VINCENT GUEDJ

Approximation des courants positifs et convexité rationnelle sur les variétés complexes

Thèses d'Orsay, 1998

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1998__0509__P0_0>

64572

ORSAY
N°D'ORDRE :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE
présentée
pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR EN SCIENCES
de L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

Spécialité Mathématiques
par
Vincent GUEDJ

SUJET :

APPROXIMATION DES COURANTS POSITIFS ET CONVEXITE RATIONNELLE SUR LES VARIETES COMPLEXES

Soutenue le 11/12/1998 devant le jury composé de

Bo BERNDTSSON	rapporteur
Julien DUVAL	rapporteur
Gennadi HENKIN	examinateur
Nessim SIBONY	directeur
Claude VITERBO	président

REMERCIEMENTS:

Je remercie Gennadi Henkin et Claude Viterbo de m'avoir fait le plaisir et l'honneur de participer à ce jury.

Je remercie plus particulièrement Bo Berndtsson et Julien Duval d'avoir bien voulu consacrer une partie de leur temps précieux à rapporter ma thèse. Des remerciements spéciaux à Bo Berndtsson pour m'avoir chaleureusement accueilli à la C.T.H de Göteborg, ce séjour a été enrichissant dans de nombreux domaines et m'a permis de faire progresser mes travaux.

Je remercie Nessim Sibony d'avoir accepté de diriger mes recherches. Il s'est toujours montré très disponible, a su me stimuler et m'éclairer de ses conseils. Je l'en remercie vivement.

Ce travail doit également beaucoup au soutien inconditionnel de ma famille, à la bonne humeur de mes amis et collègues, ainsi qu'à la merveilleuse cuisine de ma femme. Qu'ils soient tous remerciés ici.

Résumé - Nous démontrons, sur les variétés projectives et les variétés de Stein, des résultats d'approximation des courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ par des diviseurs rationnels dont on contrôle le support et les nombres de Lelong directionnels. Nous introduisons pour cela une notion d'enveloppe polynomiale relative à un courant fixé et nous obtenons un procédé d'approximation stable par éclatement et contraction.

Nous définissons une notion de convexité rationnelle (forte) sur les variétés complexes et montrons qu'une sous-variété totalement réelle compacte S d'une variété X projective (respectivement Stein) est rationnellement convexe si et seulement si il existe une forme de Hodge ω sur X pour laquelle S est isotrope, généralisant ainsi un théorème de Duval et Sibony.

Abstract - We prove approximation results, on projective algebraic and Stein manifolds, of positive closed currents of bidegree $(1,1)$ by rational divisors with a control on their support and Kiselman numbers. We introduce for this purpose a notion of polynomial convexity relative to a given current and we obtain an approximation procedure which is stable under blow-up and blow-down.

We define a notion of (strong-)rational convexity on complex manifolds and show that a totally real compact submanifold S of a projective algebraic (respectively a Stein) manifold X is rationally convex iff there is a Hodge form ω on X for which S is isotropic, generalizing a theorem of Duval and Sibony.

Introduction

La notion de courant positif fermé a été introduite par Lelong [Le 57]. Lelong montre notamment que l'on peut associer à tout sous-ensemble analytique Z de pure dimension q dans une variété complexe X, un courant positif fermé $[Z]$ de bidimension (q, q) défini par intégration sur la partie lisse de Z. Il est apparu depuis que cette notion est une bonne généralisation de la notion d'ensemble analytique: les ensembles analytiques sont précisément les ensembles de densité des courants positifs fermés [Siu 74] et de nombreuses propriétés des ensembles analytiques sont en fait des propriétés du courant d'intégration associé (e.g. les propriétés de prolongement, cf [Sk 86]).

Récemment Duval et Sibony ont caractérisé dans [D-S 95] les enveloppes rationnellement convexes et polynomialement convexes des compacts de $\mathbb{C}^n$ en termes de courants positifs. L'intérêt de ces caractérisations réside dans le fait qu'il est beaucoup plus facile de construire des courants positifs ayant un certain nombre de propriétés - ce sont des objets "souples" au sens de [Le 85] - que de construire des ensembles analytiques - objets de nature très rigide - ayant des propriétés similaires. Duval et Sibony ont mis en évidence des propriétés de convexité rationnelle du complémentaire du support d'un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ de $\mathbb{C}^n$ et ont établi deux résultats qui nous ont particulièrement intéressés:
- un résultat d'approximation fine d'un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$ de $\mathbb{C}^n$ par des diviseurs rationnels, contribuant ainsi, de façon novatrice, à une question qui intéresse les analystes complexes depuis fort longtemps (cf Bremermann [Br 56], Lelong [Le 72], Demailly [De 82a] [De 92] [De 93]);
- une caractérisation de la convexité rationnelle des sous-variétés compactes totalement réelles de $\mathbb{C}^n$, qui met un terme à un travail entrepris par Duval dans [D 91] et [D 94].

L'objet de cette thèse est d'établir de tels résultats sur les variétés complexes. Nous nous appuyons de façon essentielle sur la résolution du $\overline{\partial}$ avec estimées L^2. Cette technique, désormais classique, est clairement exposée dans [Hö 88] pour le cas des variétés de Stein; nous renvoyons le lecteur à [De 82b] et [De 90] pour le cas des variétés projectives. Pour notre part, nous avons également bénéficié de notes d'un cours de Berndtsson [Be 94] lors d'un séjour à C.T.H. (Göteborg, Suède) au cours duquel une partie de ce travail a été effectuée ; elle a d'ailleurs fait l'objet d'une "thèse de licenciat" soutenue au printemps 1997 [G 97b].

Le mémoire s'organise comme suit.

Après avoir brièvement rappelé quelques définitions et faits fondamentaux sur les courants positifs, fibrés holomorphes en droites, et nombres de Lelong (1.1.1/1.1.2/1.2.1), nous définissons la notion d'éclatement en un point et précisons son action sur les courants. Nous démontrons les quelques propriétés élémentaires (1.2.7/1.2.12/1.2.13) dont nous aurons besoin au chapitre 3 ; elles sont probablement bien connues des spécialistes (Kiselman précise dans [K 94] que c'est pour établir des résultats du type 1.2.12 qu'il a été amené à introduire la notion de nombre de Lelong directionnel), mais nous ne connaissons aucune référence bibliographique qui les traite précisément. On introduit en 1.3 la notion de convexité rationnelle sur une variété complexe ; le paragraphe 1.3.1 justifie le choix de notre définition tandis que l'on rappelle une des motivations pour l'étude de cette notion en 1.3.2 et que 1.3.3 donne différentes formes de la caractérisation de la convexité rationnelle des sous-variétés totalement réelles. La section 1.4 introduit une notion de convexité polynomiale relative que l'on caractérise en termes de courants en reprenant des idées de [D-S 95].

