

# THÈSES D'ORSAY

STEPHANE GINOULLAC

**Étude de l'irréductibilité du schéma des modules de Rao  
et de la question de Sernesi-Walter**

*Thèses d'Orsay*, 1998

[http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11\\_1998\\_\\_0506\\_\\_P0\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1998__0506__P0_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016  
et diffusée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

ORSAY  
N° d'ordre 5144

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD  
Centre d'Orsay

**THÈSE**

présentée pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR EN SCIENCES  
Spécialité MATHÉMATIQUES

par

**Stéphane GINOULLAC**

---

SUJET

**Étude de l'irréductibilité du schéma des modules de Rao  
et de la question de Sernesi-Walter**

---

Soutenue le 7 janvier 1998 à 11 h devant la commission d'examen composée de :

M.	Joseph	LE POTIER	<i>Président</i>
Mme.	Mireille	MARTIN-DESCHAMPS	<i>Examinateur</i>
Mme.	Emilia	MEZZETTI	<i>Rapporteur</i>
M.	Daniel	PERRIN	<i>Directeur</i>
M.	Michel	RAYNAUD	<i>Examinateur</i>
M.	Charles	WALTER	<i>Rapporteur</i>



*À mon père.*



## Remerciements

Cette thèse ne serait rien sans l'attention bienveillante de Daniel Perrin. Il a su partager avec moi sa vision géométrique des choses et aiguiller mes recherches par des intuitions qui se sont avérées toujours exactes, sans jamais cependant m'imposer quoi que ce soit, me laissant libre au contraire de mener mes expérimentations à ma guise et à mon propre rythme. Il a su encore trouver constamment le temps de lire ce que je lui amenais en y apportant à chaque fois de nombreuses améliorations. Il a su enfin conférer à nos relations une chaleur qui est pour beaucoup dans le plaisir que j'ai pris à nos rendez-vous réguliers durant ces quatre années.

Pour tout cela et pour bien d'autres choses encore, je voudrais profondément ici le remercier.

Mireille Martin-Deschamps, que je retrouvais régulièrement au groupe de travail du mardi matin, a accompagné la progression de cette thèse. Je la remercie d'avoir accepté de faire partie de ce jury, dans lequel elle trouve tout naturellement sa place.

Charles Walter et Emilia Mezzetti ont accepté la tâche ingrate de lire en détail ces longues pages, qu'ils en soient ici remerciés. Je suis également reconnaissant envers Charles Walter pour les commentaires qu'il a bien voulu me faire parvenir si rapidement, ainsi que pour les conversations que nous avons échangées à Luminy et à Nice.

Je suis enfin reconnaissant à Michel Raynaud, dont j'ai suivi avec un très vif plaisir le cours de DEA, ainsi qu'à Joseph Le Potier d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je souhaite remercier ensuite les enseignants qui ont su encourager mon goût pour les mathématiques : Paulette Aymard tout d'abord ; Martine Raynal et Sylvie Massonnet ensuite, qui m'ont transmis déjà en leur temps l'enseignement de Daniel Perrin bien avant que je ne le rencontre moi-même ; Olivier Salon et Claudine Picarony enfin, dans mes années d'ENS.

Je suis également reconnaissant envers ceux qui, plus tard, m'ont accompagné dans mes débuts en tant qu'enseignant à Orsay, François Cottet-Émard, François Labourie et Pierre Pansu, ainsi que ceux qui m'ont accueilli parmi eux à Nanterre, en particulier Émile Lion, Sylvie Méléard et Sylvia Dobyinsky.

Je voudrais enfin remercier nommément tous ceux et celles qui m'ont accompagné tout au long de ces longues années par leur présence proche ou lointaine, par leur soutien, leur joie, leur amitié toujours, leur amour parfois. Il y en a tant ; je tiens à les citer tous ; ils se reconnaîtront.

Au premier rang d'entre eux viennent mes parents et mon frère ; le soutien continu et les encouragements qu'ils m'ont constamment prodigués ont été pour moi une aide inestimable.

Viennent ensuite tous les autres, ceux qui sont un jour arrivés pour ne plus repartir ; puisqu'il faut bien choisir un ordre, l'ordre chronologique en vaut un autre,

Merci donc tout d'abord à Patrice, à Isabelle, à Jérôme et Patrick,

Merci à Vincent et Bertrand, merci enfin et bien sûr à Hervé,

Merci à tous ceux que j'ai croisés aux temps héroïques du 110 volt et du club théâtre :  
Merci à Cyrille, Jean-Christophe, Laurent, Pierre et Serge, merci à Claire, à Étienne, Miguel, Isabelle, Alain, Nathalie et Frédéric, merci à Frédérique, Thomas, David, Laurent, Philippe, Thierry, à François «bip-bip», à Pierre, à Pascal, Frédéric, merci à Sylvain, à Stéphane, Marie-Georges, à Marion, merci à Alexandre, Stéphane, Vincent, à Guillaume, Daniel, Philou, Bérou, à Valérie, merci à Bénédicte, Martine, Elsa, Isabelle, Nicolas, merci enfin à François,

Un merci tout particulier pour Marc, Esther et Laurent qui m'ont vaillamment supporté, ainsi qu'à tous ceux, si nombreux, qui ont partagé notre table ou notre gîte pour mon plus grand plaisir au cours de ces deux merveilleuses années,

Merci à ceux qui sont venus ensuite, Élisabeth, François, merci à Thierry, Marie, Muriel et Stéphane, merci à Patrick bien sûr,

Merci à mes collègues thésards, ceux d'Orsay, Cécile, Dominique, Nassos, Renaud, Michaël, Olivier, Maja, Laurence, Hervé, Julien, Anne, Emmanuelle G, Emmanuelle F, l'autre Cécile, ceux du groupe de travail, Florence, Jean, Thomas, Guillaume, Samir, ceux de Nanterre enfin, Laurent, Salah, Florence, Dinah,

Merci à ceux du cours de danse, Xavier, Jean-Claude, Jean-Pierre, Brigitte, Valentin, Jean-Luc, Didier-Marie, Yves, Gilbert, Christophe, Rose.

Je voudrais dire un merci tout particulier à Éric, à Marc et à Éric, ce que vous m'avez apporté m'a été si précieux, je ne l'oublie pas.

Merci enfin à Claude, pour avoir supporté mes inquiétudes, mes absences et mes insomnies de cette fin de thèse, pour avoir partagé

*Et le poivre et le sel des jours les plus noirs, et le sucre et le miel des jours d'espoir,*  
et pour avoir été là, tout simplement.

## Abstract

In order to classify algebraic space curves, one studies the Hilbert scheme  $H_{d,g}$ . In this thesis, we consider two questions related to this classification. Both of them concern in fact the “lower step” of the classification, which is the study of curves from the point of view of their Rao module, according to a terminology of Martin-Deschamps – Perrin.

In the first part, we study the schemes  $\widehat{E}_{p,q,r}$  which parametrize Rao-modules of width three. According to Martin-Deschamps – Perrin, any property of these schemes corresponds to a similar one of the Hilbert schemes with constant cohomology  $H_{\gamma,\rho}$ . These authors give a necessary condition for the scheme  $\widehat{E}_{p,q,r}$  to be irreducible and make the conjecture that it is also sufficient. We prove this conjecture in almost every case, leaving only a small number of them undetermined. Moreover, in most of the cases where the scheme  $\widehat{E}_{p,q,r}$  possesses several components, we determine the dimension of the biggest one and describe it explicitly.

The main point of the proof consists in constructing an adequate stratification of the schemes  $\widehat{E}_{p,q}$  which parametrize module structures of width two. To this purpose, we define analog schemes to the schemes  $\widehat{E}_{p,q,r}$  and  $\widehat{E}_{p,q}$  in the case of  $n$  variables instead of four, which allows us to use an induction argument. We then prove our results in this more general frame.

In the second part, we consider the following question of Sernesi – Walter: do there exist obstructed curves with semi-natural cohomology? Martin-Deschamps – Perrin exhibited such a curve; however, it is neither irreducible nor reduced. Therefore, we consider here the possibility of constructing an obstructed smooth irreducible curve with semi-natural cohomology. First, we study in general curves with semi-natural cohomology from the point of view of their Rao module, extending results from Fløystad and Bolondi – Migliore. This study allows us to eliminate the first cases for which the question is relevant and to prove a non-obstructedness criterium.

**Key words :** Algebraic Geometry, space curves, Hilbert scheme, parametrization, Rao module, semi-natural cohomology, stratification.

**AMS classification :** 14H50 Space curves  
14C05 Parametrization (Hilbert scheme)





# Sommaire

<b>Introduction.</b>	<b>3</b>
1 Le schéma des modules de Rao. . . . .	3
2 La question de Sernesi–Walter. . . . .	5
3 Résultats concernant les schémas de structures de modules. . . . .	6
4 Résultats concernant la question de Sernesi–Walter. . . . .	9
<b>1 Notations et rappels.</b>	<b>13</b>
1.1 Notations diverses. . . . .	13
1.2 Rappels et historique. . . . .	15
1.2.1 Le module de Rao et les trois étapes. . . . .	15
1.2.2 La question de l'irréductibilité des schémas $\widehat{E}_\rho$ . . . . .	17
1.2.3 La question de Sernesi–Walter. . . . .	19
1.3 Le schéma des structures de module de Rao. . . . .	22
<b>2 Démonstration du théorème d'irréductibilité.</b>	<b>27</b>
2.1 Démarche générale. . . . .	27
2.1.1 Principe de la démonstration. . . . .	27
2.1.2 Principe de la minoration du rang de $v_0$ . . . . .	30
2.2 Schémas des structures de modules généraux. . . . .	32
2.2.1 Structures de modules généralisées. . . . .	32
2.2.2 Applications linéaires définies par blocs. . . . .	35
2.2.3 La matrice des relations de commutation. . . . .	37
2.3 Préliminaires matriciels. . . . .	38
2.3.1 Un lemme d'algèbre linéaire. . . . .	38
2.3.2 Décomposition de familles de matrices. . . . .	40
2.3.3 Minoration du rang de $V^n$ . . . . .	44
2.3.4 Critère d'injectivité. . . . .	45
2.3.5 Multirang et type de décomposition. . . . .	47
2.4 Étude de la stratification. . . . .	51
2.4.1 Stratification concernant les applications linéaires. . . . .	52
2.4.2 Stratification concernant les structures de module. . . . .	53
2.4.3 Existence de décompositions pour les structures de module. . . . .	56
2.4.4 Majoration des dimensions des strates. . . . .	58
2.4.5 Récapitulation. . . . .	62

2.5	Un changement de variables. . . . .	65
2.5.1	Traduction des contraintes. . . . .	66
2.5.2	Calcul de $\mu(\alpha)$ . . . . .	67
2.5.3	Calcul de $\nu(\alpha)$ . . . . .	70
2.5.4	Récapitulation numérique. . . . .	72
2.6	Fin de la démonstration . . . . .	73
2.6.1	Démonstration de l'irréductibilité. . . . .	75
2.6.2	Étude de la dimension. . . . .	77
<b>3</b>	<b>Les courbes à cohomologie semi-naturelle.</b>	<b>79</b>
3.1	La caractéristique d'Euler et la cohomologie. . . . .	81
3.1.1	Le degré et le genre. . . . .	82
3.1.2	Différences successives. . . . .	85
3.2	La fonction de Rao. . . . .	86
3.3	Les résolutions et la structure du module de Rao. . . . .	91
3.3.1	La résolution d'un module. . . . .	91
3.3.2	Les résolutions de l'idéal de la courbe. . . . .	93
3.3.3	Les valeurs de la fonction $q$ . . . . .	94
3.3.4	Les modules optimaux. . . . .	95
3.4	Étude de la lissité. . . . .	100
3.4.1	Détermination des courbes minimales. . . . .	100
3.4.2	Des conditions numériques. . . . .	103
3.4.3	Un lemme de lissité. . . . .	104
3.5	Conditions d'obstruction. . . . .	105
3.5.1	L'espace tangent au schéma des modules de Rao. . . . .	106
3.5.2	Lien avec le schéma $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ . . . . .	107
3.5.3	Calcul des groupes d'extension. . . . .	109
3.5.4	Une condition nécessaire et parfois suffisante d'obstruction. . . . .	111
3.6	Récapitulation. . . . .	114
<b>4</b>	<b>Étude de la largeur trois.</b>	<b>117</b>
4.1	Synthèse des conditions. . . . .	118
4.2	Les modules commençants. . . . .	119
4.3	Le cas $p = 2$ . . . . .	121
4.3.1	Un lemme préliminaire. . . . .	122
4.3.2	Étude du cas $\text{rg } u_0 = 3$ . . . . .	124
4.3.3	Étude du cas $\text{rg } u_0 = 4$ . . . . .	127
4.4	Le cas $p = 3$ . . . . .	135

# Introduction.

DANS CE TRAVAIL, NOUS NOUS ATTACHONS successivement à deux problèmes liés à la classification des courbes gauches. Nous étudions d'abord l'irréductibilité et la dimension des schémas qui paramètrent les structures de module de Rao, puis la question de Sernesi–Walter. Dans cette introduction, nous rappelons succinctement la formulation de ces deux problèmes ainsi que la place qu'ils occupent dans la classification des courbes gauches, avant d'énoncer nos principaux résultats. Nous reviendrons plus en détail au chapitre 1 sur les tenants et aboutissants de ces deux questions, en rappelant les résultats qui étaient précédemment connus ; nous préciserons alors certaines notations.

Pour classifier les courbes gauches, on considère le schéma de Hilbert des courbes de degré  $d$  et genre  $g$ . Afin d'utiliser les techniques et outils liés à la liaison, au premier rang desquels le module de Rao, on se restreint ici aux courbes sans point isolé ni immergé. Nous appelons ainsi **courbe** un sous-schéma localement de Cohen-Macaulay de  $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^3$  de pure dimension 1, où  $\mathbb{k}$  est un corps algébriquement clos fixé. Ces courbes forment un sous-schéma ouvert, que l'on note  $H_{d,g}$ , du schéma de Hilbert général  $\text{Hilb}_{\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^3}^{nd+1-g}$ .

## 1 Le schéma des modules de Rao.

Pour étudier le schéma  $H_{d,g}$ , Mireille Martin-Deschamps et Daniel Perrin introduisent dans [MDP–1] une démarche que nous commençons par détailler ici car elle fonde notre travail. À chaque courbe  $C$  de degré  $d$  et genre  $g$ , ils associent deux fonctions  $\gamma$  et  $\rho$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  à support fini, appelées respectivement le **caractère de postulation** et la **fonction de Rao** de la courbe  $C$ . Ces deux fonctions permettent de décrire toute la cohomologie de la courbe, c'est-à-dire la collection des entiers  $h^i \mathcal{J}_C(n)$  pour  $i \in \{0, 1, 2\}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

Pour chaque couple  $(\gamma, \rho)$ , c'est-à-dire pour chaque cohomologie possible, ils définissent ensuite un schéma  $H_{\gamma,\rho}$  qui représente les familles plates de courbes dont la cohomologie est constante et donnée par  $\gamma$  et  $\rho$ . Ces schémas  $H_{\gamma,\rho}$  forment des sous-schémas localement fermés des schémas  $H_{d,g}$  dont ils établissent une stratification. Il faut cependant noter que la structure d'un schéma  $H_{\gamma,\rho}$  donné n'est pas nécessairement la structure induite par celle du schéma  $H_{d,g}$  qui le contient. En particulier, même lorsque le support du premier correspond à un ouvert topologique du second, le schéma  $H_{\gamma,\rho}$  peut être génériquement lisse sans que l'ouvert correspondant de  $H_{d,g}$  le soit.

Contrairement à ce qu'on aurait pu espérer, les schémas  $H_{\gamma,\rho}$  ne sont pas toujours irréductibles. Se donner les seuls invariants numériques  $\gamma$  et  $\rho$ , c'est-à-dire la cohomologie de la courbe, ne suffit donc pas pour séparer les composantes de  $H_{d,g}$ , c'est-à-dire pour atteindre

l'objectif fixé il y a un siècle par G. Halphen dans [Hal]. On est ainsi conduit à rechercher de nouveau les composantes des schémas  $H_{\gamma,\rho}$ . Pour ce faire, M. Martin-Deschamps et D. Perrin considèrent l'invariant non plus numérique mais algébrique qu'est le module de Hartshorne-Rao de la courbe  $C$ , c'est-à-dire le module  $M_C = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^1 \mathcal{J}_C(n)$ , que nous appellerons simplement ici module de Rao. Cet invariant a été introduit par Robin Hartshorne dans [H-1] et étudié par A. P. Rao dans [Rao]; il caractérise les classes de biliaison à décalage près et les classes de liaison à décalage et dualité près.

M. Martin-Deschamps et D. Perrin considèrent ainsi la flèche  $\Phi$  qui à une courbe  $C$  associe son module de Rao  $M_C$ . Une première difficulté consiste à définir proprement l'image de  $\Phi$ , c'est-à-dire à construire un schéma paramétrant les modules de Rao. Pour cela, ces auteurs rigidifient la situation en fixant une base de chaque espace vectoriel  $H^1 \mathcal{J}_C(n)$ . Ils aboutissent ainsi à la notion de structure de module de Rao et définissent un schéma  $\widehat{E}_\rho$  qui paramètre ces dernières. Ils définissent également un schéma  $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$  qui est un fibré au-dessus de  $H_{\gamma,\rho}$  et qui permet de relever la flèche  $\Phi$  en un morphisme de schémas  $\widehat{\Phi}$  de  $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$  dans  $\widehat{E}_\rho$ . Ils montrent alors que le morphisme  $\widehat{\Phi}$  est lisse irréductible et calculent également la dimension de ses fibres.

Ce résultat entraîne d'une part que l'image de la flèche  $\widehat{\Phi}$  est un sous-schéma ouvert du schéma  $\widehat{E}_\rho$ . Il entraîne d'autre part que tout renseignement concernant ce dernier, par exemple la détermination des composantes ou de leurs dimensions ou encore celle des singularités, se relève immédiatement en un résultat analogue concernant le schéma  $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ . Cette constatation permet de décomposer l'étude des schémas  $H_{d,g}$  en trois étapes, l'étape intermédiaire ou étape du milieu étant celle résolue par ce qui précède.

L'étape du haut consiste à recoller entre eux les schémas  $H_{\gamma,\rho}$  de façon à reconstituer le schéma  $H_{d,g}$ . Ceci nécessite d'étudier comment varie le module de Rao au sein d'une famille de courbes lorsque celle-ci rencontre différents schémas  $H_{\gamma,\rho}$ . Ces questions font l'objet de travaux actuels de R. Hartshorne, M. Martin-Deschamps et D. Perrin (cf. [HMDP-1], [HMDP-2] et [HMDP-3]).

Par opposition, l'étape du bas est l'étude pour eux-mêmes des schémas  $\widehat{E}_\rho$ , en particulier du point de vue des composantes, des dimensions et des singularités. Cette étape pose des problèmes nombreux et difficiles qui ont été peu étudiés jusqu'à présent; c'est elle que nous abordons dans ce travail. M. Martin-Deschamps et D. Perrin ont entamé son étude dans [MDP-2] dans le cas des modules de largeur trois, où la largeur désigne le cardinal du support de la fonction  $\rho$ , c'est-à-dire le nombre d'entiers  $n \in \mathbb{Z}$  vérifiant  $h^1 \mathcal{J}_C(n) \neq 0$ . Une fonction de largeur 3 dépend ainsi de trois paramètres  $(p, q, r)$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ ; on note  $\widehat{E}_{p,q,r}$  le schéma qui leur est associé.

Avant de s'attaquer aux questions plus difficiles que sont la détermination des composantes ou celle des singularités, on peut se demander pour quelles fonctions  $\rho$  le schéma  $\widehat{E}_\rho$  est irréductible. M. Martin-Deschamps et D. Perrin montrent que la question ne se pose précisément qu'en largeur trois, la réponse étant «pour toutes fonctions» en largeurs inférieures et «pour aucune» en largeurs plus grandes. Ils montrent qu'en largeur trois une condition nécessaire pour que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  soit irréductible est que le triplet  $(p, q, r)$  vérifie  $4q \geq \max(6r + p, 6p + r)$  et ils conjecturent que cette condition est également suffisante. De plus, ils établissent que lorsque ce schéma est irréductible il est génériquement

lisse, intersection complète et de dimension  $4pq + 4qr - 6pr$ . Enfin, ils entament l'étude des composantes dans le cas général et décrivent notamment en détail le schéma  $\widehat{E}_{2,2,2}$ .

## 2 La question de Sernesi–Walter.

Cette question vise à étendre les résultats que Geir Ellingsrud a démontré dans [Ell], à savoir que les courbes arithmétiquement de Cohen-Macaulay (en abrégé ACM), c'est-à-dire celles qui vérifient  $h^1 \mathcal{J}_C(n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , forment un sous-schéma ouvert lisse de  $H_{d,g}$ . Ce résultat relie une propriété d'annulation de certains groupes de cohomologie de la courbe au fait qu'elle est non-obstruée, c'est-à-dire qu'elle correspond à un point lisse du schéma de Hilbert.

Cherchant à étendre ce résultat, Eduardo Sernesi a demandé si une courbe de rang maximum, c'est-à-dire telle que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  l'un au plus des entiers  $h^0 \mathcal{J}_C(n)$  et  $h^1 \mathcal{J}_C(n)$  est non nul, est nécessairement un point lisse du schéma de Hilbert. La réponse est négative, comme l'ont montré de façon indépendante M. Martin-Deschamps et D. Perrin dans [MDP-1], G. Bolondi, J. O. Kleppe et R. Mirò-Roig dans [BKM] et enfin C. Walter dans [W-1]. Ce dernier ajoute que la courbe qu'il fournit n'est pas à cohomologie semi-naturelle, c'est-à-dire telle que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  l'un au plus des entiers  $h^i \mathcal{J}_C(n)$  pour  $i \in \{0, 1, 2\}$  est non nul, et demande si les courbes qui vérifient cette dernière propriété sont des points lisses du schéma de Hilbert. Nous nous référerons ici à cette question, qui raffine la précédente, sous le nom de question de Sernesi–Walter.

M. Martin-Deschamps et D. Perrin étudient cette question dans l'article [MDP-2]. Ils construisent une courbe qui est à la fois à cohomologie semi-naturelle et obstruée dans le schéma de Hilbert, ce qui répond à cette question de nouveau par la négative. Toutefois, cette courbe n'est ni lisse ni irréductible. Les auteurs demandent alors s'il est possible d'obtenir une courbe qui soit à la fois lisse irréductible, à cohomologie semi-naturelle et obstruée; c'est ce que nous appellerons ici la question de Sernesi–Walter restreinte.

La difficulté de cette question provient du fait que l'on recherche une courbe qui satisfasse simultanément trois conditions de nature assez différente : les deux premières sont des conditions ouvertes portant sur la courbe elle-même, qui concernent l'une sa lissité et l'autre sa cohomologie. tandis que la troisième est une condition fermée portant sur sa situation dans le schéma de Hilbert. De façon sommaire, on peut dire que l'on cherche une «belle» courbe par elle-même qui corresponde cependant à un «mauvais» point du schéma de Hilbert.

Le lien de cette question avec la démarche formulée par M. Martin-Deschamps et D. Perrin, et plus précisément avec l'étape du bas, est le suivant. D'après [MDP-2], les courbes à cohomologie semi-naturelle forment un sous-schéma ouvert de  $H_{d,g}$  non seulement du point de vue topologique mais aussi schématique. L'étape du haut ne pose donc aucun problème en ce qui les concerne. L'étape du milieu étant résolue par ailleurs, il ne reste plus que l'étape du bas dans leur étude. En particulier, une telle courbe est obstruée dans le schéma de Hilbert si et seulement si son module de Rao l'est dans le schéma des structures de modules de Rao qui lui correspond. Ceci fournit un moyen de prendre en compte la condition fermée contenue dans les questions de Sernesi–Walter générale ou restreinte. D'après [MDP-2] cette condition impose que la largeur du module soit au moins égale à 3.

### 3 Résultats concernant les schémas de structures de modules.

Nous nous intéressons d'abord dans ce travail à l'irréductibilité des schémas  $\widehat{E}_p$  dans le cadre des modules de largeur 3, qui est le seul où la question se pose. Nous étudions également leur dimension dans le même cadre. Nous considérons ensuite la question de Sernesi–Walter dans le cas des courbes lisses irréductibles, ce qui nous ramène à étudier certains modules de largeur supérieure ou égale à 3.

Nous prolongeons ainsi l'étude entamée dans [MDP–2] dans deux directions différentes, qui structurent notre travail en deux parties complètement indépendantes l'une de l'autre. Le point commun entre ces deux sujets est que chacun se ramène à un problème lié à l'étape du bas : c'est évident pour la première question et cela découle immédiatement de [MDP–2] pour la seconde.

Nous n'obtenons que des résultats partiels en ce qui concerne aussi bien l'une que l'autre question. Toutefois, les résultats que nous montrons au sujet de la première sont bien plus satisfaisants que ceux concernant la seconde, pour laquelle nous sommes loin de fournir une réponse complète. En ce qui concerne l'irréductibilité des schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}$  au contraire, nous prouvons la conjecture énoncée dans [MDP–2] presque entièrement, et ne laissons qu'un petit nombre de cas incertains. Nous déterminons en outre la dimension du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  dans la plupart des cas où il possède plusieurs composantes, qui sont les seuls où la question se pose puisque la dimension du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est déterminée dans [MDP–2] lorsqu'il est irréductible. Nous décrivons alors de façon explicite une composante qui est génériquement lisse et possède la dimension maximale. Nous montrons de plus qu'en général elle est la seule à atteindre cette dimension. De façon précise, nous établissons les résultats suivants :

**Théorème 1 (Irréductibilité) :** *Soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ . On fixe les entiers  $p$  et  $r$  en faisant varier  $q$ .*

*i) Si  $r/p \notin ]4/9, 9/4[$  la conjecture énoncée dans [MDP–2] est vraie : le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est irréductible si et seulement si on a  $4q \geq \max(6r + p, 6p + r)$ .*

*ii) Si  $r/p \in ]4/9, 9/4[$  on a seulement une condition suffisante : le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est irréductible dès que l'on a  $4q \geq \min(10r + 2p, 10p + 2r)$ .*

**Théorème 2 (Dimension) :** *Soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ . On pose  $\nu = \min[12(r-p), 6r-p]$  si  $r \geq p$  et  $\nu = \min[12(p-r), 6p-r]$  si  $r \leq p$ . On suppose  $4q \leq \nu$ , ce qui entraîne que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  possède plusieurs composantes. Alors la dimension de toute composante de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est majorée par  $4q \times \max(p, r)$  et il existe une composante génériquement lisse atteignant cette dimension, que l'on sait décrire exactement. Si de plus  $4q < \nu$  cette composante est la seule à posséder la dimension maximale.*

L'intérêt du théorème 2 est renforcé par la description détaillée du schéma  $\widehat{E}_{2,2,2}$  effectuée dans [MDP–2]. En effet, ce schéma pour lequel les hypothèses du théorème 2 ne sont pas vérifiées échappe également à sa conclusion, dans la mesure où il possède une composante de dimension 17. Déterminer exactement pour quels triplets  $(p, q, r)$  cette conclusion reste ou non valable est d'ailleurs une question ouverte.

Les résultats des théorèmes 1 et 2 étant donnés par des expressions homogènes en  $(p, q, r)$ , il est facile de les représenter graphiquement en fixant la valeur de  $p$ . Ils sont résumés par la

figure 1 (cf. page 11), dans laquelle on a porté respectivement en abscisses et en ordonnées les valeurs de  $r$  et  $q$ . On a de plus indiqué la position du schéma  $\widehat{E}_{p,p,p}$  qui correspond de façon générale au schéma  $\widehat{E}_{2,2,2}$ .

La démonstration de ces résultats d'irréductibilité et de dimension s'effectue de manière naturelle en utilisant un raisonnement par récurrence. Celle-ci s'applique au nombre  $n$  de variables de l'anneau de polynômes utilisé pour définir les structures de modules, l'anneau  $R = \mathbb{k}[X, Y, Z, T]$  qui définit  $\mathbb{P}^3$  correspondant au cas  $n = 3$ . Cette démarche, dont nous montrerons l'intérêt un peu plus loin, nous amène à considérer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  un schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  analogue au schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  et défini en remplaçant  $R$  par l'anneau de polynômes  $R^n = \mathbb{k}[X^0, \dots, X^n]$ . La conjecture qui généralise dans ce cadre celle formulée dans [MDP-2] pour  $n = 3$  est que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible dès que l'on a la relation :

$$(0.1) \quad (n+1)q \geq \max \left[ \frac{n(n+1)}{2} r + p, \frac{n(n+1)}{2} p + r \right].$$

C'est cette conjecture généralisée que nous étudions en réalité ici. Nous montrons à son sujet les résultats suivants, dont les théorèmes énoncés ci-dessus ne sont que des cas particuliers :

**Théorème 1 – Cas général :** Soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$  et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $I_n$  l'intervalle ouvert  $I_n = ]\frac{n+1}{2n+3}, \frac{2n+3}{n+1}[$ . On fixe les entiers  $p$  et  $r$  en faisant varier  $q$ .

i) Si  $r/p \notin I_n$  la conjecture énoncée ci-dessus est vraie : le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible dès que l'on a  $(n+1)q \geq \max \left[ \frac{n(n+1)}{2} r + p, \frac{n(n+1)}{2} p + r \right]$ .

ii) Si  $r/p \in I_n$  nous obtenons seulement une condition suffisante plus faible : le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible dès que l'on a  $2q \geq \min [(2n-1)r + p, (2n-1)p + r]$ .

**Théorème 2 – Cas général :** Soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$  et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\nu^n$  l'entier  $\nu^n = \min [n(n+1)(r-p), \frac{n(n+1)}{2}r - p]$  si  $r \geq p$  et  $\nu^n = \min [n(n+1)(p-r), \frac{n(n+1)}{2}p - r]$  si  $r \leq p$ . On suppose  $(n+1)q \leq \nu^n$ . Alors le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  possède plusieurs composantes et la dimension de chacune d'elles est majorée par  $(n+1)q \times \max(p, r)$ . Il existe de plus une composante génériquement lisse qui atteint cette dimension, que l'on sait décrire exactement. Enfin si on a  $(n+1)q < \nu^n$  cette composante est la seule à posséder la dimension maximale.

En réalité, la conjecture qui généralise le plus complètement celle exprimée dans [MDP-2] est celle qui affirme que la condition (0.1) est à la fois nécessaire et suffisante pour que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  soit irréductible. Dans la mesure où notre but est l'application au cas  $n = 3$ , pour lequel la nécessité est déjà connue, et non l'étude pour eux-mêmes des schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$ , nous ne recherchons ici que des conditions suffisantes d'irréductibilité et non des conditions nécessaires. On pourrait cependant tout à fait envisager de chercher des conditions sur le triplet  $(p, q, r)$  qui assurent que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  possède plusieurs composantes, voire d'étudier si la condition (0.1) est effectivement nécessaire.

Notons cependant déjà dans cette direction que le théorème 2 sous sa forme générale détermine de tels triplets. Nous montrerons en outre dans la suite du texte que lorsque le



triplet  $(p, q, r)$  vérifie les deux relations  $q \geq \min [np - E(p/2), nr - E(r/2)]$  et  $(n+1)q \geq \max(p, r)$ , il possède obligatoirement plusieurs composantes s'il ne vérifie pas la relation (0.1), qui est bien dans ce cas une condition nécessaire d'irréductibilité.

La démonstration des versions générales des théorèmes 1 et 2 occupe tout le chapitre 2. Elle repose sur le principe suivant, énoncé dans [MDP-2]: pour étudier le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$ , on projette celui-ci sur le schéma qui paramètre les structures de modules de largeur 2 définies par  $p$  et  $q$ , que l'on note  $\widehat{E}_{p,q}$ . Cette projection consiste à oublier une partie de la structure du module. Elle établit une surjection de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  sur  $\widehat{E}_{p,q}$ , et la fibre d'une structure de module  $u_0$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  est un espace vectoriel dont la dimension dépend du rang d'une matrice  $v_0$  qui est naturellement associée à  $u_0$ . De façon précise, la structure de module  $u_0$  correspond à la donnée de quatre matrices  $X_0, Y_0, Z_0$  et  $T_0$  de taille  $(q, p)$  et la matrice  $v_0$  dont on recherche le rang est la matrice définie par blocs par :

$$v_0 = \begin{pmatrix} Y_0 & Z_0 & T_0 & 0 & 0 & 0 \\ -X_0 & 0 & 0 & Z_0 & T_0 & 0 \\ 0 & -X_0 & 0 & -Y_0 & 0 & T_0 \\ 0 & 0 & -X_0 & 0 & -Y_0 & -Z_0 \end{pmatrix}$$

M. Martin-Deschamps et D. Perrin suggèrent d'étudier la stratification naturelle de  $\widehat{E}_{p,q}$ , c'est-à-dire en définitive celle de  $(M_{q,p})^4$ , par le rang de cette matrice  $v_0$ . On a en fait seulement besoin pour conclure de connaître les dimensions des strates. Malheureusement, cette stratification est extrêmement difficile à étudier: il est en effet très malaisé de déterminer le rang de la matrice  $v_0$  à partir des données  $X_0, Y_0, Z_0$  et  $T_0$ . En particulier, connaître ou même seulement majorer la dimension de ces strates semble encore inaccessible.

L'idée nouvelle que nous introduisons pour résoudre ce problème consiste à construire une autre stratification de  $\widehat{E}_{p,q}$ , sans doute moins naturelle que la précédente mais plus adaptée au problème considéré. Dans la mesure où le rang de la matrice  $v_0$  est difficile à calculer, nous nous contentons d'en chercher une minoration. Cette recherche fait apparaître un certain nombre d'invariants, qui définissent la stratification voulue. Celle-ci est donc moins efficace que la précédente, dans la mesure où elle ne fournit sur chaque strate qu'une minoration du rang de la matrice  $v_0$ , mais elle est plus satisfaisante pour le problème qui nous occupe car il est plus facile de majorer la dimension de ses strates. Il est à noter ici que ni la minoration du rang de  $v_0$  que nous obtenons sur les strates, ni la majoration des dimensions de celles-ci ne sont a priori optimales. Ces deux remarques expliquent pourquoi la méthode n'aboutit pas dans certains cas, qui se révèlent être ainsi les plus ardues. Elles suggèrent également deux pistes possibles pour améliorer nos résultats.

La seconde idée que nous introduisons consiste à ramener de proche en proche la question considérée à un problème analogue mais n'utilisant plus que trois des quatre variables  $(X, Y, Z, T)$ , puis deux, puis une. Cette idée est déjà esquissée dans [MDP-2]; nous l'utilisons ici plus systématiquement. La stratification que nous construisons se définit ainsi naturellement par récurrence et s'étudie de même. C'est cette constatation qui nous amène à introduire les schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  et  $\widehat{E}_{p,q}^n$  déjà mentionnés qui généralisent les schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}$  et  $\widehat{E}_{p,q}$ .

Pour construire puis étudier notre stratification, nous définissons sur les schémas  $\widehat{E}_{p,q}^n$  deux invariants qui sont en fait équivalents, le **multirang** et le **type numérique**. Le premier est défini de façon plus intrinsèque et permet de construire rigoureusement la stratification ; le second sert ensuite à minorer le rang de la matrice qui est l'analogue dans le cadre général de la matrice  $v_0$ . Nous utilisons enfin les deux invariants simultanément pour majorer la dimension des strates. Tous nos résultats concernant cette stratification sont récapitulés au paragraphe 2.4.5 ; nous en déduisons pour finir les théorèmes 1 et 2 au paragraphe 2.6.

## 4 Résultats concernant la question de Sernesi–Walter.

Nos résultats concernant cette question, ou plutôt la question de Sernesi–Walter restreinte, sont plus éloignés d'un résultat définitif que les précédents. Nous ne sommes ainsi parvenu, ni à construire une courbe à cohomologie semi-naturelle qui soit à la fois lisse irréductible et obstruée, ni à prouver qu'une telle courbe ne peut exister. De plus, les méthodes que nous employons ne donnent pas d'indication quant à la réponse finale et la question reste encore ouverte.

Cela étant, ces méthodes nous permettent déjà d'éliminer les cas les plus simples que l'on peut envisager dans la recherche d'une telle courbe, ce qui fournit a contrario un critère de non-obstruction. Nous montrons ainsi le résultat suivant :

**Théorème 3 :** *Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle lisse irréductible. On pose  $r_a = \min \{n \in \mathbb{Z} \mid h^1 \mathcal{J}_C(n) \neq 0\}$  et  $p = h^1 \mathcal{J}_C(r_a)$ . Si le module de Rao de  $C$  est de largeur 3 et si on a  $p \leq 2$ , la courbe  $C$  est non-obstruée.*

Ce théorème élimine bien les premiers cas pour lesquels la question de Sernesi–Walter restreinte se pose réellement, dans la mesure où d'après [MDP–2] une courbe dont le module de Rao est de largeur 1 ou 2 n'est jamais obstruée. Les cas les plus simples à considérer ensuite sont alors ceux où la fonction de Rao est de largeur 3, et l'hypothèse que nous faisons sur l'entier  $h^1 \mathcal{J}_C(r_a)$  signifie qu'en un certain sens nous nous restreignons aux fonctions de cette largeur qui prennent les plus petites valeurs.

Ce résultat n'indique donc pas qu'il est impossible qu'une courbe de  $\mathbb{P}_k^3$  remplisse simultanément les trois conditions exigées, mais seulement que si une telle courbe existe elle possède nécessairement un niveau plus grand de complexité. En particulier sa fonction de Rao doit être de largeur plus grande ou bien prendre de plus grandes valeurs. Par conséquent, il apparaît désormais que pour produire un exemple explicite d'une telle courbe, s'il en existe, il faudra prendre en compte un nombre important de coefficients et de paramètres. Cette tâche ne semble donc pas être aisément réalisable par les méthodes dont on dispose actuellement. La question de Sernesi–Walter dans le cadre restreint des courbes lisses irréductibles se révèle ainsi plus coriace qu'elle n'aurait pu le paraître à première vue, et il est probable que pour la résoudre il faudra inventer des outils et une démarche différant radicalement de ceux que nous développons ici.

La démonstration que nous effectuons du théorème 3 nécessite déjà un certain travail, que nous développons au chapitre 4. Elle requiert en particulier une étude assez poussée de certains modules de largeur 3, du moins dans le cas où  $p$  est égal à 2 car le cas  $p = 1$  se révèle quant à lui immédiat. Cette distinction n'est pas anodine : la complexité de cette étude,

dû essentiellement à la grande dimension des schémas considérés, c'est-à-dire au nombre des indéterminées qu'il faut prendre en compte, augmente en effet considérablement avec l'entier  $p$ . Nous citons au paragraphe 4.4 les résultats, partiels, que fournissent les mêmes méthodes dans le cas  $p = 3$ , en soulignant les raisons qui les empêchent alors d'aboutir.

La démonstration du théorème 3 repose sur l'analyse d'un certain nombre de conditions qui sont nécessaires pour qu'une courbe  $C$  soit à la fois à cohomologie semi-naturelle, lisse irréductible et obstruée : il suffit de montrer que ces conditions sont incompatibles sous les hypothèses considérées. La détermination de telles conditions est donc un préalable obligatoire pour notre démonstration. Nous y consacrons ici le chapitre 3, dans lequel nous étudions de façon générale les courbes à cohomologie semi-naturelle. Ayant en vue la question de Sernesi-Walter, nous mettons évidemment l'accent sur les questions de lissité et d'obstruction de ces courbes, mais nous les étudions également de façon plus large. Les résultats de ce chapitre conservent ainsi un intérêt en dehors de la question de Sernesi-Walter. En particulier, ils complètent des travaux précédents de G. Bolondi et J.-C. Migliore [BM-2] et de G. Fløystad [Flø].

En lien avec la démarche introduite dans [MDP-1], nous cherchons dans le chapitre 3 à traduire spécifiquement sur le module de Rao ou sur la fonction de Rao les propriétés des courbes, en particulier celles qui interviennent dans la question de Sernesi-Walter restreinte. Cette méthode est justifiée par la remarque déjà signalée selon laquelle l'étude des courbes à cohomologie semi-naturelle peut se ramener entièrement à des problèmes liés à l'étape du bas. Nous commençons par chercher quelles fonctions à support fini et quels modules peuvent être respectivement la fonction de Rao et le module de Rao d'une courbe à cohomologie semi-naturelle. Nous étudions ensuite, parmi les modules qui correspondent effectivement à une telle courbe, lesquels fournissent des courbes lisses irréductibles ou des courbes obstruées.

Nous recherchons à chaque fois aussi bien des conditions nécessaires que suffisantes, alors qu'évidemment seules les premières servent à démontrer le théorème 3. Les conditions que nous obtenons dans ce chapitre sont récapitulées en détail au paragraphe 3.6. Un certain nombre d'entre elles recourent les résultats de [MDP-2], [BM-2] et [Flø]; nous en donnons parfois une démonstration plus succincte ou une formulation plus concise. D'autres au contraire sont des résultats nouveaux. En combinant ceux-ci avec une synthèse des résultats précédemment connus, le chapitre 3 dresse en quelque sorte un panorama de l'étude des courbes à cohomologie semi-naturelle.

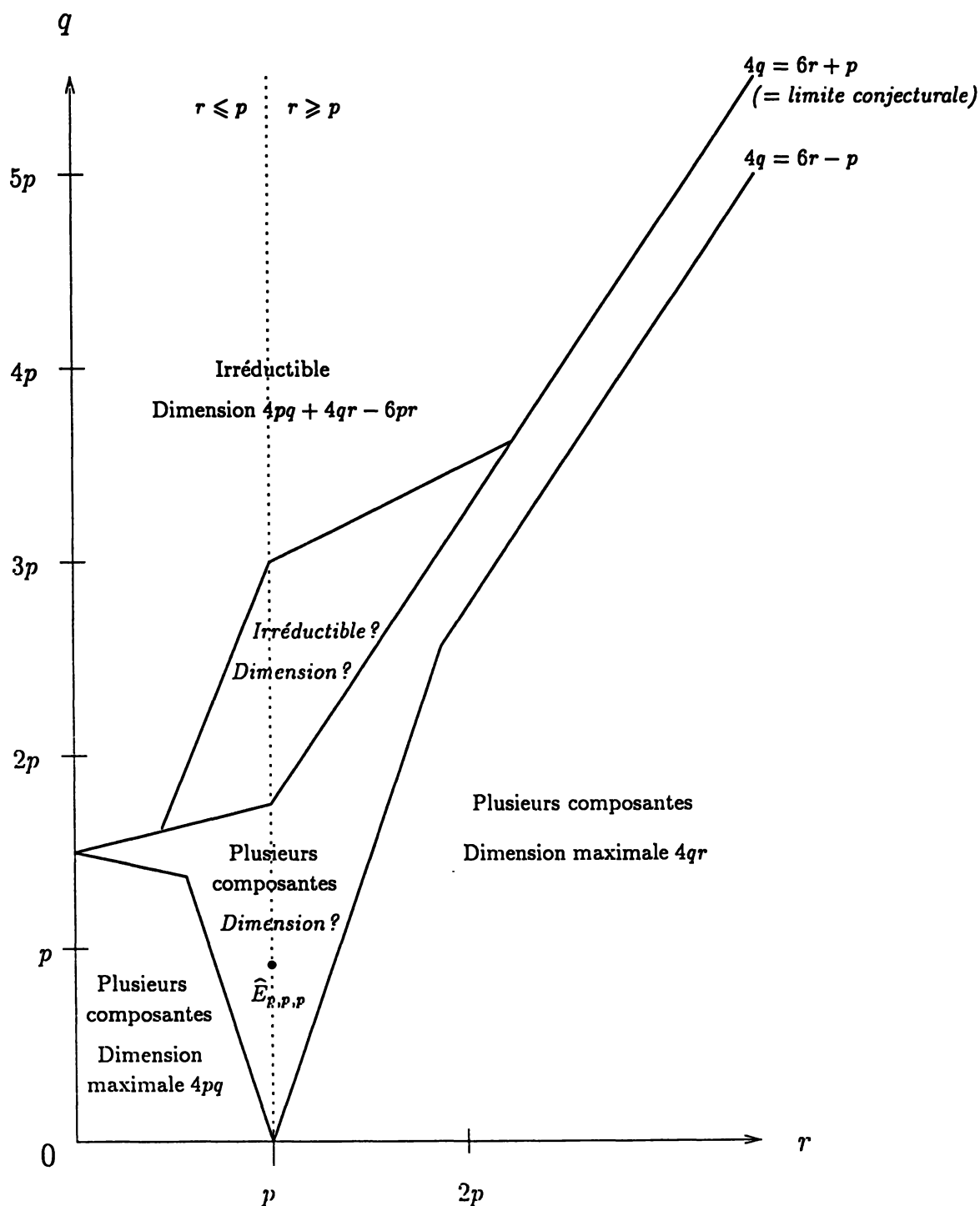


FIG. 0.1 – Irréductibilité et dimension des schémas  $\widehat{E}_{r,q,r}$  avec  $p$  fixé dans le cas  $n = 3$ .



# Chapitre 1

## Notations et rappels.

**O**N DÉSIGNE PAR  $\mathbf{k}$  un corps algébriquement clos. On note  $\mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n$  ou simplement  $\mathbb{P}^n$  l'espace projectif de dimension  $n$  sur  $\mathbf{k}$ , et  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$  son faisceau de fonctions. On s'intéresse ici au cas  $n = 3$ ; on note  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$  le faisceau  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ . On note  $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$  la  $\mathbf{k}$ -algèbre  $\mathbf{k}[X, Y, Z, T]$  munie de sa graduation naturelle par le degré.

On note de façon générale avec une minuscule la dimension de l'espace vectoriel désigné par la même expression commençant par une majuscule. Ainsi  $\ker$ ,  $\text{im}$ ,  $\text{coker}$ ,  $\text{hom}$ ,  $\text{ext} \dots$  désignent respectivement les dimensions des espaces  $\text{Ker}$ ,  $\text{Im}$ ,  $\text{Coker}$ ,  $\text{Hom}$ ,  $\text{Ext} \dots$  qui leur correspondent. De même, si  $\mathcal{F}$  est un  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ -module cohérent on note  $h^i \mathcal{F}$  la dimension de l'espace vectoriel  $H^i \mathcal{F} = H^i(\mathbb{P}^3, \mathcal{F})$ .

On appelle **courbe gauche** ou simplement **courbe** tout sous-schéma fermé  $C$  de  $\mathbb{P}^3$  de pure dimension 1 et localement de Cohen-Macaulay, c'est-à-dire sans composante ponctuelle isolée ni immergée; on note  $\mathcal{J}_C$  son faisceau d'idéaux et  $\mathcal{O}_C$  son faisceau de fonctions. Ces conditions assurent que l'on a  $h^1 \mathcal{J}_C(n) = 0$  pour  $n \gg 0$  aussi bien que pour  $n \ll 0$ ; c'est le cadre optimal pour pouvoir utiliser les techniques de dualité ou de liaison et pour pouvoir parler du module de Rao. Nous nous intéressons ici à la classification de ces courbes, c'est-à-dire à l'étude du schéma de Hilbert qui les paramètre.

Dans ce chapitre nous posons les définitions dont nous aurons besoin dans toute la suite, et rappelons l'historique des questions que nous considérons de façon plus détaillée que nous ne l'avons fait dans l'introduction.

### 1.1 Notations diverses.

Nous reprenons pour l'essentiel les notations de M. Martin-Deschamps et D. Perrin telles qu'elles sont définies dans [MDP-1] ou [MDP-2]. Précisons toutefois les notations suivantes.

#### a) Polynômes binômiaux.

**Définition 1.1.** Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On note  $\begin{bmatrix} X \\ N \end{bmatrix}$  le polynôme  $\frac{X(X-1) \cdots (X-N+1)}{N!}$ , que l'on appelle **polynôme binomial**.

Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on appelle encore par abus de langage «polynôme binomial» la valeur en  $n$  de ce polynôme, que l'on note  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ N \end{smallmatrix} \right]$ , afin de la distinguer du coefficient binomial  $\binom{n}{N}$ . Ce dernier coïncide avec  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ N \end{smallmatrix} \right]$  pour  $n \geq 0$ , et est nul pour  $n < 0$ . Les polynômes binomiaux vérifient pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et  $N \in \mathbb{N}$  la formule du triangle de Pascal :

$$\left[ \begin{smallmatrix} n+1 \\ N \end{smallmatrix} \right] - \left[ \begin{smallmatrix} n \\ N \end{smallmatrix} \right] = \left[ \begin{smallmatrix} n \\ N-1 \end{smallmatrix} \right].$$

### b) Fonctions à support fini.

Nous adoptons les définitions suivantes. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  à support fini. On note respectivement  $\alpha(f)$  et  $\omega(f)$ , ou  $\alpha$  et  $\omega$  s'il n'y a pas d'ambiguïté, les entiers  $\min \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) \neq 0\}$  et  $\max \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) \neq 0\}$ . Ils valent respectivement  $+\infty$  et  $-\infty$  si  $f$  est nulle, et vérifient  $\alpha \leq \omega$  sinon. On appelle **diamètre** de  $f$  celui de son support, c'est-à-dire  $0$  si  $f$  est nulle et  $\omega - \alpha + 1$  sinon. On dit que  $f$  est **connexe** si et seulement si elle est nulle ou vérifie  $f(n) \neq 0$  pour tout  $n \in [\alpha, \omega]$ . On appelle **largeur** de  $f$  le cardinal de son support, que l'on note  $l(f)$ ; elle coïncide avec le diamètre si et seulement si  $f$  est connexe.

On dit que la fonction  $f$  est **normalisée** si et seulement si elle est nulle ou vérifie  $\alpha = 0$ . Si  $f$  est non nulle, on appelle **fonction normalisée associée à  $f$**  la fonction décalée de  $f$  qui à  $n \in \mathbb{Z}$  associe  $f(n + \alpha)$ ; on la note  $\tilde{f}$ . On appelle **fonction duale de  $f$**  la fonction qui à  $n \in \mathbb{Z}$  associe  $f(-n)$ ; on la note  $f^\vee$ . Enfin, on note  $f'$  la fonction normalisée de la fonction duale de  $f$ , c'est-à-dire  $f' = (\tilde{f}^\vee)$ .

Nous appliquerons essentiellement ce qui précède au cas où  $f$  est la fonction de Rao  $\rho$  d'une courbe. On posera alors  $l = l(\rho)$ ,  $r_a = \alpha(\rho)$  et  $r_o = \omega(\rho)$ .

### c) Différences successives.

**Définition 1.2.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ . On note  $\partial f$  la fonction qui à  $n \in \mathbb{Z}$  associe  $f(n) - f(n - 1)$ , que l'on appelle **différence première de  $f$** . On définit par récurrence la **différence  $N$ -ième de  $f$**  pour  $N \in \mathbb{Z}$  en posant  $\partial^N f = \partial(\partial^{N-1} f)$ . Enfin si  $f$  est à support fini on note  $f^\sharp$  la fonction définie par  $f^\sharp(n) = \sum_{k \leq n} f(k)$ .

Si  $f$  est à support fini,  $\partial f$  l'est aussi et vérifie  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \partial f(n) = 0$ . On a en outre  $\partial(f^\sharp) = f$ . Si  $f$  est non nulle de support  $[\alpha, \omega]$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  le support de sa différence  $N$ -ième  $\partial^N f$  est  $[\alpha, \omega + N]$ . La fonction  $f'$ , normalisée de la fonction duale de  $f$ , vérifie  $f'(n) = f(\omega - n)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . On en déduit la relation suivante :

**Proposition 1.3.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ .  $f'$  la fonction normalisée de sa fonction duale et  $N \in \mathbb{N}$ . On a  $\partial^N(f') = (-1)^N (\partial^N f)'$ , c'est-à-dire que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a  $\partial^N f'(n) = (-1)^N \partial^N f(\omega + N - n)$ .

**Démonstration.** Pour  $N = 0$ , on retrouve la formule  $f'(n) = f(\omega - n)$  rappelée ci-dessus. Il suffit ensuite de montrer la proposition pour  $N = 1$ , puis de procéder par récurrence. Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $\partial f'(n) = f'(n) - f'(n - 1) = f(\omega - n) - f(\omega - n + 1) = -\partial f(\omega + 1 - n)$ . ■

On a enfin le lemme suivant d'intégration par parties (sommation d'Abel) :

**Lemme 1.4.** *Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions à support fini de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ . Alors :*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \partial g(n) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \partial f(n+1) g(n).$$

**Démonstration.** On a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) [g(n) - g(n-1)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) g(n) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n+1) g(n) = - \sum_{n \in \mathbb{Z}} [f(n+1) - f(n)] g(n),$$

où toutes les expressions ont un sens car les fonctions considérées sont à support fini. ■

#### d) Une convention concernant les espaces vectoriels.

Nous adoptons enfin dans toute la suite la convention suivante. Si  $E$  est un espace vectoriel et si  $(e_1, \dots, e_n)$  sont des éléments de  $E$ , on désigne par  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  l'espace vectoriel engendré par les  $(e_i)$  que ceux-ci soient ou non indépendants, et on réserve la notation  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$  pour désigner ce même espace lorsque les  $(e_i)$  forment une base.

## 1.2 Rappels et historique.

### 1.2.1 Le module de Rao et les trois étapes.

**Définition 1.5.** *On appelle respectivement postulation, fonction de Rao et spécialité d'une courbe  $C$  les fonctions qui à  $n \in \mathbb{Z}$  associent  $h^i \mathcal{J}_C(n)$  pour  $i \in \{0, 1, 2\}$ . On note  $\rho_C$ , ou  $\rho$  s'il n'y a pas de confusion possible, la fonction de Rao.*

Le support de la postulation est minoré, celui de la spécialité majoré, et celui de la fonction de Rao est fini dans le cas des courbes localement Cohen-Macaulay et sans point isolé. On appelle **largeur** (respectivement **diamètre**) du module de Rao ceux de la fonction de Rao associée. Ces deux notions coïncident si et seulement si la fonction de Rao est connexe. La largeur est nulle si et seulement si la courbe est arithmétiquement Cohen-Macaulay (ACM) ; dans le cas contraire elle est égale à  $r_o - r_a + 1$ .

**Définition 1.6.** *On note  $s_0$  le plus petit degré d'une surface contenant  $C$ , c'est-à-dire  $s_0 = \min \{n \in \mathbb{Z} \mid h^0 \mathcal{J}_C(n) \neq 0\}$ . On note  $e$  l'invariant symétrique  $e = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid h^2 \mathcal{J}_C(n) \neq 0\}$  que l'on appelle **indice de spécialité**.*

**Définition 1.7.** *Soit  $C$  une courbe de  $\mathbb{P}^3$ . On appelle **module de Hartshorne-Rao**, ou simplement **module de Rao** de  $C$ , le  $R$ -module gradué  $M_C = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^1 \mathcal{J}_C(n)$ .*

On le note simplement  $M$  lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion. C'est un  $R$ -module gradué de longueur finie. Sa principale propriété, établie par A. P. Rao dans [Rao] en 1979, est de caractériser les classes de liaison et de biliaison :



**Théorème 1.8. (Rao)**

*i) Deux courbes de  $\mathbb{P}^3$  appartiennent à la même classe de liaison si et seulement si leurs modules de Rao sont isomorphes ou duaux l'un de l'autre au décalage de la graduation près. Elles sont dans la même classe de biliaison si et seulement si leurs modules de Rao sont isomorphes au décalage de la graduation près.*

*ii) Tout  $R$ -module gradué de longueur finie se réalise à décalage près comme le module de Rao d'une courbe de  $\mathbb{P}^3$ , c'est-à-dire que la classe de biliaison associée est non vide.*

On connaît précisément la structure des classes de liaison. Tout d'abord, J. C. Migliore a montré en 1986 dans [Mig] que si  $C$  est une courbe de  $\mathbb{P}^3$  qui n'est pas ACM, il existe un entier  $n \geq 0$  tel que  $h^1 \mathcal{J}_C(n)$  est non nul. En d'autres termes, le module de Rao de  $C$  possède nécessairement des termes non nuls en degré supérieur ou égal à 0.

Ce résultat entraîne immédiatement que pour tout  $R$ -module gradué de longueur finie  $M$  il existe un décalage minimum  $h$  tel que  $M(-h)$  soit le module de Rao d'une courbe. On pose alors la définition suivante :

**Définition 1.9.** *Soit  $M$  un  $R$ -module non nul de longueur finie. On appelle courbe minimale associée à  $M$  toute courbe de la classe de biliaison qui atteint le décalage minimum  $h$ .*

A contrario, R. Lazarsfeld et A. P. Rao ont défini en 1983 dans [LR] des **biliaisons élémentaires triviales**, qui permettent d'augmenter le décalage d'une valeur positive arbitraire; elles augmentent également le degré et le genre. L'ensemble des décalages accessibles à partir d'un module donné est donc l'intervalle d'entiers  $[[h, +\infty[$ . Ces auteurs montrent également le résultat suivant, dont nous nous aurons besoin au chapitre 3 :

**Théorème 1.10. (Lazarsfeld-Rao)**

*Une courbe  $C$  vérifiant  $s_0 > c + 3$  est automatiquement une courbe minimale de sa classe de biliaison. Si elle vérifie de plus  $s_0 > c + 4$  elle est l'unique courbe minimale de cette classe.*

Ils montrent de plus que si la courbe  $C$  vérifie  $s_0 > c + 3$ , toute courbe de la classe de biliaison se déduit de  $C$  par une succession de biliaisons élémentaires triviales ascendantes, donc telles que le degré et le genre augmentent strictement, suivies d'une déformation à cohomologie et module de Rao constants, qui elle les conserve. En 1990, M. Martin-Deschamps et D. Perrin d'une part [MDP-1] et E. Ballico, G. Bolondi et J. C. Migliore d'autre part [BBM] ont généralisé de façon indépendante le point *ii)* de ce résultat, en supprimant l'hypothèse  $s_0 > c + 3$ . Les derniers auteurs l'ont de plus étendue au cas des sous-schémas de codimension 2 de  $\mathbb{P}^n$  où  $n$  est un entier quelconque.

Cette description de la structure des classes de biliaison entraîne alors d'une part que les courbes minimales le sont aussi au sens du degré et du genre, et d'autre part qu'elles sont uniques à une déformation à cohomologie constante près si  $l \leq 3$ .

Dans le cas des courbes de  $\mathbb{P}^3$ , M. Martin-Deschamps et D. Perrin ont déterminé explicitement les courbes minimales associées à un module de Rao donné dans [MDP-1]. Ils décrivent un algorithme qui fournit la résolution de ces courbes, du moins du point de vue numérique. Dans certains des cas les plus simples, on peut pousser les calculs jusqu'à obtenir les flèches qui composent la résolution de la courbe minimale, et donc les équations de la courbe. Ceci est par ailleurs toujours possible en théorie, mais les calculs à mener deviennent

vite rédhibitoires. Nous utiliserons de façon concrète cet algorithme dans le chapitre 3 ; nous rappellerons son principe de façon plus détaillée à ce moment-là.

Ces auteurs étudient ensuite le morphisme  $\Phi$  que nous avons mentionné dans l'introduction, qui à une courbe  $C$  associe son module de Rao. Ils le définissent en tant que morphisme de foncteurs du schéma  $H_{\gamma,\rho}$  vers un foncteur  $E_\rho$  qui n'est pas représentable par un schéma.

Pour contourner cette difficulté, M. Martin-Deschamps et D. Perrin rigidifient la situation en fixant des bases, ce qui tue les automorphismes. Cette idée est contenue implicitement dans [BB], et exprimée explicitement dans [MDP-1].

Cette rigidification amène alors à travailler dans le revêtement  $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$  du schéma  $H_{\gamma,\rho}$  qui est défini de la façon suivante. Un point rationnel de  $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$  consiste en la donnée d'un module de Rao ainsi que d'un isomorphisme de chaque composante graduée  $H^1 \mathcal{J}_C(n)$ , qui est un espace vectoriel de dimension  $\rho(n)$ , sur l'espace  $\mathbb{k}^{\rho(n)}$  de même dimension. Le schéma  $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$  est un fibré localement trivial au-dessus de  $H_{\gamma,\rho}$ , les fibres correspondant à l'opération du groupe  $G = \prod_{n=r_a}^{\circ} GL_{\rho(n)}(\mathbb{k})$ .

M. Martin-Deschamps et D. Perrin définissent ensuite un schéma  $\widehat{E}_\rho$  muni d'une flèche vers le foncteur  $E_\rho$  ainsi qu'un morphisme de schémas  $\widehat{\Phi} : \widehat{H}_{\gamma,\rho} \rightarrow \widehat{E}_\rho$  qui relève la flèche  $\Phi$ . Nous rappellerons la construction de ce schéma  $\widehat{E}_\rho$  au chapitre 2. C'est l'objet principal que nous étudions dans tout ce travail : nous l'étudions de façon directe dans le chapitre 2, mais c'est également lui auquel nous nous attachons en définitive dans les chapitres 3 et 4, même si c'est par un moyen détourné.

M. Martin-Deschamps et D. Perrin prouvent le résultat suivant concernant le morphisme  $\widehat{\Phi}$  :

**Théorème 1.11. (Martin-Deschamps Perrin)** *Le morphisme  $\widehat{\Phi}$  est lisse irréductible.*

Ils déterminent en outre la dimension de ses fibres (cf. [MDP-1], corollaire IX.3.9). Ce résultat entraîne que l'image du morphisme  $\widehat{\Phi}$  est un sous-schéma ouvert de  $\widehat{E}_\rho$  et que ses fibres sont des sous-schémas lisses irréductibles de  $H_{\gamma,\rho}$  ; G. Bolondi avait montré leur irréductibilité par une méthode directe en 1989 dans [Bol].

Le théorème 1.11 ramène donc l'étude des composantes de  $H_{\gamma,\rho}$ , de leurs dimensions et des singularités aux mêmes questions sur le schéma  $\widehat{E}_\rho$ , ce qui décompose l'étude du schéma  $H_{d,g}$  en les trois étapes que nous avons signalées dans l'introduction. Comme le morphisme  $\widehat{\Phi}$  est irréductible l'image réciproque d'une composante de  $\widehat{E}_\rho$  en est automatiquement une de  $H_{\gamma,\rho}$  dès lors qu'elle est non vide. En revanche cette dernière restriction est nécessaire, dans la mesure où la flèche  $\widehat{\Phi}$  n'est pas toujours surjective. Il n'y a ainsi pas forcément une bijection entre les composantes irréductibles de  $H_{\gamma,\rho}$  et celles de  $\widehat{E}_\rho$ , mais seulement une injection.

### 1.2.2 La question de l'irréductibilité des schémas $\widehat{E}_\rho$ .

Le fait à signaler avant tout est qu'il n'existe pour l'instant qu'un très petit nombre de schémas  $\widehat{E}_\rho$  de largeur supérieure ou égale à trois que l'on sache décrire entièrement. M. Martin-Deschamps et D. Perrin décrivent ainsi les schémas  $\widehat{E}_{1,1,1}$  et  $\widehat{E}_{1,2,1}$  dans [MDP-1].

et le schéma  $\widehat{E}_{2,2,2}$  dans [MDP-2]. Leurs calculs permettent en fait de détudier sans trop de difficultés tous les schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}$  avec  $\max(p, q, r) \leq 2$ , mais la situation se complique déjà de façon très nette dès que l'un de ces entiers atteint ou dépasse 3. Par exemple, le schéma  $\widehat{E}_{2,3,2}$  est un sous-schéma de l'espace affine  $\mathbf{k}^{48}$  défini par 24 équations quadratiques : on voit immédiatement la difficulté qu'il y a à décrire un tel schéma, pour ne rien dire de ce qui se passe pour des valeurs plus grandes des entiers  $p$ ,  $q$  et  $r$ .

On cherche à étudier les schémas  $\widehat{E}_\rho$  du triple point de vue de la détermination des composantes, de leurs dimensions et des singularités. Une première étape consiste à déterminer avant tout s'ils sont ou non irréductibles, ce qui permet déjà de préciser le sens des autres questions. Ce problème a été étudié en 1990 de façon indépendante par E. Ballico et G. Bolondi dans [BB] et par M. Martin-Deschamps et D. Perrin dans [MDP-1] ; ces derniers ont poursuivi leur étude en 1991 dans [MDP-2].

En largeur 1 ou 2, la réponse est immédiate : dans le premier cas le schéma  $\widehat{E}_\rho$  est réduit à un point, et dans le second c'est un espace affine, qui est donc lisse irréductible. Rappelons ici les résultats de [MDP-1] concernant l'irréductibilité et la dimension dans le cas de la largeur 3 ; ceux-ci contiennent ceux de [BB].

**Théorème 1.12. (Martin-Deschamps-Perrin)**

Soit  $(p, q, r) \in \mathbf{N}^{*3}$ .

- i) Si  $4q < \max(6p + r, 6r + p)$  et si  $(p, q, r) \neq (1, 1, 1)$ , le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  possède plusieurs composantes.
- ii) Si  $p$  et  $r$  sont fixés,  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est irréductible pour  $q$  assez grand.
- iii) Si le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est irréductible, il est génériquement lisse, intersection complète et de dimension  $4pq + 4qr - 6pr$ , à l'exception des cas particuliers  $\widehat{E}_{1,1,1}$  et  $\widehat{E}_{1,2,1}$  qui sont génériquement lisses de dimension 5 et 11 respectivement.

En revanche, dans le cas où le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  possède plusieurs composantes on n'a aucun renseignement sur la lissité générique des composantes de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  ni sur leur dimension. Ceci souligne l'apport du théorème 2 de l'introduction. M. Martin-Deschamps et D. Perrin déduisent du théorème 1.12 le corollaire suivant :

**Corollaire 1.13.** Si  $\rho$  est une fonction connexe de largeur supérieure ou égale à 4, le schéma  $\widehat{E}_\rho$  est réductible.

Ils émettent ensuite la conjecture suivante :

**Conjecture (C) :** La condition nécessaire exprimée par le théorème 1.12-(i) dans le cas de la largeur 3 est également suffisante, autrement dit le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est irréductible si et seulement si on a  $4q \geq \max(6r + p, 6p + r)$  ou bien si  $(p, q, r)$  vaut  $(1, 1, 1)$ .

À défaut de prouver cette conjecture, il est déjà intéressant de repérer autant que possible les schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}$  qui sont irréductibles. En effet, à cause du point iii) du théorème 1.12 on possède bien plus de renseignements à leur sujet, et ces renseignements se répercutent automatiquement aux schémas  $H_{\gamma,\rho}$  via le morphisme  $\widehat{\Phi}$ .

On peut ainsi rechercher une valeur effective de  $q$  à partir de laquelle le point ii) du même théorème s'applique, c'est-à-dire une valeur  $q_0$ , fonction de  $r$  et  $p$ , telle que les schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est irréductible pour  $q \geq q_0$ .

Bien que M. Martin-Deschamps et D. Perrin n'explicitent pas une telle valeur dans [MDP-1], leur démonstration en fournit en réalité une, qu'ils n'ont simplement pas écrite. Ils montrent en fait le résultat suivant :

**Théorème 1.14.** *Fixons  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ . Si  $q \geq 6pr + 2 \min(p, r)$  le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est irréductible.*

Cette borne explicite n'est cependant pas très bonne, dans la mesure où elle dépend du produit  $pr$ . La borne conjecturale exprimée par la conjecture (C) est au contraire une borne linéaire en  $p$  et  $r$ , et c'est également le cas de la borne que nous obtenons ici dans les cas où nous ne prouvons pas complètement cette conjecture (cf. théorème 1 de l'introduction).

