

# THÈSES D'ORSAY

CORNELIA DRUTU

**Réseaux des groupes semi simples et invariants de quasi-isométrie**

*Thèses d'Orsay*, 1996

[http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11\\_1996\\_\\_0447\\_\\_P0\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1996__0447__P0_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016  
et diffusée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

ORSAY

N° d'ordre :

**UNIVERSITE DE PARIS-SUD**  
**Centre d'Orsay**

**THESE**

présentée  
pour obtenir

**Le Grade de Docteur en Sciences**  
**Spécialité: Mathématiques**

par

Cornelia DRUTU

**Sujet :**

**Réseaux des groupes semisimples et  
invariants de quasi-isométrie**

Soutenue le 27 juin 1996 devant la Commission d'examen :

Werner BALLMANN

Laurent CLOZEL

Bernhard LEEB

Pierre PANSU

Frédéric PAULIN



# Réseaux des groupes semi-simples et invariants de quasi-isométrie

Cornelia DRUȚU

28 mai 1996



*A Madame Liliana Raileanu*



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier vivement mon directeur de thèse Pierre Pansu. Sa grande culture mathématique, sa vision profonde des choses et son esprit critique m'ont beaucoup influencée et guidée dans mon travail, et sa gentillesse et ses encouragements constants ont toujours été très stimulants pour moi.

Je remercie Bernhard Leeb et Frederic Paulin pour avoir accepté d'être mes rapporteurs. Leurs remarques très justes ont apportés des améliorations sensibles dans mes preuves et dans la clarté de l'exposition du sujet. L'intérêt qu'ils ont porté à mon travail m'encourage beaucoup.

Je remercie aussi Werner Ballmann pour avoir accepté de co-signer le rapport de Bernhard Leeb.

Je remercie également Laurent Clozel et Michael Gromov pour avoir accepté de faire partie du jury, même si un retard dans les formalités de soutenance et le calendrier très chargé de M. Gromov ont rendu impossible sa présence dans le jury.

Je remercie Liliana Raileanu et Viorel Barbu pour m'avoir fait découvrir le plaisir de faire des mathématiques. Je dedie ma thèse à Liliana Raileanu comme expression de la grande estime que je lui porte et de la grande dette que je me sens envers elle.

Je remercie vivement Panagiotis Papasoglu pour m'avoir communiqué son critère de remplissage polynomial ( le théorème ?? dans cette thèse ) ainsi que pour de nombreuses discussions utiles.

Je remercie également Christophe Pittet, Frédéric Haglund et Françoise Dalbo pour des discussions fructueuses et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je suis très reconnaissante à Fulbert Mignot qui a rendu possibles ma présence à Orsay et la continuation de mon travail.

Je remercie Anne Broise pour la gentillesse et la patience avec lesquelles elle m'a appris le  $\LaTeX$  et elle a corrigé mon manuscrit.

Je remercie Laurence Stephen et Martine Justin pour l'aide qu'elles m'ont apporté dans la frappe du manuscrit et dans les formalités finales de soutenance.

Je remercie tous les enseignants du module M1MIAS qui m'ont beaucoup aidée dans mes taches d'enseignement durant la période finale de ce travail.

Enfin je remercie chaleureusement tous mes amis (ensemble qui n'est pas disjoint de l'ensemble des personnes que j'ai remercié jusqu'ici) pour leur patience et leur soutien constant qui ont été beaucoup plus que je ne méritais.





## Résumé

Dans cette thèse on s'intéresse aux réseaux des groupes de Lie semi-simples et à leurs invariants de quasi-isométrie.

L'outil principal qu'on utilise est le cône asymptotique. Au début de la thèse on énonce sa définition, quelques unes de ses propriétés, ainsi que la caractérisation du comportement de deux invariants de quasi-isométrie, l'ordre de la fonction de croissance et l'ordre de la fonction de Dehn, en termes de cônes asymptotiques.

On utilise un de ces résultats pour montrer que pour certains réseaux non-uniformes de  $\mathbb{Q}$ -rang un des groupes de Lie semi-simples sans facteurs compacts l'ordre de la fonction de remplissage est au plus cubique. Une conséquence de ceci est que pour certains groupes résolubles aussi le remplissage est au plus cubique.

On donne aussi une preuve géométrique du théorème de A. Lubotzky, Sh. Mozes et M. S. Raghunathan sur la non-distorsion des réseaux dans les groupes de Lie ambiants pour le cas des réseaux de  $\mathbb{Q}$ -rang un.

On obtient comme résultat intermédiaire une condition suffisante pour la nondistorsion d'une horosphère dans un immeuble euclidien.

## Mots clés

groupe semisimple, réseau non-uniforme, groupe résoluble, espace hyperbolique, nondistorsion, fonction de Dehn, cône asymptotique, immeuble sphérique, immeuble euclidien



## Abstract

In this thesis we study lattices of semisimple Lie groups and their quasi-isometry invariants.

The main tool we are using is the asymptotic cone. We state in the beginning of the thesis its definition, some of its properties and characterisations of the behaviour of two quasi-isometry invariants, the order of the growth function and the order of the Dehn function, in terms of asymptotic cones.

We use one of these results to prove that for certain non-uniform lattices of  $\mathbb{Q}$ -rank one of semisimple groups without compact factors the order of the Dehn function is at most cubic. As a consequence we obtain the same estimation for the Dehn function of certain solvable groups.

We also give a geometric proof of the theorem of A. Lubotzky, Sh. Mozes and M. S. Raghunathan on the non-distorsion of lattices in the ambient group, for the case of  $\mathbb{Q}$ -rank one lattices.

We obtain as an intermediate result a sufficient condition for nondistortion of a horosphere in an Euclidean building.

## Key words

semisimple group, non-uniform lattice, solvable group, hyperbolic space, distortion, Dehn function, asymptotic cone, spherical building, Euclidean building



# Contents

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Cône asymptotique</b>	<b>13</b>
1.1	Construction, propriétés, exemples . . . . .	13
1.2	Cônes asymptotiques des espaces hyperboliques . . . . .	20
1.3	Cônes asymptotiques des espaces symétriques de rang supérieur	26
1.3.1	Immeubles sphériques . . . . .	26
1.3.2	Immeubles euclidiens . . . . .	29
1.3.3	Le cône asymptotique d'un espace symétrique . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Invariants de quasi-isométrie et cône asymptotique</b>	<b>36</b>
2.1	Croissance polynomiale et cônes asymptotiques . . . . .	36
2.2	Remplissage polynomial et cône asymptotique . . . . .	38
2.2.1	Fonction de remplissage . . . . .	38
2.2.2	Le théorème de M. Gromov sur le remplissage polynomial et les cônes asymptotiques . . . . .	42
2.2.3	Contrôle effectif des ordres de remplissage par les cônes asymptotiques . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Géométrie asymptotique d'un réseau de <math>\mathbb{Q}</math> - rang 1</b>	<b>48</b>
3.1	Généralités sur les réseaux de $\mathbb{Q}$ - rang 1 des groupes semisimples	48
3.1.1	Tores, sous-groupes paraboliques et unipotents . . . . .	48
3.1.2	Réseaux de $\mathbb{Q}$ -rang un . . . . .	50
3.2	Le cône asymptotique d'un réseau de $\mathbb{Q}$ - rang 1 . . . . .	52
3.3	Nondistorsion des horosphères . . . . .	59
3.3.1	Nondistorsion des horosphères dans des immeubles euclidiens . . . . .	60
3.3.2	Le théorème de Lubotzky–Mozes–Raghunathan pour des réseaux de $\mathbb{Q}$ -rang 1 . . . . .	75

3.4	Une estimation pour la fonction de remplissage . . . . .	78
3.4.1	Remplissage des courbes dans des intersections des plats avec des horosphères . . . . .	78
3.4.2	Cylindre sur un lacet dans une direction régulière . . .	79
3.4.3	Une estimation de la fonction de Dehn pour des réseaux et des groupes résolubles . . . . .	82

# Chapter 0

## Introduction

Dans cette thèse, on étudie des groupes de présentation finie  $\Gamma = \langle S | R \rangle$ . Plus précisément, on s'intéresse aux réseaux de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 des groupes semi-simples et leurs comportements par rapport aux quasi-isométries.

On emploie la méthode d'étude introduite par M. Gromov, qui est de regarder la géométrie à grande échelle du graphe de Cayley associé au groupe dans la présentation  $\langle S | R \rangle$ .

Une manière de voir cette géométrie est d'étudier les invariants de quasi-isométrie du graphe de Cayley.

**Définition 0.0.1** Soient  $(X, d)$  et  $(Y, \delta)$  deux espaces métriques. On dit que  $(X, d)$  est  $(\lambda, c)$ -quasi-isométrique à  $(Y, \delta)$ , où  $\lambda > 1, c > 0$ , s'il existe  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que

$$\delta(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2) + c, \quad d(g(y_1), g(y_2)) \leq \lambda \delta(y_1, y_2) + c,$$

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall y_1, y_2 \in Y$$

et

$$d(g(f(x)), x) \leq c, \quad \delta(f(g(y)), y) \leq c, \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Récemment, M. Gromov ([Gr]<sub>1</sub>, [Gr]<sub>2</sub>), Van den Dries et Wilkie ([VDW]) ont introduit un nouvel outil d'étude de la géométrie à grande échelle, le cône asymptotique. Celui-ci est un nouvel espace métrique construit avec des méthodes d'analyse non-standard et qui représente, en quelque sorte, une "image de l'espace métrique donné vu de l'infini". Pour l'obtenir on fixe une



suite de points  $f_0 : \mathbb{N} \rightarrow X$  dans l'espace (*la suite de points d'observation*) et une suite de scalaires  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $d_n \in \mathbb{R}$ ,  $d_n \rightarrow \infty$ .

“L'image de l'espace vu de l'infini” est la limite d'une suite d'images de l'espace, où à l'étape  $n$  on a le centre d'observation  $f_0(n)$  et un “champ visuel” dont la largeur est d'ordre  $d_n$ .

Le cône asymptotique donne des informations sur la structure métrique de l'espace. Par exemple, on peut donner une caractérisation de la propriété d'hyperbolicité en termes des cônes asymptotiques :

**Proposition 0.0.2** (cf. [Gr]<sub>3</sub>, Proposition 1.2.3) (i) *Si  $(X, d)$  est un espace  $\delta$ -hyperbolique alors tout cône asymptotique  $Con_\omega(X, (d_n), f_0)$  est 0-hyperbolique.*

(ii) *Si  $(X, d)$  est un espace géodésique on a même plus :  $(X, d)$  est  $\delta$ -hyperbolique si et seulement si  $Con_\omega(X, (d_n), f_0)$  est un arbre réel, pour tout  $\omega$ ,  $f_0$  et  $(d_n)$ .*

Mais, à part la structure métrique, on perd toutes les autres structures de l'espace. Ceci fait qu'on ne peut pas distinguer entre eux les cônes asymptotiques des espaces symétriques de rang 1 ou des groupes hyperboliques non-élémentaires :

**Proposition 0.0.3** (cf. 1.2.11) *Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces métriques hyperboliques géodésiques propres admettant des groupes discrets non-élémentaires cocompacts et agissant proprement d'isométries, leurs cônes asymptotiques sont isométriques.*

Ce résultat suggère que les cônes asymptotiques ne sont pas des bons instruments pour l'étude des espaces hyperboliques. Par contre, ce sont des outils efficaces pour l'étude des espaces symétriques de rang plus grand ou égal à 2.

C'est avec des cônes asymptotiques que B. Kleiner et B. Leeb démontrent leur théorème de rigidité :

**Théorème 0.0.4** ([KIL]) *Soient  $X$  et  $X'$  des espaces symétriques non-compacts non-euclidiens irréductibles de rang plus grand ou égal à 2 ou des immeubles euclidiens épais irréductibles avec action cocompacte du groupe de Weyl affine et tels que l'immeuble sphérique  $\partial_\infty X$  a la propriété Moufang. Toute  $(L, c)$ -quasi-isométrie  $q$  de  $X$  à  $X'$  se trouve à distance  $D$  d'une homothétie  $g$  de  $X$  à  $X'$  (c'est-à-dire  $d(q(x), g(x)) \leq D, \forall x \in X$ ), où  $D$  est une constante qui dépend de  $L$  et  $c$  seulement.*

Pour un groupe de présentation finie, certains comportements des invariants de quasi-isométrie peuvent être déduits des propriétés topologiques des cônes asymptotiques.

Un exemple de tel invariant est l'ordre de la fonction de croissance.

**Définition 0.0.5** Pour  $(X, d) = (V, ds^2)$  variété riemannienne, on définit la fonction de croissance comme  $f(r) = \text{vol}(B(x, r))$ , où  $x \in V, B(x, r) =$  boule de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

Pour  $(X, d) = (\Gamma, d_w)$ , où  $\Gamma$  est un groupe de type fini,  $S$  est une partie génératrice finie,  $S^{-1} = S$ ,  $d_w$  la métrique des mots associé, on définit la fonction de croissance comme  $f(n) = \text{card}B(e, n)$ .

**Définition 0.0.6** Si deux fonctions  $f_1 : D \rightarrow C$  et  $f_2 : D \rightarrow C$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $C \subset \mathbb{R}$  vérifient une relation de type

$$(R_1) \quad f_1(x) \leq a \cdot f_2(b \cdot x + c) + d \cdot x + e, \forall x \in D$$

où  $a, b, c, d, e$  sont des constantes positives, on note ceci avec  $f_1 \prec f_2$  et on dit que l'ordre de  $f_1$  est au plus l'ordre de  $f_2$ . Si pour deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  on a  $f_1 \prec f_2$  et  $f_2 \prec f_1$  on dit qu'elles sont du même ordre.

L'ordre de la fonction de croissance ne dépend pas de  $x$ , dans le cas de la variété, et dépend seulement de la classe de quasi-isométrie de  $(X, d)$ .

**Proposition 0.0.7** (cf. [Gr]<sub>1</sub>, [Pa], 2.1.2) Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini et  $d_w$  une métrique des mots.

- a)  $(\Gamma, d_w)$  est à croissance polynomiale si et seulement si pour tout  $\omega$  et  $(d_n)$ ,  $\text{Con}_\omega(\Gamma, (d_n), e)$  est un espace métrique propre.
- b) De plus, dans ce cas, tous les cônes sont isométriques, et on a une convergence de  $(\Gamma, \varepsilon \cdot d_w)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans la métrique de Hausdorff-Gromov vers cet espace limite unique.
- c) La dimension de Hausdorff de l'espace limite coïncide avec l'ordre polynomial de la fonction de croissance.
- d) On a les mêmes résultats pour  $(\tilde{V}, ds^2)$  recouvrement d'une variété compacte.

Un autre invariant de quasi-isométrie auquel on s'intéresse est l'ordre de la fonction de Dehn.

**Définition 0.0.8** Soit un groupe de présentation finie  $\Gamma = \langle S | R \rangle$ ,  $S = S^{-1}$ , et un mot  $g$  dans l'alphabet  $S$  qui coïncide avec  $e$  dans  $\Gamma$ .

On appelle longueur de  $g$  le nombre de lettres de  $g$ .

On définit l'aire de remplissage  $A(g)$  de  $g$ , comme étant le  $N$  minimal tel que

$$g = \prod_{i=1}^N u_i r_i u_i^{-1}, \text{ où } r_i \in R \cup R^{-1}.$$

La fonction de Dehn (ou la fonction de remplissage) du groupe  $\Gamma$  se définit comme :

$$A(n) = \sup\{A(g); g \text{ de longueur } \leq n, g \equiv e\}.$$

On peut même définir une notion d'aire de remplissage et de fonction de remplissage dans le cadre plus général d'un espace métrique géodésique (voir la section 2.2.1). On a alors :

**Théorème 0.0.9** (cf. [Gr]<sub>3</sub>) Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique. Si pour tout ultrafiltre non-principal  $\omega$ , toute suite de points d'observation  $f_0$  et toute suite de scalaires  $(d_n)$ ,  $\text{Con}_\omega(X, (d_n), f_0)$  est simplement connexe alors il existe  $a \geq 0, \alpha \geq 1$  et  $\ell_0 > 0$  tels que  $A^X(\ell) \leq a\ell^\alpha$  pour  $\ell \geq \ell_0$  où  $A^X(\ell)$  est la fonction de remplissage dans  $X$ .

On a aussi un résultat qui donne un contrôle de l'ordre de la fonction de remplissage dans l'espace à partir d'un contrôle uniforme de l'ordre de la fonction de remplissage dans les cônes asymptotiques.

**Théorème 0.0.10** (cf. [P]<sub>2</sub>, théorème 2.2.14) Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique. S'il existe un  $a > 0$  et un  $p \in \mathbb{N}^*$  tels que dans chaque cône asymptotique de  $X$  on a  $A(\ell) \leq a\ell^p$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\ell_\varepsilon > 0$  tel que dans  $X$  on a

$$A^X(\ell) \leq \ell^{p+\varepsilon}, \forall \ell \geq \ell_\varepsilon.$$

L'exemple qu'on étudie à l'aide des cônes asymptotiques est celui des réseaux de  $\mathbb{Q}$  - rang 1 dans des groupes semisimples de  $\mathbb{R}$  -rang plus grand ou égal à 2.

On sait déjà que les cônes asymptotiques d'un espace symétrique sont des immeubles euclidiens nondiscrets épais homogènes ([KIL]). On démontre que les cônes asymptotiques d'un réseau de  $\mathbb{Q}$  - rang 1 peuvent s'obtenir

en enlevant des horoboules aux intérieurs disjoints de ces immeubles. On démontre aussi quelques résultats généraux sur la forme des “trous” qu’on fait dans les plats maximaux en enlevant ces horoboules.

A partir de ces résultats on trouve une preuve géométrique du théorème de Lubotzky–Mozes–Raghunathan pour des réseaux de  $\mathbb{Q}$  - rang 1 (section 3.3.2). On rappelle l’énoncé de ce théorème.

**Définition 0.0.11** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $A \subset X$  et soit  $d_A$  une métrique sur  $A$ . On dit que  $(A, d_A)$  est nondistordu dans  $X$  si et seulement s’il existe une constante  $L \geq 1$  telle que*

$$\frac{1}{L}d(x, y) \leq d_A(x, y) \leq Ld(x, y), \forall x, y \in A.$$

*Parfois on dira que  $(A, d_A)$  est  $L$ -nondistordu. On appelle  $L$  constante de distorsion.*

**Théorème 0.0.12 (Lubotzky–Mozes–Raghunathan)** *Si  $G$  est un groupe de Lie semisimple de  $\mathbb{R}$ -rang plus grand ou égal à 2 et  $\Gamma$  est un réseau irréductible de  $G$ , alors  $\Gamma$  muni de la métrique des mots est nondistordu dans  $G$  muni d’une métrique invariante à gauche.*

Dans la preuve qu’on donne on ramène la nondistorsion de  $\Gamma$  dans  $G$  à la nondistorsion de chaque cône asymptotique de  $(\Gamma x_o, d_w)$  dans le cône asymptotique de  $X$ , où  $x_o$  est un point quelconque de  $X$ .

Et pour démontrer cette nondistorsion, la remarque essentielle est que dans la plupart des plats maximaux les “trous” créés par l’enlèvement des horoboules peuvent être contournés sans trop agrandir la distance.

Finalement, on s’intéresse à l’évaluation de l’ordre de la fonction de Dehn pour des réseaux non-uniformes  $\Gamma$  de  $\mathbb{Q}$  -rang 1, des groupes semisimples  $G$  de  $\mathbb{R}$  -rang plus grand ou égal à 3.

*Cas connus* : Si  $\Gamma$  est un réseau non-uniforme de  $G$  et le  $\mathbb{R}$  -rang de  $G$  est 1, alors la fonction de Dehn est polynomiale d’ordre 2 ou 3, selon la classe du sous-groupe unipotent maximal de  $G$  ([Gr]<sub>1</sub> et [Pi]). Si le  $\mathbb{R}$  -rang de  $G$  est 2, la fonction de Dehn de  $\Gamma$  est exponentielle ([PL]).

Thurston a conjecturé, dans [ECHPT] que  $SL_n(\mathbb{Z})$ ,  $n \geq 4$ , a une fonction de Dehn polynomiale d’ordre 2.

Dans cette thèse on démontre le résultat suivant :

**Théorème 0.0.13** (cf. 3.4.1) *Soit  $\Gamma$  un réseau irréductible de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 dans un groupe  $G$  semi-simple de  $\mathbb{R}$ -rang plus grand ou égal à 3 et soient  $\theta$  la direction associée à  $\Gamma$  et  $X_0$  l'espace associé à  $\Gamma$ . Si  $\theta$  vérifie la propriété  $(\Pi)$ , alors dans tous les cônes asymptotiques de  $(X_0, d)$ , l'ordre de la fonction de remplissage est au plus cubique.*

Pour montrer ceci, on remplace d'abord une courbe quelconque par une courbe formée par un nombre fini d'arcs qui se trouvent chacun dans un plat maximal. On construit, dans une direction régulière, un cylindre au dessus de cette courbe qui est entièrement contenu dans  $Con_\omega X_0$  à partir d'une certaine hauteur, comparable à la longueur de la courbe. On déforme le cylindre pour contourner les trous formés en enlevant les horoboules et on obtient ainsi une surface de remplissage au plus cubique pour la courbe.

On peut voir que l'hypothèse que le rang soit plus grand ou égal à 3 est essentielle ici, car on ne peut pas contourner des trous dans un plan.

Les théorèmes 0.0.10 et 0.0.13 impliquent :

**Corollaire 0.0.14** (cf. 3.4.9) *Soit  $\Gamma$  un réseau irréductible de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 dans un groupe  $G$  semi-simple de  $\mathbb{R}$ -rang plus grand ou égal à 3 et soit  $\theta$  la direction associée à  $\Gamma$ . Si  $\theta$  vérifie la propriété  $(\Pi)$  alors on a pour la fonction de Dehn  $A(n)$  associée au groupe  $\Gamma$  l'estimation suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } A(n) \leq n^{3+\varepsilon}, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Le plan de la thèse est le suivant. Dans le chapitre un on définit le cône asymptotique, on énonce quelques unes de ses propriétés et on regarde sa forme dans quelques exemples. Dans la discussion faite pour des espaces hyperboliques, on démontre les Propositions 0.0.2 et 0.0.3.

Dans le chapitre deux on étudie la relation entre le cône asymptotique et deux invariants de quasi-isométrie. On démontre la Proposition 0.0.7 (section 1). Dans la section 2 on donne des démonstrations pour les deux critères de remplissage polynomial (Théorèmes 0.0.9 et 0.0.10).

Dans le chapitre 3 on étudie les cônes asymptotiques des réseaux de  $\mathbb{Q}$ -rang 1. Dans la section 2 on montre comment on peut obtenir le cône du réseau à partir du cône de l'espace. Après, dans la section 3, on étudie la nondistorsion des horosphères dans des immeubles euclidiens et dans des espaces symétriques. Dans les immeubles euclidiens on fait cet étude en regardant les traces d'une horoboule dans des plats maximaux. Dans les espaces symétriques on utilise le fait que leurs cônes asymptotiques sont des

immeubles euclidiens. On obtient une condition suffisante de nondistorsion dans les deux cas. On obtient aussi une preuve géométrique du théorème Lubotzky-Mozes-Ragunathan dans le cas des réseaux de  $\mathbb{Q}$ -rang un quelconques.

Dans la section 4 on obtient une estimation de la fonction de remplissage pour certains réseaux et pour certains groupes résolubles. Dans cette section, on s'intéresse seulement aux réseaux vérifiant une certaine propriété (II). On utilise des résultats sur la nondistorsion obtenus dans la section précédente. On donne une preuve du théorème 0.0.13.



# Chapter 1

## Cône asymptotique

### 1.1 Construction, propriétés, exemples

Le but de la construction est d'associer à un espace métrique  $(X, d)$  "un espace limite",  $X_\infty$ , qui représenterait l'image de  $X$  vu du point  $\infty$ . Donc  $X_\infty$  doit être obtenu comme une sorte de limite des espaces  $(X, \varepsilon \cdot d)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Sur des classes spéciales d'espaces métriques on a des topologies et même des métriques qui nous permettent de définir une telle limite. Pour des espaces métriques compacts on a la *métrique de Hausdorff*

$d_H((X, d), (Y, \delta)) = \inf\{\varepsilon > 0 \text{ tel qu'il existe une métrique } D \text{ sur } X \vee Y \text{ pour laquelle } X \subset V_\varepsilon(Y) \text{ et } Y \subset V_\varepsilon(X), D|_{X \times X} = d, D|_{Y \times Y} = \delta\}$ .

Mais pour  $(X, d)$  compact,  $X_\infty$  est un point, donc ce cas n'est pas intéressant.

Gromov étend cette métrique ( $[Gr]_1$ ) à une pseudométrie sur la classe des espaces propres, la *pseudométrie de Hausdorff-Gromov*

$d_{HG}((X, d), (Y, \delta)) = \inf_{(x,y) \in X \times Y} \inf\{\varepsilon > 0 \text{ tel qu'il existe une métrique } D \text{ sur } X \vee Y \text{ pour laquelle } D(x, y) < \varepsilon, B(x, 1/\varepsilon) \subset V_\varepsilon(Y), B(y, 1/\varepsilon) \subset V_\varepsilon(X), D|_{X \times X} = d, D|_{Y \times Y} = \delta\}$ .

Pour des espaces homogènes le premier infimum peut disparaître, donc la pseudométrie de Hausdorff-Gromov coïncide avec

$d_{\tilde{H}}((X, d, x_0), (Y, \delta, y_0)) = \inf\{\varepsilon > 0 \text{ tel qu'il existe une métrique } D \text{ sur } X \vee Y \text{ pour laquelle } D(x_0, y_0) < \varepsilon, B(x_0, 1/\varepsilon) \subset V_\varepsilon(Y), B(y_0, 1/\varepsilon) \subset V_\varepsilon(X), D|_{X \times X} = d, D|_{Y \times Y} = \delta\}$ ,



qu'on appelle *la pseudo-métrie de Hausdorff pointée*.

Cette pseudo-métrie devient une vraie métrie seulement sur des classes d'espaces métriques " $d_{\tilde{H}}$ -proches" l'un de l'autre. Plus précisément, sur une classe d'espaces métriques  $\{X_i\}_{i \in I}$  telle que  $d_{\tilde{H}}(X_i, X_j) < \frac{1}{2}$  pour tout  $i \in I$  et tout  $j \in I$ ,  $d_{\tilde{H}}$  est une vraie métrie. Cette condition est imposée pour assurer l'inégalité du triangle :

Soient  $(X, d_X, x_0)$ ,  $(Y, d_Y, y_0)$ ,  $(Z, d_Z, z_0)$  trois espaces métriques pointés.

Pour tout  $\varepsilon > 0$  tel qu'il existe une métrie  $D_1$  sur  $X \vee Y$  pour laquelle  $D_1(x_0, y_0) < \varepsilon$ ,  $B^X(x_0, 1/\varepsilon) \subset V_\varepsilon(Y)$ ,  $B^Y(y_0, 1/\varepsilon) \subset V_\varepsilon(X)$ ,  $D_1|_{X \times X} = d_X$ ,  $D_1|_{Y \times Y} = d_Y$  et pour tout  $\mu > 0$  tel qu'il existe une métrie  $D_2$  sur  $Y \vee Z$  pour laquelle  $D_2(y_0, z_0) < \mu$ ,  $B^Y(y_0, 1/\mu) \subset V_\mu(Z)$ ,  $B^Z(z_0, 1/\mu) \subset V_\mu(Y)$ ,  $D_2|_{Y \times Y} = d_Y$ ,  $D_2|_{Z \times Z} = d_Z$ , on prend la métrie  $D$  sur  $X \vee Z$  définie par  $D|_{X \times X} = d_X$ ,  $D|_{Z \times Z} = d_Z$ ,  $D(x, z) = \inf_{y \in Y} (D_1(x, y) + D_2(y, z))$ . C'est une vraie métrie et  $D(x_0, z_0) < \varepsilon + \mu$ .

Mais pour deduire que  $B^X(x_0, 1/\varepsilon) \subset V_\varepsilon(Z)$  à partir des inclusions

$$B^X(x_0, \frac{1}{\varepsilon + \mu}) \subset V_\varepsilon(B^Y(y_0, \frac{1}{\varepsilon + \mu} + 2\varepsilon)), \quad B^Y(y_0, 1/\mu) \subset V_\mu(Z)$$

il faut avoir l'inégalité  $\frac{1}{\varepsilon + \mu} + 2\varepsilon \leq \frac{1}{\mu}$ .

Si  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ,  $\mu < \frac{1}{2}$ , alors on a cette inégalité.

Mais une définition de l'espace limite avec la métrie de Hausdorff-Gromov présente au moins deux inconvénients : la définition n'est pas constructive et il faut demander a priori à l'espace limite d'être propre, ce qui est une condition assez restrictive, comme on le verra dans la section 2.1.

Dans ([Gr]<sub>1</sub>) M. Gromov construit, au cours de la preuve, un espace limite. En s'inspirant de cette construction, Van den Dries et Wilkie énoncent une définition constructive d'espace limite, à l'aide de l'analyse nonstandard ([VDW]). M. Gromov ([Gr]<sub>3</sub>), M. Kapovich, B. Kleiner et B. Leeb ([KL], [KIL]) vont reprendre, généraliser et utiliser cette définition dans des buts divers.

L'outil le plus important dans cette construction est l'ultrafiltre nonprincipal.

**Définition 1.1.1** *On appelle ultrafiltre nonprincipal une mesure de probabilité  $\omega : P(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, 1\}$  finiment additive telle que  $\omega(A) = 0, \forall A \subset \mathbb{N}$ ,  $A$  finie.*

*Une définition équivalente est que  $\omega$  est la fonction caractéristique d'une partie  $P \subset P(\mathbb{N})$  qui est un ultrafiltre au sens de [Bou], I.6.4, et qui contient le filtre de Fréchet, c'est-à-dire le filtre formé par les complémentaires des ensembles finis.*

L'existence des ultrafiltres nonprincipaux est assuré par le théorème de [Bou], I.6.4 , qui dit que tout filtre est contenu dans au moins un ultrafiltre, donc le filtre de Fréchet aussi.

On peut dire même plus :

1) Pour tout ensemble infini, il existe un ultrafiltre nonprincipal qui le charge: soit  $s = \{x_1, x_2, \dots, x_n \dots\}$ ,  $s^{n_0} = \{x_{n_0}, \dots\}$ ,  $B = F \cup \{s^{n_0}\}_{n_0 \in \mathbb{N}}$  est une base de filtre, donc il existe un ultrafiltre  $P$  qui le contient et  $\omega = 1_P$  est l'ultrafiltre nonprincipal cherché.

2) Pour toute suite décroissante infinie  $s_0 \supset s_1 \supset s_2 \supset \dots \supset s_n \supset \dots$  on a un ultrafiltre nonprincipal qui charge tous les  $s_n$  ( $\omega(s_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ ). On l'obtient si on prend comme base cette fois-ci  $B = F \cup \{s_i^{n_0}\}_{n_0 \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}}$ .

**Définition 1.1.2** Dans un espace topologique  $(X, \tau)$  on définit la  $\omega$ -limite d'une suite  $(a_n) \subset X$  comme étant un élément  $a \in X$  tel que pour tout voisinage  $V$  de  $a$ ,  $\omega(A_V) = 1$  où  $A_V = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in V\}$ .

Si  $X$  est séparé la  $\omega$ -limite est unique.

**Remarque 1.1.3** La propriété caractéristique des ensembles compacts qui dit que tout ultrafiltre est convergent ([Bou], I.9.1) implique que toute suite dans un compact a une  $\omega$ -limite. En particulier toute suite numérique bornée a une  $\omega$ -limite.

Soit  $(X, d)$  l'espace métrique auquel on veut associer un cône asymptotique.

On fixe  $\omega$  ultrafiltre nonprincipal,  $f_0 : \mathbb{N} \rightarrow X$  suite qu'on appelle suite des centres d'observation, et  $(d_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  suite numérique qu'on appelle suite des scalaires.

**Définition 1.1.4** On pose  $C = \{f : \mathbb{N} \rightarrow X \text{ tel que } d(f(n), f_0(n)) \leq c_f \cdot d_n\}$ . Si on introduit sur  $C$  la relation d'équivalence

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{\omega} \frac{d(f(n), g(n))}{d_n} = 0,$$

alors  $C / \sim = Con_{\omega}(X, (d_n), f_0)$  est le  $\omega$ -cône asymptotique par rapport aux centres d'observation  $(f_0(n))$  et aux scalaires  $(d_n)$ . C'est un espace métrique avec la métrique

$$d([f], [g]) = \lim_{\omega} \frac{d(f(n), g(n))}{d_n}.$$

**Remarque 1.1.5** Dans [KL] on a une définition plus générale qui n'utilise pas des points d'observation, mais qui se réduit finalement à celle-ci, parce que le cône défini là n'est rien d'autre que  $\coprod_{f_0} \text{Con}_\omega(X, (d_n), f_0)$  où on a identifié  $\text{Con}_\omega(X, (d_n), f_0)$  et  $\text{Con}_\omega(X, (d_n), g_0)$ ,  $f_0, g_0 \in X^\mathbb{N}$  si  $\lim_\omega \frac{d(f_0(n), g_0(n))}{d_n}$  existe et est finie (après cette identification les éléments de la réunion deviennent deux à deux disjoints) et on a mis  $\text{dist}(\text{Con}_\omega(X, (d_n), f_0), \text{Con}_\omega(X, (d_n), g_0)) = +\infty$  au cas contraire.

**Remarque 1.1.6** Si l'action de  $\text{Isom}(X)$  sur  $X$  a un domaine fondamental borné, alors pour un  $\omega$  fixé, tous les  $\text{Con}_\omega(X, (d_n), f)$  sont isométriques et isométriques à un  $\text{Con}_\omega(X, (d_n), x_0)$ ,  $\omega$ -cône asymptotique avec la suite des centres d'observation constante égale à  $x_0 \in X$ .

**Remarque 1.1.7** Si on fixe la suite des centres d'observation,  $f_0$ , une condition suffisante pour l'isométrie de tous les  $\text{Con}_\omega(X, (d_n), f_0)$ ,  $\omega$  ultrafiltre nonprincipal, est la convergence dans la métrique de Hausdorff pointée de la suite  $(X, (1/d_n)d, f_0(n))$ .

Donc si  $\lim_{\bar{H}}(X, (1/d_n)d, f_0(n)) = (Y, \delta, y_0)$ ,  $X, Y$  espaces propres, alors tous les  $\text{Con}_\omega(X, f_0, (d_n))$  sont isométriques à  $(Y, y_0)$ , et on a même une isométrie pointée qui envoie  $[f_0]$  dans  $y_0$ .

**Preuve** On a

$$\lim_{\bar{H}}(X, (1/d_n) \cdot d, f_0(n)) = (Y, \delta, y_0)$$

si et seulement si

$$d_{\bar{H}}((X, (1/d_n)d, f_0(n)), (Y, \delta, y_0)) = \frac{\alpha_n}{2}, \text{ où } \alpha_n \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty.$$

Alors, pour tout  $n$ , il y a une métrique sur  $X \vee Y$ ,  $D_n$ , telle que  $D_n(f_0(n), y_0) < \alpha_n$ ,  $B(f_0(n), \frac{d_n}{\alpha_n}) \subset V_{\alpha_n}(Y)$ ,  $B(y_0, \frac{1}{\alpha_n}) \subset V_{\alpha_n}(X)$ ,  $D_n|_{X \times X} = (1/d_n)d$ ,  $D_n|_{Y \times Y} = \delta$ .

$\forall [f] \in \text{Con}_\omega X$ ,  $d(f(n), f_0(n)) \leq C_f \cdot d_n$  donc pour  $n$  suffisamment grand on a  $f(n) \in B(f_0(n), \frac{d_n}{\alpha_n})$ . Alors il existe un  $y_n \in Y$  tel que  $D_n(y_n, f(n)) < \alpha_n$ . On a  $\delta(y_n, y_0) \leq D_n(y_n, f(n)) + D_n(f(n), f_0(n)) + D_n(f_0(n), y_0) \leq c_f + 2\alpha_n$ .

D'où  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B(y_0, 2c_f)$  qui est compacte ( $Y$  propre) donc on a  $\lim_\omega y_n = y$ .

On vérifie facilement que  $y$  ne dépend ni du choix de  $f$  dans la classe d'équivalence ni de celui de  $y_n$ .

$\varphi_\omega : \text{Con}_\omega(X, d, f_0) \rightarrow (Y, \delta, y_0)$ ,  $\varphi_\omega([f]) = y$  est l'isométrie cherchée.

◇

On démontre une réciproque partielle de la Remarque 1.1.7 dans la section 2.1.

On peut définir, à l'aide de  $\omega$ , un autre espace  $X^* = X^{\mathbb{N}} / \approx$ , où :

$$(x_n) \approx (y_n) \Leftrightarrow x_n = y_n \text{ } \omega - \text{p.s.}$$

On note  $[[x_n]]$  la classe d'équivalence de la suite  $(x_n)$  relativement à cette relation d'équivalence.

Soit  $\pi^* : X^{\mathbb{N}} \rightarrow X^*$  la projection canonique.

Si on note  $C^* = \pi^*(C)$ , on voit qu'on a la suite de projections:

$$C \xrightarrow{\pi^*} C^* \xrightarrow{\pi} \text{Con}_\omega X \text{ où } \pi([[x_n]]) = [x_n]$$

**Définition 1.1.8** On appelle  $A \subset X^*$  ensemble interne s'il existe une suite d'ensembles  $A_n \subset X$  telle que  $A = \{[[x_n]]; x_n \in A_n \text{ } \omega\text{-p.s.}\}$

On note  $A = [[A_n]]$ .

**Définition 1.1.9** Si  $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \subset C$ , alors  $A \subset C^*$  et on a  $\pi(A) \subset \text{Con}_\omega X$ . On note  $\pi(A) = [A_n]$  et on l'appelle ensemble limite de la suite  $(A_n)$ .

### Propriétés du cône asymptotique. Exemples

On peut trouver une partie des propriétés énoncées ici et encore d'autres dans [KL].

a) Tout  $\text{Con}_\omega(X, (d_n), f_0)$  est un espace métrique complet ([VDW]).

**Définition 1.1.10** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $x \in X, y \in X$ . Une isométrie  $c : [0, d(x, y)] \rightarrow X$ ,  $c(0) = x$ ,  $c(d(x, y)) = y$ , s'appelle géodésique entre  $x$  et  $y$ . On note  $c([0, d(x, y)]) = [x, y]$  et on l'appelle parfois du même nom. On dit qu'un espace métrique est géodésique si pour tout  $x \in X, y \in X$ , il existe une géodésique entre  $x$  et  $y$ .

b) Si  $(X, d)$  est un espace géodésique alors tout  $\text{Con}_\omega(X, (d_n), f_0)$  est un espace géodésique.

**Preuve** Pour tous  $[f], [g] \in \text{Con}_\omega(X, (d_n), f_0)$  distincts, on a, pour chaque  $n$ , une géodésique entre  $f(n)$  et  $g(n)$ ,  $c_n : [0, d(f(n), g(n))] \rightarrow X$ . On note  $D = d([f], [g]) = \lim_\omega \frac{d(f(n), g(n))}{d_n}$ .

Alors  $C : [0, D] \rightarrow \text{Con}_\omega X$ ,  $C(t) = [(c_n(\frac{d(f(n), g(n))}{D} \cdot t))_{n \in \mathbb{N}}]$  est une géodésique entre  $[f]$  et  $[g]$ .

◇

c)  $\text{Con}_\omega(\prod_{i=1}^n X_i, (f_0^1, \dots, f_0^n)) = \prod_{i=1}^n \text{Con}_\omega(X_i, f_0^i)$

d) Soient  $(X, d), (Y, \delta)$  espaces métriques,  $A \subset X, B \subset Y$  et  $\varphi : A \rightarrow B$  isométrie. On prend  $X \vee_\varphi Y = X \vee Y /_{x \equiv \varphi(x)}$  avec la métrique  $D$  telle que  $D|_{X \times X} = d, D|_{Y \times Y} = \delta$  et  $D(x, y) = \inf\{d(x, a) + \delta(\varphi(a), y) \text{ pour } a \in A\}$  si  $x \in X$  et  $y \in Y$ .

On a  $\text{Con}_\omega(X \vee_\varphi Y) = \text{Con}_\omega X \vee_{\text{Con}_\omega \varphi} \text{Con}_\omega Y$ , où  $\text{Con}_\omega \varphi : \text{Con}_\omega A \rightarrow \text{Con}_\omega B$  est l'isométrie naturelle induite par  $\varphi$ .

