$, on utilisera la majoration évidente

$$\sup_{k \geq 1} \frac{(\mu^k)^\sigma}{|\lambda - \mu^k|} \leq c_\sigma \frac{(\mu^{n+1})^\sigma}{|\lambda - \mu^{n+1}|} , \quad \forall \sigma \in [0, 1) , \ \forall \lambda \in [G_1 H_1] ,$$

pour n assez grand.

Il est clair que

$$\int_{[G_1 H_1]} e^{-\lambda t} \|(\lambda I - A_0)^{-1} v\|_{H^1(\Omega)} \, d\lambda \leq e^{-[\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]t} \int_{[G_1 H_1]} \|(\lambda I - A_0)^{-1} v\|_{H^1(\Omega)} \, d\lambda .$$

On répèt l'argument utilisé dans la preuve de la Proposition 10.6 pour l'intégrale sur $[B_1 C_1]$, et on obtient facilement

$$\int_{[G_1 H_1]} e^{-\lambda t} \|(\lambda I - A_0)^{-1} v\|_{H^1(\Omega)} \, d\lambda \leq c \cdot (\mu^{n+1})^\delta e^{-[\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]t} \|v\|_{H^1(\Omega)} ,$$

ce qui avec (10.24) et (10.25) nous donne le résultat .

Pour obtenir une estimation convenable pour t assez petit , on aura besoin de la proposition suivante, qui s'obtient facilement, en utilisant l'application $\mathcal{R}$:

Proposition 10.9. *Il existe une constante positive c , telle que pour tout $h \in H^1(\Omega)$, nous avons*

$$\|e^{-A_0 t} h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \, e^{-(\mu^1/2)t} \|h\|_{H^1(\Omega)} , \quad \forall t \geq 0 .$$

Nous pouvons énoncer maintenent la dernière inégalitée dont nous avons besoin pour appliquer le Théorème 10.3 .

Lemme 10.10. *Pour tout $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, il existe $n(\delta) \in I\!N$ et $c_\delta > 0$ telles que pour tout $v \in H^1(\Omega)$ et $n \geq n(\delta)$, on a*

$$\|e^{-A_0 t}(I - P_0) v\|_{H^1(\Omega)} \leq c_\delta \cdot (\mu^{n+1})^\delta e^{-[\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]t} \|v\|_{H^1(\Omega)} , \quad \forall t \geq 0 .$$

Preuve . Pour $t \geq \frac{1}{\mu^{n+1} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta}}$, l'inégalité n'est autre que la Proposition 10.8(i).

Pour $0 < t \leq \frac{1}{\mu^{n+1}-(\mu^{n+1})^{1/2-\delta}}$, on utilise le Corollaire 10.7(i) et la Proposition 10.9 , et on écrit

$$\|e^{-A_0 t}(I - P_0)v\|_{H^1(\Omega)} \leq c_\delta \cdot (\mu^n)^\delta e^{-(\mu^1/2)t}\|v\|_{H^1(\Omega)} \cdot$$

D'autre part

$$e^{-(\mu^1/2)t} \leq e^0 = e^{[\mu^{n+1}-(\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]t} e^{-[\mu^{n+1}-(\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]t} \leq e \cdot e^{-[\mu^{n+1}-(\mu^{n+1})^{1/2-\delta}]t} ,$$

ce qui finit la preuve .

On voit maintenant du Corollaire 10.7(ii) et du Lemme 10.10 , que les inégalités de l'hypothèse (CL5) sont satisfaites, avec

$$\eta = -\frac{\mu^{n+1} + \mu^n}{2} < 0$$

$$\alpha = \frac{\mu^{n+1} - \mu^n}{2} - (\mu^n)^{1/2-\delta} > 0$$

$$\beta = \frac{\mu^{n+1} - \mu^n}{2} - (\mu^{n+1})^{1/2-\delta} > 0$$

$$M = c_\delta \cdot (\mu^{n+1})^\delta$$

$$\gamma = 0$$

$$M^* = M = c_\delta \cdot (\mu^{n+1})^\delta .$$

Il résulte alors en choisissant δ assez petit , n assez grand , et en utilisant (10.10) et le Lemme 10.1 , que les conditions du Théorème 10.3 sont satisfaites.

Théorème 10.11. *Il existe une variété inertielle , $\mathcal{M}$, pour le semigroupe $S(t)$ dans l'espace $H^1(\Omega)$.*
En outre , $\mathcal{M}$ est de dimension $d_1 + \ldots d_n$, avec n choisi comme auparavant, et $\mathcal{M}$ est de classe C^1 .

10.4 Variété inertielle pour $S^\epsilon(t)$

On peut exploiter la propriété d'écart spectral de A_ϵ donnée au lemme 10.2, pour construire une variété inertielle pour le semigroupe $S^\epsilon(t)$, dans l'espace H^ϵ .

Nous allons faire ici une hypothèse plus réstrictive sur la fonction f :

(H8) $\gamma_1 = 0$, *où γ_1 est l'exposant qui intervienne dans (1.6)*
(c'est à dire $|f'(x)| \leq c$, $\forall\, x \in R$) .

Comme pour le semigroupe $S(t)$, on modifie la partie non-lineaire de l'équation qui donne le semigroupe $S^\epsilon(t)$.

Nous savons que l'attracteur $\mathcal{A}^\epsilon$ de $S^\epsilon(t)$ est borné uniformément en ϵ , dans la norme de H^ϵ .

On pose
$l_2 = \sup\{\|\psi^\epsilon\|_{H^\epsilon} \, , \, \psi^\epsilon \in \mathcal{A}^\epsilon\}$, et

$$F_\epsilon(v) = -\xi\left(\frac{\|v\|^2_{H^\epsilon}}{4l_2^2}\right)[f(v) + G^\epsilon] \, , \tag{10.26}$$

où ξ est la même fonction que dans le paragraph 10.3.
Nous nous proposons de montrer léxistence d'une variété inertielle pour l'équation

$$\frac{du^\epsilon}{dt} + A_\epsilon u^\epsilon = F_\epsilon(v^\epsilon)$$

dont la forme intégrale est donnée par

$$u^\epsilon(t) = e^{-A_\epsilon(t-t_0)}u^\epsilon(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A_\epsilon(t-s)}F_\epsilon(u^\epsilon(s))\,ds \, .$$

On va montrer dans la suite que les hypothèses du Théorème 10.3 sont satisfaites , où on choisit :

$$X = Y = Z = H^\epsilon$$

$$P_1 = P_\epsilon^n \text{ et } P_2 = I - P_\epsilon^n \, ,$$

$$Z_1 = P_\epsilon^n H^\epsilon \text{ et } Z_2 = (I - P_\epsilon^n)H^\epsilon \, ,$$

$$S(t) = e^{-A_\epsilon t} \text{ et } F = F_\epsilon \, , \text{ où } F_\epsilon \text{ est donné au (10.26) .}$$

Il est clair que les hypothèses (CL1) - (CL4) sont satisfaites .

Grâce à l'hypothèse (**H8**) , on a

$$F_\epsilon : H^\epsilon \to H^\epsilon \text{ et } F_\epsilon \in C^{0,1}(H^\epsilon, H^\epsilon) \, ,$$

avec

$$\sup_{v\in H^\epsilon}\|F_\epsilon(v)\|_{H^\epsilon} + \sup_{v_1,v_2\in H^\epsilon}\frac{\|F_\epsilon(v_1) - F_\epsilon(v_2)\|_{H^\epsilon}}{\|v_1 - v_2\|_{H^\epsilon}} \leq c(l_2) \, ,$$

ce qui implique

$$Lip(F_\epsilon) \leq c(l_2) \, , \tag{10.27}$$

où $c(l_2)$ est une constante .

Puisque l'opérateur A_ϵ est autoadjoint , positif , à inverse compact, on a le résultat suivant , qui s'obtient en utilisant la decomposition spectrale:

Lemme 10.12. *Pour tout $v \in H^\epsilon$, nous avons :*

(i)
$$\|e^{-A_\epsilon t}P_\epsilon^n v\|_{H^\epsilon} \leq e^{-\mu_\epsilon^n t}\|v\|_{H^\epsilon} \, , \quad \forall t \leq 0$$

(ii)
$$\|e^{-A_\epsilon t}(I - P_\epsilon^n)v\|_{H^\epsilon} \leq e^{-\mu_\epsilon^{n+1} t}\|v\|_{H^\epsilon} \, , \quad \forall t \geq 0 \, .$$

Il est clair maintenant que les inégalités de l'hypothèse (CL5) sont satisfaites , avec

$$\eta = -\frac{\mu_\epsilon^{n+1} + \mu_\epsilon^n}{2} < 0$$

$$\alpha = \frac{\mu_\epsilon^{n+1} - \mu_\epsilon^n}{2} > 0$$

$$\beta = \frac{\mu_\epsilon^{n+1} - \mu_\epsilon^n}{2} > 0$$

$$M = 1$$

$$\gamma = 0$$

$$M^* = M = 1.$$

On voit alors , en choisissant n assez grand , ϵ assez petit , en utilisant (10.27) et le Lemme 10.2 , que les conditions du Théorème 10.3. sont satisfaites (on tient compte de la remarque d'après l'énonce du Théorème 10.3) .

On a donc finalement :

Théorème 10.13. *Il existe une constante strictement positive ϵ_M , telle que pour tout $\epsilon \in (0,\ \epsilon_M)$, il existe une variété inertielle , $\mathcal{M}_\epsilon$ pour le semigroupe $S^\epsilon(t)$, dans l'espace H^ϵ .*
En outre , $\mathcal{M}_\epsilon$ est de dimension $d_1 + \ .\ .\ d_n$, avec n choisit comme auparavant, et $\mathcal{M}_\epsilon$ est de classe $C^{0,1}$.

11 Annexe .

Pour étudier les conditions dans lesquelles l'hypothèse d'hyperbolicité (**H3**) est vraie, on utilise un théorème de Smale (voir [7] , pag 159) .

Soit X , Y , deux espaces de Banach , et $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, un opérateur linéaire et continu .

On dit que L est un opérateur de Fredholm si

(a) $dim\, Ker\, L < \infty$

(b) L'image $Im(L)$ est fermée .

(c) $Coker\, L = Y \backslash Im(L)$ est de dimension finie .

Si L est un opérateur de Fredholm , l'indice de L est défini comme étant l'entier égal à $dim\, Ker\, L - dim\, Coker\, L$.

On dit que une application (non linéaire) H de X dans Y est une application de Fredholm , si elle est de classe C^1 , et sa différentielle de Fréchét , $H'(x)$, est un opérateur de Fredholm de X dans Y , pour tout $x \in X$.

Dans ce cas , l'indice de $H'(x)$ est indépendant de x , et c'est par définition, l'indice de H .

On dit q'un point $x \in X$ est régulier si $H'(x)$ est surjective, et singulier s'il n'est pas régulier.

L'image de l'ensemble des points singuliers s'appelle l'ensemble singulier , et le complementaire de l'ensemble singulier s'appelle l'ensemble régulier. Nous avons le théorème suivant:

Théorème A1. *(Smale)*
Soit X , Y deux espaces de Banach , et $H : X \rightarrow Y$ une application de Fredholm de classe C^q , avec $q > \max\{ind\, H, 0\}$.
Alors l'ensemble régulier de H est dense dans Y.

Nous voulons appliquer ce théorème à notre problème.

Soit D_G l'ensemble des valeurs de G^0 pour lesquelles l'hypothèse (**H3**) est satisfaite.

Théorème A2. *L'ensemble D_G est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Preuve . On applique le Théorème A1 avec
$X = D(A_0)$, $Y = L^2(\Omega)$, et $H(u) = A_0 u + f(u)$.
X est un espace de Banach dont la norme $\|\cdot\|_{D(A_0)}$ satisfait à

$$k_1 \sum_{i=1}^{3} \|v_i\|_{H^2(\Omega_i)} \leq \|v\|_{D(A_0)} \leq k_2 \sum_{i=1}^{3} \|v_i\|_{H^2(\Omega_i)} \,, \tag{A1}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes positives, indépendantes de v.
L'application H est de classe C^1 , et

$$H'(u)v = A_0 v + f'(u)v \,,\ \forall\, u, v \in D(A_0) \,.$$

Il est clair que A_0 est un isomorphisme de $D(A_0)$ dans $L^2(\Omega)$, et que l'application qui à $v \in D(A_0)$ associe $f'(u)v \in L^2(\Omega)$, est compacte pour tout $u \in D(A_0)$.
Il résulte que $H'(u)$ est un opérateur de Fredholm , donc $H(u)$ est une application de Fredholm de classe C^1 , et en outre $ind\, H = 0$.

Mais d'autre part, d'après le théorème 2.20 (qui est valable pour tout $G^0 \in L^2(\Omega)$) , $H^{-1}(G^0)$ est non-vide pour tout $G^0 \in L^2(\Omega)$. Avec cette observation on finit la preuve.

Théorème A3. *L'ensemble D_G est ouvert dans $L^2(\Omega)$.*

Preuve . Soit $G^{0k} \in L^2(\Omega)\backslash D_G$, de sorte que
$G^{0k} \to G^0$ pour $k \to \infty$, dans $L^2(\Omega)$. Nous voulons montrer que $G^0 \in L^2(\Omega)\backslash D_G$.
La définition de D_G nous dit qu'il existe deux suites u^k , $v^k \in D(A_0)$, avec $v^k \neq 0$, telles que

$$A_0 u^k + f(u^k) = G^{0k} \tag{A2}$$

et

$$A_0 v^k + f'(u^k)v^k = 0 \,. \tag{A3}$$

On peut considérer que

$$\|A_0 v^k\|_{L^2(\Omega)} = 1 \,. \tag{A_4}$$

Si on restreint l'égalité (A2) à Ω_i , $i = 1,3$, on peut écrire

$$A_{0i} u_i^k + f(u_i^k) = G_i^{0k} \,, \quad i = 1,3 \,. \tag{A5}$$

De (A5) et de la propriété (2.9)(i), on déduit que
$\|u_i^k\|_{H^1(\Omega_i)}$ est borné indépendemment de k , et ensuite que
$\|u_i^k\|_{H^2(\Omega_i)}$ est borné indépendemment de k .