Le chapitre 2 constitue le coeur de cette thèse. Rédigé sous forme d'un article [G 97c] accepté pour publication dans Mathematische Annalen, il contient une introduction détaillée à laquelle nous renvoyons. Il contient les démonstrations des deux principaux résultats de cette thèse : la caractérisation de la convexité rationnelle des sous-variétés totalement réelles d'une variété projective algébrique - resp. Stein - (théorème 2.2.8 - resp. 2.5.8) et un résultat d'approximation des courants (théorèmes 2.4.1 et 2.5.5).

Dans le chapitre 3 nous commençons par affiner le résultat d'approximation des courants et montrons que le procédé peut être rendu stable par éclatement et contraction. Cela permet, dans certains cas, de lever une hypothèse que nous sommes amenés à faire sur la classe de cohomologie des courants. Nous nous intéressons ensuite à un problème d'extension de métriques positives définies sur une sous-variété.

Afin de mieux comprendre les courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ sur certaines variétés projectives, nous avons été amenés à développer des théorèmes de représentation de ces courants sur les variétés drapeaux du groupe linéaire. Ces résultats ont fait l'objet d'un article [G 97a] qui constitue le chapitre 4.

Table des matières

Chapitre 1

Définitions & Premières propriétés

1.1 Courants et fibrés holomorphes

1.1.1 Courants positifs

Un courant de dimension q sur une variété lisse X est une forme linéaire continue sur l'espace des formes différentielles lisses de degré q à support compact dans X. Si T est un courant de dimension q sur X, le courant dT est le courant de dimension $q-1$ défini par

$$\langle dT, \theta \rangle := (-1)^{m-q+1} \langle T, d\theta \rangle,$$

pour toute forme test θ de degré $q-1$, où $m = \dim_{\mathbb{R}} X$; on dira que T est fermé si $dT = 0$. Nous renvoyons à [dR 55] pour la définition des opérations élémentaires sur les courants.

Lorsque X est une variété complexe, les formes différentielles se décomposent selon leurs bidegrés en les coordonnées $dz_j, d\bar{z}_k$; un courant de bidimension (q, q') est une forme linéaire continue sur l'espace des formes différentielles lisses de bidegré (q, q') à support compact dans X. On dit également que le courant est de bidegré $(n-q, n-q')$ où $n = \dim_{\mathbb{C}} X$; nous nous intéresserons particulièrement aux courants de bidegré $(1,1)$, un tel courant T peut être représenté en coordonnées locales comme une forme différentielle

$$T = \sum_{1 \leq j,k \leq n} T_{jk} \frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

où les coefficients T_{jk} sont des distributions. Le courant T sera dit positif si la distribution $\sum \lambda_j \bar{\lambda}_k T_{jk}$ est positive pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^n$; dans ce cas les T_{jk} sont des mesures. On notera dans la suite $\mathcal{T}(X)$ le cône des courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ sur la variété X.

L'opérateur d de Poincaré se décompose en $d = \partial + \overline{\partial}$ et on définit l'opérateur $d^c := \frac{i}{2\pi}(\overline{\partial} - \partial)$; ce sont des opérateurs réels ($\overline{d} = d$ et $\overline{d^c} = d^c$) et on a $dd^c = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}$. Une fonction φ plurisousharmonique (psh) dans X est une fonction semi-continue supérieurement (scs) sur X à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ telle que le courant $T := dd^c\varphi$ est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur X ; on impose de plus à φ de ne pas être identiquement $-\infty$ dans aucune composante connexe de X, on notera $PSH(X)$ l'ensemble des fonctions psh dans X. Réciproquement, si U est un ouvert de X tel que $H^2(U, \mathbb{R}) = H^{0,1}_{\overline{\partial}}(U, \mathbb{C}) = 0$ (e.g. un ouvert biholomorphe à une boule de $\mathbb{C}^n$) et T est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ dans X, alors il existe une fonction $\varphi \in PSH(U)$ telle que $T = dd^c\varphi$ dans U. Nous renvoyons à [Ha 77], [Le-G 86] et [K 91] pour la définition des concepts fondamentaux concernant les courants positifs.

Les problèmes de prolongements des fonctions (holomorphes, psh) et des courants positifs fermés à travers un obstacle donné sont d'importance capitale en analyse complexe; les articles [Ha-P 75] et [Sk 86] regroupent bon nombre d'informations et de références et nous n'allons citer que deux résultats que nous utiliserons sans cesse par la suite.

Théorème 1.1.1 *[Harvey 1973] Soit X une variété complexe, A un fermé de X et T un courant positif fermé de bidimension (q,q) dans $X \setminus A$. Supposons que A est de mesure de Hausdorff $(2q-1)$-dimensionnelle nulle. Alors l'extension triviale $\tilde{T}$ de T obtenue en prolongeant les coefficients de T par zéro sur A est de masse localement bornée au voisinage de A et est un courant positif fermé sur X.*

Théorème 1.1.2 *[Skoda 1982] Soit X une variété complexe, A un sous-ensemble analytique de X et T un courant positif fermé de bidimension (q,q) dans $X \setminus A$. Si T est de masse localement bornée au voisinage de A alors l'extension triviale $\tilde{T}$ de T est un courant positif fermé sur X.*

Il est à noter que l'on peut déduire de ce théorème le fait, initialement prouvé par Lelong [Le 57], que le courant d'intégration sur la partie lisse d'un ensemble analytique de pure dimension q définit un courant positif fermé de bidimension (q,q). On peut aussi établir à l'aide du théorème 1.1.2 des résultats de prolongements de fonctions holomorphes (resp. psh) et d'ensembles analytiques. La démonstration élégante et relativement simple de Sibony [Si 85] donne une idée de la puissance du formalisme "souple" des courants. On peut déduire encore de ce résultat le fait suivant, initialement prouvé par Siu [Siu 74] : si T est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ et si V est une hypersurface irréductible de X, alors $T_{|V} = c \cdot [V]$, où $c \geq 0$ est une constante égale au nombre de Lelong de T en un point générique de V (voir théorème 1.2.2.iii) ci-dessous).