**Preuve** L'ultrafiltre nonprincipal  $\omega$  choisit toujours dans une partition finie de  $\mathbb{N}$ , un seul élément qu'il charge. De là, on va pouvoir dire que tout  $[f] \in \text{Con}_\omega(X \vee_\varphi Y)$  se trouve dans  $\text{Con}_\omega X$  ou dans  $\text{Con}_\omega Y$ . Si  $x = [x_n] \in \text{Con}_\omega(X \vee_\varphi Y)$  se trouve dans les deux alors  $[x_n] = [y_n]$  où  $y_n \in X$  et  $[x_n] = [z_n]$  où  $z_n \in Y$

D'où  $[y_n] = [z_n] \Rightarrow \lim_\omega \frac{D(y_n, z_n)}{d_n} = 0$  ce qui implique qu'il existe une suite  $a_n$  dans  $A$  telle que  $\lim_\omega (d(y_n, a_n) + \delta(\varphi(a_n), z_n))/d_n = 0$ . Alors  $\lim_\omega \frac{d(y_n, a_n)}{d_n} = 0$  et  $\lim_\omega \frac{\delta(z_n, \varphi(a_n))}{d_n} = 0$ , d'où  $[y_n] = [a_n] \in \text{Con}_\omega A, [z_n] = [\varphi(a_n)] \in \text{Con}_\omega B$

◇

e) La relation entre isomorphisme des cônes et quasi-isométrie est facile à trouver dans un des deux sens.

Rappelons que si  $(X, d)$  et  $(Y, \delta)$  sont deux espaces métriques, on dit que  $(X, d)$  est  $(\lambda, c)$ -quasi-isométrique à  $(Y, \delta)$ , où  $\lambda > 1, c > 0$ , s'il existe  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que

$$\delta(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2) + c, \quad d(g(y_1), g(y_2)) \leq \lambda \delta(y_1, y_2) + c,$$

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall y_1, y_2 \in Y$$

et

$$d(g(f(x)), x) \leq c, \quad \delta(f(g(y)), y) \leq c, \forall x \in X, \forall y \in Y.$$

Evidemment,  $(X, d)$   $(\lambda, c)$ -quasi-isométrique à  $(Y, \delta)$  implique  $\text{Con}_\omega(X, f_0)$  bilipschitz-équivalent à  $\text{Con}_\omega(Y, f \circ f_0)$  pour tout  $\omega$  et  $f_0$ .

Jusqu'à présent, je ne connais aucun cas dans lequel l'implication inverse fonctionne. Dans le cas général, elle n'est pas vraie ( Corollaire 1.2.11 ).

## Exemples de cônes asymptotiques

**Exemple 1** ([Gr]<sub>2</sub>, [GLP]) Le cône asymptotique d'un groupe abélien libre de rang  $n$ ,  $\Gamma$ , muni d'une métrique des mots est  $\mathbb{R}^n$  avec une métrique qui n'est pas nécessairement euclidienne.

a) Si on prend  $\Gamma$  avec une métrique des mots définie par un système de  $n$  générateurs et leurs inverses, on peut identifier  $(\Gamma, d)$  à  $(\mathbb{Z}^n, |\cdot|)$  où  $|\cdot|$  est la norme somme :  $|x| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ . On a que  $(\mathbb{Z}^n, |\cdot|)$  est un 1- réseau pour  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ , d'où  $\lim_{\tilde{H}}(\Gamma, \varepsilon d, e) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|, 0)$ .

b) Si on prend  $\Gamma$  avec une métrique des mots définie par  $k$  générateurs ( $k > n$ ) et leurs inverses, la limite de Hausdorff de  $(\Gamma, \varepsilon |\cdot|)$  est toujours  $\mathbb{R}^n$ , avec une métrique plus spéciale. La boule unité dans cette métrique est l'enveloppe convexe du système de générateurs.

En partant de la "norme"  $|\gamma| = d(e, \gamma)$  sur  $\Gamma$  on peut construire la "norme"  $|\gamma|_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} |k\gamma|$  qui va avoir en plus par rapport à  $|\cdot|$  la propriété de  $\mathbb{Z}$ -homogénéité. On peut prolonger  $|\cdot|_\infty$  à  $\mathbb{Q}^n$  par

$$\left\| \left( \frac{m_1}{p_1}, \dots, \frac{m_n}{p_n} \right) \right\| = \frac{|(m_1 \cdot p_2 \dots p_n, \dots, m_n \cdot p_1, p_n - 1)|}{\prod_{i=1}^n |p_i|}$$

et puis par continuité à  $\mathbb{R}^n$ .

On peut démontrer que  $\lim_{\tilde{H}}(\Gamma, d, e) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|, 0)$  en utilisant le critère des réseaux ([GLP], proposition 3.5) et le lemme suivant :

**Lemme 1.1.11** Si  $\varepsilon \gamma_\varepsilon \xrightarrow{\|\cdot\|} x (\varepsilon \rightarrow 0)$ ,  $\gamma_\varepsilon \in \mathbb{Z}^n, x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ , alors  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|\gamma_\varepsilon|}{|\gamma_\varepsilon|_\infty} = 1$ .

**Preuve** C'est une conséquence immédiate de la proposition 41 de [Pa] appliquée à ce cas très particulier.  $\diamond$

**Remarque 1.1.12** On a le même résultat si on prend  $\Gamma$ , qu'on identifie à  $\mathbb{Z}^n$ , avec une métrique provenant d'une structure riemannienne périodique non plate sur  $\mathbb{R}^n$  ([GLP], p.316).

**Exemple 2** ([Gr]<sub>1</sub>, [Pa]) Si  $\Gamma$  est un groupe virtuellement nilpotent (c'est-à-dire un groupe qui possède un sous-groupe nilpotent d'indice fini) on ne dispose plus d'un plongement du groupe comme réseau dans un espace avec

des homothéties, mais on a un théorème de Malcev qui dit que tout groupe nilpotent sans torsion est isomorphe à un sous-groupe discret cocompact d'un groupe de Lie nilpotent.

Le résultat qui va conclure le cas nilpotent sera alors que la limite Hausdorff-Gromov de  $(G, \varepsilon \cdot d)$ , où  $G$  groupe de Lie nilpotent et  $d$  métrique provenant d'une structure riemannienne invariante à gauche, est un groupe de Lie gradué nilpotent simplement connexe avec une distance de Carnot-Carathéodory invariante à gauche (résultat démontré dans [Pa]).

## 1.2 Cônes asymptotiques des espaces hyperboliques

On étudie les cônes asymptotiques des espaces métriques hyperboliques. On rappelle d'abord la définition ([Gr]<sub>2</sub> ou [GH]).

**Définition 1.2.1** *Soit  $X$  un espace métrique géodésique.*

*Soit  $\Delta$  un triangle géodésique de sommets  $x_1, x_2, x_3 \in X$ . On construit dans le plan euclidien un tripode  $T = (Ox'_1, x'_2, x'_3)$  (voir la Figure 1) tel que  $Ox'_i = \frac{1}{2}(d(x_j, x_i) + d(x_k, x_i) - d(x_j, x_k))$ . Soit  $f$  l'application de  $\Delta$  dans  $T$  qui est une isométrie sur chaque côté. On dit que  $\Delta$  est  $\delta$ -mince si  $d(x, y) < \delta$  pour toute paire  $(x, y)$  telle que  $f(x) = f(y)$ .*

Une propriété équivalente est que tout point sur une arête du triangle est à une distance plus petite ou égale à  $\delta$  de la réunion des deux autres arêtes.

**Définition 1.2.2** *On dit qu'un espace métrique géodésique est  $\delta$ -hyperbolique si tout triangle géodésique est  $\delta$ -mince.*

*Un espace métrique géodésique 0-hyperbolique s'appelle arbre réel.*

**Proposition 1.2.3** (i) *Si  $(X, d)$  est un espace  $\delta$ -hyperbolique alors tout cône asymptotique  $Con_\omega(X, (d_n), f_0)$  est 0-hyperbolique.*

(ii) *Si  $(X, d)$  est un espace géodésique on a même plus :  $(X, d)$   $\delta$ -hyperbolique si et seulement si  $Con_\omega(X, (d_n), f_0)$  est un arbre réel, pour tout  $\omega, f_0$  et  $(d_n)$ .*

On démontre d'abord le lemme suivant.

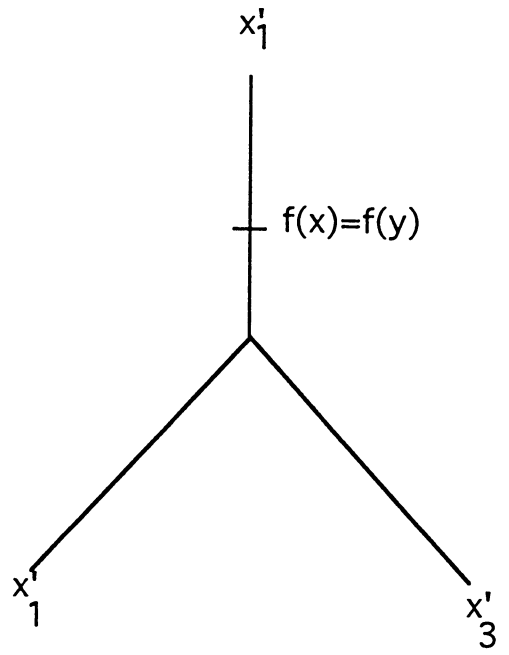
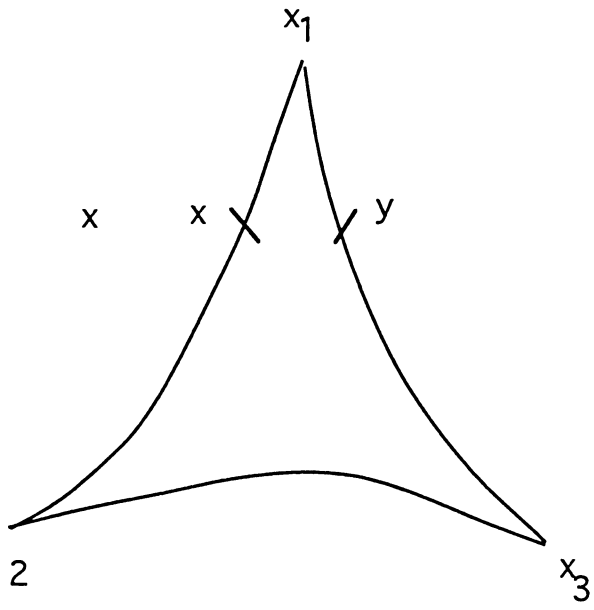


Figure 1



**Lemme 1.2.4** *Si  $(X, d)$  est un espace géodésique et si tout cône asymptotique  $Con_\omega(X, (d_n), f_0)$  est un arbre réel, alors il existe un  $M > 0$  tel que pour tout triangle géodésique  $\Delta = [xyz]$  avec  $d(y, z) \geq 1$  on a*

$$d_H([x, y], [x, z]) \leq Md(y, z).$$

**Preuve.** On raisonne par l'absurde, on suppose qu'il existe des suites de points  $x_n, y_n, z_n$  telles que  $d(y_n, z_n) \geq 1$  et  $\frac{d_H([x_n, y_n], [x_n, z_n])}{d(y_n, z_n)} = M_n \rightarrow \infty$ .

Soit  $a_n$  un point où la distance de Hausdorff  $d_H([x_n, y_n], [x_n, z_n])$  est atteinte. On peut supposer que  $a_n \in [x_n, y_n]$ .

On a que  $d(a_n, [x_n, z_n]) = d_H([x_n, y_n], [x_n, z_n]) = M_n d(y_n, z_n)$ . On note cette distance avec  $\delta_n$ . Puisque  $\delta_n \geq M_n$  il s'ensuit que  $\delta_n \rightarrow \infty$ .

On considère le cône asymptotique  $Con_\omega(X, (\delta_n), (a_n))$ .

L'ensemble limite de  $[x_n, y_n]$  est un segment ou un rayon ou une géodésique (selon la finitude de  $\lim_\omega \frac{d(x_n, a_n)}{\delta_n}$  et de  $\lim_\omega \frac{d(y_n, a_n)}{\delta_n}$ ) qui contient le point  $a = [a_n]$  à l'intérieur.

Les inégalités du triangle impliquent que les limites  $\lim_\omega \frac{d(y_n, a_n)}{\delta_n}$  et  $\lim_\omega \frac{d(z_n, a_n)}{\delta_n}$  sont finies ou infinies simultanément. Donc l'ensemble limite de  $[x_n, z_n]$  est un segment ou un rayon ou une géodésique et il a le même type que l'ensemble limite de  $[x_n, y_n]$ .

Si les deux ensembles limite, de  $[x_n, y_n]$  et de  $[x_n, z_n]$ , sont des segments, on obtient deux segments entre les deux points  $[x_n]$  et  $[y_n] = [z_n]$  du cône, qui se trouvent à distance de Hausdorff 1 l'un de l'autre.

Si les deux ensembles limite sont des rayons, on obtient deux rayons issus du même point, asymptotiques et qui ne coïncident pas.

Si les deux ensembles limite sont des géodésiques, on obtient deux géodésiques asymptotiques dans les deux sens et qui ne coïncident pas.

Les trois cas sont impossibles dans un arbre réel.

◇

**Preuve de la Proposition 1.2.3.** On commence par la deuxième affirmation.

L'implication directe est immédiate.

Pour prouver l'implication inverse on raisonne par l'absurde.

On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe des  $x_n, y_n, z_n$  et  $a_n \in [x_n, y_n]$  tels que  $d(a_n, [x_n, z_n] \cup [y_n, z_n]) \geq n$ .

On prend  $a_n$  sur le contour tel que la distance aux deux autres arêtes du triangle est maximale. On note cette distance  $d_n$ .

On peut supposer (en changeant, éventuellement, de notation) que :  
 $a_n \in [x_n, y_n], d(a_n, [x_n, z_n] \cup [y_n, z_n]) = d(a_n, [y_n, z_n]) = d(a_n, b_n) = d_n,$

où  $b_n \in [y_n, z_n]$ . Alors  $d(a_n, [x_n, z_n]) = d(a_n, c_n) = \delta_n \geq d_n$ , où  $c_n \in [x_n, z_n]$  (voir la Figure 2).

D'après le choix de  $a_n$  et  $d_n$ , on a aussi la propriété que tout  $p_n \in [x_n, z_n] \cup [y_n, z_n] \cup [x_n, y_n]$  qui se trouve sur une arête est à une distance plus petite que  $d_n$  des deux autres arêtes.

On prend comme suite de scalaires  $(d_n)$  et comme suite de points d'observation  $(a_n)$ . On considère la suite de triangles  $\Delta_n = [x_n, y_n, z_n]$  et on cherche à voir l'ensemble limite dans le cône asymptotique  $\mathbf{K} = \text{Con}_\omega(X, (d_n), (a_n))$ . On a essentiellement deux cas.

A)  $\lim_\omega \frac{\delta_n}{d_n} = r < +\infty$

D'après le lemme,  $d_H([a_n, x_n], [c_n, x_n]) \leq M \cdot \delta_n$ . Donc à la limite cette paire de segments donne ou bien deux segments ou bien deux rayons asymptotes. On peut dire la même chose des paires  $[a_n, y_n], [b_n, y_n]$  et  $[b_n, z_n], [c_n, z_n]$ .

Par conséquent l'ensemble limite de  $\Delta_n = [x_n, y_n, z_n]$  est un triangle géodésique qui peut avoir des sommets dans le bord à l'infini, (Figure 3)

$$\Delta = [x, y, z], x, y, z \in \bar{\mathbf{K}}, \text{ où on note } \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \cup \partial_\infty \mathbf{K}.$$

On a le point  $a \in [x, y]$  tel que  $d(a, [y, z] \cup [x, z]) = 1$ . Ceci empêche le triangle  $[x, y, z]$  d'être un tripode, ce qui contredit le fait que  $\mathbf{K}$  est un arbre réel.

B)  $\lim_\omega \frac{\delta_n}{d_n} = +\infty$

Ceci implique aussi que  $\lim_\omega \frac{d(a_n, x_n)}{d_n} = +\infty$  et  $\lim_\omega \frac{d(a_n, z_n)}{d_n} = +\infty$ .

D'après le lemme,  $d_H([a_n, y_n], [b_n, y_n]) \leq M \cdot d_n$ . Donc les paires de segments  $[x_n, y_n]$  et  $[y_n, z_n]$  ont comme ensembles limite deux rayons issus de  $y = [y_n]$  ou deux géodésiques asymptotiques d'un côté. L'arête  $xz$  qui provient de la suite  $[x_n, z_n]$ , s'éloignant avec une trop grande vitesse du point d'observation, est disparue du champ visuel. On a la situation représentée dans la Figure 4.

Tout élément du rayon  $bz$  doit être à une distance plus petite que 1 de  $xy$ , et on voit qu'on obtient de nouveau une contradiction.

**Conclusion :**  $\exists \delta > 0$  tel que  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique.

Pour démontrer que pour  $(X, d)$   $\delta$ -hyperbolique tous les cônes sont 0-hyperboliques on utilise le théorème suivant :

**Théorème 1.2.5** *Tout espace hyperbolique peut être plongé isométriquement dans un espace hyperbolique géodésique ([Gr]<sub>2</sub>, pag. 162, 6.4.D).*

et le résultat qu'on vient de démontrer. ◇

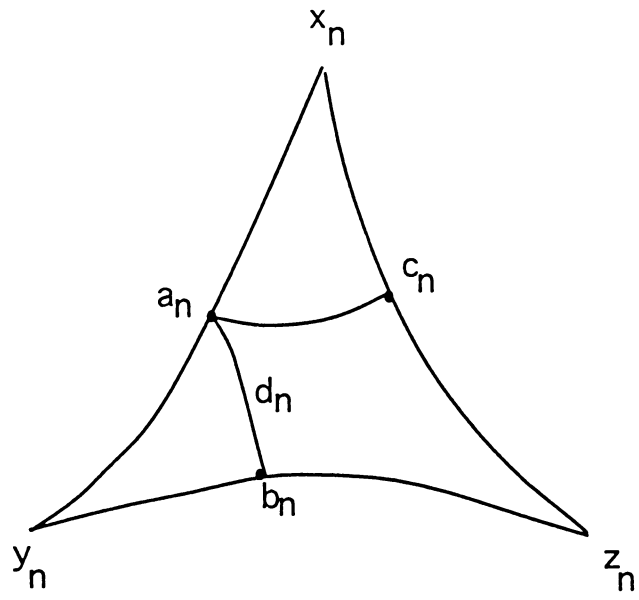


Figure 2

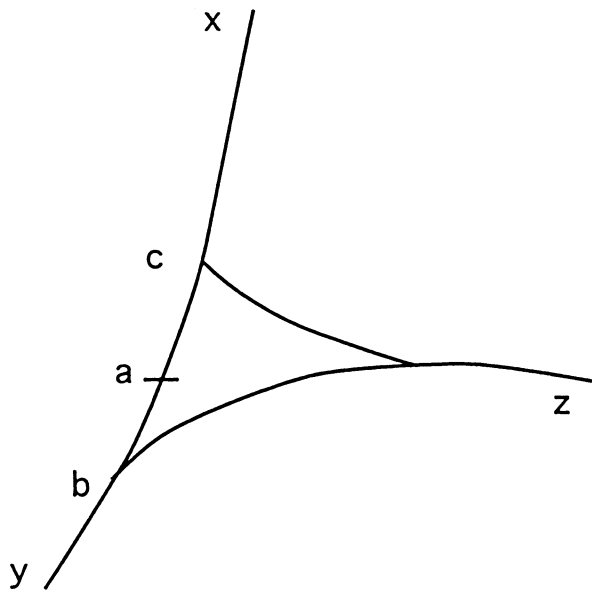


Figure 3

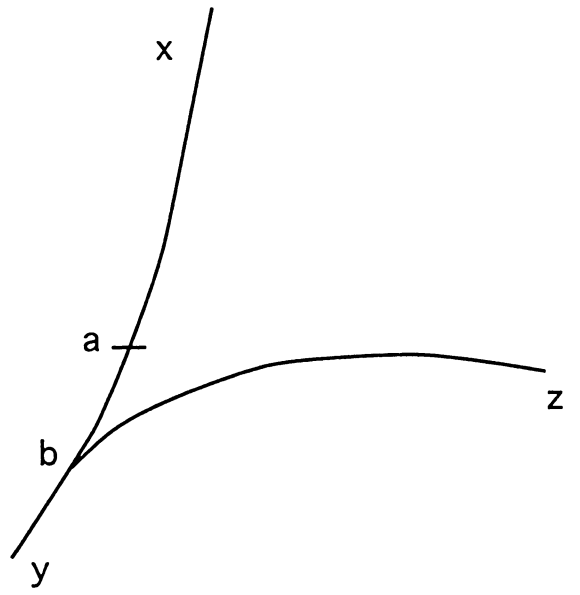


Figure 4

Dans le cas d'un espace hyperbolique homogène,  $X$ , on peut préciser la forme des  $Con_\omega X$ .

**Définition 1.2.6** Dans un arbre réel  $T$  on définit l'ensemble des directions qui partent d'un point  $p, \Sigma_p$ , comme  $\mathfrak{R}_p / \sim$  où

$$\mathfrak{R}_p = \{r : [0, a) \rightarrow T, a > 0, r \text{ isométrie}, r(0) = p\}$$

et

$$r_1 \sim r_2 \iff \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } r_1|_{[0, \varepsilon)} = r_2|_{[0, \varepsilon)}.$$

On appelle point de branchement un point pour lequel  $\text{card } \Sigma_p \geq 3$ .

**Remarque 1.2.7** Dans un arbre réel  $T$  on a que pour tout homéomorphisme  $c : [a, b] \rightarrow T$ ,  $c([a, b]) = [c(a), c(b)]$ .

A cause de ceci on peut aussi définir  $\Sigma_p$  comme  $\mathfrak{S}_p / \sim$ , où

$$\mathfrak{S}_p = \{c : [0, a) \rightarrow T, c \text{ homéomorphisme}, c(0) = p\}$$

et

$$c_1 \sim c_2 \iff \exists \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0 \text{ tels que } c_1([0, \varepsilon_1)) = c_2([0, \varepsilon_2)).$$

**Proposition 1.2.8** Si  $X$  est un espace métrique hyperbolique géodésique propre admettant un groupe discret non-élémentaire cocompact et agissant proprement d'isométries,  $\Gamma$ , alors tous les  $Con_\omega X$  sont des arbres réels où chaque point est un point de branchement avec un continuum de directions.

**Preuve.** Tout cône asymptotique de  $X$  est un arbre réel et le fait que  $\Gamma$  agit cocompactement sur  $X$  implique que tout cône asymptotique  $Con_\omega X$  est homogène.

Il suffit donc de prouver que  $[x_0]$ , la classe d'équivalence de la suite constante, est un point de branchement pour un continuum de directions.

D'après [GH], p.60, le groupe  $\Gamma$  est de type fini et hyperbolique et son graphe de Cayley  $\mathcal{C}(\Gamma)$  est quasi-isométrique à  $X$ . Donc il existe une application bilipschitz  $\Phi : Con_\omega \mathcal{C}(\Gamma) \rightarrow Con_\omega X$ ,  $\Phi([e]) = [x_0]$ . La remarque 1.2.7 implique que  $\Phi$  détermine une bijection entre  $\Sigma_{[e]}$  et  $\Sigma_{[x_0]}$ . Donc il suffit de montrer que  $\text{card} \Sigma_{[e]} = \aleph_1$ .

a) Comme  $\Gamma$  est non-élémentaire on a que  $\text{card} \partial_\infty \mathcal{C}(\Gamma) = \aleph_1$ .

Les rayons géodésiques qui joignent  $e$  à des éléments différents de  $\partial_\infty \mathcal{C}(\Gamma)$  donnent des directions différentes en  $Con_\omega \mathcal{C}(\Gamma)$ :

Soient  $r_i : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{C}(\Gamma)$ ,  $r_i(0) = e$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $r_1(\infty) = \alpha$ ,  $r_2(\infty) = \beta$ ,  $\alpha, \beta \in \partial_\infty \mathcal{C}(\Gamma)$ .

$\forall t, s \in [0, \infty)$ ,  $a_t = [(r_1(d_n \cdot t))_{n \in \mathbb{N}}]$ ,  $b_s = [(r_2(d_n \cdot s))_{n \in \mathbb{N}}]$ ,  $a_t, b_s \in \text{Con}_\omega \mathcal{C}(\Gamma)$ ,  
 $d(a_t, b_s) = \lim_\omega \frac{d(r_1(d_n \cdot t), r_2(d_n \cdot s))}{d_n} = \lim_\omega \frac{d_n \cdot (t+s) - 2 \cdot (r_1(d_n \cdot t), r_2(d_n \cdot s))_{x_0}}{d_n} = t + s$   
parce que  $(r_1(d_n \cdot t), r_2(d_n \cdot s))_{x_0}$  converge vers une constante pour  $\alpha \neq \beta$  ([GH], Chap.7).

Ceci implique qu'on a une application injective de  $\partial_\infty \mathcal{C}(\Gamma)$  à  $\Sigma_{[e]}$ . D'où  $\text{card } \Sigma_{[x_0]} \geq \partial_\infty X = \aleph_1$ .

b) On démontre que toute direction de  $\text{Con}_\omega \mathcal{C}(\Gamma)$  en  $[e]$  est définie par une suite de rayons dans  $\mathcal{C}(\Gamma)$  issus de  $e$ . Une direction de  $\text{Con}_\omega \mathcal{C}(\Gamma)$  en  $[e]$  est définie par un segment géodésique issu de  $[e]$ . Ce segment est l'ensemble limite d'une suite de segment géodésiques de  $\mathcal{C}(\Gamma)$  issus de  $e$  dont les longueurs croissent linéairement en  $d_n$ .

On a :

**Lemme 1.2.9** ( [P]<sub>2</sub> ) *Soit  $(\Gamma, d_w)$  un groupe hyperbolique avec une métrique des mots. Il existe un  $D = D(\Gamma)$  tel que tout segment géodésique dans le graphe de Cayley associé à  $(\Gamma, d_w)$  est à distance au plus  $C$  d'un rayon géodésique.*

**Preuve** : On utilise le codage de Cannon des géodésiques d'un groupe hyperbolique. Chaque segment géodésique est un chemin dans le graphe de Cannon. Pour une longueur suffisamment grande du segment, ce chemin contient au moins une boucle dans ce graphe. Si on revient en arrière jusqu'à la dernière boucle décrite par ce chemin - et le nombre de pas pour y arriver est borné par une constante  $D$  qui ne dépend que du graphe - le rayon géodésique obtenu en redecrivant cette boucle une infinité de fois est donc à distance au plus  $D$  du segment.

◇

On conclut que toute direction de  $\text{Con}_\omega \mathcal{C}(\Gamma)$  en  $[e]$  est définie par une suite de rayons dans  $\mathcal{C}(\Gamma)$  issus de  $e$ . On a alors une application surjective de  $\mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ ,

$$\mathfrak{R}^{\mathbb{N}} = \{(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid r_n \text{ rayons géodésiques, } r_n(0) = e\}$$

à  $\Sigma_{[e]}$ .

$\mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$  peut s'identifier avec  $\{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \alpha_n \in \partial_\infty \mathcal{C}(\Gamma)\} = (\partial_\infty \mathcal{C}(\Gamma))^{\mathbb{N}}$ .

D'où  $\text{card } \partial_\infty \mathcal{C}(\Gamma) \leq \text{card } \Sigma_{[e]} \leq \text{card}(\partial_\infty \mathcal{C}(\Gamma))^{\mathbb{N}}$ . Or pour un groupe hyperbolique non-élémentaire  $\text{card } \partial_\infty \mathcal{C}(\Gamma) = \aleph_1$ .

◇

On a le résultat suivant dans la théorie des arbres réels :

**Lemme 1.2.10** *Deux arbres réels  $(\mathcal{T}_1, d_1)$  et  $(\mathcal{T}_2, d_2)$  pour lesquels tout point est un point de branchement et l'ensemble des directions a partout le même cardinal,  $\alpha$ , sont isométriques.*

**Esquisse de preuve :** On considère un ensemble  $A$  de cardinal  $\alpha$  et on fixe un  $a_0 \in A$  quelconque. Soit l'espace  $\mathcal{F} = \{f \mid f : [0, r_f) \rightarrow A, r_f \in [0, \infty), f(t) \neq a_0, \forall t > 0\} \cup \{f_0\}$ , où  $f_0 : \{0\} \rightarrow \{a_0\}$ , avec la métrique  $D(f, g) = r_f + r_g - 2t$ , où  $t \in [0, r_f] \cap [0, r_g]$  maximal tel que  $f|_{[0,t]} = g|_{[0,t]}$ .

C'est un espace géodésique. La géodésique entre  $f$  et  $g$  est :

- $\{f|_{[0,s]} \mid t \leq s \leq r_f\} \cup \{g|_{[0,\tau]} \mid t \leq \tau \leq r_g\}$  si le  $t$  dans la définition de la métrique existe et n'est pas nul,
- $\{f|_{[0,s]} \mid 0 < s \leq r_f\} \cup \{g|_{[0,\tau]} \mid 0 < \tau \leq r_g\} \cup \{f_0\}$  sinon.

Il n'est pas difficile de voir que  $\mathcal{F}$  est un arbre réel tel que tout point est un point de branchement et l'ensemble des directions a partout le même cardinal,  $\alpha$ .

Soit un arbre réel quelconque  $\mathcal{T}$  qui vérifie les mêmes propriétés. On fixe un  $x_0$  dans  $\mathcal{T}$  et on marque en chaque point  $x$  de  $\mathcal{T}$  chaque direction avec un élément de  $A$  de sorte que si  $x \neq x_0$  la direction vers  $x_0$  soit toujours marquée par  $a_0$ .

On définit une application  $\phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{F}$  par  $\phi(x_0) = f_0$ ,  $\phi(x) = f_x$ ,  $f_x : [0, d(x_0, x)) \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $f_x(t) =$  la direction de la géodésique  $[x_t, x]$  au point  $x_t$ , où on note  $x_t$  le point sur la géodésique  $[x_0, x]$  qui se trouve à distance  $t \cdot d(x_0, x)$  de  $x_0$ .

L'application  $\phi$  est une isométrie entre  $(\mathcal{T}, d)$  et  $\mathcal{F}$ . ◇

**Corollaire 1.2.11** *Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces métriques hyperboliques géodésiques propres admettant des groupes discrets non-élémentaires cocompacts et agissant proprement d'isométries, leurs cônes asymptotiques sont isométriques.*

**Preuve** On utilise le Lemme 1.2.10 et la Proposition 1.2.8. ◇

**Remarque 1.2.12** *Ceci implique en particulier que tous les espaces symétriques de rang 1 et tous les groupes hyperboliques non-élémentaires ont le même cône asymptotique à isométrie près. Donc dans le cas des espaces métriques hyperboliques les cônes asymptotiques ne sont pas des bons instruments d'étude, sauf si on peut trouver une autre structure sur eux, à part la métrique, qui nous donne plus d'information sur l'espace.*

## 1.3 Cônes asymptotiques des espaces symétriques de rang supérieur

Les cônes asymptotiques d'un espace symétrique de rang plus grand ou égal à 2 sont des immeubles euclidiens  $\aleph_1$ -épais homogènes nondiscrets de rang égal au rang de l'espace ([KIL]). On précise la notion d'immeuble euclidien nondiscret  $\aleph_1$ -épais homogène dans la suite.

### 1.3.1 Immeubles sphériques

Soit  $E^m$  un espace euclidien de dimension  $m$  et soit  $S^{m-1}$  la sphère unité dans  $E^m$ .

**Définition 1.3.1** • *Un groupe fini  $\mathcal{W}$  engendré par des symétries par rapport à des hyperplans qui passent par l'origine de  $E^m$  s'appelle groupe de Coxeter sphérique.*

- *Tout groupe de Coxeter sphérique détermine une structure de complexe simplicial sur  $S^{m-1}$ . On appelle complexe de Coxeter sphérique la paire formée par ce complexe simplicial et le groupe  $(S^{m-1}, \mathcal{W})$ .*
- *Les traces des hyperplans de symétrie de  $\mathcal{W}$  sur  $S^{m-1}$  s'appellent des hyperplans singuliers du complexe de Coxeter. Les intersections des hyperplans singuliers s'appellent des plats singuliers.*

On fixe un tel complexe simplicial  $(S^{m-1}, \mathcal{W})$ .

**Définition 1.3.2** *Soit un complexe simplicial  $\Sigma$  formé par des simplexes de  $S^{m-1}$  et toutes leurs faces. On appelle les  $(m-1)$ -simplexes des chambres. Soit une métrique  $d$  sur  $\Sigma$  qui coïncide sur chaque simplexe avec la métrique de  $S^{m-1}$  et telle que  $(\Sigma, d)$  est un espace CAT(1).*

*Soit  $\mathcal{A}$  une famille de sous-complexes finis tels que pour tout  $A \in \mathcal{A}$  il existe une application  $i_A : S^{m-1} \rightarrow A$  isométrie et isomorphisme de complexes simpliciaux. On appelle les éléments de  $\mathcal{A}$  des appartements de  $\Sigma$ .*

*La paire  $(\Sigma, \mathcal{A})$  est un immeuble sphérique si :*

- (1) *Pour chaque paire de chambres, il existe un appartement qui les contient.*
- (2) *Si  $A, A' \in \mathcal{A}$  ont l'intersection non-vidée, alors il existe un isomorphisme de  $A$  à  $A'$  qui fixe  $A \cap A'$ .*

*Un immeuble sphérique qui vérifie aussi la propriété :*

- (3) *Chaque simplexe de codimension 1 de  $\Sigma$  est contenu dans au moins  $c$  chambres*

, où  $c$  est un nombre cardinal, s'appelle immeuble sphérique  $c$ -épais.

- On appelle  $m$  le rang de  $\Sigma$ .
- On appelle le complexe de Coxeter sphérique  $(S^{m-1}, \mathcal{W})$  complexe de Coxeter modèle de l'immeuble.
- Les images par des isomorphismes  $i_A$  des hyperplans singuliers et des plats singuliers de  $S^{m-1}$  s'appellent des hyperplans singuliers et respectivement des plats singuliers de l'immeuble. Les images par des isomorphismes  $i_A$  des paires de points opposés s'appellent aussi des paires de points opposés. Si le complexe de Coxeter modèle de l'immeuble est irréductible on dit que l'immeuble  $\Sigma$  est irréductible.

Tout immeuble sphérique a un marquage ([Br], p.78) et alors on peut définir une projection  $p : \Sigma \rightarrow \Delta$ , où  $\Delta$  est une chambre modèle,  $p$  envoyant toute chambre de  $\Sigma$  sur cette chambre, en respectant le marquage.

Le complexe de Coxeter modèle a lui aussi un marquage compatible avec celui de  $\Sigma$ , c'est-à-dire tel que les applications  $i_A : S^{m-1} \rightarrow A$ ,  $A \in \mathcal{A}$  sont des isomorphismes de complexes simpliciaux marqués. Donc on peut aussi définir une projection  $p_S : S^{m-1} \rightarrow \Delta$  qui respecte ce marquage.

**Définition 1.3.3** *Un point  $x \in \Sigma$  est appelé point singulier si  $p(x)$  se trouve dans un des murs de  $\Delta$ . Sinon on appelle  $x$  point régulier.*

**Remarque 1.3.4** *Si on choisit un appartement  $A \in \mathcal{A}$  et une chambre  $C \subset A$ , on peut définir une retraction  $\text{retr}_{A,C} : \Sigma \rightarrow A$  de l'immeuble sur  $A$  qui fixe  $C$  de la manière suivante :*

*Pour tout  $x \in \Sigma$  il existe un appartement  $A'$  qui contient  $x$  et  $C$  et il existe un isomorphisme  $i_{A',A} : A' \rightarrow A$  qui fixe  $A \cap A'$ . On définit  $\text{retr}_{A,C}(x) = i_{A',A}(x)$ . D'après [Ti], §3.3 – 3.5, cette application est bien définie et a les propriétés suivantes :*

- (1)  $\text{retr}_{A,C}$  est contractante et préserve toutes les distances à des points de  $C$ .
- (2) Si on note  $p_A : A \rightarrow \Delta$  la projection de  $A$  sur la chambre modèle qui respecte le marquage, on a :

$$p_A \circ \text{retr}_{A,C} = p$$

La deuxième propriété est due au fait que chaque isomorphisme  $i_{A',A}$  est un isomorphisme qui fixe au moins une chambre donc c'est aussi un isomorphisme de complexes simpliciaux marqués.



**Remarque 1.3.5** Soit  $x \in \Sigma$  point régulier. Alors il existe une unique chambre  $C_0$  qui contient  $x$ . Soit  $A_0$  un appartement qui contient  $C_0$ .

- a) Si  $C$  est une chambre de  $\Sigma$  il existe au plus un opposé de  $x$  dans  $C$ . Car si  $y \in C$  est un opposé de  $x$ ,  $\text{retr}_{A_0, C_0}(y)$  l'est aussi, or il existe un seul opposé de  $x$  en  $A_0$ . Donc si  $A$  est un appartement de  $\Sigma$ ,  $x$  ne peut avoir qu'un nombre fini d'opposés dans  $A$ .
- b) Si  $y$  est un opposé de  $x$ , il existe un unique appartement de  $\Sigma$  qui contient  $x$  et  $y$ . Car si  $C$  est l'unique chambre qui contient  $y$ , comme  $C$  et  $C_0$  sont opposées, il existe un unique appartement qui les contient ( $\Gamma_i$ ).

Soit  $p_S : S^{m-1} \rightarrow \Delta$  la projection canonique du complexe de Coxeter modèle sur une chambre modèle, qui respecte le marquage et soit  $x \in S^{m-1}$  un point tel que  $p_S(x) = \theta$ .

On note  $Spl$  l'ensemble des simplexes de  $S^{m-1}$ .

**Remarque 1.3.6** L'ensemble des distances  $D_\theta = \{d(x, \sigma); \sigma \in Spl, x \notin \sigma\}$  est un ensemble fini qui ne dépend pas de  $x$  mais seulement de  $\theta$ .

Si on écrit cet ensemble en ordre croissante on peut avoir trois termes consécutifs de la forme  $\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta'$  ou deux termes consécutifs  $\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta'$ , où  $\delta$  et  $\delta'$  sont des constantes qui ne dépendent que de  $\theta$  et de  $S^{m-1}$ .

**Proposition 1.3.7** Soit  $x$  un point de  $\Sigma$  et  $A$  un appartement.

- (i) Un point  $\beta \in A$  tel que  $d(x, A) = d(x, \beta)$  est un point singulier.
- (ii) Soit un point  $\beta$  comme ci-dessus qui se trouve à l'intérieur d'un mur  $\mathcal{M}$ , soit  $A'$  un appartement qui contient  $x$  et  $\mathcal{M}$  et soit  $\Phi$  le plat singulier minimal de  $A'$  qui contient  $\mathcal{M}$ . Alors  $d(x, \Phi) = d(x, \beta)$ .  
Si de plus  $d(x, \beta) = \frac{\pi}{2}$ , alors  $x$  est orthogonal à  $\Phi$ , c'est-à-dire  $d(x, \beta') = \frac{\pi}{2}, \forall \beta' \in \Phi$ .

**Preuve.** (i) Si on suppose que  $\beta$  est un point régulier, alors il existe une unique chambre  $C_0$  qui le contient. Dans un appartement qui contient  $x$  et  $C_0$ , la géodésique entre  $x$  et  $\beta$  coupe un mur de  $C_0$  en un point  $\beta'$  tel que  $d(x, \beta') < d(x, \beta)$ . D'autre part  $\beta \in A$  implique  $C_0 \subset A$ , donc  $\beta' \in A$ , d'où la contradiction.

(ii)  $A'$  est isométrique à une sphère  $S^{m-1}$  dans un espace euclidien de dimension  $m$  ( $m$  étant le rang de l'immeuble). On peut voir alors  $x$  comme

un vecteur unitaire,  $\Phi$  comme l'intersection de  $S^{m-1}$  avec un sous-espace  $L$ , et  $\mathcal{M}$  comme l'intersection de  $S^{m-1}$  avec un cône simplicial de  $L$ .

S'il existe un vecteur  $\beta' \in \Phi$  tel que  $d(x, \beta') < d(x, \beta)$ , alors la géodésique entre  $\beta'$  et  $\beta$  coupe un mur de  $\mathcal{M}$  en un point  $\beta''$  tel que  $d(x, \beta'') < d(x, \beta)$ , d'où la contradiction.

Donc  $d(x, \beta') \geq d(x, \beta)$  pour tout  $\beta' \in \Phi$ .

Supposons que  $d(x, \beta) = \frac{\pi}{2}$ . En termes d'espace euclidien cela s'écrit comme  $\langle x, \beta \rangle = 0$ , et  $d(x, \beta') \geq \frac{\pi}{2}$  comme  $\langle x, \beta' \rangle \leq 0, \forall \beta' \in \mathcal{M}$ .

Il n'est pas difficile de voir qu'on peut choisir dans  $\mathcal{M}$  une base pour  $L$ ,  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$ . On la choisit dans un voisinage de  $\beta$  dans  $\mathcal{M}$  de sorte que  $\beta$  forme un angle aigu avec chaque  $\beta_i$ .

Alors  $\beta = a_1\beta_1 + \dots + a_k\beta_k, a_1 > 0, \dots, a_k > 0$ .