On restreint (A2) à Ω_2 et, on utilise à nouveau le changement d'inconnue
$u_2^k = \bar{u}_2^k + \mathcal{R}(u_1^k,\, u_3^k)$,
où $\bar{u}_2^k$ satisfait à l'égalité (voir (2.17) et (2.19))

$$-\partial_{y_1 y_1} \bar{u}_2^k + \alpha\, \bar{u}_2^k = -f(\bar{u}_2^k + \mathcal{R}(u_1^k,\, u_3^k)) - G_2^{0k} + \Phi_1^k(u_1^k) + \Phi_3^k(u_3^k) \,, \tag{A6}$$

et où Φ_1^k et Φ_3^k sont comme en (2.20) et (2.21) (à la seule différence près qu'on remplace G_i^0 par G_i^{0k}).
On multiplie l'égalitée (A6) par $\bar{u}_2^k$ dans $L^2(\Omega_2)$, on utilise à nouveau la propriété 2.9(i) , et on peut facilement déduire, en procédant comme dans la preuve du Lemme 2.7(i) que
$\|\bar{u}_2^k\|_{H^2(\Omega_2)}$ est bornée indépendemment de k.
On déduit qu'il existe une sous-suite de k (notée encore par k), de sorte que
$u_i^k \rightharpoonup u_i$ - faible dans $H^2(\Omega_i)$, $i = 1,3$
$\bar{u}_2^k \rightharpoonup \bar{u}_2$ - faible dans $H^2(\Omega_2)$,
et
$u_i^k \to u_i$ - fort dans $H^{2-\delta}(\Omega_i)$, $i = 1,3$, $\forall\, \delta \in (0,\, 2]$

$\bar{u}_2^k \to \bar{u}_2$ - fort dans $H^{2-\delta}(\Omega_2)$, $\forall\, \delta \in (0,\, 2]$.
Ces convergences nous permettent de passer à la limite dans (A5) et (A6) (pour les termes non lineaires on va utiliser toujours les convergences fortes), d'où

$$A_{0i}u_i + f(u_i) = G_i^0 \;, \quad i = 1,3$$

et

$$-\partial_{y_1 y_1}\bar{u}_2 + \alpha\, \bar{u}_2 = -f(\bar{u}_2 + \mathcal{R}(u_1,\, u_3)) - G_2^0 + \Phi_1(u_1) + \Phi_3(u_3)\;,$$

c'est-à-dire, si on note $u_2 = \bar{u}_2 + \mathcal{R}(u_1,\, u_3)$, et on définit $u : \Omega \to R$ par $u/\Omega_i = u_i$, $i = 1,2,3$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in D(A_0) \\ \text{et} \\ A_0 u + f(u) = G^0 \;. \end{array} \right. \tag{A7}$$

Les égalités ci-dessus permettent aussi de montrer qu'en fait

$$u^k \to u \text{ - fort dans } D(A_0)\;. \tag{A8}$$

D'autre part, de (A4), en tenant compte de (A1), on déduit qu'il existe une sous-suite de v^k (notée encore v^k) , telle que
$v_i^k \rightharpoonup v_i$ - faible dans $H^2(\Omega_i)$, $i = 1,2,3$.
Il résulte alors que

$$v_i^k \to v_i \text{ - fort dans } H^{2-\delta}(\Omega_i)\;,\; i = 1,2,3\;,\; \forall\, \delta \in (0,\, 2]\;, \tag{A9}$$

et si on définit $v : \Omega \to R$ de sorte que $v/\Omega_i = v_i$, $i = 1,2,3$, alors
$v \in D(A_0)$.
On veut passer à la limite dans (A3) pour $k \to \infty$. Puisque

$$A_0 v^k \rightharpoonup A_0 v \text{ - faible dans } L^2(\Omega)$$

$$f'(u^k)v^k \to f'(u)v \text{ - fort dans } L^2(\Omega)\;,$$

on obtient

$$A_0 v + f'(u)v = 0\;, \tag{A10}$$

et on déduit que
$A_0 v^k \to A_0 v$ - forte dans $L^2(\Omega)$, ce qui avec (A4) nous montre que $v \neq 0$.
Finalement , les assertions (A7) , (A10) , et le fait que $v \in D(A_0)$ avec $v \neq 0$, nous donnent le résultat .

[1] M. ABOUNOUH , Thèse de troisième cycle , Orsay , 1993.

[2] J.M. ARRIETA , Spectral properties of Schrödinger Operators under perturbations of the domains, *Doctoral disertation*, September 1991, Georgia Institute of Technology.

[3] J.M. ARRIETA , Neumann eigenvalues problems on exterior perturbation of the domain , - *preprint* .

[4] J.M. ARRIETA , Rates of eigenvalues on a dumbbell domain. Simple eigenvalues case , - submitted to *Transactions of A.M.S.*

[5] S.N. CHOW and K. LU , Invariant Manifolds for Flows in Banach Spaces , *Journal of diff. equations* , **74** (1988) pp. 285-317 .

[6] A. DEBUSCHE and R. TEMAM , Inertial Manifolds and the slow manifolds in meteorology , *Differential and Integral Equations* , **Volume 4 , Number 5,** Septembre 1991 , pp. 897-931 .

[7] C. FOIAS and R. TEMAM , Structure of the Set of Stationary Solutions of the Navier-Stokes Equations , *Comm. Pure Appl. Math.* , **Vol XXX** (1977) pp. 149-164 .

[8] J. K. HALE , Asymptotic Behavior of Dissipative Systems , *Math. Surveys and Monographs* **25** (1988) Am. Math. Soc .

[9] J. K. HALE and G. RAUGEL , Partial differential equations on thin domains, - *preprint* .

[10] J. K. HALE and G. RAUGEL , Reaction-diffusion equation on thin domains , *J. Math. Pures Appl.* , **71** (1992) , 33-95 .

[11] J. K. HALE and G. RAUGEL , Convergence in Gradient-like Systems with applications to P.D.E , *Z angew Math. Phys* , **43** (1992), p. 63-124 .

[12] J. K. HALE and G. RAUGEL , A damped hyperbolic equation on thin domain, *Transactions of the A.M.S* , **Vol. 329 , Number 1** , January 1992 , pp. 185-219 .

[13] J. K. HALE and G. RAUGEL , A reaction-diffusion equation on a thin L-shaped domain - *preprint* .

[14] D. HENRY , Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations , *Lect. Notes Math.* , **840** (1981) , Springer-Verlag, Berlin .

[15] S. JIMBO , Singular Perturbation of Domains and semilinear elliptic equation, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo , Sect. IA , Math* **35** (1988) , pp. 27-76 .

[16] S. JIMBO , The Singularly Perturbed Domains and the characterization for the eigenfunctions with Neumann Boundary Condition , *Journal of Differential Equations* , **77** , 322 - 350 (1989) .

[17] S. JIMBO , A construction of the perturbed solution of semilinear elliptic equation in the singularly perturbed domain , *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo , Sect. IA , Math* **36** (1989) no. 2 , pp. 163 - 185 .

[18] T. KATO , Perturbation Theory for Linear Operators , 2-nd Edition , *Springer Verlag* , Berlin Heidelberg New-York , 1976 Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968 .

[19] R. TEMAM , Navier-Stokes Equations , *North-Holland* , Amsterdam , 1977.

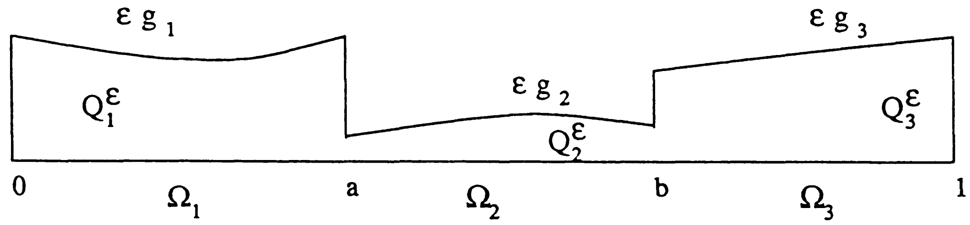

figure 1.

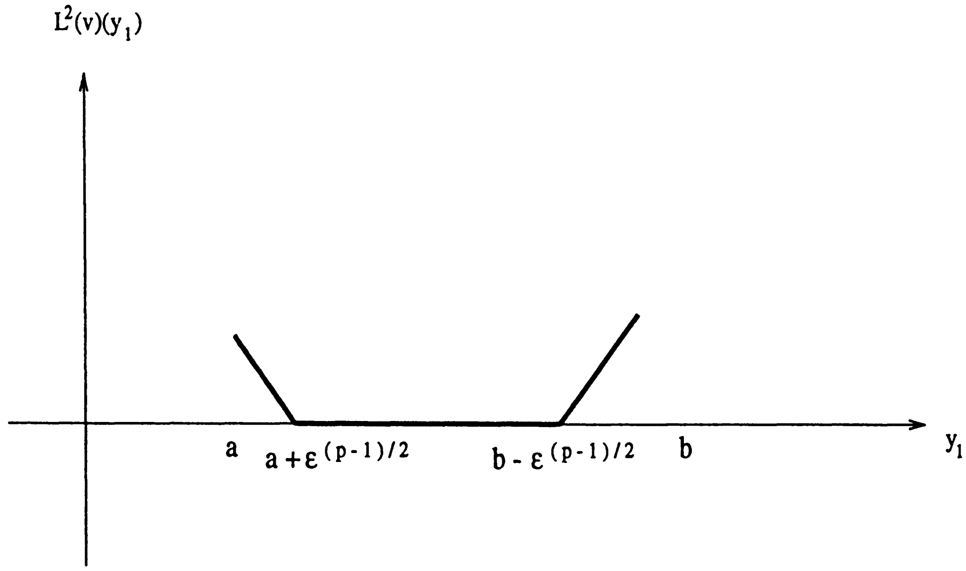

figure 2

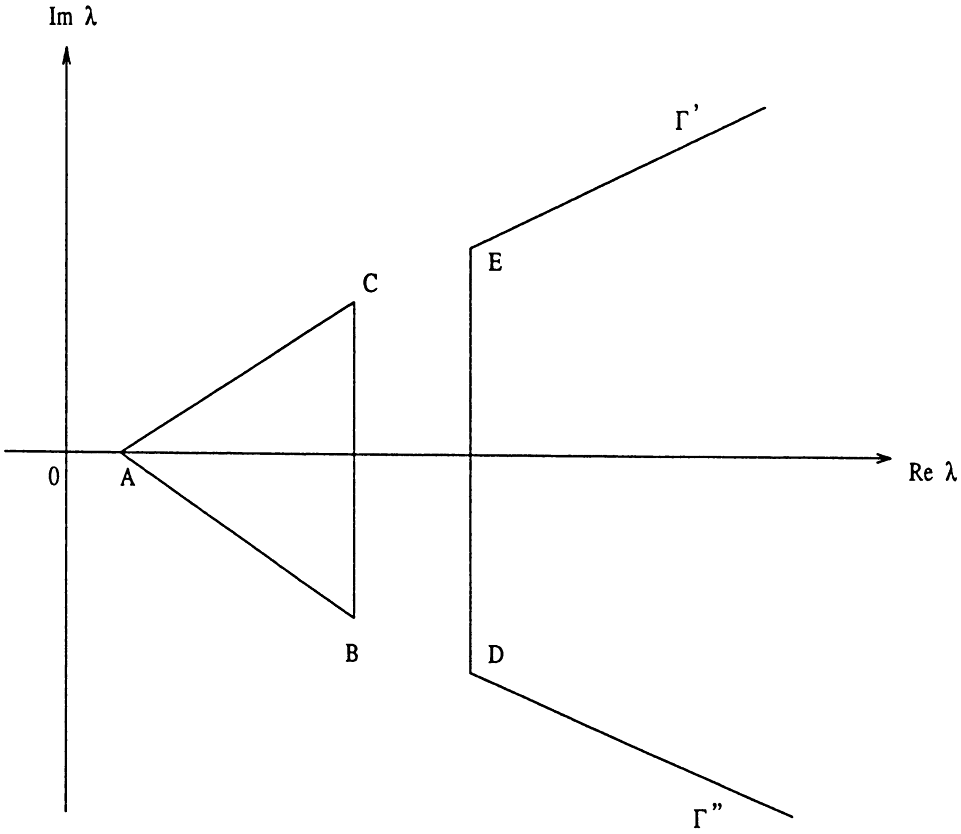

figure 3

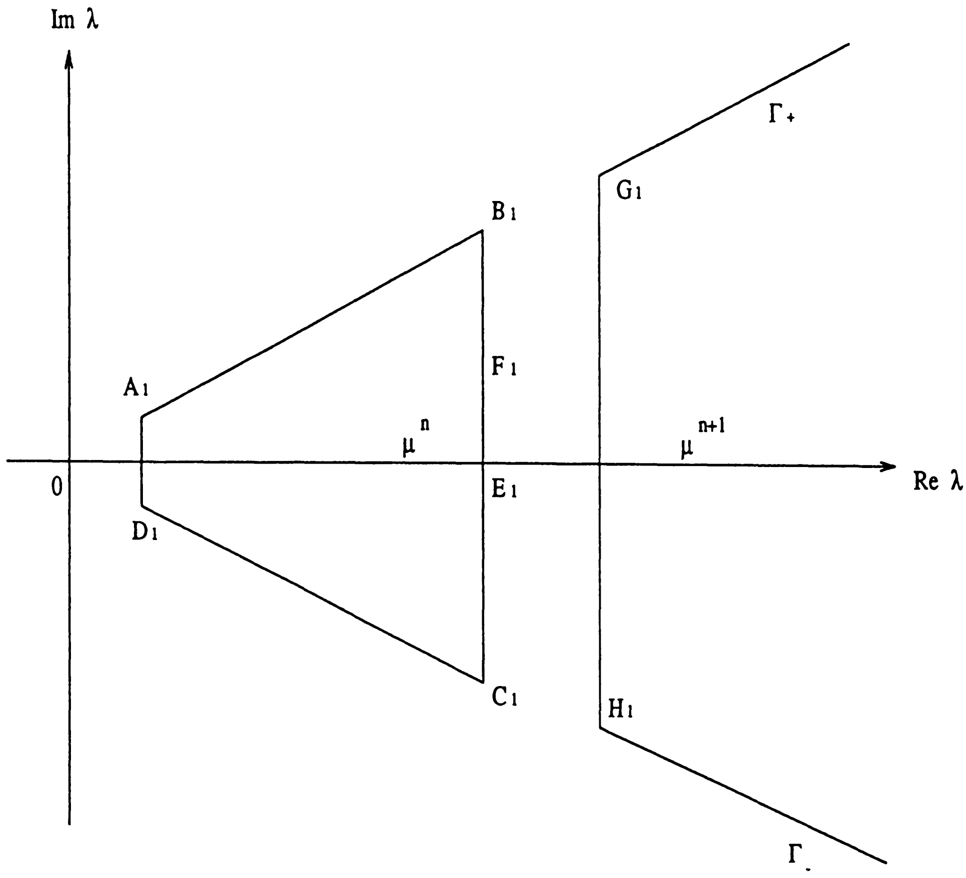

figure 4

Deuxième partie

Un problème de Navier-Stokes à frontière libre.