1.1.2 Fibrés holomorphes en droites

Dans $\mathbb{C}^n$ toute hypersurface est l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe globalement définie dans $\mathbb{C}^n$, mais ce n'est plus nécessairement le cas sur une variété complexe quelconque, notamment sur une variété compacte où toutes les fonctions holomorphes sont constantes. Il faut remplacer les fonctions par des sections holomorphes de fibrés holomorphes en droites que nous définissons maintenant.

Définition 1.1.3 *Un fibré holomorphe en droites $L \xrightarrow{\pi} X$ sur une variété complexe X est une famille de droites complexes $(L_x)_{x\in X}$, paramétrée par X, munie d'une structure de variété complexe sur $L = \bigcup_{x\in X} L_x$ de telle sorte que*

i) La projection holomorphe $\pi : L \to X$ envoie L_x sur x.

ii) Pour tout $x_0 \in X$, il existe un voisinage W de x_0 dans X et un biholomorphisme $\Phi_W : \pi^{-1}(W) \to W \times \mathbb{C}$ (appelé trivialisation) qui envoie L_x sur $\{x\} \times \mathbb{C}$ de manière bijective et linéaire.

Pour toute paire Φ_V, Φ_W de trivialisations, on définit les fonctions de transition du fibré $g_{VW}(x) := (\Phi_V \circ \Phi_W^{-1})_{|\{x\}\times\mathbb{C}} \in \mathcal{O}^*(V \cap W)$.

Les opérations élémentaires sur les fibrés sont développées dans [G-H 78]. Dans la suite, nous fixons toujours implicitement un recouvrement ouvert localement fini $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de X tel que $L_{|\mathcal{U}_\alpha}$ est trivial et les ouverts $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{U}_{\alpha\beta} := \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ sont à la fois connexes et simplement connexes ; nous notons $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(\mathcal{U}_{\alpha\beta})$ les fonctions de transition qui vérifient

$$(*) \quad g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\alpha} \equiv 1 \text{ dans } \mathcal{U}_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} \cdot g_{\gamma\alpha} \equiv 1 \text{ dans } \mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma};$$

elles définissent donc un 1-cocycle à coefficients dans $\mathcal{O}^*$ et une classe dans $H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Réciproquement, on peut associer à tout élément de $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ des fonctions $g_{\alpha\beta}$ vérifiant $(*)$, ce sont les fonctions de transition d'un fibré holomorphe en droites et deux telles familles de fonctions définissent la même classe ssi elles correspondent à deux fibrés isomorphes. On note $Pic(X) := H^1(X, \mathcal{O}^*)$ le groupe des fibrés holomorphes en droites (modulo isomorphisme) sur X, appelé groupe de Picard de la variété X.

Une <u>section holomorphe</u> sur X de $L \in Pic(X)$ est une famille de fonctions holomorphes $s = \{s_\alpha \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_\alpha)\}$ vérifiant la condition de compatibilité $s_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot s_\beta$ dans $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$; on note $\Gamma(X, L)$ l'ensemble des sections holomorphes de L sur X. L'ensemble des zéros d'une section holomorphe s définit un sous-ensemble analytique de X de codimension 1 appelé <u>diviseur</u> de s.

Une <u>métrique</u> (singulière) de L sur X est une famille de fonctions $\varphi = \{\varphi_\alpha \in L^1_{loc}(\mathcal{U}_\alpha)\}$ telles que $\varphi_\alpha = \varphi_\beta + \log |g_{\alpha\beta}|$ dans $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$; notons que le courant T défini par $T := dd^c\varphi_\alpha$ dans $\mathcal{U}_\alpha$, est globalement défini sur X puisque $\log |g_{\alpha\beta}|$ est pluriharmonique dans $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$; il est traditionnel de noter $\Theta_\varphi = dd^c\varphi$ ce courant appelé courbure de la métrique φ.

Le fibré $L \in Pic(X)$ sera dit pseudoeffectif s'il admet une métrique (singulière) de courbure positive (i.e. dont la courbure est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur X) ; autrement dit, il s'agit de trouver une famille de fonctions psh $\varphi = \{\varphi_\alpha \in PSH(\mathcal{U}_\alpha)\}$ telles que $\varphi_\alpha = \varphi_\beta + \log|g_{\alpha\beta}|$ dans $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$; on note $\mathcal{P}(X,L)$ l'ensemble des métriques positives (singulières) de L sur X. Le fibré $L \in Pic(X)$ sera dit semi-positif (resp. positif) s'il admet une métrique lisse dont la courbure est une forme semi-positive (resp. une forme de Kähler). Enfin sur une variété (X,ω) Kählerienne, un fibré $L \in Pic(X)$ sera dit nef (numériquement effectif) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une métrique lisse φ_ε de L sur X telle que $dd^c\varphi_\varepsilon \geq -\varepsilon \cdot \omega$. On montre que ces notions sont indépendantes du choix des trivialisations. Il est clair que

$$\text{positif} \Rightarrow \text{semi-positif} \Rightarrow \text{nef} \Rightarrow \text{pseudoeffectif}\,,$$

et ces inclusions sont strictes comme le montrent les exemples qui suivent.

Exemples 1.1.4

i) Si X est l'espace multiprojectif $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m = \{([z_0,\ldots,z_n];[w_0,\ldots,w_m])\}$, alors $Pic(X) := \{\mathcal{O}(a,b)\}_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2} \simeq \mathbb{Z}^2$. Tout fibré est trivial dans les ouverts de carte $\mathcal{U}_{\alpha,j} := \{z_\alpha w_j \neq 0\}$ et les fonctions de transition de $\mathcal{O}(a,b)$ sont les $g_{\alpha\beta,jk}([z];[w]) = (\frac{z_\beta}{z_\alpha})^a(\frac{w_k}{w_j})^b$. Le fibré $\mathcal{O}(a,b)$ est semi-positif (resp. positif) ssi $a,b \geq 0$ (resp. $a,b>0$) ; dans ce cas $\mathcal{P}(X,\mathcal{O}(a,b))$ coïncide avec l'ensemble des fonctions $\varphi \in PSH(\mathbb{C}^{n+1}\times\mathbb{C}^{m+1})$ telles que

$$\varphi(\lambda\cdot z,\mu\cdot w) = a\log|\lambda| + b\log|\mu| + \varphi(z,w);$$

et $\Gamma(X,\mathcal{O}(a,b))$ est l'ensemble des polynômes bihomogènes de bidegré (a,b) en (z,w) (voir chapitre 4 pour la description des métriques positives des fibrés holomorphes en droites sur les variétés drapeaux du groupe linéaire).