Enfin, en ce qui concerne la lissité ou les singularités des schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}$ , M. Martin-Deschamps et D. Perrin montrent en outre le résultat suivant, qui complète le point iii) du théorème 1.12 et dont nous nous servirons dans le chapitre 3 :

**Théorème 1.15. (Martin-Deschamps–Perrin)**

*Soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$  et soit  $M$  un module de  $\widehat{E}_{p,q,r}$ .*

*i) Si  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$  le module  $M$  est un point lisse de  $\widehat{E}_{p,q,r}$ .*

*ii) Si  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est irréductible et si  $(p, q, r)$  diffère de  $(1, 1, 1)$  et  $(1, 2, 1)$ , la réciproque de i) est vraie et le module  $M$  est un point lisse si et seulement si il vérifie  $\text{ext}^2(M, M) = 0$ .*

### 1.2.3 La question de Sernesi–Walter.

D'après les résultats de G. Ellingsrud [Ell], les courbes ACM forment un ouvert lisse du schéma de Hilbert qui les contient. En d'autres termes, une courbe ACM de  $\mathbb{P}^3$  correspond à un point lisse du schéma de Hilbert, c'est-à-dire est non obstruée. On peut espérer que ce phénomène admette une généralisation prenant la forme suivante :

*Une courbe qui a une «bonne» cohomologie est un point lisse du schéma de Hilbert.*

Toute la difficulté consiste alors à déterminer quel sens donner à la condition de «bonne» cohomologie pour généraliser la notion de courbe ACM tout en continuant à vérifier un tel énoncé ; c'est là l'objet de la question de Sernesi–Walter. Une voie pour cela consiste à rechercher des conditions d'annulation des groupes de cohomologie qui soient moins contraignantes que la précédente.

La première propriété que l'on a considérée pour généraliser la notion de courbe ACM fut celle des courbes de rang maximum. Ce sont celles pour lesquelles la flèche naturelle  $H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(n) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_C(n)$  est de rang maximum pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . À cause de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0 \mathcal{J}_C(n) \longrightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(n) \longrightarrow H^0 \mathcal{O}_C(n) \longrightarrow H^1 \mathcal{J}_C(n) \longrightarrow 0,$$

ce sont aussi les courbes  $C$  qui vérifient la condition :

$$(1.1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (h^0 \mathcal{J}_C(n) = 0 \text{ ou } h^1 \mathcal{J}_C(n) = 0),$$

soit encore  $r_0 < s_0$ . Les courbes ACM en sont un cas particulier, et la propriété d'être de rang maximum est une «bonne» propriété dans la mesure où par semi-continuité elle définit un ouvert du schéma de Hilbert. Il est alors naturel de considérer la généralisation suivante de la propriété d'Ellingsrud :

**Question (Sernesi):** *Une courbe lisse de rang maximum est-elle nécessairement un point lisse du schéma de Hilbert ?*

Cette question est formulée explicitement par Charles Walter (cf. [W-1], Question 0.1) qui l'attribue à Eduardo Sernesi. Il renvoie également à la question suivante, posée par E. Ballico et Philippe Ellia en 1986 dans [BE] (Question 3):

**Question (Ballico-Ellia):** *Une composante de  $H_{d,g}$  contenant une courbe de rang maximum (lisse irréductible si besoin est) peut-elle être non génériquement réduite ?*

Cette dernière question est d'une certaine façon plus faible que la précédente, puisqu'elle revient à demander seulement si l'assertion «une courbe de rang maximum est non obstruée» est vraie génériquement. D'après les différents exemples fournis indépendamment en 1989 par M. Martin-Deschamps et D. Perrin [MDP-1], G. Bolondi, J. O. Kleppe et R. Mirò-Roig [BKM] et enfin C. Walter [W-1], la réponse à la question de Sernesi est négative. En revanche, ceci ne tranche pas en ce qui concerne la question plus faible de Ballico-Ellia.

Il n'est en réalité pas très surprenant que la réponse à la question de Sernesi soit négative, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, la condition d'être de rang maximum ne tient compte que de la postulation de la courbe, et néglige la notion duale de spécialité. Elle privilégie ainsi la résolution de type  $E$  de l'idéal  $\mathcal{J}_C$  au détriment de celle de type  $N$ , selon une terminologie définie dans [MDP-1] sur laquelle nous reviendrons au paragraphe 3.3.2. Si l'on en croit la philosophie développée dans cet article il faut au contraire tenir compte de façon symétrique de ces deux notions, c'est-à-dire de la postulation et la spécialité.

Par ailleurs, la condition de rang maximum n'impose pas aux courbes d'avoir une cohomologie générique dans leur schéma de Hilbert, ce qui leur laisse toute latitude pour être obstruées. Cette remarque permet ainsi d'interpréter l'exemple décrit dans [MDP-1] : celui-ci correspond à une courbe dont la cohomologie au sens numérique, c'est-à-dire le couple  $(\gamma, \rho)$ , admet deux générations différentes. Les courbes en question se trouvent alors dans l'adhérence de deux schémas  $H_{\gamma', \rho'}$  distincts, qui correspondent eux-mêmes à deux composantes différentes du schéma de Hilbert.

Il ne suffit donc pas que la condition de «bonne cohomologie» recherchée définisse un ouvert du schéma de Hilbert, elle doit aussi interdire aux courbes de cet ouvert d'appartenir à toute autre composante. En particulier, si la condition que l'on considère détermine toute la cohomologie de la courbe, donc impose aux courbes une cohomologie générique, la singularité ne peut plus provenir de l'intersection de deux schémas à cohomologie constante  $H_{\gamma, \rho}$  distincts. Pour que la courbe se situe à l'intersection de deux composantes, il faut alors que celles-ci soient relatives au même schéma  $H_{\gamma, \rho}$ , donc une telle singularité ne peut plus provenir du recollement des schémas  $H_{\gamma, \rho}$  entre eux, c'est-à-dire de l'étape du haut, mais doit être issue d'une singularité lié à l'étape du bas.

Pour toutes ces raisons, il semble plus raisonnable pour généraliser les résultat concernant les courbes ACM de s'intéresser à celles qui vérifient, outre la condition précédente, la condition duale :

$$(1.2) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (h^1 \mathcal{J}_C(n) = 0 \text{ ou } h^2 \mathcal{J}_C(n) = 0).$$

soit encore  $c < r_a$ . Les courbes qui vérifient cette condition ont déjà été étudiées, par exemple par G. Fløystad [Flø] qui les appelle courbes à bonne spécialité. Nous nous tenons ici à la

terminologie de M. Martin-Deschamps et D. Perrin, qui les appellent courbes de **co-rang maximum**.

Les courbes qui sont à la fois de rang maximum et de co-rang maximum, c'est-à-dire qui vérifient à la fois  $e < r_a$  et  $r_o < s_0$ , sont de bons candidats auxquels étendre les résultats concernant les courbes ACM, qui vérifient automatiquement ces deux conditions.

Une courbe qui n'est pas ACM vérifie par ailleurs  $r_a \leq r_o$ . Les deux conditions précédentes deviennent alors équivalentes à la condition plus forte suivante : pour chaque entier  $n \in \mathbb{Z}$ , l'un au plus des trois nombres  $h^0 \mathcal{J}_C(n)$ ,  $h^1 \mathcal{J}_C(n)$  et  $h^2 \mathcal{J}_C(n)$  est non nul. On appelle courbe à **cohomologie semi-naturelle** une courbe qui vérifie cette propriété, la restriction contenue dans le terme «semi» s'expliquant par le fait que les quantités  $h^2 \mathcal{J}_C(n)$  et  $h^3 \mathcal{J}_C(n)$  sont nécessairement non nulles pour  $n \ll 0$ . On est cependant en droit de ne pas tenir compte des entiers  $h^3 \mathcal{J}_C(n) = h^3 \mathcal{O}_P(n)$ , dans la mesure où ils ne dépendent pas de la courbe.

On note que si les courbes ACM sont toutes de rang et co-rang maximum, elles ne sont pas toutes à cohomologie semi-naturelle ; cette notion ne généralise donc pas à proprement parler celle des courbes ACM. Néanmoins, le cas de celles-ci étant bien connu, nous pouvons nous restreindre ici aux courbes à cohomologie semi-naturelle sans perdre aucune généralité.

Ces courbes présentent un avantage supplémentaire. D'après [MDP-2] (paragraphe IV.3), les courbes à cohomologie semi-naturelle ayant un degré et un genre fixé ont également toutes la même cohomologie  $(\gamma, \rho)$  et forment en fait le même schéma  $H_{\gamma, \rho}$ . Celui-ci est de plus un ouvert schématique de  $H_{d, g}$ , donc l'étape du haut est automatiquement résolue pour ces courbes. Leur obstruction dans le schéma de Hilbert ne peut alors provenir que d'une singularité comparable dans le schéma  $\widehat{E}_\rho$ .

Il est alors naturel de se poser la question suivante, qui a été formulée explicitement par C. Walter en 1989 dans [W-1] (Question 0.1) :

**Question (Walter) :** *Une courbe à cohomologie semi-naturelle est-elle forcément un point lisse du schéma de Hilbert ?*

Nous appelons cette question la **question de Sernesi-Walter**. En dépit des arguments qui précèdent, la réponse à cette question plus fine que celle de Sernesi est encore négative, un exemple ayant été fourni par M. Martin-Deschamps et D. Perrin dans [MDP-2] en 1991. Il s'agit de la courbe minimale associée au module de Rao :

$$R/(X^2, Y^2, Z, T) \oplus \mathbb{k}(-1).$$

C'est une courbe de degré 8 et genre 4, qui est obtenue par la construction de Schwartau à partir des courbes  $C_1$  et  $C_2$  où  $C_1$  est une droite double de degré 2 et genre -2 et  $C_2$  est la réunion de deux droites disjointes. La courbe considérée est alors la réunion de  $C_1$ , de  $C_2$  et d'une troisième courbe  $C_3$  obtenue à partir des deux autres ; elle n'est donc ni irréductible, ni lisse, ni même réduite. On peut alors se poser la question suivante, que nous appelons **question de Sernesi-Walter restreinte** pour la distinguer de la précédente :

**Question :** *Peut-on trouver une courbe à cohomologie semi-naturelle qui soit obstruée dans le schéma de Hilbert, et qui soit cependant une courbe lisse irréductible ?*

Nous appellerons en outre **assertion (SW)** l'assertion «*Toute courbe à cohomologie semi-naturelle est un point lisse du schéma de Hilbert*», et **assertion (SWR)** ou **(SW) restreinte** l'assertion «*Toute courbe à cohomologie semi-naturelle qui est lisse irréductible est un point lisse du schéma de Hilbert*».

Nous nous attachons principalement dans la seconde partie à étudier la question de Sernesi–Walter restreinte, sans toutefois aboutir à une démonstration ni à une réfutation de l'assertion (SWR). Cela dit, deux autres questions très naturelles se posent également à propos des courbes à cohomologie semi-naturelle. D'une part, on ne connaît pour l'instant de contre-exemples à l'assertion (SW) qu'en largeur trois, même en oubliant la restriction aux courbes lisses irréductibles. Dans l'étude générale des courbes à cohomologie semi-naturelle qui occupe le paragraphe 3, nous montrons que le cas des largeurs supérieures ou égales à 4 est régi par des contraintes sensiblement différentes de celles concernant la largeur 3. L'étude de l'assertion (SW) sans restriction sur la lissité de la courbe, mais dans le cas spécifique des modules de largeur supérieure ou égale à 4, conserve donc tout son intérêt. A contrario en ces largeurs, la restriction aux seules courbes lisses irréductibles perd une partie du sien, dans la mesure où chaque module possède alors une unique courbe minimale, qui est ou non lisse sans que l'on puisse «bouger» quoi que ce soit, tandis qu'en largeur 3, il existe en général une famille de courbes minimales, et la courbe minimale générale peut être lisse sans que toutes le soient.

Enfin, à défaut de prouver les assertions (SW) et (SW)-restreintes, que celles-ci se révèlent d'ailleurs fausses ou simplement inabordables, on peut encore se demander si elles sont vraies au moins génériquement, et ce sont peut-être là des questions plus accessibles. Il suffirait par exemple pour cela que les schémas  $\widehat{E}_\rho$  soient génériquement réduits, ou du moins que leurs composantes correspondant aux courbes à cohomologie semi-naturelle le soient.

### 1.3 Le schéma des structures de module de Rao.

Nous rappelons dans ce paragraphe la définition des schémas  $\widehat{E}_\rho$ . Celle-ci a été établie dans le paragraphe VI.4.a de [MDP-1] puis complétée par le chapitre 1 de [MDP-2]. Ces schémas ont été également définis et étudiés dans [BB]. Nous en profitons pour rappeler les notations que nous adoptons ici et qui nous serviront aussi bien au chapitre 2 qu'aux chapitres 3 et 4; ce sont pour l'essentiel celles de M. Martin-Deschamps et D. Perrin. Ce rappel nous servira enfin de guide lorsque nous introduirons au paragraphe 2.2.1 les schémas  $\widehat{E}_\rho^n$  qui généralisent les schémas  $\widehat{E}_\rho$ .

On fixe une fonction  $\rho$  à support fini de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}$  on note  $E_n$  le  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel  $\mathbb{k}^{\rho(n)}$  muni de sa base canonique. On considère l'espace vectoriel gradué  $E = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n$ . Pour  $d \in \mathbb{Z}$  on note  $\text{End}^d(E)$  l'espace vectoriel des endomorphismes gradués de degré  $d$  de  $E$ , c'est-à-dire des morphismes  $f : E \rightarrow E$  qui vérifient  $f(E_n) \subset E_{n+d}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . On a  $\text{End}^d(E) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_n, E_{n+d})$ . On note  $\text{End}_{\text{Grad}}(E)$  l'algèbre des endomorphismes gradués de  $E$ , c'est-à-dire  $\text{End}_{\text{Grad}}(E) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \text{End}^d(E)$ . On note enfin  $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} R_d$  l'algèbre de polynômes  $\mathbb{k}[X, Y, Z, T]$ , que l'on note aussi  $\mathbb{k}[X^0, X^1, X^2, X^3]$ .

Munir l'espace  $E$  d'une structure de  $R$ -module gradué consiste à se donner un

morphisme de  $\mathbb{k}$ -algèbres graduées  $\varphi : R \rightarrow \text{End}_{\text{Grad}}(E)$ . Ceci revient à se donner pour tout  $d \in \mathbb{N}$  une application linéaire  $\varphi_d : R_d \rightarrow \text{End}^d(E)$ , c'est-à-dire à associer à tout polynôme  $P$  homogène de degré  $d$  de  $R$  une application linéaire graduée de  $E(-d)$  dans  $E$  correspondant à la multiplication par  $P$ . Se donner cette multiplication revient à se donner pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  une application linéaire  $p_n : E_n \rightarrow E_{n+d}$ , ou encore la matrice  $P_n$  qui la représente dans des bases de  $E_n$  et  $E_{n+d}$ . À chaque fois que ces bases seront fixées nous identifierons les applications linéaires et les matrices. Le schéma  $\widehat{E}_\rho$  paramètre alors les différentes structures de  $R$ -module gradué dont on peut munir la somme directe  $E$ .

Pour se donner une telle structure il suffit encore de se donner seulement les applications linéaires qui correspondent à la base  $(X^0, X^1, X^2, X^3)$  qui engendre  $R$  en tant qu'algèbre, c'est-à-dire de se donner pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  les applications linéaires  $x_n^i : E_n \rightarrow E_{n+1}$ . Celles-ci ne peuvent cependant pas être choisies librement, mais sont soumises aux conditions qui expriment la commutativité de l'algèbre  $R$ . Ces relations sont engendrées en degré 2 par les six relations  $X^i \cdot X^j = X^j \cdot X^i$  obtenues pour les couples  $(i, j)$  vérifiant  $0 \leq i < j \leq 3$ .

Si l'on fixe une base de chaque espace vectoriel  $E_n$ , se donner une structure de module de  $\widehat{E}_\rho$  revient en définitive à se donner pour tout  $n \in \text{Supp}(\rho)$  quatre matrices  $X_n^i$  de taille  $(\rho(n+1), \rho(n))$  de façon à vérifier pour tout  $n$  les six relations de commutation :

$$X_{n+1}^i \cdot X_n^j - X_{n+1}^j \cdot X_n^i = 0$$

obtenues pour les couples  $(i, j)$  vérifiant  $0 \leq i < j \leq 3$ . Chacune de ces relations correspondant à l'annulation d'une matrice de taille  $(\rho(n+2), \rho(n))$ , le schéma  $\widehat{E}_\rho$  se réalise comme un sous-schéma fermé de l'espace affine  $\mathbb{k}^{4\nu}$  défini par  $6\mu$  équations quadratiques homogènes avec  $\nu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n)\rho(n+1)$  et  $\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n)\rho(n+2)$ . Toutes ses composantes irréductibles sont ainsi de dimension supérieure ou égale à  $4\nu - 6\mu$ . En particulier en largeur trois, toutes les composantes du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  sont de dimension supérieure ou égale à  $4pq + 4qr - 6pr$ .

D'après la forme de ses équations le schéma  $\widehat{E}_\rho$  est un cône dans  $\mathbb{k}^{4\nu}$ . C'est un sous-schéma strict de  $\mathbb{k}^{4\nu}$  si et seulement si il y a effectivement des relations de commutation à vérifier, c'est-à-dire si et seulement si le support de  $\rho$  contient au moins trois termes non nuls consécutifs.

Les relations de commutations peuvent se décrire de façon plus globale grâce à des applications linéaires naturellement associées aux structures de module. La première d'entre elle est l'application :

$$u : \begin{bmatrix} R_1 \otimes_{\mathbb{k}} E(-1) & \rightarrow & E \\ P \otimes e & \mapsto & P \cdot e \end{bmatrix}$$

correspondant à la multiplication. On note  $u_n : R_1 \otimes_{\mathbb{k}} E_n \rightarrow E_{n+1}$  la  $n$ -ième composante graduée de  $u$ . On associe ensuite à  $u$  des flèches naturelles  $v, v'$  et  $u'$  (cf. [MDP-2] définition 1.1.1) en utilisant le complexe de Koszul, c'est-à-dire la résolution minimale de  $\mathbb{k}$  en tant que  $R$ -module gradué. Si on note respectivement  $w^1, w^2, w^3$  et  $w^4$  les flèches  $u, v, v'$  et  $u'$ , les flèches  $w^j$  pour  $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  se décrivent par :

$$w^j : \Lambda^j R_1 \otimes_{\mathbb{k}} E(-j) \longrightarrow \Lambda^{j-1} R_1 \otimes_{\mathbb{k}} E(-j+1).$$

Le moyen le plus simple de définir les applications  $w^j$  est probablement de le faire à partir de leurs composantes graduées  $w_n^j : \Lambda^{j+1} R_1 \otimes_{\mathbb{k}} E_n \longrightarrow \Lambda^j R_1 \otimes_{\mathbb{k}} E_{n+1}$ . On fixe une base



$(X, Y, Z, T) = (X^0, X^1, X^2, X^3)$  de l'espace vectoriel  $R_1$  et on définit les matrices suivantes à coefficients dans  $R_1$  :

$$U = (X \ Y \ Z \ T) \quad V = \begin{pmatrix} Y & Z & T & 0 & 0 & 0 \\ -X & 0 & 0 & Z & T & 0 \\ 0 & -X & 0 & -Y & 0 & T \\ 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z \end{pmatrix}$$

$$V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -T & Z \\ 0 & T & 0 & -Y \\ 0 & -Z & Y & 0 \\ -T & 0 & 0 & X \\ Z & 0 & -X & 0 \\ -Y & X & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U' = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}$$

qui sont celles qui interviennent dans le complexe de Koszul pour un choix convenable des bases des espaces qui le composent. Les applications linéaires  $u_n, v_n, v'_n$  et  $u'_n$  s'obtiennent à partir des matrices  $U, V, V'$  et  $U'$  comme les applications linéaires par blocs obtenues en substituant les applications  $x_n^i$  aux indéterminées  $X^i$ . Il est à noter que pour tout choix de base de  $R_1$  on obtient des matrices  $U, V, V'$  et  $U'$  qui s'expriment de façon analogue.

Si l'on fixe en outre des bases des espaces vectoriels  $E_n$  et  $E_{n+1}$  dans lesquelles on représente chaque application  $x_n^i$  par une matrice  $X_n^i$ , les applications  $u_n, v_n, v'_n$  et  $u'_n$  se représentent dans des bases correspondantes par les matrices par blocs  $U_n, V_n, V'_n$  et  $U'_n$  obtenues à partir de  $U, V, V'$  et  $U'$  respectivement en substituant les matrices  $X_n^i$  aux indéterminées  $X^i$ .

On vérifie aisément que les 6 relations de commutation en degré  $n$  sont équivalentes à l'une quelconque des relations matricielles  $U_{n+1} \cdot V_n = 0$ ,  $V_{n+1} \cdot V'_n = 0$  ou  $V'_{n+1} \cdot U'_n = 0$ , ou encore à l'une des relations  $u_{n+1} \cdot v_n = 0$ ,  $v_{n+1} \cdot v'_n = 0$  ou  $v'_{n+1} \cdot u'_n = 0$ . Ceci fournit en particulier pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  un complexe :

$$0 \longrightarrow \Lambda^4 R_1 \otimes E_n \xrightarrow{u'_n} \Lambda^3 R_1 \otimes E_{n+1} \xrightarrow{v'_{n+1}} \Lambda^2 R_1 \otimes E_{n+2} \xrightarrow{v_{n+2}} \Lambda^1 R_1 \otimes E_{n+3} \xrightarrow{u_{n+3}} R_1 \otimes E_{n+4} \longrightarrow 0.$$

sur lequel nous reviendrons au paragraphe 3.3.1.

Pour finir, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on associe à l'application  $u_n : R_1 \otimes_{\mathbb{k}} E_n \rightarrow E_{n+1}$  les applications linéaires  $\hat{u}_n : R_1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_n, E_{n+1})$  et  $\tilde{u}_n : E_n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(R_1, E_{n+1})$ .

Un certain nombre de premières réductions évidentes permettent de simplifier l'étude des schémas  $\hat{E}_\rho$ . Tout d'abord on peut toujours se ramener à considérer des fonctions  $\rho$  normalisées en décalant la graduation, c'est-à-dire en remplaçant sa fonction  $\rho$  par la fonction normalisée associée  $\tilde{\rho}$ , car les schémas  $\hat{E}_\rho$  et  $\hat{E}_{\tilde{\rho}}$  sont isomorphes.

On peut également toujours se ramener à des fonctions  $\rho$  connexes, c'est-à-dire telles que la largeur coïncide avec le diamètre. Si la fonction  $\rho$  n'est pas connexe, elle se décompose de façon unique en une somme  $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_r$  où les fonctions  $\rho_i$  sont toutes connexes et vérifient  $\max[\text{Supp}(\rho_i)] + 1 < \min[\text{Supp}(\rho_{i+1})]$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ ; le schéma  $\hat{E}_\rho$  est alors isomorphe au produit direct  $\prod_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \hat{E}_{\rho_i}$ .

Enfin, à un module  $M$  on associe son module dual  $M^* = \text{Hom}_{\mathbf{k}}(M, \mathbf{k})$  (cf. [MDP-1] définition 0.1.7). Celui-ci définit la même classe de liaison que  $M$  mais correspond à l'autre classe de biliaison à l'intérieur de celle-ci. Si l'on note  $\rho^\vee$  la fonction duale de  $\rho$ , la flèche qui associe au module  $M$  le module  $M^*$  établit un isomorphisme entre les schémas  $\widehat{E}_\rho$  et  $\widehat{E}_{\rho^\vee}$ .

Pour finir, les groupes  $G_n = GL(E_n)$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  ainsi que le groupe  $GL(R_1)$  agissent naturellement sur le schéma  $\widehat{E}_\rho$ . Ces actions correspondent simplement à effectuer un changement de base dans les espaces vectoriels  $E_n$  ou dans l'espace vectoriel  $R_1$  ; elles sont cependant fondamentales pour l'étude des schémas  $\widehat{E}_\rho$ , comme nous le verrons aussi bien au chapitre 2 qu'au chapitre 4.



## Chapitre 2

# Démonstration du théorème d'irréductibilité.

### 2.1 Démarche générale.

Nous établissons dans ce paragraphe les principes heuristiques qui guident toute notre démonstration. Nous commençons par rappeler la méthode préconisée par M. Martin-Deschamps et D. Perrin dans [MDP-2] pour étudier l'irréductibilité des schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}$ . Cette méthode présente en fait certaines difficultés pratiques telle qu'elle est formulée par ces auteurs, mais elle demeure la base de la démarche que nous adoptons. L'idée essentielle est qu'une stratification judicieuse des schémas  $\widehat{E}_{p,q}$  permet d'obtenir des résultats sur les schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}$ , aussi bien d'ailleurs en ce qui concerne leur éventuelle irréductibilité que leur dimension.

La différence que nous introduisons ici par rapport aux idées de [MDP-2] est que nous recherchons une stratification différente de celle qu'ils suggèrent. Nous nous contentons ainsi d'une stratification qui minore le rang de l'application  $v_0$  sur chacune de ses strates au lieu d'en donner une valeur exacte. Nous achevons ce paragraphe en montrant quels principes intuitifs permettent d'aboutir à une telle minoration.

#### 2.1.1 Principe de la démonstration.

La méthode proposée dans [MDP-2] pour étudier l'irréductibilité des schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est la suivante. On fixe un triplet d'entiers  $(p, q, r)$  et on considère le morphisme de troncature  $\pi_0$  qui à une structure de module de largeur 3 donnée par les deux applications  $u_0 : R_1 \otimes E_0 \rightarrow E_1$  et  $u_1 : R_1 \otimes E_1 \rightarrow E_2$  associe le module de  $\widehat{E}_{p,q}$  défini par la seule flèche  $u_0$ , c'est-à-dire le morphisme :

$$\pi_0 : \left[ \begin{array}{ccc} \widehat{E}_{p,q,r} & \rightarrow & \widehat{E}_{p,q} \\ (u_0, u_1) & \mapsto & u_0 \end{array} \right].$$

Celui-ci est surjectif (on peut prendre  $u_1 = 0$ ) et la fibre d'un module  $u_0$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  est définie schématiquement par la relation  $u_1 \cdot v_0 = 0$ . Cette fibre est donc un espace vectoriel de dimension  $r \times (4q - \text{rg } v_0)$ . Si  $W$  est un sous-schéma de  $\widehat{E}_{p,q}$  sur lequel le rang de  $v_0$  est

constant, le sous-schéma  $\pi_0^{-1}(W')$  de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est un fibré vectoriel au-dessus de  $W$  de dimension  $\dim W' + r(4q - \text{rg } v_0)$ .

L'idée naturelle consiste alors à stratifier le schéma  $\widehat{E}_{p,q}$  par le rang de la matrice  $v_0$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , notons  $W'_k$  le sous-schéma localement fermé de  $\widehat{E}_{p,q}$  défini par  $\text{rg } v_0 = k$ . Le schéma  $\pi_0^{-1}(W'_k)$  est un fibré vectoriel de rang  $r(4q - k)$  au-dessus de  $W'_k$ , donc est de dimension  $\dim W'_k + r(4q - k)$ . Si de plus  $W'_k$  est lisse ou irréductible c'est aussi le cas du schéma  $\pi_0^{-1}(W'_k)$ .

Il existe de façon évidente au moins un sous-schéma  $W'_k$  qui est lisse irréductible, à savoir celui qui correspond à la strate ouverte défini par le rang maximal possible pour  $v_0$ . D'après [MDP-2] (Proposition III.1.1) ce rang maximal est égal à  $m_0 = \min(6p, 4q)$  dès lors que  $(p, q)$  diffère de  $(1, 1)$  et  $(1, 2)$ . L'ouvert non vide  $W_{m_0}$  est alors lisse irréductible de dimension  $4pq$ . Son image réciproque  $\pi_0^{-1}(W_{m_0})$  est donc un sous-schéma ouvert, lisse, irréductible de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  dont l'adhérence est une composante que l'on notera  $C_0$ . Si  $4q \geq 6p$ , c'est-à-dire si  $m_0 = 6p$  cette composante a pour dimension  $4pq + 4qr - 6pr$ ; si  $4q \leq 6p$  elle a pour dimension  $4pq$ . Dans les deux cas elle est génériquement lisse.

Cette composante  $C_0$  est facile à décrire entièrement dans le second cas. Sur l'ouvert  $W_{m_0}$  l'application  $v_0$  est alors surjective, donc la condition  $u_1 \cdot v_0 = 0$  équivaut à  $u_1 = 0$ . L'ouvert  $\pi_0^{-1}(W_{m_0})$  est alors contenu dans le fermé irréductible défini par  $u_1 = 0$ , qui est exactement la composante  $C_0$ . Celle-ci est dans ce cas un espace affine de dimension  $4pq$ .

D'un point de vue dual, on peut également appliquer la même méthode en considérant au lieu de  $\pi_0$  le morphisme :

$$\pi_1 : \begin{cases} \widehat{E}_{p,q,r} & \rightarrow \widehat{E}_{q,r} \\ (u_0, u_1) & \mapsto u_1 \end{cases}.$$

Celui-ci est également surjectif et la fibre de  $u_1 \in \widehat{E}_{q,r}$  est décrite par l'équation  $v'_1 \cdot u'_0 = 0$ , donc est un espace vectoriel de dimension  $p \times (4q - \text{rg } v'_1)$ . On obtient une composante  $C_1$  de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  en considérant l'adhérence de  $\pi_1^{-1}(V_{m_1})$  où  $V_{m_1}$  est l'ouvert irréductible non vide de  $\widehat{E}_{q,r}$  sur lequel  $v'_1$  est de rang maximal possible  $m_1$ . Si  $(q, r)$  diffère de  $(1, 1)$  ou  $(2, 1)$  on a  $m_1 = \min(4q, 6r)$ . Dans le cas où on a  $m_1 = 4q$ , c'est-à-dire si on a  $4q \leq 6r$ , l'application  $v'_1$  est injective sur  $V_{m_1}$  et l'équation  $v'_1 \cdot u'_0$  se réduit à  $u'_0 = 0$ , c'est-à-dire à  $u_0 = 0$ . De la même façon que précédemment la composante  $C_1$  est alors l'espace affine de dimension  $4qr$  défini par  $u_0 = 0$ .

Si on a  $4q \leq \min(6r, 6p)$  on obtient ainsi deux composantes distinctes  $C_0$  et  $C_1$  du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  qui sont toutes deux des espaces affines de dimensions respectives  $4pq$  et  $4qr$ .

Lorsque le triplet  $(p, q, r)$  est fixé on peut utiliser indifféremment l'une ou l'autre des deux projections  $\pi_0$  et  $\pi_1$  pour étudier le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$ . Cependant, l'une des deux est plus intéressante que l'autre si  $p \neq r$ . En effet, les fibres des projections  $\pi_0$  et  $\pi_1$  étant des espaces vectoriels, elles ne posent aucun problème. Le point difficile est à chaque fois l'étude des stratifications respectives de  $\widehat{E}_{p,q}$  et  $\widehat{E}_{q,r}$  par le rang des matrices  $v_0$  et  $v'_1$ . On a donc tout intérêt à utiliser celle des deux projections pour laquelle la dimension de l'espace à stratifier, c'est-à-dire de l'espace image est la plus petite, c'est-à-dire la projection  $\pi_0$  si  $p \leq r$  et la projection  $\pi_1$  dans le cas contraire.

Par ailleurs, la flèche de dualité mise en évidence au paragraphe 1.3, qui établit un isomorphisme entre les schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}$  et  $\widehat{E}_{r,q,p}$ , échange les rôles de  $p$  et  $r$  ainsi que les

projections  $\pi_0$  et  $\pi_1$ . Si on note  $D$  l'isomorphisme  $D : \widehat{E}_{p,q,r} \rightarrow \widehat{E}_{r,q,p}$  qu'elle établit, la projection  $\pi_1$  se ramène après décalage de la graduation à la composée  $D \circ \pi_0 \circ D$ .

Nous nous placerons systématiquement dans tout ce chapitre dans le cas  $p \leq r$ , ce qui conduit à considérer la projection  $\pi_0$ , c'est-à-dire à stratifier le schéma  $\widehat{E}_{p,q}$ . Les résultats concernant l'autre cas s'en déduisent par dualité. Sous cette hypothèse  $p \leq r$  on a en fait  $\text{Max}(6r + p, 6p + r) = 6r + p$ , donc la conjecture (C) signifie alors que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est irréductible pour  $4q \geq 6r + p$ .

L'hypothèse  $4q \geq 6r + p$  entraîne  $4q \geq 6p$ , donc dans ce cas le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  possède déjà la composante  $\mathcal{C}_0$  mentionnée plus haut, qui est génériquement lisse de dimension  $4pq + 4qr - 6pr$ . Le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est alors irréductible si et seulement si c'est la seule. Ceci revient à dire que pour  $k < m_0$  l'image réciproque  $\pi_0^{-1}(W_k)$  de  $W_k$  par  $\pi_0$  ne contient pas de composante de  $\widehat{E}_{p,q,r}$ . Comme toutes les composantes de ce schéma sont de dimension au moins égale à  $4pq + 4qr - 6pr$ , il suffit de montrer que pour tout  $k < m_0$  on a  $\dim \pi_0^{-1}(W_k) < 4pq + 4qr - 6pr$ . Comme on a par ailleurs  $\dim \pi_0^{-1}(W_k) = \dim W_k + r(4q - k)$ , ceci revient finalement à montrer que pour tout  $k < m_0$  on a  $\dim W_k < 4pq - r(6p - k)$ , soit  $(4pq - \dim W_k) > r(6p - k)$ .

Malheureusement les sous-schémas  $W_k$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  définis par le rang de  $v_0$  sont extrêmement difficiles à décrire, et majorer leur dimension semble pour l'instant une tâche inaccessible. En revanche, s'il est difficile de calculer exactement le rang de la matrice  $v_0$  en fonction de ceux des applications linéaires  $X_0, Y_0, Z_0$  et  $T_0$ , il est certainement plus aisé de seulement le minorer, et ceci peut encore suffire pour le raisonnement qui précède. Supposons que l'on connaisse une stratification de  $\widehat{E}_{p,q}$  par des sous-schémas localement fermés  $U_i$  sur lesquels on ait  $\text{rg } v_0 \geq \chi_i$  et que l'on sache majorer la dimension des strates  $U_i$  par des entiers  $\delta_i$ . On obtient alors pour tout  $i$  :

$$\dim [\pi_0^{-1}(U_i)] \leq \delta_i + r(4q - \chi_i).$$

Si on a  $\chi_i = 6p$  le schéma  $U_i$  est contenu dans  $W_{m_0}$ , donc son image réciproque  $\pi_0^{-1}(U_i)$  est contenue dans la composante  $\mathcal{C}_0$ . Pour prouver l'irréductibilité de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  il suffit de montrer que lorsque l'on a  $\chi_i < 6p$  le schéma  $\pi_0^{-1}(U_i)$  est de dimension strictement plus petite que  $4pq + 4qr - 6pr$ , donc ne contient aucune composante de  $\widehat{E}_{p,q,r}$ . Il suffit donc de montrer que si  $\chi_i < 6p$  on a  $\delta_i + r(4q - \chi_i) < 4pq + 4qr - 6pr$ , c'est-à-dire  $\delta_i - r\chi_i < 4pq - 6pr$ . On est ainsi amené à chercher une stratification de  $\widehat{E}_{p,q}$  qui vérifie :

$$\chi_i < 6p \implies \delta_i - r\chi_i < p(4q - 6r).$$

Si l'on sait construire une telle stratification du schéma  $\widehat{E}_{p,q}$ , celle-ci nous donne par ailleurs des renseignements sur la dimension de schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  pour toute valeur de  $r \in \mathbb{N}$  à cause de la relation :

$$\dim \widehat{E}_{p,q,r} = \max_i \dim [\pi_0^{-1}(U_i)] \leq 4qr + \max_i (\delta_i - r\chi_i).$$

Ceci n'est évidemment intéressant que lorsque  $r$  est tel que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  n'est pas irréductible, puisque sinon on connaît déjà sa dimension.

Si l'on montre par exemple que pour tout  $i$  on a  $\delta_i - r\chi_i \leq 0$ , on obtient que la dimension du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est majorée par  $4qr$ . Comme cette dimension est par ailleurs minorée par

$4pq + 4qr - 6pr$ , ceci n'est possible que si l'on a  $4q \leq 6r$ , donc le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  possède alors plusieurs composantes. D'après ce qui précède, l'une d'elles est la composante  $C_1$  définie par  $u_0 = 0$ , qui a pour dimension exactement  $4qr$ . Si l'on isole alors  $i_0$  de façon que la strate  $U_{i_0}$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  soit réduite au module nul, la composante  $C_1$  est en fait le schéma  $\pi_0^{-1}(U_{i_0})$ . Si l'on montre de plus que pour  $i \neq i_0$  on a  $\delta_i - r\chi_i < 0$ , on obtient que cette composante de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est la seule à posséder la dimension maximale  $4qr$ .

En conclusion, pour prouver aussi bien le théorème 1 que le théorème 2 de l'introduction il nous faut construire une stratification des schémas  $\widehat{E}_{p,q}$  qui fournisse une minoration de  $\text{rg } v_0$  sur chaque strate et pour laquelle on sache majorer la dimension des strates, la majoration de la dimension devant être d'autant meilleure que la minoration du rang est mauvaise et réciproquement. Une fois une telle stratification établie, on est alors ramené à un simple problème numérique. Pour prouver le théorème 1 il suffit de montrer que l'on a :

$$(2.1) \quad (\forall i \mid \chi_i < 6p), \quad \delta_i - r\chi_i < p(4q - 6r).$$

Pour montrer le théorème 2, il faut isoler la strate  $U_{i_0}$  correspondant au module nul de  $\widehat{E}_{p,q}$  et montrer :

$$(2.2) \quad (\forall i \neq i_0), \quad \delta_i - r\chi_i < 0.$$

La construction de la stratification proprement dite occupe dans ce chapitre le paragraphe 2.4 et la partie numérique finale de la démonstration est regroupée dans les paragraphes 2.5 et 2.6. Auparavant, il nous faut commencer par étudier comment on peut minorer le rang de  $v_0$ .

### 2.1.2 Principe de la minoration du rang de $v_0$ .

La minoration du rang de  $v_0$  que nous effectuons se fonde sur la remarque élémentaire suivante. On fixe  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$  ainsi que des bases des espaces vectoriels  $E_0$  et  $E_1$ . On se donne une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}$ , c'est-à-dire une application linéaire  $u_0 : R_1 \otimes_{\mathbb{k}} E_0 \rightarrow E_1$ . À chaque élément  $P \in R_1$  on associe l'application linéaire  $p_0 : E_0 \rightarrow E_1$  qu'il définit, que l'on identifie à sa matrice  $P_0$  dans les bases fixées. Si l'on fixe une base  $(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$ , l'application linéaire  $v_0$  se représente par la matrice par blocs :

$$V_0 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} Y_0 & Z_0 & T_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{\begin{array}{ccc} -X_0 & 0 & 0 \\ 0 & -X_0 & 0 \\ 0 & 0 & -X_0 \end{array}} & & & Z_0 & T_0 & 0 \\ & & & -Y_0 & 0 & T_0 \\ & & & 0 & -Y_0 & -Z_0 \end{array} \right)$$

En considérant la sous-matrice diagonale par blocs  $D_0$  de  $V_0$  qui est encadrée, on obtient immédiatement la minoration  $\text{rg } V_0 \geq 3 \text{rg } X_0$ . Pour pouvoir optimiser cette première minoration très simple, on est alors conduit à choisir la base  $(X, Y, Z, T)$  de  $R^1$  de façon à ce que le rang de la matrice  $X_0$  soit aussi grand que possible, c'est-à-dire que celui de

l'application associée soit maximal dans le sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(X_0, Y_0, Z_0, T_0) = \text{Im } \hat{u}_0$  de  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$ . Ceci revient à choisir  $X$  dans un ouvert de  $R^1$ , qui peut être strict.

Ayant fixé un tel  $X$ , il reste à estimer ce qu'apportent respectivement les deux matrices par blocs  $S_0$  et  $W_0$  définies par  $S_0 = (Y_0 \ Z_0 \ T_0)$  et :

$$W_0 = \left( \begin{array}{cc|c} Z_0 & T_0 & 0 \\ \hline -Y_0 & 0 & T_0 \\ 0 & -Y_0 & -Z_0 \end{array} \right)$$

On reconnaît dans  $W_0$  une matrice analogue à  $V_0$  mais définie seulement à partir des trois variables  $Y, Z$  et  $T$ , c'est-à-dire définie sur l'algèbre  $\mathbb{k}[Y, Z, T]$  au lieu de  $\mathbb{k}[X, Y, Z, T]$ . En appliquant le même procédé on obtient la minoration  $\text{rg } W_0 \geq 2 \text{rg } Y_0$  et on fait apparaître à droite la matrice  $\begin{pmatrix} T_0 \\ -Z_0 \end{pmatrix}$ , qui est l'analogue de  $V_0$  et  $W_0$  mais définie sur  $\mathbb{k}[Z, T]$ .

Pour maximiser la contribution de  $W_0$  au rang de  $V_0$  on pourrait chercher à ce que l'application linéaire  $Y_0$  soit également du rang le plus grand possible, mais ce serait ne pas tenir compte du fait que l'on a déjà fixé  $X$ , donc aussi  $X_0$ . On n'a en réalité pas besoin que les matrices  $S_0$  et  $W_0$  possèdent un grand rang en elles-mêmes, mais qu'elles complètent le mieux possible la matrice  $D_0$  déjà fixée, ce qui est une chose tout à fait différente.

Pour estimer leur apport on est conduit à considérer non pas le rang de  $Y_0$  mais ceux des sous-matrices  $\begin{pmatrix} -X_0 & 0 & -Y_0 & 0 \\ 0 & -X_0 & 0 & -Y_0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} Y_0 \\ -X_0 \end{pmatrix}$  de  $V_0$ , qui mesurent respectivement l'apport de  $Y_0$  via  $W_0$  et  $S_0$ . On est ainsi amené à rechercher une base de  $R_1$  qui maximise les rangs des trois matrices  $(X_0)$ ,  $(X_0 \ Y_0)$  et  $\begin{pmatrix} Y_0 \\ X_0 \end{pmatrix}$ .

Enfin après avoir fixé  $X$  et  $Y$  de la façon précédente il reste à choisir  $Z$  de la meilleure façon possible, puis  $T$ . L'étude que nous effectuons dans la suite montre en fait que pour minorer au mieux le rang de  $V_0$ , on est conduit à considérer une base  $(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$  dans laquelle chacun des rangs des sept matrices  $(X_0)$ ,  $(X_0 \ Y_0)$ ,  $(X_0 \ Y_0 \ Z_0)$ ,  $(X_0 \ Y_0 \ Z_0 \ T_0)$ ,  $\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} Y_0 & X_0 & 0 \\ Z_0 & 0 & X_0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} Z_0 & Y_0 & X_0 & 0 & 0 \\ T_0 & 0 & 0 & Y_0 & X_0 \end{pmatrix}$  est optimal. Ceci revient à associer à la structure de module  $u_0$  une base générique de  $R_1$ , mais en un sens qui dépend directement de  $u_0$ .

La matrice  $(X_0 \ Y_0 \ Z_0 \ T_0)$  occupe une position particulière parmi les précédentes : son rang n'est autre que  $\text{rg } u_0$  et ne dépend pas de la base  $(X, Y, Z, T)$  choisie. En revanche les rangs des six autres varient a priori effectivement en fonction de celle-ci. La démarche ainsi mise en évidence conduit donc à privilégier une base pour effectuer la minoration, et elle nécessite en général de la choisir dans un ouvert strict de l'ensemble des bases de  $R_1$ . Dans tous les cas, ceci revient à briser la symétrie qui existe au niveau de l'application  $v_0$  entre les variables  $X, Y, Z$  et  $T$ .

Deux idées essentielles se dégagent de la tentative de minoration que nous venons d'esquisser. La première est que le problème considéré se ramène de proche en proche à un problème identique comportant moins de variables, ce qui fait naturellement apparaître un principe de **raisonnement par récurrence**. On est ainsi conduit à considérer le problème



analogue de celui qui nous occupe obtenu en remplaçant l'algèbre  $R = \mathbb{k}[X, Y, Z, T]$  par  $R^n = \mathbb{k}[X^0, \dots, X^n]$ . Nous commençons donc par définir au paragraphe 2.2 des schémas  $\widehat{E}_\rho^n$  et une matrice  $V^n$  qui généralisent les schémas  $\widehat{E}_\rho$  et la matrice  $V$  dans ce cadre. Ce procédé de récurrence a d'ailleurs été déjà exploité dans [MDP-2], où les auteurs démontrent déjà leur résultat concernant l'irréductibilité des schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}$  pour les grandes valeurs de  $q$  en étudiant le rang de la matrice  $W_0$  que nous venons d'introduire (cf. [MDP-2], paragraphe II.2). Nous reprenons ici cette idée en la systématisant.

Le second point qui apparaît est que pour minorer le rang de la matrice  $V_0$ , on est amené à associer à chaque structure de module une base privilégiée de  $R_1$  qui fournit une meilleure minoration qu'une base quelconque. En particulier, une telle base étant elle-même définie par récurrence, l'ordre dans lequel on fixe ses éléments revêt une certaine importance. Ceci conduit à rompre la symétrie entre les variables  $X, Y, Z$  et  $T$  que l'on observe sur la matrice  $V_0$ , ce qui revient d'une certaine façon à perdre une partie de l'information exprimée par cette matrice. En revanche, ceci possède d'un point de vue technique un intérêt simplicateur, en permettant de ramener la structure de module  $u_0$  à un  $(n+1)$ -uplet ordonné d'applications linéaires, ou à un  $(n+1)$ -uplet de matrices si l'on se donne également des bases de  $E_0$  et  $E_1$ . Nous allons dans un premier temps étudier de tels  $(n+1)$ -uplets de matrices au paragraphe 2.3 avant de stratifier véritablement les schémas  $\widehat{E}_{p,q}$  au paragraphe 2.4.

## 2.2 Schémas des structures de modules généraux.

On se donne une fois pour toute une infinité d'indéterminées  $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$  et on note  $R^\infty = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} R_d^\infty$  l'algèbre de polynômes  $\mathbb{k}[X^i, i \in \mathbb{N}]$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  on note  $R^n = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} R_d^n$  la sous-algèbre  $\mathbb{k}[X^0, \dots, X^n]$  de  $R^\infty$ . On désigne en particulier par  $R_1^n$  l'espace vectoriel des polynômes de degré 1 de  $R^n$ , c'est-à-dire le sous-espace vectoriel  $\langle X^0, \dots, X^n \rangle$  de dimension  $(n+1)$  de  $R_1^\infty$ . Ainsi  $R^n$  est une sous-algèbre de  $R^{n+1}$  et  $R_1^n$  est un sous-espace vectoriel de  $R_1^{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . On adopte enfin les conventions  $R^{-1} = \mathbb{k}$  et  $R_1^{-1} = 0$  qui nous serviront pour initialiser certaines récurrences.

Nous définissons dans ce paragraphe ce qu'est une structure de  $R^n$ -module gradué pour  $n \in \mathbb{N}$  et décrivons les schémas  $\widehat{E}_\rho^n$  qui les paramètrent. Nous insistons sur les relations de commutation qui définissent ces schémas, qui peuvent se décrire comme dans le cas  $n = 3$  à partir de matrices issues du complexe de Koszul. Nous insistons en particulier sur la matrice  $V^n$  qui est l'analogue de la matrice  $V$  et nous explicitons une façon de la construire par récurrence sur l'entier  $n$ .

### 2.2.1 Structures de modules généralisées.

On se donne une fonction  $\rho$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  à support fini de largeur  $l \geq 1$ . On peut toujours se ramener au cas où  $\rho$  est normalisée et connexe. Pour  $n \in \mathbb{Z}$  on note  $E_n$  le  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel  $\mathbb{k}^{\rho(n)}$  muni de sa base canonique et  $E$  la somme directe finie  $E = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n$ .

Une structure de  $R^n$ -module gradué sur  $E$  consiste en la donnée d'un morphisme  $\varphi^n$  de  $\mathbb{k}$ -algèbres graduées de  $R^n$  dans l'algèbre  $\text{End}_{\text{Grad}}(E)$  des endomorphismes gradués de  $E$  défini au paragraphe 1.3. Se donner une telle structure revient à se donner une application

linéaire graduée  $u^n : R_1^n \otimes_{\mathbb{k}} E(-1) \rightarrow E$ , ou encore à se donner ses composantes homogènes  $u_k^n : R_1^n \otimes_{\mathbb{k}} E_k \rightarrow E_{k+1}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Se donner ces composantes revient encore à se donner pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  les applications  $\hat{u} : R_1^n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_k, E_{k+1})$  qui leur sont associées. On note  $\widehat{E}_\rho^n$  le schéma qui paramètre les structures de module sur  $E$ ; pour  $n = 3$  on retrouve les schémas  $\widehat{E}_\rho = \widehat{E}_\rho^3$ .

Si l'on fixe une base  $(X^0, \dots, X^n)$  de l'espace vectoriel  $R_n^1$ , se donner les applications  $\hat{u}_k^n$  revient à se donner pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$  des applications linéaires  $X_k^j : E_k \rightarrow E_{k+1}$ . Celles-ci ne peuvent pas être choisies librement mais doivent vérifier pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  les relations de commutation :

$$X_{k+1}^i \cdot X_k^j - X_{k+1}^j \cdot X_k^i = 0$$

obtenues pour les couples  $(i, j)$  vérifiant  $0 \leq i < j \leq n$ . Le schéma  $\widehat{E}_\rho^n$  se réalise donc comme un sous-schéma fermé de l'espace affine  $\mathbb{k}^{(n+1)\nu}$  défini par  $\frac{n(n+1)}{2} \mu$  relations quadratiques avec  $\nu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n)\rho(n+1)$  et  $\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n)\rho(n+2)$ . Toutes ses composantes irréductibles sont ainsi de dimension supérieure ou égale à  $(n+1)\nu - \frac{n(n+1)}{2} \mu$ . En particulier en largeur 3, on a  $\nu = pq + qr$  et  $\mu = pr$ , donc toutes les composantes du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  sont de dimension supérieure ou égale à la quantité :

$$\Delta^n(p, q, r) = (n+1)pq + (n+1)qr - \frac{n(n+1)}{2}pr = (n+1) \times \left[ pq + qr - \frac{n}{2}pr \right].$$

Pour  $n = 0$  les schémas  $\widehat{E}_\rho^n$  sont faciles à décrire: il n'y a alors pas de relation de commutation et le schéma  $\widehat{E}_\rho^0$  est isomorphe à l'espace affine  $\prod_{n \in \text{Supp}(\rho)} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{\rho(n)}, \mathbb{k}^{\rho(n+1)})$  de dimension  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n)\rho(n+1)$ . Cette remarque nous permettra dans la suite d'initialiser les récurrences sur  $n$ .

Les cas qui nous intéressent essentiellement ici pour  $n$  quelconque sont ceux des largeurs 2 et 3. Si  $\rho$  est la fonction normalisée de largeur 2 (respectivement 3) définie par  $\rho(0) = p$  et  $\rho(1) = q$  (respectivement  $\rho(0) = p$ ,  $\rho(1) = q$  et  $\rho(2) = r$ ) on note  $\widehat{E}_{p,q}^n$  (respectivement  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$ ) le schéma  $\widehat{E}_\rho^n$ . En largeur 2 il n'y a pas de relation de commutation et le schéma  $\widehat{E}_{p,q}^n$  est ainsi un espace affine de dimension  $(n+1)pq$ . Se donner une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  revient simplement à se donner l'application linéaire  $u_0^n : R_1^n \otimes E_0 \rightarrow E_1$ , c'est-à-dire à se donner  $(n+1)$  matrices de taille  $(q, p)$  si l'on fixe des bases de  $E_0, E_1$  et  $R_1^n$ .

Le cas de la largeur 3 est le premier auquel apparaissent les relations de commutation. Lorsque l'on fixe des bases de  $E_0$  et  $E_1$  ainsi qu'une base  $(X^0, \dots, X^n)$  de  $R_1^n$ , les relations de commutation qui définissent  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  se représentent encore par une équation matricielle de la forme :

$$U^n(X_1^0, \dots, X_1^n) \times V^n(X_0^0, \dots, X_0^n) = 0$$

sur laquelle nous reviendrons au paragraphe 2.2.3. On peut condenser cette équation sous la forme  $U_1^n \times V_0^n = 0$ . Dans cette écriture,  $U_1^n$  représente simplement la matrice  $(X_1^0, \dots, X_1^n)$ . La matrice  $V_0^n$  s'obtient comme matrice par blocs à partir d'une matrice  $V^n$  que nous décrirons explicitement au paragraphe 2.2.3 et qui exprime les premières syzygies du complexe de Koszul, c'est-à-dire de la résolution minimale de  $\mathbb{k}$  en tant que  $R^n$ -module gradué.

La matrice  $U_1^n$  est de taille  $[r, (n+1)q]$  et la matrice  $V_0^n$  est de taille  $[(n+1)q, \frac{n(n+1)}{2}p]$ . De la même façon que dans le cas  $n = 3$ , si la matrice  $V_0^n$  générique est de rang maximum sur le schéma  $\widehat{E}_{p,q}^n$ , on obtient qu'une condition nécessaire pour que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  soit irréductible est d'avoir :

$$(2.3) \quad (n+1)q \geq \text{Max} \left[ \frac{n(n+1)}{2}p + r, \frac{n(n+1)}{2}r + p \right].$$

Si l'on impose  $p \leq r$ , cette condition se ramène à  $(n+1)q \geq [n(n+1)/2] \times r + p$ . L'analogie ( $C^n$ ) de la conjecture ( $C$ ) affirme alors que cette condition nécessaire est également une condition suffisante.

Toute la démarche heuristique que nous avons élaborée au paragraphe 2.1 pour montrer la conjecture ( $C$ ) dans le cas  $n = 3$  se transporte de façon identique au cas général. Notons  $\pi_0^n$  et  $\pi_1^n$  les projections respectives de  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  sur  $\widehat{E}_{p,q}^n$  et  $\widehat{E}_{q,r}^n$  qui associent respectivement à une structure de module  $u$  de  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$ , donnée par le couple  $(u_0^n, u_1^n)$ , les applications linéaires  $u_0^n$  et  $u_1^n$ , qui se représentent respectivement par les matrices  $U_0^n$  et  $U_1^n$  lorsque l'on fixe des bases. Si l'on se ramène par dualité au cas  $p \leq r$ , on peut se contenter de considérer seulement la projection  $\pi_0^n$ . Ses fibres sont schématiquement définies par l'équation  $u_1^n \cdot v_0^n = 0$ , c'est-à-dire par la relation matricielle  $U_1^n \times V_0^n = 0$ .

Pour étudier l'irréductibilité et la dimension des schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$ , on est alors conduit à rechercher une stratification du schéma  $\widehat{E}_{p,q}^n$  qui fournisse une minoration du rang de la matrice  $V_0^n$  sur chaque strate et pour laquelle on sache majorer la dimension de celles-ci. La seule information que nous ayons perdue est l'information a priori donnée par [MDP-2] que l'ouvert de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  sur lequel l'application  $V_0^n$  est de rang maximum est non vide, mais nous n'en avons pas besoin dans le cours de notre démonstration ; ce sera au contraire dans certains cas un corollaire de nos résultats.

Notons  $W_{m_0}$  l'ouvert de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  sur lequel la matrice définie par  $V^n$  est injective. S'il est non vide, cet ouvert est lisse irréductible et de dimension  $(n+1)pq$ . Son image réciproque par  $\pi_0^n$  est un fibré vectoriel au-dessus de  $W_{m_0}$  de rang  $r \left[ (n+1)q - \frac{n(n+1)}{2}p \right]$ . C'est alors un ouvert non vide lisse irréductible de  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  de dimension  $\Delta^n(p, q, r)$ . Notons  $C_0^n$  l'adhérence de cet ouvert dans  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$ , c'est dans ce cas une composante de  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  qui est génériquement lisse, intersection complète et de dimension  $\Delta^n(p, q, r)$ .

Notons  $W'$  le complémentaire de  $W_{m_0}$  dans  $\widehat{E}_{p,q}^n$ . Si on montre que la dimension de l'image réciproque par  $\pi_0^n$  de  $W'$  est strictement plus petite que  $\Delta^n(p, q, r)$ , on obtient que toutes les composantes de  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  sont contenues dans le fermé irréductible  $C_0^n$ , puisqu'elles sont toutes de dimension supérieure ou égale à  $\Delta^n(p, q, r)$ . On en déduit que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  possède une seule composante qui est  $C_0^n$ , donc est irréductible, génériquement lisse, intersection complète et de dimension  $\Delta^n(p, q, r)$ .

D'autre part, ceci entraîne que le schéma  $W_{m_0}$  est non vide pour ces valeurs de  $p$  et  $q$ , donc que l'application  $V_0^n$  générique de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  est injective. On en déduit que pour ces valeurs de  $p$  et  $q$ , la condition (2.3) est effectivement nécessaire pour tout  $r \in \mathbb{N}$  pour que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  soit irréductible.

En résumé, pour montrer l'irréductibilité du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  il suffit de construire une stratification de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  telle que pour toute strate  $W$  on sache montrer, soit que la matrice  $V_0^n$  est injective sur toute la strate, soit que l'on a  $\dim(\pi_0^n)^{-1}(W) < \Delta^n(p, q, r)$ .

Enfin, si l'on isole une strate de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  correspondant à la structure de module nulle, son image réciproque par  $\pi_0^n$  est le fermé de  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  défini par  $u_0^n = 0$ , qui est un espace affine de dimension  $(n+1)qr$ . Si l'on montre que l'image réciproque du complémentaire de cette strate est de dimension strictement plus petite que  $(n+1)qr$ , on obtient d'une part que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est exactement de dimension  $(n+1)qr$  et d'autre part que ce fermé en est une composante. Il suffit pour cela de montrer que l'image réciproque de chacune des strates autres que celle qu'on a isolée vérifie cette propriété. Comme toutes les composantes de  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  ont une dimension au moins égale à  $\Delta^n(p, q, r)$ , ceci ne sera toutefois possible que si l'on a  $(n+1)pq \leq \frac{n(n+1)}{2}p$ , c'est-à-dire  $2q \leq nr$ .

### 2.2.2 Applications linéaires définies par blocs.

Nous avons vu au paragraphe 2.2.1 que les relations de commutation s'expriment naturellement par des matrices et applications linéaires par blocs obtenues par substitution à partir des matrices qui interviennent dans le complexe de Koszul. Nous définissons dans ce paragraphe les notations et conventions à ce sujet dont nous nous servirons constamment dans la suite.

On fixe deux entiers  $p$  et  $q$  non nuls ainsi que deux  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$  de dimension respective  $p$  et  $q$ , et on se donne un entier  $n \in \mathbb{N}$ . Soit enfin  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$  et soit  $\Phi$  une matrice de taille  $(l, k)$  à coefficients dans  $R_1^n = \langle X^0, \dots, X^n \rangle$ .

À tout  $(n+1)$ -uplet  $(A^0, \dots, A^n)$  de matrices de taille  $(q, p)$  on associe la matrice par blocs  $\Phi(A^0, \dots, A^n)$  de taille  $(lq, kp)$  obtenue en substituant les matrices  $A^i$  aux indéterminées  $X^i$ . Si l'on note  $A$  le  $(n+1)$ -uplet  $(A^0, \dots, A^n)$  on pose  $\Phi(A^0, \dots, A^n) = \Phi(A)$ . De même à un  $(n+1)$ -uplet  $w = (w^0, \dots, w^n)$  d'applications linéaires de  $E$  dans  $F$  on associe une application linéaire par blocs  $\Phi(w) = \Phi(w^0, \dots, w^n)$  de  $E^k$  dans  $F^l$  obtenue en substituant les  $w^i$  aux  $X^i$ .

On fixe à présent des bases  $B$  et  $C$  de  $E$  et  $F$  respectivement. En munissant chaque espace  $E$  qui intervient dans la somme directe  $E^k$  de la base  $B$ , on obtient une base  $\mathcal{B}$  de  $E^k$ . De même, en munissant chaque espace  $F$  qui intervient dans la somme directe  $F^l$  de la base  $C$  on obtient une base  $\mathcal{C}$  de  $F^l$ . Si pour chaque  $i \in [0, n]$  on note  $W^i$  la matrice qui représente l'application linéaire  $w^i$  dans les bases  $B$  et  $C$ , la matrice qui représente l'application linéaire par blocs  $\Phi(w)$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  est la matrice par blocs  $\Phi(W^0, \dots, W^n)$ .

Les matrices issues du complexe de Koszul possèdent en outre une propriété de symétrie par rapport aux bases de  $R_1^n$ . Fixons une base  $(X^0, \dots, X^n)$  de  $R_1^n$  et soit  $g$  un élément de  $GL(R_1^n)$ , auquel on associe la base  $(g(X^0), \dots, g(X^n))$  de  $R_1^n$ . On note  $\Phi_g$  la matrice  $\Phi(g(X^0), \dots, g(X^n))$ . Si la matrice  $\Phi$  est issue du complexe de Koszul, par exemple si c'est l'une des matrices  $U$ ,  $V$ ,  $V'$  ou  $U'$  du paragraphe 1.3, pour tout  $g \in GL(R_1^n)$  la matrice  $\Phi_g$  est équivalente à la matrice  $\Phi$  dans l'espace  $M_{q,p}(R_1^n)$ . En particulier, pour tout  $(n+1)$ -uplet  $w = (w^0, \dots, w^n)$  d'applications linéaires de  $E$  dans  $F$  l'application  $\Phi_g(w) : E^k \rightarrow F^l$  est équivalente à  $\Phi(w)$  dans  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E^k, F^l)$  et pour tout  $(n+1)$ -uplet  $W = (W^0, \dots, W^n)$  de

matrices de taille  $(q, p)$  la matrice  $\Phi_g(W)$  de taille  $(lq, kp)$  est équivalente à la matrice  $\Phi(W)$  dans  $M_{lq, kp}(\mathbb{k})$ . On a donc  $\text{rg } \Phi_g(w) = \text{rg } \Phi(w)$  et  $\text{rg } \Phi_g(W) = \text{rg } \Phi(W)$  pour toute application linéaire  $w$  ou matrice  $W$ , ce qui n'est plus vrai si la matrice  $\Phi$  est quelconque.

Nous utiliserons enfin fréquemment le résultat suivant. On décompose les espaces vectoriels  $E$  et  $F$  en sommes directes  $E = E' \oplus E''$  et  $F = F' \oplus F''$ . On suppose que les espaces vectoriels  $E', E'', F'$  et  $F''$  sont respectivement de dimension  $p', p'', q'$  et  $q''$  avec  $p = p' + p''$  et  $q = q' + q''$ , où les entiers  $p', p'', q'$  ou  $q''$  peuvent être éventuellement nuls. Si l'on se donne un  $(n + 1)$ -uplet  $w = (w^0, \dots, w^n)$  d'applications linéaires de  $E$  dans  $F$ , chacune des applications linéaires  $w^i$  devient alors elle-même une application linéaire par blocs, de la forme :

$$w^i = \left( \begin{array}{c|c} E' & E'' \\ \hline w_1^i & w_2^i \\ w_3^i & w_4^i \end{array} \right) \begin{array}{l} F' \\ F'' \end{array} .$$

On peut alors décomposer les espaces vectoriels  $E^k$  et  $F^l$  sous la forme  $E^k = (E')^k \oplus (E'')^k$  et  $F^l = (F')^l \oplus (F'')^l$ , par exemple en fixant des bases adaptées  $B$  et  $C$  de  $E$  et  $F$  puis en permutant les vecteurs des bases  $B$  et  $C$  de  $E^k$  et  $F^l$ . Pour ces décompositions, l'application linéaire  $\Phi(w)$  de  $E^k$  dans  $F^l$  correspond à l'application linéaire par blocs :

$$\left( \begin{array}{c|c} E' \oplus \dots \oplus E' & E'' \oplus \dots \oplus E'' \\ \hline \Phi(w_1^0, \dots, w_1^n) & \Phi(w_2^0, \dots, w_2^n) \\ \Phi(w_3^0, \dots, w_3^n) & \Phi(w_4^0, \dots, w_4^n) \end{array} \right) \begin{array}{l} F' \oplus \dots \oplus F' \\ F'' \oplus \dots \oplus F'' \end{array} .$$

Si l'on note  $w_j$  le  $(n + 1)$ -uplet  $(w_j^0, \dots, w_j^n)$  pour  $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , on obtient en particulier  $\text{rg } \Phi(w) = \text{rg } \left( \begin{array}{c|c} \Phi(w_1) & \Phi(w_2) \\ \hline \Phi(w_3) & \Phi(w_4) \end{array} \right)$ .

Nous énonçons sous la forme d'un lemme la version matricielle de ce résultat :

**Lemme 2.1.** *Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  et soit  $W = (W^0, \dots, W^n)$  un  $(n + 1)$ -uplet de matrices de taille  $(q, p)$ . On se donne  $(p', p'', q', q'') \in \mathbb{N}^4$  vérifiant  $p = p' + p''$  et  $q = q' + q''$ , et on décompose chaque matrice  $W^i$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  en blocs de la forme :*

$$W^i = \left( \begin{array}{c|c} p' & p'' \\ \hline W_1^i & W_2^i \\ W_3^i & W_4^i \end{array} \right) \begin{array}{l} q' \\ q'' \end{array} .$$

Soit  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$  et soit  $\Phi$  une matrice de taille  $(l, k)$  à coefficients dans  $R_1^n = \langle X^0, \dots, X^n \rangle$ . En notant  $W_j$  pour  $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  le  $(n + 1)$ -uplet de matrices  $(W_j^0, \dots, W_j^n)$  on a :

$$\text{rg } \Phi(W) = \text{rg } \left( \begin{array}{c|c} \Phi(W_1) & \Phi(W_2) \\ \hline \Phi(W_3) & \Phi(W_4) \end{array} \right) .$$

### 2.2.3 La matrice des relations de commutation.

Nous montrons dans ce paragraphe comment on peut construire par récurrence la matrice  $V^n$  qui rend compte des relations de commutations. C'est de cette construction dont nous aurons explicitement besoin dans la suite bien plus que de la définition de  $V^n$  par le complexe de Koszul. Nous posons les notations suivantes :

**Définition 2.2.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $D^n$  la matrice diagonale de taille  $(n, n)$  à coefficients dans  $R_1^\infty$  dont les coefficients diagonaux sont égaux à  $-X^0$ . On note  $S^n$  la matrice en ligne  $(X^0 \ X^1 \ \dots \ X^n)$  de taille  $(1, n+1)$  à coefficients dans  $R_1^\infty$ . Par convention on note  $S_{-1}$  la matrice à 1 ligne et 0 colonne à coefficients dans  $R_1^\infty$ .

**Définition 2.3.** On définit par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  une matrice  $V^n$  à coefficients dans  $R_1^\infty$  de la manière suivante. Pour  $n = 0$ ,  $V^0$  est la matrice à 1 ligne et 0 colonne à coefficients dans

$R_1^\infty$ . Pour  $n \geq 1$  on pose  $V^n = \left( \begin{array}{c|c} S^{n-1}(X^1, \dots, X^n) & 0 \\ \hline D^n & V^{n-1}(X^1, \dots, X^n) \end{array} \right)$ , en désignant par  $S^{n-1}(X^1, \dots, X^n)$  et  $V^{n-1}(X^1, \dots, X^n)$  les matrices obtenues à partir de  $S^{n-1}$  et  $V^{n-1}$  en substituant les variables  $(X^1, \dots, X^n)$  à  $(X^0, \dots, X^{n-1})$ .

On voit par récurrence que la matrice  $V^n$  est de taille  $\left[ n+1, \frac{n(n+1)}{2} \right]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Les premiers exemples correspondent à ceux que l'on a déjà rencontrés au paragraphe 2.2.1 ; en posant  $(X^0, X^1, X^2, X^3) = (X, Y, Z, T)$  on a :

$$V^1 = \left( \begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline -X & \end{array} \right), \quad V^2 = \left( \begin{array}{cc|c} Y & Z & 0 \\ -X & 0 & Z \\ \hline 0 & -X & -Y \end{array} \right),$$

$$V^3 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} Y & Z & T & 0 & 0 & 0 \\ -X & 0 & 0 & Z & T & 0 \\ 0 & -X & 0 & -Y & 0 & T \\ \hline 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z \end{array} \right) = V.$$

Les relations de commutation qui définissent le schéma  $\widehat{E}_{p,q}^n$  s'écrivent donc sous la forme  $U_1^n \times V_0^n = 0$ , où  $U_1^n$  est la matrice par blocs obtenue à partir de  $S^n$  en substituant les matrices  $X_1^i$  aux indéterminées  $X^i$  et où  $V_0^n$  est la matrice par blocs obtenue à partir de  $V^n$  en substituant les matrices  $X_0^i$  aux indéterminées  $X^i$ . On peut donc écrire ces relations sous la forme  $S^n(X_1^0, \dots, X_1^n) \times V^n(X_0^0, \dots, X_0^n) = 0$ .