1 Introduction

Supposons qu'on a un cylindre infiniment long qui tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire ω , et considérons le mouvement d'un fluide visqueux qui remplit partiellement ce cylindre.

Si on considère une section transversale dans ce cylindre , et on suppose que le mouvement du fluide est uniforme le long de l'axe du cylindre, alors on peut se ramener à un problème bidimensionnel, formulé comme suite.
On se donne un domain initial $\Omega \subset I\!R^2$ dont la frontière s'écrit:
$\partial\Omega = S_B \cup S_F$
où S_B est le cercle de rayon 1, dont le centre est l'origine du repère, et S_F est une courbe fermée qui se trouve dans l'intérieur du cercle, ne rencontrant pas S_B (voir figure 5).

On se donne une vitesse initiale u_0. Nous voulons trouver à chaque temps $t \in (0, T]$, un domain $\Omega(t)$, une vitesse $u(\cdot, t)$ et une pression $p(\cdot, t)$ en $\Omega(t)$, et une transformation du domain $\bar{\eta}(\cdot, t) : \Omega \to I\!R^2$, telle que l'on ait :

$$\bar{\eta}(\Omega, t) = \Omega(t) \quad , \text{avec } \bar{\eta}(S_B, t) = S_B$$

$$\bar{\eta}_{,t} = u \circ \bar{\eta} \qquad \text{dans } \Omega \ ,$$

$$u_{,t} - \nu \, \triangle u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = -g \, \nabla u \qquad \text{dans } \Omega(t) \ ,$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad \text{dans } \Omega(t) \ ,$$

$$p \, n_i^t - \nu \sum_j (u_{i,j} + u_{j,i}) \, n_j^t = p_0 n_i^t \qquad \text{sur } \bar{\eta}(S_F, t) \ ,$$

où n^t désigne la normale à $\bar{\eta}(S_F, t)$ vers l'exterieur de $\Omega(t)$,

$$u = \omega \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{sur } S_B \ ,$$

$$u(x, 0) = u_0 \qquad \text{dans } \Omega \ ,$$

$$\bar{\eta}(x, 0) = x \qquad \text{dans } \Omega \ ,$$

où on désigne par p_0 la pression atmosphérique supposé constante , g l'accélération de la pesanteur , et on considère que la densité est égale à 1 .
On considère aussi que la tension superficielle est négligeable .

Puisque l'origine du repère coïncide avec le centre du cercle, alors S_F (c'est à dire la frontière libre au moment initial) est donnée en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = \rho_0(\theta) \quad , \text{avec } \theta \in [0, 2\pi) \quad \text{et} \quad \rho_0(0) = \rho_0(2\pi) \ ,$$

où ρ_0 est une fonction assez régulière qui satisfait à :
$m_0 \le \rho_0(\theta) \le m_1$, $\forall \, \theta \in [0, 2\pi]$

$|\rho_0'(\theta)| \leq m_2$, $\forall\, \theta \in [0,\, 2\pi]$,
où m_0 , $m_1 \in (0,\, 1)$, $m_0 < m_1$ et $m_2 > 0$.

Si x_1 , x_2 sont les coordonées cartésiennes , on peut écrire pour tout $x = (x_1, x_2) \in S_F$:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(\theta) \\ \\ x_2 = g_2(\theta) \end{cases} \tag{1.1}$$

où on a noté

$g_1(\theta) = \rho_0(\theta)\cos\theta$ et $g_2(\theta) = \rho_0(\theta)\sin\theta$.

Le système (1.1) donne la répresentation paramétrique de la courbe fermée S_F .

Si on note par n la normale à la frontière S_F vers l'exterieur de Ω , alors on a

$$n = \frac{1}{M_{S_F}(\theta)} \begin{pmatrix} -g_2'(\theta) \\ g_1'(\theta) \end{pmatrix} ,$$

où on pose

$$M_{S_F}(\theta) = [\,(g_1'(\theta))^2 + (g_2'(\theta))^2\,]^{1/2} .$$

Il est facile de voir que

$$0 < m_0 \leq M_{S_F}(\theta) \leq m_1 + m_2 .$$

On pose

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} -g_2'(\theta) \\ g_1'(\theta) \end{pmatrix} = M_{S_F}(\theta) n .$$

On va utiliser les mêmes notations pour $\bar{\eta}(S_F, t)$, c'est-à-dire pour la frontière libre à un moment $t > 0$.

On écrit une représentation paramétrique de la courbe $\bar{\eta}(S_F, t)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1 = \bar{\eta}_1(g_1(\theta),\, g_2(\theta),\, t) \equiv g_1^t(\theta) \\ \\ x_2 = \bar{\eta}_2(g_1(\theta),\, g_2(\theta),\, t) \equiv g_2^t(\theta) \ , \end{cases} \tag{1.2}$$

et on note

$$M_{\bar{\eta}(S_F,t)}(\theta) = \{[\,(g_1^t)'(\theta)\,]^2 + [\,(g_2^t)'(\theta)\,]^2\}^{1/2} .$$

Rappelons que n^t désigne la normale à la frontière $\bar{\eta}(S_F, t)$ vers l'exterieur de $\Omega(t)$.
On a alors

$$n^t = \frac{1}{M_{\bar{\eta}(S_F,t)}(\theta)} \begin{pmatrix} -(g_2^t)'(\theta) \\ (g_1^t)'(\theta) \end{pmatrix} .$$

On pose aussi

$$\bar{n}^t = \begin{pmatrix} -(g_2^t)'(\theta) \\ (g_1^t)'(\theta) \end{pmatrix} = M_{\bar{\eta}(S_F,t)}(\theta)\, n^t .$$

Dans le système initial , on fait le changement de la fonction inconnue :

$\bar{p} = p - p_0 + g\, x_2$.
En outre , on multiplie l'équation qu'on a sur $\bar{\eta}(S_F, t)$ par $M_{\bar{\eta}(S_F,t)}(\theta)$, et le système devient :

$$u_{,t} - \nu \, \triangle u + (u \cdot \nabla) u + \nabla \bar{p} = 0 \qquad \text{dans } \Omega(t) \, , \tag{1.4}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad \text{dans } \Omega(t) \, , \tag{1.5}$$

$$\bar{p}\, \bar{n}_i^t - \nu \sum_j (u_{i,j} + u_{j,i})\, \bar{n}_j^t = g\, x_2 \bar{n}_i^t \qquad \text{sur } \bar{\eta}(S_F, t) \, , \tag{1.6}$$

$$u = \omega \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{sur } S_B \, , \tag{1.7}$$

$$u(x, 0) = u_0 \qquad \text{dans } \Omega \, , \tag{1.8}$$

$$\bar{\eta}_{,t}(x, t) = u(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, t) \qquad \text{dans } \Omega \, , \tag{1.9}$$

$$\bar{\eta}(x, 0) = x \qquad \text{dans } \Omega \, . \tag{1.10}$$

On utilisera souvent la convention suivante : un indice avant la virgule indique la composante , tandis que un indice après la virgule indique la dérivée partielle.

On va faire le changement de la fonction inconnue suivant :

$u(x_1, x_2, t) = \bar{u}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t)$ pour $x \in \Omega(t)$,
avec

$$\bar{u}(x_1, x_2) = \omega \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = B\, x \, ,$$

où on pose

$$B = \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On remplace dans les équations (1.4) - (1.10) , et on obtient :

$$w_{,t} - \nu \, \triangle w + (w \cdot \nabla) w + B\, w + \frac{Dw}{Dx} B\, x - \omega^2 x + \nabla \bar{p} = 0 \qquad \text{dans } \Omega(t) \, , \tag{1.11}$$

$$\nabla \cdot w = 0 \qquad \text{dans } \Omega(t) \, , \tag{1.12}$$

$$\bar{p}\, \bar{n}_i^t - \nu \sum_j (w_{i,j} + w_{j,i})\, \bar{n}_j^t = g\, x_2 \bar{n}_i^t \qquad \text{sur } \bar{\eta}(S_F, t) \, , \tag{1.13}$$

$$w = 0 \qquad \text{sur } S_B \, , \tag{1.14}$$

$$w(x, 0) = w_0 \qquad \text{avec } w_0 = u_0 - B\, x \, , \tag{1.15}$$

$$\bar{\eta}_{,t}(x, t) = B\, \bar{\eta} + w(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, t) \, , \tag{1.16}$$

$$\bar{\eta}(0) = x \, . \tag{1.17}$$

Pour ce problème , il est naturel d'utiliser des coordonnées lagrangiennes , cf [3] , [9] .. Nous procedons maintenant au changement de coordonnées .
Puisque $x = \frac{1}{2} \nabla (x_1^2 + x_2^2)$, il est plus simple d'introduire :

$\bar{q} = \bar{p} - \frac{1}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$, et on pose ensuite
$q = \bar{q} \circ \bar{\eta}$, c'est à dire $q(x,t) = \bar{q}(\bar{\eta}_1(x,t), \bar{\eta}_2(x,t), t)$
et
$v = w \circ \bar{\eta}$, c'est à dire $v(x,t) = w(\bar{\eta}_1(x,t), \bar{\eta}_2(x,t), t)$.
On a le calcul suivant :

$$v_{,t} = w_{,t} + w_{,1}\bar{\eta}_{1,t} + w_{,2}\bar{\eta}_{2,t} = w_{,t} + w_{,1}(-\omega\,\bar{\eta}_2 + w_1) + w_{,2}(\omega\,\bar{\eta}_1 + w_2) =$$

$$w_{,t} + (w \cdot \nabla)\, w + \frac{Dw}{Dx} B\, \bar{\eta} \, .$$

Les équations (1.11) - (1.15) deviennent alors :

$$v_{,t} - \nu \sum_{k,j,l} \bar{\xi}_{kj}\partial_k(\bar{\xi}_{lj} v_{i,l}) + B\, v + \sum_k \bar{\xi}_{ki} q_{,k} = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times (0,\, T)\,, \tag{1.18}$$

$$\sum_{k,j} \bar{\xi}_{kj} v_{j,k} = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times (0,\, T)\,, \tag{1.19}$$

$$q\,\bar{N}_i - \nu \sum_{k,j} (\bar{\xi}_{kj} v_{i,k} + \bar{\xi}_{ki} v_{j,k}) \bar{N}_j = g\,\bar{\eta}_2 \bar{N}_i - \frac{1}{2}\omega^2(\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2)\bar{N}_i \qquad \text{sur } S_F \times (0,\, T)\,, \tag{1.20}$$

où on note $\bar{N} = \bar{n}^t \circ \bar{\eta}$,

$$v = 0 \qquad \text{sur } S_B \,, \tag{1.21}$$

$$v(0) = v_0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{1.22}$$

avec $v_0 = w_0 = u_0 - B\, x$,
où on a noté

$$\bar{\xi} = \left(\frac{d\bar{\eta}}{dx}\right)^{-1} \, , \; \bar{\xi} = (\bar{\xi}_{ij})_{i,j=1,2} \, . \tag{1.23}$$

On peut réécrire (1.16) sous la forme

$$\begin{cases} \bar{\eta}_{,t} = B\,\bar{\eta} + v(x,t) \\ \\ \bar{\eta}(0) = x \quad , \end{cases} \tag{1.24}$$

avec B définit comme avant , d'où il résulte :

$$\bar{\eta}(x,t) = e^{Bt}x + \int_0^t e^{B(t-s)} v(x,s)\, ds \, .$$

On note

$$E = E(t) = e^{B\,t} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \, , \; E = (e_{ij})_{i,j=1,2}$$

et

$$E^* = E^*(t) = E^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \, , \; E^* = (e^*_{ij})_{i,j=1,2} \, .$$

On voit immédiatement que $E^* = E^T$, donc on peut écrire :

$$\bar{\eta} = E(t)\left[x + \int_0^t E^*(s)v(x,s)\,ds\right]\,ds \ , \tag{1.25}$$

ce qui entraine

$$\frac{D\bar{\eta}}{Dx} = E(t)\left[I + \int_0^t E^*(s)\frac{Dv}{Dx}(x,s)\,ds\right] \ . \tag{1.26}$$