On a  $\langle x, \beta \rangle = a_1 \langle x, \beta_1 \rangle + \dots + a_k \langle x, \beta_k \rangle = 0$  et  $\langle x, \beta_i \rangle \leq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$  d'où  $\langle x, \beta_i \rangle = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$  et  $\langle x, \beta' \rangle = 0$  pour tout  $\beta' \in \Phi$ , en particulier pour tout  $\beta' \in \mathcal{M}$ .

◇

### 1.3.2 Immeubles euclidiens

#### Définitions

Soit  $V^m$  l'espace linéaire associé à  $E^m$ . On sait qu'on peut décomposer le groupe d'isométries de  $E^m$  comme  $\text{Isom}(E^m) = V^m \rtimes O(V^m)$ .

Soit  $\text{proj} : \text{Isom}(E^m) \rightarrow O(V^m)$  la projection sur la partie rotationnelle.

**Définition 1.3.8** • *Un groupe  $\mathcal{W}_{aff}$  engendré par des symétries par rapport aux hyperplans de  $E^m$  et tel que  $\text{proj}(\mathcal{W}_{aff})$  est finie s'appelle groupe de Coxeter euclidien.*

- *On appelle complexe de Coxeter euclidien la paire  $(E^m, \mathcal{W}_{aff})$ .*
  - *Les hyperplans de symétrie de  $\mathcal{W}_{aff}$  s'appellent des hyperplans singuliers et leurs intersections des plats singuliers.*
  - *Les polytopes ayant leurs faces seulement dans des hyperplans singuliers s'appellent des polytopes de Weyl. Les polytopes ayant leurs faces seulement dans des hyperplans singuliers qui passent par un point  $x \in E^m$  s'appellent des cônes polytopiques de Weyl de sommet  $x$ .*
  - *On dit qu'un plat singulier de dimension  $k$  est adjacent à un polytope de Weyl ou qu'il est un  $k$ -plat singulier d'appui du polytope si son intersection avec le polytope se trouve dans le bord du polytope et est de dimension  $k$ .*
- La projection  $\mathcal{W} = \text{proj}(\mathcal{W}_{aff})$  est un groupe de Coxeter sphérique. Si on*

identifie le bord de Tits de  $E^m$ ,  $\partial_\infty E^m$ , à  $S^{m-1}$ , on peut voir que  $(\partial_\infty E^m, \mathcal{W})$  est un complexe de Coxeter sphérique. Soit  $\Delta$  sa chambre modèle.

• On appelle chambre de Weyl tout cône polytopique de Weyl ayant une chambre de  $(\partial_\infty E^m, \mathcal{W})$  comme bord à l'infini.

On dit que le complexe de Coxeter euclidien  $(E^m, \mathcal{W}_{aff})$  est irréductible si le complexe de Coxeter sphérique  $(\partial_\infty E^m, \mathcal{W})$  est irréductible.

On dit que le complexe de Coxeter euclidien  $(E^m, \mathcal{W}_{aff})$  est discret si le voisinage de chaque point de  $E^m$  rencontre seulement un nombre fini de hyperplans de symétrie.

On fixe un complexe de Coxeter euclidien  $(E^m, \mathcal{W}_{aff})$ .

**Définition 1.3.9** Soit un espace géodésique  $CAT(0)$ ,  $\mathbf{K}$ . Soit une famille de plongements isométriques  $i_A : E^m \rightarrow \mathbf{K}$  invariante aux précompositions par des éléments de  $\mathcal{W}_{aff}$ . On appelle leurs images des appartements de  $\mathbf{K}$  et on note la classe des appartements par  $\mathcal{A}$ .

Les images par les plongements  $i_A$  des hyperplans singuliers, plats singuliers, polytopes de Weyl et chambres de Weyl de  $(E^m, \mathcal{W}_{aff})$  sont appelés respectivement des hyperplans singuliers, plats singuliers, polytopes de Weyl et chambres de Weyl de  $\mathbf{K}$ . Chaque hyperplan singulier partitionne un appartement en deux parties qu'on appelle des demi-appartements.

On dit que la paire  $(\mathbf{K}, \mathcal{A})$  forme un immeuble euclidien de rang  $m$  si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (1) Tout segment, rayon ou géodésique est contenu dans un appartement.
- (2) Si  $i_1 : E^m \rightarrow \mathbf{K}$  et  $i_2 : E^m \rightarrow \mathbf{K}$  sont deux plongements,  $i_1^{-1}(i_2(E^m))$  est un polytope de Weyl et il existe un  $w \in \mathcal{W}_{aff}$  tel que  $w(i_1^{-1}(i_2(E^m))) = i_2^{-1}(i_1(E^m))$ .
- (3) Si  $[x, y]$  et  $[x, z]$  sont deux segments géodésiques, alors deux sous-segments non-dégénérés  $[x, y'] \subset [x, y]$  et  $[x, z'] \subset [x, z]$  sont contenus dans un même appartement.

Un immeuble euclidien qui vérifie aussi la propriété :

- (4) Chaque hyperplan singulier est le bord d'au moins  $c$  demi-appartements d'intérieurs deux à deux disjoints.

, où  $c$  est un nombre cardinal, s'appelle immeuble euclidien  $c$ -épais.

On appelle le complexe de Coxeter euclidien  $(E^m, \mathcal{W}_{aff})$  complexe de Coxeter modèle de l'immeuble.

Si le complexe de Coxeter modèle de l'immeuble est irréductible on dit que l'immeuble est irréductible.

Si le complexe de Coxeter modèle de l'immeuble est discret on dit que l'immeuble

est discret.

Si le groupe des isométries de  $\mathbf{K}$  agit transitivement sur  $\mathbf{K}$  on dit que l'immeuble est homogène.

Le bord de Tits de  $\mathbf{K}$ ,  $\partial_\infty \mathbf{K}$ , est un immeuble sphérique de rang  $m$  ayant comme appartements les bords de Tits des appartements de  $\mathbf{K}$ , donc comme complexe de Coxeter modèle le bord à l'infini du complexe de Coxeter modèle de  $\mathbf{K}$ .

**Remarque 1.3.10** Cette définition est équivalente à celle énoncée dans [KIL]. En effet, il n'est pas difficile de voir que les axiomes (2) et (3) de cette définition impliquent les axiomes (EB1) et (EB2) de [KIL]. La section 4.2.2 et le Sous-lemme 4.4.1 de [KIL] montrent qu'on a aussi l'implication inverse.

Toujours dans [KIL] on peut trouver la preuve du fait que cette définition est plus forte que celle donnée dans les livres classiques sur les immeubles (par exemple [Ro]). En effet les lemmes 4.6.5 et 4.8.2 (ii), [KIL], montrent que dans les conditions de ce te définition toutes les axiomes de la définition classique d'immeuble euclidien sont vérifiés.

### L'immeuble des directions en un point

On définit l'espace de directions au point  $x$ ,  $\Sigma_x \mathbf{K}$ , dans un immeuble euclidien homogène  $\mathbf{K}$ . Celui-ci est une sorte d'équivalent de l'espace tangent en un point d'une variété, et il va nous permettre d'étudier  $\mathbf{K}$  et ses sous-ensembles localement.

Pour ce faire, on définit d'abord deux types d'angles dans un espace  $CAT(0)$ ,  $\mathbf{K}$ .

Pour deux segments géodésiques  $[x, a]$  et  $[x, b]$ , on considère le triangle de comparaison  $\tilde{x}, \tilde{a}, \tilde{b}$ , c'est-à-dire le triangle plan qui a les mêmes longueurs des arêtes que le triangle géodésique  $xab$  dans  $X$ .

On note  $\tilde{\angle}_x(a, b)$  l'angle qu'on obtient au sommet  $\tilde{x}$ .

**Définition 1.3.11** On définit l'angle formé par les segments  $[x, a]$  et  $[x, b]$  en  $x$  par  $\angle_x(a, b) = \lim_{t, s \rightarrow 0} \tilde{\angle}_x(a_t, b_s)$ , où  $a_t$  est le point de  $[x, a]$  correspondant au paramètre  $t \in [0, 1]$  dans le paramétrage qui associe 0 à  $x$  et 1 à  $a$ . (Parfois on va noter un tel point  $a_t = tx + (1 - t)a$ .)

**Remarque 1.3.12** a) Si l'espace  $CAT(0)$  qu'on considère est un immeuble euclidien, alors d'après la définition (section 1.3.2) pour chaque paire de segments  $[x, a]$  et  $[x, b]$  il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que  $x, a_\varepsilon$  et  $b_\varepsilon$  forment un triangle géodésique plat (c'est-à-dire isométrique à un triangle euclidien) ayant l'angle  $\angle_x(a, b)$  en  $x$ . En particulier, si  $\angle_x(a, b) = 0$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  et un  $\delta > 0$  tel que  $[x, a_\varepsilon] = [x, b_\delta]$ .

b) Dans le lemme 4.1.2, [KIL] un résultat plus fort est prouvé :

Si  $[x, \alpha]$  et  $[x, \beta]$  sont deux rayons dans un immeuble euclidien  $\mathbf{K}$ ,  $\alpha, \beta \in \partial_\infty \mathbf{K}$ , alors il existe un  $z \in [x, \alpha]$  tel que le triangle idéal formé par  $x, z$  et  $\beta$  est euclidien, c'est-à-dire c'est une bande euclidienne (Figure 5).

Dès lors on suppose que  $\mathbf{K}$  est un immeuble euclidien homogène.

**Définition 1.3.13** L'espace de directions au point  $x$  dans  $\mathbf{K}, \Sigma_x \mathbf{K}$ , est formé par les classes d'équivalence des segments géodésiques issus de  $x$  par rapport à la relation d'équivalence "angle nul en  $x$ ". On note  $\overline{xa}$  la classe correspondant au segment  $[x, a]$ , et on l'appelle la direction de  $[x, a]$  en  $x$ . De même, on note  $\overline{x\alpha}$  la classe du rayon  $[x, \alpha]$ ,  $\alpha \in \partial_\infty \mathbf{K}$ .

$\Sigma_x \mathbf{K}$  avec la métrique donnée par  $d_x(\overline{xa}, \overline{xb}) = \angle_x(a, b)$  est un immeuble sphérique ayant comme appartements les ensembles  $F_x = \{\overline{xa}, [x, a] \subset F\}$ , où  $F$  est un appartement de  $\mathbf{K}$  qui passe par  $x$ . Les chambres sont de la forme  $W_x = \{\overline{xa}, [x, a] \subset W\}$ , où  $W$  est une chambre de Weyl de sommet  $x$ , de même pour les plats singuliers et les murs ([KIL], §4).

**Remarque 1.3.14** D'après la Remarque 1.3.12 on peut remplacer la relation d'équivalence "angle nul en  $x$ " par la relation d'équivalence  $[x, a] \sim [x, b] \Leftrightarrow [x, a] \cap [x, b] = [x, x']$ ,  $x \neq x'$ .

On peut établir une relation entre la position relative d'un  $\alpha \in \partial_\infty \mathbf{K}$  dans la chambre qui le contient et la position de  $\overline{x\alpha}$  dans la chambre de  $\Sigma_x \mathbf{K}$  qui le contient. Ceci découle du résultat suivant:

**Lemme 1.3.15** Pour tout  $x \in \mathbf{K}$  et  $\mathcal{W}$  chambre dans  $\partial_\infty \mathbf{K}$  l'ensemble de rayons  $\{[x, \alpha], \alpha \in \mathcal{W}\}$  forme une chambre de Weyl de sommet  $x$ .

**Démonstration.** On choisit un point régulier  $\alpha_0 \in \mathcal{W}$ .

$\mathbf{K}$  étant un immeuble euclidien il existe un plat maximal  $F$  qui contient le rayon  $[x, \alpha_0]$  et dans ce plat maximal il existe une chambre de Weyl  $W$  de sommet  $x$  qui contient  $[x, \alpha_0]$ .

Alors  $W(\infty)$  contient le point régulier  $\alpha_0$  tout comme  $\mathcal{W}$ . Il s'ensuit que  $W(\infty) = \mathcal{W}$ .

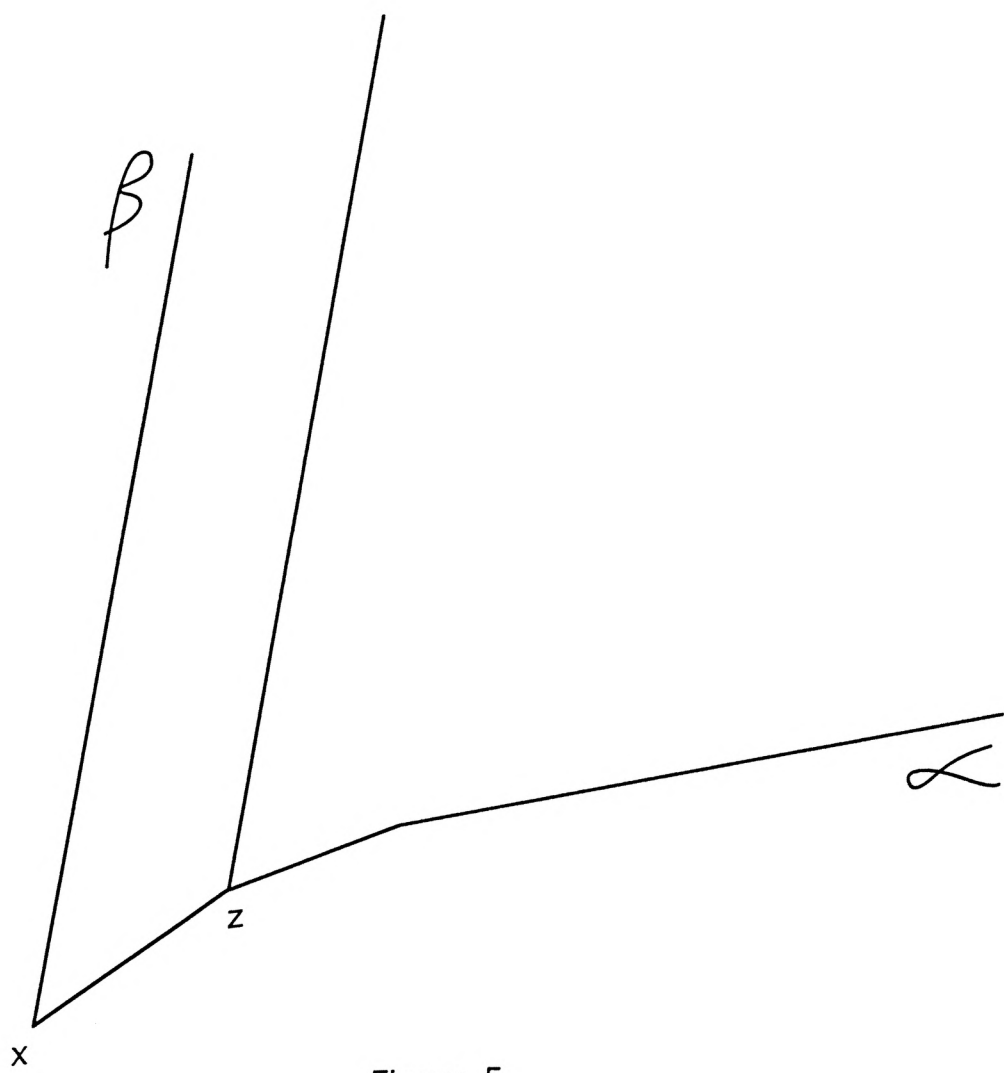


Figure 5

Il est facile de voir que  $W = \{[x, \alpha), \alpha \in W(\infty)\} = \{[x, \alpha), \alpha \in \mathcal{W}\}$ .

◇

Supposons qu'on a fixé un marquage pour  $\partial_\infty \mathbf{K}$ . En chaque  $x \in X$  on choisit pour  $\Sigma_x \mathbf{K}$  un marquage compatible avec celui de  $\partial_\infty \mathbf{K}$ , c'est-à-dire :

- Soit  $\mathcal{W}^0$  une chambre fondamentale en  $\partial_\infty \mathbf{K}$  dont on a fixé le marquage.
- Pour chaque  $x \in X$  on prend la chambre de Weyl  $W^0$  de sommet  $x$  et telle que  $W^0(\infty) = \mathcal{W}^0$ .
- Le marquage de  $\mathcal{W}^0$  induit un marquage de  $W_x^0$ . On choisit  $W_x^0$  avec ce marquage induit comme chambre fondamentale pour  $\Sigma_x \mathbf{K}$ .

Dans la suite on démontre que le marquage de  $\Sigma_x \mathbf{K}$  ne dépend pas du choix de la chambre fondamentale  $\mathcal{W}^0$  en  $\partial_\infty \mathbf{K}$ , mais seulement du marquage choisi en  $\partial_\infty \mathbf{K}$ .

**Lemme 1.3.16** *Pour toute chambre de Weyl  $W$ , de sommet  $x$ , dans  $\mathbf{K}$ ,  $W_x$  et  $W(\infty) = \mathcal{W}$  ont le même marquage pour les sommets correspondants.*

Pour montrer ce lemme on utilise le résultat suivant :

**Lemme 1.3.17** *Soient  $W$  et  $W'$  deux chambres de Weyl de sommet  $x$  telles que  $W_x = W'_x = \mathcal{W}_x$ . Les marquages de  $\mathcal{W}_x$  induits par  $W(\infty)$  et  $W'(\infty)$  coïncident.*

**Preuve du lemme 1.3.17** . D'après le sous-lemme 4.4.1 de [KIL],  $W_x = W'_x$  implique qu'il existe un  $\varepsilon$  tel que  $W \cap B(x, \varepsilon) = W' \cap B(x, \varepsilon)$ . Alors, si on considère deux plats  $F$  et  $F'$  qui contiennent  $W$  et  $W'$  respectivement, l'axiome (2) de l'immeuble euclidien permet de conclure. ◇

**Preuve du lemme 1.3.16** On fait un raisonnement de récurrence par rapport à la distance simpliciale de  $W_x$  à  $W_x^0$ . Si  $d(W_x, W_x^0) = 1$ , c'est-à-dire si  $W_x = W_x^0$  alors on peut conclure avec le lemme 1.3.17.

On suppose que c'est vrai pour les chambres de  $\Sigma_x \mathbf{K}$  situées à distance simpliciale  $d$  de  $W_x^0$  et on le démontre pour celles à distance  $d + 1$ .

Éventuellement en échangeant  $W$  avec une autre chambre de Weyl de sommet  $x$  ayant la même chambre de directions en  $x$  (on peut faire ceci d'après le lemme 1.3.17) on peut supposer qu'il existe une chambre de Weyl  $W'$  de sommet  $x$  telle que  $W$  et  $W'$  ont en commun un mur de codimension 1, se trouvent dans le même plat maximal et  $d(W_x^0, W'_x) = d$ . Alors  $W'_x$  a le même marquage que  $W'(\infty)$  ce qui entraîne la même chose pour  $W_x$  et  $W(\infty)$ .

◇

Avec ces marquages fixés sur  $\partial_\infty \mathbf{K}$  et  $\Sigma_x \mathbf{K}$ ,  $x \in \mathbf{K}$ , on peut définir les projections qui respectent les marquages  $P : \partial_\infty \mathbf{K} \rightarrow \Delta$ ,  $p_x : \Sigma_x \mathbf{K} \rightarrow \Delta$ . Les immeubles  $\partial_\infty \mathbf{K}$  et  $\Sigma_x \mathbf{K}$  ont le même complexe de Coxeter modèle, qu'on note  $S$ . Le complexe de Coxeter  $S$  a un marquage compatible avec ceux de  $\partial_\infty \mathbf{K}$  et  $\Sigma_x \mathbf{K}$  et on peut définir une projection  $p_S : S \rightarrow \Delta$  qui respecte ce marquage.

**Corollaire 1.3.18** *Si  $\rho$  est un rayon géodésique tel que  $\rho(0) = x$  et si on note  $\overline{\rho_x}$  la direction en  $x$  qui correspond à  $\rho$ , on a*

$$p_x(\overline{\rho_x}) = P(\rho(\infty)).$$

**Définition 1.3.19** *On appelle  $\alpha = p_x(\overline{\rho_x}) = P(\rho(\infty)) \in \Delta$  la direction du rayon géodésique  $\rho$ .*

**Corollaire 1.3.20** *Si  $\alpha, \beta \in \partial_\infty \mathbf{K}$ ,  $P(\alpha) = \theta_1$ ,  $P(\beta) = \theta_2$ , alors pour tout  $x \in \mathbf{K}$ ,  $\angle_x(\alpha, \beta)$  peut prendre seulement un nombre fini de valeurs et cet ensemble de valeurs possibles ne dépend pas de  $x$ , mais seulement de  $\theta_1$  et de  $\theta_2$ .*

**Démonstration.**  $p_x(\overline{x\alpha}) = \theta_1$  et  $p_x(\overline{x\beta}) = \theta_2$ , d'après le Corollaire 1.3.18.

On a l'ensemble fini de distances

$$\delta(\theta_1, \theta_2) = \{d_S(x_1, x_2); x_1, x_2 \in S, p_S(x_1) = \theta_1, p_S(x_2) = \theta_2\}.$$

Alors, puisque la distance entre  $\overline{x\alpha}$  et  $\overline{x\beta}$  en  $\Sigma_x \mathbf{K}$ ,  $d_x(\overline{x\alpha}, \overline{x\beta}) = \angle_x(\alpha, \beta)$ , coïncide avec la distance dans l'appartement qui les contient, on peut conclure que  $\angle_x(\alpha, \beta) \in \delta(\theta_1, \theta_2)$  et ceci pour tout  $x \in \mathbf{K}$ .

◇

**Remarque 1.3.21** *Dans un immeuble sphérique  $\Sigma$ , pour tout  $x \in \Sigma$  et tout appartement  $A$  de  $\Sigma$ ,  $x$  a un opposé en  $A$ . En effet, on peut joindre  $x$  avec un point régulier de  $A$  par une géodésique et puis prolonger cette géodésique jusqu'à la longueur  $\pi$ .*

*Dans le cas particulier de  $\mathbf{K}$  et  $\Sigma_x \mathbf{K}$ , ceci entraîne que toute géodésique  $[x, y]$  incidente à un plat maximal  $F$  de  $\mathbf{K}$ , c'est-à-dire telle que  $x \in \mathbf{K}$ ,  $y \in F$ , peut être prolongée dans  $F$ . En effet dans  $\Sigma_y \mathbf{K}$ , d'après la remarque précédente,  $\overline{yx}$  a un opposé dans  $F_y$ ,  $\overline{yz}$ . Ainsi  $[y, z]$  est un prolongement de  $[x, y]$  dans  $F$ .*



### 1.3.3 Le cône asymptotique d'un espace symétrique

Si  $X$  est un espace symétrique irréductible de rang plus grand ou égal à 2, son bord à l'infini avec la métrique de Tits est un immeuble sphérique irréductible  $\aleph_1$ -épais ([Mo], chap.15 et 16, ou [BGS], Appendix 5).

**Théorème 1.3.22** ([KIL]) *Tout cône asymptotique de  $X$  est un immeuble euclidien irréductible homogène  $\aleph_1$ -épais qui a comme appartements des plats qui sont des ensembles limites provenant de suites des plats maximaux de  $X$ . De même, les plats singuliers, les chambres de Weyl et leurs murs, les polyèdres de Weyl sont des ensembles limites des suites d'objets du même type dans l'espace  $X$ . Ceci implique en particulier que  $\partial_\infty K$  et  $\partial_\infty X$  ont le même complexe de Coxeter modèle.*

Dans ce cas particulier d'immeuble, on appelle parfois les appartements des plats maximaux.

## Chapter 2

# Invariants de quasi-isométrie et cône asymptotique

### 2.1 Croissance polynomiale et cônes asymptotiques

Les espaces métriques qu'on étudie dans ce paragraphe sont, généralement, de deux types : des variétés riemanniennes ou des groupes de type fini avec une métrique des mots.

**Définition 2.1.1** *Pour  $(X, d) = (V, ds^2)$  variété riemannienne, on définit la fonction croissance comme  $f(r) = \text{vol}(B(x, r))$ ,  $x \in V$ ,  $B(x, r) =$  boule de centre  $x$  et de rayon  $r$ .*

*Pour  $(X, d) = (\Gamma, d_w)$  où  $\Gamma$  est un groupe de type fini,  $S$  est un système de générateurs,  $S^{-1} = S$ ,  $d_w$  la métrique des mots associé, on définit la fonction de croissance comme  $f(n) = \text{card}B(e, n)$ .*

L'ordre de cette fonction ne dépend pas de  $x$ , dans le cas de la variété, et dépend seulement de la classe de quasi-isométrie de  $(X, d)$ .

Le résultat qui lie le comportement de l'invariant de quasi-isométrie ci-dessus aux propriétés topologiques des cônes asymptotiques est le suivant:

**Proposition 2.1.2** **a)**  *$(\Gamma, d_w)$  est à croissance polynomiale si et seulement si pour tout  $\omega$  et  $(d_n)$ ,  $\text{Con}_\omega(\Gamma, (d_n), e)$  est un espace métrique propre.*

- b) De plus, dans ce cas, tous les cônes sont isométriques, et on a une convergence de  $(\Gamma, \varepsilon \cdot d_\omega)$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans la métrique de Hausdorff-Gromov vers cet espace limite unique.
- c) La dimension de Hausdorff de l'espace limite coïncide avec l'ordre de la fonction de croissance.
- d) On a les mêmes résultats pour  $(\tilde{V}, ds^2)$  recouvrement d'une variété compacte.

**Preuve** La partie directe de a) est prouvée dans [Gr]<sub>1</sub> et [VDW], b) et c) sont prouvés dans [Pa]. Il reste à prouver la partie inverse de a) : si  $Con_\omega(\Gamma, e, (d_n))$  est propre pour tout  $\omega$  et  $(d_n)$  alors il existe  $C > 0, r_0 > 0, d > 0$  tels que  $\text{card } B(e, r) \leq C \cdot r^d, \forall r \geq r_0$ .

On raisonne par l'absurde : on suppose que pour tout  $C > 0, r_0 > 0, d > 0$  il existe un  $r \geq r_0$  tel que  $\text{card } B(e, r) > C \cdot r^d$ .

On fixe  $r_0 > 1$ . On a que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  il existe un  $R_n \geq r_0$  tel que  $\text{card} B(e, R_n) \geq n \cdot (R_n)^n$ .

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$  on prend le  $R_n$  minimal qui vérifie cette relation. Evidemment il faut que  $R_n \rightarrow \infty$ .

On considère  $Con_\omega(\Gamma, e, (R_n))$ . L'ensemble limite des boules  $B(e, R_n)$  est la boule  $B([e], 1)$ . Soit un  $\lambda \in (0, 1)$ .

Comme  $B([e], 1)$  est compacte, elle admet un recouvrement fini par des boules de rayon  $\lambda$ ,  $B([e], 1) \subset \bigcup_{i=1}^k B([x_n^i], \lambda)$ , d'où (avec les notations introduites dans la section 1.1)

$$(3.1) \quad \pi^{-1}(B([e], 1)) \subset \bigcup_{i=1}^k \pi^{-1}(B([x_n^i], \lambda)).$$

Par définition,  $\pi^{-1}(B([e], R)) = \{[x_n]; \lim_\omega \frac{d(x_n, e)}{R_n} < R\}$ . Or :

$$\begin{aligned} \lim_\omega \frac{d(x_n, e)}{R_n} < R &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, d(x_n, e) < (R + \varepsilon) \cdot R_n \quad \omega - \text{p.s.} \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, x_n \in B(e, (R + \varepsilon) \cdot R_n) \quad \omega - \text{p.s.} \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, [x_n] \in [[B(e, (R + \varepsilon)R_n)]] \\ &\Leftrightarrow [x_n] \in \bigcap_{\varepsilon > 0} [[B(e, (R + \varepsilon)R_n)]] \end{aligned}$$

Alors la transcription de (3.1) est

$$(3.2) \quad \bigcap_{\varepsilon > 0} [[B(e, (1 + \varepsilon) \cdot R_n)]] \subset \bigcup_{i=1}^k \bigcap_{\varepsilon_i > 0} [[B(x_n^i, (\lambda + \varepsilon_i)R_n)]]$$

On choisit  $\varepsilon$  tel que  $\lambda' = \lambda + \varepsilon$  vérifie  $0 < \lambda' < 1$ .  
 La relation (3.2) implique que :

$$(3.3) \quad [[B(e, R_n)]] \subset \bigcup_{i=1}^k [[B(x_n^i, \lambda' R_n)]]$$

Petit intermezzo nonstandard ([VDW]) :

On a le théorème de Los ([VDW],p.361):

**Théorème 2.1.3** *Soient  $W_1 = [[W_{1,n}]], \dots, W_m = [[W_{m,n}]]$  des ensembles internes de  $X^*$  et  $f_1, \dots, f_k \in X^*$  et soit  $\phi$  une propriété qui s'exprime en  $W_1, \dots, W_m, f_1, \dots, f_k$  en utilisant les relations d'appartenance, d'inclusion et les quantificateurs logiques. Alors  $W_1, \dots, W_m, f_1, \dots, f_k$  vérifient la propriété  $\phi$  si et seulement si  $W_{1,n}, \dots, W_{m,n}, f_1(n), \dots, f_k(n)$  vérifient  $\phi$   $\omega$ -presque sûrement.*

D'après le théorème de Los, (3.3) est équivalent à

$$B(e, R_n) \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_n^i, \lambda' R_n) \omega\text{-p.s.}$$

D'où  $\text{card } B(e, R_n) \leq k \text{ card } B(e, \lambda' R_n) \omega\text{-p.s.}$

Alors on a  $\omega$ -presque sûrement la suite d'inégalités :

$$n \cdot (R_n)^n \leq \text{card} B(e, R_n) \leq k \cdot \text{card} B(e, \lambda' R_n) \leq k \cdot n \cdot (\lambda' R_n)^n.$$

D'où  $(\lambda')^n \geq \frac{1}{k} \omega\text{-p.s.}$  Or  $\lambda' \in (0, 1)$ . On a obtenu une contradiction.

◇

## 2.2 Remplissage polynomial et cône asymptotique

### 2.2.1 Fonction de remplissage

#### Fonction de remplissage riemannienne

La notion de fonction de remplissage ou de fonction isoperimétrique est classique en géométrie différentielle et elle se définit comme il suit :

Soit  $V$  une variété riemannienne et  $c : S^1 \rightarrow V$  une courbe différentiable par parties.

**Définition 2.2.1** *On appelle surface qui remplit la courbe  $c$  une application  $\sigma : D^2 \rightarrow X$ , différentiable à l'exception d'un ensemble négligeable de points*

telle que  $\sigma|_{S_1} = c$ .

On appelle aire de remplissage de  $c$  et on note  $A(c)$  le minimum des aires des surfaces qui remplissent  $c$ .

On définit la fonction de remplissage pour tout  $\ell > 0$  par

$$A(\ell) = \sup\{A(c) \mid c \text{ courbe de longueur } \leq \ell\}.$$

## Fonction de Dehn dans un groupe

On dispose d'une notion analogue dans la théorie des groupes, la fonction de Dehn.

**Définition 2.2.2** Si  $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$  est un groupe de présentation finie, la fonction de remplissage, appelé aussi la fonction de Dehn, se définit comme suit :

Si  $g$  est un mot formé par des éléments de  $S$  tel que  $g \equiv e$  dans  $\Gamma$  (donc  $g$  est une courbe dans le graphe de Cayley associé à  $\Gamma$ ) on définit l'aire de  $g$ ,  $A(g)$ , comme le plus petit  $p$  tel que  $g = \prod_{i=1}^p \gamma_i r_i \gamma_i^{-1}$ ,  $\gamma_i \in \Gamma$ ,  $r_i \in R \cup R^{-1}$ .

On définit la fonction de Dehn associée au groupe pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par

$$A(n) = \sup\{A(g) \mid g \text{ de longueur } \leq n, g \equiv e\}.$$

Cette définition montre que la fonction de Dehn dépend de la présentation de  $\Gamma$ , donc il est naturel de se demander jusqu'à quel point elle dépend de cette présentation.

**Définition 2.2.3** Si deux fonctions  $f_1 : D \rightarrow C$  et  $f_2 : D \rightarrow C$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $C \subset \mathbb{R}$  vérifient une relation de type

$$f_1(x) \leq a \cdot f_2(b \cdot x + c) + d \cdot x + e \quad \forall x \in D$$

où  $a, b, c, d, e$  sont des constantes positives, on note ceci  $f_1 \prec f_2$  et on dit que l'ordre de  $f_1$  est au plus l'ordre de  $f_2$ . Si pour deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  on a  $f_1 \prec f_2$  et  $f_2 \prec f_1$  on dit qu'elles sont du même ordre.

**Proposition 2.2.4** [cf. [Al], [Ge]] Si le groupe de type fini  $\Gamma$  a deux présentations finies  $\Gamma = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$  et  $\Gamma = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$  et  $A_1(n), A_2(n)$  sont les fonctions de Dehn associées aux deux présentations alors  $A_1(n)$  et  $A_2(n)$  sont du même ordre.

Ainsi on voit que l'ordre de la fonction de Dehn ne dépend pas de la présentation du groupe.

## Fonction de remplissage dans un espace métrique

On peut définir une notion de fonction de remplissage dans un espace métrique général  $X$ , qu'on suppose géodésique pour simplifier les raisonnements.

Pour cela, on considère une courbe lipschitzienne fermée,  $c$ , de longueur finie,  $\ell$ . On suppose qu'elle est paramétrée proportionnellement à la longueur de l'arc.

Soit  $D^2$  le disque unité du plan de bord  $S^1$ .

- On considère une partition quelconque,  $\wp$ , de  $D^2$  en des polygones homéomorphes au disque (voir par exemple la Figure 6 ).

On appelle *partition de  $c$  dans  $X$*  l'image par une application injective  $\pi$  de l'ensemble des sommets de  $\wp$  (qu'on note toujours  $\wp$ ), telle que  $\pi|_{S^1 \cap \wp} = c|_{S^1 \cap \wp}$ . On peut joindre dans  $X$  par des arcs géodésiques les paires de points qui sont des images de sommets de  $\wp$  joints par une arête. On obtient ainsi le même nombre de contours que dans  $\wp$ .

- On appelle *maille de la partition  $\pi$* , et on la note  $\text{Mesh } \pi$ , la longueur maximale des contours qui forment la partition.

On définit :  $\text{Mesh}(c, \nu) = \inf\{\text{Mesh}(\pi) \mid \pi : \wp \rightarrow X, \wp \text{ partition de } D^2 \text{ en } \nu \text{ parties, } \pi|_{S^1} = c\}$

**Remarque 2.2.5** *Pour toute partition  $\pi$  d'une courbe fermée en  $\nu$  parties, il existe une partition en  $\nu$  parties  $\pi'$  ayant  $\text{Mesh } \pi' \leq \text{Mesh } \pi$  et le nombre de sommets plus petit qu'un  $N = N(\nu)$ .*

### Preuve

L'intersection de chaque contour de la partition avec la courbe, si elle est nonvide, peut avoir plusieurs composantes connexes. On élimine des sommets de sorte que chaque composante connexe contient seulement deux sommets, ses extrémités.

On élimine donc le cas représenté dans la Figure 7.

Aussi l'intersection de deux contours de la partition peut avoir plusieurs composantes connexes. On élimine les situations dans lesquels une composante connexe contient plus de deux arêtes, en diminuant ainsi la maille (Fig.8).

**Remarque 2.2.6** *On ne peut pas se ramener à une seule arête dans chaque composante connexe, parce qu'alors on risque de diminuer le nombre des parties (Fig.9).*

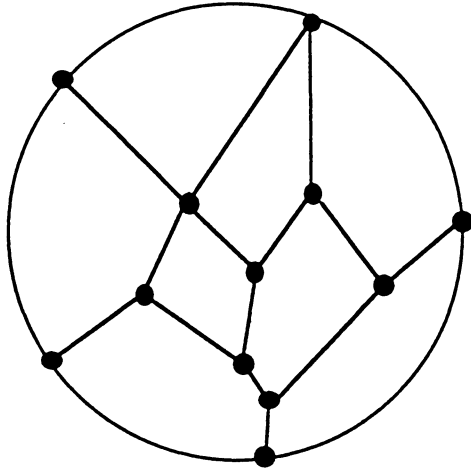


Figure 6

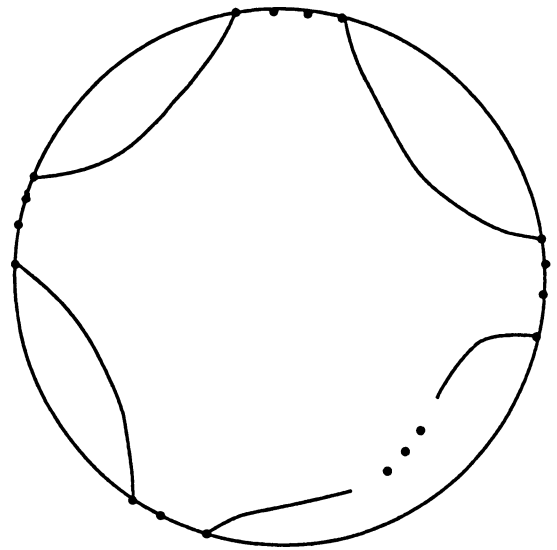


Figure 7

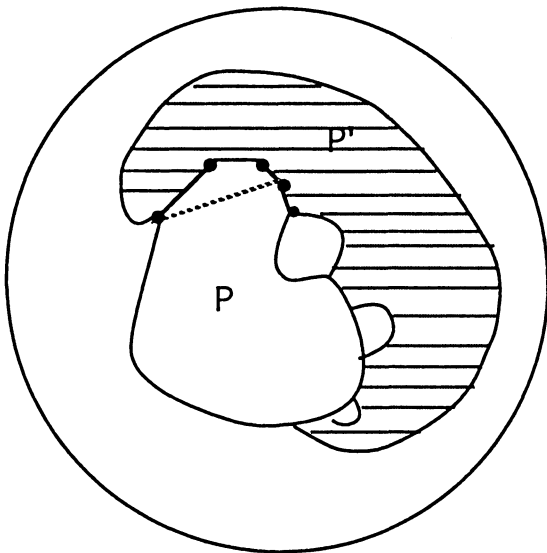


Figure 8

Soit un contour quelconque de la partition,  $\mathcal{P}$ . S'il touche la courbe en  $k$  composantes connexes alors il partitionne le disque en  $k$  parties (Fig.10). Alors  $k + 1 \leq \nu \Leftarrow k \leq \nu - 1$ . Donc  $\mathcal{P}$  a au plus  $2 \cdot k \leq 2 \cdot (\nu - 1)$  sommets sur la courbe.

Soit  $\mathcal{P}'$  un autre contour de la partition tel que  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \neq \emptyset$ . Si  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$  a  $j$  composantes connexes, alors les deux contours font apparaître à l'intérieur du disque au moins  $j + 1$  parties (Figure 11).

Donc  $j + 1 \leq \nu \Leftarrow j \leq \nu - 1$ . Ainsi  $\mathcal{P}$  a au plus  $3(\nu - 1)$  sommets en commun avec  $\mathcal{P}'$ . On a au plus  $\nu - 1$  tels contours  $\mathcal{P}'$ , donc  $\mathcal{P}$  a au plus  $3(\nu - 1)^2$  sommets intérieurs.

On conclut que  $\mathcal{P}$  a au plus  $2(\nu - 1) + 3(\nu - 1)^2 = (\nu - 1)(3\nu - 1)$  sommets. Alors le nombre total de sommets de la partition est plus petit que  $\nu(\nu - 1)(3\nu - 1) = N(\nu)$ .

◇

Soit  $c$  une courbe lipschitzienne fermée.

On note  $P(c, \delta)$  le  $\nu$  minimal tel que  $\text{Mesh}(c, \nu) \leq \delta$ .

Pour  $\ell > \delta$ , on note  $P(\ell, \delta) = \sup \{P(c, \delta); c \text{ courbe lipschitzienne de longueur } \leq \ell\}$ .

On suppose que l'espace  $X$  vérifie la propriété :

$$(P_{\delta'_0}) \quad P(\ell, \delta) < +\infty, \forall \ell \geq \delta \geq \delta'_0$$

et on prend le  $\delta'_0$  minimal pour lequel on a cette propriété.

Alors il n'est pas difficile de voir que pour tout  $\delta_1, \delta_2$ , et  $\ell$  tels que  $\delta'_0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 < \ell$  on a :

$$P(\ell, \delta_2) \leq P(\ell, \delta_1) \leq P(\ell, \delta_2) \cdot P(2\delta_2, \delta_1).$$

Désormais on suppose que les espaces métriques considérées dans cette section vérifient une propriété de type  $(P_{\delta_0})$  et on prend toujours le  $\delta'_0$  minimal, et  $\delta_0 = \max\{1, \delta'_0\}$ .

**Définition 2.2.7** Pour un  $\delta \geq \delta_0$  on définit la  $\delta$ -aire d'une courbe lipschitzienne fermée  $c$  par  $A_\delta(c) = P(c, \delta)$ . De même, on définit la  $\delta$ -fonction de remplissage par:

$$A_\delta(\ell) = P(\ell, \delta) \text{ pour tout } \ell \geq \delta.$$

D'après la remarque précédente toute fonction de remplissage définie pour un  $\delta \geq \delta_0$  a le même ordre que  $A_{\delta_0}$ .