Plus généralement, les relations de commutations qui apparaissent en degré  $k$  dans la définition du schéma  $\widehat{E}_p^n$  s'expriment encore par la relation  $U_{k+1}^n \times V_k^n = 0$ , en posant  $U_{k+1}^n = S^n(X_{k+1}^0, \dots, X_{k+1}^n)$  et  $V_k^n = V^n(X_k^0, \dots, X_k^n) = 0$ .

Pour définir la stratification, nous aurons par ailleurs besoin des matrices suivantes :

**Définition 2.4.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $T^n$  la matrice de taille  $(2, 2n-1)$  à coefficients dans

$R_1^\infty$  définie par  $T^n = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & S^{n-2} & X^{n-1} \\ \hline S^{n-2} & 0 & X^n \end{array} \right)$ , c'est-à-dire définie par  $T^1 = \begin{pmatrix} X^0 \\ -X^1 \end{pmatrix}$  pour  $n = 1$  et par  $T^n = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & X^0 & \dots & X^{n-2} & X^{n-1} \\ \hline X^0 & \dots & X^{n-2} & 0 & \dots & 0 & X^n \end{array} \right)$  pour  $n \geq 2$ .

On note que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la matrice  $D^n$  est en fait à coefficients dans  $R_1^0 = \langle X^0 \rangle$  et que les matrices  $S^n$ ,  $V^n$  et  $T^n$  sont à coefficients dans  $R_1^n = \langle X^0, \dots, X^n \rangle$ .

## 2.3 Préliminaires matriciels.

Nous effectuons successivement dans ce paragraphe trois choses distinctes. Elles concernent toutes trois des suites ordonnées de  $(n+1)$  matrices de même taille, que nous appellerons constamment ici des  $(n+1)$ -uplets. Les deux premières s'inspirent directement des remarques heuristiques du paragraphe 2.1.1.

Dans un premier temps, nous montrons que l'on peut ramener une structure de module  $u_0^n$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  à un  $(n+1)$ -uplet de matrices de taille  $(q,p)$  qui se décomposent toutes par blocs sous une certaine forme lorsque l'on choisit des bases de  $R_1^n$  adaptées à la structure de module ainsi que des bases correspondantes de  $E_0$  et  $E_1$  (paragraphe 2.3.1). Nous définissons ensuite une notion de  $(n+1)$ -uplet de matrices décomposé par blocs qui généralise par récurrence la propriété ainsi mise en évidence (paragraphe 2.3.2). Nous montrons alors que pour un  $(n+1)$ -uplet qui est ainsi décomposé on sait minorer le rang de la matrice  $V_0^n$  associée (paragraphe 2.3.3) et isolons des cas où celle-ci est injective (paragraphe 2.3.4). Nous définissons enfin sur l'espace  $[\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)]^{n+1}$  un invariant numérique qui en établit une stratification et qui permet de décrire la décomposition d'un  $(n+1)$ -uplet de matrices lorsque celui-ci est effectivement décomposé, donc qui fournit dans ce cas la valeur du minorant du rang de la matrice  $V^n$  associée.

Nous nous plaçons ainsi dans un cadre purement matriciel tout au long de ce paragraphe. Nous étendrons ce cadre seulement au paragraphe 2.4, où nous définirons encore pour les applications linéaires puis pour les structures de module des décompositions analogues ainsi qu'un type numérique et un multirang.

### 2.3.1 Un lemme d'algèbre linéaire.

Pour obtenir une minoration optimale du rang de la matrice  $V_0^n$ , nous avons vu au paragraphe 2.1.2 qu'il est judicieux d'associer à la structure de module  $u_0^n$  une base  $(X^0, \dots, X^n)$  de l'espace vectoriel  $R_1^n$  telle que l'application linéaire (ou la matrice)  $X_0^0$  soit de rang aussi grand que possible. Il nous faut donc rechercher une telle application qui soit de rang maximal parmi les éléments du sous-espace vectoriel  $\text{Im } \widehat{u}_0 = \text{Vect}(X_0^0, \dots, X_0^n)$  de  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$ . Nous montrons ici que pour un tel choix de base de  $R_1^n$  on peut simplifier l'écriture matricielle des applications  $X_0^i$  pour  $i \geq 1$ . Nous étudions pour cela de façon générale les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel d'applications linéaires.

**Lemme 2.5.** *Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels et soit  $L$  un sous-espace vectoriel de  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E, F)$ . Soit enfin  $v$  un élément de  $L$  de rang maximal dans  $L$ . Pour tout  $w$  de  $L$  on a  $w(\text{Ker } v) \subset \text{Im } v$ .*

**Démonstration.** Il suffit de montrer que si  $v$  et  $w$  sont deux éléments de  $L$  qui vérifient  $w(\text{Ker } v) \not\subset \text{Im } v$  on a  $\text{rg}(v + \lambda w) > \text{rg } v$  pour  $\lambda$  général dans  $\mathbb{k}$ , donc que  $v$  n'est pas de rang maximal dans  $L$ .

On fixe un supplémentaire  $E'$  de  $\text{Ker } v$  dans  $E$  et une base  $(e_1, \dots, e_r)$  de  $E'$ . On pose  $f_i = v(e_i)$  pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ; la famille  $(f_1, \dots, f_r)$  est une base de  $\text{Im } v$ . Soit  $e_{r+1}$  un élément de  $\text{Ker } v$  vérifiant  $w(e_{r+1}) \notin \text{Im } v$  et soit  $f_{r+1} = w(e_{r+1})$ . On complète  $(e_{r+1})$  en une base  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  de  $\text{Ker } v$  et  $(f_1, \dots, f_r, f_{r+1})$  en une base de  $F$ . On obtient alors des bases de  $E$  et  $F$  dans lesquelles les applications  $v$  et  $w$  admettent respectivement les matrices :

$$V = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad W = \left( \begin{array}{c|c|c} W_1 & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \\ \hline \dots & 1 & \dots \\ \hline \dots & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \end{array} \right).$$

Pour  $\lambda \in \mathbb{k}$  la matrice  $V + \lambda W$  admet alors la sous-matrice carrée de taille  $(r + 1, r + 1)$  :

$$\left( \begin{array}{c|c} I_r + \lambda W_1 & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \\ \hline \dots & \lambda \end{array} \right)$$

qui est inversible quand  $\lambda$  appartient à un certain ouvert non vide de  $\mathbb{k}$ , c'est-à-dire de rang  $r + 1 = \text{rg } v + 1$ . L'application  $v$  n'est donc pas de rang maximal dans  $L$ . ■

Le lemme 2.5 admet l'expression matricielle suivante :

**Lemme 2.6.** *Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels, soit  $L$  un sous-espace vectoriel de  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E, F)$  et soit  $v$  un élément de  $L$  de rang maximal dans  $L$ . Si l'on fixe des bases  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$  et  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}', \mathcal{C}'')$  de  $E$  et  $F$  en complétant des bases  $\mathcal{B}''$  et  $\mathcal{C}'$  de  $\text{Ker } v$  et  $\text{Im } v$ , tout élément  $w$  de  $L$  se représente par une matrice du type :*

$$W = \left( \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} \mathcal{B}' & \mathcal{B}'' \\ \hline W_1 & W_2 \\ \hline W_3 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} \mathcal{C}' \\ \mathcal{C}'' \end{array} \end{array} \right).$$

L'application  $v$  admet évidemment dans ces bases une matrice de la forme  $V = \left( \begin{array}{c|c} V_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  avec  $V_1$  inversible. La conclusion des lemmes 2.5 ou 2.6 fournit ainsi une condition nécessaire pour que  $v$  soit de rang maximum dans l'espace vectoriel  $L$ . Cependant, cette condition est très loin d'être suffisante, comme on le voit en considérant les matrices  $A = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  et  $B = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right)$ .

On peut noter que les matrices  $W_1$ ,  $W_2$  et  $W_3$  associés à  $W$  qui apparaissent dans la conclusion du lemme 2.6 correspondent à des applications linéaires qui sont indépendantes du choix des bases de  $E$  et  $F$  que l'on a effectué. Elles représentent en fait respectivement les applications linéaires  $w_1 : E/\text{Ker } v \rightarrow \text{Im } v$ ,  $w_2 : \text{Ker } v \rightarrow \text{Im } v$  et  $w_3 : E/\text{Ker } v \rightarrow F/\text{Im } v$



induites par  $w$ . Ces applications ne dépendent donc ni des bases ni des supplémentaires que l'on a choisis, non plus que leurs rangs. Nous montrerons au paragraphe 2.3.2 que ces rangs se déduisent explicitement de ceux des applications  $v$  et  $w$  ou des matrices  $V$  et  $W$  par les relations  $\text{rg } W_2 = \text{rg} \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} - \text{rg } V$  et  $\text{rg } W_3 = \text{rg}(V W) - \text{rg } V$ .

En lien avec le lemme 2.6, nous utiliserons enfin dans la suite le résultat immédiat suivant que nous énonçons sous la forme d'un lemme car il nous servira à maintes reprises :

**Lemme 2.7.** Soit  $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & 0 \end{pmatrix}$  une matrice trigonale par blocs, on a la minoration :

$$\text{rg } M \geq \text{rg } M_2 + \text{rg } M_3.$$

Si de plus l'une des deux matrices  $M_2$  ou  $M_3$  est carrée inversible on a une égalité.

**Démonstration.** Pour la première assertion, il suffit d'extraire un mineur non nul de taille maximale de chacune des sous-matrices  $M_2$  et  $M_3$ . Le mineur de  $M$  que l'on obtient en conservant les lignes et colonnes correspondantes est encore non nul et de taille  $\text{rg } M_2 + \text{rg } M_3$ .

Pour la seconde assertion, supposons par exemple que  $M_3$  est carrée inversible de taille  $(a, a)$  et que  $M_2$  est de taille  $(b, c)$ . Comme la matrice  $M' = \begin{pmatrix} 0 & M_3^{-1} \\ I_b & 0 \end{pmatrix}$  est inversible, on a  $\text{rg } M = \text{rg}(M' M) = \text{rg} \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ M_1 & M_2 \end{pmatrix} = a + \text{rg } M_2$ , soit  $\text{rg } M = \text{rg } M_2 + \text{rg } M_3$ . ■

Ce lemme montre qu'une condition nécessaire à rajouter aux conclusions des lemmes 2.5 ou 2.6 pour que  $v$  soit de rang maximum dans l'espace vectoriel  $L$  est que pour tout  $w \in L$  on ait  $\text{rg } W_2 + \text{rg } W_3 \leq \text{rg } V$ . Cette condition supplémentaire ne donne toujours pas une condition suffisante, comme on le voit en considérant les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elles sont toutes deux de rang 2 et vérifient clairement la conclusion du lemme 2.6. De plus pour tout couple  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{k}^2$  la matrice  $C = \lambda A + \mu B$  s'écrit bien sous la forme  $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\text{rg } C_2 + \text{rg } C_3 \leq 2$ . Cependant, les matrices  $A$  et  $B$  ne sont pas de rang maximum dans l'espace  $\langle A, B \rangle$  puisqu'on a  $\text{rg}(A + B) = 3$ .

### 2.3.2 Décomposition de familles de matrices.

La seconde idée heuristique que nous avons mise en évidence au paragraphe 2.1.1 consiste à adopter un raisonnement par récurrence. Pour exploiter cette idée, nous définissons dans ce paragraphe des décompositions de familles de matrices qui généralisent les décompositions par blocs fournies par la conclusion du lemme 2.6.

**Définition 2.8.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille  $(q, p)$ . Soit  $a \in \mathbb{N}$ , on dit que le  $(n+1)$ -uplet  $A$  est décomposé de type  $(a)$  si et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  la matrice  $A^i$  s'écrit par blocs de la forme :

$$A^i = \left( \begin{array}{c|c} A_1^i & A_2^i \\ \hline A_3^i & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} a \\ p-a \\ q-a \end{array}$$

avec  $\text{rg } A_1^0 = a$ ,  $A_2^0 = 0$ ,  $A_3^0 = 0$ , c'est-à-dire  $A^0 = \left( \begin{array}{c|c} A_1^0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$  avec  $A_1^0$  inversible.

Les conditions de la définition 2.8 imposent  $a \leq \min(p, q)$ . Le seul  $(n+1)$ -uplet décomposé de type  $(0)$  est le  $(n+1)$ -uplet nul. Si le  $(n+1)$ -uplet  $A$  est décomposé de type  $(a)$ , l'entier  $a$  est déterminé de façon unique par  $a = \text{rg } A^0$ . En particulier, pour  $n = 0$  tout 1-uplet  $A = (A^0)$  est décomposé de type  $(\text{rg } A^0)$ . Enfin, si le  $(n+1)$ -uplet  $A$  est décomposé, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  les rangs des matrices  $A_2^i$  et  $A_3^i$  sont déterminés par ceux des matrices  $A^i$  et  $A^0$  de la façon suivante :

**Proposition 2.9.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille, que l'on suppose décomposé de type  $(a)$ . Avec les notations de la définition 2.8, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  on a  $\text{rg } A_2^i = \text{rg} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^i \end{pmatrix} - \text{rg } A^0$  et  $\text{rg } A_3^i = \text{rg}(A^0 A^i) - \text{rg } A^0$ .

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate du lemme 2.7. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a :

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^i \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} A_1^0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ A_1^i & A_2^i \\ \hline A_3^i & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad (A^0 A^i) = \left( \begin{array}{c|c} A_1^0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ A_1^i & A_2^i \\ \hline A_3^i & 0 \end{array} \right).$$

Comme la matrice  $A_1^0$  est inversible, on obtient d'une part  $\text{rg} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^i \end{pmatrix} = \text{rg } A_1^0 + \text{rg } A_2^i$  et d'autre part  $\text{rg}(A^0 A^i) = \text{rg } A_1^0 + \text{rg } A_3^i$ . Comme on a  $\text{rg } A_1^0 = \text{rg } A^0$  on en déduit le résultat. ■

On pose les notations suivantes :

**Définition 2.10.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille. Si  $A$  est décomposé de type  $(a) = (\text{rg } A^0)$  on note  $A_j$  le  $(n+1)$ -uplet de matrices  $(A_j^0, \dots, A_j^n)$  pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ . De plus, si  $n \geq 1$  on note  $A'_j$  le  $n$ -uplet  $(A_j^1, \dots, A_j^n)$  pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ . On note enfin  $A'$  le  $n$ -uplet  $A'_3$ , que l'on appelle le  $n$ -uplet dérivé de  $A$ .

Le lemme 2.6 montre en fait que si  $A^0$  est de rang maximal dans le sous-espace vectoriel  $\text{Vect}(A^0, \dots, A^n)$  de  $M_{q,p}(\mathbb{k})$  engendré par les matrices  $A^i$ , le  $(n+1)$ -uplet  $A$  est nécessairement décomposé de type  $(\text{rg } A^0)$ , la réciproque n'étant pas vraie.

Le résultat suivant se déduit immédiatement du lemme 2.1 :

**Lemme 2.11.** Soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de taille  $(q, p)$  et soit  $\Phi$  une matrice à coefficients dans  $R_1^n = \langle X^0, \dots, X^n \rangle$ . Si  $A$  est décomposé de type  $(a)$  on a :

$$\text{rg } \Phi(A) = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c} \Phi(A_1) & \Phi(A_2) \\ \hline \Phi(A_3) & 0 \end{array} \right)$$

où  $\Phi(A)$  (resp.  $\Phi(A_j)$  pour  $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ) désigne la matrice par blocs obtenue en substituant les matrices  $A^i$  (resp.  $A_j^i$ ) aux indéterminées  $X^i$ .

Nous utiliserons ce résultat dans la suite en prenant pour  $\Phi$  les matrices  $S^n, D^n, V^n$  ou  $T^n$  définies au paragraphe 2.2.3. On pose ensuite la définition suivante :

**Définition 2.12.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ . On dit que le  $(n+1)$ -uplet  $A$  est décomposé de type  $(a, b, c)$  si et seulement si il est décomposé de type  $(a)$  et si de plus pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $\text{rg } A_2^i \leq b$  et  $\text{rg } A_3^i \leq c$  avec  $\text{rg } A_2^1 = b$  et  $\text{rg } A_3^1 = c$ .

On note que si les matrices  $A^i$  sont de taille  $(q, p)$  ces conditions imposent aux nombres  $a, b$  et  $c$  les relations :

$$(2.4) \quad a \leq \min(p, q), \quad b \leq \min(a, p-a) \quad \text{et} \quad c \leq \min(a, q-a),$$

soit  $b \leq a, a+b \leq p, c \leq a$  et  $a+c \leq q$ . Par ailleurs d'après le lemme 2.7 on a  $\text{rg } A^i \geq \text{rg } A_2^i + \text{rg } A_3^i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , donc  $\text{rg } A^1 \geq b+c$  ce qui entraîne  $b+c \leq \min(p, q)$ . On note également que les entiers  $(a, b, c)$  sont alors entièrement déterminés par  $A$ , donc un  $(n+1)$ -uplet de matrices possède au plus un unique type de décomposition  $(a, b, c)$ .

On ne suppose pas que les entiers  $a, p-a$  ou  $q-a$  sont strictement positifs dans la définition 2.12. Nous aurons effectivement besoin dans la suite de pouvoir considérer les cas dégénérés où certains de ces entiers s'annulent, qui donnent des décompositions avec des matrices ayant selon les cas 0 ligne ou 0 colonne. Si par exemple on a  $a = p$ , les relations (2.4) entraînent  $b = 0$ . Un  $(n+1)$ -uplet de matrices  $A = (A^0, \dots, A^n)$  est alors décomposé de type  $(p, 0, c)$  si et seulement si pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  les matrices  $A^i$  s'écrivent :

$$A^i = \begin{pmatrix} A_1^i \\ A_3^i \end{pmatrix} \begin{array}{c} a \\ q-a \end{array},$$

avec  $A^0 = \begin{pmatrix} A_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}$  où  $A_1^0$  est inversible et si de plus on a  $\text{rg } A_3^1 = c$  et  $\text{rg } A_3^i \leq c$  pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .

De même si on a  $a = q$  les relations (2.4) entraînent  $c = 0$ . Dire que le  $(n+1)$ -uplet de matrices  $A$  est décomposé de type  $(q, b, 0)$  signifie que pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  les matrices  $A^i$  s'écrivent :

$$A^i = \begin{pmatrix} A_1^i & A_2^i \end{pmatrix} \begin{array}{c} a \\ p-a \end{array}$$

avec  $A^0 = (A_1^0 | 0)$  où  $A_1^0$  est inversible et que de plus on a  $\text{rg } A_2^1 = b$  et  $\text{rg } A_3^i \leq c$  pour  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .

La relation  $a = p = q$  entraîne  $b = c = 0$ . Dire qu'un  $(n + 1)$ -uplet de matrices carrées  $(A^0, \dots, A^n)$  de taille  $(p, p)$  est décomposé de type  $(p, 0, 0)$  signifie seulement que la matrice  $A^0$  est inversible. Enfin si  $a = 0$  les relations (2.4) imposent encore  $b = c = 0$  et le seul  $(n + 1)$ -uplet décomposé de type  $(0, 0, 0)$  est le  $(n + 1)$ -uplet nul.

**Exemple 2.13.** *Considérons les trois matrices :*

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad B = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad C = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Le triplet  $(A, B, C)$  est décomposé de type  $(2, 1, 1)$ , le triplet  $(B, A, C)$  est décomposé de type  $(3, 0, 0)$  et les triplets  $(C, A, B)$  ou  $(C, B, A)$  ne sont pas décomposés au sens de la définition 2.12.

On définit enfin par récurrence sur l'entier  $k$  la notion suivante :

**Définition 2.14.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n + 1)$ -uplet de matrices de même taille et soit  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$ .*

- Pour  $k = 0$  on dit que le  $(n + 1)$ -uplet  $A$  est décomposé de type  $\alpha$  à l'ordre 0 si et seulement si il est décomposé de type  $(a_0)$ .

- Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on dit que le  $(n + 1)$ -uplet  $A$  est décomposé de type  $\alpha$  à l'ordre  $k$  si et seulement si il est décomposé de type  $(a_0, b_1, a_1)$  et si le  $n$ -uplet dérivé  $A' = (A_3^1, \dots, A_3^n)$  est décomposé de type  $(a_1; b_2, a_2; \dots; b_n, a_n)$  à l'ordre  $(k - 1)$ .

On note que la notion de  $(n + 1)$ -uplet décomposé de type  $\alpha$  à l'ordre 1 est strictement plus forte que celle de  $(n + 1)$ -uplet décomposé de type  $(a_0, b_1, a_1)$ .

**Définition 2.15.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$ . On appelle type dérivé de  $\alpha$  et on note  $\alpha'$  le  $(2n - 1)$ -uplet d'entiers  $(a_1; b_2, a_2; \dots; b_n, a_n)$ .*

Ici encore, si  $A$  est décomposé de type  $\alpha$  à l'ordre  $k$  les entiers  $(a_0; b_1, a_1; \dots; b_k, a_k)$  sont uniquement déterminés par  $A$ . En particulier si  $A$  est décomposé à l'ordre  $n$  le  $(2n + 1)$ -nuplet  $\alpha$  est déterminé en entier. Le fait que  $A$  soit décomposé de type  $\alpha$  à l'ordre  $k$  impose aux entiers positifs  $(a_0; b_1, a_1; \dots; b_k, a_k)$  les relations suivantes, qui s'obtiennent par récurrence à partir des relations (2.4) :

$$a_0 \leq \min(q, p) \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad a_i \leq \min(q - a_0 - \dots - a_{i-1}, a_{i-1}), \\ b_1 \leq \min(p - a_0, a_0) \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 2, k \rrbracket, \quad b_i \leq \min(a_{i-2} - a_{i-1}, a_{i-1}).$$

Ces relations s'uniformisent si l'on pose  $a_{-1} = p$ . La première ligne équivaut en fait aux relations :

$$(2.5) \quad p = a_{-1} \geq a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_{k-1} \geq a_k \quad \text{et} \quad q \geq \sum_{i=0}^k a_i,$$

et la seconde s'écrit :

$$(2.6) \quad \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad b_i \leq \min(a_{i-2} - a_{i-1}, a_{i-1}).$$

### 2.3.3 Minoration du rang de $V^n$ .

L'intérêt majeur des  $(n+1)$ -uplets décomposés de matrices que nous venons d'introduire est que l'on sait minorer le rang de la matrice par blocs définie par  $V^n$  qui leur est associée. De façon précise, nous montrons le résultat suivant :

**Proposition 2.16.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille, soit  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$  et soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Si le  $(n+1)$ -uplet de matrices  $A$  est décomposé de type  $\alpha$  à l'ordre  $k$  on a :*

$$\text{rg } V^n(A) \geq [n a_0 + (n-1) a_1 + \dots + (n-k) a_k] + [b_1 + \dots + b_k].$$

Si  $A$  est décomposé à l'ordre  $n$  on obtient  $\text{rg } V^n(A) \geq \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) a_i + \sum_{i=1}^n b_i$ .

**Définition 2.17.** *Soit  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$ . On note  $\chi^n(\alpha)$  la quantité :*

$$\chi^n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) a_i + \sum_{i=1}^n b_i.$$

Si l'on adopte la convention  $b_0 = 0$  cette quantité s'écrit  $\chi^n(\alpha) = \sum_{i=0}^n [(n-i) a_i + b_i]$ . On remarque que la valeur de  $a_n$  n'intervient pas dans la minoration, non plus que la taille des matrices.

La proposition 2.16 est évidente pour  $n = 0$  puisque l'on obtient alors  $\text{rg } V^0(A) \geq 0$ . Elle se déduit ensuite par une récurrence immédiate à partir du lemme suivant :

**Lemme 2.18.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ , soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille et soit  $A'$  le  $n$ -uplet dérivé associé. Si  $A$  est décomposé de type  $(a)$  on a  $\text{rg } V^n(A) \geq n a + \text{rg } A_2^1 + \text{rg } V^{n-1}(A')$ . Si de plus  $A$  est décomposé de type  $(a, b, c)$  on obtient  $\text{rg } V^n(A) \geq [n a + b] + \text{rg } V^{n-1}(A')$ .*

**Démonstration.** On rappelle que pour  $j \in \{1, 2, 3\}$  on note  $A_j$  le  $(n+1)$ -uplet  $(A_j^0, \dots, A_j^n)$  et  $A'_j$  le  $n$ -uplet  $(A_j^1, \dots, A_j^n)$ ; on a  $A' = A'_3$ . D'après le lemme 2.11, on a :

$$\text{rg } V^n(A) = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c} V^n(A_1) & V^n(A_2) \\ \hline V^n(A_3) & 0 \end{array} \right).$$

D'après la définition de la matrice  $V^n$  on a en outre pour  $j \in \{1, 2, 3\}$  :

$$V^n(A_j) = \left( \begin{array}{c|c} S^{n-1}(A_j^1, \dots, A_j^n) & 0 \\ \hline D^n(A_j^0) & V^{n-1}(A_j^1, \dots, A_j^n) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} S^{n-1}(A'_j) & 0 \\ \hline D^n(A_j^0) & V^{n-1}(A'_j) \end{array} \right).$$

Pour alléger les écritures, notons ici respectivement  $S_j$ ,  $D_j$  et  $V_j$  les matrices  $S^{n-1}(A'_j)$ ,  $D^n(A_j^0)$  et  $V^{n-1}(A'_j)$ . On a  $V^n(A_j) = \left( \begin{array}{c|c} S_j & 0 \\ \hline D_j & V_j \end{array} \right)$  et  $V_3 = V^{n-1}(A'_3) = V^{n-1}(A')$ . On obtient :

$$\text{rg } V^n(A) = \text{rg} \left( \begin{array}{cc|cc} S_1 & 0 & S_2 & 0 \\ D_1 & V_1 & D_2 & V_2 \\ \hline S_3 & 0 & 0 & 0 \\ D_3 & V_3 & 0 & 0 \end{array} \right) = \text{rg} \left( \begin{array}{cc|cc} S_1 & S_2 & 0 & 0 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline D_1 & D_2 & V_1 & V_2 \\ D_3 & 0 & V_3 & 0 \end{array} \right),$$

la dernière matrice étant obtenue en échangeant les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> lignes ainsi que les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> colonnes. Pour  $j \in \{1, 2, 3\}$  la matrice  $D_j = D^n(A_j^0)$  est la matrice diagonale par blocs comportant  $n$  blocs égaux à  $A_j^0$  sur la diagonale. Comme le  $(n+1)$ -uplet  $A$  est décomposé de type  $(a, b, c)$  on a  $A_2^0 = 0$  et  $A_3^0 = 0$ , donc  $D_2 = 0$  et  $D_3 = 0$ . On obtient :

$$\operatorname{rg} V^n(A) = \operatorname{rg} \left( \begin{array}{cc|cc} S_1 & S_2 & 0 & 0 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline D_1 & 0 & V_1 & V_2 \\ 0 & 0 & V_3 & 0 \end{array} \right) = \operatorname{rg} \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & S_1 & S_2 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 \\ \hline V_1 & V_2 & D_1 & 0 \\ V_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

la dernière égalité s'obtenant en échangeant les deux premières colonnes avec les deux dernières. Finalement, en conservant seulement les 1<sup>re</sup>, 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> lignes et colonnes on extrait de la dernière matrice la sous-matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & S_1 & \boxed{S_2} \\ V_1 & \boxed{D_1} & 0 \\ \boxed{V_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est trigonale par blocs et dont le rang est minoré par  $\operatorname{rg} D_1 + \operatorname{rg} S_2 + \operatorname{rg} V_3$ .

La matrice  $D_1 = D^n(A_1^0)$  est la matrice diagonale par blocs comportant  $n$  blocs égaux à  $A_1^0$  sur la diagonale, donc on a  $\operatorname{rg} D_1 = n \times \operatorname{rg} A_1^0 = na$ . Par ailleurs la matrice  $A_2^1$  est une sous-matrice de la matrice  $S_2 = S^{n-1}(A_2^0) = (A_2^1 \ A_2^2 \ \dots \ A_2^n)$ , donc on a  $\operatorname{rg} S_2 \geq \operatorname{rg} A_2^1$ . On a enfin  $V_3 = V^{n-1}(A')$ , donc on obtient :

$$\operatorname{rg} V^n(A) \geq na + \operatorname{rg} A_2^1 + \operatorname{rg} V^{n-1}(A').$$

Si le  $(n+1)$ -uplet  $A$  est décomposé de type  $(a, b, c)$  on a en outre  $\operatorname{rg} A_2^1 = b$ , ce qui donne  $\operatorname{rg} V^n(A) \geq [na + b] + \operatorname{rg} V^{n-1}(A')$ . ■

### 2.3.4 Critère d'injectivité.

La proposition 2.16 fournit en particulier une condition suffisante pour que la matrice  $V^n(A)$  associée à un  $(n+1)$ -uplet de matrices  $A$  soit injective : il suffit que  $A$  soit décomposée de type  $\alpha$  à l'ordre  $n$  et que  $\alpha$  vérifie  $\chi^n(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2}p$ . D'après le schéma de démonstration que nous avons établi au paragraphe 2.1.1, pour montrer l'irréductibilité des schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  il est capital de repérer les cas où la matrice définie par  $V^n$  est injective, donc de rechercher les cas où la dernière égalité est vérifiée. On a le résultat suivant :

**Lemme 2.19.** *Soit  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$ . Si  $\alpha$  vérifie  $b_i \leq a_{i-2} - a_{i-1}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  ainsi que la relation  $a_{n-2} \leq \dots \leq a_1 \leq a_0 \leq p$ , on a :*

$$\chi^n(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2}p \iff a_{n-1} + b_n = p.$$

De plus, si ces conditions sont vérifiées on a  $a_0 = \dots = a_{n-2} = p$  et  $b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$ .

**Démonstration.** On a tout d'abord :

$$\chi^n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=0}^{n-2} (n-i-1) a_i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i + \sum_{i=1}^n b_i,$$

soit :

$$\chi^n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) a_{i-1} + \sum_{i=1}^n (a_{i-1} + b_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) a_{i-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i-1} + b_i) + [a_{n-1} + b_n].$$

Comme on a  $a_{i-1} + b_i \leq a_{i-2}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $a_j \leq p$  pour tout  $j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ , on obtient :

$$\chi^n(\alpha) \leq \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) a_{i-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i-2} + [a_{n-1} + b_n] \leq \sum_{i=1}^{n-1} (n-i+1) p + [a_{n-1} + b_n].$$

Or on a  $\sum_{i=1}^{n-1} (n-i+1) = \sum_{j=2}^n j = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ , donc on obtient :

$$\chi^n(\alpha) \leq \left[ \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right] p + [a_{n-1} + b_n].$$

On en déduit que la relation  $\chi^n(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2} p$  entraîne  $p \leq a_{n-1} + b_n$ . Comme par ailleurs on a par hypothèse  $a_{n-1} + b_n \leq a_{n-2} \leq p$ , ceci entraîne  $a_{n-1} + b_n = a_{n-2} = p$ .

Réciproquement si on a  $a_{n-1} + b_n = p$ , d'après ce qui précède on a  $a_{n-2} = p$ . D'après la relation  $a_{n-2} \leq \dots \leq a_1 \leq a_0 \leq p$  on obtient  $a_i = p$  pour tout  $i \in \llbracket -1, n-2 \rrbracket$ . Enfin, comme pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  on a  $b_i \leq a_{i-2} - a_{i-1}$  on obtient  $b_i = 0$ . Il reste alors :

$$\chi^n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) p + [a_{n-1} + b_n] = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right] p + p,$$

soit  $\chi^n(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2} p$ . ■

Compte-tenu du fait qu'un  $(n+1)$ -uplet de matrices qui est décomposé de type  $\alpha$  vérifie les relations (2.5) et (2.6) et que celles-ci entraînent les hypothèses du lemme 2.19, on en déduit immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 2.20.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $A$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices qui est décomposé de type  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n)$  à l'ordre  $n$ . Si on a  $a_{n-1} + b_n = p$  la matrice  $V^n(A)$  est injective. De plus ceci entraîne les relations  $a_0 = \dots = a_{n-2} = p$  et  $b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$ .

Celui-ci entraîne la proposition suivante :

**Proposition 2.21.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $[x]$  l'entier immédiatement supérieur à  $x$ . Si on a  $q \geq (n-1)p + [p/2]$ , c'est-à-dire  $q \geq np - E(p/2)$ , l'application  $v_0^n$  générique est injective sur le schéma  $\widehat{E}_{p,q}^n$ .

**Démonstration.** Il suffit de montrer que la matrice  $V^n(A)$  associée à un  $(n+1)$ -uplet général  $A$  de  $[M_{q,p}(\mathbb{k})]^{n+1}$  est injective pour ces valeurs de  $p$  et  $q$ . Pour cela, considérons les  $(n+1)$ -uplets de matrices qui sont décomposés de type  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n)$  avec  $a_i = p$  pour  $i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ,  $b_i = 0$  pour  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $a_{n-1} = \lceil p/2 \rceil$ ,  $b_n = p - \lceil p/2 \rceil = E(p/2)$  et  $a_n = 0$ . Il existe de tels  $(n+1)$ -uplets dès que l'on a  $q \geq (n-1)p + \lceil p/2 \rceil$ , et l'application qui leur est associée est alors injective d'après le corollaire 2.20. ■

Pour  $n = 3$  ce critère entraîne que la matrice  $v_0$  générique de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  est injective si on a  $q > 5p/2$ , c'est-à-dire  $4q > 10p$ . Cette borne est moins bonne que celle donnée dans [MDP-2], qui montre que c'est vrai dès que l'on a  $4q \geq 6p$ . La proposition 2.21 permet cependant d'obtenir dans le cas général le résultat suivant :

**Corollaire 2.22.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$ . Si on a  $q \geq np - E(p/2)$  et  $(n+1)q \geq r$ , la condition  $(n+1)q \geq \frac{n(n+1)}{2}r + p$  contenue dans la conjecture ( $C^n$ ) est effectivement nécessaire pour que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  soit irréductible.*

**Démonstration.** La démonstration est identique à celle effectuée dans [MDP-2] dans le cas  $n = 3$ . Sous les hypothèses considérées, l'ouvert sur lequel l'application  $v_0^n$  est injective, c'est-à-dire de rang  $\frac{n(n+1)}{2}p$ , est non vide d'après la proposition précédente. On a de plus  $(n+1)q \geq r$ , donc l'ouvert sur lequel l'application  $u_1^n$  est surjective est également non vide. Par ailleurs, pour tout module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  on a  $\text{rg } u_1^n + \text{rg } v_0^n \leq (n+1)q$  à cause de la condition  $u_1^n \cdot v_0^n = 0$  qui définit les relations de commutation. Si le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible, les deux ouverts précédents se rencontrent. On obtient alors la condition annoncée. ■

On note que dans le corollaire 2.22, l'ordre entre  $p$  et  $q$  n'est pas précisé. Cependant, ce corollaire exprime un résultat plus fort dans le cas  $p \leq q$  que dans le cas  $q \leq p$ . On obtient alors par dualité, à partir de ce que l'on obtient dans le premier cas, l'énoncé suivant :

**Corollaire 2.23.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$ . On suppose ici  $n \geq 1$ . Si le triplet  $(p, q, r)$  vérifie les relations  $q \geq \min [np - E(p/2), nr - E(r/2)]$  et  $(n+1)q \geq \max(p, r)$ , ainsi que la condition  $(n+1)q < \max \left[ \frac{n(n+1)}{2}r + p, \frac{n(n+1)}{2}p + r \right]$ , alors le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  possède plusieurs composantes.*

### 2.3.5 Multirang et type de décomposition.

Nous avons déjà vu que si un  $(n+1)$ -uplet de matrices  $A = (A^0, \dots, A^n)$  est décomposé de type  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n)$  à l'ordre  $n$  les valeurs des entiers  $a_i$  et  $b_i$  sont déterminées de manière unique par  $A$ . Nous montrons dans ce paragraphe comment on peut les retrouver à partir des rangs des matrices  $A^i$  ou de certaines matrices par blocs définies à partir d'elles.

Pour ce faire, nous associons à tout  $(n+1)$ -uplet de matrices deux invariants, le multirang tout d'abord puis le type numérique qui lui est équivalent. Le premier invariant étant semi-continu sur l'espace  $[M_{q,r}(\mathbb{k})]^{n+1}$ , il montre que l'on en établit ainsi une stratification. Nous montrons ensuite que pour un  $(n+1)$ -uplet de matrices décomposé le type numérique coïncide avec le type de la décomposition, donc fournit dans ce cas une minoration du rang



de la matrice  $V^n$  associée. Cet invariant permet donc de généraliser le type de décomposition aux  $(n+1)$ -uplets de matrices qui ne sont pas décomposés, mais il ne donne plus dans le cas général une minoration du rang de la matrice  $V^n$ .

Rappelons les définitions du paragraphe 2.2.3. On note  $S^n$  la matrice  $(X^0 \ X^1 \ \dots \ X^n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et par convention on note  $S^{-1}$  la matrice à une ligne et 0 colonne à coefficients dans  $R_1^\infty$ . Pour  $n \geq 1$  on a posé  $T^n = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & S^{n-2} & X^{n-1} \\ \hline S^{n-2} & 0 & X^n \end{array} \right)$ , soit  $T^1 = \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \end{pmatrix}$  pour  $n=1$  et  $T^n = \left( \begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & \dots & 0 & X^0 & \dots & X^{n-2} & X^{n-1} \\ \hline X^0 & \dots & X^{n-2} & 0 & \dots & 0 & X^n \end{array} \right)$  pour  $n \geq 2$ . On adopte également les définitions suivantes :

**Définition 2.24.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille. Pour  $k \in \llbracket -1, n \rrbracket$  on note  $s_k(A)$  le rang de la matrice par blocs  $S^k(A)$  obtenue à partir de  $S^k$  en substituant les matrices  $(A^0, \dots, A^k)$  aux indéterminées  $(X^0, \dots, X^k)$ .

Si  $n \geq 1$ , pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on note de même  $t_k(A)$  le rang de la matrice par blocs  $T^k(A)$  obtenue à partir de  $T^k$  en substituant les matrices  $(A^0, \dots, A^k)$  aux indéterminées  $(X^0, \dots, X^k)$ .

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible on notera seulement  $s_k$  et  $t_k$  les entiers  $s_k(A)$  et  $t_k(A)$ . Pour tout  $(n+1)$ -uplet  $A$  on a  $s_{-1}(A) = 0$ . On note que pour  $k < n$  on a  $S^k(A^0, \dots, A^n) = S^k(A^0, \dots, A^k)$  et  $T^k(A^0, \dots, A^n) = T^k(A^0, \dots, A^k)$ , donc on a  $s^k(A^0, \dots, A^n) = s^k(A^0, \dots, A^k)$  et  $t^k(A^0, \dots, A^n) = t^k(A^0, \dots, A^k)$ . On pose la définition suivante :

**Définition 2.25.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille. On appelle multirang de  $A$  et l'on note  $\sigma(A^0, \dots, A^n)$  ou  $\sigma(A)$  le  $(2n+1)$ -uplet d'entiers  $\sigma = (s_0; t_1, s_1; \dots; t_n, s_n)$ .

Pour tout couple  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , la définition 2.24 établit lorsque le  $(n+1)$ -uplet  $A$  varie  $(2n+1)$  fonctions  $s_k$  et  $t_k$  de l'espace  $[M_{q,p}(\mathbb{k})]^{n+1}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , qui sont semi-continues inférieurement. Le multirang définit alors une fonction de  $[M_{q,p}(\mathbb{k})]^{n+1}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^{2n+1}$  qui est semi-continue pour l'ordre partiel de  $\mathbb{N}^{2n+1}$  défini coordonnée par coordonnée, c'est-à-dire défini par :

$$[(l_0, \dots, l_{2n}) \leq (m_0, \dots, m_{2n})] \iff [\forall i \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, l_i \leq m_i].$$

Le multirang établit donc une stratification de l'espace  $[M_{q,p}(\mathbb{k})]^{n+1}$ .

Fixons un  $(n+1)$ -uplet  $A$  dans  $[M_{q,p}(\mathbb{k})]^{n+1}$ . Les entiers  $s_k(A)$  et  $t_k(A)$  vérifient les relations suivantes :

**Lemme 2.26.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $A$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille. Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  on a  $s_{k-1}(A) \leq s_k(A)$  et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $s_{k-1}(A) + s_{k-2}(A) \leq t_k(A)$ .

**Démonstration.** La matrice  $S^{k-1}$  étant une sous-matrice de la matrice  $S^k$ , la matrice  $S^{k-1}(A)$  est une sous-matrice de  $S^k(A)$  et on a  $s_{k-1}(A) \leq s_k(A)$ . De plus la matrice  $T^k$  est en fait une matrice diagonale par blocs de la forme  $T^k = \left( \begin{array}{c|c} 0 & S^{k-1} \\ \hline S^{k-2} & M^k \end{array} \right)$  en posant  $M^k = (0 \cdots 0 | X^k)$ , donc on a  $T^k(A) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & S^{k-1}(A) \\ \hline S^{k-2}(A) & M^k(A) \end{array} \right)$ . En appliquant le lemme 2.7 on obtient  $\text{rg } T^k(A) \geq \text{rg } S^{k-2}(A) + \text{rg } S^{k-1}(A)$ , soit  $t_k(A) \geq s_{k-2}(A) + s_{k-1}(A)$ . ■

On pose alors la définition suivante :

**Définition 2.27.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $A$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille. On pose  $a_k(A) = s_k(A) - s_{k-1}(A)$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $b_k(A) = t_k(A) - s_{k-1}(A) - s_{k-2}(A)$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Lorsqu'il n'y a pas de confusion on notera simplement  $a_k$  et  $b_k$  les entiers naturels  $a_k(A)$  et  $b_k(A)$ . On appelle enfin type numérique de  $A$  et l'on note  $\alpha(A)$  l'élément  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n)$  de  $\mathbb{N}^{2n+1}$ .

Pour tout couple  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  le type numérique définit une fonction de  $[M_{q,p}(\mathbb{k})]^{n+1}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^{2n+1}$ . Les relations qui permettent de passer du multirang  $\sigma = (s_0; t_1, s_1; \dots; t_n, s_n)$  au type numérique  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n)$  sont les suivantes :

$$(2.7) \quad \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = s_k - s_{k-1} \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, b_k = t_k - s_{k-1} - s_{k-2} \end{cases}$$

compte-tenu de la convention  $s_{-1} = 0$ . On note que la suite  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  est exactement la différence première de la suite  $(s_{-1}, s_0, s_1, \dots, s_n)$ , c'est-à-dire que l'on a :

$$(a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} = \partial \left[ (s_k)_{k \in \llbracket -1, n \rrbracket} \right].$$

Réciproquement, on peut retrouver le multirang à partir du type numérique par les relations :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, s_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k = \sum_{i=0}^k a_i \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, t_k = 2(a_0 + \dots + a_{k-2}) + (a_{k-1} + b_k) = 2 \sum_{i=0}^{k-2} a_i + (a_{k-1} + b_k) \end{cases}$$

où pour  $k = 1$  la seconde ligne signifie  $t_1 = a_0 + b_1$ . Le type numérique et le multirang sont donc deux invariants équivalents sur les schémas  $[M_{q,p}(\mathbb{k})]^{n+1}$  ; ils définissent l'un et l'autre la même stratification. En revanche le type numérique n'est plus semi-continu pour l'ordre de  $\mathbb{N}^{2n+1}$  défini coordonnées par coordonnées.

**Définition 2.28.** On note respectivement  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{S}$  les bijections réciproques l'une de l'autre de  $\mathbb{Z}^{2n+1}$  dans lui-même définies respectivement par les relations (2.7) et (2.8) qui permettent d'écrire ces relations sous la forme  $\alpha = \mathcal{A}(\sigma)$  et  $\sigma = \mathcal{S}(\alpha)$ .

Ce sont des bijections à cause de la convention  $s_{-1} = 0$ , qui fournit la relation  $a_0 = s_0$ . Le principal résultat de ce paragraphe est la proposition suivante, qui montre l'intérêt du type numérique :

**Proposition 2.29.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille et soit  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$ . Si le  $(n+1)$ -uplet  $A$  est décomposé de type  $\alpha$  à l'ordre  $n$  il a pour type numérique  $\alpha$ .

D'après les relations (2.8), cette proposition est équivalente au lemme suivant :

**Lemme 2.30.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille et soit  $\sigma = (s_0; t_1, s_1; \dots; t_n, s_n)$  le multirang de  $A$ . Si le  $(n+1)$ -uplet  $A$  est décomposé de type  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n)$  à l'ordre  $n$  on a :*

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, & s_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k = \sum_{i=0}^k a_i \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, & t_k = 2(a_0 + \dots + a_{k-2}) + (a_{k-1} + b_k) = 2 \sum_{i=0}^{k-2} a_i + (a_{k-1} + b_k) \end{cases}$$

Pour démontrer ce lemme on procède par récurrence. L'initialisation consiste à calculer  $s_0$  pour  $n \geq 0$  ainsi que  $t_1$  pour  $n \geq 1$ . On a par hypothèse  $s_0 = \text{rg } A^0 = a_0$ . D'autre part, le  $(n+1)$ -uplet  $A$  étant décomposé de type  $(a_0)$  on a d'après le lemme 2.9  $\text{rg} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \end{pmatrix} = \text{rg } A^0 + \text{rg } A_2^1$ , soit  $t_1 = a_0 + b_1$ . L'étape de récurrence est exprimée quant à elle par le lemme suivant :

**Lemme 2.31.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $A = (A^0, \dots, A^n)$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices de même taille et soit  $a \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $A$  est décomposé de type  $(a)$  et on note  $A'$  son  $n$ -uplet dérivé. On a alors  $s_k(A) = a + s_{k-1}(A')$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $t_k(A) = 2a + t_{k-1}(A')$  pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .*

**Démonstration.** D'après la remarque qui suit la définition 2.24 il suffit de montrer le résultat pour  $k = n$ . On rappelle que pour  $j \in \{1, 2, 3\}$  on note  $A_j$  le  $(n+1)$ -uplet  $(A_j^0, \dots, A_j^n)$  et  $A'_j$  le  $n$ -uplet  $(A_j^1, \dots, A_j^n)$ ; on a  $A' = A'_3$ . D'après le lemme 2.11, on a la relation :

$$s_n(A) = \text{rg } S^n(A) = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c} S^n(A_1) & S^n(A_2) \\ \hline S^n(A_3) & 0 \end{array} \right).$$

De plus pour  $j \in \{1, 2, 3\}$  on a  $S^n(A_j) = (A_j^0 \ A_j^1 \ \dots \ A_j^n) = (A_j^0 \mid S^{n-1}(A_j^1, \dots, A_j^n))$ , c'est-à-dire  $S^n(A) = (A_j^0 \mid S^{n-1}(A'_j))$ . On a  $A_2^0 = 0$  et  $A_3^0 = 0$ , donc on obtient :

$$s_n(A) = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c|c|c} A_1^0 & S^{n-1}(A'_1) & 0 & S^{n-1}(A'_2) \\ \hline 0 & S^{n-1}(A'_3) & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La matrice  $A_1^0$  étant inversible, on obtient en appliquant le lemme 2.7 la relation :

$$s_n(A) = \text{rg } A_1^0 + \text{rg } S^{n-1}(A'_3) = a + s_{n-1}(A').$$

Pour calculer  $t_k$  on se ramène de même à  $k = n$ , donc on suppose  $n \geq 2$ . D'après le lemme 2.11 on a la relation :

$$t_n(A) = \text{rg } T^n(A) = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c} T^n(A_1) & T^n(A_2) \\ \hline T^n(A_3) & 0 \end{array} \right).$$

Pour  $j \in \{1, 2, 3\}$  on a de plus :

$$T^n(A_j) = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & A_j^0 & S^{n-3}(A'_j) & A_j^{n-1} \\ \hline A_j^0 & S^{n-3}(A'_j) & 0 & 0 & A_j^n \end{array} \right)$$

donc on obtient :

$$t_n(A) = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & A_1^0 & S^{n-3}(A'_1) & A_1^{n-1} & 0 & 0 & 0 & S^{n-3}(A'_2) & A_2^{n-1} & \\ \hline A_1^0 & S^{n-3}(A'_1) & 0 & 0 & A_1^n & 0 & S^{n-3}(A'_2) & 0 & 0 & A_2^n & \\ \hline 0 & 0 & 0 & S^{n-3}(A'_3) & A_3^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & S^{n-3}(A'_3) & 0 & 0 & A_3^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right).$$

En plaçant la troisième colonne en tête et en supprimant les colonnes de zéros, on obtient :

$$t_n(A) = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} A_1^0 & 0 & 0 & S^{n-3}(A'_1) & A_1^{n-1} & 0 & S^{n-3}(A'_2) & A_2^{n-1} & \\ \hline 0 & A_1^0 & S^{n-3}(A'_1) & 0 & A_1^n & S^{n-3}(A'_2) & 0 & A_2^n & \\ \hline 0 & 0 & 0 & S^{n-3}(A'_3) & A_3^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & S^{n-3}(A'_3) & 0 & A_3^n & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right).$$

On note que pour  $j \in \{1, 2, 3\}$  on peut écrire :

$$\left( \begin{array}{c|c|c} 0 & S^{n-3}(A'_j) & A_j^{n-1} \\ \hline S^{n-3}(A'_j) & 0 & A_j^n \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c|c} 0 \dots 0 & X_j^1 \dots X_j^{n-2} & X_j^{n-1} \\ \hline X_j^1 \dots X_j^{n-2} & 0 \dots 0 & X_j^n \end{array} \right) = T^{n-1}(A'_j).$$

On a de plus  $\begin{pmatrix} A_1^0 & 0 \\ 0 & A_1^0 \end{pmatrix} = D^2(A_1^0)$  donc la relation précédente s'écrit :

$$t_n(A) = \text{rg} \left( \begin{array}{c|c|c} D^2(A_1^0) & T^{n-1}(A'_1) & T^{n-1}(A'_2) \\ \hline 0 & T^{n-1}(A'_3) & 0 \end{array} \right).$$

Comme la matrice  $D^2(A_1^0)$  est inversible de rang  $2 \text{rg } A_1^0 = 2a$ , en appliquant le lemme 2.7 on obtient  $t_n(A) = 2a + \text{rg } T^{n-1}(A'_3) = 2a + t_{n-1}(A')$ . ■

## 2.4 Étude de la stratification.

Nous avons stratifié au paragraphe précédent les espaces de matrices  $[M_{q,p}(\mathbb{k})]^{n+1}$  par les deux invariants numériques équivalents que sont le type numérique et le multirang. Le premier des deux varie de façon semi-continue sur  $[M_{q,p}(\mathbb{k})]^{n+1}$  donc il montre que l'on obtient bien une stratification. Le second permet de décrire le type de décomposition d'un  $(n+1)$ -uplet de matrices lorsque celui-ci est décomposé, donc permet dans ce cas de minorer le rang de la matrice  $V^n$  associée.

Nous définissons dans ce paragraphe des invariants similaires pour les structures de module, qui permettent d'une part de stratifier les schémas  $\widehat{E}_{p,q}^n$  et d'autre part de minorer pour toute structure de module le rang de la matrice  $V^n$  associée. Le principe utilisé pour construire cette stratification est le suivant. Une structure de module  $u_0^n$  de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  permet d'associer à chaque choix de bases de  $R_1^n$ ,  $E_0$  et  $E_1$  un  $(n+1)$ -uplet de matrices qui possède d'après ce qui précède un type numérique et un multirang. Ceux-ci dépendent effectivement des bases que l'on a choisies, mais l'application qui associe au triplet de bases le multirang est semi-continue inférieurement. L'idée consiste alors à définir le multirang de la structure de module  $u_0^n$  comme étant le multirang générique que l'on obtient ainsi.

Nous procédons en deux étapes pour faire varier les bases. Nous commençons par faire varier seulement les bases de  $E_0$  et  $E_1$  en laissant fixe celle de  $R_1^n$ . Nous définissons alors un type numérique et un multirang pour les  $(n+1)$ -uplets d'applications linéaires qui permettent de stratifier l'espace  $[\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)]^{n+1}$  (paragraphe 2.4.1). Nous regardons ensuite ce qu'il se passe lorsque la base de  $R_1^n$  varie également, pour aboutir aux multirangs et types numériques des structures de module ainsi qu'à la stratification des schémas  $\widehat{E}_{p,q}^n$  (paragraphe 2.4.2).

Nous montrons ensuite que pour toute structure de module  $u_0^n$  de  $\widehat{E}_{p,q}^n$ , il existe des triplets de bases dans lesquelles le  $(n+1)$ -uplet de matrices qui la représente est décomposé et possède le multirang générique. On en déduit alors une minoration du rang de l'application  $v_0^n$  associée à la structure de module  $u_0^n$  via la matrice  $V^n$ .

Nous majorons pour finir la dimension des strates au paragraphe 2.4.4 et récapitulons tous nos résultats au paragraphe 2.4.5.

### 2.4.1 Stratification concernant les applications linéaires.

On fixe deux entiers non nuls  $p$  et  $q$ . On rappelle que l'on a posé  $E_0 = \mathbb{k}^p$  et  $E_1 = \mathbb{k}^q$ .

**Définition 2.32.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $w = (w^0, \dots, w^n)$  un  $(n+1)$ -uplet d'applications linéaires de  $E_0$  dans  $E_1$ , c'est-à-dire soit  $w \in [\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)]^{n+1}$ .

Pour  $k \in \llbracket -1, n \rrbracket$  on note  $s_k(w)$  le rang de l'application linéaire par blocs  $S^k(w)$  de  $(E_0)^{k+1}$  dans  $E_1$  obtenue à partir de la matrice  $S^k$  en substituant les applications linéaires  $w^i$  aux indéterminées  $X^i$ .

Si  $n \geq 1$ , pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on note  $t_k(w)$  le rang de l'application linéaire par blocs  $T^k(w)$  de  $(E_0)^{2k-1}$  dans  $(E_1)^2$  obtenue à partir de la matrice  $T^k$  en substituant les  $w^i$  aux  $X^i$ .

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on notera simplement  $s_k$  et  $t_k$  les entiers  $s_k(w)$  et  $t_k(w)$ .

**Définition 2.33.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $w \in [\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)]^{n+1}$ . On appelle multirang de  $w$  et l'on note  $\sigma(w)$  le  $(2n+1)$ -uplet d'entiers  $\sigma = (s_0; t_1, s_1; \dots; t_n, s_n)$  ainsi obtenu. On appelle type numérique de  $w$  et l'on note  $\alpha(w)$  le  $(2n+1)$ -uplet  $\alpha = \mathcal{A}(\sigma)$  associé à  $\sigma(w)$ .

Si l'on fixe des bases  $B_0$  et  $B_1$  de  $E_0$  et  $E_1$ , chaque application linéaire  $w^i$  se représente par une matrice  $W^i$ . D'après le paragraphe 2.2.2, si l'on note  $W$  le  $(n+1)$ -uplet de matrices  $(W^0, \dots, W^n)$  les applications linéaires  $S^k(w)$  et  $T^k(w)$  se représentent dans des bases adaptées par les matrices  $S^k(W)$  et  $T^k(W)$ . On a donc  $s_k(w) = s_k(W)$  et  $t_k(w) = t_k(W)$  pour tout  $k$ , donc  $\sigma(w) = \sigma(W)$  et  $\alpha(w) = \alpha(W)$ . Le multirang ou le type numérique définissent ainsi la même stratification sur l'espace  $[\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)]^{n+1}$  que sur l'espace  $[M_{q,p}(\mathbb{k})]^{n+1}$ .

L'intérêt supplémentaire que présente cette stratification dans le cadre des applications linéaires est que l'on dispose alors d'une liberté sur le choix des bases de  $E_0$  et  $E_1$  pour obtenir éventuellement des décompositions comme celles du paragraphe 2.3.2. Posons la définition suivante :

**Définition 2.34.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $w = (w^0, \dots, w^n) \in [\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)]^{n+1}$ , soit  $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$  et soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On dit que le  $(n+1)$ -uplet  $w$  est décomposable de type  $\alpha$  à l'ordre  $k$  si et seulement si il existe des bases  $B_0$  et  $B_1$  de  $E_0$  et  $E_1$  dans lesquelles le  $(n+1)$ -uplet des matrices  $(W^0, \dots, W^n)$  qui représentent les  $w^i$  est décomposé de type  $\alpha$  à l'ordre  $k$ .

Lorsqu'un  $(n+1)$ -uplet  $w$  est décomposable il existe en général plusieurs couples de bases qui fournissent des décompositions. Cependant si c'est le cas, les différentes décompositions que l'on obtient pour le même  $(n+1)$ -uplet  $w$  sont nécessairement du même type, puisque celui-ci est égal au type numérique  $\alpha(w)$ . Par ailleurs un  $(n+1)$ -uplet d'applications linéaires n'est pas forcément décomposable, ne serait-ce qu'à l'ordre 0. De façon précise, on a en fait le résultat suivant, qui est une traduction immédiate de la définition 2.14 :

**Proposition 2.35.** Soit  $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$  et soit  $w = (w^0, \dots, w^n) \in [\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)]^{n+1}$ . On pose  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n)$ .

i) Le  $(n+1)$ -uplet  $w$  est décomposable de type  $\alpha$  à l'ordre 0 si et seulement si on a  $\text{rg } w^0 = a_0$  et  $w^i[\text{Ker } w^0] \subset \text{Im } w^0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Si tel est le cas, notons respectivement  $E_0''$  et  $E_1'$  les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker } w^0$  et  $\text{Im } w^0$  de  $E_0$  et  $E_1$  et fixons des supplémentaires respectifs  $E_0'$  et  $E_1''$  de  $E_0''$  de  $E_1'$ . Chaque application linéaire  $w^i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  se représente alors comme une application linéaire par blocs sous la forme :

$$w^i = \left( \begin{array}{c|c} E_0' & E_0'' \\ \hline w_1^i & w_2^i \\ w_3^i & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} E_1' \\ E_1'' \end{array} .$$

ii) Si  $n \geq 1$ , soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Le  $(n+1)$ -uplet  $w$  est décomposable de type  $\alpha$  à l'ordre  $k$  si et seulement si il est décomposable à l'ordre 0 et si on a d'une part  $\text{rg } w_2^i \leq b_1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $\text{rg } w_2^i = b_1$  et si d'autre part le  $n$ -uplet  $w' = (w_3^1, \dots, w_n^1)$  d'applications linéaires de  $E_0'$  dans  $E_1''$  est décomposable à l'ordre  $k-1$ .

De plus, les lemmes 2.9 et 2.31 entraînent immédiatement les résultats suivants :

**Proposition 2.36.** Soit  $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$  et soit  $w = (w^0, \dots, w^n) \in [\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)]^{n+1}$ . On suppose que le  $(n+1)$ -uplet  $w$  est décomposé de type  $\alpha$  à l'ordre 0 et on conserve les notations  $E_j'$ ,  $E_j''$ ,  $w_j^i$  et  $w'$  de la proposition 2.35.

i) Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $\text{rg } w_2^i = \text{rg} \begin{pmatrix} w^0 \\ w^i \end{pmatrix} - \text{rg } w^0$  et  $\text{rg } w_3^i = \text{rg}(w^0 w^i) - \text{rg } w^0$ , soit  $\text{rg } w_2^i = t_1(w^0, w^i) - \text{rg } w^0$  et  $\text{rg } w_3^i = s_1(w^0, w^i) - \text{rg } w^0$ . En particulier ces rangs ne dépendent pas des supplémentaires choisis.

ii) Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $s_k(w) = a_0 + s_{k-1}(w')$ . Si  $n \geq 2$ , pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$  on a  $t_k(w) = 2a_0 + t_{k-1}(w')$ .

Pour finir, la proposition 2.16 fournit immédiatement le corollaire suivant dans le cadre des  $(n+1)$ -uplets d'applications linéaires :

**Proposition 2.37.** Soit  $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$ , soit  $w \in [\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)]^{n+1}$  et soit  $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$ . Si le  $(n+1)$ -uplet  $w$  est décomposable de type  $\alpha$  à l'ordre  $n$  le rang de l'application linéaire par blocs  $V^n(w)$  de  $(E_0)^{n(n+1)/2}$  dans  $(E_1)^{n+1}$  est minoré par  $\chi^n(\alpha)$ .

## 2.4.2 Stratification concernant les structures de module.

Nous transportons à présent les notions précédentes aux structures de module. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ . Une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  consiste en la donnée d'une application

linéaire graduée  $u^n : R_1^n \otimes_{\mathbb{k}} E(-1) \rightarrow E$ , qui se ramène simplement ici à celle d'une application linéaire  $u_0^n : R_1^n \otimes_{\mathbb{k}} E_0 \rightarrow E_1$  puisqu'on est en largeur 2. Ceci revient encore à se donner une application linéaire  $\widehat{u}_0^n : R_1^n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$ . Il suffit pour cela de se donner l'image d'une base de  $R_1^n$  par  $\widehat{u}_0^n$ . On rappelle que pour  $P \in R_1^n$  on note  $p_0$  l'application linéaire  $\widehat{u}_0^n(P)$  de  $E_0$  dans  $E_1$  et  $P_0$  sa matrice dans des bases fixées de  $E_0$  et  $E_1$ .

Nous adoptons dans tout ce paragraphe la convention suivante qui nous permettra de simplifier les écritures. Comme l'entier  $n$  est ici fixé et que nous ne considérons que des structures de module de largeur 2, nous noterons respectivement  $u$  et  $\widehat{u}$  les applications linéaires  $u_0^n$  et  $\widehat{u}_0^n$ . Nous posons les notations suivantes :

**Définition 2.38.** Soit  $u$  une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  et soit  $B = (X^0, \dots, X^n)$  une base de  $R_1^n$ . On note  $\widehat{u}(B)$  le  $(n+1)$ -uplet d'applications linéaires  $(\widehat{u}(X^0), \dots, \widehat{u}(X^n))$  de  $E_0$  dans  $E_1$ , c'est-à-dire  $\widehat{u}(B) = (x^0, \dots, x^n)$  en posant  $x^i = \widehat{u}(X^i)$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**Définition 2.39.** Soit  $u$  une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$ , soit  $B = (X^0, \dots, X^n)$  une base de  $R_1^n$  et soit  $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$ . On dit que la structure de module  $u$  admet une décomposition de type  $\alpha$  à l'ordre  $k$  par rapport à la base  $B$  si et seulement si le  $(n+1)$ -uplet d'applications linéaires  $\widehat{u}(B) = (x^0, \dots, x^n)$  est décomposable de type  $\alpha$  à l'ordre  $k$ .

Si on a une telle décomposition avec  $k = n$  on dit que  $B$  est une base décomposante pour  $u$ .

La proposition 2.37 fournit immédiatement le corollaire suivant :

**Proposition 2.40.** Soit  $u$  une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  et soit  $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$ . Si  $u$  admet une décomposition de type  $\alpha$  à l'ordre  $n$  par rapport à une base  $B$  de  $R_1^n$  on a  $\text{rg } v_0^n \geq \chi^n(\alpha)$ , en notant  $v_0^n$  l'application linéaire associée à  $u = u_0^n$  par la matrice  $V^n$ .

À la différence de ce qui se passe pour les  $(n+1)$ -uplets de matrices ou d'applications linéaires, une même structure de module peut fort bien admettre des décompositions de types différents, qui conduisent donc à des minoration différentes du rang de l'application  $v_0^n$  associée :

**Exemple 2.41.** Fixons une base  $(X, Y, Z)$  de  $R_1^2$  et considérons la structure de module de  $\widehat{E}_{3,3}^2$  telle que les applications linéaires  $(x_0, y_0, z_0)$  sont données dans des bases fixées par les matrices  $A, B, C$  de l'exemple 2.13. Cette structure admet des décompositions de type  $(2, 1, 1, 0, 0)$  et  $(3, 0, 0, 0, 0)$  à l'ordre 3 par rapport aux bases  $(X, Y, Z)$  et  $(Y, X, Z)$  de  $R_1^2$ . On peut vérifier par ailleurs que la seconde base est maximisante pour cette structure de module, puisqu'elle donne  $s_k = 3$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $t_1 = 3$  et  $t_k = 6$  pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ .

Il n'y a donc pas unicité du type de décomposition pour les structures de module. En particulier, lorsque la base  $B$  de  $R_1^n$  varie, le multirang du  $(n+1)$ -uplet  $\widehat{u}(B)$  varie aussi puisqu'il donne le type de décomposition lorsque  $\widehat{u}(B)$  est décomposable. Nous posons la notation suivante :

**Définition 2.42.** Soit  $u$  une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  et soit  $B = (X^0, \dots, X^n)$  une base de  $R_1^n$ . On pose  $x^i = \widehat{u}(X^i)$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  on note  $s_k(u, B)$  et  $a_k(u, B)$  les entiers  $s_k(\widehat{u}(B))$  et  $a_k(\widehat{u}(B))$ . De même, pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on note  $t_k(u, B)$  et  $b_k(u, B)$

les entiers  $t_k(\widehat{u}(B))$  et  $b_k(\widehat{u}(B))$ . On note enfin  $\sigma(u, B)$  et  $\alpha(u, B)$  le multirang et le type numérique donnés par les entiers  $s_k, t_k, a_k$  et  $b_k$  ainsi définis, c'est-à-dire le multirang et le type numérique du  $(n+1)$ -uplet  $\widehat{u}(B)$ .

Notons  $\mathcal{B}$  la variété isomorphe à  $GL(R_1^n)$  des bases de  $R_1^n$ . La définition 2.42 fournit ainsi des fonctions  $s_k, t_k, a_k$  et  $b_k$  sur  $(\widehat{E}_{p,q}^n \times \mathcal{B})$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Les fonctions de type  $s_k$  et  $t_k$  sont semi-continues inférieurement sur le produit  $(\widehat{E}_{p,q}^n \times \mathcal{B})$  car elles sont données directement par les rangs de certaines matrices. Le multirang et le type numérique définissent donc deux fonctions de  $(\widehat{E}_{p,q}^n \times \mathcal{B})$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^{2n+1}$ , la première étant semi-continue pour l'ordre partiel de  $\mathbb{N}^{2n+1}$  défini coordonnée par coordonnée.

Si l'on fixe une base  $B$  de  $\mathcal{B}$  (resp. une structure de module  $u$  de  $\widehat{E}_{p,q}^n$ ), les fonctions précédentes définissent par restriction des fonctions sur  $\widehat{E}_{p,q}^n$  (resp. sur  $\mathcal{B}$ ) à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , les fonctions de type  $s_k$  et  $t_k$  étant encore semi-continues sur  $\widehat{E}_{p,q}^n$  (resp. sur  $\mathcal{B}$ ). On remarque que l'entier  $s_n(u, B)$  est en fait le rang de l'application  $u_0^n$ , donc il ne dépend que de  $u$  et pas de la base  $B$ . La fonction définie par  $s_n$  sur  $\mathcal{B}$  lorsque l'on fixe une structure de module est ainsi une fonction constante, à la différence des autres en général.

Ce qui précède montre donc que l'application de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathbb{N}^{2n+1}$  qui à une base  $B$  associe le multirang du  $(n+1)$ -uplet  $\widehat{u}(B)$  est une fonction semi-continue pour l'ordre partiel de  $\mathbb{N}^{2n+1}$  défini coordonnée par coordonnée.

**Définition 2.43.** Soit  $u$  une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$ . On appelle multirang de  $u$ , que l'on note  $\sigma(u)$ , le multirang générique des couples  $(u, B)$  où  $B$  est une base de  $R_1^n$ . On appelle base maximisante pour  $u$  une base  $B$  de l'ouvert de  $R_1^n$  sur lequel le multirang est atteint, c'est-à-dire une base  $B$  vérifiant  $\sigma(u) = \sigma(u, B)$ .