On va utiliser la notation $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4)$, où $\Lambda(v,q)$ désigne les membres de gauche de (1.18) , (1.19) , (1.20) , (1.22) .
On va noter par $L = (L_1, L_2, L_3, L_4)$, un opérateur linéaire qui approche Λ d'une façon convenable , c'est à dire :

$$L_1(v,q) = v_{,t} - \nu \sum_{k,j,l} e^*_{kj}\partial_k(e^*_{lj}v_{i,l}) + B\,v + \sum_k e^*_{ki}q_{,k} \ , \tag{1.27}$$

$$L_2(v,q) = \sum_{k,j} e^*_{kj}v_{j,k} \ , \tag{1.28}$$

$$L_3(v,q) = q(E\bar{n})_i - \nu \sum_{j,k}(e^*_{kj}v_{i,k} + e^*_{ki}v_{j,k})(E\bar{n})_j \ , \tag{1.29}$$

$$L_4(v,q) = v(x,0) \ . \tag{1.30}$$

On observe que

$$\sum_{k,j,l} e^*_{kj}e^*_{lj}v_{i,kl} = \sum_{k,l}(\sum_j e^*_{kj}e_{jl}v_{i,kl}) = \sum_{k,l}\delta_{kl}v_{i,kl} \ ,$$

où

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 \ , \text{ si } k = l \\ 0 \ , \text{ si } k \neq l \ , \end{cases}$$

ce qui donne

$$\sum_{k,j,l} e^*_{kj}e^*_{lj}v_{i,kl} = \triangle v \ .$$

On a aussi

$$\sum_k e^*_{ki}q_{,k} = \sum_k e_{ik}q_{,k} = (E\nabla q)_i \ .$$

On peut écrire $L_1 = E(E^*L_1)$.
Il est clair que
$E^*(v_{,t}) = (E^*v)_{,t} - (E^*_{,t})v = (E^*v)_{,t} + B(E^*v)$,
ce qui donne , si on remarque que $E^*B = BE^*$:

$$L_1(v,q) = E[(E^*v)_{,t} - \nu\triangle(E^*v) + 2B(E^*v) + \nabla q] \ , \tag{1.31}$$

$$L_2(v,q) = \nabla \cdot (E^*v) \ . \tag{1.32}$$

Pour representer de la même manière L_3 , on fait le calcul suivant :

$$(E^* L_3)_a = q\sum_{i,j} e^*_{ai} e_{ij}\bar{n}_j - \nu(\sum_{i,j,k,s} e^*_{ai}e^*_{kj}v_{i,k}e_{js}\bar{n}_s + \sum_{i,j,k,s} e^*_{ai}e^*_{ki}v_{j,k}e_{js}\bar{n}_s) =$$

$$q\bar{n}_a - \nu(\sum_{i,k} e^*_{ai}v_{i,k}\bar{n}_k + \sum_{j,s} v_{j,a}e^*_{sj}\bar{n}_s) = q\bar{n}_a - \nu\sum_i[(E^*v)_{a,i} + (E^*v)_{i,a}]\bar{n}_i ,$$

ce qui nous donne

$$L_3(v,q) = E\{q\bar{n}_i - \nu\sum_j[(E^*v)_{i,j} + (E^*v)_{j,i}]\bar{n}_j\} . \tag{1.33}$$

On écrit aussi

$$L_4(v,q) = (E^*v)(x,0) . \tag{1.34}$$

Dans la suite on va désigner par c (éventuellement avec des indices) , des constantes positives qui vont dépendre des paramètres du problème .
On introduit quelques notations :
Soit $H^s(\Omega)$ l'espace de Sobolev habituel , pour $s \geq 0$, et on désigne par $|\cdot|_s$ la norme dans cet espace .
Si X est un espace de Hilbert , on définit $H^s(0,T,X)$ comme d'habitude pour s entier , et par l'interpolation pour s non-entier .
On remarque comme à la page 364 de [3] que si on a un opérateur $A(T)$ borné de $H^0(0,T,X)$ dans Y et aussi de $H^1(0,T,X)$ dans Z avec des normes indépendantes de T , où Y et Z sont des espaces de Hilbert avec $Z \subseteq Y$, alors $A(T)$ est borné de $H^s(0,T,X)$ dans $[Z,Y]_{1-s}$ avec une norme indépendante de T . On utilisera les notations suivantes (comme dans [3]) :

$$G_T = \Omega \times (0,T) ,$$

$$K^r(G_T) = H^0(0,T,H^r(\Omega)) \cap H^{r/2}(0,T,H^0(\Omega)) ,$$

$$K^r(S_F \times (0,T)) = H^0(0,T,H^r(S_F)) \cap H^{r/2}(0,T,H^0(S_F)) ,$$

$${}^0H^r(\Omega) = \{u \in H^r(\Omega) , u = 0 \text{ sur } S_F\} ,$$

$${}_0H^r(\Omega) = \{u \in H^r(\Omega) , u = 0 \text{ sur } S_B\} ,$$

$${}^0K^r(G_T) = H^0(0,T, {}^0H^r(\Omega)) \cap H^{r/2}(0,T,H^0(\Omega)) ,$$

$${}_0K^r(G_T) = H^0(0,T, {}_0H^r(\Omega)) \cap H^{r/2}(0,T,H^0(\Omega)) .$$

Le but de cette partie est de montrer le Théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit $r \in (3, \frac{7}{2})$. Supposons que Ω satisfait aux conditions de cette section .*
Soit $u_0 \in H^{r-1}(\Omega)$ donné et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\nabla \cdot u_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega ,$$

$$\{\sum_j [(u_0)_{i,j} + (u_0)_{j,i}] n_j\}_{tan} = 0 \quad sur\ S_F\ ,$$

$$u_0(x) = B\,x \quad sur\ S_B\ .$$

Alors il existe un $T > 0$ qui dépends de Ω et de $|u_0|_{r-1}$, tel que le problème (1.18)-(1.22) a une solution $v \in {}_0K^r(G_T)$, $q \in K^{r-3/2}(S_F \times (0,T))$, et $\nabla q \in K^{r-2}(G_T)$, avec $v(0,x) = v_0(x) \equiv u_0(x) - B\,x$.

Le plan de cette partie est le suivant :
Dans la section 2 nous montrons l'existence d'une solution d'un problème linéaire et homogène , dans la section 3 on va résoudre le problème linéaire , non homogène: $Lu = h$, où L est l'opérateur donné par les expressions (1.27)-(1.30) , et dans la dernière section on prouve le Théorème 1.1 , en faisant une estimation des termes non-linéairs.

2 Résolution du problème linéaire homogène.

La methode utilisée dans les sections 2,3 et 4 est très ressamblante à celle utilisée dans [3]. C'est pourquoi, nous allons insister seulement la où il y a des différences. Nous voulons résoudre le système suivant :

$$v_{,t} - \nu \triangle v + 2B\,v + \nabla q = f \qquad \text{dans } G_T \ , \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot v = 0 \qquad \text{dans } G_T \ , \tag{2.2}$$

$$S(v,q) = 0 \qquad \text{sur } S_F \times (0,T) \tag{2.3}$$

avec

$$(S(v,q))_i = q\,n_i - \nu \sum_j (v_{i,j} + v_{j,i}) n_j \ ,$$

$$v = 0 \qquad \text{sur } S_B \times (0,T) \ , \tag{2.4}$$

$$v(0) = 0 \qquad \text{sur } \Omega \ . \tag{2.5}$$

Ce problème est similaire au problème traité p. 368 de [3] , avec le term $2B\,v$ en plus .
On va suivre ici le même raisonnement.

Soit $H^0_d(\Omega, I\!R^2) = \{u \in H^0(\Omega, I\!R^2) \ , \ u = \nabla\Phi \ , \text{ où } \Phi \in {}^0H^1(\Omega, I\!R)\}$.

Lemme 2.1. *H^0_d est un espace de Hilbert , c'est à dire que H^0_d est fermé dans H^0 .*

Preuve . Soit $\nabla\Phi^n \to \psi$, dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire
$\Phi^n_{,1} \to \psi_1$ dans $L^2(\Omega)$ et $\Phi^n_{,2} \to \psi_2$ dans $L^2(\Omega)$,
avec $\Phi^n = 0$ sur S_F .
On peut supposer Φ assez régulier , et on peut écrire

$$\Phi^n(\rho,\theta) = \int_{\rho_0(\theta)}^{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \Phi^n(\xi,\theta)\, d\xi \ . \tag{2.6}$$

Puisque

$$\frac{\partial\Phi^n}{\partial\rho} = \Phi^n_{,1} \cos\theta + \Phi^n_{,2} \sin\theta \ ,$$

on déduit en utilisant (2.6) que Φ^n est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, donc il existe un $\Phi \in L^2(\Omega)$, tel que $\Phi^n \to \Phi$, dans $L^2(\Omega)$, et on déduit d'une manière classique le résultat.

On va noter par $H^0_\sigma(\Omega, I\!R^2)$ le complément orthogonal de H^0_d dans H^0 , donc on a : $H^0_d \oplus H^0_\sigma = H^0$.
On voit facilement que pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a $u \in H^0_\sigma$ si et seulement si $\nabla \cdot u = 0$ dans Ω , et $u = 0$ sur S_B .

Lemme 2.2. *Si* $f \in H^{r-2}(\Omega)$, $b \in H^{r-3/2}(S_B)$, *avec* $2 \leq r \leq 5$, *il existe une solution unique* $u \in H^r(\Omega)$ *du système* $\triangle u = f$ *dans* Ω , $u = 0$ *sur* S_F , $\partial_n u = b$ *sur* S_B , *avec*

$$|u|_r \leq c\,[|f|_{r-2} + |b|_{r-3/2,S_B}] \,,$$

où $|b|_{r-3/2,S_B}$ *désigne la norme* $H^{r-3/2}(S_B)$ *de* b .

Preuve . On cherche d'abord une solution faible , qui est par définition la solution du problème :

Trouver $u \in {}^0H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = -\int_\Omega f\,\varphi\, dx + \int_{S_B} b\,\varphi\, d\sigma \,, \quad \forall \varphi \in {}^0H^1(\Omega) \,.$$

Ce problème a une solution unique puisqu'on a une inégalitée du type Poincaré

$|u|_0 \leq c\,|\nabla u|_0$

(qui se montre comme à la démonstration du Lemme 2.1 , en écrivant

$$u(\rho,\theta) = \int_{\rho_0(\theta)}^{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} u(\xi,\theta)\, d\xi \;) \,.$$

Soit η_1 , $\eta_2 \in C^\infty(\bar\Omega)$, $\eta_1 = 1$ dans une voisinage de S_B , et $\eta_1 = 0$ dans une voisinage de S_F , $0 \leq \eta_i \leq 1$, $\eta_1 + \eta_2 = 1$ dans Ω .

On pose $u_1 = \eta_1 u$ et $u_2 = \eta_2 u$.

On observe que u_1 est la solution du problème :

$$\begin{cases} \triangle u_1 = \eta_1 f + 2\,\nabla\eta_1 \cdot \nabla u + (\triangle \eta_1) u \equiv f_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} = \bar b \end{cases}$$

où

$$\bar b = \begin{cases} b & \text{sur } S_B \\ 0 & \text{sur } S_F \end{cases} \,.$$

Pour $r = 0$, si $f \in H^0$, alors $u \in H^1$, donc $f_1 \in H^0$.

Il est claire que $b \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, donc on peut appliquer la théorie elliptique de [6] , et on obtient

$u_1 \in H^2(\Omega)$, avec $|u_1|_2 \leq c\,[|f|_0 + |b|_{\frac{1}{2},S_B}]$.

Pour $r = 1$, si $f \in H^1$, on a déjà $u_1 \in H^2$, ce qui entraine $f_1 \in H^1(\Omega)$. Puisque $\bar b \in H^{3/2}(\partial\Omega)$, on obtient $u_1 \in H^3$.

On répète l'argument , et on déduit que si $f \in H^{r-2}$ et $b \in H^{r-3/2}(S_B)$ avec r entier, alors

$$u_1 \in H^r \text{ et } |u_1|_r \leq c\,[|f|_{r-2} + |b|_{r-3/2}] \,.$$

De même pour u_2 qui est la solution du problème

$$\begin{cases} \triangle u_2 = \eta_2 f + 2\,\nabla\eta_2 \cdot \nabla u + (\triangle \eta_2) u = f_2 \\ u_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \,. \end{cases}$$

Donc le résultat est vrai pour r entier , et le lemme en résulte par interpolation.

Remarque . Un résultat analogue au Lemme 2.2 est vrai si on prend comme conditions aux limites $u = b$ sur une frontière , avec $b \in H^{r-1/2}$, et $\partial_n u = 0$ sur l'autre .

Lemme 2.3. *Il existe une constante positive c , telle que pour tout* $u \in {}_0H^1(\Omega, R^2)$, *on a*

$$|u|_1^2 \leq c < u, u >_\Omega ,$$

où on a posé

$$< u, v >_\Omega = \sum_{i,j} \int_\Omega (u_{i,j} + u_{j,i})(v_{i,j} + v_{j,i}) dx .$$

Preuve . Supposons qu'il existe une suite $v^{(n)}$, telle que

$$\sum_{i,j} |v_{i,j}^{(n)}|_0^2 + \sum_i |v_i^{(n)}|_0^2 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} < v^{(n)}, v^{(n)} >_\Omega = 0 .$$

Donc $v^{(n)}$ est borné dans $H^1(\Omega)$, d'où il résulte que une sous-suite (qui sera noté aussi par $v^{(n)}$ pour commodité) est convergent dans $H^0(\Omega)$, donc il existe $v \in H^0(\Omega)$, tel que $v^{(n)} \to v$ dans $H^0(\Omega)$.
De l'inégalité de Korn :

$$|v^{(n+p)} - v^{(n)}|_1^2 \leq c \left[< v^{(n+p)} - v^{(n)}, v^{(n+p)} - v^{(n)} >_\Omega + |v^{(n+p)} - v^{(n)}|_0^2\right] ,$$

il résulte que $v^{(n)}$ est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, donc $v^{(n)} \to v$ dans $H^1(\Omega)$, ce qui entraine
$v_{i,j} + v_{j,i} = 0$, pour tout i, j .
De $v_{1,1} = 0$, il résulte $v_1 = \alpha(x_2)$.
De $v_{2,2} = 0$, il résulte $v_2 = \beta(x_1)$.
De $v_{1,2} + v_{2,1} = 0$ on déduit $\alpha'(x_2) = -\beta'(x_1) =$ *constante* .
On déduit alors que v est de la forme : $v_1 = a_1 + b_1 x_2$, et $v_2 = a_2 - b_1 x_1$.
En tenant compte que $v = 0$ sur S_B , on obtient $v = 0$ dans Ω , ce qui contredit le fait que $|v^{(n)}|_1 = 1$, d'où le résultat .

Soit P la projection orthogonale sur H_σ^0 dans H^0 . On a le lemme suivant , qui donne les propriétés de P , et qui se montre de la même manière que le Lemme 3.1 page 369 de [3] :

Lemme 2.4. *Supposons que* $s \in [0, 4]$. *Alors*
(*i*) *P est un opérateur borné sur* $H^s(\Omega, R^2)$.
(*ii*) *P est aussi borné sur* $K^s(\Omega \times (0, T))$, *avec la norme indépendante de* T .
(*iii*) *Supposons que* $\Phi \in H^{s+1}(\Omega)$. *Alors* $P(\nabla\Phi) = \nabla\Psi$, *où* Ψ *satisfait à*

$$\triangle\Psi = 0 \text{ dans } \Omega , \ \partial_n\Psi = 0 \text{ sur } S_B , \ \Psi = \Phi \text{ sur } S_F . \tag{2.7}$$

On énonce maintenant le théorème principal de cette section .