On appelle alors  $A_{\delta_0}$  la fonction de remplissage de l'espace  $X$ .



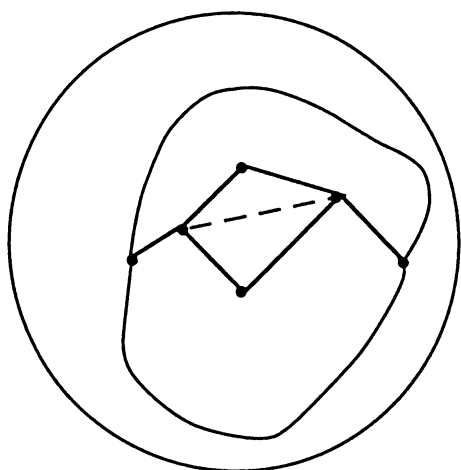


Figure 9

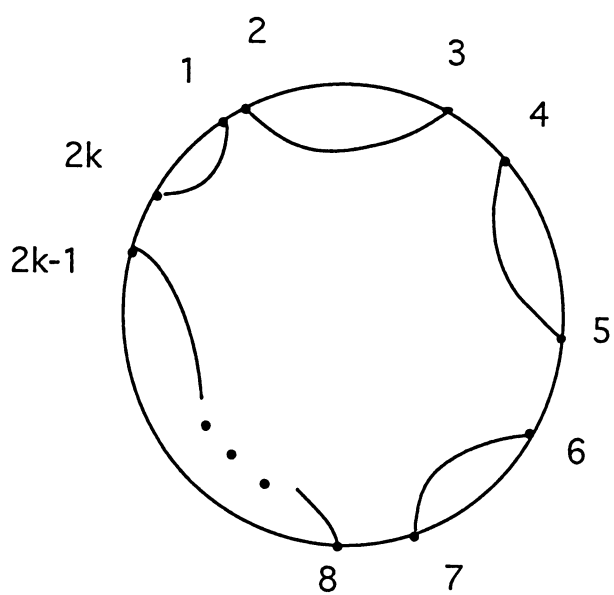


Figure 10

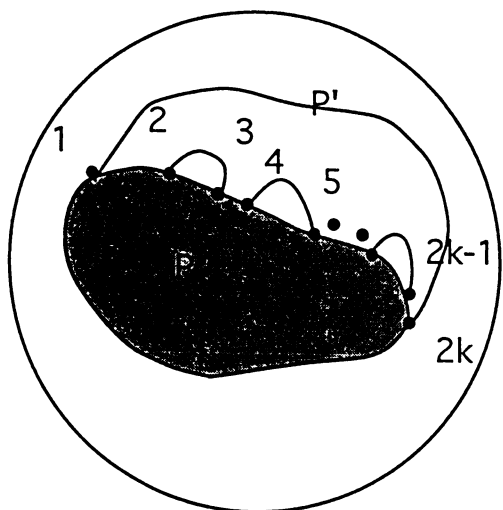


Figure 11

**Proposition 2.2.8** *Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application  $L$ -bilipschitzienne (c'est-à-dire  $f$  et  $f^{-1}$  sont  $L$ -lipschitziennes), alors les fonctions de remplissage des espaces  $X$  et  $Y$  ont le même ordre. Plus précisément :*

$$A_{L\delta}^Y\left(\frac{\ell}{L}\right) \leq A_\delta^X(\ell) \leq A_{\frac{\delta}{L}}^Y(L\ell), \quad \forall \delta \geq L \cdot \delta_0^Y.$$

### Démonstration

Si on prend une courbe lipschitzienne fermée  $c$  de longueur  $\leq \ell$ ,  $f \circ c$  est une courbe lipschitzienne fermée de longueur  $\leq L \cdot \ell$  et si  $\pi$  est une  $\frac{\delta}{L}$ -partition de celle-ci,  $f^{-1} \circ \pi$  est une  $\delta$ -partition de  $c$ . Ceci implique

$$P^X(\ell, \delta) \leq P^Y\left(L \cdot \ell, \frac{\delta}{L}\right).$$

Un raisonnement similaire, fait avec  $f^{-1}$  montre que

$$P^X(\ell, \delta) \geq P^Y\left(\frac{\ell}{L}, L \cdot \delta\right).$$

Ceci entraîne que  $\frac{1}{L} \cdot \delta_0^Y \leq \delta_0^X \leq L \cdot \delta_0^Y$  et aussi la triple inégalité de l'énoncé.

◇

**Remarque 2.2.9** *Si  $X = \Gamma$  est un groupe de présentation finie qu'on considère avec une métrique des mots et une présentation  $\Gamma = \langle S | R \rangle$  fixées, alors la fonction de Dehn associée à cette présentation,  $A(n)$ , est du même ordre que la  $\delta$ -aire  $A_\delta(n)$  dans le graphe de Cayley de  $\Gamma$ . Ceci n'est pas difficile à voir si à partir de la présentation  $\langle S | R \rangle$  on construit une présentation où tous les éléments de  $R$  sont de longueur trois, en ajoutant des générateurs.*

*Dans la nouvelle présentation  $\langle S' | R' \rangle$ , on a  $A'(n) = A_3(n)$  et on applique la Proposition 2.2.4.*

## 2.2.2 Le théorème de M. Gromov sur le remplissage polynomial et les cônes asymptotiques

On cherche une relation entre l'ordre de la fonction de remplissage d'un espace et l'ordre des fonctions de remplissage de ses cônes asymptotiques.

On a deux résultats sur cette relation, un qui nous montre que déjà le seul fait que tous les cônes soient simplement connexes entraîne que l'ordre de la fonction de remplissage de l'espace est polynomial (Théorème 2.2.10) et un qui montre que dans le cas d'un remplissage polynomial aussi bien dans le cône que dans l'espace, les ordres sont à peu près les mêmes (Théorème 2.2.14).

**Théorème 2.2.10** ([Gr]<sub>3</sub>) *Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique. Si pour tout ultrafiltre non-principal  $\omega$ , toute suite de points d'observation  $f_0$  et toute suite de scalaires  $(d_n)$ ,  $\text{Con}_\omega(X, (d_n), f_0)$  est simplement connexe alors:*

- (i) *L'espace  $(X, d)$  vérifie une propriété de type  $(P_{\delta_0})$ . Soit  $A^X(\ell) = A_{\delta_0}^X(\ell)$  la fonction de remplissage de  $X$ .*
- (ii) *Il existe  $a \geq 0, \alpha \geq 1$  et  $\ell_0 > 0$  tels que*  

$$A^X(\ell) \leq a\ell^\alpha \text{ pour } \ell \geq \ell_0.$$

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

**Lemme 2.2.11** *Si dans un espace géodésique  $X$  il existe un  $M \in \mathbb{N}, M \geq 2$  tel que  $P(\ell, \ell/M)$  est uniformément majoré par un  $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$  pour tout  $\ell$  plus grand qu'un  $\ell_0$ , alors on a :*

- (1) *L'espace  $(X, d)$  vérifie une propriété de type  $(P_{\delta_0})$ . Soit  $A^X(\ell) = A_{\delta_0}^X(\ell)$  la fonction de remplissage de  $X$ .*
- (2) *On a  $A^X(\ell) \leq a\ell^\alpha$  pour  $\ell \geq \ell_0$ , où  $\alpha = \frac{\ln \nu_0}{\ln M}$  et  $a$  est une constante.*

**Démonstration du lemme.** Soit  $c$  une courbe lipschitzienne de longueur  $\leq \ell$ . On a une partition en  $\nu_0$  parties de maille  $\leq \frac{\ell}{M}$ . Si la maille est aussi  $\leq \ell_0$  on arrête. Sinon on partitionne chaque élément de la partition encore en  $\nu_0$  parties, on a donc une  $\nu_0^2$ -partition pour  $c$  de maille  $\leq \frac{\ell}{M^2}$ . Si la maille est  $\leq \ell_0$  on arrête, sinon on continue. Dans le pire des cas on va s'arrêter en  $p$  étapes,  $p \in \mathbb{N}$  minimal tel que

$$\frac{\ell}{M^p} \leq \ell_0 \iff p \geq \log_M \frac{\ell}{\ell_0} \iff p = \lceil \log_M \frac{\ell}{\ell_0} \rceil + 1$$

D'où

$$P(\ell, \ell_0) \leq \nu_0^p \leq a\nu_0^{\log_M \ell} = a\ell^\alpha, \alpha = \frac{\ln \nu_0}{\ln M}$$

Donc pour tout  $\ell \geq \delta \geq \ell_0$  on a  $P(\ell, \delta) \leq P(\ell, \ell_0) < \infty$ . Alors  $X$  vérifie une propriété de type  $(P_{\delta_0})$  avec un  $\delta_0$  minimal plus petit que  $\ell_0$ .

Evidemment  $A^X(\ell) = P(\ell, \delta_0) \leq P(2\ell_0, \delta_0) \cdot P(\ell, \ell_0) \leq a'\ell^\alpha$ .

◇

### Démonstration du théorème 2.2.10

Il faut montrer que l'hypothèse de simple connexité des cônes entraîne l'existence d'un  $M \in \mathbb{N}^*$  et d'un  $\nu_0$  comme ceux du lemme 2.2.11. On raisonne par l'absurde et on suppose le contraire :

$$\forall M, \forall \nu_0, \forall \ell_0, \exists \ell \geq \ell_0 \text{ tel que } P(\ell, \ell/M) > \nu_0.$$

On fixe un  $M \in \mathbb{N}^*, M \geq 2$  et on choisit des suites  $\nu_n$  et  $\ell'_n$  de limite  $+\infty$ . On obtient qu'il existe une suite de courbes fermées lipschitziennes  $c_n$  de longueur  $\ell_n \geq \ell'_n$  telles que  $\text{Mesh}(c_n, \nu) > \ell_n/M, \forall \nu \leq \nu_n$ .

On peut supposer qu'elles sont paramétrées proportionnellement à la longueur d'arc.

Si on choisit les points d'observation  $f_0(n) \in c_n(S^1)$  et si on prend  $(\ell_n)$  comme suite des scalaires, dans  $\text{Con}_\omega(X, (\ell_n), f_0)$ , la suite des courbes  $(c_n)$  nous donne une courbe  $c : S^1 \rightarrow \text{Con}_\omega X$  lipschitzienne de longueur 1. La courbe  $c$  a la propriété que pour tout  $\nu \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{Mesh}(c, \nu) \geq 1/M$ , car chaque partition de  $c, \pi : \wp \rightarrow \text{Con}_\omega X$ , provient d'une suite de partitions des  $c_n, \pi_n : \wp \rightarrow X$  et on a

$$\text{Mesh}(\pi) = \lim_{\omega} \frac{\text{Mesh}(\pi_n)}{\ell_n} \geq \frac{1}{M}.$$

D'autre part, par l'hypothèse,  $c$  est contractile donc  $\exists \tilde{c} : D^2 \rightarrow \text{Con}_\omega X$ ,  $\tilde{c}|_{S^1} = c$ ,  $\tilde{c}$  continue donc uniformément continue. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  tel que  $5\varepsilon < \frac{1}{M}$ ,  $\exists \delta > 0$  tel que  $\forall x, y \in D^2, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(\tilde{c}(x), \tilde{c}(y)) < \varepsilon$ .

Si on recouvre  $D^2$  par un réseau uniforme de pas  $\delta$  on va obtenir une partition de  $c$  avec  $\text{Mesh} < 5\varepsilon < \frac{1}{M}$ . On a une contradiction.

◇

**Remarques 2.2.12 a)** *L'existence d'un  $M$ , d'un  $\nu_0$  et d'un  $\ell_0$  tels que  $X$  vérifie la propriété de l'hypothèse du lemme 2.2.11 entraîne l'existence d'un  $M$  et d'un  $\nu'_0$  pour lesquels tout  $\text{Con}_\omega X$  vérifie la même propriété avec  $\ell_0 = 0$ .*

*En effet, pour toute courbe  $c : S^1 \rightarrow \text{Con}_\omega X$  lipschitzienne de longueur  $\leq \ell$ , on peut choisir d'abord  $M$  points dans  $c(S^1), P_1, P_2, \dots, P_M$ , tels que  $d(P_i, P_{i+1}) \leq \frac{\ell}{M}$ , et on joint chaque  $P_i$  à  $P_{i+1}$  par un arc géodésique. On*

obtient un polygone, qui est la limite d'une suite de polygones  $P_1^{(n)} - P_2^{(n)} - \dots - P_M^{(n)}$ , où  $P_i = [P_i^{(n)}]$ .

Pour chaque polygone de la suite il existe une partition en  $\nu_0$  parties telle que la maille soit  $\leq$  longueur du polygone  $\times \frac{1}{M}$ .

D'après la remarque 2.2.5, en diminuant éventuellement la maille, on peut se ramener à des partitions ayant un nombre de sommets  $\leq N = N(\nu_0)$ .

Puis, on remarque qu'il y a seulement un nombre fini de partitions possibles, et comme  $\omega$  choisit toujours entre un nombre fini de possibilités, on peut supposer que toutes les partitions sont de la même forme.

Elles vont donner une partition de la même forme du polygone  $P_1 - P_2 - \dots - P_M$  qui aura au plus  $\nu_0$  éléments et une maille  $\leq \frac{\ell}{M}$ .

Ainsi on a obtenu une partition de  $c$  ayant au plus  $\nu'_0 = \nu_0 + M$  éléments et une maille  $\leq \frac{\ell}{M}$ .

b) On peut conclure qu'on a la suite d'implications suivantes : tout cône asymptotique d'un espace  $X$  est simplement connexe  $\Rightarrow X$  se trouve dans les conditions du lemme 2.2.11, pour un  $M \geq 2$ , un  $\nu_0$  et un  $\ell_0$  fixés  $\Rightarrow$  tout cône asymptotique se trouve dans les conditions de lemme 2.2.11 pour le même  $M$ ,  $\nu'_0 = \nu_0 + M$ ,  $\ell_0 = 0 \Rightarrow$  tout cône asymptotique a un remplissage polynomial d'ordre uniformément majoré par  $\alpha = \frac{\ln(\nu_0 + M)}{\ln(M)}$ .

**Remarques 2.2.13** a) Dans  $[P]_1$ , P. Papasoglu montre une sorte de réciproque de ce théorème : Si un groupe de type fini a un remplissage quadratique alors tous ses cônes asymptotiques sont simplement connexes.

b) La réciproque du théorème de Gromov dans toute sa généralité n'est pas vraie ( $[P]_1$ ,  $[P]_2$ ). Ceci à cause du fait qu'un groupe qui a les cônes simplement connexes a un rayon de remplissage linéaire, or il existe des groupes au remplissage polynomial et au rayon de remplissage non linéaire. Un exemple est le groupe obtenu en recollant deux copies du groupe de Heisenberg selon le centre.

### 2.2.3 Contrôle effectif des ordres de remplissage par les cônes asymptotiques

On se place maintenant dans la situation dans laquelle tous les cônes asymptotiques d'un espace ont un ordre de remplissage polynomial uniformément borné et on se demande si on ne peut pas trouver à partir de ceci une borne pour l'ordre de remplissage de l'espace. La réponse est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.2.14** ([P]<sub>2</sub>) Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique. S'il existe un  $a > 0$  et un  $p \in \mathbb{N}^*$  tels que dans chaque cône asymptotique de  $X$  on a  $A_1(\ell) \leq a\ell^p$ , alors :

- (i) L'espace  $(X, d)$  vérifie une propriété de type  $(P_{\delta_0})$ . Soit  $A^X(\ell) = A_{\delta_0}^X(\ell)$  la fonction de remplissage de  $X$ .
- (ii) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\ell_\varepsilon > 0$  tel que dans  $X$  on a

$$A^X(\ell) \leq \ell^{p+\varepsilon}, \forall \ell \geq \ell_\varepsilon.$$

**Démonstration.** D'abord on remarque qu'on peut transformer l'hypothèse de la manière donnée dans le lemme ci-dessous :

**Lemme 2.2.15** Soit  $X$  un espace métrique. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$  les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\exists a > 0$  tel que dans chaque cône asymptotique de  $X$  on a :  

$$A_1(\ell) \leq a \cdot \ell^p$$
- (ii)  $\exists a > 0$  tel que dans chaque cône asymptotique de  $X$  on a :  

$$P(\ell, \ell/m) \leq a \cdot m^p, \forall m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2.$$

**Démonstration du lemme.** L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) est évidente. Pour démontrer (i)  $\Rightarrow$  (ii) il suffit de voir que l'application

$$I_\lambda : Con_\omega(X, (d_n), f_0) \rightarrow Con_\omega(X, (\lambda d_n), f_0), I_\lambda([x_n]) = [x_n].$$

est une homothétie. Alors, si on considère  $c : S^1 \rightarrow Con_\omega(X, (d_n), f_0)$  courbe lipschitzienne fermée de longueur  $\ell$ ,  $c' = I_{\frac{m}{\ell}} \circ c$  est une courbe lipschitzienne fermée de longueur  $m$ . D'après (i), on a  $P(c', 1) \leq a \cdot m^p$ .

Donc, si on note  $\nu = a \cdot m^p$  (on peut supposer que  $a \in \mathbb{N}$ ) on a que  $\text{Mesh}(c', \nu) \leq 1$ , ce qui, si on applique  $I_{\frac{m}{\ell}}^{-1} = I_{\frac{\ell}{m}}$ , nous donne que

$$\text{Mesh}(c, \nu) \leq \frac{\ell}{m}.$$

D'où  $P(c, \ell/m) \leq \nu = a \cdot m^p$

◇

**Démonstration du théorème 2.2.14.** On fait un raisonnement similaire à celui fait pour prouver le Théorème 2.2.10. Plus précisément, on démontre que

(ii)  $\Rightarrow$  dans l'espace  $X$  pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $m \geq 2$  il existe un  $\ell_0 = \ell_0(m)$  tel que

$$P(\ell, \ell/m) \leq a' \cdot m^d, \forall \ell \geq \ell_0, \text{ où } a' = a \cdot 2^d$$

Ceci est en quelque sorte la réciproque de ce qu'on a démontré dans la Remarque 2.2.12 a. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un  $m \geq 2$  et une suite de courbes lipschitziennes fermées  $(c_n)$  de longueur  $\ell_n \rightarrow \infty$  telles que

$$P(c_n, \ell_n/m) > a' \cdot m^d.$$

Alors, si on note  $\nu = a' \cdot m^d$ ,  $\text{Mesh}(c_n, \nu) > \frac{\ell_n}{m}$

On prend la suite de centres d'observation  $f_0(n) \in c_n(S^1)$ , et la suite de scalaires  $(\ell_n)$ , et dans  $\text{Con}_\omega(X, (\ell_n), f_0)$ , la suite des courbes  $(c_n)$  donne une courbe  $c$  de longueur 1 telle que  $\text{Mesh}(c, \nu) \geq \frac{1}{m}$ .

D'autre part, d'après (ii),  $\text{Mesh}(c, \nu) \leq \frac{1}{2m}$ , d'où une contradiction. Alors on a que pour tout  $m \geq 2$  il existe un  $\ell_0 = \ell_0(m)$  tel que

$$P(\ell, \ell/m) \leq a' \cdot m^d, \forall \ell \geq \ell_0.$$

On applique le lemme 2.2.11 pour un  $m$  et  $\nu_0 = a \cdot m^d$ , et on a que  $A(\ell) \leq C\ell^\alpha$  pour  $\ell \geq \ell_0(m)$ , où  $\alpha = \frac{\ln(a' \cdot m^d)}{\ln m} = \frac{\ln a'}{\ln m} + d$ .

Pour tout  $\varepsilon' > 0$  fixé, si on prend  $m$  suffisamment grand on peut rendre  $\alpha$  plus petit que  $d + \frac{\varepsilon'}{2}$ . Pour  $l_0$  suffisamment grand on a aussi  $C \leq \ell^{\frac{\varepsilon'}{2}}$ .

Donc on a  $A(\ell) \leq \ell^{d+\varepsilon'}$ .

◇

# Chapter 3

## Géométrie asymptotique d'un réseau de $\mathbb{Q}$ - rang 1

### 3.1 Généralités sur les réseaux de $\mathbb{Q}$ - rang 1 des groupes semisimples

#### 3.1.1 Tores, sous-groupes paraboliques et unipotents

Les principales références de cette section sont [Ma], [Ra], [Bo].

Soit un groupe algébrique réel semisimple de centre trivial et sans facteurs compacts  $G = \prod_{i=1}^s G_i$ . On sait qu'on peut aussi supposer que c'est un groupe linéaire  $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ .

**Définition 3.1.1** *On appelle tore de  $G$  un sous-groupe algébrique commutatif connexe  $A$  qui vérifie une des propriétés équivalentes suivantes :*

- (i) *Tous les éléments de  $A$  sont semisimples.*
- (ii)  *$A$  est diagonalisable.*
- (iii)  *$A$  est isomorphe à  $(\mathbb{R}^*)^m$ ,  $m \leq n$ .*

**Remarque 3.1.2** *L'algèbre de Lie associée à un tore  $\mathfrak{a} \subset L(n, \mathbb{R})$  est une algèbre abélienne telle que tous ses éléments sont semisimples. On appelle une telle algèbre algèbre  $\mathbb{R}$ -diagonalisable.*

Soit  $k \subset \mathbb{R}$  un sous-corps. On s'intéresse surtout aux cas  $k = \mathbb{R}$  et  $k = \mathbb{Q}$ .



**Définition 3.1.3** Si  $G$  est défini sur  $k$  on note  $G(k) = G \cap Gl(n, k)$ .

Dans ce cas, on dit que  $A$  est un  $k$ -tore si  $A$  est défini sur  $k$  et est  $k$ -isomorphe à  $(\mathbb{R}^*)^m$ .

Tous les  $k$ -tores maximaux de  $G$  sont conjuguées par des éléments de  $G(k)$ . La dimension commune de tous les  $k$ -tores maximaux s'appelle le  $k$ -rang de  $G$ .

Les  $\mathbb{R}$ -tores maximaux ont comme algèbres de Lie associées les sous-algèbres abeliennes  $\mathbb{R}$ -diagonalisables maximales de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ .

On fixe une telle algèbre  $\mathfrak{a}$ . Soit  $ad : \mathfrak{g} \rightarrow L(\mathfrak{g})$  l'application adjointe. L'algèbre  $ad(\mathfrak{a})$  est isomorphe à  $\mathfrak{a}$ , donc c'est une algèbre d'opérateurs linéaires diagonalisable.

Il existe donc une famille finie de fonctions linéaires  $\{\lambda_i \mid \lambda_i : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$  telle que  $\mathfrak{g}$  se décompose

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_{\lambda_i},$$

$$\text{où } \mathfrak{g}_{\lambda_i} = \{Y \in \mathfrak{g} \mid \forall X \in \mathfrak{a}, ad(X)(Y) = \lambda_i(X)Y\}$$

$$= \{Y \in \mathfrak{g} \mid \forall X \in \mathfrak{a}, [X, Y] = \lambda_i(X)Y\}$$

En prenant le sous-groupe compact maximal  $K = \prod_{i=1}^s K_i$  de  $G$  on peut associer à  $G$  son espace symétrique  $X = G/K = \prod_{i=1}^s G_i/K_i = \prod_{i=1}^s X_i$ . L'espace  $X$  est un espace à courbure négative ou nulle qui contient beaucoup de sous-variétés totalement géodésiques plates.

Les sous-variétés maximales de ce type s'appellent *des plats maximaux en  $X$* . Tous les plats maximaux sont des orbites de  $\mathbb{R}$ -tores maximaux de  $G$  et ils ont la même dimension que ceux-ci.

Le bord à l'infini de  $X$ ,  $\partial_\infty X$ , avec la métrique de Tits est un immeuble sphérique ([Mo], chap.15 et 16, ou [BGS], Appendix 5). Ses appartements sont les bords à l'infini des plats maximaux.

**Définition 3.1.4** Un rayon géodésique  $r \subset X$  est dit *singulier* ou *régulier* si  $r(\infty)$  est un point singulier ou régulier de l'immeuble sphérique  $\partial_\infty X$  au sens de la définition 1.3.3.

**Définition 3.1.5** A chaque point du bord  $\alpha \in \partial_\infty X$  on peut associer un sous-groupe  $P(\alpha) \subset G$  qui le fixe, c'est-à-dire qui fixe la classe de rayons asymptotes qui représente  $\alpha$ . On appelle  $P(\alpha)$  le sous-groupe parabolique

associé à  $\alpha$ . Son radical unipotent  $U(\alpha)$  s'appelle le sous-groupe unipotent associé à  $\alpha$ .

**Remarque 3.1.6** Soit  $F$  un plat maximal tel que  $\alpha \in F(\infty)$  et soit  $A$  le  $\mathbb{R}$ -tore maximal qui fixe  $F$  et a son algèbre de Lie. Soit  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_{\lambda_i}$  la décomposition de  $\mathfrak{g}$  par rapport à cette algèbre. Le fait que  $\alpha \in F(\infty)$  implique qu'il existe un rayon  $r(t) = \exp tV(r(0))$  dans  $F$  tel que  $r(\infty) = \alpha$ , où  $\exp tV$  est un sous-groupe uniparamétré dans  $A$ ,  $V \in \mathfrak{a}$ .

L'algèbre de Lie du groupe  $P(\alpha)$  est  $\mathfrak{p}(\alpha) = \bigoplus_{\lambda_i(V) \geq 0} \mathfrak{g}_{\lambda_i}$ .

L'algèbre de Lie du groupe  $U(\alpha)$  est  $\mathfrak{u}(\alpha) = \bigoplus_{\lambda_i(V) > 0} \mathfrak{g}_{\lambda_i}$ .

Parfois, quand on va considérer un rayon  $r$  dans l'espace symétrique, on va utiliser aussi les notations  $P(r)$  et  $U(r)$  pour les sous-groupes parabolique et unipotent associés à  $r(\infty)$ .

### 3.1.2 Réseaux de Q-rang un

**Définition 3.1.7** Un réseau du groupe  $G$  est un sous-groupe  $\Gamma \subset G$  discret et qui vérifie une des deux propriétés équivalentes:

- (1)  $\Gamma \backslash G$  admet une mesure finie  $G$ -invariante à gauche provenant de la mesure de Haar de  $G$ .
- (2)  $\Gamma \backslash X$  est de volume fini.

Si les deux quotients sont compacts, on appelle  $\Gamma$  réseau uniforme ou réseau cocompact. Sinon  $\Gamma$  est un réseau non-uniforme.

On dit que  $\Gamma$  est irréductible s'il n'a pas de sous-groupe d'indice fini qui se décompose en un produit de réseaux.

**Définition 3.1.8** Un réseau  $\Gamma$  s'appelle réseau arithmétique s'il existe un  $\mathbb{Q}$ -groupe semisimple connexe  $G'$  et un  $\mathbb{R}$ -epimorphisme  $\Phi : G' \rightarrow G$  tel que  $\ker \Phi$  est compacte,  $\Gamma \subset \Phi(G'(\mathbb{Q}))$  et  $\Gamma$  commensurable à  $\Phi(G'(\mathbb{Z}))$ .

**Théorème 3.1.9** ([Ma], th.(1.11)) Si le groupe  $G$  est de  $\mathbb{R}$ -rang plus grand ou égal à 2, tout réseau irréductible de  $G$  est arithmétique.

**Définition 3.1.10** Soit  $G$  un groupe semisimple de  $\mathbb{R}$ -rang plus grand ou égal à 2 et  $\Gamma \subset G$  un réseau irréductible. Le  $\mathbb{Q}$ -rang du groupe  $G'$  associé à  $\Gamma$  par le théorème d'arithméticité de Margulis énoncé ci-dessus s'appelle le  $\mathbb{Q}$ -rang du réseau  $\Gamma$ .

Pour les réseaux de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 on dispose d'une définition équivalente.

**Définition 3.1.11 ([Pr])** Un réseau  $\Gamma$  dans un groupe semisimple  $G$  est de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 si tout élément unipotent non-trivial de  $\Gamma$  se trouve dans un unique sous-groupe unipotent maximal de  $\Gamma$ .

## Exemples

Toutes les réseaux irréductibles  $\Gamma$  dans des groupes semisimples  $G = \prod_{i=1}^k G_i$  ayant au moins un facteur de  $\mathbb{R}$ -rang 1 sont des réseaux de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 ([Pr], lemme 1.1).

Les groupes modulaires de Hilbert sont des exemples de tels réseaux.

Soit  $K$  un corps algébrique des nombres, totalement réel, de degré  $n$  au dessus de  $\mathbb{Q}$ . Alors on a  $n$  plongements différents de  $K$  dans  $\mathbb{R}$  au dessus de  $\mathbb{Q}$  :

$$\sigma_i : K \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Le groupe

$$PSL(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in K, ad - bc = 1 \right\} / \{\pm I\}$$

peut être plongé en  $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R}) \times \dots \times PSL(2, \mathbb{R})$  en utilisant les  $n$  plongements :

$$\sigma_M : PSL(2, K) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R}) \times \dots \times PSL(2, \mathbb{R}),$$

$$\sigma_M = (\sigma_M^1, \sigma_M^2, \dots, \sigma_M^n) \text{ où } \sigma_M^i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i(a) & \sigma_i(b) \\ \sigma_i(c) & \sigma_i(d) \end{pmatrix}$$

Soit  $\mathfrak{o}_K$  l'anneau des entiers algébriques de  $K$ .

Le groupe  $\Gamma_K = PSL(2, \mathfrak{o}_K)$  s'appelle le *groupe modulaire de Hilbert du corps  $K$* . Le plongement  $\sigma_M(\Gamma_K)$  est un réseau irréductible de  $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R}) \times \dots \times PSL(2, \mathbb{R})$ , donc c'est un réseau de  $\mathbb{Q}$ -rang un ([VG], chapitre 1). Dans la suite on note  $\sigma_M(\Gamma_K)$  toujours  $\Gamma_K$ .

Une notion importante pour la compréhension de la géométrie à grande échelle d'un réseau est la notion d'horoboule. On peut définir cette notion dans le cadre plus général d'un espace  $CAT(0)$ .

**Définition 3.1.12** Soit un espace métrique  $CAT(0)$ ,  $(X, d)$ , et  $r \subset X$  un rayon. La fonction de Busemann associée au rayon  $r$  est la fonction

$$f_r : X \rightarrow \mathbb{R}, f_r(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, r(t)) - t).$$

Si  $r_1$  et  $r_2$  sont deux rayons asymptotiques, alors  $f_{r_1} - f_{r_2}$  est une fonction constante (Lemme 3.2.6).

Donc la famille d'ensembles de niveau  $\{x \mid f_r(x) \leq a\}$  et la famille d'hypersurfaces de niveau  $\{x \mid f_r(x) = a\}$  de la fonction de Busemann ne dépend pas du rayon  $r$  mais seulement de son point à l'infini  $\alpha = r(\infty)$ .

On appelle un ensemble de niveau de la fonction de Busemann horoboule centrée en  $\alpha$ . On appelle une hypersurface de niveau de la fonction de Busemann horosphère centrée en  $\alpha$ . On appelle l'ensemble  $\{x \mid f_r(x) < a\}$  horoboule ouverte centrée en  $\alpha$ .

On note  $Hb(r)$  l'horoboule  $\{x \mid f_r(x) \leq 0\}$  et on l'appelle l'horoboule déterminée par le rayon  $r$ . De même, on note  $Hbo(r) = \{x \mid f_r(x) < 0\}$ , qu'on appelle l'horoboule ouverte déterminée par  $r$  et  $H(r) = \{x \mid f_r(x) = 0\}$ , qu'on appelle l'horosphère déterminée par  $r$ .

**Théorème 3.1.13** ([Ra], th.13.12, [Pr], prop. 2.1) Soit  $\Gamma \subset G$  un réseau irréductible de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 d'un groupe semisimple. Il existe  $r_1, r_2, \dots, r_k$  rayons dans l'espace symétrique associé à  $G$ ,  $X$ , tels que

- (1)  $Hb(\gamma r_i) \cap Hb(r_j) = \emptyset$ , si  $i \neq j, \gamma \in \Gamma$  ou  $i = j, \gamma \neq e$ .
- (2) l'espace  $X_0 = X \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bigcup_{i=1}^k \gamma Hbo(r_i)$  a le quotient  $\Gamma \backslash X_0$  compact.
- (3) Tout sous-groupe unipotent maximal de  $\Gamma$  est de la forme  $\Gamma \cap U(\gamma r_i)$  et est un réseau en  $U(\gamma r_i)$ .

**Définition 3.1.14** On appelle  $X_0$  l'espace associé à  $\Gamma$ .

## 3.2 Le cône asymptotique d'un réseau de $\mathbb{Q}$ -rang 1

On considère un réseau non-uniforme  $\Gamma$  de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 dans un groupe  $G$  semisimple de  $\mathbb{R}$ -rang plus grand ou égal à 2. On va obtenir le cône asymptotique de  $\Gamma$  comme sous-ensemble du cône asymptotique de l'espace symétrique

$X$ . La forme des cônes asymptotiques d'un espace symétrique est déjà connue (voir la description dans la section 1.3).

D'après le théorème 3.1.13, il suffit d'enlever à  $X$  une collection d'horoboules deux à deux disjointes sur laquelle  $\Gamma$  n'a qu'un nombre fini d'orbites pour obtenir un espace  $X_0$  tel que  $\Gamma \backslash X_0$  est compact.

Toute horoboule correspond à un point dans le bord à l'infini  $\partial_\infty X$ . Du fait que les horoboules sont disjointes, on peut en déduire que tous les points dans le bord qui leur correspondent sont deux à deux opposés. En effet si, pour deux de ces points, on prend l'appartement de  $\partial_\infty X$  qui les contient, alors cet appartement est le bord à l'infini d'un plat maximal de  $X$ , et dans ce plat maximal on a deux rayons correspondant aux deux points. Les traces des deux horoboules dans ce plat sont des demi-plats déterminés par des hyperplans orthogonaux respectivement aux deux rayons. On voit alors que les deux demi-plats sont disjoints si et seulement si les deux rayons sont opposés.

On obtient le résultat suivant :

**Proposition 3.2.1** *Soit  $\Gamma$  un réseau de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 dans  $G$  groupe semisimple de  $\mathbb{R}$ -rang plus grand ou égal à 2, et  $X = G/K$  l'espace symétrique associé à  $G$ . Si  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$  est l'ensemble de rayons tels que pour  $X_0 =$*

$X \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bigcup_{i=1}^k \gamma Hbo(r_i)$ , le quotient  $\Gamma \backslash X_0$  est compact, alors :

a)  $\gamma r_i(\infty)$  et  $r_j(\infty)$  sont opposés ou égaux, pour tout  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  et  $\gamma \in \Gamma$ .

b)  $p(\Gamma\{r_1(\infty), r_2(\infty), \dots, r_k(\infty)\})$  est un point unique, qu'on va noter  $\theta$ .

**Preuve** On a démontré a).

b) En général, si on a trois points deux à deux opposés  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  en  $\partial_\infty X$ , alors  $p(\alpha) = p(\beta) = p(\gamma)$ .

On raisonne par l'absurde et on suppose que  $p(\alpha) \neq p(\beta)$ .

Soit  $\mathcal{F}$  un appartement de  $\partial_\infty X$  qui contient  $\alpha$  et  $\beta$  et soient  $\mathcal{W}_\alpha$  et  $\mathcal{W}_\beta$  deux chambres opposées de  $\mathcal{F}$  telles que  $\alpha \in \mathcal{W}_\alpha$  et  $\beta \in \mathcal{W}_\beta$ .

On considère les retractions  $\text{retr}_{\mathcal{F}, \mathcal{W}_\alpha}$  et  $\text{retr}_{\mathcal{F}, \mathcal{W}_\beta}$ . Le fait que  $\text{retr}_{\mathcal{F}, \mathcal{W}_\alpha}$  préserve les distances à des éléments de  $\mathcal{W}_\alpha$  implique que  $d(\text{retr}_{\mathcal{F}, \mathcal{W}_\alpha}(\gamma), \alpha) = \pi$  donc que  $\text{retr}_{\mathcal{F}, \mathcal{W}_\alpha}(\gamma) = \beta$ .

De même on démontre que  $\text{retr}_{\mathcal{F}, \mathcal{W}_\beta}(\gamma) = \alpha$ .

D'après la propriété (2) de la Remarque 1.3.4, on a :

$$\begin{aligned} p(\gamma) &= p_{\mathcal{F}}(\text{retr}_{\mathcal{F}, \mathcal{W}_\alpha}(\gamma)) = p_{\mathcal{F}}(\beta) = p(\beta) \\ p(\gamma) &= p_{\mathcal{F}}(\text{retr}_{\mathcal{F}, \mathcal{W}_\beta}(\gamma)) = p_{\mathcal{F}}(\alpha) = p(\alpha) \end{aligned}$$

Mais  $p(\alpha) \neq p(\beta)$ , d'où la contradiction.  $\diamond$

**Définition 3.2.2** On appelle  $\theta$  la direction associée à  $\Gamma$ .

On peut faire, sur la position de  $\theta$  dans  $\Delta$ , l'affirmation suivante :

**Proposition 3.2.3** Soit  $r \in \{\gamma r_i \mid i \in \{1, 2, \dots, k\}, \gamma \in \Gamma\}$ ,  $r = \exp tV(r(0))$ , où  $V \in \mathfrak{g}$ , et soit  $\mathfrak{a}$  une sous-algèbre  $\mathbb{R}$ -diagonalisable maximale de  $\mathfrak{g}$  qui contient  $V$  et  $\pi = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  le système fondamental de racines associé à une chambre de Weyl qui contient  $V$ . Si  $\pi = \pi_1 \sqcup \pi_2$  est une décomposition en systèmes orthogonaux de racines, on ne peut pas avoir  $\mu(V) = 0$  pour tout  $\mu$  dans  $\pi_1$ .

**Preuve.** D'après le théorème 3.1.13, (3), pour tout sous-groupe unipotent maximal  $\Gamma_1$  de  $\Gamma$ , il existe un  $r \in \{\gamma r_i \mid i \in \{1, 2, \dots, k\}, \gamma \in \Gamma\}$ ,  $r = \exp tV(r(0))$ , tel que  $\Gamma_1 = \Gamma \cap U$ , où  $U = U(r)$  est le sous-groupe unipotent associé à  $r$ .

De plus,  $\Gamma_1$  est un réseau uniforme en  $U$ . D'après le théorème 13.1 de [Ra], il faut que le centralisateur de  $U$  dans  $G$ ,  $Z(U)$ , soit contenu dans  $U$ . D'où  $\mathfrak{z}(\mathfrak{u}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [Y, X] = 0, \forall Y \in \mathfrak{u}\} \subset \mathfrak{u}$ .

Si  $\mu(V) = 0, \forall \mu \in \pi_1$ , alors l'ensemble des racines strictement positives en  $V$  est inclus dans  $\Lambda = \{\sum_{\lambda \in \pi_2} m_\lambda \cdot \lambda \mid m_\lambda \in \mathbb{N}^*\}$  (car  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont orthogonaux). Alors  $\mathfrak{u}(\alpha) \subset \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda$  d'après la Remarque 3.1.6.

Soit l'algèbre  $\mathfrak{a}' = \bigcap_{\lambda \in \pi_2} \ker \lambda$ .

Pour tout  $X \in \mathfrak{a}'$  et pour tout  $Y \in \mathfrak{u}$  on a  $Y = \sum_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ , où  $Y_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$  et alors  $[X, Y] = \sum_{\lambda \in \Lambda} [X, Y_\lambda] = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda(X) Y_\lambda = 0$ .

D'où  $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{u}$  ce qui n'est pas possible car  $\mathfrak{a}'$  est une sous-algèbre  $\mathbb{R}$ -diagonalisable non-triviale tandis que  $\mathfrak{u}$  est une sous-algèbre formée par des éléments nilpotents.  $\diamond$

**Corollaire 3.2.4** Si  $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$ ,  $\text{rang}_{\mathbb{R}} G_i = 1$  et  $\Gamma \subset G, \Gamma$  irréductible, alors  $\theta$  est un point régulier.

### Exemple

Dans le cas des groupes modulaires de Hilbert, par exemple, on a le résultat suivant :

Soit  $K$  un corps algébrique des nombres totalement réel, de degré  $n$  au dessus de  $\mathbb{Q}$  et soit  $\Gamma_K$  son groupe modulaire de Hilbert, qu'on peut voir comme sous-groupe en  $G = PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R}) \times \dots \times PSL(2, \mathbb{R})$ .

La chambre de Weyl modèle de  $G$  est dans ce cas un quadrant de la sphère  $S^{n-1}$  et la direction associée à  $\Gamma_K$  est le barycentre de ce quadrant ([VG], chapitre 1).

Les cônes asymptotiques de  $X_0$  avec la métrique de longueur sont bilipschitz équivalents aux cônes asymptotiques de  $(\Gamma, d_w)$ , donc en vue d'appliquer un des critères de remplissage il suffit d'étudier ces cônes de  $X_0$ . Mais on va commencer par étudier les cônes asymptotiques de  $X_0$  avec la métrique induite par  $X$ . On fixe un point d'observation  $x_0 \in X_0$  et une suite de scalaires  $(d_n)$  qu'on ne mentionnera plus dans la suite. Etudier des cônes asymptotiques avec centre d'observation fixé est suffisant dans ce cas, d'après la Remarque 1.1.6.