On appelle type numérique de  $u$ , que l'on note  $\alpha(u)$ , l'élément  $\alpha$  de  $\mathbb{N}^{2n+1}$  défini par  $\alpha = \mathcal{A}(\sigma)$ ; c'est également le type numérique  $\alpha(u, B)$  lorsque  $B$  est une base de  $R_1^n$  maximisante pour  $u$ .

D'autre part, soit  $\sigma \in \mathbb{N}^{2n+1}$  et soit  $B \in \mathcal{B}$ . L'ensemble des structures de module  $w$  qui vérifient  $\sigma(w, B) \geq \sigma$  forme un ouvert  $U_{B,\sigma}$  de  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  sur lequel on a  $\sigma(w) \geq \sigma$ . En particulier, si  $u$  est une structure de module de multirang  $\sigma$  et si  $B$  est une base maximisante pour  $u$ , l'ouvert  $U_{B,\sigma}$  est un voisinage de  $u$  sur lequel on a  $\sigma(w) \geq \sigma(u) = \sigma$ . La fonction de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  dans  $\mathbb{N}^{2n+1}$  qui associe à une structure de module son multirang est donc semi-continue inférieurement sur  $\widehat{E}_{p,q}^n$  et le multirang définit une stratification de  $\widehat{E}_{p,q}^n$ . Comme on ne s'intéresse ici qu'à des questions de dimension, on peut se contenter de stratifier topologiquement l'espace affine  $\widehat{E}_{p,q}^n$ . On pose alors la définition suivante :

**Définition 2.44.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$  et soit  $\sigma = \mathcal{S}(\alpha)$ . On note  $U_{p,q}^n(\alpha)$  le sous-schéma de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  formée par les structures de module de multirang  $\sigma$ , c'est-à-dire de type numérique  $\alpha$ , muni de sa structure réduite. On appelle strates de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  les schémas localement fermés  $U_{p,q}^n(\alpha)$ .

Dans le cas  $n = 0$ , la stratification que l'on obtient ainsi est particulièrement simple à décrire. Une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}^0$  consiste simplement en la donnée d'une application linéaire  $\widehat{u}_0^0 : R_1^0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(E_0, E_1)$ , c'est-à-dire en la donnée d'une application linéaire  $x_0^0 :$



$E_0 \rightarrow E_1$ . Le multirang du 1-uplet  $(x_0^0)$  coïncide alors avec la donnée du rang de  $x_0^0$  de même que son type numérique. On retrouve alors la stratification bien connue de  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$  par le rang; cette remarque nous servira dans la suite pour initialiser les récurrences.

Nous posons enfin la définition suivante :

**Définition 2.45.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$ , soit  $\sigma = \mathcal{S}(\alpha)$  et soit  $B \in \mathcal{B}$ . On note  $U_{p,q}^n(\alpha, B)$  l'intersection de  $U_{p,q}^n(\alpha)$  avec l'ouvert  $U_{B,\sigma}$ , c'est-à-dire l'ouvert de  $U_{p,q}^n(\alpha)$  formé par les structures de module  $w$  qui vérifient  $\sigma(w, B) \geq \sigma$ . C'est encore l'ouvert de  $U_{p,q}^n(\alpha)$  formé des structures de module pour lesquelles la base  $B$  est maximisante.

On a alors le résultat suivant :

**Lemme 2.46.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$ . Les ouverts  $U_{p,q}^n(\alpha, B)$  sont tous isomorphes entre eux et recouvrent  $U_{p,q}^n(\alpha)$  lorsque la base  $B$  parcourt  $\mathcal{B}$ . En particulier si  $U_{p,q}^n(\alpha)$  est non vide ils ont tous la même dimension que  $U_{p,q}^n(\alpha)$ .

**Démonstration.** Le groupe  $GL(R_1^n)$  opère sur  $\widehat{E}_{p,q}^n$  de la façon suivante. À  $g \in GL(R_1^n)$  et à une structure de module  $u$  de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  correspondant à l'application  $\widehat{u} : R_1^n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$ , on associe la structure de module  $w = g(u)$  définie par  $\widehat{w} = \widehat{u} \circ g$ . Cette action transporte l'ouvert  $U_{p,q}^n(\alpha, B)$  sur  $U_{p,q}^n(\alpha, g^{-1}(B))$  pour tout  $B \in \mathcal{B}$ , donc elle laisse stable la strate  $U_{p,q}^n(\alpha)$  et agit transitivement sur les ouverts  $U_{p,q}^n(\alpha, B)$ . On en déduit que ces ouverts sont tous isomorphes entre eux, donc ils ont tous la même dimension. Comme ils recouvrent  $U_{p,q}^n(\alpha)$ , si ce schéma est non vide ils le sont aussi et leur dimension commune est alors celle de  $U_{p,q}^n(\alpha)$ . ■

### 2.4.3 Existence de décompositions pour les structures de module.

D'après la proposition 2.40, pour obtenir une minoration du rang de l'application  $v_0^n$  associée à une structure de module  $u = u_0^n$  il suffit de trouver une base  $B$  de  $R_1^n$  qui est décomposante pour  $u$ . Nous montrons en fait dans ce paragraphe le résultat suivant :

**Proposition 2.47.** Soit  $u$  une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$ . Toute base de  $R_1^n$  qui est maximisante pour  $u$  est également une base décomposante pour  $u$ .

En d'autres termes, si on note  $\sigma$  le multirang de  $u$  et si  $B$  est une base de  $R_1^n$  qui vérifie  $\sigma(u, B) = \sigma$ , le  $(n+1)$ -uplet d'applications linéaires  $\widehat{u}(B)$  est décomposable de type  $\alpha$  à l'ordre  $n$ , où  $\alpha = \mathcal{A}(\sigma)$  est le type numérique de  $u$ . Nous avons vu dans l'exemple 2.41 qu'il pouvait exister des bases décomposantes qui ne sont pas maximisantes, donc la réciproque de cette proposition n'est pas vraie. La proposition 2.47 entraîne le corollaire suivant :

**Proposition 2.48.** Soit  $u = u_0^n$  une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$ , soit  $\alpha$  son type numérique et soit  $v_0^n$  l'application linéaire associée à  $u_0^n$  par la matrice  $V^n$ . on a  $\text{rg } v_0^n \geq \chi^n(\alpha)$ .

La proposition 2.47 se démontre par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$  il n'y a rien à montrer. L'étape de récurrence est résolue par le lemme suivant :

**Lemme 2.49.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $u$  une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  de multirang  $\sigma$  et de type numérique  $\alpha$ . On pose  $\sigma = (s_0; t_1, s_1; \dots; t_n, s_n)$  et  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n)$ . Soit  $B = (X^0, \dots, X^n)$  une base de  $R_1^n$  maximisante pour  $u$ . On note  $B'$  la famille  $(X^1, \dots, X^n)$  et on note  $(R_1^n)'$  le sous-espace vectoriel  $\langle X^1, \dots, X^n \rangle$  de  $R_1^n$  engendré par  $B'$ . On rappelle que le type dérivé de  $\alpha$  est l'élément  $\alpha' = (a_1; b_2, a_2; \dots; b_n, a_n)$  de  $\mathbb{N}^{2n-1}$ . Pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  on note  $x^i$  l'application linéaire  $\widehat{u}(X^i)$  de  $E_0$  dans  $E_1$  définie par  $u$ . On pose enfin  $E_0'' = \text{Ker } x^0$  et  $E_1' = \text{Im } x^0$  et on fixe des supplémentaires respectifs  $E_0'$  et  $E_1''$  de  $E_0''$  et  $E_1'$  dans  $E_0$  et  $E_1$ . On a alors les résultats suivants :

i) Le  $(n+1)$ -uplet d'applications linéaires  $x = \widehat{u}(B) = (x^0, \dots, x^n)$  est décomposable de type  $\alpha$  à l'ordre 0, c'est-à-dire on a  $\text{rg } x^0 = a_0$  et chaque application linéaire  $x^i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  s'écrit par blocs sous la forme :

$$x^i = \left( \begin{array}{c|c} E_0' & E_0'' \\ \hline x_1^i & x_2^i \\ \hline x_3^i & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} E_1' \\ E_1'' \end{array} .$$

ii) De plus on a  $\text{rg } x_2^i \leq b_1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $\text{rg } x_2^1 = b_1$ .

iii) Enfin si  $n \geq 1$ , la structure de module  $u'$  de  $\widehat{E}_{a_0, q-a_0}^{n-1}$  définie en posant  $\widehat{u}'(X^i) = x_3^{i+1}$  pour  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  a pour type numérique  $\alpha'$  et la base  $B'$  est maximisante pour  $u'$ .

**Démonstration.** Notons  $L$  le sous-espace vectoriel  $\text{Im } \widehat{u}$  de  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$ . La base  $B$  étant maximisante pour  $u$ , l'application linéaire  $x^0$  est de rang maximal dans  $L$ , égal à  $s_0 = a_0$ . Le lemme 2.5 appliqué en posant  $w = x^i$  et  $v = x^0$  montre que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $x^i(E_0'') \subset E_1'$ , ce qui prouve le point i).

D'après la proposition 2.36 i), pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $\text{rg } x_2^i = t_1(x^0, x^i) - s_0$ . On en déduit d'une part qu'on a  $\text{rg } x_2^i \leq t_1 - s_0 = b_1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , et d'autre part qu'on a  $\text{rg } x_2^1 = b_1$  car la base  $B$  est maximisante pour  $u$  donc on a  $t_1(x^0, x^1) = t_1$ . Ceci prouve le point ii).

Supposons ensuite  $n \geq 1$  et notons  $x'$  le  $n$ -uplet d'applications linéaires  $(x_3^1, \dots, x_3^n)$  de  $E_0'$  dans  $E_1''$ . D'après la proposition 2.36 ii) pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $s_{k-1}(x') = s_k(x) - s_0$  et pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$  on a  $t_{k-1}(x') = t_k(x) - 2s_0$ . Comme la base  $B$  est maximisante pour  $u$  on a  $s_k(x) = s_k$  et  $t_k(x) = t_k$  pour tout  $k$ , donc on obtient  $s_{k-1}(x') = s_k - s_0$  et  $t_{k-1}(x') = t_k - 2s_0$  pour tout  $k$ .

Par ailleurs soit  $(Y^1, \dots, Y^n)$  une base de l'espace vectoriel  $\langle X^1, \dots, X^n \rangle = (R_1^n)'$ . Posons  $Y^0 = X^0$ , la famille  $(Y^0, Y^1, \dots, Y^n)$  forme une base de  $R_1^n$ . Pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , notons  $y^i$  l'application linéaire  $\widehat{u}(Y^i)$  de  $E_0$  dans  $E_1$ . L'application linéaire  $y^0 = x^0$  est de rang maximal dans l'espace vectoriel  $\text{Im } \widehat{u} = \langle y^0, \dots, y^n \rangle = \langle x^0, \dots, x^n \rangle$ . D'après le lemme 2.5, on en déduit que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $y^i(\text{Ker } y^0) \subset \text{Im } y^0$ , c'est-à-dire  $y^i(E_0'') \subset E_1'$ . Ceci signifie exactement que le  $(n+1)$ -uplet d'applications linéaires  $(y^0, \dots, y^n)$  de  $E_0$  dans  $E_1$  est décomposable de type  $\alpha$  à l'ordre 0. En appliquant de nouveau la proposition 2.36 ii) on obtient que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $s_{k-1}(y') = s_k(y) - s_0$  et que pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$  on a  $t_{k-1}(y') = t_k(y) - 2s_0$ . Par définition du multirang on a de plus  $s_k(y) \leq s_k$  et  $t_k(y) \leq t_k$  pour tout  $k$ , donc on obtient  $s_{k-1}(y') \leq s_k - s_0$  et  $t_{k-1}(y') \leq t_k - 2s_0$  pour tout  $k$ .

On en déduit que le multirang  $\sigma'$  de  $u'$  est donné par :

$$\sigma' = \left( (s_1 - s_0) ; (t_2 - 2s_0), (s_2 - s_0) ; \dots ; (t_n - 2s_0), (s_n - s_0) \right)$$

et que  $B'$  est une base maximisante pour  $u'$ . On obtient alors immédiatement par les formules (2.7) que le type numérique associé à  $\sigma'$  est le type dérivé  $\alpha'$  de  $\alpha$ . ■

Le lemme 2.49 entraîne également le résultat suivant :

**Corollaire 2.50.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $u$  une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  et soit  $\alpha \in \mathbb{N}^{2n+1}$  son type numérique. On pose  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n)$ . Les entiers  $a_i$  et  $b_i$  vérifient les relations (2.5) et (2.6) ainsi que la relation :*

$$(2.9) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_i + b_i \leq a_{i-1}.$$

Les relations (2.5) et (2.6) sont évidentes à partir du lemme 2.49 : soit  $B$  une base maximisante pour  $u$ , le  $(n+1)$ -uplet  $\widehat{u}(B)$  est décomposable, donc  $\alpha$  est également le type de décomposition d'un  $(n+1)$ -uplet de matrices. En revanche, la relation supplémentaire (2.9) n'est pas vérifiée en général par les types numériques de  $(n+1)$ -uplets de matrices ou d'applications linéaires, même lorsque ceux-ci sont décomposés ou décomposables. Ceci signifie que les types numériques de structures de module sont des types particuliers parmi les types numériques de  $(n+1)$ -uplets de matrices.

**Démonstration.** À cause du point *iii*) du lemme 2.49 il suffit de montrer que l'on a  $a_1 + b_1 \leq a_0$ . D'après le point *i*) du même lemme, si l'on fixe des bases  $B'_0, B''_0, B'_1$  et  $B''_1$  des espaces vectoriels  $E_0, E''_0, E'_1$  et  $E''_1$  l'application linéaire  $x^1$  se représente par une matrice de la forme  $X_0^1 = \left( \begin{array}{c|c} X_1^1 & X_2^1 \\ \hline X_3^1 & 0 \end{array} \right)$  avec  $\text{rg } X_2^1 = \text{rg } x_2^1 = b_1$  et  $\text{rg } X_3^1 = \text{rg } x_3^1 = a_1$ . D'après le lemme 2.7 on a  $\text{rg } X_0^1 \geq \text{rg } X_2^1 + \text{rg } X_3^1 = b_1 + a_1$ . Or on a  $\text{rg } x^1 = \text{rg } X^1 \leq \text{rg } x^0 = a_0$ , d'où le résultat. ■

#### 2.4.4 Majoration des dimensions des strates.

Pour majorer la dimension des strates  $U_{p,q}^n(\alpha)$  on procède une fois de plus par récurrence. Cependant, à la différence des récurrences précédentes qui étaient immédiates, celle-ci nécessite d'être explicitée, aussi nous commençons par énoncer séparément un lemme qui règle seulement l'étape de récurrence.

On remarque cependant que pour  $n = 0$  la dimension des strates est facile à calculer exactement. On a  $\alpha = (a_0)$  et le schéma  $U_{p,q}^0(\alpha)$  est isomorphe au sous-schéma localement fermé de  $M_{q,p}(\mathbb{k})$  sur lequel le rang est égal à  $a_0$ , qui est de dimension  $(p+q-a_0)a_0$ ; ceci permet d'initialiser la récurrence. Pour effectuer l'étape de récurrence nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme 2.51.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$ . On note  $\alpha'$  le type dérivé de  $\alpha$ , c'est-à-dire  $\alpha' = (a_1; b_2, a_2; \dots; b_n, a_n)$ . On a :*

$$\dim [U_{p,q}^n(\alpha)] \leq \dim [U_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha')] + \left[ (q+p-a_0)a_0 + n a_0^2 + n b_1 (p-b_1-a_1) \right].$$

**Démonstration.** On fixe une base  $B = (X^0, \dots, X^n)$  de  $R_1^n$ . D'après le lemme 2.46 il suffit de calculer la dimension de l'ouvert  $U_{p,q}^n(\alpha, B)$  de  $U_{p,q}^n(\alpha)$ . On note  $B'$  la base  $(X^1, \dots, X^n)$  de la sous-algèbre  $(R^n)' = \mathbb{k}[X^1, \dots, X^n]$  de  $R^n$ . La base  $B$  étant fixée, se donner une structure de module  $u$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  équivaut à se donner le  $(n+1)$ -uplet d'applications linéaires  $\widehat{u}(B) = (x^0, \dots, x^n)$ . On considère alors la projection :

$$\mathfrak{p} : \left[ \begin{array}{c} U_{p,q}^n(\alpha, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1) \\ u \mapsto x^0 = \widehat{u}(X^0) \end{array} \right].$$

D'après la définition du schéma  $U_{p,q}^n(\alpha, B)$  cette flèche est à valeurs dans le sous-schéma localement fermé de  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$  sur lequel le rang est égal à  $a_0$ , qui est de dimension  $(p+q-a_0)a_0$ . Si on majore la dimension des fibres de  $\mathfrak{p}$  par un entier  $d$ , on obtient :

$$\dim U_{p,q}^n(\alpha, B) \leq (p+q-a_0)a_0 + d,$$

soit  $\dim U_{p,q}^n(\alpha) \leq (p+q-a_0)a_0 + d$ . Pour prouver le lemme 2.51 il suffit alors de montrer que pour tout  $x^0 \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$  de rang  $a_0$  on a :

$$\dim \mathfrak{p}^{-1}(x^0) \leq \dim [U_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha')] + [na_0^2 + nb_1(p-b_1-a_1)],$$

c'est-à-dire qu'on a  $\dim \mathfrak{p}^{-1}(x^0) \leq \dim [U_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha')] + nb_1(p-b_1) + n(a_0^2 - a_1b_1)$ .

Fixons un élément  $x^0$  de  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$  de rang  $a_0$  et soit  $\delta$  la dimension de  $\mathfrak{p}^{-1}(x^0)$ . En fixant  $x^0$ , on fixe aussi les sous-espaces vectoriels  $E_0'' = \text{Ker}(x^0)$  et  $E_1' = \text{Im}(x^0)$  de  $E_0$  et  $E_1$ . Pour effectuer le calcul de  $\delta$ , choisissons des supplémentaires  $E_0'$  et  $E_1''$  respectifs de  $E_0''$  et  $E_1'$ . Si  $(x^1, \dots, x^n)$  appartient à  $\mathfrak{p}^{-1}(x^0)$ , c'est-à-dire si  $x = (x^0, \dots, x^n)$  appartient à  $U_{p,q}^n(\alpha, B)$ , d'après le lemme 2.49 chaque application linéaire  $x^i$  pour  $i \in [1, n]$  se représente comme une application linéaire par blocs de la forme :

$$x^i = \left( \begin{array}{cc|c} E_0' & E_0'' & \\ \hline x_1^i & x_2^i & E_1' \\ x_3^i & 0 & E_1'' \end{array} \right).$$

Un élément de la fibre  $\mathfrak{p}^{-1}(x^0)$  est donc entièrement décrit par la donnée des  $3n$  applications linéaires  $x_j^i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $j \in [1, n]$  et cette fibre est isomorphe à un sous-schéma de l'espace  $[\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0', E_1')]^n \times [\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0'', E_1')]^n \times [\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0', E_1'')]^n$ .

Si l'on assimile l'algèbre  $(R^n)' = \mathbb{k}[X^1, \dots, X^n]$  à  $R^{n-1} = \mathbb{k}[X^0, \dots, X^{n-1}]$ , on obtient trois structures de module  $u_j$  appartenant respectivement à  $\widehat{E}_{a_0, a_0}^{n-1}$ ,  $\widehat{E}_{p-a_0, a_0}^{n-1}$  et  $\widehat{E}_{a_0, q-a_0}^{n-1}$  en posant  $\widehat{u}_j(X^i) = x_j^{i+1}$  pour  $j \in \{1, 2, 3\}$  et  $i \in [0, n-1]$ . Notons respectivement  $\widehat{E}_1$ ,  $\widehat{E}_2$  et  $\widehat{E}_3$  les schémas  $\widehat{E}_{a_0, a_0}^{n-1}$ ,  $\widehat{E}_{p-a_0, a_0}^{n-1}$  et  $\widehat{E}_{a_0, q-a_0}^{n-1}$ . Notons également  $q_j$  pour  $j \in \{1, 2, 3\}$  la projection :

$$q_j : \left[ \begin{array}{c} \mathfrak{p}^{-1}(x^0) \rightarrow \widehat{E}_j \\ u \mapsto u_j \end{array} \right].$$

La donnée des trois structures de module  $u_j = q_j(u)$  détermine entièrement la structure de module  $u$ , donc la projection  $(q_1, q_2, q_3) : \mathfrak{p}^{-1}(x^0) \rightarrow \widehat{E}_1 \times \widehat{E}_2 \times \widehat{E}_3$  est en fait une injection et la fibre  $\mathfrak{p}^{-1}(x^0)$  se réalise également comme un sous-schéma du produit  $\widehat{E}_1 \times \widehat{E}_2 \times \widehat{E}_3$ .

Pour étudier la dimension de la fibre  $p^{-1}(x^0)$ , nous commençons par regarder comment on doit choisir les structures de module données par  $u_2$  et  $u_3$ , c'est-à-dire comment on doit choisir les applications linéaires  $x_2^i$  et  $x_3^i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , puis nous regardons comment choisir la structure de module  $u_1$  lorsque  $u_2$  et  $u_3$  sont fixées. En d'autres termes, nous considérons la projection :

$$q = (q_2, q_3) : \begin{bmatrix} p^{-1}(x^0) & \rightarrow & \widehat{E}_2 \times \widehat{E}_3 \\ (u_1, u_2, u_3) & \mapsto & (u_2, u_3) \end{bmatrix}$$

et nous majorons successivement la dimension de son image puis celle de ses fibres. Si  $\delta'$  est un majorant de la première et si  $\delta''$  majore les secondes, on a  $\delta \leq \delta' + \delta''$ .

D'après le lemme 2.49 *iii*) la structure de module  $u_3$  appartient au sous-schéma localement fermé  $U_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha', B')$  de  $E_{a_0, q-a_0}^{n-1}$ . On en déduit que la dimension de l'image de la projection  $q_3$  est majorée par la dimension de  $U_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha', B')$ , qui est également celle de  $U_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha')$  d'après le lemme 2.46.

La structure de module  $u_2$  est définie quant à elle par la donnée du  $(n+1)$ -uplet d'applications linéaires  $(x_2^1, \dots, x_2^n)$ . D'après le lemme 2.49 *ii*) on a  $\text{rg } x_2^i \leq b_1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , donc la dimension de l'image de la projection  $q_2$  est majorée par la quantité  $n b_1 (p - b_1)$ . On en déduit que l'image de la projection  $q = (q_2, q_3)$  est majorée par la quantité  $\delta' = \dim U_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha') + n b_1 (p - b_1)$ .

Pour montrer le lemme 2.51, il nous suffit donc de montrer que pour  $x^0 \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$  de rang  $a_0$  la dimension des fibres de la projection  $q$  est majorée par  $n(a_0^2 - a_1 b_1)$ . Remarquons ici que cette dimension est majorée de façon évidente par  $\delta'' = n a_0^2$ , ce qui fournit déjà une première majoration de la dimension de la strate  $U_{p, q}^n(\alpha)$ , mais nous recherchons ici une majoration plus fine.

Fixons  $x^0 \in \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$  de rang  $a_0$  et fixons  $(u_2, u_3) \in \text{Im } q$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $\text{rg } x_2^i \leq b_1$  et  $\text{rg } x_3^i \leq a_1$  avec  $\text{rg } x_2^1 = b_1$  et  $\text{rg } x_3^1 = a_1$ . Nous commençons par montrer que pour calculer la dimension de  $q^{-1}(u_2, u_3)$  on peut se ramener au cas où l'on a  $\text{rg } x_2^i = b_1$  et  $\text{rg } x_3^i = a_1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{k}$ ; on pose  $Y^i = X^1 + \lambda X^i$  pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  et on pose  $Y^1 = X^1$ . La famille  $(Y^1, \dots, Y^n)$  forme une base de l'espace vectoriel  $(R_1^n)' = \langle X^1, \dots, X^n \rangle$  et la condition  $(u_2, u_3) \in \text{Im } q$  entraîne également que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $\text{rg } y_2^i \leq b_1$  et  $\text{rg } y_3^i \leq a_1$ . Pour  $\lambda$  général dans  $\mathbb{k}$  on obtient alors  $\text{rg } y_2^i = b_1$  et  $\text{rg } y_3^i = a_1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . De plus les  $\lambda$  qui vérifient cette propriété sont entièrement déterminés par la donnée de  $u_2$  et  $u_3$ .

Fixons donc un tel  $\lambda$ , ce qui revient à fixer la base  $(Y^1, \dots, Y^n)$  de  $(R_1^n)'$ . La structure de module  $u_1$  est définie aussi bien par la donnée du  $n$ -uplet  $(x^1, \dots, x^n)$  que par celle du  $n$ -uplet  $(y^1, \dots, y^n)$  d'applications linéaires de  $E'_0$  dans  $E'_1$ . Pour se donner un élément de la fibre  $q^{-1}(u_2, u_3)$ , c'est-à-dire une telle structure de module  $u_1$ , il suffit donc de se donner chacune des applications  $y^i$ . Ceci revient à considérer successivement chacune des projections :

$$s_i : \begin{bmatrix} q^{-1}(u_2, u_3) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E'_0, E'_1) \\ (y_1^1, \dots, y_1^n) & \mapsto & y_1^i \end{bmatrix}$$

définies pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Si l'on majore la dimension de l'image de chaque projection  $s_i$  par un entier  $\delta_i$ , on en déduit que l'on a  $\dim[q^{-1}(u_2, u_3)] \leq \sum_{i=1}^n \delta_i$ . Il suffit donc pour conclure de montrer que la dimension de l'image de chaque projection  $s_i$  est majorée par  $a_0^2 - a_1 b_1$ .



**Démonstration.** On procède par récurrence. Pour  $n = 0$ , soit  $a_0 \in \mathbb{N}$  et soit  $\alpha = (a_0)$ . Si  $a_0 > \min(p, q)$  la strate  $U_{p,q}^0(\alpha)$  est vide. Si  $a_0 \in \llbracket 0, \min(p, q) \rrbracket$  nous avons déjà vu que l'on a  $\dim U_{p,q}^0(\alpha) = (p + q - a_0) a_0 = q a_0 + [p a_0 - a_0^2]$ , c'est-à-dire  $\dim U_{p,q}^0(\alpha) = \delta_{p,q}^0(\alpha)$ .

Soit ensuite  $n \geq 1$ , soit  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$  et soit  $\alpha'$  le type dérivé de  $\alpha$ . Le lemme 2.51 donne :

$$\dim [U_{p,q}^n(\alpha)] \leq \dim [U_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha')] + [(q + p - a_0) a_0 + n a_0^2 + n b_1 (p - a_1 - b_1)].$$

En tenant compte de la convention  $a_{-1} = p$ , ceci s'écrit :

$$\dim [U_{p,q}^n(\alpha)] \leq \dim [U_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha')] + q a_0 + p a_0 + (n - 1) a_0^2 + n b_1 (a_{-1} - a_1 - b_1).$$

Par hypothèse de récurrence on a  $\dim [U_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha')] \leq \delta_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha')$ . On rappelle que l'on a  $\alpha' = (a_1; b_2, a_2; \dots; b_n, a_n)$ , donc on obtient :

$$\delta_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha') = (q - a_0) \sum_{i=1}^n a_i + a_0 a_1 - a_n^2 + \sum_{i=1}^{n-2} a_i \left[ \sum_{j=i+2}^n (a_i - a_j) \right] + \sum_{i=2}^n (n - i + 1) b_i (a_{i-2} - a_i - b_i).$$

Notons  $\Delta$  la quantité  $\delta_{a_0, q-a_0}^{n-1}(\alpha') + q a_0 + p a_0 + (n - 1) a_0^2 + n b_1 (a_{-1} - a_1 - b_1)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta = q \left[ a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \right] + [p a_0 - a_n^2] + a_0 \left[ (n - 1) a_0 - \sum_{i=1}^n a_i + a_1 \right] \\ + \sum_{i=1}^{n-2} a_i \left[ \sum_{j=i+2}^n (a_i - a_j) \right] + \sum_{i=1}^n (n - i + 1) b_i (a_{i-2} - a_i - b_i). \end{aligned}$$

Or on a  $(n - 1) a_0 - \sum_{i=1}^n a_i + a_1 = (n - 1) a_0 - \sum_{i=2}^n a_i = \sum_{i=2}^n (a_0 - a_i)$ , donc on obtient :

$$\Delta = q \sum_{i=0}^n a_i + [p a_0 - a_n^2] + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \left[ \sum_{j=i+2}^n (a_i - a_j) \right] + \sum_{i=1}^n (n - i + 1) b_i (a_{i-2} - a_i - b_i),$$

c'est-à-dire  $\Delta = \delta_{p,q}^n(\alpha)$ , ce qui démontre le résultat. ■

### 2.4.5 Récapitulation.

Fixons  $n \in \mathbb{N}$  et  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ . Nous venons de définir sur le schéma  $\widehat{E}_{p,q}^n$  deux invariants équivalents, le **multirang** et le **type numérique**, qui sont chacun formé par une liste de  $(2n + 1)$  entiers naturels. Le premier varie de façon semi-continue sur  $\widehat{E}_{p,q}^n$ , donc montre que l'on établit ainsi une stratification de  $\widehat{E}_{p,q}^n$ . Le second permet quant à lui de minorer le rang de l'application linéaire  $r_0^n$  associée à chaque structure de module  $u_0^n$  via la matrice  $V^n$ .

Soit  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$ . On note  $\mathcal{U}_{p,q}^n(\alpha)$  le sous-schéma localement fermé de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  sur lequel le type numérique est égal à  $\alpha$ . Si  $\alpha$  est le type numérique d'une

structure de module, d'après le corollaire 2.50 les entiers  $a_i$  et  $b_i$  vérifient les relations (2.5), (2.6) et (2.9), c'est-à-dire vérifient les relations :

$$(2.10) \quad \begin{cases} 0 \leq a_n \leq \dots \leq a_1 \leq a_0 \leq a_{-1} = p, & \sum_{i=0}^n a_i \leq q, \\ \forall i \in [1, n], 0 \leq b_i \leq \min(a_{i-2} - a_{i-1}, a_{i-1} - a_i). \end{cases}$$

Si la structure de module  $u_0^n$  a pour type numérique  $\alpha$ , l'application linéaire  $v_0^n$  qui lui est associée vérifie  $\text{rg } v_0^n \geq \chi^n(\alpha)$ , en posant  $\chi^n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) a_i + \sum_{i=1}^n b_i$ . En particulier, si on a  $\chi^n(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2} p$  la matrice  $v_0^n$  est injective. Cette relation  $\chi^n(\alpha) = \frac{n(n+1)}{2} p$  est équivalente à  $a_{n-1} + b_n = p$ ; elle entraîne que l'on a  $a_{i-1} = p$  et  $b_i = 0$  pour tout  $i \in [0, n-1]$ .

On pose alors la définition suivante :

**Définition 2.53.** On note  $\mathbb{A}_{p,q}^n$  l'ensemble des éléments  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n)$  de  $\mathbb{N}^{2n+1}$  qui vérifient les relations (2.10). On note  $\overline{\mathbb{A}_{p,q}^n}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{A}_{p,q}^n$  formé des éléments qui vérifient de plus  $a_{n-1} + b_n < p$ .

Enfin la dimension de la strate  $U_{p,q}^n(\alpha)$  est majorée par la quantité  $\delta_{p,q}^n(\alpha)$ , en posant :

$$\delta_{p,q}^n(\alpha) = q \sum_{i=0}^n a_i + [p a_0 - a_n^2] + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \left[ \sum_{j=i+2}^n (a_i - a_j) \right] + \sum_{i=1}^n (n-i+1) b_i (a_{i-2} - a_i - b_i).$$

On note que la quantité  $\chi^n(\alpha)$  ne dépend que de l'entier  $n$ , tandis que la quantité  $\delta_{p,q}^n(\alpha)$  dépend également de  $p$  et  $q$ .

Cette stratification des schémas  $\widehat{E}_{p,q}^n$  permet de montrer les théorèmes 1 et 2 de l'introduction de la façon suivante. Fixons  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$  et considérons le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$ . Celui-ci étant isomorphe au schéma  $\widehat{E}_{r,q,p}^n$  on peut supposer que l'on a  $p \leq r$ . On considère alors la projection  $\pi_0^n$  de  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  sur  $\widehat{E}_{p,q}^n$ . La fibre d'une structure de module  $u_0^n$  de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  par cette projection est définie par la relation  $u_1^n \circ v_0^n = 0$ , donc est un espace vectoriel de dimension  $r \times [(n+1)q - \text{rg } v_0^n]$ . Si l'ouvert de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  sur lequel l'application  $v_0^n$  est injective est non vide, l'adhérence  $C_0^n$  de son image réciproque par  $\pi_0^n$  forme une composante de  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  qui est génériquement lisse et de dimension :

$$\Delta^n(p, q, r) = (n+1)pq + (n+1)qr - \frac{n(n+1)}{2} pr.$$

Par ailleurs, pour tout  $\alpha \in \mathbb{A}_{p,q}^n$  l'image réciproque de la strate  $U_{p,q}^n(\alpha)$  de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  par  $\pi_0^n$  est un sous-schéma de  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  de dimension majorée par  $\delta_{p,q}^n(\alpha) + r \times [(n+1)q - \chi^n(\alpha)]$ . Si  $\alpha$  vérifie  $a_{n-1} + b_n = p$ , c'est-à-dire si  $\alpha \in \mathbb{A}_{p,q}^n \setminus \overline{\mathbb{A}_{p,q}^n}$ , le schéma  $(\pi_0^n)^{-1}(U_{p,q}^n(\alpha))$  est contenu dans  $C_0^n$ . Pour montrer que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible, il suffit de montrer qu'il ne contient



pas d'autre composante que  $C_0^n$ . Comme la dimension de chacune de ses composantes est minorée par  $\Delta^n(p, q, r)$ , il suffit de montrer que si  $\alpha \in \overline{A_{p,q}^n}$  on a :

$$\delta_{p,q}^n(\alpha) + (n+1)qr - r\chi^n(\alpha) < \Delta^n(p, q, r),$$

c'est-à-dire  $r \times \left[ \frac{n(n+1)}{2} p - \chi^n(\alpha) \right] < [(n+1)pq - \delta_{p,q}^n(\alpha)]$ . On pose alors la définition suivante :

**Définition 2.54.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$  et soit  $\alpha \in \overline{A_{p,q}^n}$ . On pose :

$$\mu(\alpha) = [(n+1)pq - \delta_{p,q}^n(\alpha)] - r \left[ \frac{n(n+1)}{2} p - \chi^n(\alpha) \right].$$

Ce qui précède se résume par la proposition suivante :

**Proposition 2.55.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$  vérifiant  $p \leq r$ . Si on a  $\mu(\alpha) > 0$  pour tout  $\alpha \in \overline{A_{p,q}^n}$  le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible.

Si  $p$  et  $q$  sont fixés, on obtient que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible dès que l'on a :

$$r < \min_{\alpha \in \overline{A_{p,q}^n}} \left[ \frac{(n+1)pq - \delta_{p,q}^n(\alpha)}{\frac{n(n+1)}{2} p - \chi^n(\alpha)} \right].$$

On est ainsi ramené à un problème purement numérique qui revient peu ou prou à calculer l'expression de droite.

Par ailleurs que  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  soit irréductible ou non, la stratification de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  que l'on a établi fournit dans tous les cas une majoration de sa dimension. En effet, pour  $\alpha \in \overline{A_{p,q}^n}$  la dimension de l'image réciproque  $(\pi_0^n)^{-1}(U_{p,q}^n(\alpha))$  est majorée par  $\delta_{p,q}^n(\alpha) + (n+1)qr - r\chi^n(\alpha)$ . Or les schémas  $(\pi_0^n)^{-1}(U_{p,q}^n(\alpha))$  recouvrent  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  lorsque  $\alpha$  parcourt  $\overline{A_{p,q}^n}$ , donc on obtient :

$$\dim \widehat{E}_{p,q,r}^n \leq (n+1)qr + \text{Max}_{\alpha \in \overline{A_{p,q}^n}} [\delta_{p,q}^n(\alpha) - r\chi^n(\alpha)].$$

Posons alors la définition suivante :

**Définition 2.56.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$  et soit  $\alpha \in \overline{A_{p,q}^n}$ . On pose  $\nu(\alpha) = r\chi^n(\alpha) - \delta_{p,q}^n(\alpha)$ . c'est-à-dire  $\nu(\alpha) = \mu(\alpha) + (n+1)p \left[ \frac{nr}{2} - q \right]$ .

La dimension du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est alors majorée par  $[(n+1)qr - \min_{\alpha \in \overline{A_{p,q}^n}} \nu(\alpha)]$  pour tout triplet  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$ . Le module nul est le seul module de  $\widehat{E}_{p,q}^n$  de type de décomposition  $\alpha_0 = (0, \dots, 0)$ . Le sous-schéma fermé  $C_1^n = (\pi_0^n)^{-1}(0) = (\pi_0^n)^{-1}(U_{\alpha_0})$  est un espace affine isomorphe à  $\widehat{E}_{p,q}^n$ , donc est irréductible lisse et a pour dimension  $(n+1)qr$ . On peut d'ailleurs vérifier que l'on a  $\nu(\alpha_0) = 0$ . Si l'on montre que pour  $\alpha \neq \alpha_0$  on a  $\nu(\alpha) \geq 0$  (resp.  $\nu(\alpha) > 0$ ), on obtient que la dimension du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est exactement  $(n+1)qr$  et que  $C_1^n$  en forme une composante de dimension maximale (resp. qui est la seule composante à posséder cette dimension). On peut formuler ces remarques de la façon suivante :

**Proposition 2.57.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$ . On suppose que l'on a  $p \leq r$ .

i) La dimension du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est majorée par  $(n+1)qr - \min_{\alpha \in \overline{A}_{p,q}^n} \nu(\alpha)$ .

ii) Si on a  $\nu(\alpha) \geq 0$  pour tout  $\alpha \in \overline{A}_{p,q}^n$ , le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est de dimension  $(n+1)qr$  et le fermé  $C_1^n$  défini par  $u_0^n = 0$  est une composante atteignant cette dimension.

iii) Si on a de plus  $\nu(\alpha) > 0$  pour tout  $\alpha \in \overline{A}_{p,q}^n \setminus \{\alpha_0\}$ , la composante  $C_1^n$  est la seule de dimension  $(n+1)qr$ .

Comme toutes les composantes du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  sont de dimension au moins égale à  $\Delta^n(p, q, r)$ , les points i) et ii) ne peuvent se produire que si l'on a  $\Delta^n(p, q, r) \leq (n+1)qr$ , c'est-à-dire si on a  $q \leq nr/2$ ; le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  possède nécessairement dans ce cas plusieurs composantes.

Pour démontrer les théorèmes 1 et 2 généraux de l'introduction, on est donc ramené à deux problèmes purement numériques, qui consistent à calculer respectivement les entiers  $\mu = \min_{\alpha \in \overline{A}_{p,q}^n} (\mu(\alpha))$  et  $\nu = \min_{\alpha \in \overline{A}_{p,q}^n \setminus \{\alpha_0\}} (\nu(\alpha))$  lorsque le triplet  $(p, q, r)$  est fixé. Pour obtenir les résultats du théorème 1 il suffit d'avoir  $\mu > 0$ , et pour le théorème 2 il suffit d'avoir selon les cas  $\nu \geq 0$  ou  $\nu > 0$ .

## 2.5 Un changement de variables.

Pour calculer les deux entiers  $\mu = \min_{\alpha \in \overline{A}_{p,q}^n} (\mu(\alpha))$  et  $\nu = \min_{\alpha \in \overline{A}_{p,q}^n \setminus \{\alpha_0\}} (\nu(\alpha))$ , il est essentiel d'exprimer de la façon la plus pratique possible les relations (2.10) qui définissent les ensembles  $\overline{A}_{p,q}^n$  et  $\widehat{A}_{p,q}^n$ , c'est-à-dire de les exprimer sous une forme qui conduise naturellement à des minoration et majoration. En considérant les relations (2.10), on voit qu'il est judicieux de considérer le changement de variables consistant à prendre la différence première de la suite :

$$(p = a_{-1} \geq a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0).$$

Comme on le verra dans la suite, les calculs qui sont nécessaires pour traduire les expressions  $\mu(\alpha)$  et  $\nu(\alpha)$  par ce changement de variables sont assez fastidieux. Ce changement est cependant un préalable indispensable pour pouvoir réaliser l'étude numérique suggérée dans les propositions 2.55 et 2.57, dans la mesure où lui seul permet de rendre exploitables les relations (2.10). Nous posons la définition suivante :

**Définition 2.58.** Soit  $\alpha = (a_0; b_1, a_1; \dots; b_n, a_n) \in \mathbb{N}^{2n+1}$ . Pour  $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ , on note  $c_i$  l'entier  $a_{i-1} - a_i$ , avec les conventions  $a_{-1} = p$  et  $a_{n+1} = 0$ , donc  $c_0 = p - a_0$  et  $c_{n+1} = a_n$ .

On note  $\gamma(\alpha)$  ou  $\gamma$  s'il n'y a pas d'ambiguïté l'élément  $(c_0, \dots, c_{n+1}; b_1, \dots, b_n)$  de  $\mathbb{N}^{2n+2}$ .

La donnée de  $\gamma$  est équivalente à celle de  $\alpha$ , car on retrouve les entiers  $a_i$  par sommation. On note toutefois que  $\gamma$  consiste en la donnée de  $(2n+2)$  entiers, et non  $(2n+1)$  comme pour les invariants  $\alpha$  et  $\sigma$  précédemment définis. La relation  $\sum_{i=0}^{n+1} c_i = a_{-1} - a_{n+1} = p$  montre que l'un des entiers  $c_i$  est en fait superflu car n'importe lequel d'entre eux est déterminé par tous les autres. Nous définissons cependant l'invariant  $\gamma$  sous cette forme redondante car pour démontrer le résultat sur l'irréductibilité nous ne nous servirons pas de l'entier  $c_{n+1}$ , tandis que pour les résultats concernant la dimension ce sera l'entier  $c_0$  qui nous sera inutile.

Dans ce paragraphe, nous traduisons en fonction des entiers  $b_i$  et  $c_i$ , c'est-à-dire en fonction de l'invariant  $\gamma$ , les deux problèmes numériques contenus dans les propositions 2.55 et 2.57. Nous traduisons ainsi successivement les relations qui définissent les ensembles  $A_{p,q}^n$  et  $\overline{A_{p,q}^n}$  (paragraphe 2.5.1), puis la valeur de  $\mu(\alpha)$  (paragraphe 2.5.2) et celle de  $\nu(\alpha)$  (paragraphe 2.5.2).

### 2.5.1 Traduction des contraintes.

Nous commençons par traduire les relations (2.10) en fonction des entiers  $b_i$  et  $c_i$ , c'est-à-dire en fonction de  $\gamma$ . La relation  $0 = a_{n+1} \leq a_n \leq \dots \leq a_1 \leq a_0 \leq a_{-1} = p$  équivaut à  $c_i \geq 0$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$  et  $\sum_{i=0}^{n+1} c_i = p$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , la relation  $b_i \leq \min(a_{i-2} - a_{i-1}, a_{i-1} - a_i)$  équivaut à  $b_i \leq \min(c_{i-1}, c_i)$ .

Enfin la relation  $q \geq \sum_{i=0}^n a_i$  peut se traduire de deux façons différentes, qui nous seront toutes deux utiles selon que l'on s'intéresse à l'irréductibilité ou à la dimension. Tout d'abord, pour  $j \leq k$  on a par intégration la relation  $\sum_{i=j}^k c_i = a_{j-1} - a_k$ . On en déduit les relations  $a_k = a_{-1} - \sum_{i=0}^k c_i = p - \sum_{i=0}^k c_i$  et  $a_j = \sum_{i=j+1}^{n+1} c_i + a_{n+1} = \sum_{i=j+1}^{n+1} c_i$ . On a donc d'une part :

$$\sum_{k=0}^n a_k = (n+1)p - \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k c_i = (n+1)p - \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n c_i = (n+1)p - \sum_{i=0}^n (n+1-i) c_i.$$

D'autre part, comme on a  $p = \sum_{i=0}^{n+1} c_i$ , on obtient :

$$\sum_{i=0}^n a_i = \sum_{i=0}^{n+1} [(n+1) c_i - (n+1-i) c_i] = \sum_{i=0}^{n+1} i c_i.$$

On en déduit que la relation  $q \geq \sum_{i=0}^n a_i$  équivaut d'une part à  $q \geq \sum_{i=0}^{n+1} i c_i$  et d'autre part à  $[(n+1)p - q] \geq \sum_{i=0}^n (n+1-i) c_i$ .

Les relations qui définissent  $A_{p,q}^n$  sont alors équivalentes aux relations :

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, c_i \geq 0; \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq b_i \leq \min(c_{i-1}, c_i) \\ \sum_{i=0}^{n+1} c_i = p; \quad [(n+1)p - q] \leq \sum_{i=0}^n (n+1-i) c_i \end{array} \right.$$

où la dernière relation est elle-même équivalente à  $q \geq \sum_{i=0}^{n+1} i c_i$ .

Par ailleurs, la condition  $a_{n-1} + b_n < p$  qui définit le sous-ensemble  $\overline{A_{p,q}^n}$  de  $A_{p,q}^n$  s'écrit sous la forme  $p - a_{n-1} > b_n$ , c'est-à-dire  $a_{-1} - a_{n-1} > b_n$ , soit encore  $\sum_{i=0}^{n-1} c_i > b_n$ . Cette condition entraîne en particulier que l'on a  $\sum_{i=0}^{n-1} c_i > 0$ , donc que l'un au moins des  $c_i$  pour  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  est non nul. Ce sera par le biais de ce corollaire que nous exploiterons cette relation en pratique.

**Définition 2.59.** On note  $C_{p,q}^n$  l'ensemble des éléments  $\gamma = (c_0, \dots, c_{n+1}; b_1, \dots, b_n)$  de  $\mathbb{N}^{2n+2}$  qui vérifient les relations (2.11). On note  $\overline{C_{p,q}^n}$  l'ensemble des éléments de  $C_{p,q}^n$  qui vérifient la relation supplémentaire  $\sum_{i=0}^{n-1} c_i > b_n$ .

### 2.5.2 Calcul de $\mu(\alpha)$ .

Exprimons à présent la quantité  $\mu(\alpha)$  en fonction des variables  $b_i$  et  $c_i$ , c'est-à-dire de  $\gamma$ .

**Définition 2.60.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $\gamma = (c_0, \dots, c_{n+1}; b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^{2n+2}$ . On note  $M(\gamma)$  la quantité :

$$M(\gamma) = \sum_{i=0}^n \left[ q - ip - \binom{n-i}{2} r \right] (n-i+1) c_i - \sum_{i=0}^n p c_i + \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1) c_{j-1} \right] (n-i+1) c_i \\ + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n c_j c_i + r \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n (n-i+1) (c_{i-1} - b_i) (c_i - b_i).$$

**Proposition 2.61.** Soit  $\alpha \in \mathbb{A}_{p,q}^n$  et soit  $\gamma = \gamma(\alpha)$ , on a  $\mu(\alpha) = M(\gamma)$ .

**Remarque :** Dans la démonstration qui suit, nous partons de la valeur de  $\mu(\alpha)$  et la transformons progressivement pour aboutir à  $M(\gamma)$ . Ceci nécessite de regrouper judicieusement les termes  $a_{i+1} - a_i$  pour faire apparaître les entiers  $c_i$ . La démarche inverse consistant à vérifier la formule à partir de la valeur donnée de  $M(\gamma)$  fournirait certainement des calculs plus directs, mais serait moins naturelle.

**Démonstration.** On peut écrire  $\mu(\alpha) = \mu_2(\alpha) - r \mu_1(\alpha)$ , avec  $\mu_2(\alpha) = \left[ (n+1)pq - \delta_{p,q}^n(\alpha) \right]$  et  $\mu_1(\alpha) = \left[ \frac{n(n+1)}{2} p - \chi^n(\alpha) \right]$ . Calculons tout d'abord  $\mu_1(\alpha)$ . On a :

$$\chi^n(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) a_i + \sum_{i=1}^n b_i \quad \text{et} \quad \frac{n(n+1)}{2} p = \left[ \sum_{i=1}^n i \right] p = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) p,$$

donc  $\mu_1(\alpha) = \left[ \frac{n(n+1)}{2} p - \chi^n(\alpha) \right] = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) (p - a_i) - \sum_{i=1}^n b_i$ . D'après ce qui précède, pour  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  on a  $p - a_i = a_{-1} - a_i = \sum_{j=0}^i c_j$ , donc :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) (p - a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i) \left[ \sum_{j=0}^i c_j \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \sum_{i=j}^{n-1} (n-i) \right] c_j = \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \sum_{i=1}^{n-j} i \right] c_j,$$

donc  $\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) (p - a_i) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j)(n-j+1)}{2} c_j$ . On obtient finalement :

$$\mu_1(\alpha) = \sum_{i=0}^n \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} c_i - \sum_{i=1}^n b_i.$$

— Calculons à présent  $\mu_2(\alpha) = q \times (n+1)p - \delta_{p,q}^n(\alpha)$ . On a :

$$\delta_{p,q}^n(\alpha) = q \sum_{i=0}^n a_i + \left[ p a_0 - a_n^2 \right] + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \left[ \sum_{j=i+2}^n (a_i - a_j) \right] + \sum_{i=1}^n (n-i+1) b_i (a_{i-2} - a_i - b_i),$$

donc on peut écrire  $\mu_2(\alpha) = q\mu_3(\alpha) - \mu_4(\alpha) - \mu_5(\alpha)$ , en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_3(\alpha) = \left[ (n+1)p - \sum_{i=0}^n a_i \right], \quad \mu_4(\alpha) = \left[ pa_0 - a_n^2 \right] + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \left[ \sum_{j=i+2}^n (a_i - a_j) \right], \\ \text{et } \mu_5(\alpha) = \sum_{i=1}^n (n-i+1) b_i (a_{i-2} - a_i - b_i). \end{array} \right.$$

On a tout d'abord  $(n+1)p = \sum_{i=0}^n p$ , donc :

$$\mu_3(\alpha) = \sum_{i=0}^n [p - a_i] = \sum_{i=0}^n \left[ \sum_{j=0}^i c_j \right] = \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n c_j = \sum_{j=0}^n (n-j+1) c_j = \sum_{i=0}^n (n-i+1) c_i.$$

De plus, pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $a_{i-2} - a_i = c_{i-1} + c_i$ , donc :

$$b_i (a_{i-2} - a_i - b_i) = b_i (c_{i-1} + c_i - b_i) = -(c_{i-1} - b_i)(c_i - b_i) + c_{i-1} c_i,$$

donc  $\mu_5(\alpha) = \sum_{i=1}^n (n-i+1) c_{i-1} c_i - \sum_{i=1}^n (n-i+1) (c_{i-1} - b_i)(c_i - b_i)$ . Il reste seulement à calculer  $\mu_4(\alpha)$ . On a  $\mu_4(\alpha) = [pa_0 - a_n^2] + \mu'_4(\alpha)$ , en posant :

$$\mu'_4(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-2} a_i \left[ \sum_{j=i+2}^n (a_i - a_j) \right] = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i-1} \left[ \sum_{j=i+1}^n (a_{i-1} - a_j) \right].$$

Commençons par calculer  $\mu'_4(\alpha)$ . On fixe  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on a :

$$\sum_{j=i+1}^n (a_{i-1} - a_j) = \sum_{j=i+1}^n \left[ \sum_{k=i}^j c_k \right] = \sum_{j=i}^n \left[ \sum_{k=i}^j c_k \right] - c_i = \sum_{k=i}^n \left[ \sum_{j=k}^n c_k \right] - c_i,$$

soit  $\sum_{j=i+1}^n (a_{i-1} - a_j) = \sum_{k=i}^n (n-k+1) c_k - c_i$ . On en déduit :

$$\mu'_4(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i-1} \left[ \sum_{k=i}^n (n-k+1) c_k - c_i \right] = \sum_{i=1}^n a_{i-1} \left[ \sum_{k=i}^n (n-k+1) c_k - c_i \right],$$

soit :

$$\mu'_4(\alpha) = \sum_{i=1}^n a_{i-1} \left[ \sum_{k=i}^n (n-k+1) c_k \right] - \sum_{i=1}^n a_{i-1} c_i = \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{i=1}^k a_{i-1} \right] (n-k+1) c_k - \sum_{i=1}^n a_{i-1} c_i.$$

Or pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $\sum_{j=0}^{i-1} c_j = p - a_{i-1}$ , donc  $a_{i-1} = p - \sum_{j=0}^{i-1} c_j = p - \sum_{j=1}^i c_{j-1}$ . Fixons alors  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a :

$$\sum_{i=1}^k a_{i-1} = \sum_{i=1}^k \left[ p - \sum_{j=1}^i c_{j-1} \right] = kp - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i c_{j-1} = kp - \sum_{j=1}^k \sum_{i=j}^k c_{j-1},$$

soit  $\sum_{i=1}^k a_{i-1} = kp - \sum_{j=1}^k (k-j+1) c_{j-1} = kp - \sum_{j=1}^{k-1} (k-j+1) c_{j-1} - c_{k-1}$ . On obtient :

$$\sum_{k=1}^n \left[ \sum_{i=1}^k a_{i-1} \right] (n-k+1) c_k = \sum_{k=1}^n \left[ kp - \sum_{j=1}^{k-1} (k-j+1) c_{j-1} - c_{k-1} \right] (n-k+1) c_k.$$

qui donne finalement :

$$\mu'_4(\alpha) = \sum_{i=1}^n \left[ ip - \sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1) c_{j-1} - c_{i-1} \right] (n-i+1) c_i - \sum_{i=1}^n a_{i-1} c_i.$$

Or  $\mu_4(\alpha) = \mu'_4(\alpha) + [pa_0 - a_n^2]$ . On a tout d'abord :

$$pa_0 - a_n^2 = a_0(p - a_n) + a_n(a_0 - a_n) = a_0 \sum_{i=0}^n c_i + a_n \sum_{i=1}^n c_i,$$

donc :

$$\begin{aligned} [pa_0 - a_n^2] - \sum_{i=1}^n a_{i-1} c_i &= a_0 \sum_{i=0}^n c_i - \sum_{i=1}^n (a_{i-1} - a_n) c_i = (p - c_0) \sum_{i=0}^n c_i - \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=i}^n c_j \right] c_i \\ &= p \sum_{i=0}^n c_i - \sum_{j=0}^n c_j c_0 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n c_j c_i = p \sum_{i=0}^n c_i - \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n c_j c_i. \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\mu_4(\alpha) = \sum_{i=1}^n \left[ ip - \sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1) c_{j-1} - c_{i-1} \right] (n-i+1) c_i + p \sum_{i=0}^n c_i - \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n c_j c_i,$$

soit :

$$\begin{aligned} \mu_4(\alpha) &= \sum_{i=0}^n ip(n-i+1) c_i + p \sum_{i=0}^n c_i - \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1) c_{j-1} \right] (n-i+1) c_i \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n c_j c_i - \sum_{i=1}^n (n-i+1) c_{i-1} c_i. \end{aligned}$$

En reportant dans  $\mu_2(\alpha) = q\mu_3(\alpha) - \mu_4(\alpha) - \mu_5(\alpha)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_2(\alpha) &= \sum_{i=0}^n [q - ip] (n-i+1) c_i - \sum_{i=0}^n p c_i + \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1) c_{j-1} \right] (n-i+1) c_i \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n c_j c_i + \sum_{i=1}^n (n-i+1) (c_{i-1} - b_i) (c_i - b_i). \end{aligned}$$

En tenant compte de  $\mu_1(\alpha) = \sum_{i=0}^n \frac{(n-i)}{2}(n-i+1)c_i - \sum_{i=1}^n b_i$  et en reportant dans  $\mu(\alpha) = \mu_2(\alpha) - r\mu_1(\alpha)$ , on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \mu(\alpha) = & \sum_{i=0}^n \left[ q - ip - \frac{n-i}{2}r \right] (n-i+1)c_i - \sum_{i=0}^n p c_i + \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1)c_{j-1} \right] (n-i+1)c_i \\ & + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n c_j c_i + r \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n (n-i+1)(c_{i-1} - b_i)(c_i - b_i), \end{aligned}$$

soit  $\mu(\alpha) = M(\gamma)$ . ■

### 2.5.3 Calcul de $\nu(\alpha)$ .

Nous exprimons à présent la quantité  $\nu(\alpha)$  en fonction de  $\gamma$ . Nous pouvons nous servir pour cela du résultat précédent, puisque l'on a  $\nu(\alpha) = \mu(\alpha) + \left[ \frac{n}{2}r - q \right] (n+1)p$ .

**Définition 2.62.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $\gamma = (c_0, \dots, c_{n+1}; b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^{2n+2}$ . On note  $N(\gamma)$  l'entier :

$$\begin{aligned} N(\gamma) = & \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \frac{2n+1-i}{2}r - (n+1-i+e_i)p - q \right] i c_i + \sum_{i=1}^n b_i (r - c_{i-1} - c_i + b_i) + c_{n+1}^2 \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left[ (n+1-i)(i-j+1) - 1 \right] c_{j-1} c_i + \sum_{i=1}^n (n-i)(c_{i-1} - b_i)(c_i - b_i) \end{aligned}$$

obtenue en posant  $e_i = 1/(n+1)$  si  $i = n+1$  et  $e_i = 0$  sinon.

**Proposition 2.63.** Soit  $\alpha \in \mathbb{A}_{p,q}^n$  et soit  $\gamma = \gamma(\alpha)$ , on a  $\nu(\alpha) = N(\gamma)$ .

**Démonstration.** On a  $\nu(\alpha) = \mu(\alpha) + \left[ \frac{n}{2}r - q \right] (n+1)p$ . Posons :

$$N'(\gamma) = \sum_{i=0}^n \left[ q - ip - \frac{n-i}{2}r \right] (n+1-i)c_i + \left[ \frac{n}{2}r - q \right] (n+1)p.$$

On a d'une part  $\sum_{i=0}^n \left[ q - ip - \frac{n-i}{2}r \right] (n+1-i)c_i = \sum_{i=0}^{n+1} \left[ q - ip - \frac{n-i}{2}r \right] (n+1-i)c_i$ ,

et d'autre part  $p = \sum_{i=0}^{n+1} c_i$ , donc on obtient :

$$N'(\gamma) = \sum_{i=0}^{n+1} \left[ q - ip - \frac{n-i}{2}r \right] (n+1-i)c_i + \sum_{i=0}^{n+1} \left[ \frac{n}{2}r - q \right] (n+1)c_i.$$

Ceci s'écrit sous la forme  $N'(\gamma) = \sum_{i=0}^{n+1} h_i c_i$ , en posant pour  $i \in [0, n+1]$ :

$$h_i = \left[ q - ip - \frac{n-i}{2} r \right] (n+1-i) + \left[ \frac{n}{2} r - q \right] (n+1),$$

soit :

$$\begin{aligned} h_i &= \left[ (n+1-i) - (n+1) \right] q - i(n+1-i)p - \left[ \frac{(n-i)(n+1-i)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right] r \\ &= -iq - i(n+1-i)p + \frac{ni + (n+1)i - i^2}{2} r = i \times \left[ \frac{2n+1-i}{2} r - (n+1-i)p - q \right]. \end{aligned}$$

En particulier, on a  $h_0 = 0$ , donc :

$$N'(\gamma) = \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \frac{2n+1-i}{2} r - (n+1-i)p - q \right] i c_i.$$

De plus, posons  $N''(\gamma) = -p \sum_{j=0}^n c_j + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n c_i c_j$ . On a  $p = \sum_{i=0}^{n+1} c_i$ , donc :

$$\begin{aligned} N''(\gamma) &= -\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n c_i c_j + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n c_i c_j = -c_{n+1} \sum_{j=0}^n c_j - \sum_{i=0}^n \left[ \sum_{j=0}^n c_j - \sum_{j=i}^n c_j \right] c_i \\ &= -c_{n+1} \left[ p - c_{n+1} \right] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} c_j c_i = -c_{n+1} \left[ p - c_{n+1} \right] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i c_{j-1} c_i, \end{aligned}$$

donc  $N''(\gamma) = -p \cdot c_{n+1} + c_{n+1}^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} c_{j-1} c_i - \sum_{i=1}^n c_{i-1} c_i$ . On a alors :

$$\begin{aligned} N(\gamma) &= N'(\gamma) + N''(\gamma) + \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1) c_{j-1} \right] (n-i+1) c_i \\ &\quad + r \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n (n-i+1) (c_{i-1} - b_i) (c_i - b_i), \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous la forme  $N(\gamma) = N_1(\gamma) + N_2(\gamma) + N_3(\gamma)$ , en posant :

$$N_1(\gamma) = \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \frac{2n+1-i}{2} r - (n+1-i)p - q \right] i c_i - p \cdot c_{n+1},$$

$$N_2(\gamma) = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1) c_{j-1} \right] (n+1-i) c_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} c_{j-1} c_i + c_{n+1}^2,$$

$$N_3(\gamma) = r \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n (n+1-i) (c_{i-1} - b_i) (c_i - b_i) - \sum_{i=1}^n c_{i-1} c_i.$$



En posant  $e_i = 1/(n+1)$  si  $i = n+1$  et  $e_i = 0$  sinon, on peut écrire :

$$N_1(\gamma) = \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \frac{2n+1-i}{2} r - (n+1-i+e_i)p - q \right] i c_i.$$

Par ailleurs, on a  $N_2(\gamma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left[ (n+1-i)(i-j+1) - 1 \right] c_{j-1} c_i + c_{n+1}^2$ . Enfin, on a :

$$N_3(\gamma) = \sum_{i=1}^n \left[ r b_i + (c_{i-1} - b_i)(c_i - b_i) - c_{i-1} c_i \right] + \sum_{i=1}^n (n-i)(c_{i-1} - b_i)(c_i - b_i),$$

soit  $N_3(\gamma) = \sum_{i=1}^n b_i(r - c_{i-1} - c_i + b_i) + \sum_{i=1}^n (n-i)(c_{i-1} - b_i)(c_i - b_i)$ , d'où le résultat. ■

## 2.5.4 Récapitulation numérique.

Les propositions 2.55 et 2.57 se traduisent alors de la façon suivante :

**Proposition 2.64.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$  avec  $p \leq r$ . Si on a  $M(\gamma) > 0$  pour tout  $\gamma \in \overline{\mathbb{C}_{p,q}^n}$ , le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible, génériquement lisse, intersection complète et de dimension  $\Delta_{p,q,r}^n = (n+1)pq + (n+1)qr - \frac{n(n+1)}{2}pr = (n+1)[pq + qr - \frac{n}{2}pr]$ .*

**Proposition 2.65.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$  avec  $p \leq r$ .*

*i) La dimension du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est majorée par  $(n+1)qr - \min_{\gamma \in \mathbb{C}_{p,q}^n} N(\gamma)$ .*

*ii) Si on a  $N(\gamma) \geq 0$  pour tout  $\gamma \in \mathbb{C}_{p,q}^n$ , le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est de dimension  $(n+1)qr$  et le fermé  $C_1^n$  défini par  $u_0^n = 0$  est une composante ayant cette dimension.*

*iii) Si on note  $\gamma_0$  l'élément  $(p, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0)$  de  $\mathbb{C}_{p,q}^n$  et si on a de plus  $N(\gamma) > 0$  pour  $\gamma \neq \gamma_0$ , la composante  $C_1^n$  est la seule à posséder la dimension maximale  $(n+1)qr$ .*

Ici encore, les points *ii)* et *iii)* ne sont possibles que si on a  $q \leq nr/2$ . Rappelons par commodité les notations qui interviennent dans ces deux propositions.

Pour  $\gamma = (c_0, \dots, c_{n+1}; b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^{2n+2}$  on a posé :

$$M(\gamma) = \sum_{i=0}^n \left[ q - ip - \frac{n-i}{2} r \right] (n-i+1) c_i - \sum_{i=0}^n p c_i + \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1) c_{j-1} \right] (n-i+1) c_i \\ + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n c_j c_i + r \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n (n-i+1)(c_{i-1} - b_i)(c_i - b_i)$$

et :

$$N(\gamma) = \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \frac{2n+1-i}{2} r - (n+1-i+e_i)p - q \right] i c_i + \sum_{i=1}^n b_i(r - c_{i-1} - c_i + b_i) + c_{n+1}^2 \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left[ (n+1-i)(i-j+1) - 1 \right] c_{j-1} c_i + \sum_{i=1}^n (n-i)(c_{i-1} - b_i)(c_i - b_i).$$

où dans la dernière expression on a posé  $e_i = 1/(n+1)$  si  $i = n+1$  et  $e_i = 0$  sinon. De plus,  $\mathbb{C}_{p,q}^n$  désigne l'ensemble des éléments  $\gamma$  de  $\mathbb{N}^{2n+1}$  qui vérifient les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, c_i \geq 0 ; \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq b_i \leq \min(c_{i-1}, c_i) \\ \sum_{i=0}^{n+1} c_i = p ; \quad [(n+1)p - q] \leq \sum_{i=0}^n (n+1-i) c_i \end{array} \right.$$

la dernière d'entre elles étant équivalente à  $q \geq \sum_{i=0}^n i c_i$ . Enfin  $\overline{\mathbb{C}_{p,q}^n}$  désigne le sous-ensemble de  $\mathbb{C}_{p,q}^n$  formé des éléments qui vérifient en outre  $\sum_{i=0}^{n-1} c_i > b_n$ .

D'après la relation  $\sum_{i=0}^{n+1} c_i = p$ , l'une des variables  $(c_0, \dots, c_{n+1})$  est en réalité inutile. On remarque que l'expression de  $M(\gamma)$  ne contient pas la variable  $c_{n+1}$ , donc pour l'étude de l'irréductibilité nous utiliserons la relation  $\sum_{i=0}^n a_i \leq q$  sous la forme :

$$[(n+1)p - q] \leq \sum_{i=0}^n (n+1-i) c_i$$

qui ne la contient pas non plus. A contrario, si l'expression de  $N(\gamma)$  utilise en fait toutes les variables  $c_i$ , elle se sert de façon prépondérante des autres variables que  $c_0$ . Aussi pour étudier la dimension nous utiliserons la relation  $\sum_{i=0}^n a_i \leq q$  sous la forme  $\sum_{i=1}^{n+1} i c_i \geq q$ .

## 2.6 Fin de la démonstration

Nous achevons dans ce paragraphe l'étude numérique en montrant les théorèmes 1 et 2 généraux de l'introduction. Ils sont énoncés dans l'introduction dans le cas général. Comme pour tout triplet  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$  les schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  et  $\widehat{E}_{r,q,p}^n$  sont isomorphes, il suffit de montrer ces théorèmes dans le cas  $p \leq r$ . Rappelons que la conjecture  $(C^n)$  exprime que si on a :

$$(n+1)q \geq \text{Max} \left[ \frac{n(n+1)}{2} r + p, \frac{n(n+1)}{2} p + r \right].$$

le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible (cf. paragraphe 2.2.1). Dans le cas  $p \leq r$  cette conjecture dit que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible si on a  $(n+1)q \geq \frac{n(n+1)}{2} r + p$ . Remarquons également que si  $n \geq 1$ , la quantité  $\min[r + (2n-1)p, p + (2n-1)r]$  qui figure dans le théorème 1 général devient simplement  $r + (2n-1)p$  dans le cas  $p \leq r$ .

Dans le cas  $n = 0$  il n'y a pas de relation de commutation et le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^0$  est un espace affine de dimension  $(n+1)qr$ . Il est en particulier irréductible et sa dimension est connue pour tout triplet  $(p, q, r)$ , donc il n'y a alors rien à montrer.