ii) Soit $\tilde{X}$ l'éclaté en un point p d'une variété compacte X avec $dim_{\mathbb{C}}X \geq 2$ et E le diviseur exceptionnel (voir définition 1.2.6) ; E définit un fibré $L_E \in Pic(\tilde{X})$ et une section $s \in \Gamma(\tilde{X},L_E)$ tels que $E = \{s=0\}$. La métrique positive $\log|s|$ de L_E a précisément pour courbure le courant d'intégration $[E]$ sur le diviseur E ; dans ce cas $\mathcal{P}(\tilde{X},L_E) = \log|s| + \mathbb{R}$ puisque si ψ est une autre métrique positive, $\psi - \log|s|$ définit une fonction psh dans $X\setminus\{p\}$ qui s'étend plurisousharmoniquement à travers p (théorème 1.1.1), donc $\psi - \log|s|$ est constante puisque X est compacte ; comme $\log|\Gamma(\tilde{X},L_E^k)| \subset \mathcal{P}(\tilde{X},L_E^k) = k\cdot\mathcal{P}(\tilde{X},L_E)$, on en déduit également que $\Gamma(\tilde{X},L_E^k) = \mathbb{C}\cdot s^k$. Le fibré L_E est un exemple de fibré holomorphe pseudoeffectif qui n'est pas nef (E est de self intersection négative).

iii) Soit X le quotient de $\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1$ par la relation d'équivalence

$$(z',[w']) \sim (z,[w]) \Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2 \ t.q.\ z' = z+a+b\tau \ et\ [w'] = [w_0, w_1 + bw_0],$$

où τ est un nombre complexe fixé tel que $\Im(\tau) > 0$; on note $\pi : \mathbb{C}\times\mathbb{P}^1 \to X$ la projection canonique, $E_\infty := \pi(\{(z,[0,1])\}) \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau]$ la courbe elliptique *"à l'infini" et* L_∞ *le fibré holomorphe correspondant. La projection sur le premier facteur permet d'exprimer* X *comme surface réglée sur la courbe elliptique* $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau]$ *; on sait décrire les courbes sur de telles surfaces (cf e.g. [H 77] V.2) et on peut montrer par exemple que* $E_\infty.C \geq 0$ *pour toute courbe* C *sur* X*, cela assure que* L_∞ *est nef puisque* X *est projective (cf [De 90]). Or on va montrer que* L_∞ *n'admet qu'une métrique (singulière) positive (à addition de constante près), i.e. la métrique* φ_∞ *dont la courbure est le courant d'intégration sur* E_∞*, on aura donc un exemple de fibré nef qui n'est pas semi-positif.*

Soit en effet ψ *une telle métrique, alors* $f := \psi - \varphi_\infty$ *est une fonction globalement définie sur* X *; soit* F *la restriction à* $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \pi^{-1}(X \setminus E_\infty)$ *de la fonction* $f \circ \pi$*, alors* $F \in PSH(\mathbb{C}^2)$*, vérifie* $F(z+a+b\tau, w+b) = F(z,w)$ *et est à croissance logarithmique en* w*. Pour justifier la dernière assertion, il convient de remarquer que tout courant positif fermé de bidegré* $(1,1)$ *sur* $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ *est défini par une fonction* $u \in PSH(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2)$ *qui satisfait la relation d'homogénéité* $u(z, \lambda w_0, \lambda w_1) = \alpha \log|\lambda| + u(z, w_0, w_1)$ *(voir chapitre 4 pour plus de détails). L'invariance de* F *implique qu'elle est également à croissance logarithmique en* z *; comme* $F(z+1,.) = F(z,.)$*,* F *est indépendante de* z*. Mais alors* $F(w+1) = F(w)$ *et donc* F *est constante. On en déduit que le courant* $dd^c\psi$ *est supporté par* E_∞ *et il résulte de la discussion suivant le théorème 1.1.2 que* $dd^c\psi = c \cdot [E_\infty]$ *pour une constante positive* c *; cette dernière ne peut être égale qu'à 1 donc* $dd^c f = dd^c\psi - [E_\infty] = 0$*, i.e.* f *est pluriharmonique sur* X *donc constante.*

Signalons que cet exemple apparaît (sous une forme légèrement différente) dans [D-P-S 94].

Remarque 1.1.5 *Tout fibré holomorphe en droites, même positif, n'admet pas nécessairement de section holomorphe globale ; par exemple si* p *et* q *sont deux points distincts sur une surface de Riemann compacte* S *de genre* $g > 2$ *qui n'est pas hyperelliptique, le diviseur* $2p - q$ *n'est pas linéairement équivalent à un point donc le fibré holomorphe associé qui est de degré 1, donc positif, n'admet aucune section holomorphe globale sur* S*. Cependant il résulte du théorème de plongement de Kodaira (cf [G-H 78] p 181) qu'un fibré* $L \in Pic(X)$ *positif est ample, i.e. qu'une puissance assez grande* L^k *de* L *admet beaucoup de sections holomorphes globales (suffisamment pour plonger* X *dans un espace projectif, on dit alors que* L^k *est très ample).*

Définition 1.1.6 *Soit* $L \in Pic(X)$*. On appelle première classe de Chern de* L *l'image* $c_1(L)$ *de* L *par le morphisme* $c_1 : H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ *induit par la suite exacte exponentielle*

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 1.$$

On notera $c(L)$ *l'image de la première classe de Chern de* L *dans* $H^2(X, \mathbb{R})$ *par l'application* $H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{R})$ *induite par l'inclusion canonique* $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Soit T un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur X et $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ un recouvrement ouvert approprié de X. Il existe $\varphi_\alpha \in PSH(\mathcal{U}_\alpha)$ telle que $T = dd^c\varphi_\alpha$ dans $\mathcal{U}_\alpha$, et $\varphi_\alpha = \varphi_\beta + h_{\alpha\beta}$ dans $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ avec $h_{\alpha\beta}$ pluriharmonique. Puisque $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ est simplement connexe on peut écrire $h_{\alpha\beta} = \Re(f_{\alpha\beta})$ avec $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_{\alpha\beta})$. Considérons à présent

$$c_{\alpha\beta\gamma} := \frac{1}{2i\pi}\left[f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha}\right],$$

alors $c_{\alpha\beta\gamma}$ est une constante réelle (fonction holomorphe dont la partie imaginaire est nulle) qui définit clairement un 2-cocycle donc une classe dans $H^2(X,\mathbb{R})$; il s'agit précisément de l'expression en termes de cohomologie de Čech de la classe de T dans $H^2(X,\mathbb{R})$.