On essaie d'obtenir  $Con_\omega X_0$  à partir de  $Con_\omega X$ , par une construction géométrique.

Avec les notations de section 1.1, propriété d, on peut écrire

$$X = X_0 \vee_\varphi \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bigcup_{i=1}^k \gamma Hb(r_i), \text{ où}$$

$$\varphi = \text{id} : \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bigcup_{i=1}^k \gamma H(r_i) \rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bigcup_{i=1}^k \gamma H(r_i),$$

Alors :

$$Con_\omega X = Con_\omega X_0 \vee_\phi Con_\omega \left( \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bigcup_{i=1}^k \gamma Hb(r_i) \right)$$

où  $\phi$  est l'identité sur  $Con_\omega \left( \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bigcup_{i=1}^k \gamma H(r_i) \right)$ .

On a

$$\begin{aligned} Con_\omega \left( \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bigcup_{i=1}^k \gamma Hb(r_i) \right) &= \{ [x_n]; x_n \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bigcup_{i=1}^k \gamma Hb(r_i), d(x_0, x_n) \leq c \cdot d_n \} \\ &= \bigcup_{i=1}^k \{ [x_n]; x_n \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma Hb(r_i), d(x_0, x_n) \leq c d_n \} \\ &\quad (\text{puisque } \omega \text{ choisit toujours} \\ &\quad \text{une seule parmi un nombre fini de possibilités}) \\ &= \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{\substack{(\gamma_n) \text{ t.q.} \\ d(e, \gamma_n) \leq C d_n}} [Hb(\gamma_n r_i)] \\ &= \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{\substack{[[\gamma_n]] \text{ t.q.} \\ d(e, \gamma_n) \leq C d_n}} [Hb(\gamma_n r_i)], \end{aligned}$$

où  $[[\gamma_n]]$  est la classe d'équivalence définie dans la section 1.1.

De même  $Con_\omega(\bigcup_{i=1}^k \bigcup_{\gamma \in \Gamma} H(\gamma r_i)) = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{\substack{[\gamma_n] \text{ t.q.} \\ d(e, \gamma_n) \leq Cd_n}} [H(\gamma_n r_i)]$ , donc

$$(4.1) \quad Con_\omega X = Con_\omega X_0 \vee_\phi \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{[\gamma_n]} [Hb(\gamma_n r_i)].$$

La suite  $[\gamma_n r_i]$  donne un rayon  $\rho$  dans  $Con_\omega X$ .

On vérifie que  $[Hb(\gamma_n r_i)] = Hb(\rho)$ , où la deuxième horoboule est considérée dans  $Con_\omega X$  (qui est un espace métrique  $CAT(0)$ , la fonction de Busemann associée à un rayon a un sens et alors à chaque rayon on peut associer des horosphères et des horoboules ).

**Proposition 3.2.5** *Soit  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de rayons dans un espace métrique géodésique  $CAT(0)$ ,  $X$ . Alors une limite d'horoboules (horosphères) est une horoboule (horosphère) :*

$$\begin{aligned} [Hb(r_n)] &= Hb(\rho), \rho = [r_n] \\ [H(r_n)] &= H(\rho). \end{aligned}$$

**Preuve**

On utilise le résultat suivant:

**Lemme 3.2.6** *Soit  $X$  un espace métrique géodésique  $CAT(0)$ . Si  $r$  et  $\rho$  sont deux rayons asymptotes, alors les fonctions de Busemann  $f_r$  et  $f_\rho$  correspondantes diffèrent d'une constante :*

$$f_r - f_\rho = f_r(\rho(0)).$$

**Preuve.** On démontre le lemme en trois étapes :

a) Soit  $\rho$  un rayon asymptote à  $r$ .

Pour deux points  $x$  et  $y$  sur  $\rho$  on note par  $\delta_x(y)$  la "distance orientée" sur  $\rho$  :

$$\delta_x(y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{si } y \text{ se trouve en dessous de } x \text{ sur } \rho, \\ -d(x, y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient maintenant deux points  $x$  et  $y$  sur  $\rho$  et supposons que  $y$  se trouve en dessous de  $x$ . On a représentée la situation dans la Figure 12.

On a :

$$f_r(y) = f_r(x) + \delta_x(y).$$



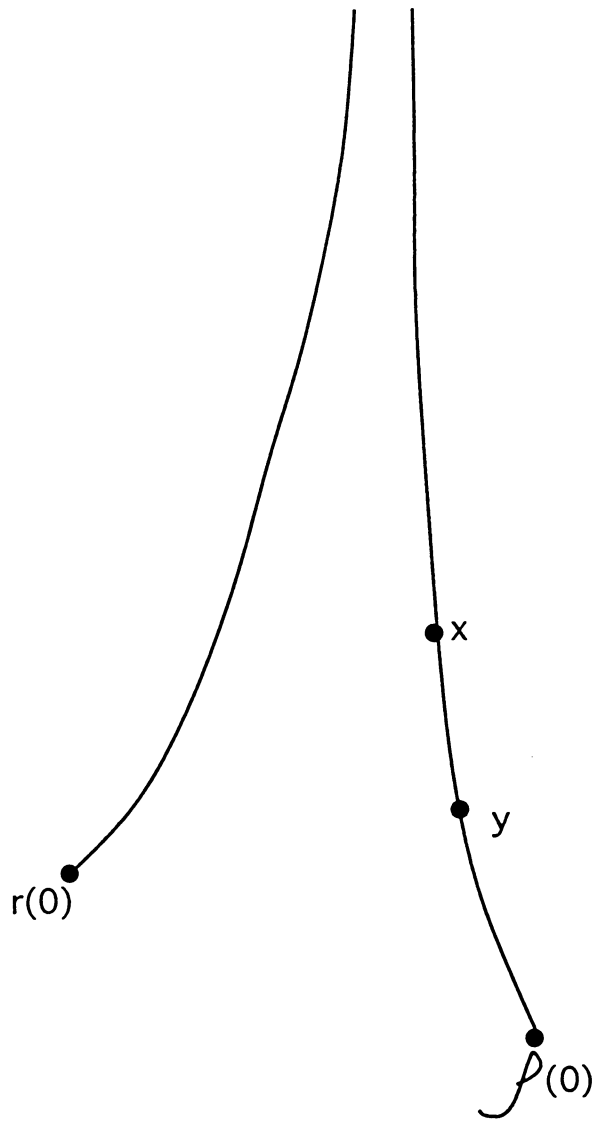


Figure 12

On voit que  $\tilde{\angle}_x(r(t), \rho(t)) \rightarrow 0$ , d'où  $\angle_x(r(t), \rho(t)) \rightarrow 0$  et  $\angle_x(r(t), y) \rightarrow \pi$ .

Alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(x, r(t)) + d(x, y) - d(y, r(t)) = 0$ , d'où la relation.

b) Pour tout  $x \in X$ , on note par  $r_x$  le rayon asymptote à  $r$  d'origine  $x$ . Si on fixe un tel  $x$  et un  $t > 0$  assez grand, sur  $r_x$  il existe un point  $a$  tel que  $f_r(a) = -t$  et un point  $b$  tel que  $f_r(b) = f_r(\rho(0)) - t$ . Alors  $f_r(x) = \delta_a(x) - t$  et  $f_r(\rho(0)) = f_r(b) + t = \delta_a(b)$ , donc  $f_r(x) - f_r(\rho(0)) = \delta_a(x) - \delta_a(b) - t = \delta_b(x) - t = f_{r_b}(x) + t$ . Reste à démontrer que  $f_{r_b}(x) = f_{\rho(t)}(x)$ .

c) On démontre en général que si  $r$  et  $\rho$  sont des rayons asymptotiques et  $f_r(\rho(0)) = 0$  alors  $f_r = f_\rho$ .

$$f_r(\rho(0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(\rho(0), r(t)) - t = 0$$

Ceci et le fait que  $\tilde{\angle}_{r(t)}(r(0), \rho(0)) \rightarrow 0$  implique que :

$$\tilde{\angle}_{r(t)}(\rho(t), \rho(0)) \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ et } \tilde{\angle}_{\rho(t)}(r(t), \rho(0)) \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow \infty} \angle_{r(t)}(\rho(t), \rho(0)) \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \angle_{\rho(t)}(r(t), \rho(0)) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Puisque  $\lim_{t \rightarrow \infty} \angle_{r(t)}(x, \rho(0)) = 0$  on a

$$(4.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \angle_{r(t)}(\rho(t), x) \leq \frac{\pi}{2}$$

De même  $\lim_{t \rightarrow \infty} \angle_{\rho(t)}(x, \rho(0)) = 0$  implique

$$(4.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \angle_{\rho(t)}(x, r(t)) \leq \frac{\pi}{2}$$

D'autre part  $\angle_{r(t)}(r(\infty), \rho(t)) + \angle_{\rho(t)}(r(t), \rho(\infty)) \leq \pi$  implique  $\angle_{r(t)}(r(0), \rho(t)) + \angle_{\rho(t)}(r(t), \rho(0)) \geq \pi$ .

Or  $\lim_{t \rightarrow \infty} \angle_{r(t)}(r(0), x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \angle_{\rho(t)}(x, \rho(0)) = 0$  ce qui implique:

$$(4.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \angle_{r(t)}(x, \rho(t)) + \lim_{t \rightarrow \infty} \angle_{\rho(t)}(x, r(t)) \geq \pi$$

Les trois relations (4.2), (4.3), (4.4), entraînent que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \angle_{r(t)}(x, \rho(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \angle_{\rho(t)}(x, r(t)) = \frac{\pi}{2}$ , d'où  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\angle}_{r(t)}(x, \rho(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\angle}_{\rho(t)}(x, r(t)) = \frac{\pi}{2}$ .

La dernière triple égalité implique que  $\lim_{t \rightarrow \infty} [d(x, r(t)) - d(x, \rho(t))] = 0$ .

◇

### Preuve de la Proposition 3.2.5

On note  $f_\rho$  la fonction de Busemann de  $\rho$  dans  $Con_\omega(X, (x_n), (d_n))$  et  $f_{r_n}$  la fonction de Busemann de  $r_n$  dans  $(X, \frac{1}{d_n} \cdot d)$ .

On voit qu'il suffit de montrer que  $\lim_\omega f_{r_n}(y_n) = f_\rho(y)$  pour tout  $y = [y_n]$ .  
Pour tout rayon  $\rho = [r_n]$  du cône on a l'inégalité:

$$(4.5) \quad f_\rho(y) \geq \lim_\omega f_{r_n}(y_n)$$

car  $f_\rho = \lim_{t \rightarrow \infty} d(\rho(t), y) - t = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_\omega \frac{d(r_n(d_n \cdot t), y_n) - d_n \cdot t}{d_n} \geq \lim_\omega f_{r_n}(y_n)$ .

Soient maintenant  $r'_n$  les rayons asymptotiques à  $r_n$  issus de  $y_n$  et  $\rho' = [r'_n]$  le rayon limite dans le cône. D'après le lemme précédent on a :

$$f_{r_n} = f_{r'_n} + f_{r_n}(y_n) \text{ et } f_\rho = f_{\rho'} + f_\rho(y).$$

L'inégalité (4.5) appliquée à  $r'_n$  et  $\rho'$  donne :

$$\lim_\omega f_{r'_n}(r_n(0)) \leq f_{\rho'}(\rho(0)),$$

d'où :

$$-\lim_\omega f_{r_n}(y_n) \leq -f_\rho(y).$$

On peut conclure que  $\lim_\omega f_{r_n}(y_n) = f_\rho(y)$ .

D'où les égalités  $[Hb(r_n)] = Hb(\rho)$  et  $[H(r_n)] = H(\rho)$ .

◇

D'après (4.1) et la proposition 3.2.5 on a :  $Con_\omega X = Con_\omega X_0 \vee_\phi \bigcup_{\rho \in R} [Hb(\rho)]$ ,

où  $R$  est l'ensemble des rayons  $\rho = [\gamma_n r_i]$ , et on prend un seul pour chaque classe  $[[\gamma_n]]$ , et  $\phi = \text{id} : \bigcup_{\rho \in R} H(\rho) \rightarrow \bigcup_{\rho \in R} H(\rho)$

On peut déduire :

**Proposition 3.2.7** *Le cône asymptotique de l'espace associé à  $\Gamma$  s'obtient comme :*

$$(4.6) \quad Con_\omega X_0 = Con_\omega X \setminus \bigsqcup_{\rho \in R} Hb(\rho)$$

où  $R$  est l'ensemble des rayons  $\rho = [\gamma_n r_i]$ , et on prend un seul pour chaque classe  $[[\gamma_n]]$ , et  $\phi = \text{id} : \bigcup_{\rho \in R} H(\rho) \rightarrow \bigcup_{\rho \in R} H(\rho)$ .

**Preuve.** Reste à voir si les horoboules ouvertes qui apparaissent au (4.6) sont disjointes. Soit  $x = [x_n] \in Hbo(\rho_1)$ . On montre que  $x \notin Hbo(\rho_2), \forall \rho_2 \neq \rho_1$ . On a  $\rho_1 = [r_n], \rho_2 = [r'_n]$  et l'hypothèse  $\rho_1 \neq \rho_2$  implique que  $r_n \neq r'_n$   $\omega$ -presque sûrement. Si  $x \in Hbo(\rho_1)$  alors  $f_{\rho_1}(x) = -a < 0$ , ce qui, d'après (4.4), implique que  $f_{r_n}(x_n) < -\frac{a}{2}$   $\omega$ -p.s. D'autre part, comme  $r_n \neq r'_n$ , les horoboules ouvertes déterminés par  $r_n$  et  $r'_n$  sont disjointes. Donc  $f_{r'_n}(x_n) \geq 0$ . Toujours (4.4) permet alors de conclure que  $f_{\rho_2}(x) \geq 0$  et donc que  $x$  ne se trouve pas dans l'horoboule ouverte  $Hbo(\rho_2)$ . ◇

Dès maintenant on note  $\mathbf{K} = Con_{\omega}X$  et  $\mathbf{K}_0 = Con_{\omega}X_0$ .

Avec cette notation et ce qu'on vient de démontrer, on peut réécrire

$$(4.7) \quad \mathbf{K}_0 = \mathbf{K} \setminus \bigsqcup_{\rho \in R} Hbo(\rho).$$

La structure d'immeuble euclidien de  $\mathbf{K}$  entraîne une structure d'immeuble sphérique sur  $\partial_{\infty}\mathbf{K}$  et le complexe de Coxeter modèle de  $\partial_{\infty}\mathbf{K}$  est le même que celui de  $\partial_{\infty}X$ . Ainsi, si on fixe un marquage sur  $\partial_{\infty}\mathbf{K}$ , on a une projection  $P : \partial_{\infty}\mathbf{K} \rightarrow \Delta$ , où  $\Delta$  est la même chambre modèle que pour  $\partial_{\infty}X$ .

Il est évident que si on a une suite de rayons dans  $X$ ,  $r_n$ , telle que  $p(r_n) = \theta, \forall n$ , et si on prend  $\rho = [r_n], P(\rho) = \theta$ .

Alors la Proposition 3.2.1 implique que  $P(R) = \theta$ , où  $R$  est l'ensemble de rayons de (4.7), et que deux rayons distincts de  $R$  sont opposées.

### 3.3 Nondistorsion des horosphères

Dans cette section on va démontrer le théorème de Lubotzky–Mozes–Raghu-nathan pour des réseaux de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 par une méthode géométrique.

On rappelle d'abord l'énoncé du théorème de Lubotzky–Mozes–Raghu-nathan ([LMR]<sub>1</sub> et [LMR]<sub>2</sub>).

**Définition 3.3.1** *Soit un espace métrique  $(X, d)$ ,  $A \subset X$  et sur  $A$  une métrique  $d_A$ . On dit que  $(A, d_A)$  est nondistordu dans  $X$  si et seulement s'il existe une constante  $L \geq 0$  telle que*

$$\frac{1}{L}d(x, y) \leq d_A(x, y) \leq Ld(x, y), \forall x, y \in A.$$

*Parfois on dira que  $(A, d_A)$  est  $L$ -nondistordu. On appelle  $L$  constante de distorsion.*

**Théorème 3.3.2 (Lubotzky–Mozes–Raghunathan)** *Si  $G$  est un groupe de Lie semisimple de  $\mathbb{R}$ -rang plus grand ou égal à 2 et  $\Gamma$  est un réseau irréductible de  $G$ , alors  $\Gamma$  muni de la métrique des mots est nondistordu dans  $G$  muni d'une métrique invariante à gauche.*

Dans le cas des réseaux de  $\mathbb{Q}$ -rang 1,  $\Gamma$  muni de la métrique des mots est quasi-isométrique à l'espace associé  $X_0$  muni de la métrique de longueur. Et pour montrer que  $(X_0, d_\ell)$  est nondistordu dans  $X$ , il suffit de le montrer pour les horosphères  $\gamma Hb(r_i)$ , car les horoboules  $\gamma Hb(r_i)$  sont disjointes.

Ainsi dans le cas du  $\mathbb{Q}$ -rang 1 le théorème de Lubotzky–Mozes–Raghunathan est équivalent à la nondistorsion des horosphères.

On étudie donc le comportement d'une horosphère avec sa métrique de longueur dans un espace symétrique de rang plus grand ou égal à 2. On remarque qu'on n'a pas un comportement uniforme de ce point de vue. Par exemple, dans l'espace  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \times \dots \times \mathbb{H}^2$ , si on prend un rayon géodésique dans un des facteurs, l'horosphère qui lui correspond a une distorsion exponentielle. D'autre part, dans la suite on donne des exemple d'horosphères nondistordues dans le même espace.

En particulier, les horosphères qui délimitent l'espace associé à un réseau irréductibles de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 sont nondistordues. La propriété essentielle qui leur assure la nondistorsion est la propriété énoncée dans la Proposition 3.2.3. En fait, on montre dans la suite que toute horosphère déterminée par un rayon qui vérifie la même propriété est nondistordue.

Pour ce faire on démontre d'abord la même chose dans des immeubles euclidiens 4-épais, donc en particulier dans les cônes asymptotiques des espaces symétriques.

### 3.3.1 Nondistorsion des horosphères dans des immeubles euclidiens

Afin de voir quelles sont les horosphères nondistordues dans un immeuble euclidien, on étudie les formes des intersections des plats maximaux avec une horoboule.

#### L'intersection d'un plat avec une horoboule

**Exemple** Soit  $\mathbf{K}$  un immeuble euclidien non-discret qui s'obtient comme un produit d'arbres réels,  $\mathbf{K} = \prod_{i=1}^m \mathcal{T}_i$ . On considère seulement les cas  $m = 2$  et  $m = 3$ .

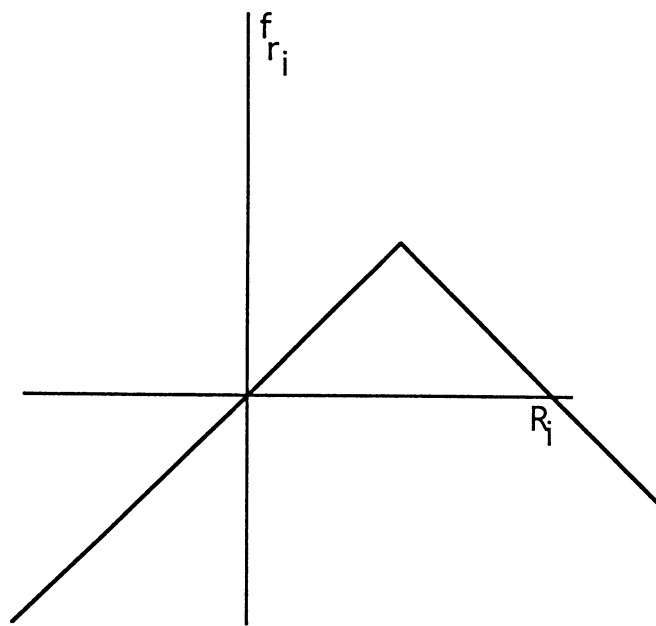
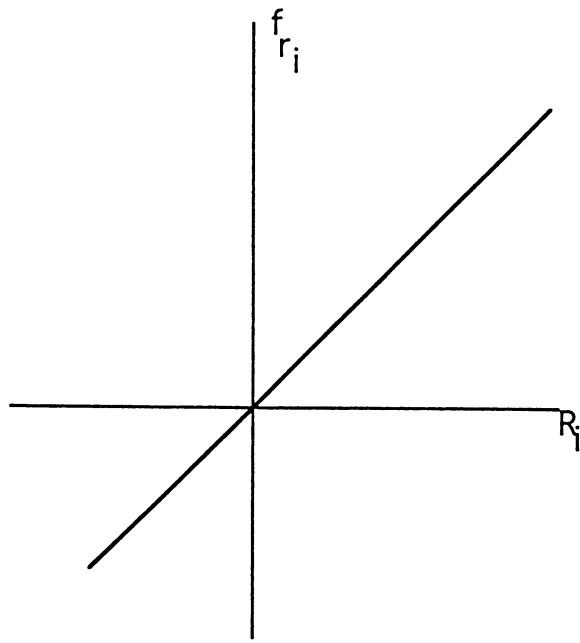


Figure 13

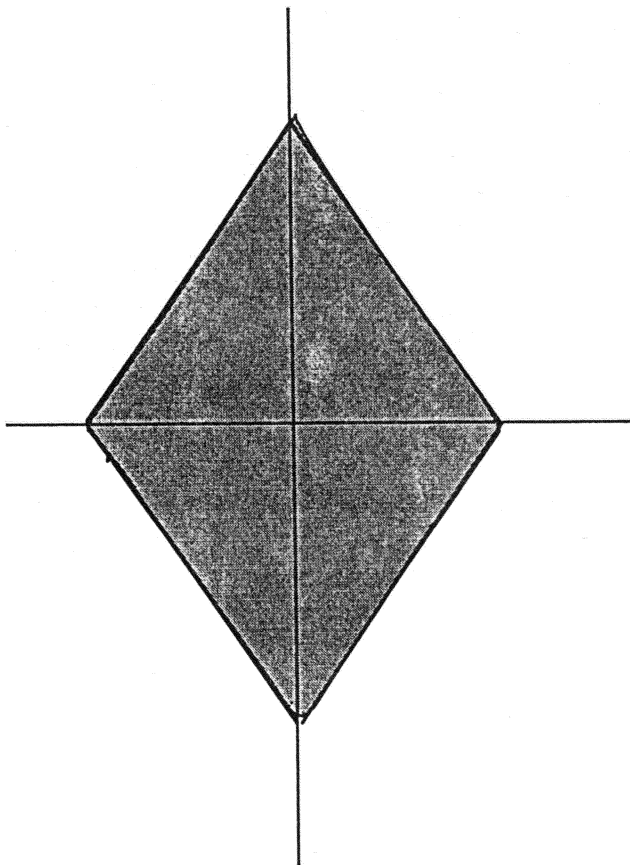
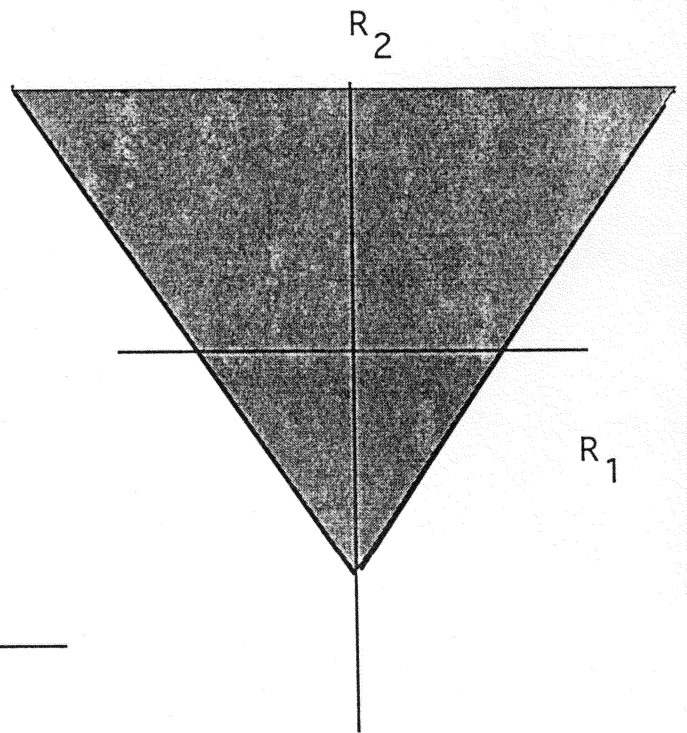
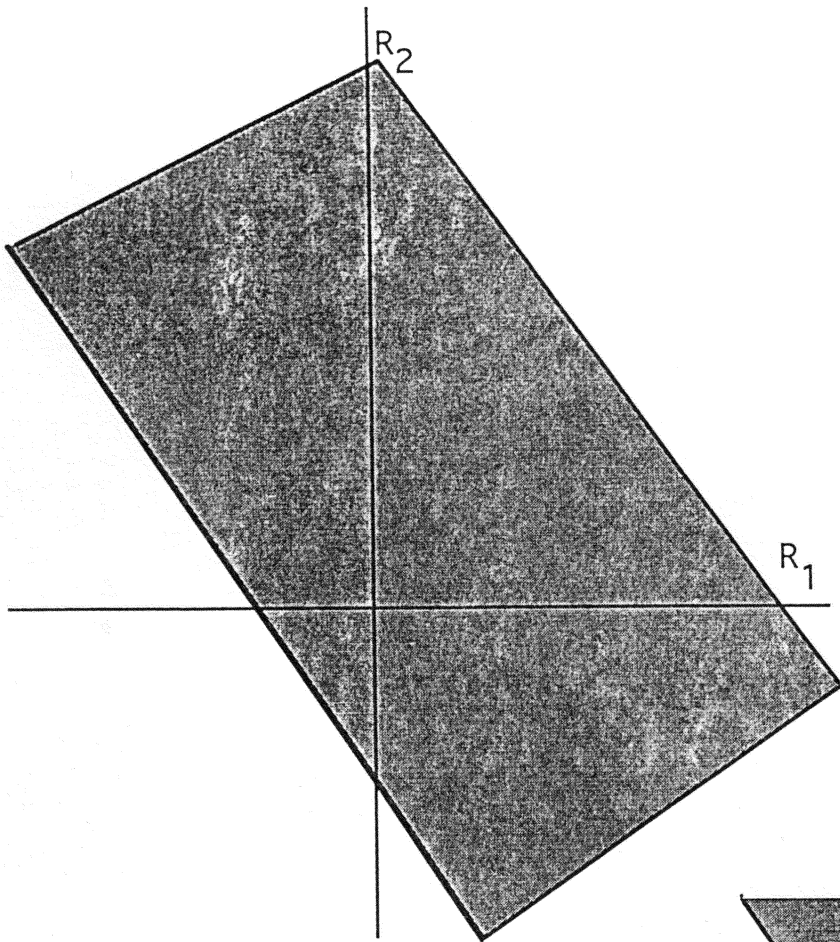


Figure 14

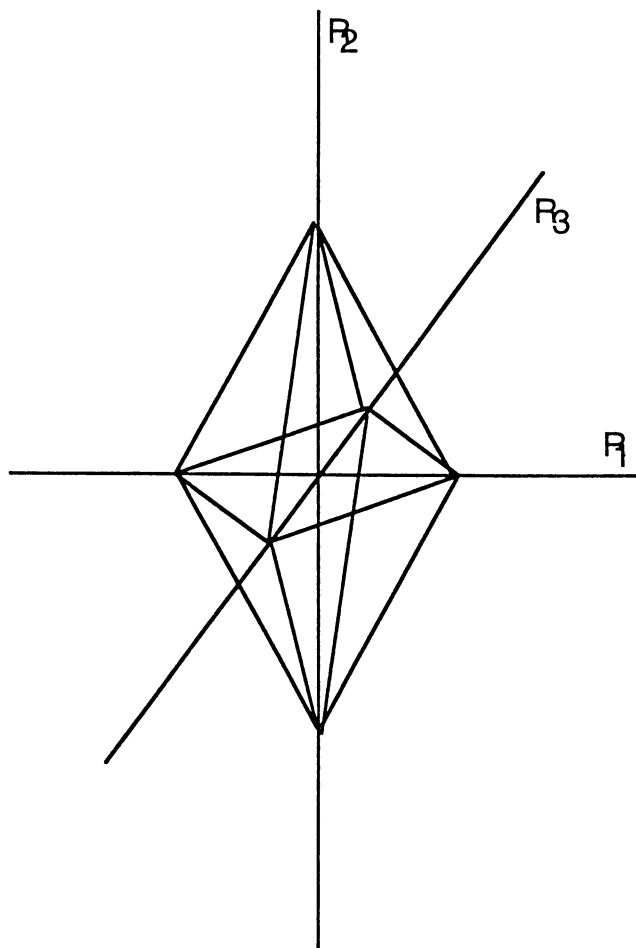
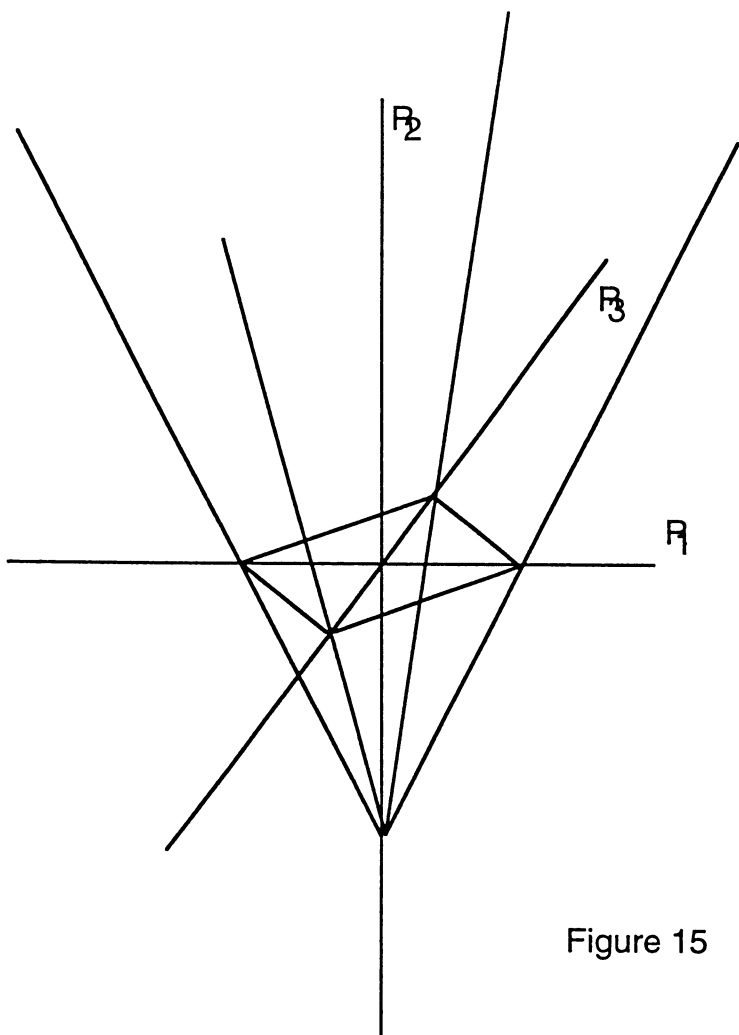
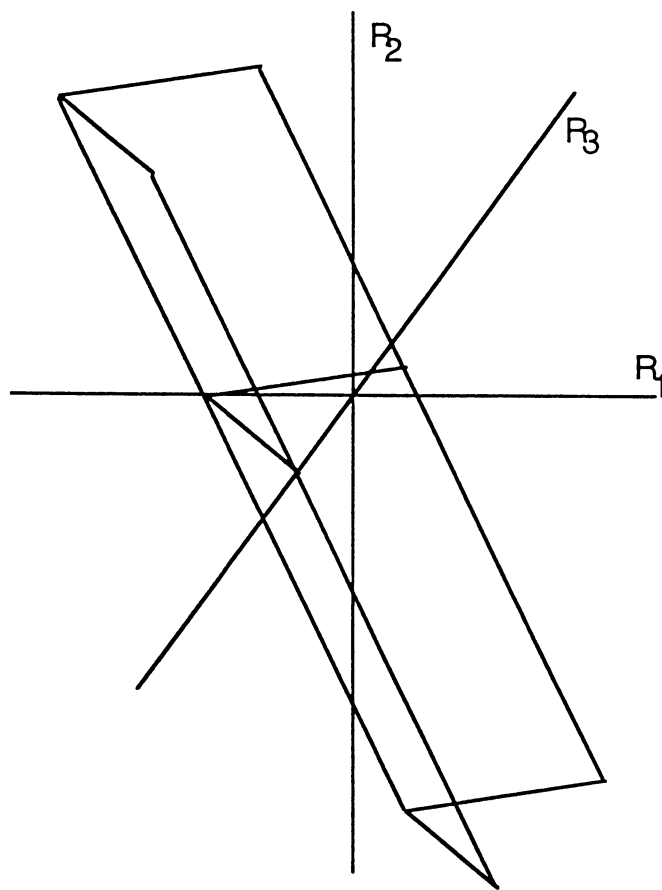
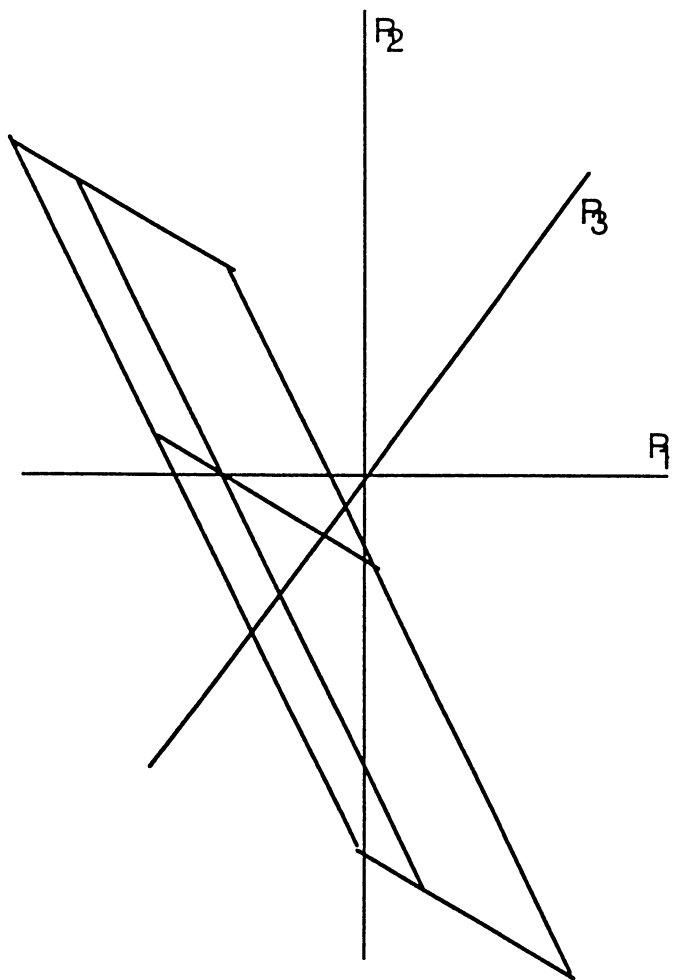


Figure 15



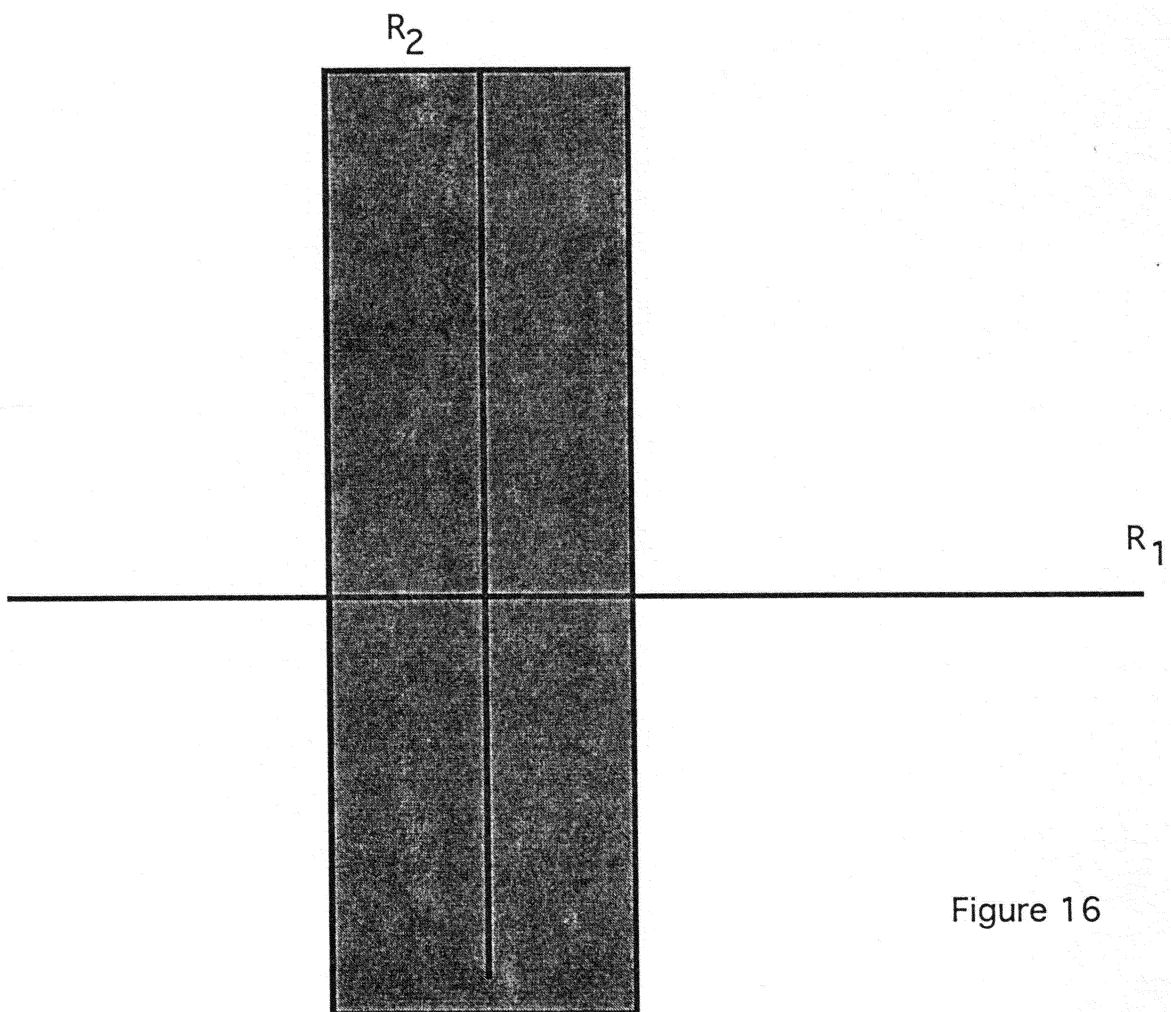
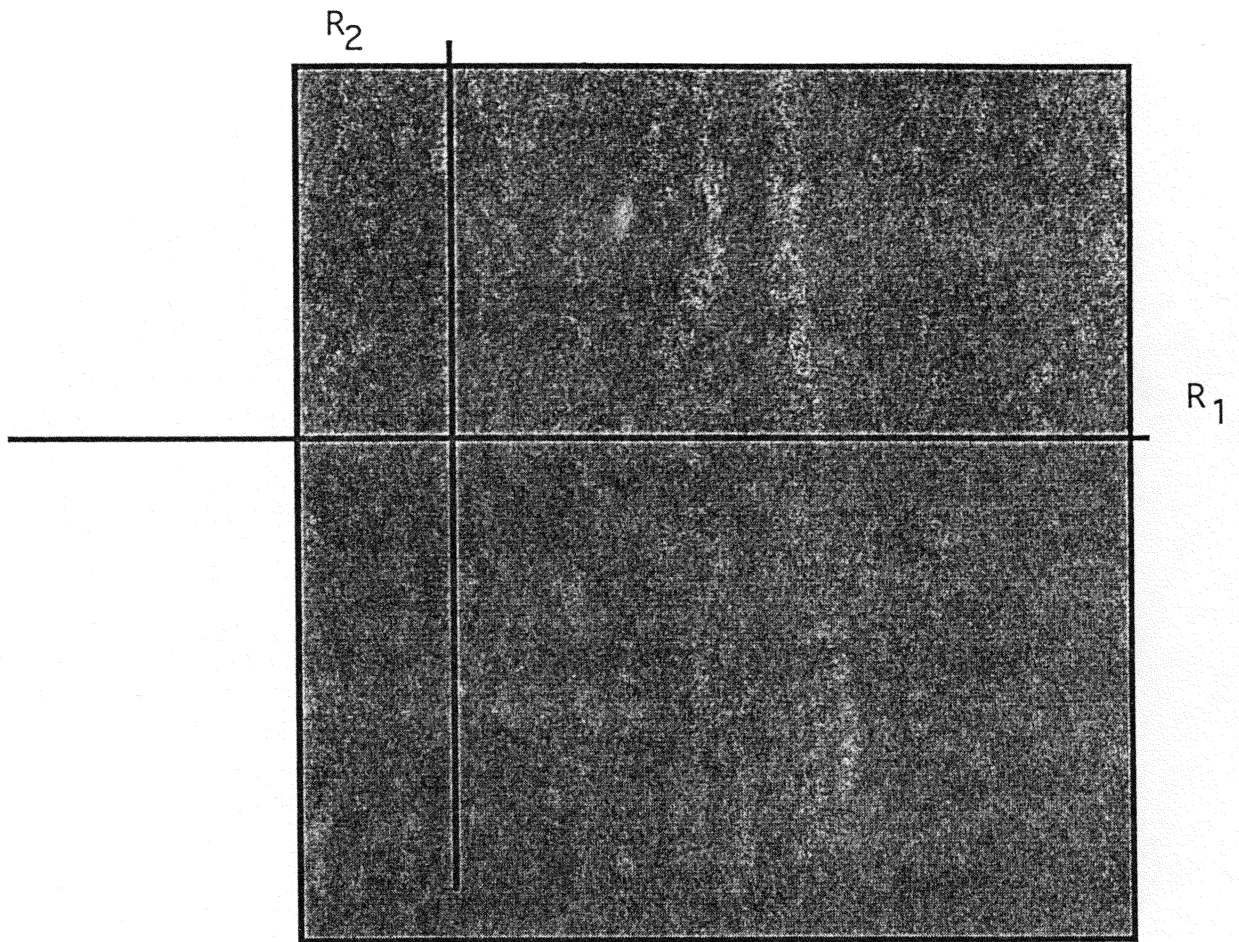


Figure 16

On étudie l'intersection d'une horoboule  $Hb(\rho)$  avec un plat  $F$  dans  $\mathbf{K}$ .