Théorème 2.5. *Soit* $r \in (3,4]$. *Pour tout* $T > 0$ *et tout* $f \in K^{r-2}(G_T)$ *avec* $Pf(0) = 0$, *le problème (2.1) - (2.5) a une solution unique* (v,q) *qui satisfait à l'inégalité*

$$\|v\|_{K^r(G_T)} + \|\nabla q\|_{K^{r-2}(G_T)} + \|q\|_{K^{r-3/2}(S_F\times(0,T))} \leq c\,\|f\|_{K^{r-2}(G_T)} ,$$

où c *est une constante qui ne dépend pas de* T .

Preuve . Si on applique P au (2.1) on obtient :

$$v_{,t} - \nu P(\triangle v) + 2P(Bv) + \nabla q_v = Pf\ , \quad \text{avec } \nabla q_v = P(\nabla q)\,.$$

Le lemme 2.4 nous dit que

$$\begin{cases} q_v = 2\sum_{i,j} v_{i,j} n_i n_j & \text{sur } S_F \\ \triangle q_v = 0 & \text{dans } \Omega \\ \partial_n q_v = 0 & \text{sur } S_B \quad . \end{cases} \tag{2.8}$$

De la remarque qui suit le Lemme 2.2 , il résulte qu'on peut regarder (2.8) comme en définissant un opérateur borné $v \to q_v$, de H^r dans H^{r-1} .

On introduit l'opérateur $A : V^r(\Omega) \to P\,H^{r-2}(\Omega)$ par :

$$A\,v = -\nu\,P(\triangle v) + 2P(B\,v) + \nabla q_v$$

avec

$$V^r(\Omega) = \{v \in PH^r(\Omega)\ ,\ \text{tel que } S_{tan}(v) = 0 \text{ sur } S_F\ ,\ v = 0 \text{ sur } S_B\}\ ,$$

où $S_{tan}(v)$ répresente la partie tangente à S_F de $S(v)$, et où q_v est défini par (2.8) .

Il est facile de voir que $PH^r(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^r(\Omega)$ (parce que si $Pu_n \to v$ dans $H^r(\Omega)$ alors , du Lemme 2.4(i) il resulte que si on applique l'opérateur P , on obtient $Pu_n \to Pv$ dans $H^r(\Omega)$, ce qui implique $v \in PH^r(\Omega)$) .
Donc V^r est un espace de Hilbert , sous-espace fermé de $H^r(\Omega)$.

Dans la suite nous nous proposons de résoudre le problème d'evolution

$$\begin{cases} v_{,t} + A\,v = Pf \\ v(0) = 0 \quad . \end{cases} \tag{2.9}$$

On va énoncer deux lemmes qui correspondent aux Lemmes 3.3 et 3.4 de [3] , et qui donnent les propriétés de l'opérateur A .

Lemme 2.6. *Si* $2 \leq r \leq 4$, *alors* A *a un inverse borné* .

Preuve . Soit $Av = f$, avec $f \in PH^{r-2}$ et $v \in V^r$.
On pose $\nabla q_0 = \nu(I-P)(\triangle v) - 2(I-P)(Bv)$, et l'équation $Av = f$ peut s'écrire sous la forme

$$-\nu\triangle v + 2Bv + \nabla q_0 + \nabla q_v = f \, .$$

On pose $q = q_0 + q_v$, et on voit que v et q satisfont au système :

$$-\nu\triangle v + 2Bv + \nabla q = f \qquad \text{dans } \Omega \, , \tag{2.10}$$

$$\nabla \cdot v = 0 \qquad \text{dans } \Omega \, , \tag{2.11}$$

$$S(v,q) = 0 \qquad \text{sur } S_F \, , \tag{2.12}$$

$$v = 0 \qquad \text{sur } S_B \, . \tag{2.13}$$

L'égalité (2.12) se déduit en tenant compte de $S_{tan} = 0$, de la définition de q_v , et du fait que $q_0 = 0$ sur S_F .

Inversement , si v , q satisfont à (2.10) - (2.13) , on obtient facilement l'égalité $Av = f$.
On utilise la methode exposée p. 371 de [3] .
Si $v, \varphi \in H^2(\Omega)$, $q \in H^1(\Omega)$ et $\nabla \cdot v = 0$, alors on a l'égalité suivante :

$$\int_\Omega (-\nu\triangle v + 2Bv + \nabla q)\varphi = \frac{1}{2}\nu < v, \varphi >_\Omega +2\int_\Omega (Bv)\varphi + \int_{\partial\Omega} S(v,q)\varphi - \int_\Omega q(\nabla \cdot \varphi) \, .$$

Soit $V = \{u \in {}^0H^1(\Omega) \, , \, \nabla \cdot u = 0\}$.
V est un espace de Hilbert , sous-espace de $H^1(\Omega)$.
On dit que v est une solution faible de (2.10) - (2.13) si elle satisfait au problème :
Trouver $v \in V$ tel que

$$\frac{1}{2}\nu < v, \varphi >_\Omega +2\int_\Omega (Bv)\varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \, , \quad \forall \varphi \in V \, . \tag{2.14}$$

Il est clair avec le Lemme 2.3 que

$$\frac{1}{2}\nu < v, v >_\Omega +2\int_\Omega (Bv)v \, dx = \frac{1}{2}\nu < v, v >_\Omega \geq c\,|v|_1^2 \, .$$

On peut donc appliquer le Lemme de Lax-Milgram , et on déduit que l'équation variationnelle (2.14) a une solution unique $v \in V$ qui satisfait à l'inégalité :

$$|v|_1 \leq c\,|f|_0 \, .$$

D'autre part , exactement comme à la fin de la Section 4 de [3] on montre que pour tout $p \in H^0$ il existe un élément $u_p \in {}_0H^1(\Omega)$ tel que $\nabla \cdot u_p = p$ et $|u_p|_1 \leq c\,|p|_0$.
On déduit qu'il existe une solution unique $q \in L^2(\Omega)$ de l'équation variationnelle

$$\int_\Omega q\,p \, dx = \frac{1}{2}\nu < v, u_p >_\Omega +2\int_\Omega (Bv)u_p - \int_\Omega f u_p \, , \quad \forall \, p \in L^2(\Omega) \, .$$

Donc pour tout $u \in {}_0H^1$, on a

$$\int_\Omega q \nabla \cdot u \, dx = \frac{1}{2}\nu < v, u_{\nabla \cdot u} >_\Omega +2\int_\Omega (Bv)u_{\nabla\cdot u} - \int_\Omega f u_{\nabla\cdot u} \quad .$$

D'autre part $\nabla \cdot u_{\nabla\cdot u} = \nabla \cdot u$, c'est à dire $u_{\nabla\cdot u} - u \in V$, et si on remplace φ par $u_{\nabla\cdot u} - u$ dans (2.14) , on obtient

$$\frac{1}{2}\nu < v, u_{\nabla\cdot u} >_\Omega +2\int_\Omega (Bv)u_{\nabla\cdot u} - \int_\Omega f u_{\nabla\cdot u} = \frac{1}{2}\nu < v, u >_\Omega +2\int_\Omega (Bv)u - \int_\Omega fu \ ,$$

donc $q \in L^2(\Omega)$ satisfait à l'équation variationnelle

$$\int_\Omega q \nabla \cdot u \, dx = \frac{1}{2}\nu < v, u >_\Omega +2\int_\Omega (Bv)u - \int_\Omega fu \ , \qquad \forall\, u \in {}_0H^1(\Omega) \, . \tag{2.15}$$

On peut montrer que v et q qui satisfont à (2.14) et (2.15) sont plus régulières , c'est à dire $v \in H^2(\Omega)$ et $q \in H^1(\Omega)$. Pour montrer ça , on utilise les résultats de [5] p. 38 (pour des éstimation dans l'intérieur du domaine) , et de [7] p. 195 (pour des éstimations dans un voisinage de la frontière) .

Si on prends $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans (2.15) , on obtient (2.10) .
On prends ensuite $u \in {}_0H^1(\Omega)$, et on obtient (2.12) , donc on a une solution $v \in H^2(\Omega)$, $q \in H^1(\Omega)$ de (2.10) - (2.13) .

Les équations (2.10) et (2.11) forment un système elliptique, et chacune des égalités (2.12) ou (2.13) satisfait aux conditions de complémentarité (voir [10] page 33, et [8] page 144).
Nous voulons appliquer le Théorème 10.5 page 78 de [1] .
Soit η_1 , η_2 comme à la démonstration du Lemme 2.2 , et on pose
$v_i = v\,\eta_i$ et $q_i = q\,\eta_i$.
Alors v_1 et q_1 satisfont au système :

$$-\nu\,\triangle v_1 + \nabla q_1 = \eta_1(f - 2B\,v) - 2\nu\nabla\eta_1\cdot\nabla v - v\triangle\eta_1 + q\nabla\eta_1 = \hat{f}_1 \qquad \text{dans } \Omega \ , \tag{2.16}$$

$$\nabla \cdot v_1 = v \cdot \nabla\eta_1 = \hat{\sigma}_1 \qquad \text{dans } \Omega \ , \tag{2.17}$$

$$S(v_1, q_1) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \ , \tag{2.18}$$

tandis que v_2 et q_2 satisfont au système :

$$-\nu\,\triangle v_2 + \nabla q_2 = \eta_2(f - 2B\,v) - 2\nu\nabla\eta_2\cdot\nabla v - v\triangle\eta_2 + q\nabla\eta_2 = \hat{f}_2 \qquad \text{dans } \Omega \ , \tag{2.19}$$

$$\nabla \cdot v_2 = v \cdot \nabla\eta_2 = \hat{\sigma}_2 \qquad \text{dans } \Omega \ , \tag{2.20}$$

$$v_2 = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \, . \tag{2.21}$$

Si $f \in H^0(\Omega)$, alors $v \in H^1(\Omega)$, avec $|v|_1 \le c\,|f|_0$, ce qui implique $\hat{f}_i \in L^2(\Omega)$ avec $|\hat{f}_i|_0 \le c_1\,|f|_0$.
Aussi , $\hat{\sigma}_i \in H^1(\Omega)$ avec $|\hat{\sigma}_i|_1 \le c_1\,|f|_0$.

On a déjà vu que $v \in H^2(\Omega)$, donc $v_i \in H^2(\Omega)$ avec $|v_i|_2 \leq c_1|f|_0$.
Si $f \in H^1(\Omega)$ alors $\hat{f}_i \in H^1(\Omega)$ et $\hat{\sigma}_i \in H^2(\Omega)$, avec
$|\hat{f}_i|_1 \leq c_1|f|_1$ et $|\hat{\sigma}_i|_2 \leq c_1\,|f|_1$.
On applique le Théorème 10.5 pag 78 de [1] , et on déduit :
$v_i \in H^3(\Omega)$ avec $|v_i|_3 \leq c_1|f|_1$.
De la même manière on déduit que si $f \in H^2(\Omega)$, alors
$v_i \in H^4(\Omega)$ avec $|v_i|_4 \leq c_1|f|_2$.
Donc le lemme est vrai pour $r \in \{2,3,4\}$, et il résulte en général par interpolation .

On va montrer dans la suite un lemme similaire au Lemme 3.4 de [3] page 372 .

Lemme 2.7. *Si* $r \in [2,4]$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$ *avec* $Re\,\lambda \geq 0$, *alors l'opérateur* $\lambda + A : V^r(\Omega,\mathbb{C}^2) \to PH^{r-2}(\Omega,\mathbb{C}^2)$ *est inversible , et il existe une constante positive* c , *telle que*

$$|(\lambda + A)^{-1}f|_r \leq c(|f|_{r-2} + |\lambda|^{(r-2)/2}|f|_0)\,,\quad \forall\, f \in P\,H^{r-2}(\Omega,\mathbb{C}^2)\,.$$

Preuve . On va étudier l'équation

$$\lambda v + A\,v = f\,. \tag{2.22}$$

On va chercher une solution faible de (2.22) , $v = v^1 + i \cdot v^2$ avec $v^j \in V^r(\Omega,\mathbb{R}^2)$, telle que

$$\frac{1}{2}\nu < v,w >_\Omega +\lambda(v,w)_0 + 2(Bv,w)_0 = (f,w)_0\ ,\ \forall\, w = w^1 + i \cdot w^2\ ,\ \text{avec } w^j \in V^r\ , \tag{2.23}$$

où on pose
$(v,w)_0 = \int_\Omega v\,w^*\,dx$, avec w^* la conjuguée de w ,
$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, avec $\lambda_1 \geq 0$, et
$< v,w >_\Omega = \sum_{i,j}\int_\Omega(v_{i,j} + v_{j,i})(w^*_{i,j} + w^*_{j,i})$.
On notera dans la suite :

$$a(v,w) = \frac{1}{2}\nu < v,w >_\Omega +2(Bv,w)_0 + \lambda(v,w)_0\,.$$

Le calcul suivant :

$$(Bv,v)_0 = \omega\int_\Omega(v_1v_2^* - v_2v_1^*)\,dx = 2\omega \cdot i\int_\Omega(v_1^2\,v_2^1 - v_1^1v_2^2)\,dx$$

où on a posé $v_k = v_k^1 + i \cdot v_k^2$, nous donne

$$a(v,v) = \left[\frac{1}{2}\nu < v,v >_\Omega +\lambda_1(v,v)_0\right] + i \cdot \left[\lambda_2(v,v)_0 + 4\omega\int_\Omega(v_1^2\,v_2^1 - v_1^1v_2^2)\,dx\right].$$

Il résulte que

$$|a(v,v)| \geq c\,|v|_1^2\,,$$

donc on peut appliquer le Lemme de Lax-Milgram de [4] pag. 41 qui nous permets de déduire l'existence d'une solution de l'équation (2.22) , qui satisfait à

$$|v|_1 \leq c|f|_0 \,. \tag{2.24}$$

Il est clair que

$$|a(v,v)|^2 = \left[\frac{1}{2}\nu < v,v > +\lambda_1|v|_0^2\right]^2 + \left[\lambda_2|v|_0^2 + 4\omega\int_\Omega (v_1^2 v_2^1 - v_1^1 v_2^2)\,dx\right]^2 \,. \tag{2.25}$$

Soit

$$H = \int_\Omega \{\lambda_2[(v_1^1)^2 + (v_1^2)^2 + (v_2^1)^2 + (v_2^2)^2] + 4\omega(v_1^2 v_2^1 - v_1^1 v_2^2)\}\,dx \,.$$

On distingue les cas suivantes :

Cas 1. Si $\lambda_2 > 2\omega$, alors

$$|H| \geq (\lambda_2 - 2\omega)|v|_0^2 \,.$$

Cas 2. Si $\lambda_2 < -2\omega$, alors

$$|H| \geq |\lambda_2 + 2\omega||v|_0^2 \,.$$

On peut réunir ces deux cas en disant :

$$\text{Si } |\lambda_2| > 2\omega \text{ , alors } |H| \geq (|\lambda_2| - 2\omega)|v|_0^2 \,, \tag{2.26}$$

ce qui avec (2.25) nous donne

$$|a(v,v)|^2 \geq \frac{1}{4}\nu^2(< v,v >_\Omega)^2 + \lambda_1^2|v|_0^4 + (|\lambda_2| - 2\omega)^2|v|_0^4 \,.$$

Puisque $\frac{1}{4}\nu^2(< v,v >_\Omega)^2 \geq c_1(|v|_1^4 + |v|_0^4)$, alors

$$|a(v,v)|^2 \geq c_1\,|v|_1^4 + \{c_1 + \lambda_1^2 + (|\lambda_2| - 2\omega)^2\} \cdot |v|_0^4 \,.$$

On peut écrire

$$c_1 + \lambda_1^2 + (|\lambda_2| - 2\omega)^2 = c_1 + \lambda_1^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_2^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_2^2 - 4\omega|\lambda_2| + 4\omega^2 \,.$$

Il est clair que

$$\tfrac{1}{2}\lambda_2^2 - 4\omega|\lambda_2| + 4\omega^2 \geq 0 \text{ , pour } |\lambda_2| \geq 8\omega$$

et

$$c_1 + \lambda_1^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_2^2 \geq c_2\,(1 + |\lambda|)^2 \,,$$

ce qui donne finalement

$$|a(v,v)| \geq c_3\,\{|v|_1^2 + (1 + |\lambda|)|v|_0^2\} \qquad \text{pour } |\lambda_2| \geq 8\omega \,. \tag{2.27}$$

On étudie maintenant la situation $|\lambda_2| < 8\omega$.