Lorsque X est une variété Kählerienne compacte la décomposition de Hodge (cf [G-H 78] p116) donne $H^2(X,\mathbb{R}) = H^{2,0}(X,\mathbb{R}) \oplus H^{1,1}(X,\mathbb{R}) \oplus H^{0,2}(X,\mathbb{R})$ et la classe de T est dans $H^{1,1}(X,\mathbb{R})$. Nous nous intéressons à l'approximation des courants $T \in \mathcal{T}(X)$ par des "diviseurs rationnels" $T_j = \frac{1}{N_j}[D_j]$; clairement, T_j définit une classe dans $H^{1,1}(X,\mathbb{Q}) := H^2(X,\mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X,\mathbb{R}) \subset H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ et une condition nécessaire à une telle approximation de T est que sa classe appartienne à l'adhérence de $H^{1,1}(X,\mathbb{Q})$ dans $H^{1,1}(X,\mathbb{R})$. Demailly a décrit dans [De 82a] les obstructions cohomologiques à l'approximation faible des courants $T \in \mathcal{T}(X)$ par des diviseurs rationnels ; si par exemple $X = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau_1] \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau_2]$ est un produit de courbes elliptiques non isogènes (c'est le cas pour un choix générique de $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, cf [S-D 74]), alors toute limite faible d'une suite $T_j = \frac{1}{N_j}[D_j]$ définit une classe dans $(H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X,\mathbb{R})) \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$ tandis que $H^{1,1}(X,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$.

Il sera donc nécessaire de faire une hypothèse restrictive sur la classe de cohomologie de T ; l'hypothèse fondamentale que nous serons amenés à faire bien souvent par la suite, est que $[T] \in H^2(X,\mathbb{Z})$; autrement dit, il existe des réels $\lambda_{\alpha\beta}$ et des entiers $k_{\alpha\beta\gamma}$ tels que $c_{\alpha\beta\gamma} = k_{\alpha\beta\gamma} + \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\beta\gamma} + \lambda_{\gamma\alpha}$. Si on pose $g_{\alpha\beta} := e^{f_{\alpha\beta} - 2i\pi\lambda_{\alpha\beta}} \in \mathcal{O}^*(\mathcal{U}_{\alpha\beta})$, on obtient alors

$$\log|g_{\alpha\beta}| = \Re(f_{\alpha\beta}) = \varphi_\alpha - \varphi_\beta \quad \text{et} \quad g_{\alpha\beta}\cdot g_{\beta\gamma}\cdot g_{\gamma\alpha} = e^{2i\pi k_{\alpha\beta\gamma}} = 1,$$

ainsi les fonctions $(g_{\alpha\beta})$ sont les fonctions de transition d'un fibré $L \in Pic(X)$ et le potentiel φ de T est une métrique positive de L sur X ; enfin $[T] = c(L) \in H^2(X,\mathbb{Z}) \subset H^2(X,\mathbb{R})$ (cf [G-H 78] p141).

1.2 Nombres de Lelong et éclatements

1.2.1 Nombres de Lelong

Soit T un courant positif fermé de bidimension (q,q) dans la boule unité B de $\mathbb{C}^n$. On définit la mesure trace σ_T de T par $\sigma_T := T \wedge (dd^c|z|^2)^q$; c'est une mesure positive dans Ω qui contrôle la masse de T (cf [Ha 77]). Posons

$$\nu(T,x,r) = \frac{\sigma_T(B(x,r))}{2^q r^{2q}} = c_q \cdot \frac{\|T\|_{B(x,r)}}{\mathrm{vol}_q(B(x,r))};$$

alors $r \mapsto \nu(T,x,r)$ est croissante [Le 57]; on peut donc définir $\nu(T,x) := \lim_{r\to 0^+} \nu(T,x,r)$.

Définition 1.2.1 *$\nu(T,x)$ s'appelle le nombre de Lelong de T au point x et $E_c(T) = \{x \in B \,/\, \nu(T,x) \geq c\}$ est l'ensemble de niveau c de nombres de Lelong de T.*

Ces nombres ont été introduits par Lelong dans [Le 57], ils mesurent les singularités analytiques des courants positifs fermés comme l'exprime le théorème qui suit, dans lequel nous regroupons quelques résultats fondamentaux sur les nombres de Lelong dont nous aurons besoin par la suite (on pourra en trouver une démonstration dans [De 91]).

Théorème 1.2.2

i) [Siu 74] Les nombres de Lelong sont invariants par biholomorphisme, on peut donc les définir pour les courants positifs fermés sur les variétés complexes.

ii) $x \to \nu(T,x)$ est semi-continue supérieurement, les ensembles de niveau $E_c(T)$ sont donc fermés. De plus si $T_j \to T$ au sens faible des courants et $x_j \to x$, alors $\overline{\lim}\, \nu(T_j,x_j) \leq \nu(T,x)$.

iii) [Siu 74] Les ensembles de niveau $E_c(T)$ sont, pour $c > 0$, des sous-ensembles analytiques de dimension $\leq q$; T se décompose de manière unique en

$$T = \sum_{j\geq 1} c_j [V_j] + R,$$

où $[V_j]$ est le courant d'intégration sur un ensemble analytique irréductible V_j de dimension q, $c_j = \inf_{x\in V_j} \nu(T,x) > 0$ est le nombre de Lelong de T en un point x générique de V_j, et R est un courant positif fermé de bidimension (q,q) dont les ensembles de niveau $E_c(R)$ sont de dimension $\leq q-1$ pour tout $c > 0$.

iv) Si φ est une fonction psh, alors

$$\begin{aligned} \nu(dd^c\varphi, x) &= \lim_{r\to 0} \left[\frac{\sup_{B(x,r)} \varphi}{\log r}\right] \\ &= \sup\{\gamma \geq 0 \,/\, \varphi(z) \leq \gamma \log|z-x| + O(1) \ \textit{au voisinage de } x\} \\ &= \lim_{r\to 0} \left[\frac{\sup_{\Delta^n(x,r)} \varphi}{\log r}\right], \end{aligned}$$

où $\Delta^n(x,r)$ désigne le polydisque centré en x de rayon $(r,\ldots,r)$.

v) [Th 67] Si $T = [A]$ est le courant d'intégration sur un ensemble analytique de dimension q alors $\nu(T,x)$ est égal à la multiplicité algébrique de A en x.