Nous montrons dans ce paragraphe les deux théorèmes suivants, qui sont des reformulations de ceux de l'introduction :

**Théorème 2.66.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(r, p) \in \mathbb{N}^{*2}$  avec  $p \leq r$ .

i) Si  $r \geq \frac{2n+3}{n+1}p$ , la conjecture  $(C^n)$  est vraie : le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible dès que l'on a  $q \geq \frac{nr}{2} + \frac{p}{n+1}$ , c'est-à-dire  $(n+1)q \geq \frac{n(n+1)}{2}r + p$ .

ii) Si  $p \leq r < \frac{2n+3}{n+1}p$ , on obtient seulement une condition suffisante plus faible : le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible dès que l'on a  $2q \geq [r + (2n-1)p]$ .

De plus, dans chacun des cas où ce théorème affirme que le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible, on obtient également que celui-ci est génériquement lisse, intersection complète et de dimension  $\Delta_{p,q,r}^n = (n+1) [pq + qr - \frac{n}{2}pr]$ .

**Théorème 2.67.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$  avec  $p \leq r$ .

i) Si  $q \leq \min \left[ n(r-p), \frac{n}{2}r - \frac{p}{n+1} \right]$ , le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est de dimension  $(n+1)qr$  et le fermé  $C_1^n$  défini par  $u_0^n = 0$  est une composante atteignant cette dimension.

ii) Si de plus  $q < \min \left[ n(r-p), \frac{n}{2}r - \frac{p}{n+1} \right]$ , cette composante  $C_1^n$  est la seule à posséder la dimension  $(n+1)qr$ .

D'après le paragraphe 2.2.1, les conclusions du théorème 2.67 ne peuvent se produire que si on a  $2q \leq nr$ . Le théorème 2.66 entraîne comme corollaire le résultat suivant, concernant les petites valeurs de  $n$  :

**Proposition 2.68.** Pour  $n = 3$ , la conjecture  $(C^3)$  est vérifiée pour  $r \geq 9p/4$ , et pour  $p \leq q < 9p/4$  le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r} = \widehat{E}_{p,q,r}^3$  est irréductible dès que l'on a  $2q \geq 5p + r$ .

Pour  $n = 2$ , la conjecture  $(C^2)$  est vérifiée pour  $r \geq 7p/3$ , et pour  $p \leq q < 7p/3$  le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^2$  est irréductible dès que l'on a  $2q \geq 3p + r$ .

Pour  $n = 1$ , la conjecture  $(C^1)$  est toujours vraie, dans la mesure où pour  $p \leq r < 5p/2$  la condition suffisante  $2q \geq p + r$  coïncide encore avec la condition exprimée par la conjecture.

On peut noter que dans le cas  $n = 3$  l'un et l'autre des deux résultats exprimés ci-dessus améliorent ceux exprimés dans la Note [Gin].

Nous démontrons les théorèmes 2.66 et 2.67 dans les deux paragraphes qui suivent. De façon précise, nous montrons le théorème 2.66 au paragraphe 2.6.1 et le théorème 2.67 au paragraphe 2.6.2.

Nous montrons en fait le théorème 2.66 sous la forme suivante, qui lui est équivalente :

**Théorème 2.69.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$  avec  $r \geq p$ . Si on a :

$$q \geq \left[ \frac{nr}{2} + \frac{p}{n+1} \right] + \text{Max} \left[ 0, \frac{n-1}{2} \left( \frac{2n+3}{n+1} p - r \right) \right]$$

le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est irréductible, génériquement lisse, intersection complète de dimension  $\Delta_{p,q,r}^n$ .

Montrons ici que le théorème 2.69 entraîne le théorème 2.66 :

**Démonstration.** Si  $r \geq \frac{2n+3}{n+1}p$  on a  $\text{Max} \left[ 0, \frac{n-1}{2} \left( \frac{2n+3}{n+1}p - r \right) \right] = 0$ , donc les conclusions du théorème 2.69 s'appliquent dès que l'on a  $q \geq \frac{nr}{2} + \frac{p}{n+1}$ , c'est-à-dire  $(n+1)q \geq \frac{n(n+1)}{2}r + p$ , d'où le point *i*) du théorème 2.66.

Au contraire si on a  $p \leq r < \frac{2n+3}{n+1}p$ , les conclusions du théorème 2.69 ne s'appliquent que pour  $q \geq Q$  avec :

$$Q = \left[ \frac{nr}{2} + \frac{p}{n+1} \right] + \frac{n-1}{2} \left[ \frac{2n+3}{n+1}p - r \right] = \frac{r}{2} + \frac{2n^2+n-1}{2(n+1)}p = \frac{r}{2} + \frac{2n-1}{2}p,$$

c'est-à-dire  $2q \geq r + (2n-1)p$ , d'où le point *ii*). ■

### 2.6.1 Démonstration de l'irréductibilité.

Nous montrons dans ce paragraphe le théorème 2.69. Nous aurons besoin pour cela du lemme suivant :

**Lemme 2.70.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$  avec  $p \leq r$ . Pour tout  $\gamma \in \overline{\mathbb{C}_{p,q}^n}$  on a :

$$M(\gamma) > \sum_{i=0}^{n-1} \left[ q - \left( i + \frac{1}{n-i+1} \right) p - \left( \frac{n-i}{2} \right) r \right] (n-i+1) c_i.$$

**Démonstration.** Soit  $\gamma \in \overline{\mathbb{C}_{p,q}^n}$ . On utilise la valeur de  $M(\gamma)$  fournie par la proposition 2.61, qui s'écrit sous la forme  $M(\gamma) = A + B + C + D$  en posant :

$$A = \sum_{i=0}^n \left[ q - ip - \frac{n-i}{2}r \right] (n-i+1) c_i - \sum_{i=0}^n p c_i, \quad B = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1) c_{j-1} \right] (n-i+1) c_i,$$

$$C = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n c_j c_i \quad \text{et} \quad D = r \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n (n-i+1) (c_{i-1} - b_i) (c_i - b_i).$$

Dans chaque expression, on isole le terme d'indice  $n+1$  et l'on effectue des majorations grâce aux relations qui définissent  $\overline{\mathbb{C}_{p,q}^n}$ , en particulier les relations (2.11). On a tout d'abord :

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ q - \left( i + \frac{1}{n-i+1} \right) p - \frac{n-i}{2}r \right] (n-i+1) c_i + [q - (n+1)p] c_n.$$

Ensuite, on a  $c_i \geq 0$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On en déduit :

$$B = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} (i-j+1) c_{j-1} \right] (n-i+1) c_i + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j+1) c_{j-1} c_n \geq \sum_{j=1}^{n-1} (n-j+1) c_{j-1} c_n,$$

soit  $B \geq \sum_{i=0}^{n-2} (n-i) c_i c_n$ . De même, on obtient :

$$C = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n c_j c_i = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^{n-1} c_j c_i + \sum_{i=0}^n c_n c_i \geq \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 + \sum_{i=0}^n c_i c_n.$$

Si  $\gamma \in \overline{\mathbb{C}}_{p,q}^n$ , on a en outre la relation  $\sum_{i=0}^{n-1} c_i > 0$ , donc l'un au moins des  $c_i$  est non nul. On en déduit  $\sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 > 0$  et  $C > \sum_{i=0}^n c_i c_n$ , donc :

$$B + C > \sum_{i=0}^{n-2} (n-i) c_i c_n + \sum_{i=0}^n c_i c_n = \sum_{i=0}^n (n-i+1) c_i c_n - c_{n-1} c_n.$$

Avec la relation  $\sum_{i=0}^n (n-i+1) c_i \geq (n+1)p - q$ , on obtient  $B + C > [(n+1)p - q] c_n - c_{n-1} c_n$ , donc :

$$A + B + C > \sum_{i=0}^{n-1} \left[ q - \left( i + \frac{1}{n-i+1} \right) p - \frac{n-i}{2} r \right] (n-i+1) c_i - c_{n-1} c_n.$$

Enfin, on a :

$$D = \left[ r \sum_{i=1}^{n-1} b_i + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i+1) (c_{i-1} - b_i) (c_i - b_i) \right] + \left[ r b_n + (c_{n-1} - b_n) (c_n - b_n) \right]$$

Or pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  on a  $b_i \leq \min(c_i, c_{i-1})$ , donc :

$$D \geq r b_n + (c_{n-1} - b_n) (c_n - b_n) = c_{n-1} c_n + b_n [r - (c_{n-1} + c_n)] + b_n^2.$$

Enfin on a  $c_{n-1} + c_n \leq \sum_{i=0}^{n+1} c_i = p \leq r$ , donc  $[r - (c_{n-1} + c_n)] \geq 0$  et  $D \geq c_{n-1} c_n$ . On en déduit finalement :

$$M(\gamma) = A + B + C + D > \sum_{i=0}^{n-1} \left[ q - \left( i + \frac{1}{n-i+1} \right) p - \frac{n-i}{2} r \right] (n-i+1) c_i,$$

qui est le résultat annoncé. ■

Nous déduisons à présent du lemme 2.70 le théorème 2.69 :

**Démonstration.** D'après le théorème 2.64, pour montrer le théorème 2.69 il suffit de montrer que l'on a  $M(\gamma) > 0$  pour tout  $\gamma \in \overline{\mathbb{C}}_{p,q}^n$ . D'après ce qui précède, il suffit pour cela de montrer que l'on a :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left[ q - \left( i + \frac{1}{n-i+1} \right) p - \left( \frac{n-i}{2} \right) r \right] \geq 0,$$

puisque pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  on a  $c_i \geq 0$ . En d'autres termes, ces conclusions sont vérifiées dès que l'on a :

$$q \geq \text{Max}_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \left[ \left( i + \frac{1}{n-i+1} \right) p + \left( \frac{n-i}{2} \right) r \right].$$

Soit alors  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a :

$$\begin{aligned} \left( i + \frac{1}{n-i+1} \right) p + \left( \frac{n-i}{2} \right) r &= \left[ \frac{n}{2} r + \frac{1}{n+1} p \right] + \left[ ip + \frac{p}{n-i+1} - \frac{p}{n+1} \right] - \frac{i}{2} r \\ &= \left[ \frac{nr}{2} + \frac{p}{n+1} \right] + i \left[ p + \frac{p}{(n+1)(n-i+1)} - \frac{r}{2} \right]. \end{aligned}$$

Posons  $h_i = i \times \left[ p + \frac{p}{(n+1)(n-i+1)} - \frac{r}{2} \right]$  et  $h = \text{Max}_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} h_i$ . Le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}^n$  est donc irréductible dès que l'on a  $q \geq \left[ \frac{nr}{2} + \frac{p}{n+1} \right] + h$ .

On a  $h_0 = 0$  et  $h_{n-1} = (n-1) \left[ p + \frac{p}{(n+1) \times 2} - \frac{r}{2} \right] = \frac{n-1}{2} \left[ \frac{2n+3}{n+1} p - r \right]$ . Posons  $m = \text{Max}(0, h_{n-1})$ , il suffit pour conclure de montrer  $h = m$ . On a évidemment  $m \leq h$ . Réciproquement, soit  $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ . Si  $h_i \leq 0$ , on a  $h_i \leq m$ . Si au contraire on a  $h_i > 0$ , on a  $n+1-i \geq 2$ , donc :

$$0 \leq \frac{p}{(n+1)(n+1-i)} + p - \frac{r}{2} \leq \frac{p}{2(n+1)} + p - \frac{r}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2n+3}{n+1} p - r \right],$$

donc  $0 \leq h_i \leq \frac{n-1}{2} \left[ \frac{2n+3}{n+1} p - r \right] = h_{n-1} \leq m$ . On a donc  $h = m$  et le résultat est montré. ■

## 2.6.2 Étude de la dimension.

Nous montrons dans ce paragraphe le théorème 2.67. Pour cela, nous commençons par déduire de la proposition 2.63 le lemme suivant :

**Lemme 2.71.** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$  avec  $p \leq r$ . On pose toujours  $\epsilon_i = 1/(n+1)$  si  $i = n+1$  et  $\epsilon_i = 0$  sinon. Pour tout  $\gamma \in \mathbb{C}_{p,q}^n$  on a :*

$$N(\gamma) \geq \sum_{i=1}^{n+1} \left[ \frac{2n+1-i}{2} r - (n+1-i+\epsilon_i) p - q \right] i c_i.$$

**Démonstration.** Ce lemme découle immédiatement de l'expression de  $N(\gamma)$  donnée par la proposition 2.63, compte-tenu des relations (2.11).

D'une part, pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$ , on a  $n+1-i \geq 1$  et  $(i-j+1) \geq 1$ , ainsi que  $c_{j-1} \geq 0$  et  $c_i \geq 0$ , donc  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left[ (n+1-i)(i-j+1) - 1 \right] c_{j-1} c_i \geq 0$ . D'autre part,

pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $b_i \leq \min(c_{i-1}, c_i)$ , donc  $\sum_{i=1}^n (n-i)(c_{i-1} - b_i)(c_i - b_i) \geq 0$ . Enfin, on a  $c_{i-1} + c_i \leq \sum_{j=0}^{n+1} c_j = p \leq r$  et  $b_i \geq 0$ , donc  $\sum_{i=1}^n b_i(r - c_i - c_{i-1} + b_i) \geq 0$ . ■

Nous montrons ensuite que le lemme 2.71 entraîne le théorème 2.67 :

**Démonstration.** D'après le théorème 2.65, pour que les conclusions du point *i*) du théorème 2.67 soient vérifiées il suffit d'avoir  $N(\gamma) \geq 0$  pour tout  $\gamma \in \mathbb{C}_{p,q}^n$ . Pour celles du point *ii*) il suffit d'avoir en outre  $N(\gamma) > 0$  pour  $\gamma \neq \gamma_0$ , en posant  $\gamma_0 = (p, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0)$ . Or pour tout  $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  on a  $c_i \geq 0$ , donc la première condition est vérifiée dès que l'on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \left[ \frac{2n+1-i}{2} r - (n+1-i+e_i)p - q \right] \geq 0,$$

soit  $q \leq h_i$  en posant  $h_i = \left( \frac{2n+1-i}{2} r - (n+1-i+e_i)p \right)$  pour  $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . Pour obtenir les conclusions du point *i*) il suffit donc d'avoir  $q \leq h$  en posant  $h = \min_{i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} h_i$ .

De plus, si  $\gamma \neq \gamma_0$ , l'un des  $c_i$  pour  $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  est nécessairement non nul. En effet, si  $c_1 = \dots = c_{n+1} = 0$ , la relation  $\sum_{i=0}^{n+1} c_i = p$  donne  $c_0 = p$  et à cause des relations  $b_i \leq \min(c_{i-1}, c_i)$  on obtient  $b_1 = \dots = b_n = 0$ , donc  $\gamma = \gamma_0$ . Donc pour obtenir les conclusions du point *ii*) il suffit d'avoir :

$$\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \left[ \frac{2n+1-i}{2} r - (n+1-i+e_i)p - q \right] > 0,$$

c'est-à-dire  $q < h$ .

Posons alors  $m = \min \left[ n(r-p), \frac{n}{2} r - p \right]$ . Il suffit de montrer  $m = h$  pour conclure dans les deux cas. On a  $h_1 = nr - np$  et  $h_{n+1} = \frac{nr}{2} - p$ , donc  $h \leq m$ . Réciproquement pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a  $e_i = 0$  donc on a :

$$h_i = \frac{2n+1-i}{2} r - (n+1-i)p = \frac{nr}{2} + (n+1-i) \left[ \frac{r}{2} - p \right].$$

Si  $r \leq 2p$ , on a  $i \geq 1$ , donc  $h_i \geq h_1 = \frac{nr}{2} + n \left[ \frac{r}{2} - p \right] = nr - np$ . Au contraire, si on a  $r > 2p$ , on a  $i < n+1$ , donc  $h_i > \frac{nr}{2} > \frac{nr}{2} - \frac{p}{n+1} = h_{n+1}$ . On a donc dans tous les cas  $h_i \geq m$ , donc  $h = m$ . ■

## Chapitre 3

# Les courbes à cohomologie semi-naturelle.

DANS CE CHAPITRE, NOUS ÉTUDIONS de façon générale les courbes à cohomologie semi-naturelle. Notre objectif principal étant l'étude de la question de Sernesi–Walter, nous nous attachons tout particulièrement à établir des conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'une courbe soit à cohomologie semi-naturelle, puis pour qu'une telle courbe soit lisse irréductible et pour qu'elle soit ou non obstruée. Pour la même raison, nous nous concentrons essentiellement ici sur les courbes dont le module de Rao est de largeur au moins 3, qui seules peuvent donner des courbes obstruées.

À l'opposé, nous ne traitons pas du tout le cas des courbes ACM, qui est à la fois très différent et fort bien connu (cf. par exemple [Ell]). Les cas des courbes à cohomologie semi-naturelle dont le module de Rao est de largeur 1 ou 2 sont également connus : ils ont été étudiés et décrits par G. Bolondi et J.-C. Migliore dans [BM-1] et [BM-2] respectivement. Les résultats que ces auteurs établissent diffèrent assez nettement de ceux que l'on obtient dans les largeurs plus grandes.

Nous verrons par ailleurs que l'étude des largeurs supérieures ou égales à trois se scinde elle-même encore de façon naturelle en deux cas relativement différents, celui des modules de largeur exactement 3 se distinguant des autres. En revanche, ces derniers possèdent tous des caractéristiques identiques.

Les courbes à cohomologie semi-naturelle dont le module de Rao est de largeur au moins trois ont également été déjà étudiées. M. Martin-Deschamps et D. Perrin envisagent le cas particulier de la largeur trois dans [MDP-2]. De façon plus générale, ces courbes ont été considérées en toutes largeurs par G. Bolondi et J.-C. Migliore [BM-2] et par G. Fløystad [Flø]. Notre point de vue diffère assez nettement de celui du dernier auteur, qui se concentre surtout sur la postulation et la spécialité de ces courbes. Nous étudions ici au contraire leurs fonction et module de Rao, à l'instar de [MDP-2] et [BM-2]. Nous nous distinguons également des seconds, qui s'intéressent essentiellement au module de Rao ou à sa résolution d'un point de vue numérique. Nous nous attachons ici à considérer aussi le point de vue algébrique en prenant en compte les flèches qui définissent la structure du module ainsi que celles qui interviennent dans la résolution. Nous nous rapprochons en cela de [MDP-2], où l'on trouve le contre-exemple à l'assertion (SW) sans restriction sur la lissité de la courbe.



Nous utiliserons par ailleurs les résultats de [MDP-1], où est détaillé le calcul des courbes minimales, ainsi que ceux de l'article [MDP-3], qui étudie sous quelles conditions ces courbes sont lisses irréductibles.

Malgré les différences de point de vue, nos résultats recourent cependant les précédentes études. Plutôt que de regrouper tout d'abord les résultats déjà connus pour les compléter ensuite, nous adoptons ici un plan plus global, ordonné autour des propriétés successives que l'on étudie (la cohomologie des courbes, la lissité, l'obstruction) et des invariants que l'on considère (le degré et le genre, la cohomologie, le module de Rao, les résolutions...). Ce chapitre établit donc à la fois une synthèse des résultats connus sur les courbes à cohomologie semi-naturelle et un approfondissement de ceux-ci par des résultats nouveaux. Nous signalons les résultats précédemment établis au fur et à mesure qu'ils apparaissent.

L'approfondissement que nous apportons consiste d'une part à adopter le point de vue algébrique en décrivant la structure des modules de Rao des courbes à cohomologie semi-naturelle, et d'autre part à prolonger l'étude de l'obstruction éventuelle de ces courbes entamée dans [MDP-2].

À chaque fois, ceci se ramène à étudier effectivement l'étape du bas, du moins dans le cas particulier des courbes à cohomologie semi-naturelle. C'est clair en ce qui concerne le premier point, et c'est également le cas du second à cause de la proposition suivante ([MDP-2], Proposition IV.3.2) :

**Proposition 3.1. (M. Martin-Deschamps et D. Perrin)**

*Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle de degré et genre  $g$  et dont la cohomologie est donnée par  $(\gamma, \rho)$ . Alors l'immersion de  $H_{\gamma, \rho}$  dans  $H_{d, g}$  est ouverte.*

Ainsi, il n'y a pas d'étape du haut concernant les courbes à cohomologie semi-naturelle, et il est équivalent d'étudier les schémas  $H_{\gamma, \rho}$  ou  $H_{d, g}$  au voisinage d'une telle courbe. De plus d'après [MDP-1] l'étape du milieu ne pose pas de problème car la flèche  $\widehat{\Phi} : \widehat{H}_{\gamma, \rho} \rightarrow \widehat{E}_\rho$  est lisse irréductible. L'obstruction de la courbe  $C$  dans le schéma  $H_{d, g}$  est alors équivalente à celle de son module de Rao  $M$  dans le schéma  $\widehat{E}_\rho$ , ce qui ramène exclusivement à un problème de l'étape du bas.

L'un de nos objectifs consiste à généraliser cette méthode en établissant d'autres résultats de ce type, permettant de lire directement sur le module de Rao une propriété de la courbe minimale. Nous cherchons ainsi à traduire sur ce module sont trois types d'informations : le fait que la courbe minimale associée est à cohomologie semi-naturelle, le fait qu'elle est ensuite lisse irréductible, et qu'elle est ou non obstruée. De façon concrète, nous cherchons à établir des critères aussi explicites que possible portant sur la structure du module de Rao pour que la courbe minimale vérifie l'une de ces propriétés : ces critères peuvent correspondre à chaque fois aussi bien à des conditions nécessaires que suffisantes.

Cette démarche revient à étudier la relation établie par la flèche  $\Phi$  qui à une courbe associe son module de Rao, où plus exactement par la flèche  $\widehat{\Phi}$ , du moins dans le cas particulier où les courbes en question sont à cohomologie semi-naturelle. Dans le cas des modules de largeur au moins 3, ce lien est renforcé par le fait que la courbe est nécessairement une courbe minimale d'après le résultat de Lazarsfeld-Rao (cf. théorème 1.10). Le module de Rao détermine alors la courbe à déformation près, ce qui conforte notre stratégie visant à exprimer en fonction de lui les conditions portant sur la courbe. Les techniques développées

dans [MDP-1] permettent en quelque sorte de «remonter» les flèches  $\Phi$  et  $\widehat{\Phi}$ , en fournissant des résolutions explicites de la courbe à partir de son module de Rao. En largeur supérieure ou égale à 4, le module détermine même la courbe de façon unique et la flèche  $\widehat{\Phi}' : \widehat{H}'_{\gamma, \rho} \rightarrow \widehat{E}_\rho$  devient un isomorphisme. Le schéma  $\widehat{H}_{\gamma, \rho}$  se réalise alors comme un fibré au-dessus de  $\widehat{E}_\rho$  dont les fibres sont isomorphes à  $\mathbf{k}^*$ , donc de dimension un.

Un premier objectif consiste à déterminer quels modules sont susceptibles d'être le module de Rao d'une courbe à cohomologie semi-naturelle, tant du point de vue des résolutions que de celui de leur structure de module. Ensuite, parmi les modules dont la courbe minimale est effectivement à cohomologie semi-naturelle nous étudions lesquels fournissent des courbes lisses irréductibles et lesquels fournissent des courbes obstruées.

Nous rappelons et établissons dans ce chapitre un certain nombre de conditions nécessaires concernant ces questions, et comparativement peu de conditions suffisantes. Un travail que nous n'effectuons pas ici et qui reste à entreprendre consisterait à rapprocher les unes des autres, c'est-à-dire à caractériser exactement les modules qui correspondent aux propriétés considérées. Nous signalons ces questions à chaque fois qu'elles se posent dans la suite.

### 3.1 La caractéristique d'Euler et la cohomologie.

Soit  $C$  une courbe fixée. On note  $\rho$  sa fonction de Rao,  $M$  son module de Rao, et  $l$  la largeur de  $M$  ou de  $\rho$ . On rappelle que l'on note  $r_a$  et  $r_o$  les entiers  $\alpha(\rho)$  et  $\omega(\rho)$ , c'est-à-dire  $r_a = \inf \{n \in \mathbb{Z} \mid h^1 \mathcal{J}_C(n) \neq 0\}$  et  $r_o = \sup \{n \in \mathbb{Z} \mid h^1 \mathcal{J}_C(n) \neq 0\}$ , et que l'on note  $e$  et  $s_o$  les entiers  $e = \sup \{n \in \mathbb{Z} \mid h^2 \mathcal{J}_C(n) \neq 0\}$  et  $s_o = \inf \{n \in \mathbb{Z} \mid h^0 \mathcal{J}_C(n) \neq 0\}$ . Si  $C$  est ACM on a  $r_a = +\infty$  et  $r_o = -\infty$  et sinon on a  $r_a \leq r_o$ .

Une courbe  $C$  est de rang maximum si et seulement si elle vérifie  $r_o < s_o$ , et de co-rang maximum si et seulement si elle vérifie  $e < r_a$ . Une courbe qui vérifie ces deux propriétés à la fois et qui n'est pas ACM est automatiquement une courbe à cohomologie semi-naturelle, c'est-à-dire telle que les trois intervalles  $] -\infty, e[$ ,  $[[r_a, r_o]$  et  $[[s_o, +\infty[$  sont disjoints. Ce n'est plus nécessairement vrai si la courbe est ACM, mais ce cas est connu par ailleurs et ne nous intéresse pas ici. À l'exception du premier chapitre, nous supposons constamment que les courbes considérées ne sont pas ACM.

Nous nous intéressons essentiellement aux courbes qui vérifient  $l \geq 3$ . D'après le théorème de Lazarsfeld-Rao (cf. théorème 1.10) ce sont automatiquement des courbes minimales, c'est-à-dire telles que l'entier  $r_a$  est égal au décalage  $h$ . Nous utiliserons donc indifféremment l'une ou l'autre notation pour une telle courbe. Nous adoptons enfin la notation suivante :

**Définition 3.2.** Soit  $C$  une courbe qui n'est pas ACM,  $\rho$  sa fonction de Rao et  $\tilde{\rho}$  la fonction normalisée associée. On note  $p, q, r$  et  $s$  les entiers  $\tilde{\rho}(i) = \rho(r_a + i)$  pour  $i = 0, 1, 2$  et  $3$ . et de façon symétrique  $p', q', r'$  et  $s'$  les entiers  $\rho'(i) = \rho(r_o - i)$  pour  $i = 0, 1, 2$  et  $3$ .

Certains de ces entiers sont éventuellement nuls, par exemple si la largeur est inférieure ou égale à 5. De plus, certaines de ces notations sont redondantes lorsque la largeur est inférieure ou égale à 10.

Dans ce paragraphe, nous étudions la relation entre d'une part le degré  $d$  et le genre  $g$  d'une courbe à cohomologie semi-naturelle et d'autre part sa cohomologie  $(\gamma, \rho)$ . Dans un

premier temps, nous montrons que le degré  $d$  et le genre  $g$  d'une telle courbe déterminent entièrement les fonctions  $\gamma$  et  $\rho$ , et nous établissons des conditions nécessaires pour qu'un couple  $(d, g)$  puisse correspondre à des courbes à cohomologie semi-naturelle non ACM.

Dans un second temps, nous nous penchons sur la réciproque. La cohomologie  $(\gamma, \rho)$  détermine évidemment dans tous les cas le degré et le genre; nous montrons ici que pour une courbe à cohomologie semi-naturelle, il suffit en fait de connaître la fonction  $\rho$  dès lors qu'elle est de largeur au moins trois, ou même simplement de connaître trois des valeurs qu'elle prend pour retrouver  $d$  et  $g$ .

### 3.1.1 Le degré et le genre.

Supposons  $C$  de degré  $d$  et genre  $g$ . D'après la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ , la caractéristique d'Euler du faisceau  $\mathcal{J}_C(n)$  est donnée pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  par :

$$\chi \mathcal{J}_C(n) = \chi \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) - \chi \mathcal{O}_C(n) = \binom{n+3}{3} - (nd + 1 - g),$$

soit  $h^0 \mathcal{J}_C(n) - h^1 \mathcal{J}_C(n) + h^2 \mathcal{J}_C(n) - h^3 \mathcal{J}_C(n) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} - nd + g - 1$ . Posons la définition suivante :

**Définition 3.3.** Soit  $(d, g) \in \mathbb{Z}^2$ . On note  $P_{d,g}$  le polynôme :

$$P_{d,g} = \frac{(X+3)(X+2)(X+1)}{6} - Xd + g - 1.$$

La quantité  $h^3 \mathcal{J}_C(n)$  ne dépend pas de  $C$  : elle vaut  $-\binom{n+3}{3} = \binom{-n-1}{3}$  pour  $n \leq -4$ , et 0 pour  $n \geq -3$ . La fonction qui à  $n \in \mathbb{Z}$  associe  $h^0 \mathcal{J}_C(n) - h^1 \mathcal{J}_C(n) + h^2 \mathcal{J}_C(n)$  est donc entièrement déterminée par la donnée de  $d$  et  $g$ ; elle coïncide avec un polynôme du premier degré pour  $n \leq -4$ , et avec un du troisième pour  $n \geq -3$ .

Rappelons la propriété suivante, démontrée par exemple dans [Flø] (lemme 1.3) :

**Proposition 3.4.** Pour toute courbe  $C$  on a  $e \geq -2$ , et si  $e = -2$  la courbe réduite associée est une réunion de droites disjointes.

On en déduit qu'une courbe à cohomologie semi-naturelle vérifie toujours  $r_a \geq -1$ , et que si elle est lisse irréductible on a  $e \geq -1$  sauf si c'est une droite. Par ailleurs une courbe lisse irréductible vérifie toujours  $r_a \geq 1$ . Enfin, d'après [HH] une courbe lisse irréductible qui est obstruée est nécessairement spéciale, c'est-à-dire vérifie  $h^1 \mathcal{O}_C(1) = h^2 \mathcal{J}_C(1) > 0$ ; ceci entraîne  $e \geq 1$  et  $r_a \geq 2$ .

Les résultats suivants s'obtiennent de façon immédiate :

**Proposition 3.5.** Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle de degré  $d$  et genre  $g$  qui n'est pas ACM.

i) L'intervalle  $[[r_a, r_o]]$  est non vide et on a  $-2 \leq \epsilon < r_a \leq r_o < s_0$ . La valeur de  $P_{d,g}(n)$  coïncide alors avec  $h^0 \mathcal{J}_C(n)$  pour  $n \in [[s_0, +\infty[[$ , avec  $-h^1 \mathcal{J}_C(n)$  pour  $n \in [[r_a, r_o]]$ , avec  $h^2 \mathcal{J}_C(n)$  pour  $n \in [[-3, \epsilon]]$  et avec  $h^2 \mathcal{J}_C(n) - h^3 \mathcal{J}_C(n) = h^2 \mathcal{J}_C(n) - \binom{-n-1}{3}$  pour  $n \in ]-\infty, -3]$ .

ii) De plus, les entiers  $r_a, r_o, \epsilon$  et  $s_0$  sont déterminés de façon unique par le polynôme  $P_{d,g}$ , c'est-à-dire par  $d$  et  $g$ . Le polynôme  $P_{d,g}$  fixe ainsi toutes les valeurs de  $h^i \mathcal{J}_C(n)$  pour  $i \in [0, 3]$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire toute la cohomologie de  $C$ , qui revient en définitive aux deux fonctions  $\gamma$  et  $\rho$ . En particulier, la fonction  $\rho$  vérifie les relations  $\rho(n) = \max(0, -P_{d,g}(n))$  si  $n \geq -3$  et  $\rho(n) = 0$  sinon, donc est déterminée explicitement par  $\rho = \max(0, -P_{d,g}) \times \mathbb{1}_{[-3, +\infty[}$ .

iii) Enfin, on a  $P_{d,g}(-2) = 2d + g - 1 = h^2 \mathcal{J}_C(-2) > 0$ , donc  $g > 1 - 2d$ .

Le fait que la courbe soit ou non ACM se lit directement sur  $d$  et  $g$ : c'est le cas si et seulement si la valeur de  $P_{d,g}(n)$  reste positive ou nulle pour tout  $n \in [-3, +\infty[[$ . Dans le cas contraire, d'après la proposition ci-dessus le couple  $(d, g)$  détermine complètement une unique cohomologie  $(\gamma, \rho)$  pouvant être celle d'une courbe à cohomologie semi-naturelle de degré  $d$  et genre  $g$ . Réciproquement, toute courbe ayant cette cohomologie est évidemment à cohomologie semi-naturelle, donc on obtient le corollaire suivant :

**Proposition 3.6.** *Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  et soit  $g > 1 - 2d$ . On suppose que le polynôme  $P_{d,g}$  prend une valeur strictement négative pour au moins un entier  $n \geq -3$ . Le sous-schéma de  $H_{d,g}$  formé des courbes à cohomologie semi-naturelle forme exactement un sous-schéma  $H_{\gamma,\rho}$  à cohomologie constante de  $H_{d,g}$ . C'est un sous-schéma ouvert, éventuellement vide, et les fonctions  $\gamma$  et  $\rho$  correspondantes se déduisent explicitement de  $d$  et  $g$ .*

Il est évident par semi-continuité que ce schéma  $H_{\gamma,\rho}$  forme un ouvert topologique de  $H_{d,g}$ , car toute généralisation d'une courbe à cohomologie semi-naturelle reste à cohomologie semi-naturelle, donc dans le même schéma  $H_{\gamma,\rho}$ . En particulier cet ouvert, qui n'est pas nécessairement irréductible, ne rencontre pas les composantes irréductibles de  $H_{d,g}$  dont le point générique n'est pas dans  $H_{\gamma,\rho}$ . La proposition 3.1 prouve de plus que ce schéma  $H_{\gamma,\rho}$  forme également un ouvert schématique de  $H_{d,g}$ , encore une fois éventuellement vide.

La principale question ouverte que pose la proposition 3.6 est évidemment la suivante, à laquelle nous ne répondons pas ici :

**Question 3.7.** *Pour quels couples d'entiers  $(d, g)$  vérifiant les hypothèses de la proposition 3.6 le schéma  $H_{\gamma,\rho}$  associé est-il non vide? En d'autres termes, pour quels couples d'entiers  $(d, g)$  existe-t-il effectivement des courbes à cohomologie semi-naturelle de degré  $d$  et genre  $g$ ?*

Un corollaire immédiat la proposition 3.5 est la proposition suivante :

**Proposition 3.8.** *Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle de degré  $d$  et genre  $g$  et qui n'est pas ACM.*

i) *La fonction  $\tilde{P}_{d,g}$  définie par  $P_{d,g}$  sur  $\mathbb{Z}$  est strictement positive sur  $[[s_0, +\infty[[$  ainsi que sur  $[-3, \epsilon]]$ , et strictement négative sur  $[[r_a, r_o]]$ , ainsi que pour  $n \ll 0$ . Le polynôme de degré trois  $P_{d,g}$  admet donc trois racines réelles distinctes  $x_1 < x_2 < x_3$ , qui vérifient les inégalités  $x_1 < -3$ ,  $\epsilon < x_2 < r_a$  et  $r_o < x_3 < s_0$ . soit :*

$$(3.1) \quad x_1 < -3 < -2 \leq \epsilon < x_2 < r_a \leq r_o = r_a + l - 1 < x_3 < s_0.$$

ii) En particulier, l'indice de spécialité  $e$  est égal soit à  $r_a - 1$  soit à  $r_a - 2$ , et on a  $e = r_a - 2$  si et seulement si  $x_2 = r_a - 1$ , c'est-à-dire si  $h^2 \mathcal{J}_C(r_a - 1) = 0$ .

De même, l'entier  $s_0$  vaut soit  $r_o + 1$  soit  $r_o + 2$ , et on a  $s_0 = r_o + 2$  si et seulement si  $x_3 = r_o + 1$ , c'est-à-dire si  $h^0 \mathcal{J}_C(r_o + 1) = 0$ .

iii) Enfin la fonction  $\rho$ , qui coïncide avec  $-P_{d,g}$  sur  $[[r_a, r_o]]$  et est nulle partout ailleurs, est une fonction connexe, et concave sur  $[[r_a, r_o]]$ . On a ainsi  $\rho(n) > 0$  pour tout  $n \in [[r_a, r_o]]$ .

La fonction  $\rho$  étant connexe, il est équivalent de parler de son diamètre ou de sa largeur, et nous confondrons ces deux notions dans la suite. On peut améliorer un peu la relation (3.1):

**Proposition 3.9.** *Sous les hypothèses de la proposition 3.8 on a  $x_1 < -5$ , et  $x_1 < -6$  sauf si  $d = 2$  et  $g \in \{-1, -2\}$ .*

**Démonstration.** On a  $P_{d,g}(-5) = -4 + 5d + g - 1 = (2d + g - 1) + (3d - 4)$  et  $2d + g - 1 > 0$ , donc  $P_{d,g}(-5) > 3d - 4$ . La courbe  $C$  n'étant pas ACM, on a  $d \geq 2$ , donc  $P_{d,g}(-5) > 0$  et  $x_1 < -5$ .

De plus, on a  $P_{d,g}(-6) = -10 + 6d + g - 1 = (2d + g - 1) + (4d - 10)$ . Si  $x_1 \geq -6$  on a  $P_{d,g}(-6) \leq 0$ , donc  $4d \leq 10$ , donc  $d = 2$ . On a alors  $P_{d,g}(-6) = g + 1$ , donc  $g \leq -1$ . Par ailleurs on a  $g > 1 - 2d = -3$ , donc  $g = -1$  ou  $-2$ . ■

Le polynôme  $P_{d,g}$  admet trois racines réelles distinctes si et seulement si son discriminant  $\Delta$  est strictement positif. Il est égal à celui du polynôme  $Q$  défini par :

$$Q = P_{d,g}(X - 2) = \frac{(X - 1)(X + 1)X}{6} - (X - 2)d + g - 1 = \frac{X^3}{6} - \left(d + \frac{1}{6}\right)X + (2d + g - 1),$$

ou encore à celui du polynôme  $6 \times Q$ . Posons  $p = -(6d + 1)$  et  $q = 6(2d + g - 1)$ , on a :

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2 = 4(6d + 1)^3 - 27 \times 6^2(2d + g - 1)^2.$$

La condition  $\Delta > 0$  donne alors  $(2d + g - 1)^2 < (6d + 1)^3/3^5$ . Si  $2d + 1 - g > 0$ , comme c'est le cas lorsque le polynôme  $P_{d,g}$  correspond à des courbes à cohomologie semi-naturelle, ceci équivaut à  $2d + g - 1 < \frac{1}{3} \left[2d + \frac{1}{3}\right]^{3/2}$ . On obtient la proposition suivante :

**Proposition 3.10.** *Soit  $(d, g) \in \mathbb{Z}^2$  avec  $g > 1 - 2d$ . Le polynôme  $P_{d,g}$  admet 3 racines réelles si et seulement si on a  $g \leq 1 - 2d + \frac{1}{3} \left[2d + \frac{1}{3}\right]^{3/2}$ , et celles-ci sont distinctes si et seulement si l'inégalité est stricte.*

On peut améliorer la majoration précédente dans le cas précisément des polynômes associés à des courbes à cohomologie semi-naturelle :

**Proposition 3.11.** *Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle de degré  $d$  et genre  $g$ , et dont le module de Rao est de largeur  $l > 0$ , donc qui n'est pas ACM. Alors on a :*

$$g \leq 1 - 2d + \frac{1}{3} \left[ \left(2d + \frac{1}{3}\right)^3 - \frac{\alpha}{4 \times 27} \right]^{1/2}$$

avec  $\alpha = 9(l^2 + 2l - 3)^2 + 1$ . Si  $C$  est lisse irréductible, on peut remplacer  $\alpha$  par  $25(l^2 + 4l - 5) + 1$ , et si de plus elle est obstruée on peut le remplacer par  $36(l^2 + 5l - 6) + 1$ .

**Démonstration.** Soit  $\beta \geq 0$ . D'après le calcul de  $\Delta$ , la relation  $\Delta \geq \beta$  est équivalente à  $27 \times 6^2(2d+g-1)^2 \leq 4(6d+1)^3 - \beta$ , soit  $g \leq 1 - 2d + \frac{1}{3} \left[ (2d + \frac{1}{3})^3 - \frac{\beta}{4 \times 27} \right]^{1/2}$ . Il suffit donc à chaque fois pour conclure de montrer  $\Delta \geq \alpha$ . D'après la relation (3.1) et la proposition 3.9, on a  $x_1 < -5 < -2 \leq e < x_2 < r_a \leq r_o = r_a + l - 1 < x_3 < s_0$ . On a donc  $x_2 - x_1 > 3$ ,  $x_3 - x_2 > l - 1$  et  $x_3 - x_1 > l + 3$ . Or le discriminant  $\Delta$  est égal par définition à  $\prod_{j>i} (x_j - x_i)^2$ , donc  $\Delta > 9(l-1)^2(l+3)^2$ . Comme  $\Delta$  est un entier, on obtient  $\Delta \geq 9(l^2 + 2l - 3)^2 + 1$ .

Si  $C$  est lisse irréductible, on a  $r_a \geq 1$  et  $e \geq -1$ . On a de plus  $g \geq 0$ , donc  $x_1 < -6$  d'après la proposition 3.9. On obtient les relations  $x_2 - x_1 > 5$  et  $x_3 - x_1 > l + 5$ , qui donnent  $\Delta > 25(l-1)^2(l+5)^2$ , soit  $\Delta \geq 25(l^2 + 4l - 5)^2 + 1$  puisque  $\Delta$  est un entier.

Si de plus  $C$  est obstruée, on a  $e \geq 2$ , donc  $x_2 - x_1 > 6$  et  $x_3 - x_1 > l + 6$ . On obtient  $\Delta > 36(l-1)^2(l+6)^2$ , soit  $\Delta \geq 36(l^2 + 5l - 6)^2 + 1$ . ■

### 3.1.2 Différences successives.

Nous étudions à présent de façon réciproque à ce qui précède comment obtenir  $d$  et  $g$  à partir des fonctions  $\gamma$  et  $\rho$ . Nous montrons que pour une courbe à cohomologie semi-naturelle, lorsque la fonction de Rao est de largeur au moins trois, la connaissance de celle-ci ou même seulement des trois premières valeurs non nulles qu'elle prend suffit pour retrouver  $d$  et  $g$ .

Tout d'abord, il est clair que si on connaît un entier  $k$  ainsi que les valeurs de  $P_{d,g}(k)$ ,  $P_{d,g}(k+1)$  et  $P_{d,g}(k+2)$ , on peut retrouver le polynôme  $P_{d,g}$ , sachant qu'il est de degré 3, par exemple grâce à la formule d'interpolation de Lagrange. La proposition ci-dessous, qui résulte d'un calcul immédiat, permet de faire la même chose sans connaître la valeur de  $k$ :

**Proposition 3.12.** Soit  $(d, g) \in \mathbb{Z}^2$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  définie pour  $n \in \mathbb{Z}$  par  $u_n = P_{d,g}(n)$  vérifie les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \partial P_{d,g}(n) = u_n - u_{n-1} = \binom{n+2}{2} - d. \\ ii) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \partial^2 P_{d,g}(n) = u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2} = n + 1. \\ iii) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \partial^3 P_{d,g}(n) = u_n - 3u_{n-1} + 3u_{n-2} - u_{n-3} = 1. \\ iv) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \partial^4 P_{d,g}(n) = u_n - 4u_{n-1} + 6u_{n-2} - 4u_{n-3} + u_{n-4} = 0. \end{array} \right.$$

On note que chacune des relations *ii*), *iii*) et *iv*) établit sur le polynôme  $P_{d,g}$  une condition strictement plus faible que la précédente. Ces relations permettent de retrouver le polynôme  $P_{d,g}$  simplement à partir de certaines des valeurs qu'il prend. Ainsi, à partir de 3 (respectivement 4) valeurs consécutives, la propriété *iii*) (respectivement *iv*)) permet de calculer par récurrence toutes les autres valeurs prises successivement par la suite  $(u_n)$  sans avoir à expliciter celles de  $d$  ou  $g$ .

D'autre part, fixons  $k \in \mathbb{Z}$ , et posons  $p_i = P_{d,g}(k+i)$  pour  $i \in \{0, 1, 2\}$ . D'après les relations *ii*) et *i*), on a  $p_2 - 2p_1 + p_0 = k + 3$  et  $p_1 - p_0 = \binom{k+3}{3} - d$ , et on a aussi  $p_0 = P_{d,g}(k) = \binom{k+3}{3} - kd + g - 1$ . Le système formé par ces trois équations étant inversible, on peut formuler la proposition suivante:

**Proposition 3.13.** Soit  $(p_0, p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^3$ . Il existe un unique triplet  $(d, g, k) \in \mathbb{Z}^3$  tel que l'on ait  $p_0 = P_{d,g}(k)$ ,  $p_1 = P_{d,g}(k+1)$  et  $p_2 = P_{d,g}(k+2)$ . Ce triplet est défini par les relations  $k = p_2 - 2p_1 + p_0 - 3$ ,  $d = \binom{k+3}{2} + p_0 - p_1$  et  $g = -\binom{k+3}{3} + p_0 + kd + 1$ , soit encore  $g = \frac{(k+3)(k+2)(2k-1)}{6} + k(p_1 - p_0) - p_0 + 1$ .

Cela dit, si l'on ne cherche pas à calculer  $d$  et  $g$  mais seulement le polynôme  $P_{d,g}$  ou ses valeurs à partir de  $p_0$ ,  $p_1$  et  $p_2$ , la méthode la plus rapide consiste à utiliser conjointement la relation  $k = p_2 - 2p_1 + p_0 - 3$  et la formule d'interpolation de Lagrange, qui donne :

$$P_{d,g} = \frac{(X-k-1)(X-k-2)}{2} p_0 - (X-k)(X-k-2) p_1 + \frac{(X-k)(X-k-1)}{2} p_2.$$

La fonction de Rao coïncide avec  $-P_{d,g}$  sur l'intervalle  $[[r_a, r_o]] = [[h, h+l-1]]$ . Si elle est de largeur supérieure ou égale à trois, on peut appliquer ce qui précède aux valeurs qu'elle prend : on peut alors retrouver toute la cohomologie de la courbe à partir de trois valeurs consécutives non nulles, qui déterminent en particulier toutes les autres ainsi que le décalage  $r_a$ . Comme on utilise seulement les valeurs prises par la fonction  $\rho$  et pas les entiers en lesquels elles sont atteintes, il est équivalent de se donner celle-ci ou sa fonction normalisée associée  $\tilde{\rho}$ .

Dans ce qui suit, nous nous concentrons essentiellement sur les premières valeurs de la fonction  $\rho$ . En appliquant la proposition précédente avec  $p_0 = -\rho(r_a)$ ,  $p_1 = -\rho(r_a + 1)$  et  $p_2 = -\rho(r_a + 2)$ . c'est-à-dire  $(p_0, p_1, p_2) = (-p, -q, -r)$ , on obtient :

**Proposition 3.14.** Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle. On suppose que le module de Rao  $M$  de  $C$  est de largeur au moins 3, donc que  $C$  est une courbe minimale de  $M$ , et on note  $p, q, r$  les entiers  $\rho(r_a)$ ,  $\rho(r_a + 1)$  et  $\rho(r_a + 2)$ . Alors le décalage de  $C$  est donné par  $h = r_a = 2q - p - r - 3$ , et la courbe  $C$  est de degré  $d = \binom{h+3}{2} + q - p$  et de genre  $g = -\binom{h+3}{3} + hd - p + 1$ .

En particulier, on a  $h \geq -1$ , ce qui implique  $2q \geq p + r + 2$ . Si  $C$  est lisse irréductible, on a  $h \geq 1$  donc  $2q \geq p + r + 4$ , et si elle est de plus obstruée on a  $h \geq 2$  donc  $2q \geq p + r + 4$ .

En outre, si la largeur de  $\rho$  est au moins égale à 4, d'après la proposition 3.12-iii) les valeurs successives de  $\rho(n)$  pour  $n \in [[r_a + 4, r_o]]$  se calculent par récurrence à partir de  $p, q$  et  $r$  grâce à la formule  $\rho(n) = 3\rho(n-1) - 3\rho(n-2) + \rho(n-3) - 1$  ; on a alors en particulier  $s = 3r - 3q + p - 1$ .

## 3.2 La fonction de Rao.

Dans ce paragraphe, nous exprimons de façon globale sur la fonction  $\rho$ , ou plus exactement sur la fonction normalisée  $\tilde{\rho}$  associée, les relations données par le point iii) de la proposition 3.12. du moins lorsque ces fonctions sont de largeur au moins 3. Ceci fournit une condition nécessaire portant directement sur la fonction  $\tilde{\rho}$  pour qu'elle soit à décalage

près la fonction de Rao d'une courbe à cohomologie semi-naturelle. Nous appelons **fonction naturelle** une fonction normalisée qui vérifie cette condition nécessaire. En dépit de la terminologie adoptée, cette condition n'est pas suffisante et il reste à étudier sous quelles conditions supplémentaires une fonction naturelle est effectivement la fonction de Rao d'une courbe à cohomologie semi-naturelle.

Posons la définition suivante :

**Définition 3.15.** Soit  $\tilde{\rho}$  une fonction à support fini normalisée de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  de largeur  $l$ . On dit que  $\tilde{\rho}$  est une fonction naturelle si et seulement si elle est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et vérifie les conditions  $\partial^3 \tilde{\rho}(2) \leq -1$ ,  $\partial^3 \tilde{\rho}(l) \geq -1$  et  $\partial^3 \tilde{\rho}(n) = -1$  pour  $n \in \llbracket 3, l-1 \rrbracket$  si  $l \geq 4$ .

**Proposition 3.16.** Une fonction naturelle est de largeur au moins trois.

**Démonstration.** Soit  $\tilde{\rho}$  une fonction à support fini normalisée de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  de largeur  $l$ . On pose  $p = \tilde{\rho}(0)$  et  $q = \tilde{\rho}(1)$ . Si  $l = 2$ , les conditions ci-dessus se résument à  $\partial^3 \tilde{\rho}(2) = -1$ , ce qui est impossible car on a alors  $\partial^3 \tilde{\rho}(2) = 3p - 3q$ . Si  $l \leq 1$ , on a  $\partial^3 \tilde{\rho}(2) = 3p$ , donc  $\partial^3 \tilde{\rho}(2) \geq 0$ . ■

Pour les fonctions de largeur  $l \geq 3$ , la définition précédente équivaut à la caractérisation plus explicite suivante :

**Proposition 3.17.** Soit  $\tilde{\rho}$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  à support fini, normalisée, connexe, de largeur  $l \geq 3$ . On note  $p, q, r$  les entiers  $\tilde{\rho}(i)$  pour  $i = 0, 1, 2$ . Si  $l = 3$ , la fonction  $\tilde{\rho}$  est naturelle si et seulement si on a  $r - 3q + 3p \leq -1$  et  $-3r + 3q - p \geq -1$ , soit  $3q \geq \max(3p + r + 1, 3r + p - 1)$ . Ceci entraîne la relation  $6q \geq 4p + 4r$ .

Si  $l \geq 4$ , on note en outre  $p', q', r'$  les entiers  $\tilde{\rho}(i)$  pour  $i = l-1, l-2, l-3$ ; la fonction  $\tilde{\rho}$  est naturelle si et seulement si on a les relations  $r - 3q + 3p \leq -1$ ,  $r' - 3q' + 3p' \leq 1$  et  $\tilde{\rho}(n) = 3\tilde{\rho}(n-1) - 3\tilde{\rho}(n-2) + \tilde{\rho}(n-3) - 1$  pour tout  $n \in \llbracket 4, l-1 \rrbracket$ . Les valeurs de  $\tilde{\rho}(n)$  pour  $n \in \llbracket 4, l-1 \rrbracket$  se calculent alors par récurrence à partir de  $p, q, r$ . En particulier on a  $s = 3r - 3q + p - 1$  si on pose  $s = \tilde{\rho}(4)$ .

Cette caractérisation entraîne la conséquence suivante :

**Corollaire 3.18.** Soit  $\tilde{\rho}$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  de largeur 3, donnée par  $(p, q, r)$ . On suppose que cette fonction vérifie la condition  $4q \geq \max(6p + r, 6r + p)$ , qui est la condition sous-laquelle conjecturalement le schéma  $\hat{E}_{p,q,r}$  est irréductible. Alors la fonction  $\tilde{\rho}$  est naturelle.

**Démonstration.** L'hypothèse entraîne  $2q \geq 3p + r/2$  et  $q \geq 3r/2 + p/4$ , donc  $3q \geq 3p + 2r$ . De la même façon, on obtient  $3q \geq 3r + 2p$ . On en déduit  $3q \geq 3p + r + 1$  car  $r \geq 1$ , ainsi que  $3q \geq 3r + p - 1$ . ■

L'intérêt de la notion de fonction naturelle réside dans la proposition suivante :

**Proposition 3.19.** Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle. Si sa fonction de Rao  $\rho$  est de largeur supérieure ou égale à 3, la fonction normalisée associée  $\tilde{\rho}$  est une fonction naturelle.



**Démonstration.** La largeur de la fonction  $\rho$  est  $l = r_o - r_a + 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a  $\tilde{\rho}(n) = \rho(n - r_a)$ , donc  $\partial^3 \tilde{\rho}(n) = \partial^3 \rho(n - r_a)$  pour tout  $n$ . Notons  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  la suite définie par  $u_n = P_{d,g}(n)$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Pour  $n \in \llbracket r_a, r_o \rrbracket$  on a  $u_n = -\rho(n)$ . De plus on a  $u_{r_a-1} = P_{d,g}(r_a - 1) = h^2 \mathcal{J}_C(r_a - 1)$  et  $u_{r_o+1} = P_{d,g}(r_o + 1) = h^0 \mathcal{J}_C(r_o + 1)$ , donc  $u_{r_a-1} \geq 0$  et  $u_{r_o+1} \geq 0$ . D'après la proposition 3.12-iii), la suite  $(u_n)$  vérifie  $\partial^3 u_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

Si  $r_o \geq r_a + 3$  on a  $\partial^3 \rho(n) = -\partial^3 u_n = -1$  pour  $n \in \llbracket r_a + 3, r_o \rrbracket$ , donc  $\partial^3 \tilde{\rho}(n) = -1$  pour  $n \in \llbracket 3, l - 1 \rrbracket$ . Pour  $n = r_a + 2$  on a  $\partial^3 u_{r_a+2} = -r + 3q - 3p - u_{r_a-1} = 1$ , donc  $\partial^3 \tilde{\rho}(2) = r - 3q + 3p = -u_{r_a-1} - 1 \leq -1$ . Enfin pour  $n = r_o + 1$  on a  $\partial^3 u_{r_o+1} = u_{r_o+1} = 3p' - 3q' + r' = 1$ , donc  $\partial^3 \tilde{\rho}(l) = -3p' + 3q' - r' = u_{r_o+1} - 1 \geq -1$ . ■

Il est alors naturel de se demander dans quelle mesure la réciproque de la proposition 3.19 est vraie.

**Question 3.20.** *Soit  $\tilde{\rho}$  une fonction normalisée naturelle de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$ . Sous quelles conditions existe-t-il des courbes à cohomologie semi-naturelle dont la fonction de Rao a pour fonction normalisée associée  $\tilde{\rho}$  ?*

On note qu'une telle fonction étant nécessairement de largeur au moins trois, on peut appliquer la proposition 3.14. S'il existe de telles courbes, leurs degré et genre sont ainsi uniquement déterminés par la fonction  $\rho$ , de même que le décalage entre  $\rho$  et  $\tilde{\rho}$ . La proposition suivante ramène alors la question précédente à la question 3.7 :

**Proposition 3.21.** *Soit  $\tilde{\rho}$  une fonction normalisée naturelle de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$ . Soit  $(p, q, r)$  le triplet  $(\tilde{\rho}(0), \tilde{\rho}(1), \tilde{\rho}(2))$  et soit  $(h, d, g)$  le triplet d'entiers fourni par les formules de la proposition 3.14. Alors le polynôme  $P_{d,g}$  admet trois racines réelles vérifiant  $x_1 \leq x_2 < x_3$  et la fonction  $\rho$  définie par  $\rho = -P_{d,g} \times \mathbb{1}_{\mathbb{Z} \cap [x_2, x_3]}$  a pour fonction normalisée associée la fonction  $\tilde{\rho}$ .*

*Si de plus on a les relations  $h \geq -1$ , c'est-à-dire  $2q \geq p + r + 2$ , et  $g > 1 - 2d$ , les trois racines  $(x_1, x_2, x_3)$  sont distinctes et vérifient  $x_1 < -2 < x_2 < x_3$ . Il existe alors au plus une cohomologie semi-naturelle compatible avec  $d$  et  $g$ .*

**Démonstration.** On a  $P_{d,g}(h) = -p$ ,  $P_{d,g}(h + 1) = -q$  et  $P_{d,g}(h + 2) = -r$ . Les autres valeurs prises par le polynôme  $P_{d,g}$  s'obtiennent à partir de celles-là par récurrence grâce à la relation iii) de la proposition 3.12. On obtient  $P_{d,g}(h + n) = -\tilde{\rho}(n)$  pour tout  $n \in \llbracket 0, l - 1 \rrbracket$ , donc  $P_{d,g}(h + n) < 0$  pour ces valeurs de  $n$ . Ensuite, on a  $P_{d,g}(h - 1) = -\partial^3 \tilde{\rho}(2) - 1 \geq 0$  et  $P_{d,g}(h + l) = -\partial^3 \tilde{\rho}(l) + 1 \geq 0$ , donc le polynôme  $P_{d,g}$  possède une racine  $x_2$  dans l'intervalle  $[h - 1, h[$  et une racine  $x_3$  dans  $]h + l - 1, h + l]$ . Il possède alors trois racines réelles, qui sont telles que la fonction  $\rho$  est une fonction décalée de  $\tilde{\rho}$ . Comme le coefficient dominant de  $P_{d,g}$  est négatif, la troisième racine  $x_1$  vérifie  $x_1 \leq x_2$ .

De plus, on a  $P_{d,g}(-2) = 2d + g - 1$ . La relation  $g > 1 - 2d$  équivaut donc à  $P_{d,g}(-2) > 0$ , ce qui correspond aux cas où l'on a  $x_1 < -2 < x_2$  ou bien  $x_3 < -2$ . L'entier  $h$  étant par définition le premier entier strictement plus grand que  $x_2$ , la condition  $h \geq -1$  équivaut à  $x_2 \geq -2$ , ce qui ne laisse que le premier cas et fournit la relation  $x_1 < -2 < x_2 < x_3$ . Le polynôme  $P_{d,g}$  admet alors trois racines distinctes, donc il ne peut définir qu'une seule cohomologie semi-naturelle. ■

On déduit de la proposition 3.21 le corollaire suivant :

**Corollaire 3.22.** *Une fonction naturelle est convexe et concave sur son support.*

Comme le soulignent G. Bolondi et J.-C. Migliore, qui signalent le point *i*) de la proposition suivante ainsi que son corollaire (cf. [BM-2], remarque 1.12), la notion de fonction naturelle n'est en général pas stable par dualité.

**Proposition 3.23.** *Soit  $\tilde{\rho}$  une fonction normalisée de largeur  $l \geq 3$  et soit  $\rho'$  la fonction normalisée de sa fonction duale.*

*i) Si  $l \geq 4$  et si  $\tilde{\rho}$  est une fonction naturelle, la fonction  $\rho'$  n'en est pas une.*

*ii) Si  $l = 3$ , les fonctions  $\tilde{\rho}$  et  $\rho'$  sont simultanément naturelles si et seulement si on a  $\partial^3 \tilde{\rho}(2) \leq -1$  et  $\partial^3 \tilde{\rho}(l) \geq 1$ , soit  $3q \geq \max(3p + r + 1, 3r + p + 1)$ .*

**Corollaire 3.24.** *Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle dont le module de Rao  $M$  est de largeur  $l \geq 4$ . Alors la courbe minimale du module dual  $M^*$  n'est pas à cohomologie semi-naturelle, et  $C$  est l'unique telle courbe de toute sa classe de liaison, et pas seulement de sa classe de biliaison.*

**Démonstration.** D'après la proposition 1.3, la fonction  $\rho'$  vérifie  $\partial^3 \rho'(n) = -\partial^3 \tilde{\rho}(l+2-n)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Si  $l \geq 4$ , pour  $n \in \llbracket 3, l-1 \rrbracket$  on obtient  $\partial^3 \rho'(n) = -\partial^3 \tilde{\rho}(l+2-n) = +1$ , donc la fonction  $\rho'$  n'est pas naturelle. Si  $l = 3$ , on a les relations  $\partial^3 \rho'(l) = -\partial^3 \tilde{\rho}(2) = -p+3q-3r$  et  $\partial^3 \rho'(2) = -\partial^3 \tilde{\rho}(l) = 3r - 3q + p$ , d'où le résultat. ■

Nous établissons à présent une propriété des fonctions naturelles, qui traduit en fait sur la fonction  $\tilde{\rho}$  les conditions du point *iv*) de la proposition 3.12, et qui elle est stable par dualité.

**Définition 3.25.** *On dit qu'une fonction  $\tilde{\rho}$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ , normalisée, de largeur  $l$  est sous-naturelle si et seulement si elle est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et vérifie les relations  $\partial^4 \tilde{\rho}(3) \geq 0$ ,  $\partial^4 \tilde{\rho}(l) \geq 0$  et  $\partial^4 \tilde{\rho}(n) = 0$  pour  $n \in \llbracket 4, l-1 \rrbracket$  si  $l \geq 5$ .*

Ici encore, cette notion n'est véritablement intéressante que pour  $l \geq 3$ . Par ailleurs, si on note  $\rho'$  la fonction normalisée de la fonction duale de  $\tilde{\rho}$ , on a d'après la proposition 1.3 la relation  $\partial^4 \rho'(n) = \partial^4 \tilde{\rho}(l+3-n)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . On en déduit que la fonction duale d'une fonction sous-naturelle en est une aussi.

**Proposition 3.26.** *Soit  $\tilde{\rho}$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  normalisée de largeur  $l \geq 3$ .*

*i) Si la fonction  $\tilde{\rho}$  est naturelle elle est sous-naturelle.*

*ii) Si  $l \geq 4$ , la fonction  $\tilde{\rho}$  est naturelle si et seulement si elle est sous-naturelle et vérifie  $s = 3r - 3q + p - 1$ .*

**Démonstration.** Dans le cas  $l = 3$  la fonction  $\rho$  est sous-naturelle si et seulement si elle vérifie la seule condition  $\partial^4 \tilde{\rho}(3) = \partial^4 \tilde{\rho}(l) = -4r + 6q - 4p \geq 0$ , soit  $6q \geq 4p + 4r$ . Toute fonction naturelle de largeur 3 est donc sous-naturelle d'après la proposition 3.17.

Si  $l \geq 4$  et si  $\tilde{\rho}$  est naturelle, on a  $\partial^3 \tilde{\rho}(2) \leq -1$ ,  $\partial^3 \tilde{\rho}(l) \geq -1$  et  $\partial^3 \tilde{\rho}(n) = -1$  pour  $n \in \llbracket 3, l-1 \rrbracket$ . On a par ailleurs  $\partial^4 \tilde{\rho}(n) = \partial^3 \tilde{\rho}(n) - \partial^3 \tilde{\rho}(n-1)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , donc on

obtient  $\partial^4 \tilde{\rho}(3) = -1 - \partial^3 \tilde{\rho}(2) \geq 0$  et  $\partial^4 \tilde{\rho}(l) = \partial^3 \tilde{\rho}(l) + 1 \geq 0$ , ainsi que  $\partial^4 \tilde{\rho}(n) = 0$  pour  $n \in \llbracket 4, l-1 \rrbracket$ . La fonction  $\tilde{\rho}$  est donc sous-naturelle. Par ailleurs, la condition  $\partial^3 \tilde{\rho}(3) = -1$  est équivalente à  $s = 3r - 3q + p - 1$ .

Réciproquement, soit  $\tilde{\rho}$  une fonction de largeur  $l \geq 4$  vérifiant  $s = 3r - 3q + p - 1$ , donc  $\partial^3 \tilde{\rho}(3) = -1$ . Si cette fonction est sous-naturelle, on a  $\partial^4 \tilde{\rho}(n) = 0$  pour tout  $n \in \llbracket 4, l-1 \rrbracket$ , ce qui entraîne par récurrence  $\partial^3 \tilde{\rho}(n) = -1$  pour tout  $n \in \llbracket 3, l-1 \rrbracket$ . On a ensuite  $\partial^4 \tilde{\rho}(3) \geq 0$  et  $\partial^4 \tilde{\rho}(l) \geq 0$ , qui donnent  $\partial^3 \tilde{\rho}(2) \leq \partial^3 \tilde{\rho}(3) = -1$  et  $\partial^3 \tilde{\rho}(l) \geq \partial^3 \tilde{\rho}(l-1) = -1$ . ■

La proposition 3.26 fournit une caractérisation des fonctions naturelles de largeur  $l \geq 4$  ainsi qu'une condition nécessaire sur la fonction  $\tilde{\rho}$ , strictement plus faible que la précédente, pour qu'elle puisse être à décalage près la fonction de Rao d'une courbe à cohomologie semi-naturelle: il faut que ce soit une fonction sous-naturelle. Elle entraîne également la proposition suivante, qui nous sera extrêmement utile dans la suite:

**Proposition 3.27.** *Soit  $\tilde{\rho}$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  normalisée naturelle de largeur  $l \geq 4$  et soit  $(h, d, g)$  les entiers obtenus par la proposition 3.14. Alors on a  $4d = 1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\rho}(n) \partial^4 \tilde{\rho}(n)$ .*

**Démonstration.** C'est un simple calcul. Posons  $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\rho}(n) \partial^4 \tilde{\rho}(n)$ , c'est-à-dire  $S = \sum_{n=0}^{l-1} \tilde{\rho}(n) \partial^4 \tilde{\rho}(n)$ . Comme la fonction  $\tilde{\rho}$  est sous-naturelle on a  $S = \sum_{n=0}^3 \tilde{\rho}(n) \partial^4 \tilde{\rho}(n)$ , soit  $S = p^2 + q(q-4p) + r(r-4q+6p) + s(s-4r+6q-4p)$ . En utilisant  $s = 3r - 3q + p - 1$  on obtient  $S = -2(p^2 + 4q^2 + r^2 - 4pq - 4qr + 2pr - p + r) + 1$ .

Par ailleurs, on a  $d = \binom{h+3}{2} + q - p$ , avec  $h = 2q - p - r - 3$ , ce qui donne  $4d = 2(h+3)(h+2) + 4q - 4p = 2(2q-p-r)(2q-p-r-1) + 4q - 4p$ . En développant l'expression, on trouve  $4d = 1 - S$ . ■

Pour prendre en compte cette proposition, on pose la notation suivante pour toute fonction à support fini, et pas seulement pour les fonctions normalisées ou naturelles:

**Définition 3.28.** *Soit  $\rho$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  à support fini. On note  $\delta_\rho$  la quantité:*

$$\delta_\rho = 1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n) \partial^4 \rho(n).$$

En utilisant le lemme 1.4 d'intégration par parties, on peut donner un certain nombre d'expressions équivalentes de  $\delta_\rho$ . Pour toute fonction  $\rho$  à support fini on a:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \delta_\rho &= 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \partial \rho(n+1) \partial^3 \rho(n) = 1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \partial^2 \rho(n+2) \partial^2 \rho(n) \\ &= 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \partial^3 \rho(n+3) \partial \rho(n) = 1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \partial^4 \rho(n+4) \rho(n). \end{aligned}$$

On en déduit la proposition suivante:

**Proposition 3.29.** *Soit  $\rho$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  à support fini. La quantité  $\delta_\rho$  est invariante par décalage et par dualité, c'est-à-dire on a  $\delta_\rho = \delta_{\tilde{\rho}}$  et  $\delta_\rho = \delta_{\rho^\vee} = \delta_{\rho'}$ .*

**Démonstration.** L'invariance par décalage est évidente. Pour la dualité, il suffit de montrer  $\delta_\rho = \delta_{\rho'}$ , où  $\rho'$  est la fonction normalisée de la fonction duale de  $\rho$ . Soit  $\omega = \omega(\rho) = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid \rho(n) \neq 0\}$ . D'après la proposition 1.3, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a  $\rho'(n) = \rho(\omega - n)$  et  $\partial^4 \rho'(n) = \partial^4 \rho(\omega + 4 - n)$ . On obtient  $\delta_{\rho'} = 1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(\omega - n) \partial^4 \rho(\omega - n + 4) = 1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(-n) \partial^4 \rho(-n + 4)$  par décalage, donc  $\delta_{\rho'} = 1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n) \partial^4 \rho(n + 4) = \delta_\rho$  d'après les égalités (3.2). ■

### 3.3 Les résolutions et la structure du module de Rao.

Ce paragraphe comprend essentiellement un certain nombre de rappels, qui sont de deux sortes. Tout d'abord, d'un point de vue technique nous rappelons des algorithmes de calcul décrits dans [MDP-1] et [MDP-2]. Nous rappelons ainsi comment, à partir d'un module  $M$ , on calcule successivement sa résolution minimale et en particulier la flèche  $\sigma_2$  (paragraphe 3.3.1), puis la fonction  $q$  et les courbes minimales (paragraphe 3.3.2). Nous nous limitons à chaque fois à indiquer seulement ce qui suffit pour étudier les courbes à cohomologie semi-naturelle.