Dans ce cas , puisque la définition de a nous dit que

$$|a(v,v)| \geq < v,v > +\lambda_1|v|_0^2 \geq c_4\,\{|v|_1^2 + (1 + \lambda_1)|v|_0^2\} \,,$$

et puisque

$$1+\lambda_1 \geq \frac{1}{1+8\omega}(1+|\lambda|) ,$$

on peut écrire

$$|a(v,v)| \geq c_5 \{|v|_1^2 + (1+|\lambda|)|v|_0^2\} \text{ , pour } |\lambda_2| \leq 8\omega , \tag{2.28}$$

ce qui avec (2.27) , en choisissant $c_6 = \min\{c_3, c_5\}$, nous donne

$$|a(v,v)| \geq c_6 \{|v|_1^2 + (1+|\lambda|)|v|_0^2\} \text{ , pour tout } \lambda \in \mathbb{C} \text{ , } \lambda_1 \geq 0 . \tag{2.29}$$

Si on fait $w = v$ dans (2.23) et on tient compte de l'inégalitée ci-dessus , on tire

$$|v|_0 \leq c_7(1+|\lambda|)^{-1}|f|_0 . \tag{2.30}$$

On utilise maintenant le Lemme 2.6. , et on déduit que l'équation (2.22) a une solution forte $v \in V^2(\Omega, \mathbb{C}^2)$.
Si $f \in PH^{r-2}$, alors $f - \lambda v \in PH^{r-2}$ (parce que $r \leq 4$) , et on déduit du Lemme 2.6 que

$$|v|_r \leq c\,[|f|_{r-2} + |\lambda| \cdot |v|_{r-2}] \leq c\,[|f|_{r-2} + |v|_r^{(r-2)/r} \cdot |\lambda| \cdot |v|_0^{2/r}] \leq$$

$$\leq c|f|_{r-2} + \frac{1}{2}|v|_r + c_8\,|\lambda|^{r/2}|v|_0 ,$$

ce qui avec (2.30) , finit la preuve .

Fin de la preuve du Théorème 2.5 .
Les deux lemmes précédents nous montrent que l'opérateur A a exactement les mêmes propriétés que l'opérateur A de la démonstration du Théorème 3.2 de [3] . On peut donc utiliser le même argument , avec la transformation de Fourier en t , et on aura une solution sur $(0, T)$ du système

$$\begin{cases} v_{,t} + Av = Pf \\ v(0) = 0 , \end{cases}$$

avec

$$\|v\|_{K^r(G_T)} \leq c\,\|f\|_{K^{r-2}(G_T)} . \tag{2.31}$$

On continue comme dans la preuve du Théorème 3.2 pag 374 de [3] , à la seule différence qu'on va prendre $\nabla q = \nu(I-P)\Delta v - 2(I-P)(Bv) + \nabla q_v + (I-P)f$, et on finit la preuve du Théorème 2.5 .

3 Résolution du problème linéaire nonhomogène.

On va utiliser dans la suite les Lemmes 2.1 à 2.6 de [3] . Par commodité on va énoncer ici les deux derniers lemmes .

Lemme 3.1.
(*i*) *Soit* $r > 1$ *et* $r \geq s \geq 0$. *Si* $v \in H^r(\Omega)$ *et* $w \in H^s(\Omega)$, *alors* $v\,w \in H^s(\Omega)$ *et* $|v\,w|_s \leq c\,|v|_r|w|_s$.
(*ii*) *Si* $v, w \in H^1(\Omega)$ *alors* $v\,w \in H^0(\Omega)$, *et* $|v\,w|_0 \leq c\,|v|_1|w|_1$
(*iii*) *Si* $v \in H^r(\Omega)$,$r > 1$ *et* $w \in {}_0H^{-1}(\Omega)$ *(l'éspace dual de* ${}^0H^1(\Omega)$ *)* , *alors* $v\,w$ *est dans* ${}_0H^{-1}(\Omega)$, *et* $|v\,w|_{-1} \leq |v|_r|w|_{-1}$.
(*iv*) *Si* $v \in H^1(\Omega)$ *et* $w \in H^0(\Omega)$, *alors* $v\,w \in {}_0H^{-1}$ *et* $|v\,w|_{-1} \leq c\,|v|_1|w|_0$.

Lemme 3.2.
Supposons que X, Y, Z *sont des espaces de Hilbert , et* $M : X \times Y \to Z$ *est une application bilinéaire , bornée.*
(*i*) *Soit* $v \in H^s(0, T, X)$ *et* $w \in H^s(0, T, Y)$ avec $s > \frac{1}{2}$. *Si* $(v\,w)$ *est défini par* $(v\,w)(t) = M(v(t), w(t))$, *alors*
$v\,w \in H^s(0, T, Z)$ *et* $|v\,w|_s \leq c\,|v|_s|w|_s$.
(*ii*) *Si* $s \leq 2$ *et* v, w *satisfont aux conditions supplémentaires :*
$\partial_t^k v(0) = \partial_t^k w(0) = 0$, $0 \leq k < s - \frac{1}{2}$, *et si* $s - \frac{1}{2}$ *n'est pas entier , alors la constante* c *de* (*i*) *peut être choisie indépendante de* T .

Comme en [3] page 374, si $v \in {}_0H^r(\Omega)$ avec $r \geq 2$, on peut considérer $\partial_k v$, $k = 1,2$, comme un élément de ${}_0H^{-1}(\Omega)$ (le dual de ${}^0H^1(\Omega)$) , définit par la relation :

$$< \partial_k v, \Phi >_{<_0H^{-1},{}^0H^1>} = -\int_\Omega v \partial_k \Phi \, dx \ , \quad \forall\, \Phi \in {}^0H^1(\Omega) ,$$

ce qui nous dit que
$|\partial_k v|_{-1} \leq |v|_0$, et donc ∂_k est un opérateur linéaire , continu de ${}_0K^r(G_T)$ dans $\tilde{K}^r(G_T)$, où
$\tilde{K}^r(G_T) = H^0(0, T, H^{r-1}(\Omega)) \cap H^{r/2}(0, T, {}_0H^{-1}(\Omega))$ et
$\|\partial_k v\|_{\tilde{K}^r(G_T)} \leq \|v\|_{K^r(G_T)}$, $\forall\, v \in {}_0K^r(G_T)$.
On va considérer dans la suite l'espace :

$$X^r = \{(v,q)\ ,\ v \in {}_0K^r(G_T)\ ,\ \nabla q \in K^{r-2}(G_T)\ , \text{et } q \in K^{r-3/2}(S_F \times (0,T))\}$$

muni de la norme :

$$\|(v,q)\|_{X^r} = \|v\|_{K^r(G_T)} + \|\nabla q\|_{K^{r-2}(G_T)} + \|q\|_{K^{r-3/2}(S_F \times (0,T))} \,.$$

Il est facile de voir que X^r est un espace de Banach .

On va définir un nouvel espace Y^r comme l'espace des éléments de la forme (f, σ, a, v_0) , avec

$f \in K^{r-2}(G_T)$, $\sigma \in \tilde{K}^r(G_T)$, $a \in K^{r-3/2}(S_F \times (0, T))$, $v_0 \in {}_0H^{r-1}(\Omega)$, qui satisfont à

$$\nabla \cdot v_0 = \sigma(0) \quad \text{dans } \Omega \ , \tag{3.1}$$

$$v_0 = 0 \quad \text{sur } S_B \ , \tag{3.2}$$

$$M_{S_F} \cdot S_{tan}(v_0) = a_{tan}(0) \ . \tag{3.3}$$

Il est clair alors que $L = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ définit par (1.27)-(1.30) ou par (1.31)-(1.34) , est un opérateur linaire de X^r dans Y^r .

On a d'abord la Proposition suivante :

Proposition 3.3.
Soit $r, s \geq 0$, *et* $H^{r,s}(G_T) = H^0(0, T\, H^r(\Omega)) \cap H^r(0, T, H^0(\Omega))$. *Alors pour tout* $u \in H^{r,s}(G_T)$ *on a* $u \cdot \cos(\omega t) \in H^{r,s}(G_T)$, avec
$\|u \cdot \cos(\omega t)\|_{H^{r,s}(G_T)} \leq c \, \|u\|_{H^{r,s}(G_T)}$.
Les mêmes assertions sont valables avec $\sin(\omega t)$.

Le résultat est évident pour r et s entiers , et la proposition en résulte par interpolation .

Les deux théorèmes qui suivent sont le but de cette section .

Théorème 3.4. *Pour* $r \in (3, \frac{7}{2})$, *l'opérateur* $L : X^r \to Y^r$ *a un inverse bornée .*

Preuve . Soit $(f, \sigma, a, v_0) \in Y^r$.
On fera les notations

$$\bar{f} = E^* f$$

et

$$\bar{a} = \frac{1}{M_{S_F}} E^* a \ , \text{ où } M_{S_F} \text{ est donné au paragraphe 1 .}$$

En faisant le changement de la fonction inconnue
$\bar{v} = E^* v$,
l'équation $L(v, q) = (f, \sigma, a, v_0)$ sera équivalente au système

$$\bar{v}_{,t} - \nu \Delta \bar{v} + 2B\, \bar{v} + \nabla q = \bar{f} \ , \tag{3.4}$$

$$\nabla \cdot \bar{v} = \sigma \ , \tag{3.5}$$

$$q n_i - \mu \sum_j (\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{j,i}) n_j = \bar{a}_i \tag{3.6}$$

(c'est à dire $S(\bar{v}, q) = \bar{a}$) ,

$$\bar{v}(0) = v_0 \ . \tag{3.7}$$

La Proposition 3.3 nous dit que

$$\bar{f} \in K^{r-2}(G_T) \ , \text{ et } \|\bar{f}\|_{K^{r-2}(G_T)} \leq c \, \|f\|_{K^{r-2}(G_T)} \ . \tag{3.8}$$

Puisque $M_{S_F}(\theta)$ est une fonction réguliere sur S_F , on peut très facilement déduire que

$$\|\bar{a}\|_{K^{r-3/2}(S_F\times(0,T))} \leq c\,\|a\|_{K^{r-3/2}(S_F\times(0,T))} \,. \tag{3.9}$$

Pour résoudre le problème (3.4)-(3.7) on applique exactement les mêmes étapes que dans la démonstration du Théorème 4.1 de [3].
Le term $2B\,\bar{v}$ de (3.4) qui n'apparaît pas dans l'égalitée (4.1) de [3] ne change rien, on peut choisir à la page 376
$\partial_t v^{(1)}(0) = \nu\triangle v_0 - \nabla q^{(1)}(0) + f(0) - 2B\,v_0$.
Donc il existe $(\bar{v}, q) \in X^r$ solution de (3.4)-(3.7) , avec

$$\|(\bar{v},q)\|_{X^r} \leq k\,(T)\,\|(f,\,\sigma,\,a,\,v_0)\|_{Y^r} \,.$$

Mais $v = E\,\bar{v}$, et grâce à la proposition 3.3 on obtient

$$\|(v,q)\|_{X^r} \leq k\,(T)\,\|(f,\,\sigma,\,a,\,v_0)\|_{Y^r} \,, \tag{3.10}$$

ce qui finit la preuve .

Malheureusement , la norme de l'inverse de L dépends de T . Pour améliorer ce résultat on introduit les espaces suivantes :

$$X_0^r = \{(v,q) \in X^r \text{ , avec } v(0) = v_{,t}(0) = 0 \text{ et } q(0) = 0\}$$

et

$$Y_0^r = \{(f,\sigma,a,0) \in Y^r \text{ , avec } f(0) = 0 \text{ , } \sigma(0) = \sigma_{,t}(0) = 0 \text{ , } a(0) = 0\} \,,$$

où on désigne par $\sigma_{,t}(0)$ la trace de $\sigma_{,t} \in H^{(r-2)/2}(0,\,T,\,{}_0H^{-1})$ dans ${}_0H^{-1}$.

En raisonnant comme dans la démonstration du Théorème 4.3 de [3] , on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.5. *L'opérateur L est inversible de X_0^r dans Y_0^r , où $r \in (3,\,\frac{7}{2})$. Les norms de L et L^{-1} sont bornées indépendamment en T .*

4 Preuve du Théorème 1.1 .

Pour la preuve du théorème principal du notre travail , on s'inspire de la démonstration du Théorème 1 de [3] (Section 5), en utilisant une méthode de point fixe.