Nous nous intéressons à l'approximation des courants positifs fermés de bidegré $(1,1)$ par des courants d'intégration sur des diviseurs rationnels ; localement il s'agit d'approximer dans L^1_{loc} une fonction psh par $\varphi_j = \frac{1}{N_j}\log|f_j|$ où les f_j sont des fonctions holomorphes. Il est facile de construire des exemples tels que $\varphi_j \to \varphi$ mais $\nu(dd^c\varphi_j, x)$ ne converge pas vers $\nu(dd^c\varphi, x)$ en certains points x. Nous aurons besoin également de la convergence simple des nombres de Lelong ; localement, un tel résultat a été obtenu par Demailly [De 92] :

Théorème 1.2.3 *Soit Ω un ouvert pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$.*
Soit $\varphi \in PSH(\Omega)$ et $\mathcal{H}(j\varphi) := \{f \in \mathcal{O}(\Omega) \,/\, \int_\Omega |f|^2 e^{-2j\varphi} < +\infty\}$.
Soit $(\sigma_{l,j})_{l\in\mathbb{Z}}$ une base orthonormée de cet espace de Hilbert séparable et $\varphi_j(z) = \frac{1}{2j}\log[\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\sigma_{l,j}(z)|^2]$ le noyau de Bergman. Alors
i) $\varphi(z) \leq \varphi_j(z) + \frac{C_1}{j}$, $\forall z \in \Omega$;
ii) $\varphi_j(z) \leq \sup_{B(z,r)}\varphi + \frac{C_2 - n\log r}{j}$, $\forall z \in \Omega$ et $\forall r < d(z, \partial\Omega)$;
iii) $\nu(dd^c\varphi, z) - \frac{n}{j} \leq \nu(dd^c\varphi_j, z) \leq \nu(dd^c\varphi, z)$, $\forall z \in \Omega$.

Remarque 1.2.4 *Bien que $dd^c\varphi_j$ ne soit pas un diviseur rationnel, Demailly a donné dans [De 93] une version de ce résultat valable sur les variétés où les $dd^c\varphi_j$ sont des diviseurs rationnels ; il est remarquable que ce résultat (qui utilise le théorème d'extension d'Ohsawa-Takegoshi [O-T 87]) fournit une démonstration particulièrement simple du profond théorème de Siu sur l'analyticité des ensembles de niveau de nombres de Lelong (cf 1.2.2.iii).*

1.2.2 Eclatements

Il n'est pas possible en général de définir l'image réciproque f^*T d'un courant positif fermé T par une application holomorphe f (cf [Me 96]). Cependant lorsque T est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur une variété Y et $f : X \to Y$ est une application méromorphe dont le jacobien n'est pas identiquement nul ($\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} Y$), on peut définir f^*T localement par $dd^c(\varphi \circ f)$ où φ est un potentiel local de T. Il est facile de voir que cette définition est indépendante du choix de φ, donc f^*T est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ globalement défini sur X, que la classe de cohomologie de f^*T est égale à $f^*[T]$ et que l'opération f^* est continue : si $T_j \to T$ dans Y alors $f^*(T_j) \to f^*T$ dans X (cf [Me 96] et [Si 98]). Lorsque f est holomorphe on sait également contrôler l'action de cette opération sur les nombres de Lelong :

Proposition 1.2.5 *Il existe une constante C_f indépendante de T et uniforme par rapport à x sur les compacts telle que*

$$\forall x \in X,\ \nu(T, f(x)) \leq \nu(f^*T, x) \leq C_f \cdot \nu(T, f(x)).$$

La minoration est facile mais la majoration, plus délicate, n'a été que récemment démontrée en toute généralité (cf [Fa 98] et [Ki 98]). Nous allons en fait avoir besoin de calculer explicitement $\nu(f^*T, x)$ dans le cas où f est un éclatement, notion que nous définissons maintenant.

Définition 1.2.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ contenant 0. L'éclatement $\pi : \tilde{\Omega} \to \Omega$ de Ω en 0 est l'opération qui consiste à "remplacer" le point 0 par un espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}$; plus explicitement*

$$\tilde{\Omega} := \{(z, [\zeta]) \in \Omega \times \mathbb{P}^{n-1} \,/\, z \in [\zeta]\}$$

est une sous-variété de $\Omega \times \mathbb{P}^{n-1}$ de dimension n, on note π la projection holomorphe naturelle sur Ω et $E := \pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ le "diviseur exceptionnel". On vérifie que π réalise un biholomorphisme de $\tilde{\Omega} \setminus E$ sur $\Omega \setminus \{0\}$.

Cette opération étant de nature locale, on peut définir l'éclatement $\pi : \tilde{X} \to X$ d'une variété complexe X $(dim_{\mathbb{C}} X \geq 2)$ en n'importe quel point $p \in X$. Il s'agit d'un cas particulier d'application birationnelle, l'opération inverse $\pi^{-1} : X \to \tilde{X}$ est une application méromorphe qui s'appelle une contraction.

Proposition-Définition 1.2.7 *Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement d'une variété complexe X en un point p et soit $E = \pi^{-1}(p)$ le diviseur exceptionnel. Alors pour tout $T \in \mathcal{T}(X)$ on a $(\pi^*T)_{|E} = \nu(T, p)[E]$ et tout $\tilde{T} \in \mathcal{T}(\tilde{X})$ est de la forme*

$$\tilde{T} = \pi^*T + (\lambda - \nu(T, p))[E], \text{ où } \lambda \geq 0 \text{ et } T = \pi_*\tilde{T} \in \mathcal{T}(X).$$

On note L_E le fibré défini par le diviseur E sur $\tilde{X}$; il est de self-intersection négative. Les fibrés holomorphes en droites sur $\tilde{X}$ sont de la forme $\tilde{L} = \pi^*(L) \otimes L_E^k$, où $L \in Pic(X)$ et $k \in \mathbb{Z}$. Si D est un diviseur de X, on notera $D' := \pi^*D - \nu([D], p)E$ le diviseur de $\tilde{X}$ appelé transformé strict de D.

Démonstration:

Soit $T \in \mathcal{T}(X)$, il résulte du théorème de Siu (1.2.2.iii) que $(\pi^*T)_{|E} = \lambda[E]$ où $\lambda = \nu(\pi^*T, x)$ pour un point x générique de E; comme $\pi(x) = p$, on déduit de la proposition 1.2.5 que $\lambda = \nu(\pi^*T, x) \geq \nu(T, \pi(x)) = \nu(T, p)$.