Dans le cadre restreint de ces courbes, les invariants en question sont soumis à des contraintes assez fortes, qui les déterminent presque complètement. Ainsi, la résolution du module est numériquement fixée par les valeurs de la fonction  $\rho$ , de même que la fonction  $q$ . La recension de ces contraintes constitue également pour l'essentiel des rappels, dans la mesure où nos résultats recourent ceux de [MDP-2], [BM-2] et [Flø]. En particulier, la résolution du module est décrite dans les deux derniers de ces trois articles, et les valeurs prises par la fonction  $q$  le sont dans les deux premiers. Nous précisons pour finir la structure algébrique de ces modules, ou du moins les rangs des flèches  $u_i, v_i, v'_i$  et  $u'_i$  qui leur sont associées.

On fixe dans tout ce paragraphe une fonction  $\rho$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  à support fini normalisée et un module  $M$  de  $\widehat{E}_\rho$ . On note ici  $M_i$  la  $i$ -ème composante graduée de  $M$ , de sorte que l'on a  $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ . Les  $M_i$  correspondent aux espaces vectoriels  $E_i$  des chapitres précédents, à partir desquels on construisait des structures de modules.

#### 3.3.1 La résolution d'un module.

Le module  $M$  admet une résolution minimale de la forme :

$$(3.3) \quad 0 \longrightarrow L_4 \xrightarrow{\sigma_4} L_3 \xrightarrow{\sigma_3} L_2 \xrightarrow{\sigma_2} L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M \longrightarrow 0.$$

À partir de la structure de module de  $M$ , c'est-à-dire des flèches  $u_j, v_j, v'_j$  et  $u'_j$  associées pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ . on sait calculer explicitement les modules  $L_i$  et les flèches  $\sigma_i$  qui interviennent dans cette résolution. Ce calcul est décrit dans [MDP-2], et de façon plus détaillée dans la prépublication [MDP-2'].

On rappelle que la structure du module  $M$  se décrit par une application de multiplication  $u : R_1 \otimes_{\mathbb{K}} M \rightarrow M$ . On note  $u_j$  la composante graduée  $u_j : R_1 \otimes_{\mathbb{K}} M_j \rightarrow M_{j+1}$  de  $u$ , à laquelle sont associées naturellement les flèches  $v_j, v'_j$  et  $u'_j$  introduites au paragraphe 1.3. Pour unifier

temporairement les notations, notons ici respectivement  $w_j^1$ ,  $w_j^2$ ,  $w_j^3$  et  $w_j^4$  pour  $j \in \mathbb{Z}$  les applications  $u_j, v_j, v'_j$  et  $u'_j$ . Avec ces notations on a  $w_j^i : \Lambda^i R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_j \rightarrow \Lambda^{i-1} R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_{j+1}$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  et  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ . Notons de plus  $w_j^0$  et  $w_j^5$  les applications  $w_j^0 : R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_j \rightarrow 0$  et  $w_j^5 : 0 \rightarrow \Lambda^4 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_{j+1}$ , de sorte que la composée  $w_j^i \circ w_{j-1}^{i+1}$  est nulle pour tous  $i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$  et  $j \in \mathbb{Z}$ . On obtient alors pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  un complexe :

$$0 \xrightarrow{w_{j-1}^5} \Lambda^4 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_j \xrightarrow{w_j^4} \Lambda^3 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_{j+1} \xrightarrow{w_{j+1}^3} \Lambda^2 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_{j+2} \xrightarrow{w_{j+2}^2} \Lambda^1 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_{j+3} \xrightarrow{w_{j+3}^1} R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_{j+4} \xrightarrow{w_{j+4}^0} 0.$$

Si l'on reprend les notations  $u, v, v', u'$  et que l'on remplace chaque espace vectoriel par sa dimension, cela donne l'écriture :

$$(3.4) \quad 0 \rightarrow \rho(j) \xrightarrow{u'_j} 4\rho(j+1) \xrightarrow{v'_{j+1}} 6\rho(j+2) \xrightarrow{v_{j+2}} 4\rho(j+3) \xrightarrow{u_{j+3}} \rho(j+4) \rightarrow 0.$$

Notons  $H_j^i$  le groupe d'homologie de ce complexe défini par  $H_j^i = \text{Ker } w_j^i / \text{Im } w_{j-1}^{i+1}$ . D'après [MDP-2] (paragraphe I.2.a) on a :

**Proposition 3.30.** *Pour chaque  $i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$  on a  $L_i = \bigoplus_{j=0}^{l-1} R(-i-j) \otimes_{\mathbb{k}} H_j^i$ .*

**Corollaire 3.31.** *On pose  $L_i = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R(-n)^{l_i(n)}$ . En notant  $\ker \varphi$  la dimension de l'espace  $\text{Ker } \varphi$ , on a  $l_i(i+j) = \ker w_j^i - \text{rg } w_{j-1}^{i+1} = \binom{4}{i} \rho(j) - \text{rg } w_j^i - \text{rg } w_{j-1}^{i+1}$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  et  $i \in \{1, 4\}$ . En particulier, on a  $l_i(n) = 0$  si  $n \notin \llbracket i, i+l-1 \rrbracket$ . Pour  $n \in \llbracket i, i+l-1 \rrbracket$  on a  $l_i(n) = 0$  si et seulement si le complexe correspondant à la composée  $w_j^i \circ w_{j-1}^{i+1}$  est exact.*

Pour calculer les flèches  $\sigma_i$ , on adopte les notations suivantes :

**Définition 3.32.** *Soit  $L = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R(-n)^{l(n)}$  et  $L' = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R(-n)^{l'(n)}$  deux  $R$ -modules gradués libres de type fini, et soit  $\sigma : L \rightarrow L'$  un morphisme homogène gradué de degré 0. On note  $\sigma_n$  la restriction de  $\sigma$  au sous-module  $R(-n)^{l(n)}$  de  $L$ . On note  $L_{\leq n}$  le sous-module  $\bigoplus_{k \leq n} R(-k)^{l(k)}$  de  $L$ , et  $\sigma_{\leq n}$  la restriction de  $\sigma$  à  $L_{\leq n}$ . On note enfin  $\sigma_{n,m}$  la composante homogène de  $\sigma_n$  allant de  $R(-n)^{l(n)}$  dans  $R(-m)^{l'(m)}$ .*

Cette composante  $\sigma_{n,m}$  se représente par une matrice de taille  $[l'(m), l(n)]$  dont les coefficients sont des polynômes homogènes de  $R$  de degré  $n-m$ . En particulier, si  $n < m$ , on a  $\sigma_{n,m} = 0$ . De plus, si la flèche  $\sigma$  est minimale, c'est-à-dire nulle modulo l'idéal maximal de  $R$ , on a également  $\sigma_{n,m} = 0$  pour  $n = m$ .

Calculer les flèches  $\sigma_i$  intervenant dans la résolution (3.3) revient à déterminer les composantes graduées  $\sigma_{i,n,m}$ . D'après la prépublication [MDP-2'], elles se calculent à partir du diagramme suivant (cf. [MDP-2], I.2.c), dans lequel tous les produits tensoriels sont sur  $\mathbb{k}$  :

$$\begin{array}{ccccccccc} R(-4) \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda^4 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_0 & \xrightarrow{U' \otimes M_0} & R(-3) \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda^3 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_0 & \xrightarrow{V' \otimes M_0} & R(-2) \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda^2 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_0 & \xrightarrow{V \otimes M_0} & R(-1) \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda^1 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_0 & \xrightarrow{U \otimes M_0} & R \otimes_{\mathbb{k}} M_0 \\ \downarrow u'_0 & & \downarrow v'_0 & & \downarrow v_0 & & \downarrow u_0 & & \downarrow \\ R(-4) \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda^3 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_1 & \xrightarrow{V' \otimes M_1} & R(-3) \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda^2 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_1 & \xrightarrow{V \otimes M_1} & R(-2) \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda^1 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_1 & \xrightarrow{U \otimes M_1} & R(-1) \otimes_{\mathbb{k}} R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_1 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow v'_1 & & \downarrow v_1 & & \downarrow u_1 & & \downarrow & & \\ R(-4) \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda^2 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_2 & \xrightarrow{V \otimes M_2} & R(-3) \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda^1 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_2 & \xrightarrow{U \otimes M_2} & R(-2) \otimes_{\mathbb{k}} R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_2 & \longrightarrow & 0 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \end{array}$$

Nous aurons essentiellement besoin ici de savoir calculer la flèche  $\sigma_2$ , dont les mineurs déterminent les courbes minimales. En outre dans le cas des courbes à cohomologie semi-naturelle, le calcul de ces dernières nécessite seulement de connaître des parties linéaires de la forme  $\sigma_{2,n,n-1}$  et des parties quadratiques de la forme  $\sigma_{2,n,n-2}$ , et ce pour  $n = 2$  et  $3$ . Le calcul s'effectue en appliquant les flèches  $V \otimes_{\mathbb{k}} M_i$ , qui s'obtiennent par linéarité à partir des relations  $(V \otimes M_i)[(P \wedge Q) \otimes e] = P \otimes Q \otimes e - Q \otimes P \otimes e$  pour  $(P, Q) \in R_1^2$  et  $e \in M_i$ . Nous noterons ces flèches simplement  $V$  dans la suite à chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Les parties linéaires de la forme  $\sigma_{2,n,n-1}$  se calculent assez simplement : il suffit d'appliquer la flèche horizontale  $V \otimes M_{n-2}$ . En revanche, le calcul des parties quadratiques  $\sigma_{2,n,n+2}$  est un peu plus délicat : après avoir appliqué la flèche  $V \otimes M_{n-2}$ , il faut choisir une pseudo-section permettant de remonter la flèche  $v_{n-3}$ , puis appliquer  $V \otimes M_{n-3}$ . On peut se référer à [MDP-2'] pour plus de détails, en particulier concernant les pseudo-sections. Dans le chapitre 4, où nous aurons à effectuer de tels calculs de façon explicite, nous n'aurons jamais de partie quadratique à calculer.

D'un point de vue général, les autres composantes de la flèche  $\sigma_2$  ainsi que les autres flèches  $\sigma_i$  se calculent de façon analogue.

D'après [MDP-1] II.2, on déduit de la résolution (3.3) du module  $M$  celle de son module dual  $M^*$ , défini par  $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{k}}(M, \mathbb{k})$ . Celui-ci admet la résolution minimale :

$$(3.5) \quad 0 \rightarrow L_0^{\vee} \xrightarrow{\sigma_1^{\vee}} L_1^{\vee} \xrightarrow{\sigma_2^{\vee}} L_2^{\vee} \xrightarrow{\sigma_3^{\vee}} L_3^{\vee} \xrightarrow{\sigma_4^{\vee}} L_4^{\vee} \rightarrow M^* \rightarrow 0.$$

Posons la définition suivante :

**Définition 3.33.** Soit  $L = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R(-n)^{l(n)}$  un  $R$ -module gradué libre de type fini. La fonction  $l$  est à support fini, et l'on note respectivement  $\sup L$  et  $\inf L$  les entiers  $\alpha(l)$  et  $\omega(l)$ .

Du fait que les résolutions (3.3) et (3.5) sont minimales, on déduit la proposition suivante :

**Proposition 3.34.** Soit  $M$  un  $R$ -module gradué, et soit (3.3) sa résolution minimale. On a  $\inf L_0 < \inf L_1 < \inf L_2 < \inf L_3 < \inf L_4$  et  $\sup L_0 < \sup L_1 < \sup L_2 < \sup L_3 < \sup L_4$ .

### 3.3.2 Les résolutions de l'idéal de la courbe.

D'après [MDP-1], on sait calculer des résolutions des courbes minimales associées au module  $M$  à partir de la résolution minimale (3.3) de ce dernier :

$$0 \rightarrow L_4 \xrightarrow{\sigma_4} L_3 \xrightarrow{\sigma_3} L_2 \xrightarrow{\sigma_2} L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M \rightarrow 0$$

De façon précise, il existe une décomposition du module  $L_2$  en somme directe de deux sous-modules libres sous la forme  $L_2 = P \oplus F$ , qui donne naissance à deux résolutions de la même courbe minimale  $C$ . La première, dite de type  $E$ , est donnée par :

$$0 \rightarrow E = \text{Coker } \sigma_4 \rightarrow F \rightarrow I_C(h) \rightarrow 0,$$

et la seconde, dite de type  $N$ , par :

$$0 \rightarrow P \rightarrow N = \text{Ker } \sigma_1 \rightarrow I_C(h) \rightarrow 0.$$

Calculer ces résolutions de type  $E$  et  $N$  revient à déterminer le sous-module  $P$  de  $L_2$ . Les informations numériques sont concentrées dans la notion suivante :

**Définition 3.35.** Soit  $M$  un  $R$ -module gradué. On appelle fonction  $q$  associée au module  $M$  (ou à ses courbes minimales) la fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  définie par  $P = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R(-n)^{q(n)}$ .

On a évidemment  $F = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R(-n)^{l_2(n)-q(n)}$ . La fonction  $q$  vérifie  $q(n) \leq l_2(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , ainsi que la relation :

$$(3.6) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} q(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [l_1(n) - l_0(n)] - 1$$

qui traduit l'égalité  $\text{rg } P = \text{rg } N - 1$ . La condition analogue sur les degrés implique en outre la relation  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} nq(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n[l_1(n) - l_0(n)] + h$ , qui donne le décalage minimal  $h$ .

Un algorithme explicite permettant de calculer la fonction  $q$  est détaillé dans [MDP-1] IV.6.a ; nous le rappellerons au paragraphe 3.4.1. Il repose comme nous l'avons déjà signalé sur l'analyse des mineurs de la flèche  $\sigma_2$ . Au paragraphe 3.3.3, nous montrons que pour une courbe à cohomologie semi-naturelle dont le module de Rao est de largeur  $l \geq 3$  les valeurs que prend la fonction  $q$  sont entièrement déterminées par la résolution du module ; nous expliciterons au paragraphe 3.3.3 ce que ces impliquent sur la structure du module et sur la courbe, en particulier concernant sa lissité.

On déduit des deux résolutions de type  $E$  et  $N$  la proposition suivante, citée dans [Flø] (lemmes 1.12 et 1.13) :

**Proposition 3.36.** Soit  $M$  un  $R$ -module gradué. On considère sa résolution minimale (3.3), ainsi que le scindage  $L_2 = P \oplus F$  correspondant aux courbes minimales. On a alors les relations  $\inf P > \inf L_1 > \inf L_0$ ,  $\sup P > \sup L_1 > \sup L_0$ ,  $\inf L_4 > \inf L_3 > \inf F$  et  $\sup L_4 > \sup L_3 > \sup F$ .

**Démonstration.** D'après la proposition 3.34, il suffit de comparer  $P$  avec  $L_1$  et  $F$  avec  $L_3$ . On a tout d'abord  $\inf P \geq \inf L_2 > \inf L_1$  et  $\sup L_3 > \sup L_2 \geq \sup F$ , ce qui prouve deux des assertions. Comme la résolution  $0 \rightarrow L_4 \rightarrow L_3 \rightarrow F \rightarrow I_C(h) \rightarrow 0$  est minimale, on a  $\inf L_3 > \inf F$ . Enfin, si on pose  $A_C = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0 \mathcal{O}_C(n)$ , on a d'après [MDP-1] II. 4 la résolution minimale  $0 \rightarrow P \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow L_0 \oplus R \rightarrow A_C \rightarrow 0$ , qui donne  $\inf P > \inf L_1$ . ■

Les résolutions de type  $E$  et  $N$  déterminent en outre respectivement les invariants  $s_0$  et  $c$  des courbes minimales (cf. [MDP-1] proposition II.5.2) :

**Proposition 3.37.** Les courbes minimales associées au module  $M$  vérifient  $s_0 = \inf F + h$  et  $c = \sup P - 4 + h$ .

### 3.3.3 Les valeurs de la fonction $q$ .

Appliquons à présent ce qui précède au cas des courbes à cohomologie semi-naturelle. La proposition suivante découle immédiatement de la proposition 3.37 :

**Proposition 3.38.** *Soit  $M$  un module de longueur finie  $l > 0$ , normalisé et soit  $C$  une courbe minimale associée. La courbe  $C$  est de co-rang maximum si et seulement si on a  $\sup P \leq 3$ , c'est-à-dire si  $q(n) = 0$  pour  $n \notin \{2, 3\}$ . Elle est de rang maximum si et seulement si  $\inf F \geq l$ , c'est-à-dire si  $q(n) = l_2(n)$  pour  $n \notin \{l, l+1\}$ . Elle est à cohomologie semi-naturelle si et seulement si ces deux conditions sont vérifiées simultanément, c'est-à-dire si on a  $q(n) = l_2(n)$  pour  $n \leq l-1$  et  $q(n) = 0$  pour  $n \geq 4$ .*

On note que pour  $l \geq 5$  ces conditions entraînent  $l_2(n) = 0$  pour  $n \in \llbracket 4, l-1 \rrbracket$ . Si  $l = 1$  ou  $2$  toutes ces conditions sont automatiquement vérifiées, donc la courbe  $C$  est à cohomologie semi-naturelle. Si  $l = 3$  la courbe  $C$  est de rang maximum si et seulement si on a  $q(4) = 0$  et elle de co-rang maximum si et seulement si on a  $q(2) = l_2(2)$ .

Si  $l \geq 4$  et si  $C$  est à cohomologie semi-naturelle, toutes les valeurs de la fonction  $q$  sont déterminées par la résolution du module. Réciproquement, la courbe minimale d'un module  $M$  de largeur  $l \geq 4$  est à cohomologie semi-naturelle si et seulement si la fonction  $q$  atteint ces valeurs prescrites. Au paragraphe 3.3.4, nous montrerons que la fonction  $q$  est également déterminée entièrement par la résolution du module  $M$  dans le cas  $l = 3$  (cf. proposition 3.50).

La proposition 3.38 entraîne le corollaire suivant, énoncé dans [Flø] (propositions 2.2 et 2.4):

**Corollaire 3.39.** *Soit  $M$  un module non nul de largeur  $l$  normalisé et soit  $C$  une courbe minimale associée à  $M$ .*

*Si  $C$  est de co-rang maximum, on a  $P = R(-2)^{q(2)} \oplus R(-3)^{q(3)}$ ,  $L_1 = R(-1)^{l_1(1)} \oplus R(-2)^{l_1(2)}$  et  $L_0 = R^{l_0(0)} \oplus R(-1)^{l_0(1)}$ . De plus, si  $q(3) = 0$  on a  $l_1(2) = l_0(1) = 0$ .*

*Si  $C$  est de rang maximum, on a  $F = R(-l)^{l_2(l)-q(l)} \oplus R(-l-1)^{l_2(l+1)-q(l+1)}$ ,  $L_3 = R(-l-1)^{l_3(l+1)} \oplus R(-l-2)^{l_3(l+2)}$  et  $L_4 = R(-l-2)^{l_4(l+2)} \oplus R(-l-3)^{l_4(l+3)}$ . De plus, si  $q(l) = l_2(l)$  on a  $l_3(l+1) = l_4(l+2) = 0$ .*

En particulier, si  $C$  est de co-rang maximum le module  $M$  est engendré en ses deux premiers degrés, et si  $C$  est de rang maximum c'est le cas du module  $M^*$ . À chaque fois, ceci entraîne que la fonction de Rao est connexe, donc que le diamètre coïncide avec la longueur.

### 3.3.4 Les modules optimaux.

Le corollaire 3.39 détermine la forme numérique de la résolution du module  $M$ . Un certain nombre des propriétés des courbes à cohomologie semi-naturelle découlent directement de cette résolution et pas vraiment des valeurs de la fonction  $q$ , c'est-à-dire du fait qu'elles sont à cohomologie semi-naturelle. Ces propriétés sont ainsi vérifiées pour une classe de modules plus large que celle des modules de Rao des courbes à cohomologie semi-naturelle. Pour les mettre en évidence, nous adoptons la définition suivante:

**Définition 3.40.** *On dit qu'un module  $M$  normalisé de largeur  $l$  est optimal si et seulement si sa résolution minimale vérifie  $l_1(n) = 0$  pour  $n \notin \{1, 2\}$ ,  $l_2(n) = 0$  pour  $n \notin \{2, 3, l, l+1\}$  et  $l_3(n) = 0$  pour  $n \notin \{l+1, l+2\}$ . Ces conditions entraînent  $l_0(n) = 0$  pour  $n \notin \{0, 1\}$  et  $l_4(n) = 0$  pour  $n \notin \{l+2, l+3\}$ .*



Les résultats suivants concernant les modules optimaux sont immédiats :

**Proposition 3.41.** *i) Tout module de largeur  $l \leq 2$  est optimal.*

*ii) Un module optimal est engendré en ses deux premiers degrés. Ceci entraîne que la fonction  $\rho$  est connexe, donc  $l$  est indifféremment le diamètre et la largeur du module  $M$ .*

*iii) Le module  $M$  est un module optimal si et seulement si son module dual  $M^*$  en est un à décalage près.*

*iv) Si  $M'$  et  $M''$  sont deux modules optimaux de même largeur, le module  $M = M' \oplus M''$  est optimal. Si  $M'$  est un module optimal de largeur 3, le module  $M = M' \oplus \mathbb{k}(-1)$  est optimal.*

Le point *iii)* montre que la classe des modules optimaux est strictement plus grande que celle des modules de Rao des courbes à cohomologie semi-naturelle.

**Démonstration.** Seul le dernier point nécessite un commentaire. On utilise le fait que la résolution minimale du module  $\mathbb{k}(-1)$  est :

$$0 \longrightarrow R(-5) \longrightarrow R(-4)^4 \longrightarrow R(-3)^6 \longrightarrow R(-2)^4 \longrightarrow R(-1) \longrightarrow \mathbb{k}(-1) \longrightarrow 0,$$

et que la résolution minimale d'une somme directe de modules s'obtient comme la somme directe de leurs résolutions minimales. ■

D'après le corollaire 3.31 la résolution d'un module optimal vérifie  $L_0 = R^p \oplus R(-1)^{q-r\mathfrak{g}u_0}$ ,  $L_1 = R(-1)^{4p-r\mathfrak{g}u_0} \oplus R(-2)^{4q-r\mathfrak{g}u_1-r\mathfrak{g}v_0}$ ,  $L_3 = R(-l-1)^{4q'-r\mathfrak{g}u'_{i-3}-r\mathfrak{g}v'_{i-2}} \oplus R(-l-2)^{4p'-r\mathfrak{g}u'_{i-2}}$  et  $L_4 = R(-l-2)^{q'-r\mathfrak{g}u'_{i-2}} \oplus R(-l-3)^{p'}$ . En ce qui concerne  $L_2$  en revanche, on est conduit à distinguer trois cas, selon la valeur de  $l$ . Si  $l \leq 2$  on a  $L_2 = R(-2)^{6p-r\mathfrak{g}v_0} \oplus R(-3)^{6q-r\mathfrak{g}v'_0}$ , si  $l = 3$  on a  $L_2 = R(-2)^{6p-r\mathfrak{g}v_0} \oplus R(-3)^{6q-r\mathfrak{g}v_1-r\mathfrak{g}v'_0} \oplus R(-4)^{6r-r\mathfrak{g}v'_1}$  et si  $l \geq 4$  on a  $L_2 = R(-2)^{6p-r\mathfrak{g}v_0} \oplus R(-3)^{6q-r\mathfrak{g}v_1-r\mathfrak{g}v'_0} \oplus R(-l)^{6q'-r\mathfrak{g}v_{i-2}-r\mathfrak{g}v'_{i-3}} \oplus R(-l-1)^{6p'-r\mathfrak{g}v'_{i-2}}$ .

On remarque que toutes les conditions qui définissent les modules optimaux sont de la forme  $l_i(n) = 0$  pour certains  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . D'après le corollaire 3.31, ces conditions signifient à chaque fois que le complexe formé par la composée  $w_j^i \circ w_{j-1}^{i+1}$  est exact. Cette remarque explicite la terminologie choisie : un tel module est «optimal» dans la mesure où les rangs des flèches  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $v'_i$  et  $u'_i$  atteignent les maxima autorisés à la fois par la fonction  $\rho$  et par les autres flèches du même type, en un sens que nous allons préciser au cours de ce paragraphe. Nous posons la définition suivante :

**Définition 3.42.** *Soit  $\rho$  une fonction normalisée de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ . On note  $\widehat{\Omega}_\rho$  le sous-schéma ouvert de  $\widehat{E}_\rho$  (éventuellement vide) défini par les conditions de la définition 3.40, c'est-à-dire le sous-schéma des modules optimaux.*

Si la largeur  $l$  de la fonction  $\rho$  est inférieure ou égale à 2 on a  $\widehat{\Omega}_\rho = \widehat{E}_\rho$  ; les cas véritablement intéressants sont ceux où on a  $l \geq 3$ . Pour répondre aux questions 3.20 ou 3.7, c'est-à-dire pour déterminer quelles fonctions  $\rho$  correspondent à des courbes à cohomologie semi-naturelle, on peut envisager de commencer par étudier la question plus large suivante :

**Question 3.43.** *Pour quelles fonctions normalisées  $\tilde{\rho}$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  de largeur  $l \geq 3$  le schéma  $\widehat{\Omega}_{\tilde{\rho}}$  est-il non vide ? Autrement dit, pour quelles fonctions  $\rho$  existe-t-il des modules optimaux ?*

Dans le cas  $l = 3$ , on peut donner une réponse partielle à cette question grâce à [MDP-2]. Tout d'abord, un module  $M$  de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est optimal si et seulement si il vérifie  $l_1(3) = l_3(3) = 0$ , c'est-à-dire si l'application  $v_1$  est surjective et si  $v'_0$  est injective d'après les relations  $l_1(3) = \text{coker } v_1$  et  $l_3(3) = \ker v'_0$ . Ces conditions entraînent  $l_0(2) = l_4(4) = 0$ , c'est-à-dire que  $u_1$  est surjective et  $u'_0$  injective d'après les relations  $l_0(2) = \text{coker } u_1$  et  $l_4(4) = \ker u'_0$ . La structure d'un tel module est alors entièrement décrite par le tableau récapitulatif suivant, où chaque ligne correspond à un complexe dans lequel on a remplacé les espaces vectoriels par l'indication de leur dimension :

$$\begin{array}{ccccccc}
 4p & \xrightarrow{u_0} & q & & & & \\
 6p & \xrightarrow{v_0} & 4q & \xrightarrow{u_1} & r & & \\
 4p & \xrightarrow{v'_0} & 6q & \xrightarrow{v_1} & 4r & & \\
 p & \xrightarrow{u'_0} & 4q & \xrightarrow{v'_1} & 6r & & \\
 & & & \xrightarrow{u'_1} & 4r & & 
 \end{array}$$

La résolution minimale de  $M$  est alors entièrement déterminée du point de vue numérique par les rangs des applications  $u_0, v_0, v'_1$  et  $u'_1$ . De façon précise, on a  $L_0 = R^p \oplus R(-1)^{q-r\mathfrak{E}u_0}$ ,  $L_1 = R(-1)^{4p-r\mathfrak{E}u_0} \oplus R(-2)^{4q-r-r\mathfrak{E}v_0}$ ,  $L_2 = R(-2)^{6p-r\mathfrak{E}v_0} \oplus R(-3)^{6q-4p-4r} \oplus R(-4)^{6r-r\mathfrak{E}v'_1}$ ,  $L_3 = R(-4)^{4q-p-r\mathfrak{E}v'_1} \oplus R(-5)^{4r-r\mathfrak{E}u'_1}$  et  $L_4 = R(-5)^{q-r\mathfrak{E}u'_1} \oplus R(-6)^r$ .

On obtient également le corollaire suivant :

**Corollaire 3.44.** *Soit  $M$  un module optimal de largeur 3. Alors on a  $6q \geq 4p + 4r$  ainsi que  $4q \geq \max(p, r)$ .*

**Démonstration.** On a  $4q \geq p$  et  $4q \geq r$  car  $u_1$  est surjective et  $u'_0$  est injective. De plus, on a  $\text{Im } v'_0 \subset \text{Ker } v_1$ , donc  $\text{rg } v'_0 = 4p \leq \ker v_1 = 6q - 4r$ . ■

D'après la proposition IV.1.3 de [MDP-2], si  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est irréductible et si  $(p, q, r)$  est différent de  $(1, 1, 1)$  ou  $(1, 2, 1)$  l'ouvert de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  sur lequel toutes les applications  $u_i, v_i, v'_i$  et  $u'_i$  pour  $i \in \{0, 1\}$  sont de rang maximum est non vide. De plus sous les mêmes hypothèses on a  $4q \geq \max(6p + r, 6r + p)$ , donc sur cet ouvert les applications  $v'_0$  et  $u'_0$  sont injectives et les applications  $u_1$  et  $v_1$  sont surjectives. On en déduit que tout module de cet ouvert est optimal. En tenant compte de nos résultats du chapitre 2, on obtient :

**Proposition 3.45.** *Soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$  et soit  $\rho$  la fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  normalisée de largeur 3 définie par  $(p, q, r)$ . On pose  $m = \max(6r + p, 6p + r)$  si  $r/p \notin [4/9, 9/4]$  et  $m = \max(2r + 10p, 2p + 10r)$  sinon. Si  $4q \geq m$  et si  $(p, q, r) \neq (1, 2, 1)$ , l'ouvert  $\widehat{\Omega}_\rho$  est non vide.*

En revanche, si  $4q < m$  la question est ouverte :

**Question 3.46.** *Soit  $\rho$  une fonction normalisée de largeur 3. Si cette fonction vérifie les relations  $4q \geq \max(8(p+r)/3, p, r)$  et  $4q < m$ , le schéma  $\widehat{\Omega}_\rho$  est-il non vide ?*



$$L_2 = R(-2)^{6p-rg v_0} \oplus R(-3)^{6q-4p-4r+s} \oplus R(-l)^{6q'-4p'-4r'+s'} \oplus R(-l-1)^{6p'-rg v'_{l-2}}, L_3 = R(-l-1)^{4q'-r'-rg v'_{l-2}} \oplus R(-l-2)^{4p'-rg v'_{l-2}} \text{ et } L_4 = R(-l-2)^{q'-rg v'_{l-2}} \oplus R(-l-3)^{p'}.$$

On note sur le diagramme ci-dessus que pour tout  $j \in \llbracket 4, l-1 \rrbracket$  le complexe (3.4) :

$$0 \longrightarrow \rho(j-4) \xrightarrow{u'_{j-4}} 4\rho(j-3) \xrightarrow{v'_{j-3}} 6\rho(j-2) \xrightarrow{v'_{j-2}} 4\rho(j-1) \xrightarrow{u'_{j-1}} \rho(j) \longrightarrow 0$$

est exact. On en déduit que pour tout  $j \in \llbracket 4, l-1 \rrbracket$  on a  $\partial^4 \rho(j) = 0$ . Plus généralement, on a la proposition suivante :

**Proposition 3.48.** *Soit  $M \in \widehat{E}_\rho$  un module de largeur  $l \geq 4$ . Si  $M$  est un module optimal la fonction  $\rho$  est une fonction sous-naturelle et vérifie de plus  $4q \geq r$  et  $4q' \geq r'$ .*

**Démonstration.** Nous venons de voir que l'on a  $\partial^4 \rho(n) = 0$  pour  $n \in \llbracket 4, l-1 \rrbracket$ . Par ailleurs, on a  $\text{Im } v'_0 \subset \text{Ker } v_1$ , donc  $\text{rg } v'_0 = 4p \leq 6q - \text{rg } v_1 = 6q - 4r + s$ , c'est-à-dire  $s - 4r + 6q - 4p \geq 0$  soit  $\partial^4 \rho(3) \geq 0$ . De même, on a  $\text{Im } v'_{l-3} \subset \text{Ker } v_{l-2}$ , donc  $\text{rg } v'_{l-3} = 4r' - s' \leq 6q' - \text{rg } v_{l-2} = 6q' - 4p'$ , soit  $\partial^4 \rho(l) \geq 0$ . La fonction  $\rho$  vérifie donc  $\partial^4 \rho(3) \geq 0$ ,  $\partial^4 \rho(l) \geq 0$  et  $\partial^4 \rho(n) = 0$  pour  $n \in \llbracket 4, l-1 \rrbracket$ , c'est-à-dire est une fonction sous-naturelle. On déduit les relations  $4q \geq r$  et  $4q' \geq r'$  du fait que  $u'_0$  est injective et que  $u_{l-2}$  est surjective. ■

La question naturelle qui se pose alors est la suivante, à laquelle nous ne répondons pas :

**Question 3.49.** *Soit  $\rho$  une fonction normalisée de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  de largeur  $l \geq 4$ . Si cette fonction est sous-naturelle et vérifie  $4q \geq r$  et  $4q' \geq r'$ , existe-t-il des modules optimaux dans  $\widehat{E}_\rho$ , c'est-à-dire le schéma  $\widehat{\Omega}_\rho$  est-il non vide ?*

Nous revenons à présent au cas général des largeurs  $l \geq 3$ . Le résultat qui suit permet d'affaiblir les conditions portées sur la fonction  $q$  pour que la courbe minimale associée au module  $M$  soit à cohomologie semi-naturelle lorsque l'on sait que ce module est optimal. Il montre en outre que dans le cas  $l = 3$  les valeurs de la fonction  $q$  sont toutes déterminées par la résolution du module de la même façon que dans les largeurs supérieures. On rappelle que l'on note  $q^\sharp$  la fonction croissante de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  définie par  $q^\sharp(n) = \sum_{k \leq n} q(k)$ . Cette fonction est nulle pour  $n \leq 0$  et prend une valeur constante  $N$  pour  $n \geq l+1$  car on a  $q(k) = 0$  pour  $k \geq l+2$ . La relation (3.6) signifie exactement que cette valeur constante  $N$  vaut  $N = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [l_1(n) - l_0(n)] - 1$ .

**Proposition 3.50.** *Soit  $M$  un module de largeur  $l \geq 3$ . La courbe minimale  $C$  associée à  $M$  est à cohomologie semi-naturelle si et seulement si  $M$  est un module optimal et si la fonction  $q$  vérifie  $q(2) = l_2(2) = 6p - \text{rg } v_0$  et  $q(3) = 3q - 3p - r - 1$ , c'est-à-dire aussi  $q^\sharp(2) = l_2(2) = 6p - \text{rg } v_0$  et  $q^\sharp(3) = N = 3p + 3q - r - \text{rg } v_0 - 1$ .*

**Démonstration.** Si le module  $M$  est optimal on a  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} [l_1(n) - l_0(n)] = l_1(2) + l_1(1) - l_0(1) - l_0(0)$  avec  $l_0(0) = p$ ,  $l_0(1) = q - \text{rg } u_0$ ,  $l_1(1) = 4p - \text{rg } u_0$  et enfin  $l_1(2) = 4q - \text{rg } u_1 - \text{rg } v_0 = 4q - r - \text{rg } v_0$  car  $u_1$  est surjective. On obtient  $N = 3p + 3q - r - \text{rg } v_0 - 1$ . Si la courbe  $C$  est à cohomologie semi-naturelle on a  $q(n) = 0$  pour  $n \geq 4$ , c'est-à-dire  $q^\sharp(n) = N$  pour  $n \geq 3$ . On a en particulier  $q^\sharp(3) = N = 3p + 3q - r - \text{rg } v_0 - 1$ . De plus comme  $C$  est à cohomologie semi-naturelle on a  $q(2) = l_2(2) = 6p - \text{rg } v_0$ , donc on obtient  $q(3) = q^\sharp(3) - q(2) = 3q - 3p - r - 1$ . ■

On remarque que si  $l \geq 4$  la valeur de  $q(3)$  donnée ci-dessus est automatiquement égale à  $l_2(3)$ . En effet on a alors  $l_2(3) = 6q - \text{rg } v_1 - \text{rg } v'_0 = 6q - (4r - s) - 4p$ . De plus on a  $s = 3r - 3q + p - 1$  car la fonction  $\rho$  est naturelle, donc  $l_2(3) = 3q - 3p - r - 1$ .

Si  $l = 3$ , on a  $l_2(3) = 6q - \text{rg } v_1 - \text{rg } v'_0 = 6q - 4r - 4p$ , donc on a  $q(3) = l_2(3)$  si et seulement si  $3r - 3q + p = 1$ ; cette condition est vérifiée si et seulement si on a  $s_0 = r_0 + 2$ . D'autre part, toujours si  $l = 3$ , on a  $q(3) = 0$  si et seulement si  $r = 3q - 3p - 1$ ; cette condition est vérifiée si et seulement si  $e = r_a - 2$ .

Enfin, notons que les conditions de la proposition 3.50 sont encore équivalentes aux relations  $q^\sharp(2) \geq 6p - \text{rg } v_0$  et  $q^\sharp(3) \geq N = 3p + 3q - r - \text{rg } v_0 - 1$ ; cette remarque évidente nous sera utile dans la suite.

## 3.4 Étude de la lissité.

### 3.4.1 Détermination des courbes minimales.

Nous nous intéressons à présent à la détermination des courbes minimales, en particulier dans le but d'étudier leur éventuelle lissité. Ceci nécessite d'explicitier les conditions établies au paragraphe précédent sur la fonction  $q$  pour que la courbe minimale associée à un module optimal  $M$  de largeur  $l > 0$  soit effectivement à cohomologie semi-naturelle.

Rappelons tout d'abord comment on calcule cette fonction  $q$ . À un module  $M$  de  $\widehat{E}_\rho$  on associe un entier  $a_0$  et des entiers  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  (cf. [MDP-1] définition IV.2.4). D'après la proposition [MDP-1] IV.6.4 ces entiers sont caractérisés de la façon suivante :

**Proposition 3.51.** (M. Martin-Deschamps et D. Perrin)

i) L'entier  $a_0 - 1$  est le plus grand entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que la matrice  $\sigma_{2, \leq n}$  est injective et que ses mineurs maximaux sont sans facteur commun non trivial, c'est-à-dire définissent au plus une courbe.

ii) L'entier  $\alpha_n$  (resp.  $\beta_n$ ) est le plus grand entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que les  $N$ -mineurs de la matrice  $\sigma_{2, \leq n}$  sont non tous nuls, (resp. sans facteur commun non trivial), c'est-à-dire définissent au plus une surface (resp. une courbe).

Ces entiers permettent de définir la fonction  $q$  ([MDP-1] définition IV.2.6) :

**Proposition 3.52.** (M. Martin-Deschamps et D. Perrin)

On a  $q(n) = l_2(n)$  pour  $n < a_0$  et  $q^\sharp(n) = \inf(\alpha_n - 1, \beta_n)$  pour  $n \geq a_0$ .

Appliquons ceci aux courbes à cohomologie semi-naturelle. Soit  $\rho$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  normalisée de largeur  $l > 0$  et soit  $C$  une courbe minimale associée à  $M$ . Si  $l = 1$  ou 2 la courbe  $C$  est automatiquement à cohomologie semi-naturelle. Si  $l \geq 3$ , d'après la proposition 3.50 la courbe  $C$  est à cohomologie semi-naturelle si et seulement si le module  $M$  est optimal et vérifie  $q^\sharp(2) \geq 6p - \text{rg } v_0$  et  $q^\sharp(3) \geq N = 3p + 3q - r - \text{rg } v_0 - 1$ ; ces conditions impliquent automatiquement  $q(2) = l_2(2) = 6p - \text{rg } v_0$ ,  $q(3) = 3q - 3p - r - 1$  et  $q(n) = 0$  pour  $n \geq 4$ . On obtient la proposition suivante :

**Proposition 3.53.** Soit  $M$  un module de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  et soit  $C$  une courbe minimale associée. On suppose que le module  $M$  est optimal et on pose  $N = 3p + 3q - r - \text{rg } v_0 - 1$ . La courbe  $C$  est

à cohomologie semi-naturelle si et seulement si les  $(6p - \text{rg } v_0)$ -mineurs de  $\sigma_{2,2,1}$  définissent au plus une courbe, de même que les  $N$ -mineurs de  $\sigma_{2,\leq 3}$ , et si les  $(N+1)$ -mineurs de  $\sigma_{2,\leq 3}$  définissent au plus une surface.

**Démonstration.** La relation  $q(2) = l_2(2)$  est équivalente à  $a_0 \geq 3$ , c'est-à-dire au fait que les  $(6p - \text{rg } v_0)$ -mineurs de  $\sigma_{2,2,1}$  définissent au plus une courbe. La relation  $q^h(3) \geq N$  est équivalente aux relations  $\alpha_3 \geq N+1$  et  $\beta_3 \geq N$ , c'est-à-dire au fait que les  $(N+1)$ -mineurs (respectivement les  $N$ -mineurs) de  $\sigma_{2,\leq 3}$  définissent au plus une surface (respectivement une courbe). ■

**Remarque 3.54.** *Sous les conditions de la proposition 3.53, la matrice  $\sigma_{2,2,1}$  est nécessairement injective. Ses  $(6p - \text{rg } v_0)$ -mineurs sont alors simplement ses mineurs maximaux. Nous retrouvons fréquemment une situation identique dans toute la suite de ce texte. Aussi, pour abrégé les formulations nous adoptons la convention suivante. Dans toute la suite de ce travail, nous désignons de façon implicite par l'expression mineurs maximaux d'une matrice de taille  $(b, a)$  ses  $a$ -mineurs, en sous-entendant à chaque fois que la matrice en question est injective.*

On rappelle que la matrice représentant l'application  $\sigma_{2,\leq 3}$  dans des bases fixées est de la forme suivante, où l'on indique les dimensions des espaces qui interviennent :

$$\sigma_{2,\leq 3} = \left( \begin{array}{c|c} 3q-3p-r-1 & 6p-\text{rg } v_0 \\ \hline \sigma_{2,3,2} & 0 \\ \sigma_{2,3,1} & \sigma_{2,2,1} \end{array} \right) \begin{array}{l} 4q-r-\text{rg } v_0 \\ 4p-\text{rg } u_0 \end{array} .$$

Si  $r = 3q - 3p - 1$ , c'est-à-dire si  $e = r_a - 2$ , il reste seulement  $\sigma_{2,\leq 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{2,2,1} \end{pmatrix}$ . Si

l'application  $v_0$  est injective on a au contraire  $\sigma_{2,\leq 3} = \begin{pmatrix} \sigma_{2,3,2} \\ \sigma_{2,3,1} \end{pmatrix}$ . Enfin si  $u_0$  est injective on a  $\sigma_{2,\leq 3} = \begin{pmatrix} \sigma_{2,3,2} & 0 \end{pmatrix}$ . Par ailleurs, on déduit immédiatement de la forme de cette matrice le résultat suivant, qui fournit une condition nécessaire pour que la courbe minimale soit lisse irréductible :

**Proposition 3.55.** *Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle,  $M$  son module de Rao et  $\rho$  sa fonction de Rao, que l'on suppose de largeur  $l \geq 3$ . On suppose de plus qu'on a  $e = r_a - 1$ , c'est-à-dire  $r < 3q - 3p - 1$ . Si la courbe  $C$  est lisse irréductible et si l'application  $v_0$  n'est pas injective, les mineurs maximaux de la matrice  $\sigma_{2,2,1}$  définissent un sous-schéma fini curviligne.*

**Démonstration.** Ceci découle des résultats de [MDP-3], qui s'appliquent parce que la courbe est lisse irréductible. Sous les hypothèses considérées on a  $q(3) > 0$ . La courbe  $C$  est alors définie par les mineurs maximaux d'une matrice qui contient comme sous-matrice stricte la matrice  $\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{2,2,1} \end{pmatrix}$  correspondant aux dernières colonnes de  $\sigma_{2,\leq 3}$ . À cause du bloc de zéros, les mineurs maximaux de la matrice  $\sigma_{2,2,1}$  définissent alors un sous-schéma de la courbe  $C$ . D'après [MDP-3] III.5.3 ce schéma est un sous-schéma strict de  $C$ , c'est-à-dire est un schéma fini curviligne. ■

Dans le cas  $e = r_a - 2$  on a au contraire  $q(3) = 0$ . On rappelle également que dans les cas  $l \geq 4$  ou bien  $l = 3$  et  $s_0 = r_o + 2$  on a  $q(3) = l_2(3)$ . On a donc dans le premier cas  $q(n) = l_2(n)$  pour  $n = 2$  et  $q(n) = 0$  sinon, et dans les seconds on a  $q(n) = l_2(n)$  pour  $n \in \{2, 3\}$  et  $q(n) = 0$  sinon. Rappelons alors la définition suivante, due à M. Martin-Deschamps et D. Perrin :

**Définition 3.56.** Soit  $M$  un module de  $\widehat{E}_\rho$  et  $C$  une courbe minimale associée à  $M$ . On dit que la courbe  $C$  est obligatoire si et seulement si on a  $q(n) = 0$  pour  $n \geq a_0$ .

Si la courbe  $C$  est obligatoire, elle est définie exactement par les mineurs maximaux de la matrice  $\sigma_{2, \leq (a_0-1)}$ . Elle est alors déterminée par le module  $M$  de façon unique, et non à déformation près comme c'est le cas en général, d'où la terminologie. On a le résultat suivant :

**Proposition 3.57.** Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle,  $M$  son module de Rao et  $\rho$  sa fonction de Rao. On suppose  $\rho$  de largeur  $l \geq 3$ .

- i) Si  $e = r_a - 2$  la courbe  $C$  est obligatoire et est définie par les mineurs maximaux de la matrice  $\sigma_{2,2,1}$ .
- ii) Si  $l \geq 4$  ou bien si  $l = 3$  et  $s_0 = r_o + 2$ , la courbe  $C$  est obligatoire et est définie par les mineurs maximaux de la matrice  $\sigma_{2, \leq 3}$ .

Si la courbe minimale est obligatoire, on ne peut pas la déformer sans toucher au module de Rao. En particulier dans ce cas si le module est fixé son unique courbe minimale est ou n'est pas lisse irréductible sans que l'on ait la latitude de bouger quoi que ce soit. Ceci peut être considéré comme un désavantage lorsque l'on s'intéresse à la question de Sernesi-Walter, du moins si l'on cherche à produire un contre-exemple infirmant l'assertion (SW). En effet, dans la mesure où l'obstruction de la courbe dépend uniquement de celle du module, on peut envisager de commencer par fixer un module obstrué dans le schéma  $\widehat{E}_\rho$ , de façon à vérifier d'abord la condition fermée, puis de chercher une courbe lisse irréductible parmi ses courbes minimales. Cette méthode est fortement limitée lorsque la courbe minimale est obligatoire.

Dans le cas contraire, le module  $M$  admet une famille de courbes minimales. On peut alors étudier sous quelles conditions la courbe minimale générale est lisse irréductible. Cette préoccupation rejoint celles de l'article [MDP-3] à paraître ou de la prépublication [MDP-3']. Dans ces articles, M. Martin-Deschamps et D. Perrin s'intéressent aux courbes lisses-minimales associées à un module fixé, c'est-à-dire aux courbes lisses irréductibles ayant un décalage minimal dans la classe de biliaison de ce module. Ils établissent ainsi des conditions nécessaires (cf. [MDP-3'] chapitre III) et des conditions suffisantes ((cf. [MDP-3'] chapitre IV) pour qu'une courbe  $C$  de la classe de biliaison définie par  $M$  soit une courbe lisse-minimale associée à  $M$ .

En appliquant les conditions suffisantes qu'ils établissent aux courbes minimales du module  $M$  au sens usuel, on obtient des conditions suffisantes pour que celles-ci soient des courbes lisses-minimales, c'est-à-dire pour que le module  $M$  admette une courbe minimale lisse irréductible. On obtient le résultat suivant :

**Proposition 3.58.** On suppose le corps  $\mathbb{k}$  de caractéristique nulle. Soit  $M$  un module de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  et soit  $C$  sa courbe minimale. On pose  $N = 3p + 3q - r - 1 - \text{rg } v_0$  et on suppose que

les entiers  $(p, q, r)$  sont tels que l'on a  $e = r_a - 1$  et  $s_0 = r_0 + 1$ , c'est-à-dire que les courbes minimales ne sont pas obligatoires.

Si les mineurs maximaux de  $\sigma_{2,2,1}$  définissent au plus un schéma fini curviligne, de même que les  $N$ -mineurs de  $\sigma_{2,\leq 3}$ , et si les  $(N+1)$ -mineurs de  $\sigma_{2,\leq 3}$  définissent au plus une courbe lisse, la courbe minimale générale associée à  $M$  est lisse irréductible.

Ce résultat se déduit directement de la proposition IV.4.3 de [MDP-3'], à laquelle nous renvoyons pour plus de détails. Nous n'utiliserons pas ce critère dans la suite de ce travail. En effet, au chapitre 4 nous répondons positivement dans certains cas à la question de Sernesi-Walter restreinte, c'est-à-dire nous démontrons l'assertion (SWR) dans cas cas-là. Nous n'utilisons évidemment pour cela que des conditions nécessaires de lissité, et non des conditions suffisantes.

### 3.4.2 Des conditions numériques.

Les conditions exprimées par la proposition 3.53 portent toutes sur la dimension de sous-schémas définis par les mineurs d'une certaine matrice. On appelle schéma déterminantiel un tel schéma; fixer sa dimension impose des contraintes numériques sur la taille de la matrice qui le définit. En appliquant cela à ce qui précède, on obtient de nouvelles conditions nécessaires, d'une part pour que la courbe minimale associée à un module optimal soit à cohomologie semi-naturelle, et d'autre part si tel est le cas pour que celle-ci soit lisse irréductible.

Considérons une matrice  $A$  de taille  $(b, a)$  homogène à coefficients dans  $R = \mathbb{k}[X, Y, Z, T]$ . Ses mineurs sont des polynômes homogènes en  $X, Y, Z$  et  $T$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $I_k(A)$  l'idéal engendré par les  $k$ -mineurs de  $A$ . On a alors le résultat suivant (cf. par exemple [Har], proposition 17.25):

**Proposition 3.59.** *Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\mathcal{Z}$  le sous-schéma fermé de  $\mathbb{P}^3$  défini par l'idéal  $I_k(A)$ . Si  $\mathcal{Z}$  est non vide, il vérifie  $\text{codim } \mathcal{Z} \leq (b - k + 1)(a - k + 1)$ . En particulier, si le sous-schéma de  $\mathbb{P}^3$  défini par les  $a$ -mineurs de  $A$  est non vide sa codimension est majorée par  $b - a + 1$ .*

**Corollaire 3.60.** *Soit  $A$  une matrice de taille  $(b, a)$ , homogène, à coefficients dans l'idéal maximal de  $R$  c'est-à-dire de degré strictement positif, et soit  $\mathcal{Z}$  le sous-schéma de  $\mathbb{P}^3$  défini par les  $a$ -mineurs de  $A$ . Si  $\mathcal{Z}$  est contenu dans une surface (resp. une courbe, resp. un sous-schéma fini, resp. est vide) on a  $b \geq a$  (resp.  $b \geq a + 1$ , resp.  $b \geq a + 2$ , resp.  $b \geq a + 3$ ).*

**Démonstration.** On note d'abord que le sous-schéma  $\widehat{\mathcal{Z}}$  de  $\mathbb{k}^4$  défini par les  $a$ -mineurs de  $A$  est non vide puisqu'il contient  $(0, 0, 0, 0)$ . Toujours d'après [Har] sa codimension est alors majorée par  $b - a + 1$ . Si  $b \leq a + 2$  on obtient  $\text{codim } \widehat{\mathcal{Z}} \leq 3$ , donc  $\dim \widehat{\mathcal{Z}} \geq 1$ . On en déduit que le sous-schéma  $\mathcal{Z}$  de  $\mathbb{P}^3$  défini par le même idéal est également non-vide. Ceci permet alors d'une part d'affirmer que si  $\mathcal{Z}$  est vide on a  $b \geq a + 3$ , et d'autre part de déduire les autres affirmations de la proposition 3.59. ■



On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 3.61.** *Soit  $C$  une courbe et soit  $M$  son module de Rao, que l'on suppose de largeur  $l \geq 3$ . On suppose également que l'application  $v_0$  n'est pas injective.*

*Si  $C$  est à cohomologie semi-naturelle on a  $\text{rg } v_0 \geq \text{rg } u_0 + 2p + 1$ . Si de plus  $C$  est lisse irréductible et si l'on a  $e = r_a - 1$ , c'est-à-dire  $r < 3q - 3p - 1$ , on a  $\text{rg } v_0 \geq \text{rg } u_0 + 2p + 2$ .*

**Démonstration.** Si  $C$  est à cohomologie semi-naturelle et si  $v_0$  n'est pas injective les mineurs maximaux de la matrice  $\sigma_{2,2,1}$  définissent au plus une courbe. Comme cette matrice est de taille  $(4p - \text{rg } u_0, 6p - \text{rg } v_0)$ , ceci entraîne  $4p - \text{rg } u_0 \geq 6p - \text{rg } v_0 + 1$ , soit  $\text{rg } v_0 \geq \text{rg } u_0 + 2p + 1$ .

De plus d'après la proposition 3.55, si  $C$  est lisse irréductible et si on a  $e = r_a - 1$ , les mineurs maximaux de  $\sigma_{2,2,1}$  définissent au plus un sous-schéma fini ; ceci entraîne  $\text{rg } v_0 \geq \text{rg } u_0 + 2p + 2$ . ■

### 3.4.3 Un lemme de lissité.

Le lemme suivant établit dans un cas particulier une relation directe entre la structure d'un module  $M$  et la géométrie des courbes minimales qui lui sont associées. Ce type de lemme nous sera extrêmement utile au chapitre 4, où nous établirons d'ailleurs d'autres lemmes procédant d'une démarche analogue (cf. lemmes 4.13, 4.29 et 4.33). Un travail important et certainement riche d'applications consisterait à étendre la portée de ces lemmes ou à en établir d'autres du même type.

Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$  et soit  $u_0$  une structure de module de  $\widehat{E}_{p,q}$ . On rappelle que l'on note  $\tilde{u}_0 : E_0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(R_1, E_1)$  l'application linéaire qui à un vecteur  $e \in E_0$  associe l'application  $\tilde{u}_0(e)$  donnée par :

$$\tilde{u}_0(e) : \begin{bmatrix} R_1 & \rightarrow & E_1 \\ P & \mapsto & P_0(e) \end{bmatrix},$$

où l'on note  $P_0$  l'application linéaire de  $E_0$  dans  $E_1$  correspondant à la multiplication par  $P$ . Si  $(X, Y, Z, T)$  est une base fixée de  $R_1$  dans laquelle  $P$  s'écrit  $P = aX + bY + cZ + dT$ , on a  $P_0 = aX_0 + bY_0 + cZ_0 + dT_0$ . Par conséquent, le rang de l'application linéaire  $\tilde{u}_0(e)$  est exactement celui de la famille  $(X_0(e), Y_0(e), Z_0(e), T_0(e))$ .

**Définition 3.62.** *Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ . On dit qu'une structure de module  $u_0$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  est de rang insuffisant si et seulement si il existe un vecteur non nul  $e \in E_0$  vérifiant  $\text{rg } \tilde{u}_0(e) \leq 2$ . On dit qu'elle est de rang suffisant dans le cas contraire.*

On a la caractérisation suivante des modules de rang suffisant :

**Proposition 3.63.** *Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ . Un module  $u_0$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  est de rang suffisant si et seulement si il vérifie la propriété :*

$$(3.7) \quad \forall e \in E_0 \setminus \{0\}, \quad \text{rg } \tilde{u}_0(e) = \text{rg } (X_0(e), Y_0(e), Z_0(e), T_0(e)) \geq 3,$$

qui est encore équivalente à la suivante : pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments linéairement indépendants de  $R_1$ , on a  $\text{Ker } P_0 \cap \text{Ker } Q_0 = \{0\}$ .

**Définition 3.64.** *On appelle propriété du rang suffisant l'une ou l'autre des deux propriétés équivalentes ci-dessus.*

**Démonstration.** La première caractérisation est immédiate. Pour la seconde, on note qu'un module  $u_0$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  est de rang insuffisant si et seulement si il existe un vecteur non nul  $e \in E_0$  vérifiant  $\ker \tilde{u}_0(e) \geq 2$ . Or pour tout couple  $(P, e)$  de  $R_1 \times E_0$  on a :

$$P \in \ker \tilde{u}_0(e) \iff P_0(e) = 0 \iff e \in \ker P_0.$$

Donc on a  $\ker \tilde{u}_0(e) \geq 2$  si et seulement si il existe deux formes linéaires  $P$  et  $Q$  indépendantes dans  $R_1$  vérifiant  $e \in (\ker P_0 \cap \ker Q_0)$ . ■

On en déduit en particulier qu'un module  $u_0$  de rang suffisant vérifie nécessairement  $\text{rg } u_0 \geq 3$ , puisque si l'on fixe  $e \in E_0 \setminus \{0\}$  on a déjà  $\text{rg}(X_0(e), Y_0(e), Z_0(e), T_0(e)) \geq 3$ . L'intérêt de la notion de module de rang suffisant réside dans la proposition suivante :

**Proposition 3.65.** *Soit  $M$  un module de largeur  $l \geq 3$  qui admet une courbe minimale  $C$  à cohomologie semi-naturelle lisse irréductible. Alors le module  $u_0$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  défini par  $M$  est de rang suffisant.*

Cette proposition est un corollaire immédiat du lemme suivant :

**Lemme 3.66.** *Soit  $\rho$  une fonction non nulle de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  à support fini normalisée de largeur  $l > 0$ . Soit  $M$  un module de  $\widehat{E}_\rho$  et soit  $C$  une courbe minimale de  $M$ . On suppose que l'on a  $q(2) = l_2(2)$  ; c'est par exemple le cas si  $C$  est de rang maximum avec  $l \geq 3$ . Si  $u_0$  est un module de  $\widehat{E}_{p,q}$  de rang insuffisant la courbe  $C$  contient une droite, donc n'est pas lisse irréductible.*

**Démonstration.** Soit  $e \in L_0$  vérifiant  $\text{rg } \tilde{u}_0(e) \leq 2$ . On choisit une base  $(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$  telle que l'on ait  $Z_0(e) = T_0(e) = 0$ . Les vecteurs  $\nu_Z = (1 \otimes Z \otimes e)$  et  $\nu_T = (1 \otimes T \otimes e)$  appartiennent à  $R(-1) \otimes_{\mathbb{k}} \ker u_0$  et sont linéairement indépendants. D'autre part le vecteur  $\omega = (1 \otimes Z \wedge T \otimes e)$  appartient à  $R(-2) \otimes_{\mathbb{k}} \ker v_0$  et vérifie  $V(\omega) = Z \otimes T \otimes e - T \otimes Z \otimes e$ , soit  $V(\omega) = Z \cdot \nu_T - T \cdot \nu_Z$ . Si l'on complète respectivement  $(\nu_Z, \nu_T)$  et  $(\omega)$  en des bases de  $R(-1) \otimes_{\mathbb{k}} \ker u_0$  et  $R(-2) \otimes_{\mathbb{k}} \ker v_0$ , l'application  $\sigma_{2,2,1}$  se représente par une matrice de la forme :

$$\sigma_{2,2,1} = \begin{pmatrix} -T & \cdots \\ Z & \cdots \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Si  $q(2) = l_2(2)$ , la courbe  $C$  contient le sous-schéma défini par les mineurs maximaux de cette matrice, lesquels s'annulent tous sur la droite  $Z = T = 0$ . ■

### 3.5 Conditions d'obstruction.

Dans ce paragraphe, nous donnons une condition portant sur le module de Rao  $M$  d'une courbe  $C$  à cohomologie semi-naturelle pour qu'elle corresponde à un point lisse du schéma de

Hilbert. Rappelons que c'est le cas si et seulement si le module  $M$  est un point lisse du schéma  $\widehat{E}_\rho$ . La condition que nous obtenons sur  $M$  est seulement une condition suffisante, mais elle donne plus de renseignements que la seule lissité. De façon précise, nous montrons que si le module de Rao  $M$  d'une courbe  $C$  à cohomologie semi-naturelle vérifie  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$  cette courbe est un point lisse du schéma de Hilbert et la composante de celui-ci qui contient  $C$  est de dimension  $4d$ . Réciproquement si cette condition de dimension est vérifiée la courbe  $C$  est un point lisse si et seulement si on a  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$ . Ce critère de lissité fournit évidemment par contre-coup une condition nécessaire d'obstruction : pour que la courbe  $C$  soit obstruée, il faut que le module  $M$  vérifie  $\text{ext}^2(M, M)^0 \neq 0$ .

Pour montrer ce résultat, nous comparons la dimension du schéma  $\widehat{E}_\rho$  au voisinage de  $M$  avec celle de l'espace tangent au même point. Cependant, alors que l'on sait calculer la seconde en tout module  $M$  de  $\widehat{E}_\rho$ , on ne connaît de façon générale qu'une minoration de la dimension de ce schéma, ce qui explique pourquoi nous obtenons seulement une condition suffisante.

### 3.5.1 L'espace tangent au schéma des modules de Rao.

M. Martin-Deschamps et D. Perrin ont déterminé dans [MDP-2] la dimension de l'espace tangent au schéma  $\widehat{E}_\rho$  en un module  $M$ . Pour exprimer leur résultat, posons les notations suivantes :

**Définition 3.67.** Soit  $\rho$  une fonction à support fini de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ . On note  $\widehat{\delta}_\rho$  la quantité :

$$\widehat{\delta}_\rho = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n)^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n) \partial^4 \rho(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n) \times [\rho(n) - \partial^4 \rho(n)].$$

**Définition 3.68.** Soit  $\rho$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  à support fini et soit  $M$  un module de  $\widehat{E}_\rho$ . On note  $T_{\widehat{E}_\rho, M}$  l'espace tangent à  $\widehat{E}_\rho$  en  $M$  et  $t_{\widehat{E}_\rho, M}$  sa dimension. On note par ailleurs  $\delta_M$  la quantité  $\delta_M = \sum_{i=2}^4 (-1)^i \text{ext}^i(M, M)^0$ , où  $\text{ext}^i(M, M)^0$  désigne la dimension de l'espace vectoriel  $\text{Ext}^i(M, M)^0$ .

D'après [MDP-2] (paragraphe III.4) on a :

**Proposition 3.69.** (M. Martin-Deschamps et D. Perrin)

Soit  $\rho$  une fonction à support fini et  $M$  un module de  $\widehat{E}_\rho$ . On a  $t_{\widehat{E}_\rho, M} = \widehat{\delta}_\rho + \delta_M$ .

On note que pour un module  $M$  fixé, la quantité  $\widehat{\delta}_\rho$  ne dépend que de la fonction  $\rho$ , tandis que  $\delta_M$  dépend également de la structure du module  $M$ .

**Démonstration.** Ce n'est pas là à proprement parler la formulation de [MDP-2], mais c'est une réécriture directe de leurs résultats. D'après la proposition [MDP-2] III.4.1, on a :

$$t_{\widehat{E}_\rho, M} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n)^2 - h_M + \text{ext}^1(M, M)^0,$$

avec  $h_M = \text{hom}(M, M)^0 = \text{ext}^0(M, M)^0$ . D'après la proposition [MDP-2] III.4.2 on a :

$$h_M - \text{ext}^1(M, M)^0 + \delta_M = \sum_{i=0}^4 (-1)^i \text{ext}^i(M, M)^0 = \sum_{i=0}^4 (-1)^i \text{hom}(L_i, M)^0,$$

donc  $-h_M + \text{ext}^1(M, M)^0 = \delta_M - \sum_{i=0}^4 (-1)^i \text{hom}(L_i, M)^0$ . Enfin, d'après la proposition [MDP-2] III.4.3 on a  $\sum_{i=0}^4 (-1)^i \text{hom}(L_i, M)^0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n) \partial^4 \rho(n)$ . On obtient  $t_{\widehat{E}_\rho, M} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n)^2 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n) \partial^4 \rho(n) + \delta_M$ , c'est-à-dire  $t_{\widehat{E}_\rho, M} = \widehat{\delta}_\rho + \delta_M$ . ■

On peut donner un certain nombre d'expressions équivalentes de la quantité  $\widehat{\delta}_\rho$ . Tout d'abord, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a  $\partial^4 \rho(n) = \rho(n) - 4\rho(n-1) + 6\rho(n-2) - 4\rho(n-3) + \rho(n-4)$ , d'où :

$$\widehat{\delta}_\rho = 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n) \rho(n-1) - 6 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n) \rho(n-2) + 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n) \rho(n-3) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n) \rho(n-4).$$

En particulier, si la fonction  $\rho$  est de largeur 2,  $\widehat{\delta}_\rho$  vaut  $4pq$ , qui est la dimension du schéma  $\widehat{E}_\rho$ . Si  $\rho$  est de largeur 3,  $\widehat{\delta}_\rho$  est la quantité  $4pq + 4qr - 6pr$ , qui minore les dimensions des composantes du schéma  $\widehat{E}_\rho$ . La quantité  $\widehat{\delta}_\rho$  généralisant les précédentes en toute largeur, on peut se demander s'il reste vrai en largeurs supérieures ou égales à 4 qu'elle minore encore la dimension de toute composante du schéma  $\widehat{E}_\rho$ . Nous montrerons au paragraphe 3.5.4 que c'est vrai du moins pour les composantes qui contiennent des module de Rao de courbes à cohomologie semi-naturelle.

D'autre part, on rappelle que pour toute fonction  $\rho$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  à support fini on a posé  $\delta_\rho = 1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n) \partial^4 \rho(n)$ , donc on a  $\widehat{\delta}_\rho = \delta_\rho + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n)^2 - 1$ . On en déduit le résultat suivant :

**Proposition 3.70.** *Soit  $\rho$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  normalisée, de largeur  $l \geq 4$ , et soit  $\tilde{\rho}$  la fonction normalisée associée.*

i) *Si  $\tilde{\rho}$  est sous-naturelle on a  $\widehat{\delta}_\rho = \sum_{i=4}^{l-1} \rho(i)^2 + (4pq + 4qr + 4rs) - (6pr + 6rs) + 4ps$ .*

ii) *Si  $\tilde{\rho}$  est naturelle et si  $d$  est le degré qui lui est associé par la proposition 3.14 on a  $\widehat{\delta}_\rho = 4d + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n)^2 - 1$ .*

**Démonstration.** D'après la proposition 3.27, pour une fonction  $\tilde{\rho}$  normalisée et naturelle de largeur  $l \geq 4$  on a  $\delta_\rho = 1 - 4d$ . D'après la proposition 3.29 pour toute fonction  $\rho$  à support fini on a  $\delta_\rho = \delta_{\tilde{\rho}}$ , ce qui prouve le second point. Par ailleurs, le calcul effectué dans la démonstration de la proposition 3.27 montre en fait que pour une fonction  $\tilde{\rho}$  sous-naturelle on a  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\rho}(n) \partial^4 \tilde{\rho}(n) = (p^2 + q^2 + r^2 + s^2) - (4pq + 4qr + 4rs) + (6pr + 6rs) - 4ps$ . ■

### 3.5.2 Lien avec le schéma $\widehat{H}_{\gamma, \rho}$ .

Dans ce paragraphe nous donnons une dernière écriture de la quantité  $\widehat{\delta}_\rho$ , qui établit un lien entre cette quantité et la dimension du schéma  $H_{\gamma, \rho}$ . On rappelle que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on note  $E_n$  l'espace vectoriel  $\mathbb{k}^{\rho(n)}$  muni de sa base canonique. On note de plus  $G$  le groupe  $\prod_{n \in [r_a, r_o]} GL(E_n)$  et  $\delta_G = \sum_{n=r_a}^{r_o} \rho(n)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n)^2$  sa dimension. D'après

[MDP-1] (paragraphe VI.4.b) le schéma  $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$  est un fibré en  $G$  au-dessus de  $H_{\gamma,\rho}$ . Notons  $\pi_H$  la projection de  $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$  sur  $H_{\gamma,\rho}$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{H}_{\gamma,\rho} & \xrightarrow{\widehat{\Phi}} & \widehat{E}_\rho \\ \pi_H \downarrow & & \downarrow \\ H_{\gamma,\rho} & \xrightarrow{\Phi} & E_\rho \end{array}$$

Le groupe  $G$  opère de façon naturelle sur  $\widehat{E}_\rho$ , l'action d'un élément de  $G$  consistant à changer les bases fixées de chacun des espaces vectoriels  $E_n$ . Le stabilisateur d'une structure de module pour cette action est exactement le sous-groupe  $\Gamma$  de  $G$  isomorphe à  $\mathbf{k}^*$  formé par les homothéties de  $G$ , c'est-à-dire les éléments de la forme  $(\lambda \text{Id}_{E_{r_a}}, \dots, \lambda \text{Id}_{E_{r_o}})$  pour  $\lambda \in \mathbf{k}^*$ .