Soit $T_0 > 0$ fixé , et on pose $\sigma_1 = \sum_{i,j}(v_0)_{i,j}(v_0)_{j,i}$.

Le Lemme 3.1 nous dit que $\sigma_1 \in H^{r-2}$.

De Lemme 2.1 de [3] on déduit qu'il existe une fonction $\sigma^0 \in K^r(G_{T_0})$, telle que $\sigma^0(0) = 0$ et $\sigma^0_{,t}(0) = \sigma_1$.

Si on écrit $v = v \cdot 1$, du Lemme 3.1 on déduit que pour tout $v \in H^0(\Omega)$, on a $v \in {}_0H^{-1}(\Omega)$, avec $|v|_{-1} \leq c\,|v|_0$.

Il résulte que $\sigma^0 \in \tilde{K}^r(G_{T_0})$, avec

$$\|\sigma^0\|_{\tilde{K}^r(G_{T_0})} \leq c\,\|\sigma^0\|_{K^r(G_{T_0})} .$$

Soit $(v^0, q^0) \in X^r(G_{T_0})$ la solution donnée par le Théorème 3.4 du problème

$$L(v^0, q^0) = (0,\, \sigma^0,\, A,\, v_0) ,$$

où on pose

$$A_i = g(E(t)x)_2(E(t)\bar{n})_i - \frac{1}{2}\omega^2\{[(E(t)x)_1]^2 + [(E(t)x)_2]^2\}(E(t)\bar{n})_i \ , \ i = 1, 2 .$$

On fera dans la suite le changement des inconnues $(v, q) = (v^0, q^0) + (v^1, q^1)$,
ce qui nous amène à chercher la nouvelle inconnue (v^1, q^1) dans l'espace X_0^r .

On va utiliser les notations suivantes :

$$\eta^0(t) = \int_0^t E^*(s)v^0(s)\,ds ,$$

$$\eta^1(t) = \int_0^t E^*(s)v^1(s)\,ds ,$$

$$\eta(t) = \eta^0(t) + \eta^1(t) = \int_0^t E^*(s)[v^0(s) + v^1(s)]\,ds .$$

Ensuite on pose

$$\bar{\eta}^0(t) = E(t)[I + \eta^0(t)] ,$$

$$\bar{\eta}^1(t) = E(t)\eta^1(t) ,$$

$$\bar{\eta}(t) = \bar{\eta}^0(t) + \bar{\eta}^1(t) = E(t)[I + \eta^0(t) + \eta^1(t)] ,$$

et finalement :

$$\xi^0(t) = [\bar{\eta}^0(t)]^{-1} = (I + \frac{D\eta^0}{Dx})^{-1}\,E^*(t) ,$$

$$\xi^0(t) = [(I + \frac{D\eta^0}{Dx})^{-1} - I]\, E^*(t) ,$$

$$\bar{\xi}(t) = (I + \frac{D\eta}{Dx})^{-1}\, E^*(t) ,$$

$$\xi(t) = [(I + \frac{D\eta}{Dx})^{-1} - I]\, E^*(t) ,$$

$$\xi^1(t) = \xi - \xi^0 = [(I + \frac{D\eta}{Dx})^{-1} - (I + \frac{D\eta^0}{Dx})^{-1}]\, E^*(t) .$$

Soit $\Lambda^0(v,q)$ l'opérateur défini par les membres de gauche de (1.18)-(1.20) et (1.22), avec ($\bar{\xi}$, $\bar{N}$) remplacés par ($\bar{\xi}^0$, $\bar{N}^0$) correspondant à $\bar{\eta}_0(S_F, t)$.
On pose $L^0 = \Lambda^0 - L$.

De même , on désigne comme dans la section 1 par Λ l'opérateur (non-linéaire) définit par les mêmes relations (1.18)-(1.20) et (1.22), avec $\bar{\xi}$ et $\bar{N}$ determinés par $v = v^0 + v^1$.
On pose $L^1 = \Lambda - \Lambda^0$.
Avec les notations précédentes , on peut écrire

$\Lambda = L + L^0 + L^1$,

où on rappelle que L est donné par les relations (1.27)-(1.30) .
On écrit :

$$L^0 = (L_1^0, L_2^0, L_3^0, L_4^0) ,$$

$$L_1^0(v,q) = -\nu \sum_{k,j,l}[\,(\bar{\xi}^0_{kj}-e^*_{kj})\partial_k(\bar{\xi}^0_{lj}v_{i,l})+e^*_{kj}\partial_k((\bar{\xi}^0_{lj}-e^*_{lj})\cdot v_{i,l})\,]+\sum_k(\bar{\xi}^0_{ki}-e^*_{ki})q_{,k} \,, \quad (4.1)$$

$$L_2^0(v,q) = \sum_{k,j}(\bar{\xi}^0_{kj} - e^*_{kj})v_{j,k} \,, \quad (4.2)$$

$$L_3^0(v,q) = q[\,\bar{N}_i^0 - (E\bar{n})_i\,] - \nu \sum_{j,k}\{[\,(\bar{\xi}^0_{kj} - e^*_{kj})v_{i,k} + (\bar{\xi}^0_{ki} - e^*_{ki})v_{j,k}\,]\bar{N}_j^0 +$$
$$+(e^*_{kj}v_{i,k} + e^*_{ki}v_{j,k})[\,\bar{N}_j^0 - (E\bar{n})_j\,]\} \,, \quad (4.3)$$

$$L_4^0(v,q) = 0 \,, \quad (4.4)$$

et finalement on écrit

$$L^1 = (L_1^1, L_2^1, L_3^1, L_4^1) ,$$

où

$$L_1^1(v,q) = -\nu \sum_{k,j,l}[\,(\bar{\xi}_{kj}-\bar{\xi}^0_{kj})\partial_k(\bar{\xi}_{lj}v_{i,l})+\bar{\xi}^0_{kj}\partial_k((\bar{\xi}_{lj}-\bar{\xi}^0_{lj})\cdot v_{i,l})\,]+\sum_k(\bar{\xi}_{ki}-\bar{\xi}^0_{ki})q_{,k} \,, \quad (4.5)$$

$$L_2^1(v,q) = \sum_{k,j}(\bar{\xi}_{kj} - \bar{\xi}^0_{kj})v_{j,k} \,, \quad (4.6)$$

$$L_3^1(v,q) = q[\,\bar{N}_i - \bar{N}_i^0\,] - \nu \sum_{j,k}\{[\,(\bar{\xi}_{kj}-\bar{\xi}^0_{kj})v_{i,k}+(\bar{\xi}_{ki}-\bar{\xi}^0_{ki})v_{j,k}\,]\bar{N}_j+(\bar{\xi}^0_{kj}v_{i,k}+\bar{\xi}^0_{ki}v_{j,k})(\bar{N}_j-\bar{N}_j^0)\} \,,$$
$$(4.7)$$

$$L_4^1(v,q)=0\ . \tag{4.8}$$

Notre problème peut s'écrire sous la forme

$$\Lambda((v^0,q^0)+(v^1,q^1))=(0,\ 0,\ g\bar{\eta}_2\bar{N}_i-\frac{1}{2}\omega^2(\bar{\eta}_1^2+\bar{\eta}_2^2)\bar{N}_i,\ v_0)\ ,$$

c'est-à-dire

$$L(v^1,q^1)+L^0(v^1,q^1)+L^1(v^0,q^0)+L^1(v^1,q^1)=$$
$$=(0,\ 0,\ g\bar{\eta}_2\bar{N}_i-\frac{1}{2}\omega^2[(\bar{\eta}_1)^2+(\bar{\eta}_2)^2]\bar{N}_i,\ v_0)-L(v^0,q^0)-L^0(v^0,q^0)\ ,$$

ce qui est équivalent à

$$L(v^1,q^1)+L^0(v^1,q^1)+L^1(v^0,q^0)+L^1(v^1,q^1)-(0,\ 0,\ a^1,\ 0)=(0,\ -\sigma,\ a^0,\ 0)-L^0(v^0,q^0)\ , \tag{4.9}$$

où

$$a^1=g(E\eta^1)_2\bar{N}_i+g(E(x+\eta^0))_2(\bar{N}_i-\bar{N}_i^0)-\frac{1}{2}\omega^2\{[(\bar{\eta}_1^0+(E\eta^1)_1)^2+$$
$$+(\bar{\eta}_2^0+(E\eta^1)_2)^2-(\bar{\eta}_1^0)^2-(\bar{\eta}_2^0)^2]\bar{N}_i+[(\bar{\eta}_1^0)^2+(\bar{\eta}_2^0)^2](\bar{N}_i-\bar{N}_i^0)\} \tag{4.10}$$

et

$$a^0=g(E\eta^0)_2\bar{N}_i^0+g(Ex)_2[\bar{N}_i^0-(E\bar{n})_i]-\frac{1}{2}\omega^2\{[(\bar{\eta}_1^0)^2+$$
$$+(\bar{\eta}_2^0)^2-(Ex)_1^2-(Ex)_2^2]\bar{N}_i^0+[(\bar{\eta}_1^0)^2+(\bar{\eta}_2^0)^2]\cdot[\bar{N}_i^0-(E\bar{n})_i]\}\ . \tag{4.11}$$

La relation (4.9) se met alors sous la forme :

$$L(v^1,q^1)+F(v^1,q^1)=f\ , \tag{4.12}$$

où on a noté

$$F(v^1,q^1)=L^0(v^1,q^1)+L^1(v^0,q^0)+L^1(v^1,q^1)-(0,\ 0,\ a^1,\ 0) \tag{4.13}$$

et

$$f=(0,\ -\sigma^0,\ a^0,\ 0)-L^0(v^0,q^0)\ . \tag{4.14}$$

Il est facile de voir que $f\in Y^r$.
On voit immédiatement que pour montrer $f\in Y_0^r$, il suffit de montrer que

$$\{\sum_{i,j}(\xi_{ij}^0-e_{ij}^*)v_{j,i}\}_{,t}(t=0)+\sum_{i,j}(v_0)_{i,j}(v_0)_{j,i}=0\ . \tag{4.15}$$

Mais conformément à la définition :

$$\xi^0(t)=[I+\int_0^t E^*(s)\frac{Dv^0}{Dx}\,ds]^{-1}E^*(t)\ ,$$

et en utilisant la formule générale : $(A^{-1})_{,t} = -A^{-1}A_{,t}A^{-1}$, on tire

$$\{[I + \int_0^t E^*(s)\frac{Dv^0}{Dx}\,ds]^{-1}\}_{,t}(t=0) = -\frac{Dv_0}{Dx} ,$$

ce qui entraîne

$\bar{\xi}^0_{,t}(t=0) = -\frac{Dv_0}{Dx} + I \cdot E^*_{,t}(t=0)$, d'où

$$(\bar{\xi}^0 - E^*)_{,t}(t=0) = -\frac{Dv_0}{Dx} .$$

Il résulte que (4.15) est vrai , donc $f \in Y_0^r$.

On pose dans la suite $r = 3 + 2\delta$, avec $\delta \in (0,\, \frac{1}{4})$.

Le lemme qui suit est essentiel pour l'obtention du résultat :

Lemme 4.2 . *L'application F envoi $X_0^r(G_T)$ dans $Y_0^r(G_T)$ et satisfait aux inégalitées suivantes :*

(i) $\quad \|F(v^1,q^1)\|_{Y^r} \le K_0(R)T^\delta\|(v^1,q^1)\|_{X^r} \quad , \forall\,(v^1,q^1) \in B_{X^r}(0,\,R) \cap X_0^r(G_T)$

(ii) $$\|F(v^1,q^1) - F(\tilde{v}^1,\tilde{q}^1)\|_{Y^r} \le K_0(R)T^\delta\|(v^1,q^1) - (\tilde{v}^1,\tilde{q}^1)\|_{X^r} ,$$

$$\forall\,(v^1,q^1) \,,\, (\tilde{v}^1,\tilde{q}^1) \in B_{X^r}(0,\,R) \cap X_0^r(G_T) ,$$

où $K_0(R)$ est une constante qui ne dépends pas de $T \le T_0$, et où on pose en général $B_X(x,\,l) = \{y \in X \,,\, \|y - x\|_X \le l\}$, pour un espace de Banach X , pour $x \in X$ et $l > 0$.

Preuve . Il n'est pas difficile de voir que si $(v^1,q^1) \in X_0^r(G_T)$ alors $F(v^1,q^1) \in Y_0^r(G_T)$. Pour montrer cette implication , le plus délicat est de montrer que $[L_2^1(v^0,q^0)]_{,t}(t=0) = 0$, c'est à dire $[(\bar{\xi} - \bar{\xi}^0)v_x^0]_{,t}(t=0) = 0$.

On a :

$$[(I + \frac{D\eta_0}{Dx} + \frac{D\eta^1}{Dx})^{-1} - (I + \frac{D\eta_0}{Dx})^{-1}]_{,t}(t=0) =$$

$$= -[(I + \frac{D\eta_0}{Dx} + \frac{D\eta^1}{Dx})^{-1}(\frac{D\eta^1}{Dx})(I + \frac{D\eta_0}{Dx})^{-1}]_{,t}(t=0) ,$$

et cette expression est evidemment égale à 0 , parce que $v_1(0) = v_{1,t}(0) = 0$, donc F envoi $X_0^r(G_T)$ dans $Y_0^r(G_T)$.

On peut dire que $F = (F_1,\, F_2,\, F_3,\, F_4)$, avec

$F_i = L_i^0(v^1,q^1) + L_i^1(v^0,q^0) + L_i^1(v^1,q^1) - \delta_{i3}a^1$, où

$\delta_{i3} = 1$ pour $i = 3$ et $\delta_{i3} = 0$ pour $i \ne 3$.