Réciproquement $T' = \pi^*T - \lambda[E]$ est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ dans $\tilde{X}$ donc tout potentiel local de T' est localement majoré; comme il s'agit d'un problème local, on peut supposer que X est une boule de $\mathbb{C}^n$ centrée en $p = 0$ dans laquelle φ est un potentiel de T et $\tilde{X} = \{(z, [\zeta]) \in X \times \mathbb{P}^{n-1} \,/\, z_i\zeta_j = z_j\zeta_i\}$. Plaçons-nous dans la carte $X_1 := \tilde{X} \cap \{\zeta_1 \neq 0\}$, $(x_1 = z_1, x_j = \zeta_j/\zeta_1, j \geq 2)$ forme un système de coordonnées dans X_1 tel que $\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_n)$. Dans ces coordonnées, $\log|x_1|$ est un potentiel de $[E]$ et $\psi(x) = \varphi \circ \pi(x) - \lambda \log|x_1|$ est un potentiel de T', on a donc $\varphi(x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_n) \leq \lambda \log|x_1| + C$ si x_1 reste dans un compact de $\mathbb{C}$, d'où $\varphi(z) \leq \lambda \log|z_1| + C \leq \lambda \log|z| + C$ pour z dans un voisinage de zéro privé d'un cône correspondant aux directions proches de $\zeta_1 = 0$. Comme on peut établir des inégalités similaires dans les autres cartes, on obtient finalement $\varphi(z) \leq \lambda \log|z| + O(1)$ dans tout un voisinage de zéro. On en déduit (cf 1.2.2.iv) que $\lambda \leq \nu(T,p)$.

Soit maintenant $\tilde{T} \in \tilde{X}$. Par dualité, il est facile de définir l'image directe d'un courant $\tilde{T}$ par une application holomorphe propre (c'est le cas de π) en posant pour toute forme test θ sur X, $\langle \pi_* \tilde{T}, \theta \rangle := \langle \tilde{T}, \pi^* \theta \rangle$. Dans notre situation, on peut, de manière équivalente, prendre l'image réciproque de $\tilde{T}_{|\tilde{X}\setminus E}$ par π^{-1} et étendre trivialement à travers p le courant ainsi défini dans $X \setminus \{p\}$ (cf théorème 1.1.1). On obtient ainsi le même courant $T \in \mathcal{T}(X)$. Clairement $\tilde{T}$ et π^*T coïncident dans $\tilde{X} \setminus E$ mais $\tilde{T}_{|E} = \lambda[E]$ avec $\lambda \geq 0$ et $(\pi^*T)_{|E} = \nu(T,p)[E]$ d'après ce qui précède, donc $\tilde{T} = \pi^*T + (\lambda - \nu(T,p))[E]$. Le reste de la proposition est clair (voir e.g. [G-H 78] p475). □

Remarque 1.2.8 *En dimension 1, le nombre de Lelong au point p d'un courant positif fermé T de bidegré $(1,1)$ est la plus grande constante positive γ telle que $T - \gamma\delta_p$ est encore un courant positif (δ_p désigne la masse de Dirac en p). L'analogue en dimension supérieure a lieu dans l'éclaté au point p où le diviseur E joue le rôle de la masse de Dirac : $\nu(T,p)$ est la plus grande constante positive γ telle que $\pi^*T - \gamma[E]$ est encore un courant positif fermé.*

Exemples 1.2.9

A titre d'application, nous envisageons les différentes notions de positivité des fibrés sur l'éclaté $\tilde{X}$ de $\mathbb{P}^2$ en un point p. Ces fibrés sont de la forme $\tilde{L} = \pi^*(\mathcal{O}(d)) \otimes L_E^k$ où $\mathcal{O}(d)$ $(d \in \mathbb{Z})$ désigne la $d^{\text{ième}}$ puissance du fibré hyperplan sur $\mathbb{P}^2$ (cf [G-H 78] p145).

Si un tel fibré est pseudoeffectif, il admet une métrique positive dont la courbure est un courant $\tilde{T} = \pi^*T + (\lambda - \nu(T,p))[E] \in \mathcal{T}(\tilde{X})$ tel que $[\tilde{T}] = c_1(\tilde{L})$, en particulier $T = \pi_*\tilde{T} \in \mathcal{T}(\mathbb{P}^2)$ vérifie $[T] = c_1(\mathcal{O}(d))$ donc $d \geq 0$. Soit $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$ l'application qui projette un point q de $\mathbb{P}^2 \setminus \{p\}$ sur un hyperplan $\mathbb{P}^1 \not\ni p$ de $\mathbb{P}^2$, le long de la droite (pq). C'est une application méromorphe de $\mathbb{P}^2$ qui se désingularise en éclatant au point p donnant ainsi une application holomorphe $F : \tilde{X} \to \mathbb{P}^1$. On vérifie aisément que le fibré $\pi^*(\mathcal{O}(d)) \otimes L_E^{-d}$ est précisément le fibré $F^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$ et est donc semi-positif si $d \geq 0$. Soit $\tilde{\omega}$ une $(1,1)$-forme lisse semi-positive sur $\tilde{X}$ qui représente la première classe de Chern de ce fibré et ω_{FS} la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^2$, alors

$$\int_{\tilde{X}} (\pi^*T - \nu(T,p)[E]) \wedge \tilde{\omega} = \int_{\mathbb{P}^2} T \wedge d \cdot \omega_{FS} + d \cdot \nu(T,p) E^2 = d^2 - d \cdot \nu(T,p) \geq 0$$

donc $\nu(T,p) \leq d$ et ainsi $\lambda - \nu(T,p) = k \geq -d$. On en déduit que tout fibré $\tilde{L} = \pi^*(\mathcal{O}(d)) \otimes L_E^k$ tel que $d \geq 0$ et $k \geq -d$ est pseudoeffectif puisqu'il peut se décomposer en $F^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)) \otimes L_E^{k+d}$.

Puisque L_E est de self-intersection négative on obtient que $\pi^*(\mathcal{O}(d))\otimes L_E^k$ est semi-positif ssi $d \geq 0$ et $-d \leq k \leq 0$. Notons enfin qu'un calcul explicite montre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\pi^*(\mathcal{O}(d)) \otimes L_E^k$ est positif dès que d est assez grand; plus généralement si $\pi : \tilde{X} \to X$ est l'éclatement d'une variété projective X en un point p et si $L \in Pic(X)$ est positif alors $\pi^* L^d \otimes L_E$ est positif dès que d est assez grand, donc $\tilde{X}$ est projective également (cf [G-H 78] p187).