Le rayon  $\rho$  peut s'écrire comme  $\rho(t) = (\rho_1(a_1 \cdot t), \rho_2(a_2 \cdot t), \dots, \rho_m(a_m \cdot t))$ , où  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2 = 1$ .

En utilisant la formule  $f_\rho(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D^2(y, \rho(t)) - t^2}{2t}$ , on peut déduire facilement que :

$$f_\rho(y) = \sum_{i=1}^m a_i f_{\rho_i}(y_i) \text{ où } y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \prod_{i=1}^m \mathcal{I}_i.$$

1) On suppose d'abord que  $a_i > 0$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Le plat  $F$  est de la forme  $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_m$ . Chaque  $R_i$  peut être asymptote ou non à  $\rho_i$ . Ceci fait que  $f_{\rho_i}$  peut varier sur  $R_i$  selon un des graphes de la Figure 13.

Avec ces remarques il n'est pas difficile de voir quelles sont les formes possibles de  $F \cap Hb(\rho)$ . Dans les Figures 14 et 15 on représente ces formes pour  $m = 2$  et  $m = 3$ .

2) On se place maintenant dans la situation  $m = 2$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 = 0$ , donc  $\rho(t) = (\rho_1(t), P_0)$ .

Pour un plat  $F = R_1 \times R_2$  on a deux situations possibles :  $R_1$  asymptote à  $\rho_1$  ou non. Donc si  $F \cap H(\rho) \neq \emptyset$ , l'intersection peut avoir seulement deux formes, représentées dans la Figure 16.

On étudie l'intersection d'un plat avec une horoboule dans le cas général. Dans la suite on fixe un rayon  $\rho$  dans l'immeuble euclidien. On note sa direction  $\theta$ .

**Proposition 3.3.3** *Dans un immeuble euclidien l'intersection entre une horoboule  $Hb(\rho)$  et un plat maximal  $F$  est un polytope convexe.*

**Preuve.** On introduit comme outil le rayon  $\rho^0$  défini comme suit :

- si  $\rho$  a une direction régulière,  $\rho^0 = \rho$
- si  $\rho$  a une direction singulière, on choisit une chambre de Weyl qui contient  $\rho$  et un rayon régulier dans cette chambre,  $\rho^0$ .

On utilise un résultat sur la géométrie des immeubles euclidiens :

**Lemme 3.3.4** *Soit un immeuble euclidien  $\mathbf{K}$ , un appartement  $F \subset \mathbf{K}$  et un point régulier à l'infini  $\alpha \in \partial_\infty \mathbf{K}$ . Soient  $\{\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0, \dots, \alpha_k^0\}$  les opposés de  $\alpha$  dans  $F(\infty)$ . Pour chaque  $\alpha_i^0$  il existe un appartement unique  $F_i$  tel que  $F_i(\infty)$  contient  $\alpha_i^0$  et  $\alpha$ . Alors*

$$(i) F(\infty) = \bigcup_{i=1}^k [F(\infty) \cap F_i(\infty)].$$

$$(ii) F = \bigcup_{i=1}^k [F \cap F_i].$$

**Preuve** Le fait que  $F(\infty)$  contient seulement un nombre fini d'opposés de  $\alpha$  et le fait que chaque opposé de  $\alpha$  détermine avec  $\alpha$  un seul appartement dans  $\partial_\infty \mathbf{K}$  découle de la Remarque 1.3.5.

(i) On démontre  $F(\infty) \subset \bigcup_{i=1}^k [F(\infty) \cap F_i(\infty)]$ . Soit  $\beta \in F(\infty)$  un point régulier quelconque. Si  $\beta \notin \{\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0, \dots, \alpha_k^0\}$ , alors la géodésique de  $\alpha$  à  $\beta$  se prolonge en  $F(\infty)$  jusqu'à la longueur  $\pi$ , donc jusqu'à ce qu'on arrive à un  $\alpha_i^0$ . Alors  $\beta \in F_i$ .

Soit  $\beta \in F(\infty)$  point singulier. Alors  $\beta$  se trouve dans le bord d'une chambre  $\mathcal{W}$ . On choisit  $\beta^0 \in \mathcal{W}$  point régulier. Il existe un  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  tel que  $\beta^0 \in F(\infty) \cap F_i(\infty)$ . Donc  $\mathcal{W} \subset F(\infty) \cap F_i(\infty)$ , d'où  $\beta \in F(\infty) \cap F_i(\infty)$ .

(ii) Soit un point  $x \in F$  quelconque. D'après la Remarque 1.3.21, le rayon  $[x, \alpha]$  peut être prolongé dans  $F$  à une géodésique  $(\alpha, \alpha^0)$ ,  $\alpha^0 \in F(\infty)$ . Donc  $\alpha^0$  se trouve parmi les opposés de  $\alpha$  dans  $F(\infty)$ ,  $\alpha^0 = \alpha_i^0$ , et  $x \in F_i$ .  $\diamond$

Dans notre cas  $\rho^0(\infty)$  a les opposés  $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0$  dans  $F(\infty)$ . Pour chaque  $i \in 1, 2, \dots, k$ , il existe un plat maximal unique  $F^i$  tel que  $\rho^0(\infty), \alpha_i^0 \in F^i(\infty)$ .

On a donc  $F = \bigcup_{i=1}^k [F^i \cap F]$ . Chaque  $F^i \cap F$  est un polytope de Weyl convexe, d'après l'axiome (2) de l'immeuble euclidien.

D'autre part,  $Hb(\rho) \cap F = \bigcup_{i=1}^k [Hb(\rho) \cap F^i \cap F]$ . Mais  $Hb(\rho) \cap F^i$  est un demi-plat, donc  $Hb(\rho) \cap F^i \cap F$  est toujours un polytope convexe.

Alors  $\bigcup_{i=1}^k [Hb(\rho) \cap F^i \cap F]$  est une réunion de polytopes convexes et aussi un ensemble convexe, donc c'est un polytope convexe.  $\diamond$

**Remarque 3.3.5** *On peut dire même plus : les hyperplans d'appui de  $Hb(\rho) \cap F$  sont des hyperplans orthogonaux à des  $\alpha^i$  (mais il n'est pas obligatoire que tous les hyperplans déterminés par des  $\alpha^i$  apparaissent). En effet, le bord de*

$Hb(\rho) \cap F$  est  $H(\rho) \cap F = \bigcup_{i=1}^k [H(\rho) \cap F^i \cap F]$  et chaque  $H(\rho) \cap F^i$  est un hyperplan orthogonal à  $\rho(\infty)$ , donc à  $\alpha^i$ . Alors  $H(\rho) \cap F^i \cap F$  est ou bien l'ensemble vide, ou bien un polytope contenu dans un hyperplan orthogonal à  $\alpha^i$ .

Supposons que  $F$  est un plat tel que  $F \cap Hb(\rho) \neq \emptyset$ . Alors  $\inf_F f_\rho \leq 0$ . On a  $\inf_F f_\rho > -\infty$  ou  $\inf_F f_\rho = -\infty$ . On étudie chacun de ces deux cas.

PREMIER CAS  $\inf_F f_\rho = -\infty$

On montre que dans ce cas  $F \cap H(\rho)$  n'est pas distordu en  $F$ .

Avec la décomposition du lemme 3.3.4, on a que

$$\inf_F f_\rho = \min\left\{\inf_{F \cap F_1} f_\rho, \inf_{F \cap F_2} f_\rho, \dots, \inf_{F \cap F_k} f_\rho\right\}.$$

Donc il existe un  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  tel que  $\inf_F f_\rho = \inf_{F \cap F_k} f_\rho$ . Comme  $F_i$  est un plat qui contient  $\rho$ ,  $F_i \cap Hb(\rho)$  est un demi-plat. Alors  $\inf_{F \cap F_k} f_\rho = \infty$  implique que le polytope de Weyl  $F_i \cap F$  contient un rayon  $r$  qui fait avec  $\rho$  un angle strictement plus petit que  $\frac{\pi}{2}$ .

Donc il existe un rayon  $r \subset F$  tel que  $d_T(r(\infty), \rho(\infty)) < \frac{\pi}{2}$ , où  $d_T$  est la distance de Tits.

On peut conclure que  $d_T(\rho(\infty), F(\infty)) < \frac{\pi}{2}$ .

Soit  $\beta \in F(\infty)$  tel que  $d_T(\rho(\infty), F(\infty)) = d_T(\rho(\infty), \beta) < \frac{\pi}{2}$ . Le point  $\beta$  est singulier, d'après la Proposition 1.3.7. Soit  $\mathcal{M}$  le mur qui contient  $\beta$  à l'intérieur. On a  $d_T(\rho(\infty), \mathcal{M}) = d_T(\rho(\infty), \beta) < \frac{\pi}{2}$ . Dans un appartement de  $\partial_\infty \mathbf{K}$  qui contient à la fois  $\mathcal{M}$  et  $\rho(\infty)$ ,  $\mathcal{M}$  se trouve parmi les simplexes qui ont une distance plus petite que  $\frac{\pi}{2}$  de  $\rho(\infty)$ . D'après la Remarque 1.3.6,  $d_T(\rho(\infty), \mathcal{M}) = d_T(\rho(\infty), \beta) = d_T(\rho(\infty), F) < \frac{\pi}{2} - \delta$ , où  $\delta$  ne dépend que de  $\theta$ .

On a  $\beta \in F(\infty) = \bigcup_{i=1}^k [F(\infty) \cap F_i(\infty)]$ , donc  $\beta \in F(\infty) \cap F_i(\infty)$  pour un  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Alors il existe un rayon  $[x, \beta] \subset F \cap F_i$ .

On considère aussi le rayon opposé dans  $F$ ,  $[x, \beta^{op})$  et on définit les  $\frac{\delta}{2}$ -cônes autour de ces deux rayons, c'est-à-dire les ensembles :

$$\begin{aligned} C\left(x, \frac{\delta}{2}\right) &= \{y \in \bar{F}; \angle_x(y, \beta) \leq \frac{\delta}{2}\}, \text{ où } \bar{F} = F \cup F(\infty) \\ C^{op}\left(x, \frac{\delta}{2}\right) &= \{y \in \bar{F}; \angle_x(y, \beta^{op}) \leq \frac{\delta}{2}\}. \end{aligned}$$

On voit que pour tout  $\alpha \in C(x, \frac{\delta}{2})$  on a :

$$d_T(\alpha, \rho(\infty)) \leq d_T(\alpha, \beta) + d_T(\beta, \rho(\infty)) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\pi}{2} - \delta = \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}.$$

A partir de ceci on déduit la propriété suivante :

**Lemme 3.3.6** *On a la double inclusion :*

$$B(x, \mu) \cap C^{op} \left( x, \frac{\delta}{2} \right) \subset Hb(\rho) \cap C^{op} \left( x, \frac{\delta}{2} \right) \subset B(x, a'\mu) \cap C^{op} \left( x, \frac{\delta}{2} \right),$$

où  $a' = \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$ .

**Démonstration** La première inclusion est une conséquence de :  $B(x, \mu) \subset Hb(\rho) \cap F$ , due au fait que  $f_\rho$  est contractante.

On démontre la deuxième inclusion.

Soit  $r$  un rayon dans  $C^{op} \left( x, \frac{\delta}{2} \right)$ , d'origine  $x$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} \angle_x(\overline{r_x}, \overline{\rho_x}) = \angle_x(r(\infty), \rho(\infty)) &\geq \angle_x(r(\infty), \beta) - \angle_x(\beta, \rho(\infty)) \\ &\geq \pi - \frac{\delta}{2} - d_T(\beta, \rho(\infty)) \geq (\pi - \frac{\delta}{2}) - (\frac{\pi}{2} - \delta) = \frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Alors la fonction convexe  $f_\rho \circ r$  a, près de zéro, une vitesse de croissance plus grande que  $\sin \frac{\delta}{2}$ . Donc :

$$f_\rho \circ r(t) \geq -\mu + t \cdot \sin \frac{\delta}{2}$$

Ceci entraîne que le point  $y \in r$  qui se trouve sur  $H(\rho)$  vérifie :  $d(x, y) \leq \frac{\mu}{\sin \frac{\delta}{2}}$ .  
La démonstration est complète.  $\diamond$

Or on a le résultat suivant :

**Lemme 3.3.7** *Soit un polytope convexe  $\mathcal{P}$  dans un espace euclidien  $E$ ,  $O$  un point à l'intérieur de  $\mathcal{P}$ ,  $r$  un rayon issu de  $O$  et*

$$C(O, \delta_0) = \{P \in E \mid \angle_O(OP, r) \leq \delta_0\} \text{ un } \delta_0\text{-cône, où } \delta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

*Supposons qu'on a  $B(O, R) \subset \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P} \cap C(O, \delta_0) \subset B(O, aR) \cap C(O, \delta_0)$ , où  $a$  est une constante. Soit  $S\mathcal{P}$  l'hypersurface polytopique qui est le bord de  $\mathcal{P}$ . Alors:*

- a) *Si on prend  $S\mathcal{P}$  et  $S(O, R)$  avec les métriques de longueur, la projection radiale  $pr : S\mathcal{P} \cap C(O, \delta_0) \rightarrow S(O, R) \cap C(O, \delta_0)$  est  $L$ -bilipschitz, où  $L$  ne dépend que de  $a$ .*

b) Si on note  $d_\ell$  la métrique de longueur sur  $\mathcal{SP}$ , on a :

$$d_\ell(x, y) \leq k \cdot d(x, y), \forall x, y \in \mathcal{SP} \cap C(O, \delta_0) \text{ où } k \text{ ne dépend que de } a.$$

**Démonstration.**

Pour chaque paire de points  $x, y \in \mathcal{SP} \cap C(O, \delta_0)$  on considère le plan  $(Oxy)$ . La section avec ce plan donne la situation de la Figure 17.

Dans ce plan et dans les coordonnées polaires la métrique euclidienne s'exprime comme  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ , ce qui implique que  $d(x, y) \geq d(x', y')$ , où  $x' = pr(x), y' = pr(y)$ , donc qu'on a :

$$(4.8) \quad d_\ell(x, y) \geq d(x, y) \geq d(x', y') \geq \frac{2}{\pi} d_\ell(x', y')$$

Pour l'inégalité inverse on remarque d'abord que pour tout segment  $[A, B]$  inclus dans la ligne polygonale entre  $x$  et  $y$  qui se trouve dans l'intersection du plan  $(Oxy)$  avec  $\mathcal{SP} \cap C(O, \delta_0)$  on a :  
 $d(O, AB) \geq R$ , dû au fait que le polygone est convexe, et

$$\varphi = \angle_B(A, O) = \arcsin \frac{d(O, AB)}{d(O, B)} \geq \arcsin \frac{R}{a \cdot R} = \arcsin \frac{1}{a}.$$

On note  $\arcsin \frac{1}{a}$  avec  $\varphi_0$ . On a que  $\varphi \geq \varphi_0$  donc que :

$$r_B - r_A \leq d(A, B) \cos \varphi \leq d(A, B) \cos \varphi_0 \text{ où } r_A = d(O, A), r_B = d(O, B).$$

Alors, si on note  $\mathcal{L}$  la ligne polygonale entre  $x$  et  $y$  et  $x''$  et  $y''$  les projections radiales de  $x$  et  $y$  sur  $S(O, aR)$ , on a :

$$\begin{aligned} \text{longueur } \mathcal{L} &= \int_{\mathcal{L}} (dr^2 + r^2 d\theta^2)^{\frac{1}{2}} \leq \int_{\mathcal{L}} dl \cos \varphi_0 + \int_{\mathcal{L}} a \cdot R d\theta \\ &= \cos \varphi_0 \cdot \text{longueur } \mathcal{L} + d_\ell(x'', y'') \Rightarrow \text{longueur } \mathcal{L} \leq \frac{1}{1 - \cos \varphi_0} d_\ell(x'', y'') \\ \Rightarrow d_\ell(x, y) &\leq \frac{1}{1 - \cos \varphi_0} d_\ell(x'', y'') \leq \frac{1}{a(1 - \cos \varphi_0)} d_\ell(x', y') \quad (4.9) \end{aligned}$$

Les relations (4.8) et (4.9) impliquent a) et b). ◇

Ce lemme a une conséquence immédiate pour le cas des polytopes fermés:

**Corollaire 3.3.8** Soit un polytope convexe fermé  $\mathcal{P}$  dans un espace euclidien  $E$  et  $O$  un point à l'intérieur de  $\mathcal{P}$ . Supposons qu'on a  $B(O, R) \subset \mathcal{P} \subset B(O, aR)$ , où  $a$  est une constante. Soit  $\mathcal{SP}$  l'hypersurface polytopique qui est le bord de  $\mathcal{P}$ . Alors:

a) Si on prend  $\mathcal{SP}$  et  $S(O, R)$  avec les métriques de longueur, la projection radiale  $pr : \mathcal{SP} \rightarrow S(O, R)$  est  $L$ -bilipschitz, où  $L$  ne dépend que de  $a$  .

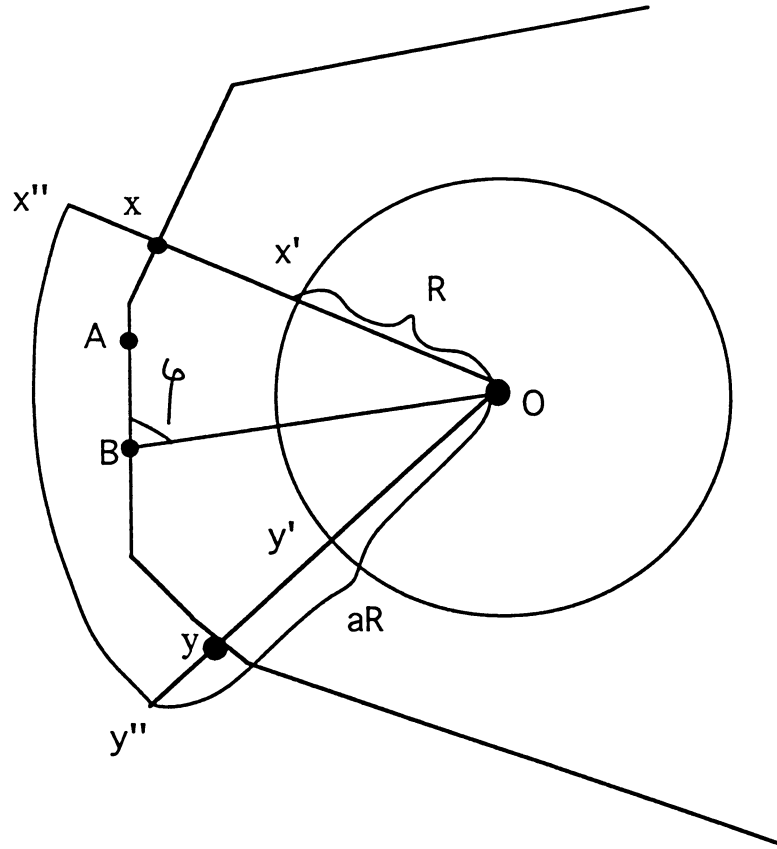


Figure 17

b) Si on note  $d_\ell$  la métrique de longueur sur  $SP$ , on a :

$$d_\ell(x, y) \leq k \cdot d(x, y), \forall x, y \in SP \text{ où } k \text{ ne dépend que de } a.$$

Le lemme 3.3.7 permet de conclure que dans ce cas  $F \cap H(\rho)$  avec sa métrique de longueur est nondistordue en  $F$ .

Plus précisément, dans ce cas  $F \cap H(\rho)$  a les deux propriétés suivantes

(P<sub>1</sub>) Pour tout  $x, y \in F \cap H(\rho)$  on peut trouver dans  $F \cap H(\rho)$  une ligne polygonale  $\mathcal{L}(x, y)$  entre  $x$  et  $y$  telle que

$$\text{long}\mathcal{L}(x, y) \leq kd(x, y)$$

où  $k$  ne dépend que de  $\theta$ .

(P<sub>2</sub>) Si le rang de l'immeuble est plus grand ou égal à 3, pour toute courbe  $c : S^1 \rightarrow F \cap H(\rho)$  de longueur  $\ell$ , l'aire de remplissage de  $c$  dans  $F \cap H(\rho)$ ,  $A(c) \leq b\ell^2$ , avec la définition de l'aire de la section 2.2.1, où  $b$  est une constante qui ne dépend que de  $\theta$ .

**Preuve.** On note  $\beta_t$  l'élément de  $[x, \beta)$  tel que  $d(x, \beta_t) = t$ .

Evidemment  $F = \bigcup_{t \geq 0} C^{op} \left( \beta_t, \frac{\delta}{2} \right)$ . On utilise ceci pour démontrer (P<sub>1</sub>) et

(P<sub>2</sub>).

(P<sub>1</sub>) On considère  $x, y \in F \cap H(\rho)$  et  $t$  suffisamment grand pour que  $[x, y] \subset C^{op} \left( \beta_t, \frac{\delta}{2} \right)$ . L'intersection  $\mathcal{P} = F \cap Hb(\rho)$  est un polytope convexe tel que  $B(\beta_t, t) \subset \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P} \cap C^{op} \left( \beta_t, \frac{\delta}{2} \right) \subset B(\beta_t, a't) \cap C^{op} \left( \beta_t, \frac{\delta}{2} \right)$ .

On applique le Lemme 3.3.7 a).

(P<sub>2</sub>) Soit  $c : S^1 \rightarrow F \cap H(\rho)$  une courbe de longueur  $\ell$ . On considère  $t$  suffisamment grand pour que  $c(S^1) \subset C^{op} \left( \beta_t, \frac{\delta}{2} \right)$  et on utilise le Lemme 3.3.7 b) et le fait qu'il existe une constante universelle  $b_0$  telle que si  $c$  est une courbe de longueur  $\ell$  sur une sphère, on a  $A(c) \leq b_0\ell^2$ .  $\diamond$

DEUXIÈME CAS  $\inf_F f_\rho = -\mu > -\infty$

Comme  $\inf_F f_\rho = \min \left\{ \inf_{F \cap F_1} f_\rho, \inf_{F \cap F_2} f_\rho, \dots, \inf_{F \cap F_k} f_\rho \right\}$ , avec les notations du lemme 3.3.4, il résulte que  $\inf_{F \cap F_i} f_\rho = -\mu$ , pour un  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  et il n'est pas difficile de voir que la valeur  $-\mu$  est effectivement atteinte en au moins un point de  $F \cap F_i$ .

On cherche la forme de l'ensemble  $\{P \in F \mid f_\rho(P) = -\mu\}$ . Supposons qu'on a au moins deux points dans cet ensemble  $P \in F, P_1 \in F$  tels que  $f_\rho(P) = -\mu, f_\rho(P_1) = -\mu$ . Comme le segment  $[P, P_1]$  est contenu dans  $F$  et  $f_\rho$  est convexe, on a  $f_\rho(x) = -\mu, \forall x \in [P, P_1]$ .



**Lemme 3.3.9** *Soit un immeuble euclidien  $\mathbf{K}$ , un rayon  $\rho \in \mathbf{K}$  et un appartement  $F$  de  $\mathbf{K}$ . Si  $f_\rho$  atteint sa valeur minimale sur  $F$  sur un segment  $[P, P_1] \in F$ , alors le segment  $[P, P_1]$  est inclus dans un plat singulier de  $F$ .*

**Preuve**

Soit  $-\mu = \inf_F f_\rho > -\infty$ .

On fixe un point  $x$  à l'intérieur du segment  $[P, P_1]$  et on considère l'immeuble des directions dans  $x, \Sigma_x \mathbf{K}$ .

On note  $\rho_x$  le rayon  $[x, \rho(\infty))$ . La Remarque 1.3.12 implique que  $\rho_x$  et un sous-segment de  $[x, P]$  forment un secteur euclidien. Du fait que  $f_\rho$  est constante égale à  $-\mu$  sur  $[x, P]$  on déduit alors que  $\angle_x(\overline{xP}, \overline{\rho_x}) = \frac{\pi}{2}$ . Par un raisonnement analogue on déduit que  $\angle_x(\overline{xP_1}, \overline{\rho_x}) = \frac{\pi}{2}$ . Les directions  $\overline{xP}$  et  $\overline{xP_1}$  étant opposés dans l'immeuble sphérique  $\Sigma_x \mathbf{K}$ , il en résulte que  $\overline{\rho_x}$  se trouve sur une géodésique de  $\overline{xP}$  à  $\overline{xP_1}$  dans l'immeuble sphérique  $\Sigma_x \mathbf{K}$ .

Si  $\overline{xP}$  et  $\overline{xP_1}$  sont des points réguliers, le fait que  $\overline{\rho_x}$  se trouve sur une géodésique de  $\overline{xP}$  à  $\overline{xP_1}$  implique qu'il se trouve dans l'unique appartement qui contient  $\overline{xP}$  et  $\overline{xP_1}$  qui est  $F_x$  dans ce cas.

Alors d'après la Remarque 1.3.12, un sous-segment du rayon  $[x, \rho(\infty))$  est inclus dans  $F$ , or en tous les points de ce sous-segment différents de  $x$ ,  $f_\rho$  prend une valeur strictement plus petite que  $f_\rho(x) = -\mu$ , d'où la contradiction.

Donc  $\overline{xP}$  et  $\overline{xP_1}$  sont des points singuliers dans l'immeuble sphérique  $\Sigma_x \mathbf{K}$ , d'où la conclusion de ce lemme. ◇

On note  $\mathcal{V}$  l'ensemble des points  $P \in F$  tels que  $f_\rho(P) = \inf_F f_\rho$ .

**Lemme 3.3.10**  *$\mathcal{V}$  est un polytope de Weyl singulier, c'est-à-dire un polytope dans un plat singulier ayant comme hyperplans d'appui des intersections de ce plat singulier avec des hyperplans singuliers.*

**Preuve du Lemme 3.3.10** Soit  $P \in \mathcal{V}$ . Dans  $\Sigma_P \mathbf{K}$  on peut définir  $\Sigma_P \mathcal{V} = \{\overline{PQ}, Q \in \mathcal{V} \setminus \{P\}\}$

(A) La Remarque 1.3.12 b et la convexité de la fonction  $f_\rho$  entraînent que  $\Sigma_P \mathcal{V}$  est un ensemble convexe.

(B) Le Lemme précédent implique que tous les  $\overline{PQ}$  se trouvent dans un même plat singulier.

(C) Pour tout  $Q \in \mathcal{V}$  on a  $\angle_P(\overline{PQ}, \overline{\rho_P}) = \frac{\pi}{2}$  et pour tout  $\bar{u} \in F_P$  on a  $\angle_P(\bar{u}, \overline{\rho_P}) \geq \frac{\pi}{2}$ . La Proposition 1.3.7 entraîne alors que  $\Sigma_P \mathcal{V}$  contient

avec chaque  $\overline{PQ}$  le mur à l'intérieur duquel il se trouve. Donc  $\Sigma_P \mathcal{V}$  est un sous-complexe simplicial convexe de  $F_P$ .

Les trois propriétés (A), (B), (C) impliquent que  $\Sigma_P \mathcal{V}$  est un polytope de Weyl singulier dans  $\Sigma_P \mathbf{K}$ .

Ceci est vrai pour tout  $P \in \mathcal{V}$ , et  $\mathcal{V}$  est un ensemble convexe, d'où la conclusion. ◇

Supposons que l'ensemble  $\mathcal{V}$  se réduit à un point qu'on note  $O$ . Dans ce cas on peut préciser encore la forme de  $F \cap Hb(\rho)$ . On sait déjà que c'est un polytope.

L'inégalité  $|f_\rho(x) - f_\rho(y)| \leq d(x, y)$  entraîne que  $B(O, \mu) \subset F \cap Hb(\rho)$ .

D'autre part, dans  $\Sigma_O \mathbf{K}$ , à cause du fait que  $O$  est un minimum strict de  $f_\rho$  sur  $F$ , toutes les directions de  $F_O$  font avec  $\rho_O$  un angle  $> \frac{\pi}{2}$ . Donc chaque chambre  $W_O \subset F_O$ , dans l'appartement qui contient  $W_O$  et  $\overline{\rho_O}$ , vérifie  $d_O(\overline{\rho_O}, W_O) > \frac{\pi}{2}$ . D'après la Remarque 1.3.6 ceci entraîne que  $d_O(\overline{\rho_O}, W_O) \geq \frac{\pi}{2} + \delta'$ . Ainsi toutes les directions de  $F_O$  font avec  $\overline{\rho_O}$  un angle  $\geq \frac{\pi}{2} + \delta'$ .

Ceci et la Remarque 1.3.12 entraînent que pour tout rayon  $r \subset F$  d'origine  $O$  la fonction convexe  $f_\rho \circ r$  possède, au voisinage de zéro, une vitesse de croissance plus grande que  $\sin \delta'$ . D'où  $f_\rho \circ r(t) \geq -\mu + t \cdot \sin \delta'$ .

Alors si  $y$  est le point du rayon  $r$  qui se trouve sur  $H(\rho)$  il doit vérifier la relation  $-\mu + d(O, y) \cdot \sin \delta' \leq 0$ , donc  $d(O, y) \leq \frac{\mu}{\sin \delta'}$ .

On a obtenu  $B(O, \mu) \subset F \cap Hb(\rho) \subset B(O, \frac{\mu}{\sin \delta'})$ .

Le corollaire 3.3.8 permet alors de conclure que dans ce cas aussi  $F \cap H(\rho)$  avec sa métrique de longueur est nondistordue en  $F$ . Donc dans ce cas aussi  $F \cap H(\rho)$  vérifie les propriétés  $(P_1)$  et  $(P_2)$ .

Mais on a aussi une deuxième forme possible dans ce cas, qui correspond à la situation où  $\mathcal{V}$  contient au moins deux points : des "bandes" ou des "hyperprismes".

Par exemple, si  $\mathbf{K}$  est de rang 2, si les plats maximaux ont les droites de symétrie comme dans la Figure 18 et si  $\rho$  est un rayon singulier, parmi les formes que  $F \cap Hb(\rho)$  peut avoir, outre que des demi-plats, on a celles de la Figure 19 a, b, c, qui correspondent au cas  $\inf_F f_\rho = -\infty$ ,  $\inf_F f_\rho > -\infty$  et il est atteint en un seul point, et  $\inf_F f_\rho > -\infty$  et il est atteint en plusieurs points.

Dans les cas a) et b), on l'a déjà vu en toute généralité et il est évident sur les figures,  $F \cap H(\rho)$  est nondistordue dans  $F$ . Dans le cas c) on remarque qu'on ne peut pas relier deux points  $x$  et  $y$  de  $F \cap H(\rho)$  par une ligne polygonale de longueur comparable à  $d(x, y)$  tout en restant dans  $F \cap H(\rho)$ . Au contraire, il faut quitter le plat  $F$  pour trouver une telle ligne.

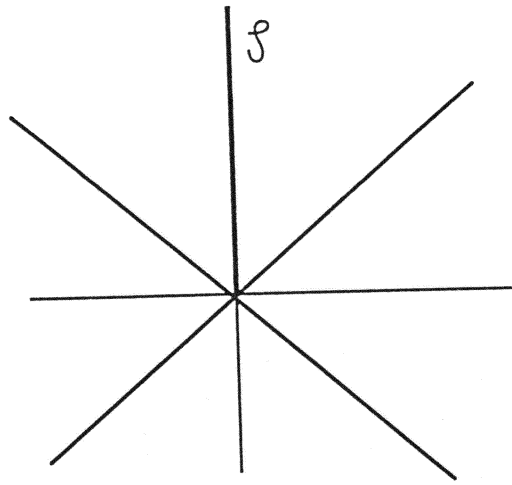


Figure 18

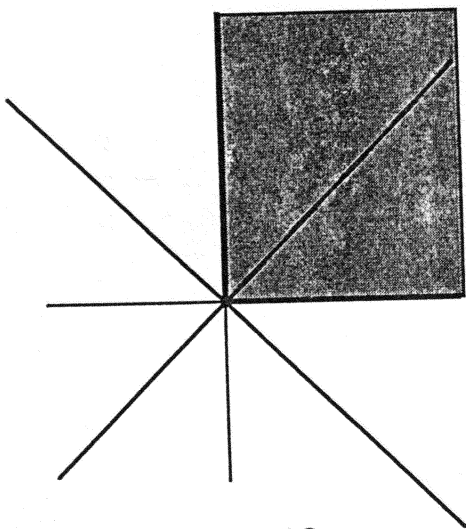


Figure 19 a

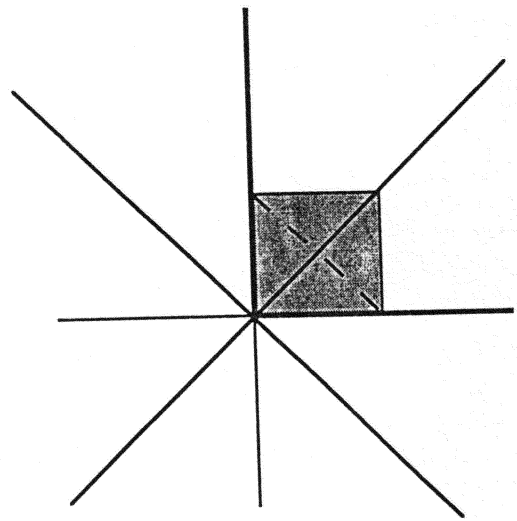


Figure 19 b

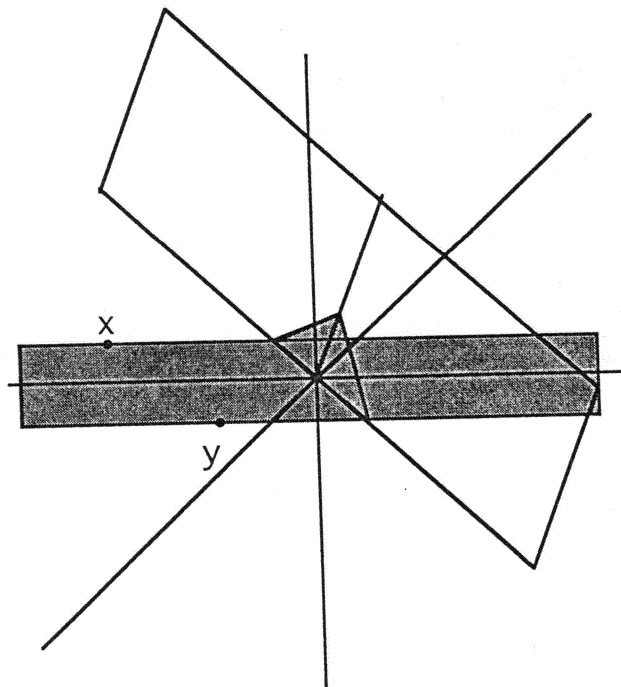


Figure 19 c

Si on reprend l'exemple discuté au début de la section 3.3.1, pour le cas 1) on a une horosphère nondistordue car dans chaque plat  $F$  tel que  $F \cap Hb(\rho) \neq \emptyset$  on peut remplacer le segment entre deux points de  $F \cap H(\rho)$  par une ligne polygonale de longueur comparable en  $F \cap H(\rho)$ .

Par contre, dans le cas 2), parmi les formes possibles pour  $F \cap Hb(\rho)$  apparaissent des bandes qu'on ne peut pas "traverser", comme dans l'exemple précédent. Dans ce cas  $F \cap H(\rho)$  est même disconnexe.

Donc, en fait, pour assurer la nondistorsion des horosphères, il suffit de mettre une condition sur  $\rho$  de sorte que parmi les formes possibles pour  $F \cap Hb(\rho)$  n'apparaissent pas des bandes "qu'on ne peut pas traverser". Dans la section suivante on énonce une telle condition suffisante.

### Nondistorsion des horosphères

Dans cette section on démontre le résultat suivant

**Proposition 3.3.11** *Soit  $\mathbf{K}$  un immeuble euclidien 4-épais de rang plus grand ou égal à 2 et soit  $\rho \subset \mathbf{K}$  un rayon qui vérifie la propriété géométrique suivante :*

( $\mathcal{I}$ ) *pour toute décomposition nontriviale de  $\mathbf{K}$  en produit,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$ ,  $\rho(\infty) \notin \partial_\infty \mathbf{K}_1$ .*

*Alors il existe un  $M$  positif qui ne dépend que de  $P(\rho(\infty)) = \theta$ , tel que l'horosphère  $H(\rho)$  munie de la métrique de longueur est  $M$ -nondistordue en  $\mathbf{K}$ .*

**Remarque 3.3.12** *La condition qu'on a mis dans cette proposition est évidemment trop forte. On l'a mis parce que c'est une condition spécifique vérifiée par les rayons dans le cône asymptotique d'un espace symétrique qui ont comme direction la direction associée à un réseau de  $\mathbb{Q}$ -rang un.*

*On peut proposer à la place deux conditions plus faibles qui sont probablement nécessaires et suffisantes :*

( $H_1$ ) *pour toute décomposition nontriviale de  $\mathbf{K}$  en produit,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$  telle que le rang de  $\mathbf{K}_1$  est un,  $\rho(\infty) \notin \partial_\infty \mathbf{K}_1$ .*

( $H_2$ ) *l'horosphère  $H(\rho)$  n'est pas disconnexe.*

### Preuve de la Proposition 3.3.11.

Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $H(\rho)$ . Il existe un plat  $F$  qui contient  $[x, y]$ .  $F$  se trouve dans un des trois cas suivants :

(a)  $\inf_F f_\rho = -\infty$

(b)  $\inf_F f_\rho > -\infty$  et il est atteint en un point unique de  $F$

(c)  $\inf_F f_\rho > -\infty$  et il est atteint en plusieurs points de  $F$

On a discuté les cas (a) et (b) et on a vu que dans ces cas  $d_\ell(x, y) \leq k \cdot d(x, y)$ , où  $k$  ne dépend que de  $\theta$ . Il reste à discuter le cas (c).

On se place donc dans ce cas.

On démontre l'inégalité :  $(\mathcal{IN})$   $d_\ell(x, y) \leq k \cdot d(x, y)$ , où  $d_\ell$  est la métrique de longueur de  $H(\rho)$ , par récurrence sur la dimension de  $\mathcal{V}$ .

Plus précisément, on démontre :

(P<sub>i</sub>) Pour chaque paire de points  $x$  et  $y$  de  $H(\rho)$  telle que  $[x, y]$  se trouve dans un plat maximal  $F$  pour lequel  $\inf_F f_\rho = -\mu > -\infty$  et l'ensemble  $\mathcal{V} = \{P \in F; f_\rho(P) = -\mu\}$  a la dimension  $i$ , on a l'inégalité :

$$(\mathcal{IN}_i) \quad d_\ell(x, y) \leq k_i \cdot d(x, y)$$

où  $k_i$  est une constante positive qui dépend de  $i$ .

Pour  $i = 0$  la propriété est déjà démontrée, car si  $\dim \mathcal{V} = 0$  on se trouve dans le cas (b). Supposons que (P<sub>j</sub>) est vraie pour  $j \leq i$ . On se place dans le cas (P<sub>i+1</sub>) : une paire de points  $x, y \in F \cap H(\rho)$ , où  $F$  est un plat maximal ayant  $\dim \mathcal{V} = i + 1$ . On choisit parmi les plats qui contiennent  $[x, y]$  le plat ayant  $\mathcal{V}$  de dimension minimale. Si on trouve un plat  $F$  ayant  $\dim \mathcal{V} \leq i$ , alors on peut conclure, par l'hypothèse de récurrence. Supposons que  $\dim \mathcal{V} = i + 1$ .