Notons  $G'$  le groupe quotient de  $G$  par  $\Gamma$ ,  $\delta'_G = \delta_G - 1$  sa dimension et  $\widehat{H}'_{\gamma,\rho}$  le schéma quotient de  $H_{\gamma,\rho}$  par  $\Gamma$ . Le schéma  $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$  est un fibré en  $\Gamma$  au-dessus de  $\widehat{H}'_{\gamma,\rho}$ , lequel est lui-même un fibré en  $G'$  au-dessus de  $H_{\gamma,\rho}$ , ce qui correspond au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \widehat{H}_{\gamma,\rho} & \\ & \downarrow & \\ & \widehat{H}'_{\gamma,\rho} & \xrightarrow{\widehat{\Phi}'} \widehat{E}_\rho \\ \pi'_H \downarrow & & \downarrow \\ H_{\gamma,\rho} & \xrightarrow{\Phi} & E_\rho \end{array}$$

On a alors  $\delta'_G = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \rho(n)^2 - 1$ , donc  $\widehat{\delta}_\rho = \delta_\rho + \delta'_G$ . On pose en outre la définition suivante :

**Définition 3.71.** Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle dont la cohomologie est donnée par  $(\gamma, \rho)$  avec  $\rho$  de largeur  $l \geq 3$ , de sorte que  $\rho$  détermine  $\gamma$ . On note  $\widehat{F}_\rho$  l'image des flèches  $\widehat{\Phi}$  ou  $\widehat{\Phi}'$  dans  $\widehat{E}_\rho$ .

Comme la flèche  $\widehat{\Phi}$  est lisse irréductible,  $\widehat{F}_\rho$  est un sous-schéma ouvert non vide de  $\widehat{E}_\rho$ . Les flèches  $\widehat{\Phi}$  et  $\pi_H$  (ou  $\widehat{\Phi}'$  et  $\pi'_H$ ) correspondant chacune à des fibrés, elles établissent une correspondance entre les composantes des schémas  $H_{\gamma,\rho}$  et  $\widehat{F}_\rho$ . De façon précise, si  $\mathcal{Z}$  est une composante de  $H_{\gamma,\rho}$  la composante  $\widehat{\mathcal{Z}}$  de  $\widehat{F}_\rho$  correspondante est définie par  $\widehat{\mathcal{Z}} = \widehat{\Phi}[(\pi_H)^{-1}(\mathcal{Z})]$  ou par  $\widehat{\mathcal{Z}} = \widehat{\Phi}'[(\pi'_H)^{-1}(\mathcal{Z})]$ . Réciproquement, si  $\widehat{\mathcal{Z}}$  est une composante de  $\widehat{F}_\rho$  la composante correspondante de  $H_{\gamma,\rho}$  est  $\mathcal{Z} = \pi_H[\widehat{\Phi}^{-1}(\widehat{\mathcal{Z}})] = \pi'_H[\widehat{\Phi}'^{-1}(\widehat{\mathcal{Z}})]$ .

Si  $l \geq 4$  tout module de  $\widehat{E}_\rho$  admet une unique courbe minimale. La projection  $\widehat{\Phi}'$  établit alors un isomorphisme de  $\widehat{H}'_{\gamma,\rho}$  sur l'ouvert  $\widehat{F}_\rho$  de  $\widehat{E}_\rho$ , et le schéma  $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$  se réalise comme un fibré en  $\Gamma$  au-dessus de  $\widehat{F}_\rho$ . Si  $\mathcal{Z}$  est une composante de  $H_{\gamma,\rho}$  de dimension  $\delta$ , la composante correspondante  $\widehat{\mathcal{Z}} = \widehat{\Phi}'[(\pi'_H)^{-1}(\mathcal{Z})]$  de  $\widehat{F}_\rho$  a pour dimension  $\widehat{\delta} = \delta + \delta'_G$ .

### 3.5.3 Calcul des groupes d'extension.

Les groupes  $\text{Ext}^i(M, M)^0$  se calculent à partir de la résolution (3.3) de  $M$  :

$$0 \rightarrow L_4 \xrightarrow{\sigma_4} L_3 \xrightarrow{\sigma_3} L_2 \xrightarrow{\sigma_2} L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M \rightarrow 0.$$

Nous avons en fait seulement besoin de connaître leurs dimensions, et encore uniquement pour  $i \in \{2, 3, 4\}$ . En appliquant le foncteur  $\text{Hom}(\cdot, M)$  à la résolution ci-dessus, on obtient le complexe :

$$\text{Hom}(L_0, M)^0 \xrightarrow{d_1} \text{Hom}(L_1, M)^0 \xrightarrow{d_2} \text{Hom}(L_2, M)^0 \xrightarrow{d_3} \text{Hom}(L_3, M)^0 \xrightarrow{d_4} \text{Hom}(L_4, M)^0.$$

Les groupes  $\text{Ext}^i(M, M)^0$  sont les groupes d'homologie de ce complexe. De façon précise, pour  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  on a  $\text{Ext}^i(M, M)^0 = \text{Ker } d_{i+1} / \text{Im } d_i$ , en notant  $d_0$  et  $d_5$  les flèches nulles  $d_0 : 0 \rightarrow \text{Hom}(L_0, M)^0$  et  $d_5 : \text{Hom}(L_4, M)^0 \rightarrow 0$ . On obtient  $\text{ext}^i(M, M)^0 = \ker d_{i+1} - \text{rg } d_i$ .

Les flèches  $d_i$  se déduisent des flèches  $\sigma_i$  de la façon suivante. On rappelle qu'on a posé  $L_i = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R(-n)^{l_i(n)} = \bigoplus_{n=i}^{i+l-1} R(-n)^{l_i(n)}$  pour  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ . On peut alors identifier  $\text{Hom}(L_i, M)^0$  à  $\bigoplus_{n=i}^{i+l-1} M_n^{l_i(n)}$ . Les morphismes  $\sigma_i$  sont homogènes gradués ; on a noté  $\sigma_{i,n,m}$  la composante de  $\sigma_i$  qui va de  $R(-n)^{l_i(n)}$  dans  $R(-m)^{l_{i-1}(m)}$ .

La flèche  $d_i : \text{Hom}(L_{i-1}, M)^0 \rightarrow \text{Hom}(L_i, M)^0$ , c'est-à-dire la flèche :

$$d_i : \bigoplus_{n=i-1}^{i+l-2} M_n^{l_{i-1}(n)} \longrightarrow \bigoplus_{n=i}^{i+l-1} M_n^{l_i(n)}$$

est également homogène graduée. La composante  $d_{i,m,n}$  de  $d_i$  qui va de  $M_m^{l_{i-1}(m)}$  dans  $M_n^{l_i(n)}$  se déduit de la flèche  $\sigma_{i,n,m}$ , ou plutôt de sa transposée  ${}^t\sigma_{i,n,m}$ . Les coefficients de la matrice représentant cette dernière dans des bases fixées sont des polynômes homogènes de degré  $n - m$ . La flèche  $d_{i,m,n}$  se réalise alors dans les bases correspondantes comme l'application linéaire par blocs obtenue en substituant à chaque coefficient  $P$  l'application linéaire  $P_m : M_m \rightarrow M_n$  qui lui est associée par la structure de module de  $M$ , c'est-à-dire  $\varphi(P)$  si l'on note  $\varphi$  l'application homogène graduée  $\varphi : R \rightarrow \text{End}_{\text{Grad}}(E) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \text{End}^d(E)$  qui définit la structure du module  $M$ . La flèche  $d_{i,m,n}$  se représente ainsi par une matrice de taille  $[l_i(n) \times \rho(n), l_{i-1}(m) \times \rho(m)]$  ; elle est nulle si  $n \leq m$ .

Dans le cas des courbes à cohomologie semi-naturelle, le calcul des groupes  $\text{Ext}^i(M, M)^0$  se simplifie quelque peu :

**Proposition 3.72.** *Soit  $M \in \widehat{E}_\rho$  un module de largeur  $l \geq 3$  et soit  $C$  une courbe minimale associée à  $M$ . On suppose que l'une des trois hypothèses suivantes est vérifiée :  $l = 3$ , ou  $M$  est un module optimal, ou  $C$  est de rang maximum. Alors on a  $\text{Ext}^4(M, M)^0 = 0$ ,  $\text{Ext}^3(M, M)^0 = 0$  et  $\text{Ext}^2(M, M)^0 = \text{Coker } d_2$ . On obtient  $\delta_M = \text{coker } d_2$ .*

**Démonstration.** Sous chacune des trois hypothèses considérées, le module  $L_3$  (respectivement  $L_4$ ) est concentré en degrés  $l, l+1$  et  $l+2$  (respectivement  $l+1, l+2$  et  $l+3$ ). Comme  $M$  est concentré entre les degrés 0 et  $l-1$ , on obtient  $\text{Hom}(L_3, M)^0 = 0$  et  $\text{Hom}(L_4, M)^0 = 0$ , donc  $\text{Ext}^4(M, M)^0 = \text{Ext}^3(M, M)^0 = 0$  et  $\text{Ext}^2(M, M)^0 = \text{Coker } d_2$ . ■

On en déduit la proposition suivante, qui généralise la proposition III.4.4 de [MDP-2] :

**Proposition 3.73.** *Soit  $M \in \widehat{E}_\rho$  un module de largeur  $l \geq 3$  et soit  $C$  une courbe minimale de  $M$ . Si  $l = 3$ , ou si  $M$  est un module optimal, ou si la courbe  $C$  est de rang maximum on a :*

$${}^t_{\widehat{E}_\rho, M} = \widehat{\delta}_\rho + \text{ext}^2(M, M)^0 = \widehat{\delta}_\rho + \text{coker } d_2.$$

Si  $C$  est à cohomologie semi-naturelle, on a en outre  $L_2 = P \oplus F$ . Le module  $P$  est alors concentré en degrés 2 et 3 et le module  $F$  l'est en degrés  $l$  et  $l+1$ , donc on a  $\text{Hom}(F, M)^0 = 0$  et  $\text{Hom}(L_2, M)^0 = \text{Hom}(P \oplus F, M)^0 = \text{Hom}(P, M)^0$ . On obtient :

**Proposition 3.74.** *Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle et  $M$  son module de Rao. On a  $\delta_M = \text{ext}^2(M, M)^0 = \text{coker} [\text{Hom}(L_1, M)^0 \rightarrow \text{Hom}(P, M)^0]$ .*

Notons encore  $d_2$  l'application  $[\text{Hom}(L_1, M)^0 \rightarrow \text{Hom}(P, M)^0]$ . Si l'on identifie l'espace  $\text{Hom}(R(-n), M)^0$  à  $M_n$ , cette application s'écrit sous la forme :

$$d_2 : M_2^{4p-r-r\mathfrak{g}v_0} \oplus M_1^{4p-r\mathfrak{g}u_0} \longrightarrow M_3^{3q-3p-r-1} \oplus M_2^{6p-r\mathfrak{g}v_0}$$

et se représente par une matrice du type :

$$d_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_2^{4p-r-r\mathfrak{g}v_0} & M_1^{4p-r\mathfrak{g}u_0} \\ \left( \begin{array}{c|c} d_{2,2,3} & d_{2,1,3} \\ \hline 0 & d_{2,1,2} \end{array} \right) & \begin{array}{c} M_3^{3q-3p-r-1} \\ M_2^{6p-r\mathfrak{g}v_0} \end{array} \end{array} \end{array}$$

Cette expression se simplifie dans un certain nombre de cas particuliers. Si  $l = 3$  on a  $M_3 = 0$ , donc  $d_2 = d_{2,1,2}$ , soit  $d_2 : M_1^{4p-r\mathfrak{g}u_0} \rightarrow M_2^{6p-r\mathfrak{g}v_0}$ . Si  $e = r_a - 2$ , c'est-à-dire si  $r = 3q - 3p - 1$ , on a  $M_3^{3q-3p-r-1} = 0$  et on obtient de même  $d_2 = d_{2,1,2}$ . Par ailleurs si  $u_0$  est injective on a  $d_2 = d_{2,2,3}$ , soit  $d_2 : M_2^{4p-r-r\mathfrak{g}v_0} \rightarrow M_3^{3q-3p-r-1}$ . Enfin si l'application  $v_0$  est injective on a  $d_2 = (d_{2,2,3} \ d_{2,1,3})$  c'est-à-dire  $d_2 : M_2^{4p-r-r\mathfrak{g}v_0} \oplus M_1^{4p-r\mathfrak{g}u_0} \rightarrow M_3^{3q-3p-r-1}$ .

En particulier, si  $v_0$  est injective et si on a  $l = 3$  l'application  $d_2$  est automatiquement surjective. On obtient le résultat suivant :

**Proposition 3.75.** *Soit  $\rho$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  normalisée de largeur  $l = 3$ ,  $M$  un module de  $\widehat{E}_\rho$  et  $C$  une courbe minimale associée à  $M$ , que l'on suppose à cohomologie semi-naturelle. Si l'application  $v_0$  est injective on a  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$ .*

Dans le chapitre 2, nous avons établi une condition nécessaire pour que l'application  $v_0$  soit injective portant sur le multirang  $(a_0, a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3)$  de la structure du module  $u_0$ , ce qui renforce l'intérêt de ce résultat. Dans le cas particulier des courbes lisses irréductibles, on peut le compléter par la proposition suivante :

**Proposition 3.76.** *Soit  $C$  une courbe lisse irréductible, à cohomologie semi-naturelle et dont le module de Rao  $M$  est de largeur 3. On suppose de plus que l'on a  $e = r_a - 1$ , c'est-à-dire  $r < 3q - 3p - 1$ . Si le module  $M$  vérifie  $\ker v_0 = 1$  on a  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$ .*

**Démonstration.** Par hypothèse l'application  $v_0$  n'est pas injective. Comme la courbe  $C$  est lisse et que l'on a  $e = r_a - 1$ , les mineurs maximaux de la matrice  $\sigma_{2,2,1}$  définissent au plus un schéma fini d'après la proposition 3.55. Comme on a  $\ker v_0 = 1$ , cette matrice possède une seule colonne et ses mineurs maximaux sont simplement ses coefficients, qui sont des formes linéaires. Pour qu'ils définissent un schéma fini, il faut que trois au moins d'entre eux soient linéairement indépendants ; on peut les noter  $Y$ ,  $Z$  et  $T$  et les compléter en une base

$(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$ . La matrice  $\sigma_{2,2,1}$  est alors de la forme  $\begin{pmatrix} Y \\ Z \\ T \\ \vdots \end{pmatrix}$ , et l'application  $d_2$  peut

s'écrire  $(Y_1 \ Z_1 \ T_1 \ \dots)$ . Comme la courbe  $C$  est de co-rang maximum on a  $l_1(3) = 0$  d'après le corollaire 3.39. Or  $l_1(3) = \text{coker } v_1$ , donc la matrice :

$$v_1 = \begin{pmatrix} Y_1 & Z_1 & T_1 & 0 & 0 & 0 \\ -X_1 & 0 & 0 & Z_1 & T_1 & 0 \\ 0 & -X_1 & 0 & -Y_1 & 0 & T_1 \\ 0 & 0 & -X_1 & 0 & -Y_1 & -Z_1 \end{pmatrix}$$

est surjective. C'est alors également le cas de sa première ligne, donc de  $d_2$ , et le module  $M$  vérifie  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$ . ■

Enfin, une dernière remarque concerne la dualité : si l'on note  $M^*$  le module dual de  $M$ , on a  $\text{Ext}^2(M, M)^0 \cong \text{Ext}^2(M^*, M^*)^0$ . Ceci fournit une façon alternative de calculer le groupe  $\text{Ext}^2(M, M)^0$ , donc aussi la quantité  $\delta_M$ .

### 3.5.4 Une condition nécessaire et parfois suffisante d'obstruction.

La proposition 3.69 donne la dimension de l'espace tangent au schéma  $\widehat{E}_\rho$  en  $M$ , qui vaut  $t_{\widehat{E}_\rho, M} = \widehat{\delta}_\rho + \delta_M$ . Si on montre que le module  $M$  est contenu dans une composante de  $\widehat{E}_\rho$  de dimension  $\widehat{\delta}_\rho$ , on obtient qu'il est un point lisse de  $\widehat{E}_\rho$  si et seulement si  $\delta_M = 0$ . De plus d'après la proposition 3.72, si  $\rho$  est de largeur  $l \geq 3$  et si on a  $l = 3$ , ou si le module  $M$  est optimal, ou si la courbe minimale associée est de rang maximum, on a  $\delta_M = \text{ext}^2(M, M)^0$ .

Malheureusement, la détermination exacte de la dimension des composantes du schéma  $\widehat{E}_\rho$  est en général très difficile, même en largeur 3. Si l'on montre au moins que le module  $M$  est contenu dans une composante de dimension minorée par  $\widehat{\delta}_\rho$ , on obtient déjà la condition suffisante de lissité suivante : si  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$ , le module  $M$  est un point lisse de  $\widehat{E}_\rho$  et la composante qui le contient a pour dimension  $\widehat{\delta}_\rho$ .

Cette méthode est déjà employée dans [MDP-2] dans le cas des modules de largeur 3. Soit  $\rho$  une fonction à support fini, normalisée de largeur 3. La quantité  $\widehat{\delta}_\rho$  vaut  $4pq + 4qr - 6pr$ , et d'après [MDP-2] elle minore la dimension de toute composante du schéma  $\widehat{E}_\rho$ . On en déduit le résultat suivant, qui est le corollaire III.4.5 de [MDP-2] :

**Proposition 3.77.** (M. Martin-Deschamps et D. Perrin)



Soit  $\rho$  une fonction de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$  de largeur 3, normalisée, donnée par  $(p, q, r)$  et soit  $M$  un module de  $\widehat{E}_{p,q,r}$ .

i) Si  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$  le module  $M$  est un point lisse du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  et celui-ci a pour dimension  $\widehat{\delta}_\rho$  au voisinage de  $M$ . C'est en particulier le cas si  $v_0$  est injective.

ii) Si  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est irréductible et si  $(p, q, r)$  diffère de  $(1, 1, 1)$  et de  $(1, 2, 1)$ , ou plus généralement si  $M$  est contenu dans une composante de dimension  $4pq + 4qr - 6pr$  de  $\widehat{E}_{p,q,r}$ , la réciproque du point i) est vraie.

De plus, ces auteurs ajoutent que sous les premières hypothèses du point ii) l'ouvert sur lequel  $v_0$  est injective est non vide, donc le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est génériquement lisse (cf. [MDP-2] corollaire III.3.3). Le critère explicite d'irréductibilité du schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  que nous avons établi au chapitre 2 fournit en outre le corollaire effectif suivant :

**Corollaire 3.78.** Soit  $(p, q, r) \in \mathbb{N}^{*3}$ . On pose  $m = \max(2r + 10p, 2p + 10r)$  si  $r/p \in [4/9, 9/4]$  et  $m = \max(6r + p, 6p + r)$  sinon. Si  $4q \geq m$ , le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est génériquement lisse et un module  $M$  est un point lisse de  $\widehat{E}_{p,q,r}$  si et seulement si il vérifie  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$ .

Enfin, on obtient immédiatement à partir des propositions 3.75 et 3.76 les critères suivants de non-obstruction, dont le premier point est déjà signalé dans [MDP-2] (paragraphe V.3.c) et dans [BM-2] (paragraphe 4) :

**Proposition 3.79.** Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle de degré  $d$  et genre  $g$ . Soit  $M$  son module de Rao, qu'on suppose de largeur 3.

i) Si l'application  $v_0$  est injective la courbe  $C$  est un point lisse de  $H_{d,g}$ .

ii) Si on a  $\ker v_0 = 1$  et si la courbe  $C$  est lisse irréductible et vérifie  $e = r_a - 1$ , c'est-à-dire si on a  $r < 3q - 3p - 1$ , la courbe  $C$  un point lisse de  $H_{d,g}$ .

Nous établissons ici l'analogie de la proposition 3.77 concernant les modules de Rao des courbes à cohomologie semi-naturelle de largeur  $l \geq 4$ . Pour cela, nous appliquons le même raisonnement que celui qui précède au sous-schéma ouvert  $\widehat{F}_\rho$  de  $\widehat{E}_\rho$ , qui est l'image de  $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$  par la flèche  $\widehat{\Phi}$ .

**Proposition 3.80.** Soit  $\rho$  la fonction de Rao d'une courbe  $C$  à cohomologie semi-naturelle et soit  $l$  sa largeur. Si  $l \geq 4$ , la dimension de toute composante du schéma  $\widehat{F}_\rho$  est minorée par  $\widehat{\delta}_\rho$ .

**Démonstration.** Soit  $\widehat{\mathcal{Z}}$  une composante de  $\widehat{F}_\rho$  de dimension  $\widehat{\delta}$ . D'après la remarque qui suit la définition 3.71, le schéma  $\mathcal{Z} = \pi_H[\widehat{\Phi}^{-1}(\widehat{\mathcal{Z}})]$  est une composante de  $H_{\gamma,\rho}$ , de dimension  $\delta = \widehat{\delta} - \delta'_G$ . Comme  $H_{\gamma,\rho}$  est un ouvert de  $H_{d,g}$  et que la dimension de toute composante de ce dernier est minorée par  $4d$ , on obtient  $\delta \geq 4d$ , soit  $\widehat{\delta} \geq 4d + \delta'_G$ . De plus la fonction  $\rho$  est naturelle, donc d'après la proposition 3.70 on a  $\widehat{\delta}_\rho = 4d + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n)^2 - 1 = 4d + \delta'_G$ , donc on obtient  $\widehat{\delta} \geq \widehat{\delta}_\rho$ . ■

On en déduit le résultat suivant, analogue de la proposition 3.77 :

**Proposition 3.81.** *Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle,  $M$  son module de Rao et  $\rho$  la fonction de Rao associée, que l'on suppose de largeur  $l \geq 4$ .*

*i) Si  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$  le module  $M$  est un point lisse de  $\widehat{F}_\rho$ , c'est-à-dire aussi de  $\widehat{E}_\rho$ , et la courbe  $C$  est un point lisse de  $H_{\gamma, \rho}$  ou  $H_{d, g}$ . De plus, ces deux derniers schémas sont de dimension  $4d$  au voisinage de  $C$ .*

*ii) Si le module  $M$  est contenu dans au moins une composante de  $\widehat{F}_\rho$  de dimension  $\widehat{\delta}_\rho$ , c'est-à-dire si la courbe  $C$  est contenue dans au moins une composante de  $H_{\gamma, \rho}$  de dimension  $4d$ , la réciproque de i) est vraie. La courbe  $C$  est alors un point lisse de  $H_{d, g}$  si et seulement si on a  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$ .*

**Remarque 3.82.** *Pour montrer le corollaire 3.81, nous nous sommes servis du calcul de la dimension  $t_{\widehat{E}_\rho, M}$  de l'espace tangent à  $\widehat{E}_\rho$  en  $M$  ainsi que des propriétés de la fonction  $\rho$ , c'est-à-dire essentiellement de résultats liés à l'étape du bas, que nous avons ensuite relevé au schéma  $H_{\gamma, \rho}$  via les flèches  $\widehat{\Phi}$  ou  $\widehat{\Phi}'$ . Cette méthode possède l'avantage de fournir en retour des informations sur la dimension du schéma  $\widehat{F}_\rho$ , donc de certaines composantes du schéma  $\widehat{E}_\rho$  qui nous intéresse ici.*

*On aurait pu montrer également ce résultat par une méthode plus directe, en appliquant la démarche suivante. Soit  $C$  une courbe dont le module de Rao est de largeur  $l \geq 3$ . En appliquant le foncteur  $\text{Hom}(\cdot, \mathcal{J}_C)$  aux suites exactes de faisceaux :*

$$0 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{J}_C \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow 0,$$

*dans lesquelles on note  $\mathcal{F}$  le faisceau associé au  $R$ -module gradué  $F$ , et en tenant compte des relations  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)^{l_1(1)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2)^{l_1(2)}$  et  $\mathcal{P} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-2)^{q(2)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-3)^{q(3)}$ , on montre que si la courbe  $C$  est à cohomologie semi-naturelle elle vérifie  $\text{Ext}^2(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)^0 = \text{Ext}^2(M, M)^0$ . Or la dimension  $t_{d, g}$  de l'espace tangent  $T_{d, g}$  à  $H_{d, g}$  en  $C$  vérifie :*

$$t_{d, g} = h^0 \mathcal{N}_C = 4d + h^1 \mathcal{N}_C = 4d + \text{ext}^2(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)^0 = 4d + \text{ext}^2(M, M)^0.$$

*On en déduit que  $\text{ext}^2(M, M)^0$  est nul si et seulement si  $C$  est un point lisse de  $H_{d, g}$  et si la composante contenant  $C$  est de dimension  $4d$ . Cette méthode possède quant à elle l'avantage d'étendre la partie du résultat concernant la dimension aux cas où la fonction de Rao est de largeur 3.*

*On aurait pu également utiliser directement les résultats de [W-2].*

On déduit enfin des propositions 3.81 et 3.75 le résultat suivant :

**Proposition 3.83.** *Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle de degré  $d$  et genre  $g$  qui vérifie  $\epsilon = r_a - 2$ , c'est-à-dire  $r = 3q - 3p - 1$ . On suppose que son module de Rao est de largeur  $l \geq 4$ . Si l'application  $v_0$  est injective, la courbe  $C$  est un point lisse de  $H_{d, g}$  et la composante qui contient  $C$  a pour dimension  $4d$ .*

### 3.6 Récapitulation.

Nous récapitulons dans ce paragraphe les conditions établies tout au long de ce chapitre, qui peuvent être aussi bien des conditions nécessaires ou suffisantes ou les deux à la fois. Nous rappelons tout d'abord des conditions nécessaires pour qu'une fonction  $\rho$  à support fini de largeur  $l \geq 3$  soit la fonction de Rao d'une courbe  $C$  à cohomologie semi-naturelle. Nous fixons ensuite une telle fonction  $\rho$  et un module  $M$  de  $\widehat{E}_\rho$ , et nous donnons des conditions nécessaires sur sa résolution, puis des conditions nécessaires et suffisantes sur sa fonction  $q$  pour qu'une courbe  $C$  de la classe de biliaison définie par  $M$  soit à cohomologie semi-naturelle. Si  $l \geq 3$  il faut déjà que la courbe  $C$  soit une courbe minimale de cette classe de biliaison.

Enfin si  $C$  est effectivement à cohomologie semi-naturelle nous donnons d'une part des conditions nécessaires pour qu'elle soit lisse irréductible et d'autre part des conditions suffisantes pour qu'elle soit un point lisse du schéma de Hilbert, c'est-à-dire a contrario des conditions nécessaires pour qu'elle soit obstruée.

On fixe une fonction  $\rho$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{N}$  à support fini normalisée de largeur  $l \geq 3$ . On note  $\tilde{\rho}$  la fonction normalisée associée, et on note  $p, q, r$  et  $s$  (respectivement  $p', q', r'$  et  $s'$ ) les entiers  $\tilde{\rho}(i)$  (respectivement  $\tilde{\rho}(l-1-i)$ ) pour  $i = 0, 1, 2, 3$ . Si  $l = 3$  on note encore  $\widehat{E}_\rho$  sous la forme  $\widehat{E}_{p,q,r}$ . On fixe enfin un module  $M$  de  $\widehat{E}_\rho$  et une courbe minimale  $C$  associée à  $M$ .

#### La fonction de Rao.

Si la fonction  $\rho$  est la fonction de Rao d'une courbe à cohomologie semi-naturelle, elle est connexe et sa largeur coïncide avec son diamètre. Si  $l \geq 3$  la fonction  $\tilde{\rho}$  associée est de plus une fonction naturelle (définition 3.15 et proposition 3.19). En particulier cette fonction est concave sur son support (corollaire 3.22). De plus une fonction naturelle est automatiquement une fonction sous-naturelle (définition 3.25 et proposition 3.26).

Pour  $l = 3$  la condition d'être une fonction naturelle revient exactement aux deux conditions  $3q - 3p - r \geq 1$  et  $3q - 3r - p \geq -1$ , c'est-à-dire à  $3q \geq \max(3p + r + 1, 3r + p - 1)$ . La première de ces deux conditions impose  $3(q - p) \geq r + 1 > 0$ , donc  $q > p$ , soit  $q \geq p + 1$ . La seconde impose  $3(q - r) \geq p - 1 \geq 0$ , donc  $q \geq r$ . On a donc  $q \geq \max(p + 1, r)$ . La condition que  $\tilde{\rho}$  est une fonction sous-naturelle se résume à la seule relation  $6q \geq 4p + 4r$ .

Pour  $l \geq 4$  la condition que la fonction  $\tilde{\rho}$  est naturelle signifie que l'on a  $r \leq 3q - 3p - 1$ ,  $r' \leq 3q' - 3p' + 1$  et  $\rho(n) = 3\rho(n-1) - 3\rho(n-2) + \rho(n-3) - 1$  pour tout  $n \in \llbracket r_a + 3, r_o \rrbracket$  (proposition 3.17). On a en particulier  $s = 3r - 3q + p - 1$ . La condition que la fonction  $\rho$  est sous-naturelle entraîne entre autres que l'on a pour tout  $n \in \llbracket r_a + 4, r_o \rrbracket$  la relation de récurrence  $\rho(n) = 4\rho(n-1) - 6\rho(n-2) + 4\rho(n-3) - \rho(n-4)$ .

#### Le décalage minimal, le degré et le genre.

Dans tous les cas les valeurs non nulles  $(p, q, r)$  déterminent la largeur  $l$  de la fonction  $\rho$  ainsi que toutes les autres valeurs qu'elle prend si  $l \geq 4$ . Elles fixent également le décalage minimal  $h$  du module  $M$  ainsi que le degré  $d$  et le genre  $g$  des courbes minimales par les

relations  $h = 2q - p - r - 3$ ,  $d = \binom{h+3}{2} + q - p$  et  $g = -\binom{h+3}{3} + hd - p + 1$  (proposition 3.14). Si  $l \geq 4$  on a également  $4d = 1 - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(n) \partial^4 \rho(n)$  (proposition 3.27).

Comme la courbe  $C$  est minimale on a  $h = r_a$ , donc les valeurs  $(p, q, r)$  déterminent en fait le décalage entre les fonctions  $\rho$  et  $\tilde{\rho}$ , donc déterminent exactement la fonction  $\rho$ . Comme la courbe  $C$  est à cohomologie semi-naturelle le degré  $d$  et le genre  $g$  vérifient les relations  $1 - 2d < g$  (proposition 3.5-iii) et  $g < 1 - 2d + \frac{1}{3}[2d + \frac{1}{3}]^{3/2}$  (proposition 3.10).

De plus le décalage  $h$  vérifie  $h \geq -1$ , soit  $2q \geq p + r + 2$ . Si en outre  $C$  est lisse irréductible on a  $h \geq 1$ , soit  $2q \geq p + r + 4$ , et si elle est de plus obstruée on a  $h \geq 2$ , soit  $2q \geq p + r + 5$  (remarque qui suit la proposition 3.14).

Enfin le degré  $d$  et le genre  $g$  fixent la cohomologie  $(\gamma, \rho)$  de la courbe via le polynôme  $P_{d,g} = \frac{(X+3)(X+2)(X+1)}{6} - Xd + g - 1$  (définition 3.3). On a notamment  $\rho = \max(0, -P_{d,g}) \times \mathbb{1}_{[-3, +\infty[}$  (proposition 3.5-ii). Si  $r = 3q - 3p - 1$  on a  $e = r_a - 2$ ; sinon on a  $e = r_a - 1$ . De même si  $r' = 3q' - 3p' + 1$  on a  $s_0 = r_o + 2$  et sinon on a  $s_0 = r_o + 1$  (proposition 3.8-ii).

### Le module de Rao.

Pour que la courbe  $C$  soit à cohomologie semi-naturelle il faut que le module  $M$  soit un module optimal (définition 3.40 et corollaire 3.39). Cette condition fixe la forme numérique de la résolution minimale de  $M$ . Si on note cette résolution sous la forme :

$$0 \longrightarrow L_4 \xrightarrow{\sigma_4} L_3 \xrightarrow{\sigma_3} L_2 \xrightarrow{\sigma_2} L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M \longrightarrow 0,$$

le  $R$ -module gradué de type fini  $L_0$  (respectivement  $L_1, L_2, L_3, L_4$ ) est concentré en degrés 0 et 1 (resp. 1 et 2, resp. 2, 3,  $l$  et  $l+1$ , resp.  $l+1$  et  $l+2$ , resp.  $l+2$  et  $l+3$ ).

Cette propriété se traduit de façon directe sur la structure du module  $M$  : elle détermine le rang de toutes les flèches  $u_i, v_i, v'_i$  et  $u'_i$  à l'exception de  $u_0, v_0, v'_{l-2}$  et  $u'_{l-2}$  (proposition 3.47 pour le cas  $l \geq 4$ , ou bien les deux diagrammes du paragraphe 3.3.4). En particulier les applications  $v'_0$  et  $u'_0$  sont injectives et les applications  $v'_{l-2}$  et  $u'_{l-2}$  sont surjectives ; si  $l = 3$  ce sont les seules conditions.

### Les courbes minimales.

Si  $l \geq 3$  la courbe  $C$  est à cohomologie semi-naturelle si et seulement si la fonction  $q$  associée vérifie  $q(2) = l_2(2) = \ker v_0 = 6p - \text{rg } v_0$  et  $q(n) = 0$  pour  $n \geq 4$  (proposition 3.38). Si le module  $M$  est optimal, ces conditions sont équivalentes aux relations  $q(2) = 6p - \text{rg } v_0$  et  $q(3) = 3q - 3p - r - 1$  (proposition 3.50). En posant  $N = 3q + 3p - r - 1 - \text{rg } v_0$ , elles sont encore équivalentes aux deux conditions  $q^\#(2) \geq 6p - \text{rg } v_0$  et  $q^\#(3) \geq N$ .

Ces dernières conditions sont équivalentes au fait que les  $(6p - \text{rg } v_0)$ -mineurs de  $\sigma_{2,2,1}$  définissent au plus une courbe, de même que les  $N$ -mineurs de  $\sigma_{2, \leq 3}$ , et que les  $(N+1)$ -mineurs de  $\sigma_{2, \leq 3}$  définissent au plus une surface (proposition 3.53), où  $\sigma_{2,2,1}$  et  $\sigma_{2, \leq 3}$  sont des sous-matrices de la matrice  $\sigma_2$  (définition 3.32). Si  $v_0$  n'est pas injective ceci entraîne  $\text{rg } v_0 \geq \text{rg } u_0 + 2p + 1$  (proposition 3.61).

Si  $l \geq 4$  ou bien si  $l = 3$  et  $e = r_a - 2$  (c'est-à-dire  $r = 3q - 3p - 1$ ) ou  $s_0 = r_0 + 1$  (c'est-à-dire  $3r - 3q + p = 1$ ), la courbe  $C$  est obligatoire, c'est-à-dire est l'unique courbe minimale associée au module  $M$  (proposition 3.57). Elle est alors définie par les mineurs maximaux de la matrice  $\sigma_{2, \leq 3}$ , ou même par ceux de  $\sigma_{2,2,1}$  si  $e = r_a - 2$ .

### Conditions de lissité.

Si la courbe  $C$  est lisse irréductible et si on a  $e = r_a - 1$ , c'est-à-dire  $r < 3q - 3p - 1$ , les mineurs maximaux de la matrice  $\sigma_{2,2,1}$  définissent un schéma fini curviligne (proposition 3.55). Ceci entraîne  $\text{rg } v_0 \geq \text{rg } u_0 + 2p + 2$  (proposition 3.61). Si  $e = r_a - 2$  ces mineurs définissent la courbe  $C$ , c'est-à-dire définissent une courbe lisse irréductible.

Plus généralement si la courbe  $C$  est obligatoire, elle est lisse irréductible si et seulement si de façon tautologique les mineurs maximaux de la matrice  $\sigma_{2, \leq 3}$  définissent une courbe lisse irréductible. Dans le cas contraire, on dispose en caractéristique zéro d'une condition suffisante pour que la courbe minimale générique associée au module  $M$  soit lisse irréductible : il suffit que les mineurs maximaux de  $\sigma_{2,2,1}$  définissent au plus un schéma fini curviligne, de même que les  $N$ -mineurs de  $\sigma_{2, \leq 3}$ , et que les  $(N + 1)$ -mineurs de  $\sigma_{2, \leq 3}$  définissent au plus une courbe lisse (proposition 3.58).

Enfin si la courbe  $C$  est lisse irréductible le module  $u_0$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  défini par  $M$  est un module de rang suffisant (définition 3.62 et proposition 3.65). Cette condition signifie que pour tout  $e \in E_0$  on a  $\text{rg } \tilde{u}_0(e) = \text{rg } (X_0(e), Y_0(e), Z_0(e), T_0(e)) \geq 3$ , ou encore de façon équivalente que tout couple  $(P, Q)$  de formes linéaires indépendantes dans  $R_1$  vérifie  $\text{Ker } P_0 \cap \text{Ker } Q_0 = \{0\}$  (proposition 3.63). Elle entraîne  $\text{rg } u_0 \geq 3$ .

### Conditions d'obstruction.

Si le module  $M$  vérifie  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$  la courbe  $C$  est un point lisse du schéma de Hilbert (propositions 3.77-*i* pour le cas  $l = 3$  et 3.81-*i* pour le cas  $l \geq 4$ ). De plus si  $l \geq 4$  la composante de ce dernier qui contient  $C$  a alors pour dimension  $4d$ .

Si  $l = 3$  et si le schéma  $\widehat{E}_{p,q,r}$  est irréductible la condition  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$  est également nécessaire pour que la courbe soit non-obstruée (proposition 3.77-*ii*). C'est en particulier le cas si on  $4q \geq m$ , en posant  $m = \max(2r + 10p, 2p + 10r)$  si  $r/p \in [4/9, 9/4]$  et  $m = \max(6r + p, 6p + r)$  sinon (corollaire 3.78).

Pour une courbe à cohomologie semi-naturelle la quantité  $\text{ext}^2(M, M)^0$  est la dimension du conoyau de l'application  $d_2$  de  $\text{Hom}(L_1, M)^0$  dans  $\text{Hom}(L_2, M)^0 = \text{Hom}(P, M)^0$ , c'est-à-dire de l'application :

$$d_2 : M_2^{4p-r-\text{rg } u_0} \oplus M_1^{4p-\text{rg } u_0} \longrightarrow M_3^{3q-3p-r-1} \oplus M_2^{6p-\text{rg } u_0}.$$

obtenue par substitution à partir de  $\sigma_{2, \leq 3}$  (proposition 3.74). En particulier si l'application  $v_0$  est injective et si  $\rho$  est de largeur 3 ou vérifie  $r = 3q - 3p - 1$  on a  $\text{ext}^2(M, M)^0 = 0$ , donc la courbe  $C$  est non-obstruée (proposition 3.75). Si on a  $\text{ker } v_0 = 1$ ,  $l = 3$  et  $e = r_a - 1$ , c'est-à-dire  $r < 3q - 3p - 1$ , et si de plus la courbe  $C$  est lisse irréductible on obtient la même conclusion (proposition 3.76).

## Chapitre 4

# Étude de la largeur trois.

**N**OUS NOUS INTÉRESSONS spécifiquement dans ce chapitre aux courbes à cohomologie semi-naturelle dont le module de Rao est de largeur trois. Nous avons déjà dit que celles dont le module de Rao est de largeur inférieure vérifient l'assertion (*SW*), et que le cas de la largeur trois est le premier pour lequel la question de Sernesi–Walter se pose.

Nous nous concentrons en outre ici sur les premiers cas de largeur trois qui apparaissent, c'est-à-dire ceux pour lesquels la fonction de Rao prend les plus petites valeurs. Le critère que nous retenons pour cela est la valeur de  $h^1 \mathcal{J}_C(r_a)$ , c'est-à-dire de  $p$ . L'étude qui suit permet de répondre par l'affirmative à la question de Sernesi–Walter restreinte lorsque cette valeur est 1 ou 2. De façon précise, nous montrons :

**Théorème 4.1.** *Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle lisse irréductible et dont le module de Rao est de largeur 3. Si  $h^1 \mathcal{J}_C(r_a) \leq 2$ , la courbe  $C$  est non-obstruée.*

Ce résultat est à comparer avec l'exemple donné dans [MDP-2], où la courbe ni lisse ni irréductible qui infirme l'assertion (*SW*) vérifie  $h^1 \mathcal{J}_C(r_a) = 1$ . La restriction aux seules courbes lisses irréductibles constitue donc effectivement une contrainte supplémentaire, dont on mesure ainsi l'importance.

Pour montrer le théorème 4.1, nous appliquons la démarche suivante. Nous commençons par dégager une liste de conditions nécessaires pour qu'une courbe  $C$  dont le module de Rao  $M$  est de largeur trois et appartient à  $\widehat{E}_{p,q,r}$  soit à la fois à cohomologie semi-naturelle, lisse irréductible et obstruée (proposition 4.2). Il suffit pour cela de trier, parmi les conditions établies au chapitre 3 et récapitulées au paragraphe 3.6, celles qui concernent spécifiquement la largeur trois et qui sont des conditions nécessaires. Nous établissons alors par de simples considérations numériques que ces conditions imposent  $p \geq 2$  (proposition 4.3).

Nous montrons ensuite que si  $p = 2$  ces conditions sont incompatibles pour tout choix de  $q$  et  $r$  (proposition 4.10). Cette étape constitue la part principale de la démonstration ; elle nous amène à adopter des démarches différentes selon le rang de l'application  $u_0$  (cf. paragraphes 4.3.2 et 4.3.3).

Dans un troisième temps, nous étudions succinctement le cas  $p = 3$ , sans aboutir toutefois à des résultats aussi complets que dans les cas  $p \leq 2$ .

## 4.1 Synthèse des conditions.

Compte-tenu de l'étude effectuée au chapitre 3 ou du résumé effectué au paragraphe 3.6, la proposition suivante est immédiate :

**Proposition 4.2.** *Soit  $C$  une courbe dont le module de Rao  $M$  est de largeur 3 et soit  $\rho$  sa fonction de Rao. On conserve les notations du chapitre 3 ; en particulier on note  $\widehat{E}_\rho = \widehat{E}_{p,q,r}$ . Si la courbe  $C$  est à cohomologie semi-naturelle, lisse irréductible et obstruée, elle vérifie les conditions qui suivent.*

i) *On a  $3q \geq \max(3p + r + 1, 3r + p - 1)$ , ce qui entraîne  $q \geq \max(p + 1, r)$  ainsi que  $6q \geq 4p + 4r$ . On a également  $2q \geq p + r + 5$ .*

ii) *Les applications  $u'_0$  et  $v'_0$  sont injectives, on a  $\ker v_0 \geq 2$  et les  $\ker v_0$ -mineurs de la matrice  $\sigma_{2,2,1}$  définissent une courbe lisse irréductible si  $r = 3q - 3p - 1$  et un sous-schéma fini curviligne sinon, c'est-à-dire si  $r > 3q - 3p - 1$ . Ceci entraîne  $\operatorname{rg} v_0 \geq \operatorname{rg} u_0 + (2p + 1)$  dans le premier cas et  $\operatorname{rg} v_0 \geq \operatorname{rg} u_0 + (2p + 2)$  dans le second.*

*De plus l'application  $u_0$  vérifie la condition de rang suffisant, à savoir que pour tout  $e \in E_0$  on a  $\operatorname{rg} \tilde{u}_0(e) \geq 3$  et pour tout couple  $(P, Q)$  de formes linéaires indépendantes on a  $\operatorname{Ker} P_0 \cap \operatorname{Ker} Q_0 = \{0\}$ . Cette condition entraîne  $\operatorname{rg} u_0 \geq 3$ , donc  $\operatorname{rg} v_0 \geq 2p + 4$  si  $r = 3q - 3p - 1$  et  $\operatorname{rg} v_0 \geq 2p + 5$  sinon.*

iii) *Les applications  $u_1$  et  $v_1$  sont surjectives, mais l'application  $d_2 : M_1^{\ker u_0} \rightarrow M_2^{\ker v_0}$  obtenue en substituant  $X_1$  (resp.  $Y_1, Z_1, T_1$ ) à  $X$  (resp.  $Y, Z, T$ ) dans la matrice  ${}^t\sigma_{2,2,1}$  ne l'est pas.*

iv) *Enfin, on pose  $N = q^{\sharp}(3) = 3q + 3p - r - 1 - \operatorname{rg} v_0$ . Si  $3r - 3q + p = 1$  les  $N$ -mineurs de  $\sigma_{2, \leq 3}$  définissent une courbe lisse irréductible. Sinon, c'est-à-dire si  $3r - 3q + p < 1$ , les  $N$ -mineurs de  $\sigma_{2, \leq 3}$  définissent un schéma fini curviligne et les  $(N + 1)$ -mineurs sont non tous nuls.*

Ceci entraîne immédiatement le corollaire suivant, qui règle le premier cas du théorème 4.1, à savoir le cas  $p = 1$  :

**Proposition 4.3.** *Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle, lisse irréductible et dont le module de Rao est de largeur 3. Si  $h^1 \mathcal{J}_C(r_a) = 1$ , c'est-à-dire si  $p = 1$ , la courbe  $C$  est non-obstruée.*

**Démonstration.** D'après le point ii) de la proposition 4.2 on a  $\ker v_0 \geq 2$  et  $\operatorname{rg} v_0 \geq 2p + 4$ . Or on a  $\ker v_0 + \operatorname{rg} v_0 = 6p$ , donc  $4p \geq 6$  d'où  $p \geq 2$ . ■

**Remarque 4.4.** *Dans le cas  $p = 1$ , on peut même détailler ce que l'on obtient si l'on s'intéresse à l'assertion (SW) sans la restriction aux seules courbes lisses irréductibles, toujours dans le cas des modules de largeur trois.*

*Pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ , le schéma  $\widehat{E}_{p,q}$  contient au plus 5 types de modules différents, qui se distinguent par le rang de l'application  $u_0$ . Ce rang peut varier de 0 à 4, et le schéma  $\widehat{E}_{p,q}$  contient les types qui vérifient  $\operatorname{rg} u_0 \leq q$ . Les quadruplets  $(\operatorname{rg} u_0, \operatorname{rg} v_0, \operatorname{rg} v'_0, \operatorname{rg} u'_0)$  de ces 5 types de modules sont respectivement  $(0, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 3, 3, 1)$ ,  $(2, 5, 4, 1)$ ,  $(3, 6, 4, 1)$  et  $(4, 6, 4, 1)$ .*

Dans les deux derniers cas, l'application  $v_0$  est injective, donc si  $M$  est un module de largeur 3 ayant un tel  $u_0$ , ses courbes minimales sont non-obstruées. De plus, les mineurs maximaux de  $\sigma_{2,2,1}$  doivent définir au plus une courbe, donc vérifier la condition  $\text{rg } v_0 \geq \text{rg } u_0 + (2p + 1) = \text{rg } u_0 + 3$ . Seul le troisième type la vérifie parmi ceux qui restent; on retrouve alors l'application  $u_0$  de l'exemple de [MDP-2].

Enfin, nous pouvons nous débarrasser dans la suite des cas où l'on a  $e = r_a - 2$ , car ceux-ci ne peuvent pas se produire lorsque  $p$  est suffisamment petit :

**Proposition 4.5.** *Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle dont le module de Rao est de largeur 3 et qui vérifie  $e = r_a - 2$ . Si  $C$  est lisse irréductible on a  $p \geq 4$ . Si de plus  $C$  est obstruée on a  $p \geq 5$ .*

**Démonstration.** La condition  $e = r_a - 2$  équivaut à  $r = 3q - 3p - 1$ . Le décalage  $h = 2q - p - r - 3$  devient alors  $h = 2p - q - 2$ . Comme on a par ailleurs  $q \geq p + 1$ , on obtient  $h \leq p - 3$ . Si la courbe  $C$  est lisse irréductible on a  $h \geq 1$ , ce qui donne  $p \geq 4$ . Si de plus elle est obstruée on a  $h \geq 2$ , donc  $p \geq 5$ . ■

## 4.2 Les modules commençants.

Parmi les conditions précédentes, celles exprimées par le point ii) de la proposition 4.2 ne dépendent que de la flèche  $u_0$  ou des flèches associées  $v_0, v'_0, u'_0$ , et pas de la partie du module entre les degrés 1 et 2, c'est-à-dire pas de  $u_1$ . C'est évident pour les conditions concernant les rangs des applications  $v_0, v'_0$  et  $u'_0$ . Par ailleurs, l'application :

$$\sigma_{2,2,1} : R(-2) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Ker } v_0 \longrightarrow R(-1) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Ker } u_0$$

se calcule par restriction et corestriction à partir de l'application linéaire :

$$V \otimes_{\mathbb{k}} M_0 : R(-2) \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda^2 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_0 \longrightarrow R(-1) \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda^1 R_1 \otimes_{\mathbb{k}} M_0,$$

qui à  $1 \otimes (P \wedge Q) \otimes e$  associe  $P \otimes Q \otimes e - Q \otimes P \otimes e$ . On notera cette dernière simplement  $V$  dans toute la suite. Elle ne dépend pas de la structure du module  $M$ , donc l'application  $\sigma_{2,2,1}$  est entièrement déterminée par la donnée des deux espaces  $\text{Ker } u_0$  et  $\text{Ker } v_0$ , et il en va de même du schéma défini par ses  $\text{ker } v_0$ -mineurs.

Nous nous plaçons dans toute la suite dans des cas où l'on a  $p \leq 3$ , donc  $e = r_a - 1$ . Posons la définition suivante :

**Définition 4.6.** *Soit  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ . On appelle module commençant un module  $u_0$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  tel que les applications linéaires  $v'_0$  et  $u'_0$  sont injectives, qui vérifie  $\text{ker } v_0 \geq 2$ , c'est-à-dire  $\text{rg } v_0 \leq 6p - 2$ , et tel que les  $\text{ker } v_0$ -mineurs de la matrice  $\sigma_{2,2,1}$  associée définissent le vide ou un schéma fini curviligne.*

Ces conditions imposent la relation  $\text{ker } u_0 \geq \text{ker } v_0 + 2$ . soit  $\text{rg } v_0 \geq \text{rg } u_0 + (2p + 2)$ , ainsi que la condition de rang suffisant, qui entraîne en particulier  $\text{rg } u_0 \geq 3$  et  $\text{rg } v_0 \geq 2p + 5$ .

Comme pour un tel module on a  $\text{ker } v_0 < \text{ker } u_0$ , on parlera indifféremment dans la suite des  $\text{ker } v_0$ -mineurs de  $\sigma_{2,2,1}$  ou de ses mineurs maximaux.



Le point *ii*) de la proposition 4.2 peut alors se reformuler ainsi :

**Proposition 4.7.** *Soit  $C$  une courbe à cohomologie semi-naturelle qui est lisse irréductible et obstruée, et dont le module de Rao  $M$  est de largeur 3 et appartient à  $\widehat{E}_{p,q,r}$ . Si  $p \leq 4$ , ou plus largement si la courbe vérifie  $e = r_a - 1$ , c'est-à-dire si on a  $r < 3q - 4p - 1$ , le module de  $\widehat{E}_{p,q}$  donné par  $u_0$  est un module commençant.*

Une méthode naturelle pour étudier la question de  $(SW)$  en largeur trois, et qui permet de tirer le meilleur profit de la remarque précédente, consiste alors à utiliser la projection  $\pi_0 : \widehat{E}_{p,q,r} \rightarrow \widehat{E}_{p,q}$  qui à un module  $M$  associe le module tronqué  $u_0$ . Cette méthode est comparable à celle que nous avons mise en œuvre dans le chapitre 2. On commence par rechercher les modules commençants de  $\widehat{E}_{p,q}$ , puis on recherche pour chaque tel module  $u_0$  quels éléments de la fibre  $\pi_0^{-1}(u_0)$  vérifient les conditions restantes.

Le cas de loin le plus favorable est celui où aucun module de  $\widehat{E}_{p,q}$  ne vérifie le premier lot de conditions, c'est-à-dire où il n'existe tout simplement pas de module commençant. On obtient alors immédiatement que pour ces valeurs de  $p$  et  $q$ , c'est-à-dire de  $h^1 \mathcal{J}_C(r_a)$  et  $h^1 \mathcal{J}_C(r_a + 1)$ , l'assertion  $(SW)$  est vérifiée. Nous montrons au paragraphe suivant que tel est le cas lorsque  $p = 2$ , indépendamment de la valeur de  $q$ ; ceci entraîne alors le théorème 4.1. En revanche, ce n'est déjà plus vrai si  $p = 3$ , comme nous le verrons au paragraphe 4.4.

L'outil essentiel de toute cette étude consiste à faire opérer certains groupes sur les schémas  $\widehat{E}_{p,q}$ . De façon précise, on fixe  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ , et on note  $E_0$  et  $E_1$  les espaces vectoriels  $\mathbb{k}^p$  et  $\mathbb{k}^q$  munis de leurs bases canoniques; les groupes  $GL(E_0)$ ,  $GL(E_1)$  et  $GL(R_1)$  opèrent naturellement sur  $\widehat{E}_{p,q}$ . On rappelle qu'on appelle *type de module* une orbite de  $\widehat{E}_{p,q}$  sous l'action du produit de ces groupes. Les opérations en question conservant la propriété d'être un module commençant, il suffit de montrer qu'aucun type de module de  $\widehat{E}_{p,q}$  ne correspond à des modules commençants. L'action des groupes permet alors de ramener chaque type de module à un ou des représentants bien choisis, et de n'avoir à étudier en définitive qu'un nombre restreint de modules particuliers. Il suffit alors pour conclure de montrer que ceux-ci ne conviennent pas.

On exploitera en outre constamment la remarque suivante. Soit  $q^\sharp \leq q$ , et soit  $E_1^\sharp$  l'espace vectoriel  $\mathbb{k}^{q^\sharp}$  muni de sa base canonique. On identifie  $E_1^\sharp$  à un sous-espace fixé de  $E_1$ , ce qui permet de définir une injection de  $\widehat{E}_{p,q^\sharp}$  dans  $\widehat{E}_{p,q}$ : on associe à un module  $u_0^\sharp$  le module  $u_0 = u_0^\sharp \oplus \mathbb{k}(-1)^{q-q^\sharp}$  défini par blocs par  $\begin{pmatrix} u_0^\sharp \\ 0 \end{pmatrix}$  pour toute décomposition de  $E_1$  sous la forme  $E_1^\sharp \oplus E_1^\flat$ . Cette injection conserve les espaces  $\text{Ker } u_0$  et  $\text{Ker } v_0$ , donc préserve leurs rangs ainsi que la matrice  $\sigma_{2,2,1}$ , et le module  $u_0$  est un module commençant de  $\widehat{E}_{p,q}$  si et seulement si  $u_0^\sharp$  en est un de  $\widehat{E}_{p,q^\sharp}$ .

Ceci permet de toujours se ramener au cas où l'application  $u_0$  est surjective. En effet, si elle ne l'est pas, il existe une décomposition du type précédent: il suffit pour l'obtenir de poser  $q' = \text{rg } u_0$  et  $E_1' = \text{Im } u_0$ . Les applications  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$  et  $T_0$  définissant  $u_0$  s'obtiennent alors en rajoutant des lignes nulles à un module commençant de taille plus petite et pour lequel l'application  $u_0$  est surjective.

On utilise enfin le lemme suivant, qui vaut pour tous les modules de  $\widehat{E}_{p,q}$  et pas seulement les modules commençants :

**Lemme 4.8.** *Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^* q^2$ . Pour tout module  $u_0$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  on a  $\text{rg } v_0 \leq 4 \text{rg } u_0$ .*

**Démonstration.** La matrice représentant  $v_0$  s'écrivant :

$$v_0 = \begin{pmatrix} Y_0 & Z_0 & T_0 & 0 & 0 & 0 \\ -X_0 & 0 & 0 & Z_0 & T_0 & 0 \\ 0 & -X_0 & 0 & -Y_0 & 0 & T_0 \\ 0 & 0 & -X_0 & 0 & -Y_0 & -Z_0 \end{pmatrix},$$

on a  $\text{rg } v_0 \leq \text{rg}(Y_0 \ Z_0 \ T_0) + \text{rg}(X_0 \ Z_0 \ T_0) + \text{rg}(X_0 \ Y_0 \ T_0) + \text{rg}(X_0 \ Y_0 \ Z_0)$ . On en déduit  $\text{rg } v_0 \leq 4 \text{rg}(X_0 \ Y_0 \ Z_0 \ T_0) = 4 \text{rg } u_0$ . ■

**Corollaire 4.9.** *Un module commençant  $u_0$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  vérifie la relation suivante :*

$$(4.1) \quad (\text{rg } v_0 / 4) \leq \text{rg } u_0 \leq \text{rg } v_0 - (2p + 2).$$

### 4.3 Le cas $p = 2$ .

Nous montrons dans ce paragraphe la proposition suivante, qui entraîne immédiatement le théorème 4.1 :

**Proposition 4.10.** *Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ , le schéma  $\widehat{E}_{2,q}$  ne contient pas de module commençant.*

Tout d'abord, un module commençant  $u_0$  vérifie par définition les conditions  $2p+5 \leq \text{rg } v_0$  et  $\text{rg } v_0 \leq 6p-2$ . Pour  $p = 2$ , ceci donne  $\text{rg } v_0 \in \{9, 10\}$ . De plus, d'après la relation (4.1) on a  $(\text{rg } v_0 / 4) \leq \text{rg } u_0 \leq \text{rg } v_0 - (2p + 2) = \text{rg } v_0 - 6$ . Si  $\text{rg } v_0 = 9$  on a  $\text{rg } u_0 = 3$  et si  $\text{rg } v_0 = 10$  on a  $\text{rg } u_0 \in \{3, 4\}$ . On obtient :

**Lemme 4.11.** *Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ . Si  $u_0$  est un module commençant de  $\widehat{E}_{2,q}$ , il vérifie  $\text{rg } u_0 \in \{3, 4\}$ . De plus si  $\text{rg } u_0 = 3$  on a  $\text{rg } v_0 \in \{9, 10\}$  et si  $\text{rg } u_0 = 4$  on a  $\text{rg } v_0 = 10$ .*

La démonstration de la proposition 4.10 s'effectue en trois parties. Dans un premier temps, nous montrons un lemme général permettant d'éliminer un certain nombre de modules, indépendamment du rang de  $u_0$ . Nous effectuons ensuite une dichotomie en fonction de celui-ci, en étudiant séparément les cas où il vaut 3 ou 4. À chaque fois, nous commençons par réduire les cas à considérer en faisant agir les groupes linéaires de façon à nous ramener à un petit nombre de modules particuliers. Nous montrons ensuite que les modules restants ne conviennent pas, donc que toutes les conditions à vérifier pour avoir un module commençant sont incompatibles.

Faire agir le groupe  $GL(R_1)$  revient à chercher une base particulière  $(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$  pour laquelle les applications  $X_0, Y_0, Z_0$  et  $T_0$  se décrivent simplement. Notons  $L$  le sous-espace vectoriel de  $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(E_0, E_1)$  engendré par ces 4 applications. On rappelle que l'on note  $\widehat{u}_0$  la flèche de  $R_1$  dans  $\text{Hom}_{\mathbb{F}}(E_0, E_1)$  qui à  $P$  associe  $P_0$ , c'est-à-dire l'application définie par

$u_0 : R_1 \otimes_{\mathbf{k}} E_0 \rightarrow E_1$ ; on a alors  $L = \text{Im } \hat{u}_0$ . Le lemme que nous montrons pour commencer (lemme 4.13) signifie exactement que l'application  $\hat{u}_0$  est injective, c'est-à-dire que  $L$  est de dimension 4. Rechercher une base particulière de  $R_1$  équivaut dans ce cas à en chercher une de  $L$ .

Ensuite, tout élément non nul de  $L$ , ou plus généralement de  $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(E_0, E_1)$ , est de rang 1 ou 2. Soit  $\mathcal{W}$  la sous-variété de  $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(E_0, E_1)$  sur laquelle le rang est égal à 1 et soit  $W = L \cap \mathcal{W}$ . On peut alors adopter deux stratégies différentes pour choisir la base particulière  $(X_0, Y_0, Z_0, T_0)$ : on peut rechercher soit des éléments dégénérés, c'est-à-dire qui appartiennent à  $W$ , soit au contraire des éléments génériques de  $L$ . Nous adoptons successivement ces deux stratégies opposées dans la suite, selon que le rang de  $u_0$  vaut 3 ou 4. Dans le premier cas, nous privilégions les éléments dégénérés, en montrant que l'on peut choisir  $X$  et  $Y$  de façon que  $X_0$  et  $Y_0$  soient tous deux de rang 1. Au contraire, dans le cas  $\text{rg } u_0 = 4$ , nous privilégions les éléments génériques de  $L$ ; nous montrons alors que l'on peut choisir  $X$  et  $Y$  de façon que l'application linéaire  $(X_0 \ Y_0)$  soit de rang 4. De façon générale, chacune de ces deux approches est à chaque fois possible et il n'est pas évident de déterminer à l'avance laquelle est la plus efficace.

### 4.3.1 Un lemme préliminaire.

Le lemme qui suit ne dépend pas du rang de  $u_0$ . Il est comparable au lemme 3.66, dans la mesure où il consiste de nouveau à analyser le lien entre la structure d'un module  $u_0$  et le schéma défini par les mineurs maximaux de la matrice  $\sigma_{2,2,1}$ . Posons tout d'abord la définition suivante:

**Définition 4.12.** Soit  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ . On dit qu'un module  $u_0$  de  $\hat{E}_{p,q}$  est dégénéré si et seulement si il existe une forme linéaire non nulle  $P \in R_1$  vérifiant  $P_0 = 0$ , c'est-à-dire si l'application  $\hat{u}_0 : R_1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{k}}(E_0, E_1)$  associée à  $u_0$  n'est pas injective.

De façon concrète, ceci signifie que la structure du module  $u_0$  n'utilise en réalité que trois variables, c'est-à-dire peut se réaliser comme structure de module sur  $\mathbf{k}[X, Y, Z]$ .

**Lemme 4.13.** Soit  $q \in \mathbb{N}^*$  et soit  $u_0$  un module dégénéré de  $\hat{E}_{2,q}$ . Si l'application  $v_0$  n'est pas injective et si les  $\ker v_0$ -mineurs de la matrice  $\sigma_{2,2,1}$  définissent un schéma fini, on a  $\ker v_0 = 1$ . En particulier, un module dégénéré de  $\hat{E}_{2,q}$  n'est jamais un module commençant.

**Démonstration.** Soit  $u_0$  un module dégénéré de  $\hat{E}_{2,q}$ . On fixe une base  $(e_1, e_2)$  de  $E_0$  et on choisit une base  $(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$  de façon à avoir  $X_0 = 0$ . On pose  $Q_1 = Y$ ,  $Q_2 = Z$  et  $Q_3 = T$ .

La matrice exprimant  $u_0$  par rapport aux bases choisies est alors  $u_0 = (0 \ Y_0 \ Z_0 \ T_0)$ . Soit  $F_1$  le sous-espace vectoriel de  $\Lambda^1 R_1 \otimes_{\mathbf{k}} E_0$  correspondant aux trois dernières colonnes de cette matrice, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de rang 6 engendré par les éléments de la forme  $P \otimes e$  avec  $P \in \langle Y, Z, T \rangle \subset R_1$  et  $e \in E_0$ ; une base de  $F_1$  est donnée par les  $Q_i \otimes e_j$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $j \in \{1, 2\}$ .

On pose  $\mu_1 = X \otimes e_1$  et  $\mu_2 = X \otimes e_2$  et on se donne une base  $(\mu'_1, \dots, \mu'_k)$  de  $\text{Ker } u_0 \cap F_1$ . La famille  $(\mu_1, \mu_2; \mu'_1, \dots, \mu'_k)$  forme une base de  $\text{Ker } u_0$  et on a  $\ker u_0 = k + 2$ . Les vecteurs

$\mu'_i$  s'écrivent sous la forme  $\mu'_i = P_{i,1} \otimes e_1 + P_{i,2} \otimes e_2$ , où les  $P_{i,j}$  sont des formes linéaires de  $\langle Y, Z, T \rangle$ , c'est-à-dire qui s'écrivent  $P_{i,j} = \alpha_{i,j}Y + \beta_{i,j}Z + \gamma_{i,j}T$ .

Par ailleurs, la matrice exprimant  $v_0$  par rapport aux mêmes bases est :

$$v_0 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} Y_0 & Z_0 & T_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_0 & T_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Y_0 & 0 & T_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Y_0 & -Z_0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} L_0 & 0 \\ \hline 0 & V_0 \end{array} \right).$$

Soit  $F_2$  le sous espace vectoriel de  $\Lambda^2 R_1 \otimes_{\mathbf{k}} E_0$  correspondant aux trois premières colonnes de cette matrice, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de rang 6 engendré par les éléments de la forme  $(X \wedge P) \otimes e$  pour  $P \in R_1$  et  $e \in E_0$ . Une base de  $F_2$  est donnée par les vecteurs  $(X \wedge Q_i) \otimes e_j$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $j \in \{1, 2\}$ . L'espace  $\text{Ker } v_0 \cap F_2$ , c'est-à-dire  $\text{Ker } L_0$ , a pour dimension  $k = \ker(Y_0 \ Z_0 \ T_0) = \ker u_0 - 2$ . On a donc  $\ker v_0 \geq k$ , et  $\ker v_0 = k$  si et seulement si  $\text{Ker } v_0 \subset F_2$ .

Si  $u_0$  est un module commençant, les  $(\ker v_0)$ -mineurs de la matrice  $\sigma_{2,2,1}$  définissent un schéma fini. Comme cette matrice est de taille  $(\ker u_0, \ker v_0)$ , cela entraîne la relation  $\ker v_0 \leq \ker u_0 - 2$ , soit  $\ker v_0 \leq k$ , donc  $\ker v_0 = k$  et  $\text{Ker } v_0 \subset F_2$ . L'application linéaire donnée par  $V_0$  est alors injective et une base de  $\text{Ker } v_0$  est donnée par  $(\psi_1, \dots, \psi_k)$ , en posant  $\psi_i = X \wedge \mu'_i$  pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , c'est-à-dire  $\psi_i = (X \wedge P_{i,1}) \otimes e_1 + (X \wedge P_{i,2}) \otimes e_2$ .