Puisque les terms de F_1 et F_2 sont analogues aux terms correspondants du Lemme 5.1 de [3] (la seule différence étant qu'on a des facteurs de la forme $\sin(\omega t)$ ou $\cos(\omega t)$, mais qui ne changent rien), on obtient :

$$\|F_1(v^1,q^1)\|_{K^{r-2}(G_T)} \le K_0(R)T^\delta\|(v^1,q^1)\|_{X^r} , \tag{4.16}$$

$$\|F_1(v^1,q^1) - F_1(\tilde v^1,\tilde q^1)\|_{K^{r-2}(G_T)} \le K_0(R)\,T^\delta \|(v^1,q^1) - (\tilde v^1,\tilde q^1)\|_{X^r}\ , \tag{4.17}$$

$$\|F_2(v^1,q^1)\|_{\tilde K^r(G_T)} \le K_0(R)\,T^\delta \|(v^1,q^1)\|_{X^r}\ , \tag{4.18}$$

$$\|F_2(v^1,q^1) - F_2(\tilde v^1,\tilde q^1)\|_{\tilde K^r(G_T)} \le K_0(R)\,T^\delta \|(v^1,q^1) - (\tilde v^1,\tilde q^1)\|_{X^r}\ . \tag{4.19}$$

On utilise dans toute la démonstration du Lemme 4.2 les estimations montrées dans [3] page 380-383 , c'est à dire :

$\frac{D\eta^0}{Dx}$ et ξ^0 sont de l'ordre T^δ dans les espaces $H^{1+\delta}(0,\, T,\, H^{2-2\delta}(\Omega))$ et $C(0,\, T,\, H^{2+2\delta}(\Omega))$, et $\frac{D\eta^1}{Dx}$ et ξ^1 sont de l'ordre $T^\delta \|v^1\|_{K^r(G_T)}$ dans les mêmes espaces .

Pour estimer les terms de F_3 , on rappelle les notations faites dans la Section 1, concernant la paramétrisation de la frontière.

Il est clair que $\bar\eta(S_F,\, t)$ est paramétrisé par l'expression

$$\begin{pmatrix} \bar\eta_1 \\ \bar\eta_2 \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} g_1(\theta) + \eta_1(g_1(\theta),\, g_2(\theta)) \\ g_2(\theta) + \eta_2(g_1(\theta),\, g_2(\theta)) \end{pmatrix} ,$$

ce qui implique

$$\bar N = E(t) \begin{pmatrix} -(g_2' + \eta_2') \\ g_1' + \eta_1' \end{pmatrix} = E(t)\bar n + E(t) \begin{pmatrix} -\eta_2' \\ \eta_1' \end{pmatrix} ,$$

où η' signifie $\frac{d}{d\theta}\eta = \eta_{,1} g_1' + \eta_{,2} g_2'$.

De même

$$\bar N^0 = E(t)\bar n + E(t) \begin{pmatrix} -(\eta_2^0)' \\ (\eta_1^0)' \end{pmatrix} , \tag{4.20}$$

ce qui nous permets d'écrire

$$\bar N = \bar N^0 + E(t) \begin{pmatrix} -(\eta_2^1)' \\ (\eta_1^1)' \end{pmatrix} . \tag{4.21}$$

Mais g_i et g_i' sont des fonctions régulières sur S_F et peuvent s'étendre sur Ω comme des fonctions régulières , donc implicitement $\bar N^0$ et $\bar N$ seront étendus sur Ω .

D'autre part , puisque $q^1(x,\, 0) = 0$ pour $x \in S_F$, alors on peut étendre q^1 qui est défini sur $S_F \times (0,\, T)$ à une fonction qu'on va noter aussi par q^1 pour commodité , définie sur $S_F \times (0,\, T_0)$, de sorte que

$$\|q^1\|_{K^{3/2+2\delta}(S_F\times(0,T_0))} \le c\,\|q^1\|_{K^{3/2+2\delta}(S_F\times(0,T))} ,$$

où la constante c ne depends pas de T.

On peut aussi étendre q^0 et q^1 sur Ω , en appliquant le Lemme 2.1(ii) de [3] , et on obtient des fonctions $\bar q^0$ et $\bar q^1 \in K^{2+2\delta}(\Omega \times (0,\, T_0))$, telles que

$\bar q^1(x,\, 0) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega$, $\bar q^1 = q^1$ sur $S_F \times (0,\, T_0)$ et $\bar q^0 = q^0$ sur $S_F \times (0,\, T_0)$, et en plus

$$\|\bar q^0\|_{K^{2+2\delta}(\Omega\times(0,T_0))} \le c\,\|q^0\|_{K^{3/2+2\delta}(S_F\times(0,T))}$$

et

$$\|\bar{q}^1\|_{K^{2+2\delta}(\Omega\times(0,T_0))} \leq c\,\|q^1\|_{K^{3/2+2\delta}(S_F\times(0,T))}\,.$$

Ensuite , on utilise les mêmes estimations pour $\frac{D\eta^0}{Dx}$, $\frac{D\eta^1}{Dx}$, ξ^0 et ξ^1 , que celles rappellées auparavant.
On observe aussi que pour η^0 et η^1 on a encore plus de régularité , c'est à dire :
η^0 est de l'ordre T^δ dans les espaces $H^{1+\delta}(0,\,T,\,H^{3-2\delta}(\Omega))$ et $C(0,\,T,\,H^{3+2\delta}(\Omega))$, et η^1 est de l'ordre $T^\delta\|v^1\|_{K^r(G_T)}$ dans les mêmes espaces .

Avec ces observations , la majorations de tous les termes qui apparaissent dans F_3 est une simple application des techniques utilisées dans [3] page 380-383 , en utilisant les Lemmes (2.1) à (2.6) de [3] . L'idée centrale ici , comme d'ailleurs aussi pour les terms de F_1 et F_2 , est que pour obtenir des majorations dans la norme de $H^{1+\delta}(0,\,T,\,X)$ pour les produits des fonctions de la forme h_1h_2 , avec $h_i\in H^{1+\delta}(0,\,T,\,X_i)$, où X, X_i peuvent être des espaces de Sobolev sur Ω , on cherche à appliquer les Lemmes 3.2 et 3.1.
Pour obtenir des constantes indépendentes de T dans les inégalitées (donc pour appliquer le Lemme 3.2(ii)) , si par exemple $h_1=0$ en $t=0$, mais $h_2\neq 0$ en $t=0$, on écrit $h_1(t)h_2(t)=h_1(t)[h_2(t)-h_2(0)]+h_1(t)h_2(0)$. Pour le premièr produit on applique le Lemme 3.2(ii) , tandis que pour le deuxième , le Lemme 3.1 (i) .
Pour les estimations dans la norme de $L^2(0,\,T,\,H^{2+2\delta})$, il n'y a aucune difficulté .
On obtient alors des majorations dans la norme de $K^{2+2\delta}(G_{T_0})$ en prennant $\bar{q}^0$ et $\bar{q}^1$, et ensuite on se restreint sur $S_F\times(0,\,T)$, en obtenant finalement

$$\|F_3(v^1,q^1)\|_{K^{3/2+2\delta}(S_F\times(0,T))} \leq K_0(R)\,T^\delta\|(v^1,q^1)\|_{X^r} \tag{4.22}$$

et

$$\|F_3(v^1,q^1)-F_3(\tilde{v}^1,\tilde{q}^1)\|_{K^{3/2+2\delta}(S_F\times(0,T))} \leq K_0(R)\,T^\delta\|(v^1,q^1)-(\tilde{v}^1,\tilde{q}^1)\|_{X^r}\,, \tag{4.23}$$

ce qui avec (4.16)-(4.19) finissent la preuve du Lemme 4.2.

Continuation de la preuve du Théorème 1.1.
Nous voulons trouver $(v^1,q^1)\in X_0^r$ tel que

$$L(v^1,q^1)+F(v^1,q^1)=f$$

avec $f\in Y_0^r$, ce qui peut s'écrire :

$$(v^1,q^1)=L^{-1}(f-F(v^1,q^1))\,.$$

Soit $G(v^1,q^1)=L^{-1}(f-F(v^1,q^1))$, et
$B_1=\{(v^1,q^1)\in X_0^r\,;\ \|(v^1,q^1)-L^{-1}f\|_{X^r}\leq\|L^{-1}f\|_{X^r}\}$.
On va montrer que G satisfaient aux hypothèses du théorème de l'application contraction , c'est à dire :

$$G(B_1)\subset G(B_1) \tag{4.24}$$

et

$$\|G(v^1,q^1)-G(\tilde{v}^1,\tilde{q}^1)\|_{X^r} \le \bar{d}\,\|(v^1-\tilde{v}^1,q^1-\tilde{q}^1)\|_{X^r}\ ,\ \forall\,(v^1,q^1)\ ,\ (\tilde{v}^1,\tilde{q}^1)\in B_1\ , \tag{4.25}$$

avec une constante $\bar{d}\in(0,\,1)$.

Il est clair d'après le Lemme 4.2 et le Théorème 3.5 que

$$\|G(v^1,q^1)-L^{-1}f\|_{X^r} = \|L^{-1}(F(v^1,q^1))\|_{X^r} \le K_1\cdot K_0(2\|L^{-1}f\|_{X^r})\cdot T^{\delta}\cdot\|(v^1,q^1)\|_{X^r},$$

où on note par K_1 , la norme de l'inverse de l'opérateur L de X_0^r dans Y_0^r .
D'autre part

$$\|G(v^1,q^1)-G(\tilde{v}^1,\tilde{q}^1)\|_{X^r} = \|L^{-1}[F(v^1,q^1)-F(\tilde{v}^1,\tilde{q}^1)]\|_{X^r} \le$$

$$\le K_1\cdot K_0(2\|L^{-1}f\|_{X^r})\cdot\|(v^1-\tilde{v}^1,q^1-\tilde{q}^1)\|_{X^r}\ .$$

Si on choisit T assez petit de sorte que

$K_1\cdot K_0(2\|L^{-1}f\|_{X^r})\cdot T^{\delta}\le\frac{1}{2}$, alors les conditions (4.24) et (4.25) sont satisfaites avec $\bar{d}=\frac{1}{2}$, ce qui finit la preuve du Théorème 1.1.

Bibliographie

[1] S. AGMON , A. DOUGLIS , and L. NIRENBERG , Estimations near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions , II , *Comm. Pure Appl. Math.* **Vol 17** , (1964) , p. 35-92.

[2] G. ALLAIN , Un problème de Navier-Stokes avec surface libre et tension superficielle , *Annales Faculté des Sciences Toulouse* **Vol VII** , (1985) , p. 29-56.

[3] T. BEALE , The initial value problem for the Navier-Stokes Equations with a free surface , *Comm. Pure Appl. Math.* **34** , (1980) , p. 359-392 .

[4] A. FRIEDMAN , Partial Differential Equations , *Holt , Rinehart and Winston*, New-York , 1969 .

[5] O. A. LADYZHENSKAYA , The mathematical Theory of Viscous Incompressible flow , Second Ed , *Gordon and Breach* , New-York , 1969 .

[6] J. L. LIONS and E. MAGENES, Problèms aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968 .

[7] V. A. SOLONNIKOV and V. E. SKADILOV , On a boundary value problem on a stationary system of Navier-Stokes equations , *Proc. Steklov Inst. Math.* , **15** , (1973) , p. 186-199 .

[8] V. A. SOLONNIKOV , The solvability of the second initial value problem of the linear , time-dependent system of Navier-Stokes equations , *J. Soviet Math.* **10** , (1978) , p. 141-155 .

[9] V. A. SOLONNIKOV , On the transient motion of an isolated volume of viscous incompressible fluid , *Math. USSR Izvestiya* , **Vol 31** (1988) , No. 2 .

[10] R. TEMAM , Navier-Stokes Equations , *North-Holland* , Amsterdam , 1977.

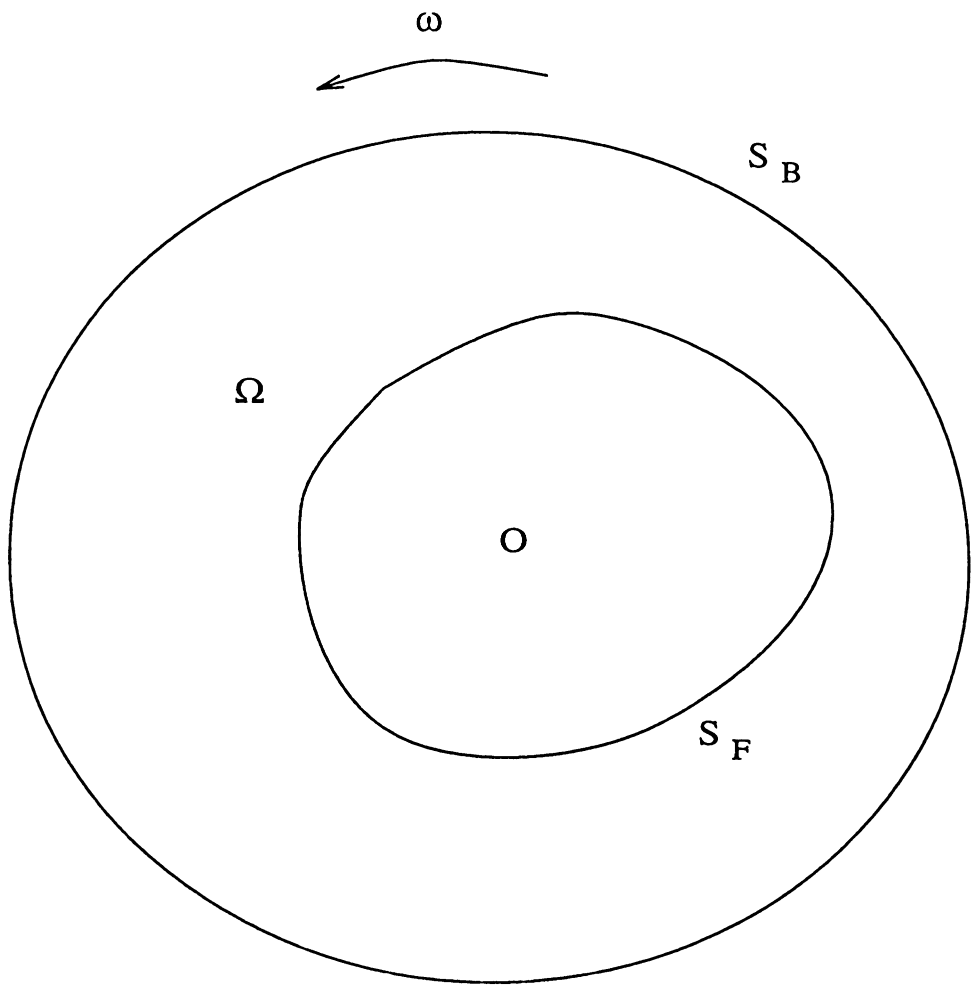

figure 5