On réduit la preuve de l'inégalité  $(\mathcal{IN})$  pour  $x$  et  $y$  à la preuve de l'inégalité similaire pour une paire de points qui se trouve dans un plat ayant  $\dim \mathcal{V} \leq i$ . On fait ceci en deux étapes :

PREMIÈRE ÉTAPE : On choisit dans  $F$  un "bon" hyperplan singulier. On démontre que la plupart des plats qui intersectent  $F$  selon cet hyperplan ont  $\dim \mathcal{V} \leq i$ .

DEUXIÈME ÉTAPE : On réduit la preuve de l'inégalité  $(\mathcal{IN})$  pour  $x, y \in F$  à la preuve de l'inégalité  $(\mathcal{IN})$  pour une paire de points  $x', y'$  qui se trouve dans l'hyperplan choisi, donc dans des plats maximaux ayant  $\dim \mathcal{V} \leq i$ .

PREMIÈRE ÉTAPE : Soit  $\Phi$  le plat singulier minimal qui contient  $\mathcal{V}$ . La dimension de  $\Phi$  est  $i + 1$  ; ceci découle de la propriété (C) de  $\mathcal{V}$ .

Soit  $W$  une chambre de Weyl adjacente à  $\Phi$  et considérons tous les hyperplans d'appui de  $W$ . La propriété géométrique  $(\mathcal{I})$  que vérifie  $\rho$  implique le résultat suivant:

**Lemme 3.3.13** Parmi les hyperplans singuliers adjacents à  $W$ , il existe un hyperplan  $H^0$  qui ne contient pas  $\Phi$  et n'est pas orthogonal à  $\Phi$ .

**Preuve** On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il n'existe pas de tel hyperplan. Alors les deux classes  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  définies dans la suite constituent une partition pour l'ensemble des hyperplans singuliers adjacents à  $W$  :

$$\mathcal{H}_1 = \{H; \Phi \subset H\}; \quad \mathcal{H}_2 = \{H'; \Phi \not\subset H', \Phi \perp H'\}$$

On voit que  $\forall H \in \mathcal{H}_1, \forall H' \in \mathcal{H}_2, H \perp H'$ . Cette décomposition de l'ensemble des hyperplans adjacents à une chambre entraîne que le complexe de Coxeter modèle de l'immeuble se décompose aussi en  $E = E_1 \times E_2$  et que l'immeuble se décompose en un produit de deux immeubles  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$ , où  $\mathbf{K}_i$  est un immeuble euclidien de complexe de Coxeter modèle  $E_i$ .

Soit  $P \in \text{Int}_\Phi \mathcal{V}$ , où  $\text{Int}_\Phi \mathcal{V}$  est l'intérieur de  $\mathcal{V}$  dans  $\Phi$ , et soit  $[P, Q] \subset \mathcal{V}$  tel que  $\overline{PQ} \in \Sigma_P \mathcal{V}$  se trouve à l'intérieur d'un secteur de Weyl  $\sigma_P$  de  $\Phi_P$ .

La fonction  $f_\rho$  est constante sur  $[P, Q]$ , d'où  $\langle_P (\overline{PQ}, \overline{PQ}) = \frac{\pi}{2}$ . La Remarque 1.3.12 b implique qu'il existe un plat maximal  $F'$  qui contient  $\rho_P$  et  $[P, Q]$  ou éventuellement un sous-segment.

La deuxième axiome d'un immeuble euclidien non-discret (section 1.3.2) entraîne qu'il existe un isomorphisme de  $F$  sur  $F'$  qui préserve les hyperplans singuliers et qui fixe  $F \cap F'$ . Alors, dans  $F'$ ,  $\rho_P$  est orthogonal à un plat singulier du même type que  $\Phi$ . Aussi, si on considère une chambre de Weyl de sommet  $P$  adjacente à  $\Phi$ , les hyperplans singuliers adjacents à cette chambre se séparent, comme dans  $F$ , en deux familles orthogonales  $\mathcal{H}'_1$  et  $\mathcal{H}'_2$ .

Comme  $\rho \perp \Phi$ , il en découle que  $\rho \subset H', \forall H' \in \mathcal{H}'_2$ . Ceci implique que  $\rho(\infty) \in \partial_\infty \mathbf{K}_2$ , ce qui contredit la propriété (I).

◇

**Lemme 3.3.14** *Soit un hyperplan singulier  $H$  parallèle à  $H^0$ . Si  $H \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ , alors tous les demi-plats  $D$  de bord  $H$  ont  $\inf_D f_\rho = -\mu$  et tous les demi-plats de bord  $H$ , sauf au plus deux, ont  $\mathcal{V}_D = \{P; f_\rho(P) = \inf_D f_\rho\}$  de dimension  $\leq i$ .*

**Remarque 3.3.15** *Le Lemme et la 4-épaisseur de l'immeuble nous assurent que tout hyperplan singulier parallèle à  $H^0$  dans  $F$  et qui intersecte  $\mathcal{V}$  est contenu dans au moins un plats maximal  $F$  qui a  $\dim \mathcal{V} \leq i$ .*

**Preuve** Soit  $D$  un demi-plat de  $F$  de bord  $H$  tel que  $\mathcal{V}_D = \mathcal{V} \cap D$  est de dimension  $i+1$ . Alors, vu la manière dont on a choisi  $H$ , on a  $\mathcal{V} \cap D \not\subset \mathcal{V} \cap H$ .

S'il existe un demi-plat  $D'$  de bord  $H$  tel que  $D' \cap F = H$  et ayant  $\inf_{D'} f_\rho = -\mu_1 < \inf_H f_\rho$ , alors  $D$  et  $D'$  forment un plat et si  $P \in \mathcal{V}_{D'}, Q \in \mathcal{V} \setminus H$

il existe un  $R \in (P, Q) \cap H$ .

$$f_\rho(R) \leq t \cdot f_\rho(P) + (1-t) \cdot f_\rho(Q) = t \cdot (-\mu_1) + (1-t) \cdot (-\mu) < \inf_H f_\rho.$$

Donc tous les demi-plats  $D'$  de bord  $H$  tels que  $D' \cap F = H$  ont  $\inf_{D'} f_\rho = -\mu$ .

Supposons qu'il existe deux demi-plats de bord  $H$  tels que le  $\mathcal{V}_D$  est de dimension  $i+1$ ; notons les  $D_1$  et  $D_2$ .

Les ensembles  $F_1 = D \cup D_1$ ,  $F_2 = D \cup D_2$ ,  $F_{12} = D_1 \cup D_2$  sont des plats maximaux. On note  $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_{F_i}$  et  $\mathcal{V}_{12} = \mathcal{V}_{D_1} \cup \mathcal{V}_{D_2} = \{P \in F_{12}; f_\rho(P) = \inf_{F_{12}} f_\rho\}$ .

L'ensemble  $\mathcal{V}_{D_1}$  est un polyèdre de Weyl singulier de dimension  $i+1$ .

Comme  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_{D_1} \cup \mathcal{V}_D$  est un polyèdre de Weyl singulier de dimension  $i+1$  inclus dans un plat singulier de dimension  $i+1$ , il en découle que  $\mathcal{V}_{D_1}$  est inclus dans le demi-plat singulier qui est la prolongation de  $\Phi \cap D$  dans  $D_1$ .

De même on trouve que  $\mathcal{V}_{D_2}$  est inclus dans le demi-plat singulier qui est la prolongation de  $\Phi \cap D$  dans  $D_2$ .

Mais  $\Phi$  n'est pas symétrique par rapport à  $H$ , donc la prolongation de  $\Phi \cap D$  dans  $D_1$  et la prolongation de  $\Phi \cap D$  dans  $D_2$  ne sont pas deux demi-plats singuliers opposés. Ceci contredit le fait que  $\mathcal{V}_{12} = \mathcal{V}_{D_1} \cup \mathcal{V}_{D_2}$  est un polyèdre de Weyl singulier de dimension  $i+1$  inclus dans un plat singulier de dimension  $i+1$ .

Donc il existe au plus un demi-plat  $D'$  de bord  $H$  tel que  $D' \cap D = H$  ayant  $\mathcal{V}_D = \{P; f_\rho(P) = \inf_D f_\rho\}$  de dimension  $i+1$ .

◇

**Conséquence** On peut se placer dans le cas où il existe un  $z \in [x, y]$  tel que l'hyperplan  $H$  parallèle à  $H^0$  qui passe par  $z$  intersecte  $\text{Int}_\Phi \mathcal{V}$ .

**Preuve.** Soient  $H^x$  et  $H^y$  les hyperplans parallèles à  $H^0$  qui passent par  $x$  et  $y$  respectivement.

Supposons qu'un d'entre eux sépare  $(x, y)$  et  $\text{Int}_\Phi \mathcal{V}$ .

Alors il existe un hyperplan  $H$  parallèle à  $H^0$  qui sépare  $(x, y)$  et  $\text{Int}_\Phi \mathcal{V}$  et tel que le demi-plat  $D$  de  $F$  de bord  $H$  qui contient  $(x, y)$  vérifie  $\inf_D f_\rho = \inf_F f_\rho = -\mu$ ,  $\dim(\mathcal{V} \cap D) \leq i$ .

Le Lemme 3.3.14 et la propriété de l'immeuble d'être 4-épais impliquent qu'il existe un demi-plat  $D'$  de bord  $H$  et tel que  $D' \cap F = H$ , ayant  $\inf_{D'} f_\rho = \inf_F f_\rho = -\mu$ ,  $\dim \mathcal{V}_{D'} \leq i$ .

Alors  $F' = D \cup D'$  est un plat qui contient  $[x, y]$  tel que  $\inf_{F'} f_\rho = -\mu$  est atteint dans un ensemble  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_D \cup \mathcal{V}_{D'}$  de dimension au plus  $i$ , ce qui

contredit le choix de  $F$ .

Si ni  $H^x$  ni  $H^y$  ne séparent  $(x, y)$  et  $\text{Int}_\Phi \mathcal{V}$ , il existe un  $z \in (x, y)$  tel que  $H^z \cap \text{Int}_\Phi \mathcal{V} \neq \emptyset$ .

◇

Dans la suite on note  $H^z$  par  $H$ .

DEUXIÈME ÉTAPE : On réduit la preuve de l'inégalité  $(\mathcal{IN})$  pour  $x$  et  $y$  à la preuve de  $(\mathcal{IN})$  pour une paire  $x'$  et  $y'$  dans  $H \cap H(\rho)$ . Pour ceci on a besoin d'un résultat simple sur les hyperplans de symétrie dans un complexe de Coxeter.

**Lemme 3.3.16** *Soit  $S$  un complexe de Coxeter et  $p_S : S \rightarrow \Delta$  sa projection définie par un marquage fixé, soit  $W$  une chambre,  $\mathcal{M}$  un de ses murs de codimension 1, et  $\sigma$  un autre mur qui n'est pas contenu dans  $\mathcal{M}$ . Si  $\mathcal{H}$  est l'hyperplan singulier qui contient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{H}'$  est un hyperplan qui contient  $\sigma$ , alors  $p_S(\mathcal{H}) \not\subset p_S(\mathcal{H}')$ .*

**Preuve.** Si  $p_S(\mathcal{H}) \subset p_S(\mathcal{H}')$ , alors  $\mathcal{H}'$  contient un mur de codimension 1, donc c'est un hyperplan singulier. Par des symétries qui préservent  $\sigma$  on peut transformer  $\mathcal{H}'$  en un hyperplan adjacent à  $W$ , donc on suppose qu'on est déjà dans ce cas.

L'hyperplan  $\mathcal{H}'$  contient un mur de codimension 1 de  $W$ , différent de  $\mathcal{M}$  car il contient  $\sigma$ , qu'on note  $\mathcal{M}'$ .

Les symétries par rapport aux hyperplans adjacents de  $W$ ,  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  engendrent le groupe de Weyl du complexe  $S$ . On note  $s$  et  $s'$  les symétries par rapport à  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  respectivement.

Du fait que  $p_S(\mathcal{M}) \subset p_S(\mathcal{H}')$ , il découle qu'il existe un élément  $g$  du groupe de Weyl tel que  $g\mathcal{M} \subset \mathcal{H}'$ , donc tel que  $g\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ .

On prend  $g$  de longueur minimale,  $g = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}$ . On sait alors que la suite de chambres :  $W, s_{i_1} W, s_{i_1} s_{i_2} W, \dots, s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l} W$  est une galerie minimale entre  $W$  et  $g\mathcal{M}$ . Cette galerie traverse tous les hyperplans singuliers qui séparent  $W$  et  $g\mathcal{M}$ , donc  $W$  et  $gW$ ,  $\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_l\}$  et seulement ces hyperplans ([Br], p.73, propriété (c)).

$W$  et  $g\mathcal{M}$  ne sont pas séparés par  $\mathcal{H}'$  et on peut supposer aussi qu'ils ne sont pas séparés par  $\mathcal{H}$ , car sinon on échange  $W$  avec  $sW$ . Ainsi  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  ne se trouvent pas parmi les  $\mathcal{H}_i$ .

Alors  $g\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ , d'où  $s' = gsg^{-1}$ , ce qui implique  $s'g = gs$ . Il vient  $s'gW = gsW$ .

Mais  $s'gW$  est séparé de  $W$  seulement par les hyperplans  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_l, \mathcal{H}'$ , tandis que  $gsW$  est séparé de  $W$  par  $\mathcal{H}$  aussi. D'où la contradiction.

◇



Dans la suite on choisit une bonne direction dans l'hyperplan singulier  $H$  qu'on a trouvé dans la première étape.

**Lemme 3.3.17** *Soit  $S$  le complexe de Coxeter associé à  $\partial_\infty \mathbf{K}, \Sigma_x \mathbf{K}$  et soit  $p_S : S \rightarrow \Delta$ . Soit  $q \in S$  tel que  $p_S(q) = \theta$ . Si on prend l'hyperplan orthogonal à  $q$ ,  $\mathcal{H}' = \{p \in S; d_S(p, q) = \frac{\pi}{2}\}$ ,  $\psi \subset \mathcal{H}'$  le plat singulier qui correspond aux directions du plat singulier  $\Phi$  et  $\mathcal{H}$  l'hyperplan singulier adjacent à une même chambre que  $\psi$  qui correspond aux directions de  $H^0$ , alors :*

$\exists \alpha \in p_S(\mathcal{H})$  tel que pour tout  $p \in \mathcal{H}$  avec  $p_S(p) = \alpha$  on a :  
 $d_S(p, \mathcal{H}') \geq \varepsilon > 0$ , où  $\varepsilon$  ne dépend que de  $\theta$  et de  $\mathcal{H}$ .

**Preuve.**

Ceci est dû au fait que  $p_S(\mathcal{H}) \not\subset p_S(\mathcal{H}')$  et que  $p_S$  est une contraction.  $\diamond$

On finit la démonstration par récurrence de la Proposition 3.3.11 en ramenant la preuve de l'inégalité  $(\mathcal{IN})$  pour  $x$  et  $y$  à la preuve de  $(\mathcal{IN})$  pour une paire  $x'$  et  $y'$  dans  $H \cap H(\rho)$ .

On considère une droite  $d \subset H$  qui passe par  $z$ , de direction  $\alpha$ , c'est-à-dire telle que si  $r$  et  $r'$  sont les rayons déterminés sur  $d$  par  $z$ , alors un de ces deux rayons a la direction  $\alpha$ . Dans le plat maximal  $F$  on considère le plan qui contient  $[x, y]$  et  $d$ . Ce plan coupe  $H(\rho)$  selon une ligne polygonale (voir la Figure 20). Soient  $[x, A]$  et  $[y, B]$  des segments de cette ligne polygonale qui passent par  $x$  et  $y$ . La droite support de  $[x, A]$ ,  $d_x$ , coupe la droite  $d$  en un point  $u$ . Elle ne peut pas être parallèle à  $d$  car alors un des deux rayons déterminés sur  $d_x$  par  $x$  aurait à la fois sa direction égale à  $\alpha$  et dans  $p_S(\mathcal{H}')$ , ce qui est impossible.

De même la droite support de  $[y, B]$  coupe  $d$  en un point  $v$ .

La ligne polygonale elle-même coupe  $d$  en  $x'$  et  $y'$  ( voir la Figure 20 ).

$p_u(\overline{ux}) = p_x(\overline{xu}) \in p_S(\mathcal{H}')$  et  $p_u(\overline{uz}) = p_z(\overline{zu}) = \alpha$ , d'où  $\langle_u(x, z) \geq \varepsilon$ .

De même,  $\langle_v(y, z) \geq \varepsilon$ .

Il s'ensuit que

$$(4.10) \quad d(x, u) + d(u, z) \leq C_1 \cdot d(x, z),$$

où  $C_1 = \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}$ , et de même que :

$$(4.11) \quad d(y, v) + d(v, z) \leq C_1 \cdot d(y, z).$$

L'addition des deux relations ci-dessus nous donne :

$$(4.12) \quad d(x, u) + d(u, v) + d(v, y) \leq C_1 d(x, y).$$

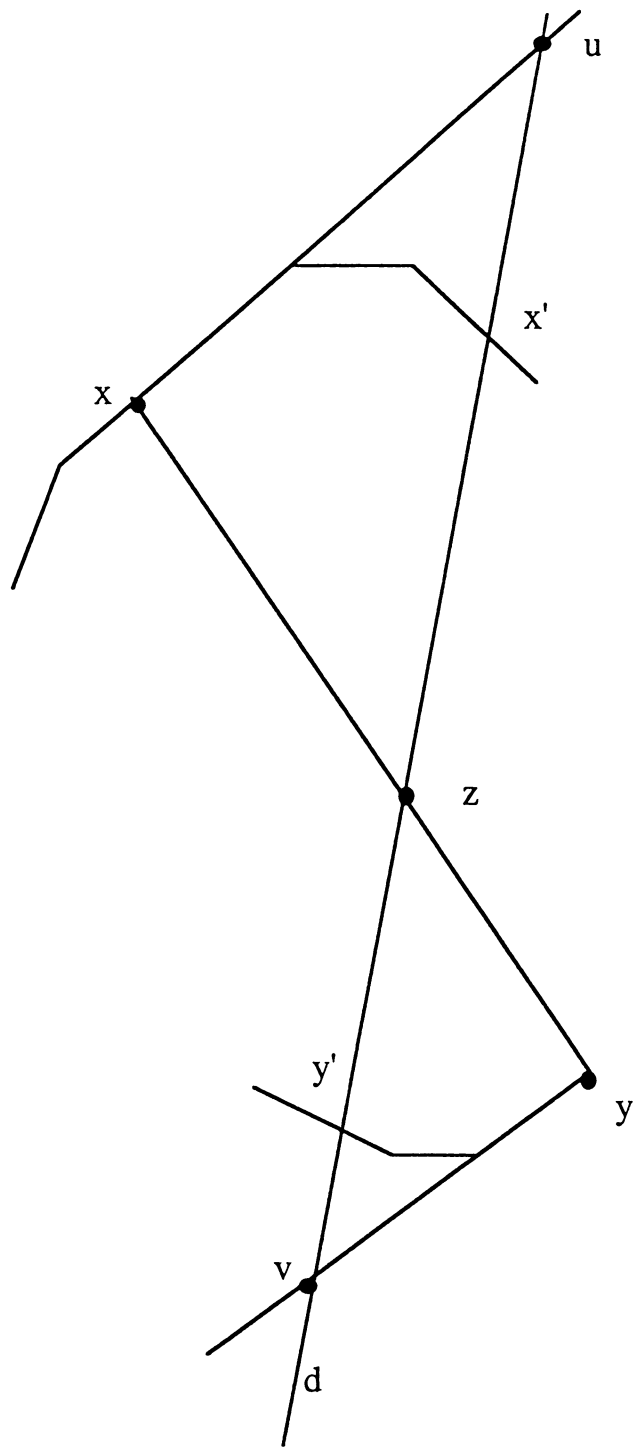


Figure 20

Le segment  $[x', y']$  est inclus dans  $H \cap H(\rho)$ . Or, d'après le Lemme 3.3.14 et la propriété de l'immeuble d'être 4-épais, il existe deux demi-plats d'intérieurs disjoints et de bord  $H$ ,  $D$  et  $D'$  tels que  $\inf_D f_\rho = \inf_{D'} f_\rho = -\mu$  et  $\dim \mathcal{V}_D = \dim \mathcal{V}_{D'} = i$ .

Alors le plat  $F' = D \cup D'$  a un  $\mathcal{V}'$  de dimension  $i$ , donc, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :  $d_\ell(x', y') \leq k_i \cdot d(x', y')$ .

D'autre part, on a :

$$(4.13) \quad d_\ell(x, y) \leq d_\ell(x, x') + d_\ell(x', y') + d_\ell(y', y) \leq k_i \cdot (d_\ell(x, x') + d(x', y') + d_\ell(y', y))$$

Or on voit que :

$$(4.14) \quad d_\ell(x, x') + d(x', y') + d_\ell(y, y') \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y).$$

Les relations (4.12), (4.13) et (4.14) impliquent que :

$$d_\ell(x, y) \leq C_1 \cdot k_i \cdot d(x, y).$$

On a donc prouvé  $(\mathbf{P}_{i+1})$  avec  $k_{i+1} = C_1 \cdot k_i$ . ◇

**Remarque 3.3.18** *On signale la différence essentielle entre les cas (a) et (b) d'une part et le cas (c) de l'autre part. Si on prend une paire de points  $x$  et  $y$  dans  $H(\rho) \cap F$  qui se trouve dans les cas (a) ou (b), alors on peut trouver une ligne polygonale entre  $x$  et  $y$  de longueur comparable à  $d(x, y)$  toujours dans  $H(\rho) \cap F$ , tandis que si  $x$  et  $y$  sont dans le cas (c), on peut être forcé de quitter le plat  $F$  pour trouver une telle ligne polygonale.*

### 3.3.2 Le théorème de Lubotzky–Mozes–Raghunathan pour des réseaux de $\mathbb{Q}$ -rang 1

Le résultat sur la nondistorsion des horosphères dans des immeubles euclidiens obtenu dans la section précédente implique un résultat similaire sur la nondistorsion des horosphères dans des espaces symétriques :

**Proposition 3.3.19** *Soit  $X$  un espace symétrique de rang plus grand ou égal à 2 et soit  $r \subset X$  un rayon qui vérifie la propriété géométrique suivante*

( $\mathcal{I}_0$ ) Si  $W$  est une chambre de Weyl qui contient  $r$  et  $\pi$  est un système fondamental de racines associé à  $W$  dans un plat maximal qui contient  $W$ , pour toute décomposition en systèmes orthogonaux de racines,  $\pi = \pi_1 \sqcup \pi_2$ , on ne peut pas avoir

$$\beta(r) = 0, \forall \beta \in \pi_1.$$

Alors il existe un  $M$  positif qui ne dépend que de  $p(r(\infty)) = \theta$ , tel que l'horosphère  $H(r)$  avec la métrique de longueur est  $M$ -nondistordue.

**Remarque 3.3.20** On a des correspondances biunivoques entre les décompositions d'un système fondamental de racines en systèmes orthogonaux de racines, les décompositions du complexe de Coxeter associé à  $X$  en produit,  $E = E_1 \times E_2$ , et les décompositions de l'espace symétrique en produit,  $X = X_1 \times X_2$ . Donc une formulaison équivalente pour la propriété ( $\mathcal{I}_0$ ) est :

( $\mathcal{I}'_0$ ) Pour toute décomposition de l'espace symétrique en produit,  $X = X_1 \times X_2$ ,  $r(\infty) \notin \partial_\infty X_1$ .

**Remarque 3.3.21** Les rayons  $\gamma r_i$  qui apparaissent dans la Proposition 3.3.19 vérifient cette propriété, d'après la Proposition 3.2.3.

**Démonstration de Proposition 3.3.19** On raisonne par l'absurde et on suppose qu'on a une suite d'horosphères  $H(r_n)$ ,  $p(r_n(\infty)) = \theta$  et une suite de paires de points  $x_n, y_n \in H(r_n)$  tels que  $d_\ell(x_n, y_n) > n \cdot d(x_n, y_n)$ .

En appliquant des isométries on peut se ramener à une seule horosphère,  $H(r)$ , où  $p(r(\infty)) = \theta$ . On note  $d(x_n, y_n)$  par  $d_n$ .

Pour chaque  $n$  on choisit le plus petit  $d_n$  pour lequel il existe des  $x_n$  et  $y_n$  vérifiant  $d(x_n, y_n) = d_n$ ,  $d_\ell(x_n, y_n) \geq n \cdot d_n$ . On voit que  $d_n \rightarrow \infty$  car si on avait  $d_n \leq d$ , alors  $d_\ell(x_n, y_n) \leq e^d d(x_n, y_n)$ .

Dans  $\mathbf{K} = \text{Con}_\omega(X, (d_n), x_0)$  on a les points  $x = [x_n]$  et  $y = [y_n]$ ,  $d(x, y) = 1$ . De plus,  $[H(r)] = H(\rho)$ , où  $\rho = [r]$ .

La propriété ( $\mathcal{I}_0$ ) du rayon  $r$  entraîne que  $\rho$  a la propriété ( $\mathcal{I}$ ) dans  $\mathbf{K}$ .

On a vu alors dans la preuve de la Proposition 3.3.11 qu'on peut trouver une ligne polygonale  $x = P_0, P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1} = y$  incluse dans  $H(\rho)$  et telle que :

$$(4.15) \quad \sum_{i=1}^k d(P_{i-1}, P_i) \leq k \cdot d(x, y) = k.$$

Chaque segment  $[P_i, P_{i+1}]$  se trouve dans une face d'une hypersurface polytopique obtenue comme  $F \cap H(\rho)$ , où  $F$  est un plat maximal, et chaque

face d'une telle hypersurface est incluse dans un plat maximal qui contient une asymptote de  $\rho$  (voir la Remarque 3.3.5).

Donc pour chaque  $[P_i, P_{i+1}]$  il existe un plat  $F_i$  tel que  $[P_i, P_{i+1}] \subset F_i$  et  $\rho(\infty) \in F_i(\infty)$ .

Ainsi on peut voir  $[P_i, P_{i+1}]$  comme ensemble limite d'une suite de segments  $[\overline{P_i^n}, \overline{P_{i+1}^n}]$  inclus dans des plats  $F_i^n$  qui contiennent une asymptote de  $r$ . Dans chaque  $F_i^n$  la trace de  $H(r)$  est un hyperplan et on peut supposer que  $[\overline{P_i^n}, \overline{P_{i+1}^n}]$  se trouve dans cet hyperplan. Donc  $d(\overline{P_i^n}, \overline{P_{i+1}^n}) = d_\ell(\overline{P_i^n}, \overline{P_{i+1}^n})$ .

On a trouvé pour chaque  $P_i$  deux suites qui le représentent :  $(\overline{P_i^n})$  et  $(\widetilde{P_i^n})$ . Pour  $i = 0$  on peut considérer que  $\overline{P_0^n} = P_0^n$  et pour  $i = k + 1$ ,  $\widetilde{P_{k+1}^n} = P_{k+1}^n$ .

Donc on a :

$$(4.16) \quad \lim_{\omega} \frac{d(\overline{P_i^n}, \widetilde{P_i^n})}{d_n} = 0.$$

Avec la manière dont on a choisi  $d_n$ , ceci implique que :

$$d_\ell(\overline{P_i^n}, \widetilde{P_i^n}) \leq n \cdot d(\overline{P_i^n}, \widetilde{P_i^n}).$$

On a la suite d'inégalités :  $n \cdot d_n < d_\ell(x_n, y_n) = d_\ell(P_0^n, P_{k+1}^n) \leq d_\ell(P_0^n, \overline{P_0^n}) + d_\ell(\overline{P_0^n}, \overline{P_1^n}) + d_\ell(\overline{P_1^n}, \widetilde{P_1^n}) + d_\ell(\widetilde{P_1^n}, \overline{P_2^n}) + \dots + d_\ell(\overline{P_k^n}, \overline{P_{k+1}^n}) + d_\ell(\overline{P_{k+1}^n}, P_{k+1}^n) \leq n \cdot [d(P_0^n, \overline{P_0^n}) + \dots + d(\overline{P_i^n}, \widetilde{P_i^n}) + \dots + d(\overline{P_{k+1}^n}, P_{k+1}^n)] + d(\overline{P_0^n}, \overline{P_1^n}) + d(\overline{P_1^n}, \overline{P_2^n}) + \dots + d(\overline{P_k^n}, \overline{P_{k+1}^n})$ .

On a obtenu donc :

$$n \cdot d_n \leq n \cdot [d(P_0^n, \overline{P_0^n}) + \dots + d(\overline{P_1^n}, \widetilde{P_1^n}) + \dots + d(\overline{P_{k+1}^n}, P_{k+1}^n)] + d(\overline{P_0^n}, \overline{P_1^n}) + d(\overline{P_1^n}, \overline{P_2^n}) + \dots + d(\overline{P_k^n}, \overline{P_{k+1}^n}).$$

Si on divise par  $n \cdot d_n$  l'inégalité précédente et si on passe à la limite pour  $n \rightarrow \infty$ , vu les relations (4.15) et (4.16), on obtient  $1 \leq 0$ , donc une contradiction.

◇

**Conclusion :** Soit  $\Gamma$  un réseau de  $\mathbb{Q}$ -rang un dans un groupe  $G$  semisimple de  $\mathbb{R}$ -rang plus grand ou égal à deux. Il existe un  $M > 0$  tel que toutes les horosphères qui delimitent l'espace  $X_0$  associé à  $\Gamma$ , avec leurs métriques de longueur respectives, sont  $M$ -nondistordues. Il s'ensuit qu'on a la même chose pour  $X_0$  dans  $X$  et pour  $\Gamma$  dans  $G$ .

### 3.4 Une estimation pour la fonction de remplissage

Dans cette section on va regarder seulement le cas d'un réseau de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 tel que la direction associée  $\theta$  vérifie la propriété suivante :

(II) *Pour tout  $x \in S$  tel que  $p_S(x) = \theta$ , il n'y a aucun plat singulier  $\Phi$  orthogonal à  $x$ , c'est-à-dire tel que  $d_S(x, y) = \frac{\pi}{2}, \forall y \in \Phi$ .*

On peut trouver dans l'article de Tits ([Ti]<sub>2</sub>), qui donne une classification des  $\mathbb{Q}$ -structures, quels sont les réseaux de  $\mathbb{Q}$ -rang un qui vérifient cette propriété et quels sont les réseaux qui ne la vérifient pas.

On essaie de trouver une estimation pour la fonction de Dehn de tels réseaux.

Le théorème 2.2.14 nous montre que pour majorer l'ordre de la fonction de Dehn de  $\Gamma$  il suffit de majorer l'ordre de la fonction de remplissage pour tout  $Con_\omega(\Gamma, d_\omega)$ .  $(\Gamma, d_\omega)$  est quasi-isométrique à  $(X_0, d_\ell)$ , qui, d'après le théorème de Lubotzky–Mozes–Ragunathan, est bilipschitz équivalent à  $(X_0, d)$ , où  $d$  est la métrique induite par celle de  $X$ . Le théorème 2.2.14 nous montre alors qu'il suffit de majorer l'ordre de la fonction de remplissage pour les  $Con_\omega(X_0, d)$ .

On a le résultat suivant :

**Théorème 3.4.1** *Soit  $\Gamma$  un réseau irréductible de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 dans un groupe  $G$  semi-simple de  $\mathbb{R}$ -rang strictement plus grand que 2 et soient  $\theta$  la direction associée à  $\Gamma$  et  $X_0$  l'espace associé à  $\Gamma$ . Si  $\theta$  vérifie la propriété (II), alors dans tous les cônes asymptotiques de  $(X_0, d)$ , l'ordre de la fonction de remplissage est au plus cubique.*

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes.

#### 3.4.1 Remplissage des courbes dans des intersections des plats avec des horosphères

On démontre la propriété suivante :

**Proposition 3.4.2** *Soit  $K$  un immeuble euclidien de rang plus grand ou égal à 2. Soit  $F$  un appartement de  $K$  et  $\rho$  un rayon dont la direction  $\theta$  vérifie la propriété (II). Si  $F \cap H(\rho) \neq \emptyset$  alors  $F \cap H(\rho)$  est une hypersurface polytopique qui vérifie les propriétés suivantes :*

(P<sub>1</sub>) Si  $x$  et  $y$  sont des points de  $F \cap H(\rho)$  on peut trouver dans  $F \cap H(\rho)$  une ligne polygonale  $\mathcal{L}(x, y)$  entre  $x$  et  $y$ , telle que :

$$\text{long}\mathcal{L}(x, y) \leq k \cdot d(x, y),$$

où  $k$  est une constante qui ne dépend que de  $\theta$ .

(P<sub>2</sub>) Si le rang de l'immeuble est plus grand ou égal à 3, pour toute courbe  $c : S^1 \rightarrow F \cap H(\rho)$  de longueur  $\ell$  on a que l'aire de remplissage de  $c$  dans  $F \cap H(\rho)$ ,  $A(c) \leq b \cdot \ell^2$ , où la définition de l'aire  $A(c)$  est celle de la section 2.2.1 et où  $b$  est une constante qui ne dépend que de  $\theta$ .

**Preuve** On démontre que le fait que  $\theta$  vérifie la propriété (II) implique que  $F$  peut se trouver, par rapport à  $Hb(\rho)$ , seulement dans les cas  $\inf_F f_\rho = -\infty$  ou  $\inf_F f_\rho = -\mu > -\infty$  et il est atteint en un seul point. Supposons donc que  $\inf_F f_\rho = -\mu > -\infty$  et montrons que la valeur minimale est atteinte en un seul point. Supposons qu'il existe deux points distincts  $O, O_1 \in F$  tels que  $f_\rho(O) = f_\rho(O_1) = -\mu$ . Alors la même propriété est vérifiée pour tous les points du segment  $[O, O_1]$ , et ce segment se trouve dans un plat singulier, d'après le lemme 3.3.9. Donc, si on fixe un  $x \in (O, O_1)$ , le sous-segment  $(x, O]$  est contenu dans l'intérieur d'un mur de chambre de Weyl de sommet  $x$ , et on note ce mur  $\mathcal{M}$ . L'ensemble des directions  $M_x = \{\overline{xy}; y \in \mathcal{M} \setminus \{x\}\}$  est un mur dans l'immeuble sphérique  $\Sigma_x \mathbf{K}$ . Le fait que, pour tout  $y \in M$ ,  $f_\rho(y) \geq -\mu$  entraîne que  $\angle_x(\overline{\rho_x}, \overline{xy}) \geq \frac{\pi}{2}, \forall y \in M \setminus \{x\}$ .

Ainsi on a  $\angle_x(\overline{\rho_x}, \overline{xO}) = \frac{\pi}{2}, \overline{xO}$  direction intérieure de  $M_x$ , et

$$\angle_x(\overline{\rho_x}, \overline{xy}) \geq \frac{\pi}{2}, \forall y \in M \setminus \{x\}.$$

La Proposition 1.3.7 implique dans notre cas que  $\angle_x(\overline{\rho_x}, \overline{xy}) = \frac{\pi}{2}, \forall \overline{xy} \in M_x$  et que, dans l'appartement de  $\Sigma_x \mathbf{K}$  qui contient à la fois  $\overline{\rho_x}$  et  $M_x$ ,  $\overline{\rho_x}$  est orthogonal au plat singulier minimal qui contient  $M_x$ . Or ceci contredit la propriété (II) de  $\theta$ .

Donc le point  $O$  de  $F$  qui minimise  $f_\rho$  est unique.

Il ne reste qu'à conclure, vu la discussion de la section 3.3.1 :

Pour tout plat  $F$  tel que  $F \cap Hb(\rho) \neq \emptyset$  on a les propriétés (P<sub>1</sub>) et (P<sub>2</sub>).

### 3.4.2 Cylindre sur un lacet dans une direction régulière

On commence la preuve du théorème 3.4.1. Soit  $\mathbf{K}_0 = \text{Con}_\omega(X_0, (d_n), x_0)$  un des cônes asymptotiques de  $X_0$ . On note aussi  $\mathbf{K} = \text{Con}_\omega(X, (d_n), x_0)$ .

Soit  $c : S^1 \rightarrow \mathbf{K}_0$  une courbe de longueur  $\ell \geq 1$  paramétrée proportionnellement à la longueur. On veut prouver que  $A(c) \leq C \cdot \ell^3$ , où  $C$  est une constante positive.

PREMIERE ÉTAPE. On réduit le problème de remplissage de  $c$  au remplissage d'une courbe  $c'$  qui se trouve dans une réunion finie de plats maximaux. On utilise, pour construire  $c'$ , le résultat suivant :

**Lemme 3.4.3** *Soit un plat maximal  $F \subset \mathbf{K}$  et deux points  $A$  et  $B$  dans  $F \cap \mathbf{K}_0$ .*

*Il existe une ligne polygonale  $\mathcal{L}(A, B)$  entre  $A$  et  $B$  dans  $F \cap \mathbf{K}_0$ , de longueur plus petite que  $k \cdot d(A, B)$ , où  $k$  est la constante de la Proposition 3.4.2,  $(\mathbf{P}_1)$ .*

**Preuve** On obtient  $\mathcal{L}(A, B)$  à partir de la géodésique  $[A, B]$  en remplaçant chaque sous-segment de  $[A, B]$  qui traverse une horoboule  $Hb(\rho)$ ,  $\rho \in \mathcal{R}$ , par une ligne polygonale  $\mathcal{L}(x, y) \subset H(\rho) \cap F$  de longueur plus petite que  $k \cdot d(x, y)$ . On peut faire ceci d'après  $(\mathbf{P}_1)$ .

◇

On choisit une partition  $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$  de  $S^1$  telle que, si  $P_i = c(Q_i)$ , la longueur de l'arc de  $c$  compris entre  $P_i$  et  $P_{i+1}$  est plus petite que  $\lambda$ , où  $\lambda$  est une constante suffisamment petite. On voit que  $n \leq \frac{2 \cdot \ell}{\lambda}$ .

Chaque géodésique  $[P_i, P_{i+1}]$  se trouve dans un plat  $F_i$ . Dans  $F_i$  on la remplace par une ligne polygonale  $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}(P_i, P_{i+1})$  comme dans le Lemme précédent. On a  $\text{long}(\mathcal{L}_i) \leq k \cdot \lambda$ .

On note  $c'$  la courbe obtenue comme réunion des  $\mathcal{L}_i$ . On voit que  $\text{long}(c') \leq k \cdot \ell$ . Si  $\lambda$  est suffisamment petit,  $\mathcal{L}_i$  et l'arc de  $c$  compris entre  $P_i$  et  $P_{i+1}$  forment une maille de longueur plus petite que 1 et on a donc :

$$A_1(c) \leq n + A_1(c') \leq \frac{2}{\lambda} \cdot \ell + A_1(c').$$

Il suffit donc de montrer que  $c'$  a un remplissage cubique.

DEUXIEME ÉTAPE. Dans la suite on réduit le remplissage de  $c'$  au remplissage d'une couronne.

Par chaque point de  $\mathbf{K}_0$  passe un plat maximal entièrement contenu dans  $\mathbf{K}_0$ . Ceci est dû au fait qu'il existe au moins un plat maximal entièrement contenu dans  $\mathbf{K}_0$  ([Mo], chapitre 8, lemme 8.3) et que  $\mathbf{K}_0$  est un espace homogène.

Soit  $F \subset \mathbf{K}_0$  un tel plat qui passe par  $P_0$ . Soit une chambre de Weyl dans  $F$  de sommet  $P_0, W$ . On va choisir un rayon issu de  $P_0$  dans  $W$  ayant une direction spéciale, donnée par le lemme suivant.



**Lemme 3.4.4** Dans le complexe de Coxeter modèle  $S$ , soit  $q \in S$  tel que  $p_S(q) = \theta$  et soit  $\mathcal{H} = \{p \in S; d_S(p, q) = \frac{\pi}{2}\}$  l'hyperplan orthogonal à  $q$ . Il existe un  $\beta \in \text{Int}\Delta$  tel que  $d(\beta, \partial\Delta) \geq \delta_0$  et  $d(\beta, p_S(\mathcal{H})) \geq \delta_0$ , où  $\delta_0$  ne dépend que de  $S$  et de  $\theta$ .

**Preuve** C'est la conséquence immédiate du fait que  $p_S(\mathcal{H})$  est un sous-ensemble de codimension 1 de  $\Delta$ .  $\diamond$

L'intérêt d'avoir une telle direction découle du résultat suivant :

**Lemme 3.4.5** Soit  $\rho$  un rayon de  $\mathbf{K}$  tel que  $P(\rho(\infty)) = \theta$  et soit un segment quelconque  $[x, y]$  de  $\mathbf{K}$ . Si  $p_x(\overline{xy}) = \beta$ , alors il existe un  $[x, y'] \subset [x, y]$  sur lequel  $f_\rho$  croît ou décroît strictement avec une vitesse  $\geq \sin \delta_0$ .