On peut alors prendre comme bases de  $R(-2) \otimes_{\mathbf{k}} \text{Ker } v_0$  et  $R(-1) \otimes_{\mathbf{k}} \text{Ker } u_0$  les familles  $(\omega_1, \dots, \omega_k)$  et  $(\nu_1, \nu_2; \nu'_1, \dots, \nu'_k)$  obtenues en posant  $\omega_i = 1 \otimes \psi_i$  et  $\nu'_i = 1 \otimes \mu'_i$  pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , ainsi que  $\nu_i = 1 \otimes \mu_i$  pour  $i = 1$  ou  $2$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  on calcule  $V(\omega_i)$  par linéarité à partir de la relation  $V(1 \otimes X \wedge P \otimes e) = X \otimes P \otimes e - P \otimes X \otimes e$ ; on obtient :

$$V(\omega_i) = (X \otimes P_{i,1} \otimes e_1 + X \otimes P_{i,2} \otimes e_2) - P_{i,1} \otimes X \otimes e_1 - P_{i,2} \otimes X \otimes e_2 = X \nu'_i - P_{i,1} \nu_1 - P_{i,2} \nu_2.$$

La matrice de  $\sigma_{2,2,1}$  dans les bases  $(\omega_1, \dots, \omega_k)$  et  $(\nu_1, \nu_2; \nu'_1, \dots, \nu'_k)$  s'écrit donc :

$$\sigma_{2,2,1} = \begin{pmatrix} -P_{1,1} & \cdots & -P_{k,1} \\ -P_{1,2} & \cdots & -P_{k,2} \\ X & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}.$$

Si  $k \geq 3$ , les mineurs maximaux de cette matrice sont tous multiples de  $X$ , dont s'annulent sur un plan. Si  $k = 2$ , ils sont tous multiples de  $X$  à l'exception du premier, qui vaut  $Q = P_{1,1}P_{2,2} - P_{1,2}P_{2,1}$ , donc ils s'annulent tous sur  $V(X, Q)$ , qui est une courbe. On a donc nécessairement  $k = 1$ . ■

**Remarque 4.14.** On peut préciser ce qui se passe dans le cas  $k = 1$ . Si les formes linéaires  $P_{1,1}$  et  $P_{1,2}$  sont liées, on obtient encore une courbe. Ces formes sont donc indépendantes et on peut poser  $Y = P_{1,2}$  et  $Z = -P_{1,1}$ . On a alors la relation  $Y_0(e_2) = Z_0(e_1)$ . De plus, on a

$\text{rg } u_0 = 6 - k = 5$ , donc  $(Y_0(e_1), Y_0(e_2), Z_0(e_2), T_0(e_1), T_0(e_2))$  forme une base de  $\text{Im } u_0$ . Le module  $u_0$  est alors du type suivant :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

à ceci près qu'il faut rajouter des lignes de zéros si  $q \geq 6$ .

### 4.3.2 Étude du cas $\text{rg } u_0 = 3$ .

Le lemme suivant permet de réduire les cas à considérer lorsque le rang de  $u_0$  vaut 3 :

**Lemme 4.15.** Soit  $q \in \mathbb{N}^*$  et soit  $u_0$  un module commençant de  $\widehat{E}_{2,q}$  vérifiant  $\text{rg } u_0 = 3$ . Alors  $u_0$  est du même type que l'un des modules suivants, que l'on appellera respectivement type i) et type ii) :

$$\begin{aligned} \text{i) } X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{k}^* \text{ et } \beta \in \mathbb{k}. \\ \text{ii) } X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{k}^* \text{ et } \beta \in \mathbb{k}. \end{aligned}$$

(Ces types sont exprimés ici avec  $q = 3$  ; il faut leur rajouter des lignes de zéros si  $q \geq 4$ ).

**Démonstration.** Soit  $u_0$  un module commençant de  $\widehat{E}_{2,q}$  vérifiant  $\text{rg } u_0 = 3$ . On peut supposer  $u_0$  surjectif, donc  $q = 3$ . Le module  $u_0$  vérifiant la propriété de rang suffisant, pour tout  $e \in E_0$  on a  $\text{rg } \tilde{u}_0(e) = \text{rg } (X_0(e), Y_0(e), Z_0(e), T_0(e)) \geq 3$ . Par ailleurs, on a aussi  $\text{rg } \tilde{u}_0(e) \leq \text{rg } u_0 = 3$ , donc on a exactement  $\text{rg } \tilde{u}_0(e) = 3$ . De plus, d'après le lemme 4.13, un module commençant de  $\widehat{E}_{2,q}$  ne peut pas être un module dégénéré, donc pour tout  $P \in R_1$  on a  $P_0 \neq 0$ .

Fixons une base  $(e_1, e_2)$  de  $E_0$ , on a  $\text{rg } \tilde{u}_0(e_1) = \text{rg } \tilde{u}_0(e_2) = 3$ . On peut donc choisir deux formes linéaires  $X$  et  $Y$  dans  $R_1$  vérifiant  $\text{Ker } \tilde{u}_0(e_2) = \langle X \rangle$  et  $\text{Ker } \tilde{u}_0(e_1) = \langle Y \rangle$ , c'est-à-dire  $X_0(e_2) = Y_0(e_1) = 0$ . Comme on a  $X_0 \neq 0$  et  $Y_0 \neq 0$ , nécessairement  $X_0(e_1) \neq 0$  et  $Y_0(e_2) \neq 0$ , et  $X$  et  $Y$  sont linéairement indépendants dans  $R_1$ . Deux cas distincts se présentent alors : soit les vecteurs  $X_0(e_1)$  et  $Y_0(e_2)$  sont liés, soit ils sont libres.

- Dans le premier cas, posons  $f_1 = X_0(e_1)$ . On a  $Y_0(e_2) = \lambda f_1$  avec  $\lambda \neq 0$  ; quitte à remplacer  $Y$  par  $(1/\lambda)Y$ , on peut supposer  $Y_0(e_2) = f_1$ . On complète alors  $(X, Y)$  en une base  $(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$  et  $f_1$  en une base  $(f_1, f_2, f_3)$  de  $E_1$ . Dans ces bases, la structure de module  $u_0$  se représente par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ \boxed{Z'_0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_0 = \begin{pmatrix} c & d \\ \boxed{T'_0} \end{pmatrix}.$$

Quitte à remplacer  $Z$  par  $Z - aX - bY$  et  $T$  par  $T - cX - dY$ , on peut supposer que l'on a  $a = b = c = d = 0$ . Les matrices  $Z'_0$  et  $T'_0$  sont alors nécessairement inversibles. En effet, pour  $e \in E_0$  on a  $\text{Vect}(X_0(e), Y_0(e), Z_0(e), T_0(e)) \subset \text{Vect}(f_1, Z'_0(e), T'_0(e))$ . Si  $e$  appartient par exemple à  $\text{Ker } Z'_0$ , on obtient  $\text{rg } \tilde{u}_0(e) \leq 2$ , ce qui est impossible si  $e$  est non nul. Quitte à modifier la base  $(f_2, f_3)$  de  $\langle f_2, f_3 \rangle$ , on peut donc supposer que l'on a  $Z'_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Posons alors  $T'_0 = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix}$ ; quitte à remplacer  $T$  par  $T - aZ$ , on peut supposer  $a = 0$ . On a alors  $b \neq 0$  et  $\alpha \neq 0$ . Quitte à remplacer  $T$  par  $(1/b)T$ , on peut supposer  $b = 1$  et l'on aboutit au type i).

- Dans le second cas, les vecteurs  $X_0(e_1)$  et  $Y_0(e_2)$  sont linéairement indépendants. Posons  $f_1 = X_0(e_1)$  et  $f_2 = Y_0(e_2)$ . Pour toute façon de compléter  $(f_1, f_2)$  en une base  $(f_1, f_2, f_3)$  de  $E_1$ , on a :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a  $\text{rg } \tilde{u}_0(e_1) = 3$ , donc  $\tilde{u}_0(e_1)$  est surjectif et l'on peut choisir  $Z \in R_1$  vérifiant  $Z_0(e_1) = f_2$ .

Montrons qu'alors on a nécessairement  $Z_0(e_2) \notin \langle f_1, f_2 \rangle$ , donc que l'on peut prendre  $Z_0(e_2)$  comme vecteur  $f_3$ . Si tel n'était pas le cas, on aurait  $\text{Im}(X_0 \ Y_0 \ Z_0) = \langle f_1, f_2 \rangle$ . Posons

alors  $T_0 = \begin{pmatrix} \boxed{T'_0} \\ a & b \end{pmatrix}$ , on a  $(a, b) \neq (0, 0)$  car  $\text{rg } u_0 = 3$ . Le vecteur  $e = b e_1 - a e_2$  est donc non

nul et vérifie  $T_0(e) \in \langle f_1, f_2 \rangle$ , donc  $\text{rg } \tilde{u}_0(e) \leq 2$ , ce qui n'est pas possible. Les vecteurs  $f_1, f_2$  et  $Z_0(e_2)$  sont donc linéairement indépendants et l'on peut poser  $f_3 = Z_0(e_2)$ .

On a  $\text{rg } \tilde{u}_0(e_1) = 3$ , donc  $\tilde{u}_0(e_1)$  est surjectif et l'on peut choisir  $T \in R_1$  de façon à avoir  $T_0(e_1) = f_3$ . On peut alors poser :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & c \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Quitte à remplacer  $T$  par  $T - cY$  on peut supposer  $c = 0$ . On a enfin  $\alpha \neq 0$  à cause de la relation  $\text{rg } \tilde{u}_0(e_2) = \text{rg}(0, f_2, f_3, \alpha f_1 + \beta f_3) = 3$  et l'on aboutit au type ii). ■

On déduit du lemme 4.15 la proposition :

**Proposition 4.16.** *Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ , il n'existe pas de module commençant dans  $\widehat{E}_{2,q}$  qui vérifie  $\text{rg } u_0 = 3$ .*

**Démonstration.** En tenant compte de  $\alpha \neq 0$ , on vérifie aisément que pour le type ii) la matrice  $v_0$  est injective, donc que  $u_0$  n'est pas un module commençant.

Pour le type i) au contraire, on a  $\text{ker } v_0 = 2$ . On vérifie que les deux vecteurs :

$$\begin{cases} \psi_1 = -\alpha(X \wedge Z + Y \wedge T) \otimes e_1 + (X \wedge T + \alpha Y \wedge Z - \beta X \wedge Z) \otimes e_2 \\ \text{et } \psi_2 = (X \wedge Z + Y \wedge T) \otimes e_2 - (X \wedge T + \alpha Y \wedge Z + \beta Y \wedge T) \otimes e_1 \end{cases}$$

sont linéairement indépendants et appartiennent à  $\text{Ker } v_0$ , donc en forment une base. On peut ensuite choisir comme base de  $\text{Ker } u_0$  les cinq vecteurs  $\mu_1 = X \otimes e_2$ ,  $\mu_2 = Y \otimes e_1$ ,  $\mu_3 = X \otimes e_1 - Y \otimes e_2$ ,  $\mu_4 = Z \otimes e_2 - T \otimes e_1$  et  $\mu_5 = T \otimes e_2 - \alpha Z \otimes e_1 - \beta Z \otimes e_2$ .

On pose  $\omega_i = 1 \otimes \psi_i$  pour  $i = 1$  ou  $2$  et  $\nu_i = 1 \otimes \mu_i$  pour  $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ ; les familles  $(\omega_1, \omega_2)$  et  $(\nu_1, \dots, \nu_5)$  forment respectivement des bases de  $R(-2) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Ker } v_0$  et  $R(-1) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Ker } u_0$ . On calcule  $V(\omega_1)$  et  $V(\omega_2)$  par linéarité grâce à la relation  $V(1 \otimes P \wedge Q \otimes e) = P \otimes Q \otimes e - Q \otimes P \otimes e$ ; on obtient :

$$\begin{cases} V(\omega_1) = (\beta Z - T) \nu_1 + \alpha T \nu_2 + \alpha Z \nu_3 + \alpha Y \nu_4 + X \nu_5, \\ \text{et } V(\omega_2) = -Z \nu_1 + (\alpha Z + \beta T) \nu_2 + T \nu_3 + (X + \beta Y) \nu_4 + Y \nu_5. \end{cases}$$

La matrice de l'application  $\sigma_{2,2,1}$  dans les bases  $(\omega_1, \alpha \omega_2)$  et  $(\nu_1, \alpha \nu_2, \alpha \nu_3, \alpha \nu_4, \nu_5)$  s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} \beta Z - T & -\alpha Z \\ T & \alpha Z + \beta T \\ Z & T \\ Y & X + \beta Y \\ X & \alpha Y \end{pmatrix}.$$

La première ligne est une combinaison linéaire des deux suivantes. Si l'on pose  $X' = (1/\alpha)X$ , le schéma défini par les 2-mineurs de  $\sigma_{2,2,1}$  est donc également défini par ceux de la matrice  $\Sigma = \begin{pmatrix} T & Z & Y & X' \\ \alpha Z + \beta T & T & \alpha X' + \beta Y & Y \end{pmatrix}$ , dont les mineurs définissent une courbe et non un schéma fini. En effet, si on pose  $\alpha = -\lambda\mu$  et  $\beta = \lambda + \mu$ , ce schéma contient (et est en fait égal à) la réunion des deux droites d'équations  $(T - \lambda Z, Y - \lambda X')$  et  $(T - \mu Z, Y - \mu X')$ , lesquelles sont disjointes si  $4\alpha \neq -\beta^2$ . ■

**Remarque 4.17.** *On note la symétrie très nette entre les rôles de  $(X', Y)$  et  $(Z, T)$  sur la matrice  $\Sigma$ . Cette symétrie est directement responsable du fait que les 2-mineurs de  $\Sigma$  définissent au moins une courbe. En effet, comme cette matrice est de taille  $(2, 4)$  ils ne peuvent définir le vide, mais au mieux un schéma fini. Soit alors  $(x, y, z, t)$  un point rationnel de ce schéma, pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$  le point  $(\lambda x, \lambda y, \mu z, \mu t)$  annule encore les mineurs de  $\sigma_{2,2,1}$  et ce point parcourt une droite lorsque  $(\lambda, \mu)$  parcourt  $\mathbb{P}^1$ .*

*Par ailleurs, on retrouve directement sur les matrices  $X_0, Y_0, Z_0$  et  $T_0$ , c'est-à-dire sur la structure du module  $u_0$ , le reflet de cette symétrie. On observe en effet la dichotomie suivante entre les rôles de  $X$  et  $Y$  et ceux de  $Z$  et  $T$  : l'espace  $E_1$  se décompose en  $E_1 = \langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2, f_3 \rangle$  et les applications  $X_0$  et  $Y_0$  ont pour image  $\langle f_1 \rangle$  tandis que les applications  $Z_0$  et  $T_0$  ont pour image  $\langle f_2, f_3 \rangle$ . Le module  $u_0$  ne se décompose pas lui-même comme somme directe de deux sous-modules, mais l'application  $\hat{u}_0$  associée, qui est définie sur  $R_1 = \langle X, Y \rangle \oplus \langle Z, T \rangle$  à valeurs dans  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1) = [\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, \langle f_1 \rangle) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, \langle f_2, f_3 \rangle)]$ , se décompose. Elle s'écrit comme la somme directe d'une application  $\hat{u}_{X,Y} : \langle X, Y \rangle \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, \langle f_1 \rangle)$  et d'une application  $\hat{u}_{Z,T} : \langle Z, T \rangle \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, \langle f_2, f_3 \rangle)$ , de la forme  $\hat{u}_0 = \hat{u}_{X,Y} \oplus \hat{u}_{Z,T}$ .*

*On remarque par ailleurs que le sous-espace  $\langle X_0, Y_0 \rangle$  de  $L$  est exactement le sous-espace  $W = L \cap \mathcal{W}$  sur lequel le rang est égal à 1, qui est dans ce cas un plan. Le sous-espace  $\langle X, Y \rangle$  de  $R_1$  est ainsi défini de façon intrinsèque par le module  $u_0$ .*

*Nous retrouverons une symétrie analogue au paragraphe suivant ; nous reviendrons alors plus en détail sur cette remarque dans la remarque 4.27.*

### 4.3.3 Étude du cas $\text{rg } u_0 = 4$ .

Dans le cas où le rang de  $u_0$  vaut 4, les réductions de cas sont plus difficiles à mener à bien que dans le cas précédent. Nous aurons besoin du lemme préliminaire suivant, concernant certains espaces vectoriels formés d'applications linéaires :

**Lemme 4.18.** *Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels, et soit  $L$  un sous-espace vectoriel de  $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(E, F)$  tel que pour tout  $u \in L$  on a  $\text{rg } u \leq 1$ . Alors les éléments non nuls de  $L$  ont tous même image ou ont tous même noyau, au sens suivant : soit il existe  $f \in F$  vérifiant  $\text{Im } u \subset \langle f \rangle$  pour tout  $u \in L$ , soit il existe un sous-espace  $E'$  de  $E$  de codimension 1 vérifiant  $E' \subset \text{Ker } u$  pour tout  $u \in L$ .*

Une autre façon de formuler la conclusion consiste à dire que soit l'image de chaque élément de  $L$  est contenue dans le même sous-espace de dimension 1, soit c'est le cas de tous leurs transposés.

**Démonstration.** Soit  $u_1$  et  $u_2$  deux éléments non nuls de  $L$  n'ayant pas même noyau. On se donne  $e_1 \in \text{Ker } u_2 \setminus \text{Ker } u_1$  et  $e_2 \in \text{Ker } u_1 \setminus \text{Ker } u_2$ . On pose  $f_1 = u_1(e_1)$  et  $f_2 = u_2(e_2)$  ; on a  $\text{Im } u_i = \langle f_i \rangle$  pour chaque  $i$ . On a alors  $(u_1 + u_2)(e_1) = f_1$  et  $(u_1 + u_2)(e_2) = f_2$ , donc  $\langle f_1 \rangle = \langle f_2 \rangle$  car  $(u_1 + u_2)$  est de rang 1. Deux éléments non nuls de  $L$  ont donc toujours, soit même image, soit même noyau.

Si tous les éléments de  $L$  n'ont pas même noyau, fixons deux éléments non nuls  $u_1$  et  $u_2$  ayant des noyaux différents. D'après ce qui précède, ils ont même image  $\langle f \rangle$ . Tout autre élément  $u$  de  $L$  est alors nul, ou bien son noyau diffère d'au moins l'un des deux autres. Dans les deux cas, on a  $\text{Im } u \subset \langle f \rangle$ , ce qui prouve l'énoncé. ■

**Remarque 4.19.** *Le lemme précédent détermine quels sont les espaces vectoriels d'applications linéaires (ou de matrices) sur lesquels le rang est majoré par un. Recenser de façon générale les sous-espaces vectoriels de  $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(E, F)$  ou de  $M_{n,m}$  sur lesquels le rang est majoré par un entier  $k$  fixé est un sujet difficile, et assez peu abordé dans la littérature. Une classification complète pour  $k \leq 3$  a été établie dans [EH] en 1988.*

*L'établissement d'une classification plus poussée ou de tout résultat un tant soit peu général à ce sujet serait extrêmement utile pour l'étude de l'étape du bas. En effet, le lemme que nous avons établi dans le chapitre 2 (cf. paragraphe 2.3.1) est encore un lemme du même type, dans la mesure où il établit des conditions nécessaires pour que le rang reste majoré sur un espace vectoriel de matrices. Bien que les conditions en question soient très loin d'être suffisantes, ce lemme est déjà la clé de tous les résultats établis dans le chapitre 2. L'insuffisance de ce lemme à décrire complètement les espaces de matrices considérés, c'est-à-dire l'écart qui existe entre ces conditions nécessaires et des conditions suffisantes, est certainement l'une des principales raisons qui empêchent la méthode du chapitre 2 d'aboutir dans tous les cas. On peut espérer par conséquent que l'amélioration du lemme 2.5 permette par exemple d'achever l'étude de l'irréductibilité des schémas  $\widehat{E}_{p,q,r}$ .*



Nous montrons ensuite le lemme suivant :

**Lemme 4.20.** *Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $u_0$  un module commençant de  $\widehat{E}_{2,q}$  vérifiant  $\text{rg } u_0 = 4$ . Alors il existe une base  $(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$  pour laquelle on peut écrire, à des lignes de zéros près si  $q \geq 5$  :*

$$X_0 = \begin{pmatrix} I_2 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

Dans cette écriture, chaque bloc représente une matrice  $(2, 2)$ , et  $I_2$  est la matrice identité.

**Remarque 4.21.** *Ce résultat peut se reformuler simplement dans les termes de la stratification des schémas  $\widehat{E}_{p,q}$  par le type numérique introduite dans le chapitre 2. Rappelons qu'un module  $u_0$  de  $\widehat{E}_{p,q}$  est de type numérique  $(p; 0, p; 0, 0; 0, 0)$  si et seulement si il existe une base  $(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$  et des bases de  $E_0$  et  $E_1$  dans lesquelles on peut écrire :*

$$X_0 = \begin{pmatrix} I_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \\ 0 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où les deux premières lignes correspondent à des matrices carrées de taille  $p$  et la dernière à des matrices de taille  $(q-2p, p)$ , et où  $I_p$  désigne la matrice identité. Ces conditions imposent évidemment  $q \geq 2p$ . Le lemme 4.20 signifie exactement que le type numérique d'un module commençant de  $\widehat{E}_{2,q}$  vérifiant  $\text{rg } u_0 = 4$  est  $(2; 0, 2; 0, 0; 0, 0)$ .

**Démonstration.** Soit  $u_0$  un module commençant de  $\widehat{E}_{2,q}$  vérifiant  $\text{rg } u_0 = 4$ . Quitte à supprimer des lignes de zéros, on peut supposer  $q = 4$ . La démonstration consiste alors à appliquer deux fois le lemme 4.18.

Tout d'abord, soit  $L$  l'image de l'application  $\widehat{u}_0 : R_1 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$ . Pour toute base  $(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$ ,  $L$  est le sous-espace vectoriel de  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E_1)$  engendré par  $X_0, Y_0, Z_0$  et  $T_0$ . Comme on a  $\text{rg } u_0 = \text{rg}(X_0 \ Y_0 \ Z_0 \ T_0) = 4$ , ces quatre applications linéaires n'ont pas toutes la même image. Comme le module  $u_0$  vérifie la propriété de rang suffisant, elles n'ont pas non plus toutes le même noyau, puisque l'on a déjà  $\text{Ker } X_0 \cap \text{Ker } Y_0 = \{0\}$ . D'après le lemme 4.18, on peut donc choisir  $X$  de façon à avoir  $\text{rg } X_0 = 2$ .

On fixe alors une base  $(e_1, e_2)$  de  $E_0$ , et on pose  $f_1 = X_0(e_1)$  et  $f_2 = X_0(e_2)$ . On complète  $(f_1, f_2)$  en une base  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  de  $E_1$ ; on peut déjà écrire le module  $u_0$  sous la forme :

$$X_0 = \begin{pmatrix} I_2 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

Les matrices  $Y_2, Z_2$  et  $T_2$  représentent des applications linéaires de  $E_0$  dans  $E'_1 = \langle f_3, f_4 \rangle$ ; soit  $L'$  le sous-espace vectoriel de  $\text{Hom}_{\mathbb{k}}(E_0, E'_1)$  qu'elles engendrent. Ces applications linéaires n'ont pas toutes même image de dimension 1 car  $u_0$  est surjective. De plus, s'il existait un vecteur  $e$  non nul appartenant à l'intersection de leurs noyaux, on aurait  $\text{Im } \widehat{u}_0(e) = \text{Vect}(X_0(e), Y_0(e), Z_0(e), T_0(e)) \subset \langle f_1, f_2 \rangle$ , et le module  $u_0$  ne serait pas un module commençant. Ces trois applications linéaires n'ont donc ni même image ni même noyau, et d'après le lemme 4.18 l'espace  $L'$  contient un élément de rang 2. Quitte à remplacer  $Y$  par une combinaison linéaire de  $Y, Z$  et  $T$ , on peut supposer que  $Y_2$  est inversible. En remplaçant  $f_3$  et  $f_4$  par  $Y_0(e_1)$  et  $Y_0(e_2)$ , on se ramène à  $Y_2 = I_2$ , ce qui prouve le lemme. ■

Nous montrons ensuite deux lemmes portant de façon générale sur les modules de  $\widehat{E}_{p,q}$  ayant pour type numérique  $(p; 0, p; 0, 0; 0, 0)$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . Le premier de ces deux lemmes porte sur l'action des groupes  $GL(R_1)$ ,  $GL(E_0)$  et  $GL(E_1)$  sur une telle structure de module, et le second sur la dimension du noyau de l'application  $v_0$  associée. De façon concrète, faire opérer ces groupes linéaires consiste simplement à choisir de nouvelles bases de  $R_1$ ,  $E_0$  et  $E_1$ .

**Lemme 4.22.** *Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $q = 2p$ , et soit  $u_0$  une structure de module de  $\widehat{E}_{p,2p}$  de type numérique  $(p; 0, p; 0, 0; 0, 0)$ . On fixe une base  $(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$  et des bases de  $E_0$  et  $E_1$  dans lesquelles on a :*

$$X_0 = \begin{pmatrix} I_p \\ 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

Alors le groupe  $G = GL(R_1) \times GL(E_1)$  contient deux sous-groupes  $G_h$  et  $G_v$  isomorphes à  $GL_2(\mathbb{k})$  et qui opèrent sur  $u_0$  de la manière suivante. À chaque matrice inversible  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , on associe un élément  $g_h(A)$  de  $G_h$  et un élément  $g_v(A)$  de  $G_v$ . Le premier correspond à des bases  $(X', Y', Z', T')$  de  $R_1$  et  $(f'_1, \dots, f'_{2p})$  de  $E_1$  dans lesquelles le module  $u_0$  s'écrit :

$$X'_0 = \begin{pmatrix} I_p \\ 0 \end{pmatrix}, Y'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix}, Z'_0 = \begin{pmatrix} \alpha Z_1 + \beta T_1 \\ \alpha Z_2 + \beta T_2 \end{pmatrix} \text{ et } T'_0 = \begin{pmatrix} \gamma Z_1 + \delta T_1 \\ \gamma Z_2 + \delta T_2 \end{pmatrix},$$

soit  $Z'_0 = \alpha Z_0 + \beta T_0$  et  $T'_0 = \gamma Z_0 + \delta T_0$ , et le second fournit des bases  $(X'', Y'', Z'', T'')$  et  $(f''_1, \dots, f''_{2p})$  dans lesquelles on a :

$$X''_0 = \begin{pmatrix} I_p \\ 0 \end{pmatrix}, Y''_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix}, Z''_0 = \begin{pmatrix} \alpha Z_1 + \beta Z_2 \\ \gamma Z_1 + \delta Z_2 \end{pmatrix} \text{ et } T''_0 = \begin{pmatrix} \alpha T_1 + \beta T_2 \\ \gamma T_1 + \delta T_2 \end{pmatrix},$$

soit  $Z''_0 = A(Z_1, Z_2)$  et  $T''_0 = A(T_1, T_2)$ .

Les éléments de  $G_h$  agissent seulement sur l'espace  $\langle Z, T \rangle$  en préservant  $X$  et  $Y$  ainsi que la base  $(f_1, \dots, f_{2p})$ , tandis que les éléments de  $G_v$  préservent  $Z$  et  $T$  et agissent sur l'espace  $\langle X, Y \rangle$  et sur la base  $(f_1, \dots, f_{2p})$ . Les éléments de  $G_h$  commutent donc avec ceux de  $G_v$  et le groupe  $G$  contient le sous-groupe  $G_h \times G_v$  isomorphe à  $GL_2(\mathbb{k}) \times GL_2(\mathbb{k})$ .

**Remarque 4.23.** *Les notations  $G_h$  et  $G_v$  soulignent le fait que les éléments de  $G_h$  agissent «horizontalement» entre  $Z_1$  et  $T_1$  d'une part et entre  $Z_2$  et  $T_2$  d'autre part, tandis que les éléments de  $G_v$  agissent «verticalement» entre  $Z_1$  et  $Z_2$  d'une part et entre  $T_1$  et  $T_2$  d'autre part.*

**Démonstration.** Le groupe  $G_h$  est le plus facile à décrire. Pour chaque matrice  $A$ , il suffit de remplacer  $(Z, T)$  par  $(\alpha Z + \beta T, \gamma Z + \delta T)$  en conservant  $X$  et  $Y$  ainsi que la base de  $E_1$ . Le groupe  $G_h$  est en fait simplement le groupe  $GL(\langle Z, T \rangle)$ .

Les éléments du groupe  $G_v$  sont plus difficiles à expliciter, car ils agissent à la fois sur  $R_1$  et sur  $E_1$ . Nous construisons ici ceux qui correspondent aux opérations élémentaires qui engendrent  $GL_2(\mathbb{k})$ .

Échanger  $(f_1, \dots, f_p)$  avec  $(f_{p+1}, \dots, f_{2p})$  ramène l'expression de  $u_0$  à :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} I_p \\ 0 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} T_2 \\ T_1 \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors d'échanger  $X$  et  $Y$  pour obtenir simplement la permutation de  $Z_1$  avec  $Z_2$  et de  $T_1$  avec  $T_2$ , qui correspond à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Soit ensuite  $\lambda \in \mathbb{k}^*$ . Remplacer  $f_i$  par  $(1/\lambda)f_i$  pour chaque  $i \in \llbracket 1, 2p \rrbracket$  revient à multiplier  $X_0, Y_0, Z_0$  et  $T_0$  par  $\lambda$ . Remplacer ensuite  $X$  et  $Y$  par  $(1/\lambda)X$  et  $(1/\lambda)Y$  revient en définitive à multiplier seulement  $Z_0$  et  $T_0$ . Ceci fournit l'élément de  $G_v$  correspondant à la matrice  $\lambda I_2$ .

Enfin, en conservant  $(f_1, \dots, f_p)$  et en remplaçant  $f_i$  par  $f_i - \lambda f_{i-p}$  pour  $i \in \llbracket p+1, 2p \rrbracket$ , on ramène  $u_0$  à :

$$X_0 = \begin{pmatrix} I_p \\ 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} \lambda I_p \\ I_p \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1 + \lambda Z_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} T_1 + \lambda T_2 \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

Si l'on remplace ensuite  $Y$  par  $Y - \lambda X$ , on obtient l'élément de  $G_v$  correspondant à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On vérifie sans peine que le sous-groupe de  $GL(R_1) \times GL(E_1)$  engendré par ces éléments est isomorphe à  $GL_2(\mathbb{k})$ . ■

Nous nous penchons à présent sur la dimension de l'espace  $\text{Ker } v_0$ .

**Lemme 4.24.** *Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $q \geq 2p$  et  $u_0 \in \widehat{E}_{2,q}$ . On suppose que  $u_0$  est de type numérique  $(p; 0, p; 0, 0; 0, 0)$ , et l'on fixe une base  $(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$  et des bases de  $E_0$  et  $E_1$  dans lesquelles on a, à des lignes de zéros près si  $q \geq 2p$  :*

$$X_0 = \begin{pmatrix} I_p \\ 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_p \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix},$$

où chaque bloc représente une matrice carrée de taille  $p$ , et  $I_p$  est l'identité. Alors on a  $\ker v_0 \leq p$ , et  $\ker v_0 = p$  si et seulement si  $[Z_1, T_1] = [Z_2, T_2] = [Z_1, T_2] + [Z_2, T_1] = 0$ , en notant  $[A, B]$  le commutant  $AB - BA$ . De façon plus précise, soit  $K$  le sous-espace vectoriel :

$$K = \text{Ker}[Z_1, T_1] \cap \text{Ker}[Z_2, T_2] \cap \text{Ker}([Z_1, T_2] + [Z_2, T_1])$$

de  $E_0$ . Pour toute base  $(e_1, \dots, e_k)$  de  $K$ , on obtient une base  $(\psi_1, \dots, \psi_k)$  de  $\text{Ker } v_0$  en posant pour  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \psi_i = & (X \wedge Y) \otimes_{\mathbb{k}} (Z_1 T_2 - T_1 Z_2)(e_i) + (X \wedge Z) \otimes_{\mathbb{k}} T_1(e_i) - (X \wedge T) \otimes_{\mathbb{k}} Z_1(e_i) \\ & + (Y \wedge Z) \otimes_{\mathbb{k}} T_2(e_i) - (Y \wedge T) \otimes_{\mathbb{k}} Z_2(e_i) + (Z \wedge T) \otimes_{\mathbb{k}} e_i. \end{aligned}$$

Démonstration. Dans les bases fixées, l'application  $v_0$  est donnée par :

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 & Z_1 & T_1 & 0 & 0 & 0 \\ I_p & Z_2 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -I_p & 0 & 0 & Z_1 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_2 & T_2 & 0 \\ \hline 0 & -I_p & 0 & 0 & 0 & T_1 \\ 0 & 0 & 0 & -I_p & 0 & T_2 \\ \hline 0 & 0 & -I_p & 0 & 0 & -Z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_p & -Z_2 \end{pmatrix}.$$

Tout élément  $\psi$  de  $\Lambda^2 R_1 \otimes_{\mathbf{k}} E_0$  se décompose de façon unique sous la forme :

$$\psi = \psi_{XY} + \psi_{XZ} + \psi_{XT} + \psi_{YZ} + \psi_{YT} + \psi_{ZT},$$

avec à chaque fois  $\psi_{PQ} = (P \wedge Q) \otimes_{\mathbf{k}} e_{PQ}$  avec  $e_{PQ} \in E_0$ . Cette décomposition est adaptée à l'écriture de  $v_0$  ci-dessus, au sens où  $v_0(\psi)$  s'obtient en effectuant le produit par blocs de

cette matrice avec le vecteur-colonne  $\begin{pmatrix} e_{XY} \\ \vdots \\ e_{ZT} \end{pmatrix}$ . Le vecteur  $\psi$  appartient alors à  $\text{Ker } v_0$  si et

seulement si les 8 relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{ll} (1) & Z_1(e_{XZ}) + T_1(e_{XT}) = 0 \quad \text{et} \quad (2) \quad e_{XY} = -Z_2(e_{XZ}) - T_2(e_{XT}) \\ (3) & e_{XY} = Z_1(e_{YZ}) + T_1(e_{YT}) \quad (4) \quad Z_2(e_{YZ}) + T_2(e_{YT}) = 0 \\ (5) & e_{XZ} = T_1(e_{ZT}) \quad (6) \quad e_{YZ} = T_2(e_{ZT}) \\ (7) & e_{XT} = -Z_1(e_{ZT}) \quad (8) \quad e_{YT} = -Z_2(e_{ZT}) \end{array}$$

Posons  $e_{ZT} = e$ . Les relations (8),(7), (6), (5) et (3) donnent successivement :

$$e_{YT} = -Z_2(e), \quad e_{XT} = -Z_1(e), \quad e_{YZ} = T_2(e), \quad e_{XZ} = T_1(e) \quad \text{et} \quad e_{XY} = (Z_1 T_2 - T_1 Z_2)(e).$$

Ces relations déterminent exactement  $\psi$  en fonction de  $e$ , et on a :

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \psi = & (X \wedge Y) \otimes_{\mathbf{k}} (Z_1 T_2 - T_1 Z_2)(e) + (X \wedge Z) \otimes_{\mathbf{k}} T_1(e) - (X \wedge T) \otimes_{\mathbf{k}} Z_1(e) \\ & + (Y \wedge Z) \otimes_{\mathbf{k}} T_2(e) - (Y \wedge T) \otimes_{\mathbf{k}} Z_2(e) + (Z \wedge T) \otimes_{\mathbf{k}} e. \end{aligned}$$

En particulier, ceci entraîne  $\text{ker } v_0 \leq p$ , et  $\text{ker } v_0 = p$  si et seulement si pour tout  $e \in E_0$  on obtient effectivement ainsi un élément de  $\text{Ker } v_0$ .

En reportant ce qui précède dans les relations (1), (4) et (2), on obtient les relations :

$$(Z_1 T_1 - T_1 Z_1)(e) = 0, \quad (Z_2 T_2 - T_2 Z_2)(e) = 0 \quad \text{et} \quad [(Z_1 T_2 - T_1 Z_2) + (Z_2 T_1 - T_2 Z_1)](e) = 0.$$

Un vecteur  $e \in E_0$  donne alors naissance à un élément de  $\text{Ker } v_0$  via l'expression (4.2) si et seulement si il vérifie ces trois relations. On a donc  $\text{ker } v_0 = p$  si et seulement si ces relations sont vérifiées pour tout  $e \in E_0$ , c'est-à-dire si et seulement si les applications linéaires  $[Z_1, T_1]$ ,  $[Z_2, T_2]$  et  $[Z_1, T_2] + [Z_2, T_1]$  sont nulles.

Plus généralement, on obtient par linéarité une base de  $\text{Ker } v_0$  à partir d'une base de l'espace  $K = \text{Ker } [Z_1, T_1] \cap \text{Ker } [Z_2, T_2] \cap \text{Ker } ([Z_1, T_2] + [Z_2, T_1])$  via l'expression (4.2). ■

On peut à présent achever la détermination des types des modules commençants :

**Lemme 4.25.** Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $u_0$  un module commençant de  $\widehat{E}_{2,q}$  vérifiant  $\text{rg } u_0 = 4$ . Alors  $u_0$  est du type du module suivant :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{k}^2$  et  $\beta \neq 0$ . (Ce type est exprimé ici dans le cas  $q = 4$ ; il faut rajouter des lignes de zéros si  $q \geq 5$ ).

**Démonstration.** D'après le lemme 4.20, on peut écrire  $X_0 = \begin{pmatrix} I_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}$ ,  $Z_0 = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$  et  $T_0 = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$ . Posons les notations suivantes :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 \\ c'_1 & d'_1 \\ a'_2 & b'_2 \\ c'_2 & d'_2 \end{pmatrix}.$$

Quitte à remplacer  $Z$  par  $Z - d_1 X - d_2 Y$  et  $T$  par  $T - d'_1 X - d'_2 Y$ , on peut supposer  $d_1 = d_2 = d'_1 = d'_2 = 0$ . On a alors :

$$\text{rg } \tilde{u}_0(e_1) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 & a'_1 \\ 0 & 0 & c_1 & c'_1 \\ 0 & 1 & a_2 & a'_2 \\ 0 & 0 & c_2 & c'_2 \end{pmatrix} \text{ et } \text{rg } \tilde{u}_0(e_2) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 & b'_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b'_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc  $\text{rg } \tilde{u}_0(e_1) = 2 + \text{rg} \begin{pmatrix} c_1 & c'_1 \\ c_2 & c'_2 \end{pmatrix}$  et  $\text{rg } \tilde{u}_0(e_2) = 2 + \text{rg} \begin{pmatrix} b_1 & b'_1 \\ b_2 & b'_2 \end{pmatrix}$ . Comme  $\text{rg } \tilde{u}_0(e_1) \geq 3$  et  $\text{rg } \tilde{u}_0(e_2) \geq 3$ , on a  $\text{rg} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c'_1 & c'_2 \end{pmatrix} \geq 1$  et  $\text{rg} \begin{pmatrix} b_1 & b'_1 \\ b_2 & b'_2 \end{pmatrix} \geq 1$ . On en déduit que l'on a les deux relations  $(c_1, c_2, c'_1, c'_2) \neq (0, 0, 0, 0)$  et  $(b_1, b'_1, b_2, b'_2) \neq (0, 0, 0, 0)$ .

Montrons qu'en utilisant le lemme 4.22 on peut toujours se ramener à avoir  $b_1 \neq 0$  et  $c_1 \neq 0$ . On fixe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{k}^2$ . On considère l'élément  $g_h(\lambda)$  de  $G_h$  correspondant à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , qui permet de remplacer  $Z_i$  par  $Z_i + \lambda T_i$  pour  $i = 1$  ou  $2$ , et l'élément  $g_v(\mu)$  de  $G_v$ ,

correspondant à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , qui permet de remplacer  $Z_1$  (resp.  $T_1$ ) par  $Z_1 + \mu Z_2$  (resp.  $T_1 + \mu T_2$ ). Ces deux éléments commutent, et faire opérer leur produit revient globalement à remplacer  $(Z_1, Z_2, T_1, T_2)$  par  $(Z_1 + \lambda T_1 + \mu Z_2 + \lambda \mu T_2, Z_2 + \lambda T_2, T_1 + \mu T_2, T_2)$ .

La matrice  $Z_1$  est alors remplacée par la matrice  $\begin{pmatrix} a''_1 & b''_1 \\ c''_1 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $a''_1 = a_1 + \mu a_2 + \lambda a'_1 + \lambda \mu a'_2$ ,  $b''_1 = b_1 + \mu b_2 + \lambda b'_1 + \lambda \mu b'_2$  et  $c''_1 = c_1 + \mu c_2 + \lambda c'_1 + \lambda \mu c'_2$ . On a  $(b_1, b_2, b'_2, b'_2) \neq (0, 0, 0, 0)$  et

$(c_1, c_2, c'_1, c'_2) \neq (0, 0, 0, 0)$ , donc il existe un ouvert de Zariski non vide de  $\mathbb{k}^2$  sur lequel on a simultanément  $b'_1 \neq 0$  et  $c'_1 \neq 0$ . On peut donc choisir la base  $(X, Y, Z, T)$  de façon à avoir :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 \\ c'_1 & 0 \\ a'_2 & b'_2 \\ c'_2 & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $b_1 \neq 0$  et  $c_1 \neq 0$ .

Quitte à remplacer  $Z$  par  $(1/b_1)Z$ , on peut supposer  $b_1 = 1$ . Quitte à remplacer  $T$  par  $T - b'_1 Z$ , on peut supposer  $b'_1 = 0$ . Quitte enfin à faire opérer l'élément de  $G_v$  correspondant à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_2 & 1 \end{pmatrix}$ , qui remplace  $Z_2$  par  $Z_2 - b_2 Z_1$  et  $T_2$  par  $T_2 - b_2 T_1$ , on peut supposer  $b_2 = 0$ . On a alors :

$$Z_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}, Z_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{pmatrix}, T_1 = \begin{pmatrix} a'_1 & 0 \\ c'_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} a'_2 & b'_2 \\ c'_2 & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $c_1 \neq 0$ .

On applique alors le lemme 4.24 dans la base  $(X, Y, Z, T)$  ainsi obtenue. Le module  $u_0$  vérifie  $\ker v_0 = 2$ , donc on a les trois relations  $[Z_1, T_1] = [Z_2, T_2] = [Z_1, T_2] + [Z_2, T_1] = 0$ . Pour alléger les notations, posons  $a = a_1$ ,  $b = c_1$ ,  $c = a_2$ ,  $d = c_2$ ,  $f = a'_1$ ,  $g = c'_1$ ,  $h = a'_2$ ,  $i = c'_2$  et  $j = b'_2$ , soit  $Z_1 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ ,  $Z_2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_1 = \begin{pmatrix} f & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix}$  et  $T_2 = \begin{pmatrix} h & j \\ i & 0 \end{pmatrix}$ . On a alors  $[Z_1, T_1] = \begin{pmatrix} -g & -f \\ bf - ag & -g \end{pmatrix}$  et  $[Z_2, T_2] = \begin{pmatrix} -dj & cj \\ dh - ci & dj \end{pmatrix}$ . On obtient  $f = g = 0$ , c'est-à-dire  $T_1 = 0$ , ainsi que  $dj = cj = 0$ . On en déduit  $[Z_2, T_1] = 0$ , donc  $[Z_1, T_2] = 0$ . Or  $[Z_1, T_2] = \begin{pmatrix} i - bj & aj - h \\ bh - ai & bj - i \end{pmatrix}$ , donc on a  $i = bj$  et  $h = aj$ . On obtient :

$$Z_0 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \\ c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ aj & j \\ bj & 0 \end{pmatrix} = j \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $dj = cj = 0$ . Le module  $u_0$  n'étant pas dégénéré, on a nécessairement  $T_0 \neq 0$ , donc  $j \neq 0$ , et  $d = c = 0$ . Quitte à remplacer  $T$  par  $(1/j)T$ , on peut supposer  $j = 1$ . On s'est donc ramené à :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

On a enfin  $b \neq 0$ , car sinon on aurait  $\text{Im } \tilde{u}_0(e_1) \subset \langle f_1, f_3 \rangle$ , donc  $\text{rg } \tilde{u}_0(e_1) \leq 2$ . On s'est donc ramené au type de module indiqué. ■

On déduit du lemme 4.25 le corollaire :

**Proposition 4.26.** *Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ , il n'existe pas de module commençant dans  $\widehat{E}_{2,q}$  qui vérifie  $\text{rg } u_0 = 4$ .*

**Démonstration.** Soit  $u_0$  un module commençant vérifiant  $\text{rg } u_0 = 4$ . D'après le lemme précédent, il existe des bases de  $E_0$ ,  $E_1$  et  $R_1$  dans lesquelles le module  $u_0$  se représente par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} I_2 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ I_2 \end{pmatrix}, Z_0 = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix},$$

avec  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ , où  $\alpha \in \mathbb{k}$  et  $\beta \in \mathbb{k}^*$ . On a  $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta & \alpha \\ \alpha\beta & \beta \end{pmatrix}$ . D'après le lemme 4.24, on a  $\ker v_0 = 2$ , et pour toute base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  de  $E_0$  on obtient une base  $(\psi_1, \psi_2)$  de  $\text{Ker } v_0$  en posant, pour  $i \in \{1, 2\}$  :

$$\psi_i = (X \wedge Y) \otimes_{\mathbb{k}} A^2(\varepsilon_i) + (Y \wedge Z - X \wedge T) \otimes_{\mathbb{k}} A(\varepsilon_i) + (Z \wedge T) \otimes_{\mathbb{k}} \varepsilon_i.$$

Choisissons la base  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  donnée par  $\varepsilon_1 = e_2$  et  $\varepsilon_2 = -e_1 + \alpha e_2$ . On a alors  $A(\varepsilon_1) = e_1$ ,  $A^2(\varepsilon_1) = \alpha e_1 + \beta e_2$  et  $A(\varepsilon_2) = -\beta e_2 = -\beta \varepsilon_1$  donc  $A^2(\varepsilon_1) = -\beta \varepsilon_1$ . On obtient :

$$\begin{cases} \psi_1 = (X \wedge Y) \otimes_{\mathbb{k}} (\alpha e_1 + \beta e_2) + (Y \wedge Z - X \wedge T) \otimes_{\mathbb{k}} e_1 + (Z \wedge T) \otimes_{\mathbb{k}} e_2, \\ \text{et } \psi_2 = -\beta (X \wedge Y) \otimes_{\mathbb{k}} e_1 - \beta (Y \wedge Z - X \wedge T) \otimes_{\mathbb{k}} e_2 + (Z \wedge T) \otimes_{\mathbb{k}} (\alpha e_2 - e_1). \end{cases}$$

On a par ailleurs  $\text{rg } u_0 = 4$ . On peut choisir la base de  $\text{Ker } u_0$  donnée par les vecteurs  $\mu_1 = X \otimes e_1 - Z \otimes e_2$ ,  $\mu_2 = Z \otimes e_1 - X \otimes (\alpha e_1 + \beta e_2)$ ,  $\mu_3 = T \otimes e_2 - Y \otimes e_1$  et  $\mu_4 = Y \otimes (\alpha e_1 + \beta e_2) - T \otimes e_1$ .

En posant  $\omega_i = 1 \otimes \psi_i$  pour  $i = 1$  ou  $2$  et  $\nu_i = 1 \otimes \mu_i$  pour  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , on obtient des bases  $(\omega_1, \omega_2)$  et  $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$  de  $R(-2) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Ker } v_0$  et  $R(-1) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Ker } v_0$  dans lesquelles on a  $V(\omega_1) = T \nu_1 + Y \nu_2 + Z \nu_3 + X \nu_4$  et  $V(\omega_2) = (\alpha T + \beta Y) \nu_1 + T \nu_2 + (\alpha Z + \beta X) \nu_3 + Z \nu_4$ . La matrice représentant  $\sigma_{2,2,1}$  dans ces bases est donc :

$$\sigma_{2,2,1} = \begin{pmatrix} T & \alpha T + \beta Y \\ Y & T \\ Z & \alpha Z + \beta X \\ X & Z \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est analogue à celle que l'on avait obtenue dans le cas  $\text{rg } u_0 = 3$ . Ses mineurs définissent de la même façon la réunion de deux droites, donc une courbe, et le module  $u_0$  n'est pas un module commençant. ■

**Remarque 4.27.** *On retrouve entre  $(X, Z)$  et  $(Y, T)$  une symétrie identique à celle que l'on avait observée dans le cas  $\text{rg } u_0 = 3$  sur la matrice  $A$ . Elle transparaît en outre ici de façon bien plus directe sur la structure du module  $u_0$ .*

Comme dans le cas précédent, la flèche  $\widehat{u}_0$  associée à  $u_0$  est décomposée : ici, elle se réalise comme la somme directe d'une application  $\widehat{u}_{X,Z} : \langle X, Z \rangle \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{k}}(E_0, \langle f_1, f_2 \rangle)$  et d'une application  $\widehat{u}_{Y,T} : \langle Y, T \rangle \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{k}}(E_0, \langle f_3, f_4 \rangle)$ , c'est-à-dire on a  $\widehat{u}_0 = \left( \begin{array}{c|c} \widehat{u}_{X,Z} & 0 \\ \hline 0 & \widehat{u}_{Y,T} \end{array} \right)$ .

Nous avons déjà vu que l'existence de cette symétrie sur la matrice  $\Sigma$  ( $\text{rg } u_0 = 3$ ) ou  $\sigma_{2,2,1}$  ( $\text{rg } u_0 = 4$ ) est directement responsable du fait que ses 2-mineurs définissent une courbe. De façon précise, dans le cas ci-dessus, le sous-groupe  $GL(\langle X, Z \rangle) \times GL(\langle Y, T \rangle)$  de  $GL(R_1)$  agit sur les mineurs maximaux de la matrice  $\sigma_{2,2,1}$ , et le sous-schéma que ceux-ci définissent est invariant sous l'action de ce groupe. Ce schéma contient donc au moins une droite dès qu'il contient un point.

Le fait qu'on la retrouve à chaque fois sur la structure du module suggère l'existence d'un phénomène plus général dont la détermination nous éviterait d'effectuer deux fois le même calcul, mais qui reste à expliciter entièrement. Sous quelque forme que ce phénomène se concrétise, établir un énoncé qui le formalise revient nécessairement à établir encore une fois un lien direct entre la structure d'un module et les mineurs de la flèche  $\sigma_{2,2,1}$  associée, comme dans les lemmes 3.66 et 4.13.

Les bases possibles d'un tel énoncé sont contenues dans le lemme 4.22 sur les actions de groupes. La symétrie au niveau de la structure du module se traduit concrètement par le fait que certains sous-groupes de  $GL(E_0) \times GL(E_1) \times GL(R_1)$  stabilisent une partie de l'écriture matricielle de ce module. On pourrait établir un lemme analogue sur les actions de groupes à propos du module obtenu dans le paragraphe 4.3.2; nous ne l'avons pas fait alors simplement parce que nous n'en avons pas besoin. Il reste ensuite à analyser comment l'action d'un groupe qui stabilise l'écriture du module se transporte sur la matrice  $\sigma_{2,2,1}$ , et en dernier ressort sur ses mineurs maximaux.

## 4.4 Le cas $p = 3$ .

Soit  $M$  le module de Rao d'une courbe à cohomologie semi-naturelle, lisse irréductible et obstruée, avec  $p = 3$ . D'après la proposition 4.7, le module  $u_0$  doit encore être un module commençant de  $\widehat{E}_{3,q}$ . Les conditions  $\text{rg } v_0 \geq 2p + 5 = 11$  et  $\text{rg } v_0 \leq 6p - 2 = 16$  donnent  $\text{rg } v_0 \in \llbracket 11, 16 \rrbracket$ . D'après la relation (4.1), on a en outre  $(\text{rg } v_0 / 4) \leq \text{rg } u_0 \leq \text{rg } v_0 - (2p + 2) = \text{rg } v_0 - 8$ , donc si  $\text{rg } v_0 = 11$  on a  $\text{rg } u_0 = 3$  et si  $\text{rg } v_0 \in \llbracket 12, 16 \rrbracket$  on a  $\text{rg } u_0 \in \llbracket 4, \text{rg } v_0 - 8 \rrbracket$ . On peut formuler ceci ainsi :

**Proposition 4.28.** *Si  $u_0$  est un module commençant de  $\widehat{E}_{3,q}$ , on a  $\text{rg } u_0 \in \llbracket 3, 8 \rrbracket$ . De plus, si  $\text{rg } u_0 = 3$  on a  $\text{rg } v_0 = 11$  et si  $\text{rg } u_0 \in \llbracket 4, 8 \rrbracket$  on a  $\text{rg } v_0 \in \llbracket \text{rg } u_0 + 8, 16 \rrbracket$ .*

On peut alors aborder l'étude de ces divers cas par des méthodes en tous points similaires à celles introduites au paragraphe précédent. Cependant, les réductions de cas qui apparaissent sont alors infiniment plus fastidieuses à décrire que dans le cas  $p = 2$ . Comme par ailleurs les idées générales sous-tendant les démonstrations sont identiques, le détail de celles-ci n'apporterait rien qui ne soit déjà contenu dans ce qui précède. Par conséquent, dans tout ce paragraphe nous ne donnerons aucune démonstration, nous contentant de citer les résultats et d'indiquer quelques lignes directrices concernant l'étude.



Un premier lemme général que l'on peut montrer est le suivant, qui est l'analogue pour  $p = 3$  du lemme 4.13 :

**Lemme 4.29.** *Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ . Si  $u_0$  est un module commençant de  $\widehat{E}_{3,q}$  qui est dégénéré au sens de la définition 4.12, alors il vérifie  $\text{rg } u_0 = 7$  et  $\text{rg } v_0 = 16$ , c'est-à-dire  $\ker v_0 = 2$ .*

La démonstration est en tous points comparable à celle du lemme 4.13, mais au moins deux différences importantes sont à noter, qui expliquent pourquoi le résultat est ici moins complet que dans le cas  $p = 2$ . Nous reprenons ici les notations de la démonstration du lemme 4.13. Tout d'abord, on a ici la relation  $\ker(Y_0 Z_0 T_0) = \ker u_0 - 3$ , donc on a seulement  $\ker v_0 \geq \ker u_0 - 3$ , tandis que la condition d'être un module commençant impose toujours  $\ker v_0 \leq \ker u_0 - 2$ . La dimension de  $\text{Ker } v_0$  n'est donc plus déterminée de façon unique, mais peut valoir  $\ker u_0 - 3$  ou  $\ker u_0 - 2$  et il y a deux cas à considérer. Le premier de ces deux cas est analogue au cas  $p = 2$ , car l'espace  $\text{Ker } v_0$  est alors contenu comme précédemment dans le sous-module  $F_2$ . Cependant, ce cas n'est plus impossible et c'est là la seconde différence : la matrice  $\sigma_{2,2,1}$  est de taille  $(\ker v_0, \ker u_0)$ , c'est-à-dire  $(k, k + 3)$  en posant  $k = \ker v_0$ , et ses mineurs peuvent définir un sous-schéma fini si  $\text{rg } u_0 = 7$  et  $\text{rg } v_0 = 16$ . Il faut ensuite considérer l'autre cas, où la matrice  $\sigma_{2,2,1}$  contient une colonne supplémentaire. On montre d'abord que le couple  $(\text{rg } u_0, \text{rg } v_0)$  vaut alors nécessairement  $(15, 7)$  ou  $(16, 8)$ , puis que ces cas-là ne conviennent pas.

Ces deux différences avec le cas  $p = 2$  ont des conséquences dont l'importance augmente avec la valeur de  $p$  ; le lemme 4.29 semble donc difficile à généraliser aux valeurs plus grandes que 3.

On étudie ensuite les modules commençants suivant le rang de  $u_0$ . Contrairement à ce qui se passait précédemment, les cas où ce rang est le plus grand semblent ici les plus accessibles car le rang de  $v_0$  est alors plus précisément déterminé. En employant des techniques de réduction semblables à celles déjà introduites, on peut étudier au moins les cas où le rang de  $u_0$  vaut 7 ou 8. Il semble d'ailleurs que ces méthodes atteignent là leur limite et que pour pouvoir étudier les cas où le rang de  $u_0$  est plus petit il sera déjà nécessaire d'imaginer de nouvelles techniques. On obtient du moins les résultats suivants :

**Proposition 4.30.** *Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ , il n'existe pas de module commençant dans  $\widehat{E}_{3,q}$  vérifiant  $\text{rg } u_0 = 8$ .*

**Proposition 4.31.** *Soit  $q \in \mathbb{N}^*$ . Si  $u_0$  est un module commençant de  $\widehat{E}_{3,q}$  vérifiant  $\text{rg } u_0 = 7$ , il est dégénéré et de type numérique  $(3; 0, 3; 0, 1; 0, 0)$ .*

*De façon plus précise, il existe une base  $(X, Y, Z, T)$  de  $R_1$  et des bases de  $E_0$  et  $E_1$  dans lesquelles on peut écrire :*

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & b & c \\ 0 & d & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ct } T_0 = 0.$$

On peut en outre toujours se ramener à avoir, soit  $\varepsilon = 0$  et  $a = 1$ , soit  $\varepsilon = 1$ .

La matrice représentant l'application  $\sigma_{2,2,1}$  associée dans des bases bien choisies peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{2,2,1} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \\ X & \varepsilon Y \\ dY & -Z \\ bY - Z & aX + cY \end{pmatrix}.$$

Pour un choix général des paramètres  $(a, b, c, d, \varepsilon)$  dans  $\mathbb{k}^5$ , les 2-mineurs de cette matrice définissent au plus un schéma fini curviligne et le module  $u_0$  est effectivement un module commençant. Ceci prouve que le lemme 4.29 est en fait optimal.

Comme la propriété sur les mineurs de  $\sigma_{2,2,1}$  est ouverte par rapport aux paramètres  $(a, b, c, d, \varepsilon)$ , il suffit pour montrer le dernier point d'exhiber un exemple. Si l'on pose  $a = d = \varepsilon = 1$  et  $b = c = 0$ , c'est-à-dire :

$$Z_0 = \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \end{array} \right)$$

les 2-mineurs de  $\sigma_{2,2,1}$  définissent un schéma dont l'idéal saturé est  $(T, X^2 + YZ, Y^2 + XZ, Z^2 - XY)$ , qui est donc la réunion disjointe de trois points.

On peut alors utiliser ce module pour fabriquer des courbes à cohomologie semi-naturelle et obstruées.

**Proposition 4.32.** Soit  $u_0$  le module de  $\widehat{E}_{2,7}$  fixé ci-dessus, c'est-à-dire correspondant à  $a = d = \varepsilon = 1$  et  $b = c = 0$ . Soit  $(e, f, g, h, i, j) \in \mathbb{k}^6$  et soit  $A$  la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} e & f & g & h & i & j & i+g \\ -(i+g) & -(e+j) & -(f+h) & e & f & g & -h \\ h & i & j & -(i+g) & -(e+j) & -(f+h) & -e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix},$$

en notant  $l_i$  les lignes de la matrice  $A$ . Si l'on pose  $X_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ ,  $Y_1 = \begin{pmatrix} l_3 \\ l_1 \end{pmatrix}$ ,  $Z_1 = \begin{pmatrix} l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$  et  $T_1 = 0$ , les relations de commutation sont vérifiées et l'on obtient un module  $M$  de  $\widehat{E}_{3,7,2}$ .

Si de plus la matrice  $A$  est surjective, ce qui se produit pour un choix général des paramètres  $(e, f, g, h, i, j)$  dans  $\mathbb{k}^6$  (il suffit par exemple de les prendre tous nuls sauf un), les courbes minimales de  $M$  sont à la fois obstruées et à cohomologie semi-naturelle.

L'obstruction de ces courbes est assez facile à vérifier : elle résulte du fait que l'application linéaire par blocs  $\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & -Z_1 \\ Y_1 & -Z_1 & X_1 \end{pmatrix}$  possède deux lignes égales, donc n'est pas surjective. En revanche, montrer que les courbes minimales sont à cohomologie semi-naturelle est un peu plus délicat : il faut pour cela étudier soigneusement les 11-mineurs de la matrice  $\sigma_{2, \leq 3}$ , qui est de taille  $(15, 24)$ .

Il ne semble pas qu'il soit possible d'obtenir une telle courbe qui soit également lisse et irréductible à partir de ce module  $u_0$ , ni même plus généralement à partir des modules fournis par la proposition 4.31, à cause essentiellement de la relation  $T_0 = 0$ .

Pour démontrer les propositions 4.30 et 4.31, un outil important permettant d'éliminer un certain nombre de cas est le lemme suivant, que nous citons car sa portée dépasse le seul cas  $p = 3$  :

**Lemme 4.33.** *Soit  $p \geq 3$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$  et soit  $u_0$  un module commençant de  $\widehat{E}_{p,q}$ . S'il existe un sous-espace vectoriel  $E_0^\#$  de  $E_0$  de dimension  $p-1$  tel que la structure de module  $u_0^\#$  de  $\widehat{E}_{p-1,q}$  induite par la restriction de  $u_0$  à  $R_1 \otimes E_0^\#$  vérifie  $\text{rg } u_0^\# \leq \text{rg } u_0 - 3$ , alors  $u_0^\#$  est un module commençant de  $\widehat{E}_{p-1,q}$ .*

En particulier, si  $p = 3$ , ceci n'est pas possible puisque  $\widehat{E}_{2,q}$  ne contient pas de module commençant, donc on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 4.34.** *Soit  $q \in \mathbb{N}^*$  et soit  $u_0$  un module commençant de  $\widehat{E}_{3,q}$ . Pour tout couple  $(e_1, e_2)$  de vecteurs linéairement indépendants dans  $E_0$  on a :*

$$\text{rg} (X_0(e_1), Y_0(e_1), Z_0(e_1), T_0(e_1), X_0(e_2), Y_0(e_2), Z_0(e_2), T_0(e_2)) \geq \text{rg } u_0 - 2.$$

Ce résultat s'apparente en quelque sorte à la condition de rang suffisant, qui stipule que pour tout vecteur non nul  $e$  de  $E_0$  on a  $\text{rg} (X_0(e), Y_0(e), Z_0(e), T_0(e)) \geq 3$ . À cause d'ailleurs de cette même condition, le corollaire 4.34 est dénué de tout intérêt si  $\text{rg } u_0 \leq 5$ , et ceci fournit une raison supplémentaire pour laquelle les cas où le rang de  $u_0$  est le plus élevé semblent les plus abordables.

Enfin, pour effectuer une première dichotomie dans la phase de réduction des cas, on se sert, aussi bien dans les cas où le rang de  $u_0$  vaut 7 ou 8, de la stratification de  $\widehat{E}_{3,q}$  par le type numérique, ou plutôt en l'occurrence par le multirang. On étudie ainsi d'une part les modules  $u_0$  dont le type numérique est de la forme  $(3; 0, 3; b_2, a_2; b_3, a_3)$ , c'est-à-dire les modules qui appartiennent à l'ouvert défini par  $\sigma_1 = 6$  avec les notations du chapitre 2, et d'autre part ceux qui appartiennent au fermé complémentaire.

## Bibliographie

- [BB] E. BALLICO et G. BOLONDI, *The variety of module structures*, Arch. der Math. 54, pp. 397–408, 1990.
- [BBM] E. BALLICO, G. BOLONDI et J.-C. MIGLIORE, *The Lazarsfeld-Rao problem for liaison classes of two-codimensional subschemes of  $\mathbb{P}^n$* , Am. J. of Math. 113, pp. 117–128, 1991.
- [BE] E. BALLICO et P. ELLIA, *A program for space curves*, dans *Proceedings algebraic varieties of small dimension*, Rend. del Sem. Mat., Università e Politecnico Torino, pp. 25–46, 1986.
- [BKM] G. BOLONDI, J. O. KLEPPE et R. M. MIRÒ-ROIG, *Maximal rank curves and singular points of the Hilbert scheme*, Compositio Mathematica 77, pp. 269–291, 1991.
- [BM-1] G. BOLONDI et J.-C. MIGLIORE, *Classification of maximal rank curves in the liaison class  $L_n$* , Math. Ann. 277, pp. 585–603, 1987.
- [BM-2] G. BOLONDI et J.-C. MIGLIORE, *On curves with natural cohomology and their deficiency modules*, Ann. Institut Fourier 43, fasc. 2, pp. 325–357, 1993.
- [Bol] G. BOLONDI, *Irreducible families of curves with fixed cohomology*, Arch. der Math 53, pp. 300–305, 1989.
- [EH] D. EISENBUD et J. HARRIS, *Vector spaces of matrices of low rank*, Adv. in Math. 70, pp. 135–155, 1988.
- [Eis] D. EISENBUD, *Commutative algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 150, Springer, 1995.
- [Ell] G. ELLINGSRUD, *Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans  $\mathbb{P}^c$  à cône de Cohen-Macaulay*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 8, 4<sup>e</sup> série, pp. 425–432, 1975.
- [Ein] L. EIN, *Hilbert scheme of smooth space curves*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4, 4<sup>e</sup> série, pp. 469–478, 1986.
- [Flø] G. FLØYSTAD, *On space curves with good cohomological properties*, Math. Ann. 291, pp. 505–549, 1991.

- [Gin] S. GINOULLAC, *Sur les schémas des modules de Rao de largeur 3*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 320, pp. 1327–1330, 1995.
- [Hal] G. HALPHEN, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques*, Journal de l'École Polytechnique, 52<sup>e</sup> cahier, 1882 - Œuvres complètes, t. 3, Gauthiers-Villars éditeur, Paris, 1921, pp. 261–455.
- [Har] J. HARRIS, *Algebraic geometry, a first course*, Graduate texts in mathematics, Springer, 1992.
- [H-1] R. HARTSHORNE, *On the classification of algebraic space curves*, dans *Vector bundles and differential equations*, Proceedings Nice 1979, Progress in Math. 7, Birkäuser, Boston, pp. 83–112, 1980.
- [H-2] R. HARTSHORNE, *On the classification of algebraic space curves II*, Proceedings of Symposia in Pure Math. 45, (Bowdoin 1985), Am. Math. Soc, Providence, pp. 145–163, 1987.
- [H-3] R. HARTSHORNE, *Classification of algebraic space curves III*, dans *Algebraic Geometry and its Applications*, éditeur Chandrajit L. Bajaj, Springer, pp. 113–120.
- [HH] R. HARTSHORNE et A. HIRSCHOWITZ, *Smoothing algebraic space curves*, dans *Algebraic Geometry*, Proceedings of the conference in Sitges (Barcelona), Lecture Notes in Math. 1124, Springer, pp. 98–131, 1983.
- [HMDP-1] R. HARTSHORNE, M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, *Un théorème de Rao pour les familles de courbes gauches*, Prépublications de LMENS 97–15, 1997.
- [HMDP-2] R. HARTSHORNE, M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, *Construction de familles minimales de courbes gauches*, Prépublications de LMENS 97–29, 1997.
- [HMDP-3] R. HARTSHORNE, M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, *Triades et familles de courbes gauches*, Prépublications de LMENS 97–33, 1997.
- [LR] R. LAZARSELD et A. P. RAO, *Linkage of general curves of large degree*, Lecture Notes in Math. 997, Springer, pp. 267–289, 1983.
- [MDP-1] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, *Sur la classification des courbes gauches*, Astérisque 184-185, Soc. Math. de France, 1990.
- [MDP-2] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, *Courbes gauches et modules de Rao*, J. Rciné Angew. Math. 439, pp. 103–145, 1993.
- [MDP-2'] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, *Courbes gauches et modules de Rao*, Rapport de recherche du LMENS 91–5, 1991. (Prépublication du précédent).

- [MDP-3] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, *Quand un morphisme de fibrés dégénère-t-il le long d'une courbe lisse?*, à paraître dans les actes des conférences Europroj de Catane et Barcelone, Marcel Dekker, Inc.
- [MDP-3'] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, *Construction de courbes lisses, un théorème à la Bertini*, Rapport de recherche du LMENS 92-22, 1992. (Prépublication du précédent).
- [Mig] J.-C. MIGLIORE, *Geometric invariants for liaison of space curves*, J. of Algebra 99, pp. 548-572, 1986.
- [PS] C. PESKINE et L. SZPIRO, *Liaison des variétés algébriques I*, Invent. Math. 26, pp. 271-302, 1974.
- [Rao] A. P. RAO, *Liaison among curves in  $\mathbb{P}^3$* , Invent. Math. 50, pp. 205-217, 1979.
- [W-1] C. H. WALTER, *Some examples of obstructed curves in  $\mathbb{P}^3$* , dans *Complex projective geometry* (Trieste 1989 - Bergen 1989), London Math. Soc. Lecture Notes Series 179, Cambridge University Press, pp. 324-340, 1992.
- [W-2] C. H. WALTER, *Algebraic methods for the cohomology of normal bundles of algebraic space curves*, à paraître.