**Preuve**  $<_x(\overline{xy}, \overline{\rho_x})$  est la distance entre  $\overline{xy}$  et  $\overline{\rho_x}$  dans l'immeuble sphérique  $\Sigma_x \mathbf{K}$ , qui coïncide avec la distance dans un appartement qui contient les deux. Alors  $<_x(\overline{xy}, \overline{\rho_x})$  se trouve dans l'ensemble fini de distances dans le complexe de Coxeter modèle :

$$\delta(\theta, \beta) = \{d_S(x_1, x_2); x_1, x_2 \in S; p_S(x_1) = \theta, p_S(x_2) = \beta\}$$

Si on écrit les éléments de  $\delta(\beta, \theta)$  en ordre croissant, on a deux éléments consécutifs de la forme  $\frac{\pi}{2} - \delta_1, \frac{\pi}{2} + \delta_2$  où  $\delta_1 \geq \delta_0, \delta_2 \geq \delta_0$ .

Donc on a  $<_x(\overline{xy}, \overline{\rho_x}) \leq \frac{\pi}{2} - \delta_0$  ou  $<_x(\overline{xy}, \overline{\rho_x}) \geq \frac{\pi}{2} + \delta_0$ .

D'après la Remarque 1.3.12 b, il existe un  $[x, y'] \subset [x, y]$  qui forme avec  $\rho_x$  un triangle euclidien. On voit alors que sur  $[x, y']$ ,  $f_\rho$  croît ou décroît à la vitesse  $\geq \sin \delta_0$ .  $\diamond$

On choisit donc un rayon  $r$  issu de  $P_0$  dans  $W$  ayant la direction  $\beta$ . On note  $b = r(\infty)$ . On va construire un cylindre sur  $c$  de direction  $b$ .

Pour tout point  $Q \in c'$  on prend le rayon  $r_Q = [Q, b)$ . D'après [KIL], lemme 4.6.3,  $r_Q$  est contenu dans  $F$  à partir d'un point  $M_Q \in r_Q$  qui se trouve à une distance  $d(Q, M_Q) \leq \frac{d(Q, F)}{\sin \delta_0} \leq \frac{k \cdot \ell}{\sin \delta_0}$ . Evidemment, le rayon  $[M_Q, b) \subset r_Q$  est parallèle à  $r$  dans  $F$ .

$$d(P_0, M_Q) \leq d(P_0, Q) + d(Q, M_Q) \leq k \cdot \ell \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \delta_0}\right)$$

Alors si on considère l'hyperplan orthogonal à  $r$  situé à distance  $k \cdot \ell \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \delta_0}\right)$  de  $P_0$ , cet hyperplan intersecte chaque  $r_Q$  dans un point,  $N_Q$ . Pour deux points  $Q_1, Q_2$  de  $c'$  on a que  $d(r_{Q_1}(t), r_{Q_2}(t))$  est une fonction convexe en  $t$  et décroissante. Alors  $d(r_{Q_1}(t), r_{Q_2}(t)) \leq d(Q_1, Q_2)$ .

D'où :

$$(4.17) \quad d(N_{Q_1}, N_{Q_2}) \leq d(Q_1, Q_2)$$

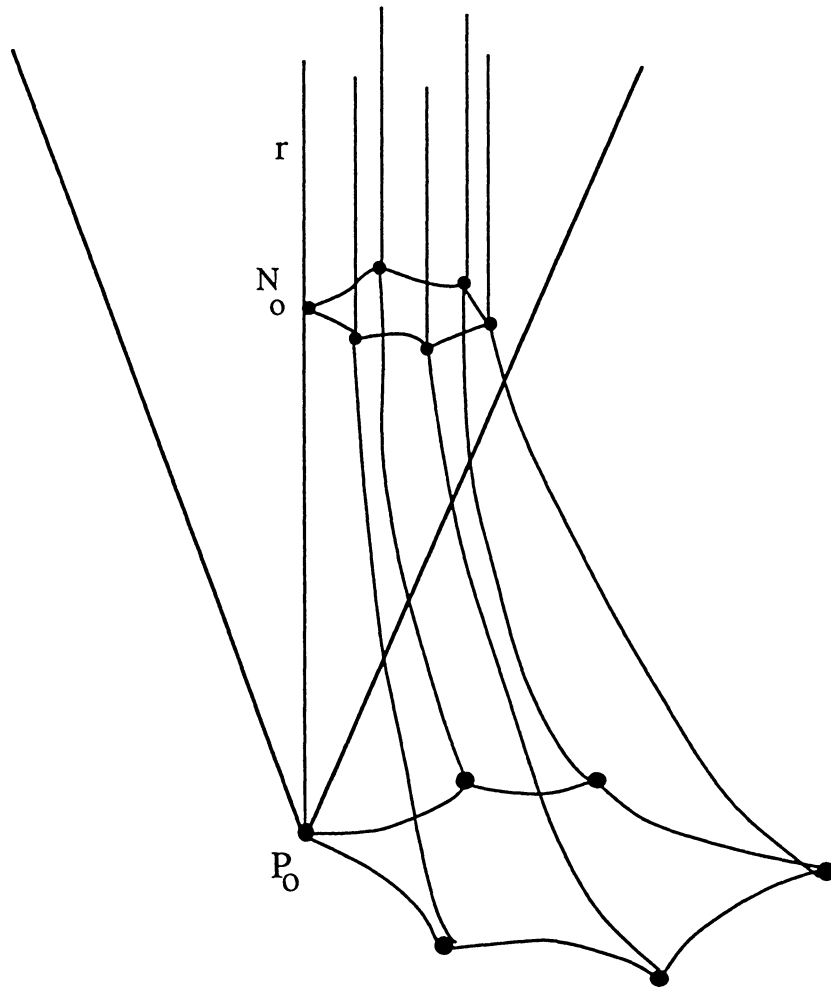


Figure 21

Si on paramétrise  $c'$  proportionnellement à la longueur d'arc :  $c' : S^1 \rightarrow \mathbf{K}_0$ ,  $c'$   $\frac{k \cdot \ell}{4}$ -lipschitzienne, on peut lui associer la courbe  $c'' : S^1 \rightarrow \mathbf{K}_0$ ,  $c''(t) = N_{c'(t)}$  toujours  $\frac{k \cdot \ell}{4}$ -lipschitzienne, donc de longueur au plus  $\frac{\pi}{2} \cdot k \cdot \ell$  (voir la Figure 21).

On a aussi :

$$d(Q, N_Q) \leq d(N_Q, N_{P_0}) + d(N_{P_0}, P_0) + d(P_0, Q) \leq k \cdot \ell \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \delta_0}\right) + 2 \cdot k \cdot \ell,$$

donc :

$$(4.18) \quad d(Q, N_Q) \leq c_1 \cdot \ell, \text{ où } c_1 = k \cdot \left(3 + \frac{1}{\sin \delta_0}\right)$$

Il est évident que  $A_{\mathbf{K}_0}(c'') = A_F(c'') \leq \text{constante} \cdot \ell^2$ . Donc pour remplir  $c'$  il reste à remplir la "couronne" formée par  $c'$  et  $c''$ .

### 3.4.3 Une estimation de la fonction de Dehn pour des réseaux et des groupes résolubles

On finit la preuve du théorème 3.4.1 en remplissant la "couronne" formée par  $c'$  et  $c''$ .

On rappelle que  $c'$  est formée par les lignes polygonales  $\mathcal{L}_i$  se trouvant, chacune, dans un plat  $F_i$ . On fixe un  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Le point  $b = r(\infty) \in \partial_\infty \mathbf{K}$  a un nombre fini d'opposés dans  $F_i(\infty)$  :  $\{b_1^i, b_2^i \dots b_{k_i}^i\}$ , où  $k_i \leq q_0$ ,  $q_0$  le nombre de chambres d'un appartement de  $\partial_\infty \mathbf{K}$ . Si on considère le plat maximal unique  $F_i^i$  dont le bord à l'infini contient  $b$  et  $b_i^i$  le Lemme 3.3.4 implique que  $F_i = \bigcup_{l=1}^{k_i} (F_i \cap F_l^i)$ .

Ainsi la ligne  $\mathcal{L}_i$  est partitionnée en au plus  $q_0$  parties telles que chaque partie se trouve dans un  $F_l^i$ . On obtient ainsi une nouvelle partition de  $c'$ . On va noter les points qui déterminent la nouvelle partition de  $c'$  par  $R_0 = P_0, R_1, R_2 \dots R_m$ , où  $m \leq n \cdot q_0 \leq \frac{2 \cdot q_0}{\lambda} \cdot \ell$ . On note  $N_j = N_{R_j}$ .

Pour tout  $j \in \overline{0, m-1}$  l'arc  $R_j - R_{j+1}$  se trouve dans un même plat  $F_j$  qui contient  $b$  dans son bord à l'infini.  $F_j$  contient donc  $r_Q$  pour tout  $Q$  dans l'arc  $R_j - R_{j+1}$ , donc aussi l'arc  $N_j - N_{j+1}$  de  $c''$ . La longueur de  $R_j - R_{j+1}$  est plus petite que  $k \cdot \lambda$ , de même pour  $N_j - N_{j+1}$ , à cause de (4.17). On remarque aussi que les plats consécutifs  $F_{j-1}$  et  $F_j$  ont en commun le point  $R_j$  et le point  $b$  à l'infini, donc aussi le rayon  $[R_j, b)$  et la chambre de Weyl de sommet  $R_j$  unique qui contient ce rayon.

Dans chaque  $F_j$ , on remplace le segment  $[R_j, N_j]$  par la ligne polygonale  $\ell_j = \mathcal{L}(R_j, N_j) \subset \mathbf{K}_0 \cap F_j$  et on remplace  $[R_{j+1}, N_{j+1}]$  par la ligne polygonale

$\ell'_{j+1} = \mathcal{L}(R_{j+1}, N_{j+1}) \subset \mathbf{K}_0 \cap F_j$ . On a donc entre chaque  $R_j$  et  $N_j$  deux lignes polygonales :  $\ell'_j = \mathcal{L}(R_j, N_j) \subset \mathbf{K}_0 \cap F_{j-1}$  et  $\ell_j = \mathcal{L}(R_j, N_j) \subset \mathbf{K}_0 \cap F_j$   
 $\text{long}(\ell_j) \leq k \cdot d(R_j, N_j) \leq k^2 \cdot (2 + \frac{1}{\sin \delta_0}) \cdot \ell = c_2 \cdot \ell$

De même pour  $\ell'_j$ .

Alors le remplissage de la “couronne” formée par  $c'$  et  $c''$  se fait en deux pas :

- on remplit chaque “bande” formée par  $R_j - R_{j+1}$ ,  $N_j - N_{j+1}$ ,  $\ell_j$  et  $\ell_{j+1}$ , et qui se trouve dans le même plat  $F_j$ .
- on remplit chaque courbe  $\gamma_j = \ell_j \cup \ell'_j$

TROISIEME ÉTAPE. On remplit chaque “bande” formée par  $R_j - R_{j+1}$ ,  $N_j - N_{j+1}$ ,  $\ell_j$  et  $\ell'_{j+1}$

Soit une horoboule  $Hb(\rho)$  telle que  $Hb(\rho) \cap \{[R_j, N_j] \cup [R_{j+1}, N_{j+1}]\} \neq \emptyset$ .  
On a le résultat suivant :

**Lemme 3.4.6** *Si  $Hb(\rho) \cap [R_j, N_j] = [x, y]$  et  $Hb(\rho) \cap [R_{j+1}, N_{j+1}] = [x', y']$ , alors*

$$(4.19) \quad \frac{1}{L_1} [d(x, y) - 2k\lambda] \leq d(x', y') \leq L_1 [d(x, y) + 2k\lambda],$$

où  $L_1 \geq 1$  est une constante qui dépend de  $\beta$  et de  $\theta$  seulement.

**Remarque 3.4.7** *Ici on prend aussi en compte le cas où un des deux segments  $[x, y]$ ,  $[x', y']$  est vide. Dans ce cas on prend  $d(x, y) = 0$  ou  $d(x', y') = 0$  dans la relation (4.19).*

**Preuve.** Le fait essentiel est que les segments  $[R_j, N_j]$  ont pour direction  $\beta$ . Soient  $m = \inf_{[R_j, N_j]} f_\rho$  et  $m' = \inf_{[R_{j+1}, N_{j+1}]} f_\rho$ .

- Les minima  $m$  et  $m'$  sont atteints en un point unique.

Sinon on aurait un sous-segment  $[P, Q] \subset [R_j, N_j]$  sur lequel  $f_\rho$  est constante égale à  $m$ . Alors  $\angle_P(\overline{PQ}, \overline{PP}) = \frac{\pi}{2}$  et d'autre part  $p_P(\overline{PQ}) = \beta$ ,  $p_P(\{\bar{u}; \angle_P(\bar{u}, \overline{PP}) = \frac{\pi}{2}\}) = p_S(\mathcal{H})$ . Or  $\beta \notin p_S(\mathcal{H})$ .

- Soient  $z$  et  $z'$  les points où le minimum de  $f_\rho$  est atteint (qui sont à l'intérieur des segments  $[x, y]$  et  $[x', y']$  si ceux-ci sont non-vides).

$z = t \cdot R_j + (1 - t) \cdot N_j$  et si on prend  $\tilde{z} = t \cdot R_{j+1} + (1 - t) \cdot N_{j+1}$  on a que :  
 $d(z, \tilde{z}) \leq t \cdot d(R_j, R_{j+1}) + (1 - t) \cdot d(N_j, N_{j+1}) \leq k\lambda$ .

Alors  $f_\rho(\tilde{z}) < f_\rho(z) + d(z, \tilde{z}) \leq m + k\lambda$ , d'où  $m' \leq m + k\lambda$ . De même on obtient  $m \leq m' + k\lambda$ , donc :

$$(4.20) \quad m - k\lambda \leq m' \leq m + k\lambda$$

• L'inégalité  $f_\rho(x) - f_\rho(z) \leq d(x, z)$  donne que  $d(x, z) \geq -m$ . De même pour  $y$ , et finalement on obtient  $d(x, y) \geq -2m$ .

D'autre part, le fait que  $f_\rho$  croît sur  $[z, x]$  et le Lemme 3.4.5 impliquent que  $f_\rho$  croît, le long de  $[z, x]$ , au moins avec la vitesse  $\sin \delta_2$ .

D'où  $0 = f_\rho(x) \geq f_\rho(z) + \sin \delta_2 \cdot d(x, z) \geq m + \sin \delta_2 \cdot d(x, z)$ .

Donc  $d(x, z) \leq -\frac{m}{\sin \delta_2}$ . De même  $d(y, z) \leq -\frac{m}{\sin \delta_2}$ , donc finalement :

$$(4.21) \quad -2m \leq d(x, y) \leq -\frac{2m}{\sin \delta_2}.$$

Un raisonnement similaire nous donne :  $-2m' \leq d(x', y') \leq -\frac{2m'}{\sin \delta_2}$ .

Alors  $d(x', y') \leq -\frac{2m'}{\sin \delta_2} \leq -\frac{2m+2k\lambda}{\sin \delta_2} \leq \frac{d(x, y)+2\lambda}{\sin \delta_2} = L_1(d(x, y) + 2k\lambda)$  où  $L_1 = \frac{1}{\sin \delta_2}$ .

La deuxième inégalité s'obtient si on part de  $d(x, y)$ . ◇

Si  $d(x, y) < \frac{2k\lambda}{\sin \delta_2}$  et  $d(x', y') < \frac{2k\lambda}{\sin \delta_2}$ , alors on ignore cette horoboule, car les perturbations qu'elle va apporter au remplissage de la bande seront de l'ordre de  $\lambda$ , donc négligeables.

Si une des deux distances est  $\geq \frac{2k\lambda}{\sin \delta_2}$ , on prend celle qui est maximale. Supposons que c'est  $d(x, y)$ .

Avec les notations introduites dans la preuve du lemme précédent, la relation (4.20) implique que  $m \leq -d(x, y) \cdot \frac{\sin \delta_2}{2} \leq -k\lambda$  et la relation (4.19) entraîne que  $m' \leq m + k\lambda \leq 0$ . Donc le segment  $[x', y']$  n'est pas vide.

Si  $x = t \cdot N_j + (1-t) \cdot R_j$  et si on prend  $\tilde{x} = t \cdot N_{j+1} + (1-t) \cdot R_{j+1}$ , on a  $d(x, \tilde{x}) \leq t \cdot d(N_j, N_{j+1}) + (1-t)d(R_j, R_{j+1}) \leq k\lambda$  d'où  $|f_\rho(\tilde{x})| \leq k\lambda$ .

Si  $-k\lambda \leq f_\rho(\tilde{x}) \leq 0$ , alors  $f_\rho$  est strictement croissante sur un des deux segments  $[\tilde{x}, x']$  ou  $[\tilde{x}, y']$ . Supposons qu'elle croît sur  $[\tilde{x}, x']$ . Le Lemme 3.4.5 implique qu'elle croît au moins avec la vitesse  $\sin \delta_0$ . Alors :

$$0 = f_\rho(x') \geq f_\rho(\tilde{x}) + d(x', \tilde{x}) \cdot \sin \delta_0 \Rightarrow d(x', \tilde{x}) \leq \frac{-f_\rho(\tilde{x})}{\sin \delta_0} \leq \frac{\lambda}{\sin \delta_0}.$$

Si  $0 \leq f_\rho(\tilde{x}) \leq k\lambda$ , alors  $f_\rho$  décroît sur  $[\tilde{x}, x']$  et un raisonnement similaire implique la même majoration pour  $d(x', \tilde{x})$ .

On obtient finalement :

$$(4.22) \quad d(x, x') \leq k\lambda \left(1 + \frac{1}{\sin \delta_0}\right) = c_3 \cdot \lambda.$$

On fait le même raisonnement pour  $y$  et on trouve que :

$$(4.23) \quad d(y, y') \leq c_3 \cdot \lambda \quad \text{ou} \quad (4.24) \quad d(y, x') \leq c_3 \cdot \lambda$$

Si on est dans le cas (4.24) on refait le raisonnement pour  $y'$  et on retrouve (4.23) ou :

$$(4.25) \quad d(y', x) \leq c_3 \cdot \lambda$$

Si pour  $y'$  aussi on est dans le cas (4.25) alors cette relation-ci, avec (4.22) impliquent que  $d(x', y') \leq 2 \cdot c_3 \cdot \lambda$ , d'où  $d(y, y') \leq 3 \cdot c_3 \cdot \lambda$ .

Donc, en tout cas, on aura les relations (4.22) et (4.23) avec une constante  $c_3$  éventuellement triplée.

Ainsi le quadrangle géodésique de sommets  $x, y, y', x'$  a pour périmètre :  $d(x, y) + d(y, y') + d(x', y') + d(x, x') \leq d(x, y) + 2 \cdot c_3 \cdot \lambda + L_1 \cdot d(x, y) \leq 2 \cdot L_1 d(x, y) + 2 \cdot c_3 \cdot \lambda$ .

Si on remplace les géodésiques par des lignes polygonales dans  $F_i \cap H(\rho)$ , comme dans le Lemme 3.4.3, on obtient une courbe dans  $F_i \cap H(\rho)$ , qui passe par  $x, y, y', x'$  de longueur  $\leq 2 \cdot k \cdot L_1 d(x, y) + 2 \cdot k \cdot c_3 \cdot \lambda = c_4 \cdot d(x, y) + c_5 \cdot \lambda$ . D'après la propriété ( $\mathbf{P}_2$ ) de chaque hypersurface polytopique  $F \cap H(\rho)$ , cette courbe peut être remplie par une aire  $\leq (c_4 \cdot d(x, y) + c_5 \cdot \lambda)^2 \leq c_6 \cdot d^2(x, y) + c_7 \cdot \lambda$ . ( On peut faire ceci seulement si  $F \cap H(\rho)$  est une vraie surface, de dimension au moins 2, donc si le rang est au moins 3.)

Donc pour remplir toutes ces courbes, le long de  $[R_i, N_i]$ , on a besoin d'une aire  $\leq c_4 \cdot \sum_{(x,y)} d^2(x, y) + \sum_{(x,y)} c_7 \cdot \lambda$ .

$$\sum_{(x,y)} d^2(x, y) \leq d^2(R_i, N_i) \leq c_1^2 \cdot \ell^2, \text{ d'après (4.18).}$$

Puisque  $d(x, y) \geq \frac{2 \cdot \lambda}{\sin \delta_2}$ , on a au plus  $\frac{\sin \delta_2}{2 \cdot \lambda} \cdot \ell$  termes dans la somme, donc le deuxième terme est d'ordre  $\ell$ .

Donc on obtient que l'aire est  $\leq C \cdot \ell^2$ .

En traitant le cas symétrique où  $d(x', y') \geq d(x, y)$  on obtient encore une aire  $\leq C \cdot \ell^2$ .

Après avoir rempli toutes les "quadrilatères" de type  $x - y - y' - x'$  correspondant à diverses horosphères, il reste des segments disjoints  $[x, \bar{y}] \in [R_j, N_j]$  et  $[x', \bar{y}'] \in [R_{j+1}, N_{j+1}]$  entièrement contenus dans  $\mathbf{K}_0$  groupés dans des paires  $[x, \bar{y}]$ ,  $[x', \bar{y}']$  tels que les extrémités sont jointes deux à deux par des lignes polygonales dans  $\mathbf{K}_0$  de longueur  $\leq k \cdot c_3 \cdot \lambda$  (voir la Figure 22).

On voit qu'un tel "quadrilatère"  $x - x' - \bar{y}' - \bar{y}$  peut être rempli par une aire d'ordre  $d(x, \bar{y})$  et en sommant l'aire de tous ces "quadrilatères" on obtient une aire  $\leq C_1 \cdot \ell$ .

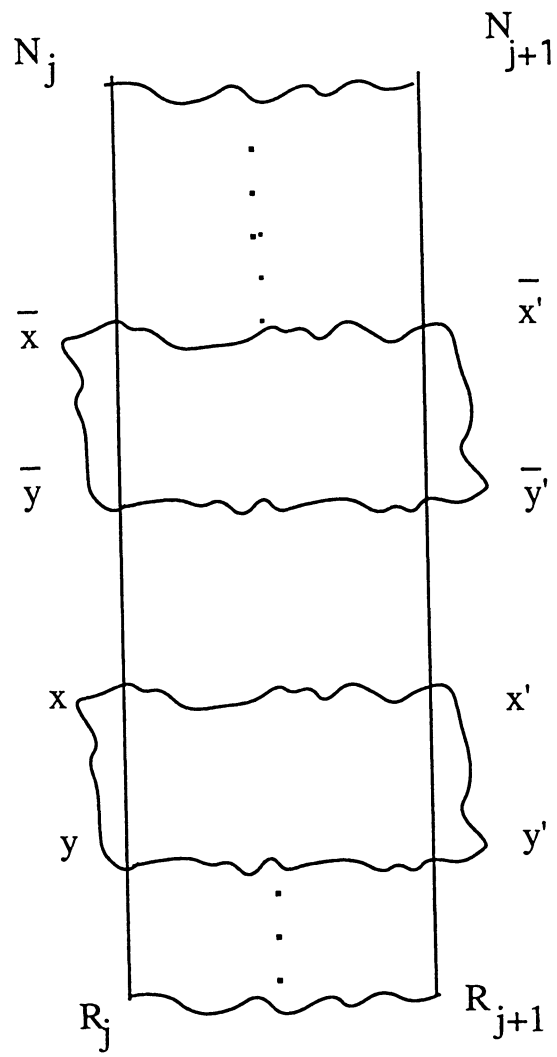


Figure 22

On peut conclure que pour remplir la “bande”  $R_j - N_j - N_{j+1} - R_{j+1}$  on a besoin d’une aire  $\leq C \cdot \ell^2 + C_1 \cdot \ell \leq C_0 \cdot \ell^2$ .

QUATRIÈME ÉTAPE. On remplit les courbes  $\gamma_j = \ell'_j \cup \ell_j$ .  
On rappelle que  $\ell_j$  s’obtient en remplaçant chaque  $[x, y] = [R_j, N_j] \cap Hb(\rho)$  par une ligne polygonale  $\mathcal{L}(x, y)$  dans  $H(\rho) \cap F_j$ , et  $\ell'_j$  s’obtient en remplaçant  $[x, y]$  par une ligne polygonale  $\mathcal{L}'(x, y)$  dans  $H(\rho) \cap F_{j-1}$ . Donc c’est seulement entre des tels  $x$  et  $y$  que  $\ell_j$  et  $\ell'_j$  diffèrent. Ainsi il suffit de remplir la courbe formée par chaque paire  $\mathcal{L}(x, y)$  et  $\mathcal{L}'(x, y)$ .

Pour ce faire on a le lemme suivant :

**Lemme 3.4.8** *Soient deux plats  $F$  et  $F'$  qui ont en commun une chambre de Weyl  $W$  de sommet  $R$ , soit  $r$  un rayon dans  $W$  issu de  $R$  et soit  $[x, y] = r([0, \infty)) \cap Hb(\rho)$ .*

*Si  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y)$  est une ligne polygonale entre  $x$  et  $y$  dans  $F \cap H(\rho)$  construite comme dans la preuve de  $(\mathbf{P}_1)$ , Proposition 3.4.2, et  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'(x, y)$  est une ligne polygonale similaire dans  $F'$ , pour la courbe  $\gamma = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}'$  on a :*

$$(4.26) \quad A_{\mathbf{K}_0}(\gamma) \leq c_8 \cdot d^2(x, y).$$

### Preuve

Les deux propriétés principales de  $\mathcal{L}$  dans  $F$  ( et de  $\mathcal{L}'$  dans  $F'$ ) sont :

$$(\pi_1) \quad \text{long}(\mathcal{L}) \leq k \cdot d(x, y) \text{ et}$$

$(\pi_2)$   $\mathcal{L}$  se trouve dans un plan de  $F$  qui contient  $[x, y]$ , donc qui contient la droite  $xy$ , et donc qui contient dans ce cas  $r$  aussi. Dans ce plan elle est contenue dans une ligne polygonale qui délimite un domaine convexe.

La propriété  $(\pi_1)$  nous montre qu’on peut réduire la preuve de l’inégalité (4.26) à la preuve de l’inégalité :

$$A_{\mathbf{K}_0}(\gamma) \leq c_0 \cdot (\text{long}(\gamma))^2.$$

La propriété  $(\pi_2)$  implique que, si on considère tous les rayons issus de  $R$  qui intersectent  $\mathcal{L}'$ , ils intersectent  $\mathcal{L}'$  en deux points sauf “le dernier”, qui peut intersecter  $\mathcal{L}'$  selon un point ou un segment, et ils forment un secteur plan de sommet  $R$  qui donne une géodésique dans  $F'(\infty)$  entre  $r(\infty)$  et un point  $\alpha$ . Supposons que  $\alpha$  est intérieur à un simplexe  $\sigma$ .

Il existe une galerie d’origine  $\mathcal{W} = W(\infty)$  et de longueur minimale qui contient la géodésique  $[r(\infty), \alpha]$ . Cette galerie est aussi une galerie minimale entre  $\mathcal{W}$  et  $\sigma$ .

On démontre par récurrence :

$(P_q)$  Si la longueur de la galerie minimale entre  $\mathcal{W}$  et  $\sigma$  est  $q$ , alors :

$A_{\mathbf{K}_0}(\gamma) \leq c_q \cdot \ell^2$ , où  $\ell = \text{long}(\gamma)$  et  $c_q$  est la suite croissante de premier



terme  $c_1 = b$ , qui vérifie la relation de récurrence  $c_{q+1} = (b + c_q) \cdot (1 + k)^2$  ( $b$  est la constante qui apparaît dans  $(\mathbf{P}_2)$ ).

L'outil principal est le sous-lemme suivant :

**Sous-lemme.** *Soit en  $\mathbf{K}$  un demi-plat maximal  $D$  et soit une chambre de Weyl  $W$  qui a un mur de codimension 1 inclus dans le bord de  $D$ . Il existe un unique plat qui contient à la fois  $D$  et  $W$ .*

**Preuve** Soit  $R$  le sommet de  $W$ . Dans  $\Sigma_R \mathbf{K}$ ,  $D_R$  est un demi-appartement et  $W_R$  est une chambre qui a un mur de codimension 1 dans  $\partial D_R$ . D'après la preuve de la Proposition 3.27 de [Ti], il existe dans  $D_R$  une chambre  $W_R^{op}$  opposée à  $W_R$ .

Soit  $r$  un rayon régulier dans  $W$ . Alors  $\overline{r_R}$  a un opposé  $\overline{r_R^{op}}$  dans  $W_R^{op}$ , et si on considère  $r^{op}$  le rayon de  $W^{op}$  déterminé par cette direction, il forme avec  $r$  une géodésique régulière  $g$ . Le plat  $F$  qui contient  $g$  contient  $W$  et  $W^{op}$ , donc contient  $\partial D$ , car  $\partial D$  est l'enveloppe convexe de deux murs de codimension 1 de  $W$  et  $W^{op}$  qui s'y trouvent. Alors  $F$  contient aussi  $D$  car  $D$  est l'enveloppe convexe de  $\partial D$  et de  $W^{op}$ .

◇

On démontre  $(P_1)$  :

Dans ce cas  $\mathcal{L}'$  est incluse dans  $W$ , donc  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  se trouvent dans le même plat et on a :

$$A_{\mathbf{K}_0}(\gamma) \leq b \cdot \ell^2 \leq c_1 \cdot \ell^2.$$

Supposons que  $(P_q)$  est vraie. On démontre  $(P_{q+1})$ .

Soit  $\mathcal{W}, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3, \dots, \mathcal{W}_q$  la galerie minimale qui contient  $[r(\infty), \beta]$  dans  $F'(\infty)$ . On peut considérer  $W, W_1, W_2, \dots, W_q$  les chambres de Weyl de  $F'$  de sommet  $R$  correspondantes. On a  $\mathcal{L}' \subset W \cup W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_q$ . La chambre  $W_1$  est adjacente à  $W$  selon un mur de codimension 1,  $M$ . La géodésique  $[r(\infty), \beta]$  intersecte  $M(\infty)$ , car l'hyperplan qui contient  $M(\infty)$  sépare  $W$  et  $\beta$  (c'est une propriété des galeries minimales). Alors  $\mathcal{L}'$  intersecte  $M$  en au moins deux points  $x_1$  et  $y_1$ . Soit  $\mathcal{L}'_1$  l'arc de  $\mathcal{L}'$  compris entre  $x_1$  et  $y_1$ , donc contenu en  $F$ . On a que

$$\text{long}(\mathcal{L}'_1) \leq \text{long}(\mathcal{L}') \leq \ell, \text{ donc } d(x_1, y_1) \leq \ell.$$

Soit  $\mathcal{L}_1$  la ligne polygonale entre  $x_1$  et  $y_1$  en  $F \cap H(\rho)$  construite comme dans le Lemme 3.4.3.

$$\text{long}(\mathcal{L}_1) \leq k \cdot d(x_1, y_1) \leq k \cdot \ell.$$

Soit aussi  $\mathcal{L}''_1 = \gamma - \mathcal{L}'_1$  qui a  $\text{long}(\mathcal{L}''_1) \leq \ell$ .

Si on considère les courbes  $\gamma' = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}'_1$  et  $\gamma'' = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}''_1$ , on a :

$$A(\gamma) \leq A(\gamma') + A(\gamma'').$$

La courbe  $\gamma''$  se trouve dans le même plat  $F$ , donc, d'après  $(\mathbf{P}_2)$ , on a :

$$A(\gamma'') \leq b \cdot (\text{long}(\gamma''))^2 \leq b \cdot (\ell + k \cdot \ell)^2 = b \cdot (1 + k)^2 \cdot \ell^2.$$

La courbe  $\gamma'$  est construite comme  $\gamma$  et est de longueur  $\leq (1 + k) \cdot \ell$ . Comme  $\mathcal{L}_1$ , dans  $F$ , se trouve du même côté de l'hyperplan déterminé par  $M$ , il se trouve donc dans un demi-plat déterminé par cet hyperplan,  $D$ .

D'après le Sous-lemme, il existe un plat  $F_1$  qui contient  $W_1$  et  $D$ . Donc  $F_1$  et  $F'$  ont en commun  $W_1$  et  $\mathcal{L}_1 \subset F_1$ .

Alors  $\gamma' = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}'_1$ ,  $\mathcal{L}_1 \subset F_1$ ,  $\mathcal{L}'_1 \subset F'$  se trouve dans la situation de  $(P_q)$ , donc par l'hypothèse de récurrence on a  $A(\gamma') \leq c_q \cdot (1 + k)^2 \cdot \ell^2$ .

Ainsi  $A(\gamma) \leq b \cdot (1 + k)^2 \cdot \ell^2 + c_q \cdot (1 + k)^2 \cdot \ell^2 = (b + c_q) \cdot (1 + k)^2 \cdot \ell^2 = c_{q+1} \cdot \ell^2$

Reste à dire que  $q \leq q_0$  pour conclure que toute courbe  $\gamma$  du type décrit doit vérifier  $A(\gamma) \leq c_{q_0} \cdot \ell^2$ .

◇

On applique ce lemme pour remplir les courbes  $\gamma_{xy} = \mathcal{L}(x, y) \cup \mathcal{L}'(x, y)$  et on a  $A(\gamma_{xy}) \leq c_9 \cdot d^2(x, y)$ .

Alors  $A(\gamma_j) \leq c_9 \cdot \Sigma_{(x,y)} d^2(x, y) \leq c_9 \cdot d^2(R_j, N_j) \leq c_{10} \cdot \ell^2$ .

CONCLUSION Pour obtenir l'aire qui remplit la "couronne" entre  $c$  et  $c'$  on somme sur  $j$  et on a :

$A(c', c'') \leq \Sigma_{j=1}^m [A(c_j) + A(\gamma_j)] \leq \Sigma_{j=1}^m (C_0 \cdot \ell^2 + c_{10} \cdot \ell^2) = m \cdot (C_0 + c_{10}) \cdot \ell^2 \leq C \cdot \ell^3$ , car on rappelle que pour  $m$  on avait la majoration  $m \leq \frac{2 \cdot q_0}{\lambda} \cdot \ell$ .

Ainsi  $A(c') \leq A(c'') + A(c', c'') \leq C \cdot \ell^3 + c \cdot \ell^2 \leq C' \cdot \ell^3$ .

◇

**Corollaire 3.4.9** *Soit  $\Gamma$  un réseau irréductible de  $\mathbb{Q}$ -rang 1 dans un groupe  $G$  semi-simple de  $\mathbb{R}$ -rang plus grand ou égal à 3 et soit  $\theta$  la direction associée à  $\Gamma$ . Si  $\theta$  vérifie la propriété (II), alors on a pour la fonction de Dehn  $A(n)$  associée au groupe  $\Gamma$  l'estimation suivante*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } A(n) \leq n^{3+\varepsilon}, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

**Preuve** On utilise le théorème précédent, le théorème 2.2.14 et la Remarque 2.2.9

◇

**Corollaire 3.4.10** *Soit le groupe résoluble  $Sol_{2n-1} = \mathbb{R}^n \rtimes \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $n \geq 3$ , où  $\mathbb{R}^{n-1}$  agit sur  $\mathbb{R}^n$  par des matrices diagonales de déterminant 1. Soit  $g$  une structure riemannienne invariante à gauche quelconque sur  $Sol_{2n-1}$ .*

*Alors on a pour la fonction de remplissage riemannienne  $A(\ell)$  de  $(Sol_{2n-1}, g)$  l'estimation suivante*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ell_\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } A(\ell) \leq \ell^{3+\varepsilon}, \forall \ell \geq \ell_\varepsilon.$$

**Preuve.** Soit  $\Gamma_K$  le groupe modulaire de Hilbert d'un corps  $K$  algébrique totalement réel de degré  $n$ . Le groupe  $\Gamma_K$  agit sur  $X = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \times \cdots \times \mathbb{H}^2$ . D'après le théorème 3.1.13, pour obtenir l'espace associé à  $\Gamma_K$ ,  $X_0$ , on enlève une famille d'horoboules ouvertes disjointes  $\bigsqcup_{r \in \mathcal{R}} Hbo(r)$  de  $X$ .

Le groupe  $Sol_{2n-1}$  agit transitivement et librement sur une horosphère  $H(r)$  pour un  $r \in \mathcal{R}$  quelconque ([VG], chapitre 1).

L'horosphère  $H(r)$  est nondistordue en  $X_0$ , donc tous ses cônes asymptotiques  $Con_\omega H(r) \subset Con_\omega X_0$  sont nondistordus. Donc on a un remplissage au plus cubique dans chaque cône  $Con_\omega H(r)$ , et le théorème 2.2.14 permet de conclure.  $\diamond$

# Bibliographie

- [Al] J. Alonso, "*Inégalités isopérimétriques et quasi-isométries*", C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1, **311** (1991), 761-764.
- [BGS] W. Ballmann, M. Gromov, V. Schroeder, "Manifolds of nonpositive curvature", Birkhäuser, 1985.
- [Bo] A. Borel, "Linear Algebraic Groups", deuxième édition, Springer Verlag 1991.
- [Bou] N. Bourbaki, "Topologie générale", quatrième édition, Hermann, Paris, 1965.
- [Br] K. S. Brown, "Buildings", Springer Verlag 1989.
- [Cha] I. Chavel, "Riemannian Geometry. A modern introduction", Cambridge University Press, 1993.
- [ECHPT] D. B. A. Epstein, J. W. Cannon, D. F. Holt, M. S. Paterson, W. P. Thurston, "Word processing and group theory" , 1991.
- [Ge] S. Gersten, "*Isoperimetric and Isodiametric Functions of Finite Presentations*", "Geometric Group Theory" (vol. 1), G. A. Niblo, M. A. Roller (eds), Proceedings of the Symposium held in Sussex, LMS Lecture Notes Series 181, Cambridge University Press 1991.
- [GH] E. Ghys, P. de la Harpe (eds), "Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov", Birkhäuser, 1990.
- [Gr]<sub>1</sub> M. Gromov, "*Groups of polynomial growth and expanding maps*", Publ. Math IHES **53** (1981), 53-73.
- [Gr]<sub>2</sub> M. Gromov, "*Hyperbolic groups*", in "Essays in group theory", S. Gersten editor, MSRI Publ. **8**, Springer (1987), 75-265.
- [Gr]<sub>3</sub> M. Gromov, "*Asymptotic Invariants of Infinite Groups*", "Geometric Group Theory" (vol. 2), G. A. Niblo, M. A. Roller (eds), Proceedings of

the Symposium held in Sussex, LMS Lecture Notes Series 181, Cambridge University Press 1991.

[GLP] M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu, "Structures métriques pour les variétés riemanniennes" Cedic/Fernand Nathan, Paris (1981).

[KL] M. Kapovich, B. Leeb, "*On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of nonpositively curved manifolds*", Geometric and Functional Analysis 3(1995), vol.5, 582-603.

[KIL] B. Kleiner, B. Leeb, "*Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings*", preprint, april 1996.

[LMR]<sub>1</sub> A. Lubotzky, Sh. Mozes, M. S. Raghunathan, "*Cyclic subgroups of exponential growth and metrics on discrete groups*", C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1, 317 (1993), 735-740.

[LMR]<sub>2</sub> A. Lubotzky, Sh. Mozes, M. S. Raghunathan, "*The word and riemannian metrics on lattices of semisimple groups*", preprint.

[Ma] G. A. Margulis, "Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups", Springer Verlag 1991.

[Mo] G. D. Mostow, "Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces", AMS Studies no.78, Princeton University Press 1973.

[P]<sub>1</sub> P. Papasoglu, "*On the asymptotic cone of groups satisfying a quadratic isoperimetric inequality*", à paraître dans J. of Diff. Geom.

[P]<sub>2</sub> P. Papasoglu, communications privées

[Pa] P. Pansu, "*Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés*", Ergod Th. Dynam. Syst. 3 (1983), 415-445.

[Pi] Ch. Pittet, "*Isoperimetric Inequalities in Nilpotent Groups*", à paraître dans J. London Math. Soc.

[PL] Ch. Pittet, E. Leuzinger, "*Isoperimetric Inequalities for Lattices in Semisimple Lie Groups of Rank 2*" à paraître dans Geometric and Functional Analysis.

[Pr] G. Prasad, "*Strong rigidity of  $Q$ -rank one lattices*", Inventiones math. 21 (1973), 255-286.

[Ra] M. S. Raghunathan, "Discrete Subgroups of Lie Groups", Springer Verlag 1972.

[Ti]<sub>1</sub> J. Tits, "Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs", Lecture Notes 386, Springer Verlag 1974.

[Ti]<sub>2</sub> J. Tits, "*Classification of algebraic semisimple groups*", Proc. Symp. Pure Math., vol 9, "Algebraic groups and discontinuous subgroups", Boulder 1965, A. M. S. 1966, 33-62.

[VDW] L. Van Den Dries, A. J. Wilkie, "*On Gromov's theorem concerning groups of polynomial growth and elementary logic*". J. of Algebra **89** (1984), 349-374.

[VG] G. van der Geer, "Hilbert Modular Surfaces", Springer Verlag 1988