Corollaire 1.2.10 *Si tout courant $T \in \mathcal{T}(X)$ est faiblement approximable sur X par des diviseurs rationnels $T_j = \frac{1}{N_j}[D_j]$ avec de plus $\nu(T_j, p) \to \nu(T, p)$, alors tout courant $\tilde{T}$ sur l'éclaté $\tilde{X}$ de X en p est faiblement approximable sur $\tilde{X}$ par des diviseurs rationnels $\frac{1}{N_j'}[\tilde{D}_j]$.*

Démonstration: Soit $\tilde{T} = \pi^*T + (\lambda - \nu(T,p))[E] \in \tilde{X}$; si $T_j = \frac{1}{N_j}[D_j] \to T$ alors $\pi^*(T_j) \to \pi^*T$, si de plus $\nu(T_j,p) \to \nu(T,p)$ alors $\frac{1}{N_j}[D_j'] \to \pi^*T - \nu(T,p)[E]$ où D_j' désigne le diviseur transformé strict de D_j. On peut enfin approximer le réel positif λ par des rationnels $\frac{p_j}{q_j N_j}$ et poser $\tilde{D}_j = q_j D_j' + p_j E$ et $N_j' = q_j N_j$ pour conclure. □

1.2.3 Nombres de Kiselman

Motivé par la majoration des nombres de Lelong des images réciproques de courants (cf proposition 1.2.5), notamment dans le cas des éclatements, Kiselman a introduit en 1986 une notion de nombre de Lelong directionnel (cf [Ki 87] et [Ki 94]). C'est un cas particulier de la théorie des nombres de Lelong généralisés de Demailly (cf [De 91]) qui permet de décrire complètement les singularités des courants dans les éclatés.

Proposition-Définition 1.2.11 *Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ et $\Delta^n(x, r^\lambda)$ le polydisque de $\mathbb{C}^n$ centré en x de rayon $r^\lambda := (r^{\lambda_1}, \ldots, r^{\lambda_n})$. Soit φ une fonction psh au voisinage de x dans $\mathbb{C}^n$, alors la limite*

$$\nu_\lambda(dd^c\varphi, x) = \lim_{r\to 0}\left[\frac{\sup_{\Delta^n(x,r^\lambda)} \varphi}{\log r}\right]$$

est bien définie et on appelle nombre de Lelong directionnel (ou nombre de Kiselman) de $dd^c\varphi$ de poids λ au point x, le réel positif $\nu_\lambda(dd^c\varphi, x)$.

Si $\lambda = (1, \ldots, 1)$ alors $\nu_\lambda(dd^c\varphi, x) = \nu(dd^c\varphi, x)$.

Plus généralement, si $m = \min_i \lambda_i > 0$ et $M = \max_i \lambda_i$, on a l'encadrement

$$m \cdot \nu(dd^c\varphi, x) \leq \nu_\lambda(dd^c\varphi, x) \leq M \cdot \nu(dd^c\varphi, x);$$

en particulier $\nu_\lambda(dd^c\varphi, x) = 0$ ssi $\nu(dd^c\varphi, x) = 0$.

Si $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices unitaires de $\mathbb{C}^n$, on définit pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$,

$$\nu_\lambda(dd^c\varphi, x, A) := \nu_\lambda(dd^c\varphi \circ l_A, x),$$

où l_A est l'application linéaire $z \mapsto l_A(z) = A \cdot (z - x) + x$.

Un des inconvénients des nombres $\nu_\lambda(dd^c\varphi, x)$ est qu'ils dépendent bien évidemment du choix des coordonnées, c'est pourquoi nous introduisons les nombres $\nu_\lambda(dd^c\varphi, x, A)$. Si F est un biholomorphisme local en x tel que $F(x) = x$, il résulte du théorème de comparaison de Demailly (théorème 5.1 [De 91]) que $\nu_\lambda(dd^c\varphi \circ F, x)$ est égal à $\nu_\lambda(dd^c\varphi, x, A_{DF}(x))$, en désignant par $A_{DF}(x)$ une matrice unitaire telle que $DF(x) = A_{DF}(x) \cdot H$, où H est une matrice hermitienne définie positive (décomposition de Cartan de la matrice jacobienne $DF(x)$ de F en x). La famille $\{\nu_\lambda(dd^c\varphi, x, A)\}_{A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})}$ est donc indépendante du choix des coordonnées et peut être définie pour les courants positifs fermés sur les variétés.

Les nombres de Kiselman jouissent de propriétés de semi-continuité similaires à celles des nombres de Lelong mentionnées plus haut (1.2.2ii) ; on peut également démontrer des théorèmes d'analyticité des ensembles de (sur)niveau (cf théorème 6.4 [De 91] et théorèmes 7.2 et 7.3 [Ki 94]). En particulier si $\pi : \tilde{X} \to X$ est l'éclatement d'une variété X en un point p et si $T \in \mathcal{T}(X)$, on a $\nu(\pi^*T, x) = \nu(T, p)$ en presque tout point $x \in E := \pi^{-1}(p)$ (cf 1.2.7 et 1.2.2.iii) et en fait $\{x \in E \,/\, \nu(\pi^*T, x) \geq c\}$ va être un sous ensemble analytique propre de E pour tout $c > \nu(T, p)$, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.2.12 *Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement d'une variété complexe X (de dimension $n \geq 2$) en un point p et $T \in \mathcal{T}(X)$. On fixe un système de coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ dans un voisinage U de $p = (0, \ldots, 0)$ dans X ; ainsi*

$$\tilde{U} = \{(z, [\zeta]) \in U \times \mathbb{P}^{n-1} \,/\, z \in [\zeta]\}$$

est un voisinage de $E = \pi^{-1}(p)$ dans $\tilde{X}$. Alors pour tout point $m = (0, [\zeta])$ de E on a

$$\nu(\pi^*T, m) = \nu_{(1,2,..,2)}(\varphi, 0, A),$$

où φ est un potentiel de T au voisinage de $p = 0$ et $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ est telle que $[A \cdot \zeta] = [1, 0, \ldots, 0]$.

Démonstration:

Supposons tout d'abord que $m = (0, [1, 0, \ldots, 0])$. On se place dans la carte $\zeta_1 = 1$ et on adopte, comme dans la démonstration 1.2.7, le système de coordonnées $x_1 = z_1, x_j = \zeta_j/\zeta_1$ $(j \geq 2)$; alors $\psi(x) = \varphi(x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_n)$

est un potentiel de π^*T au voisinage de m et on a

$$\begin{aligned}
\nu(\pi^*T, m) &= \nu(dd^c\psi, 0) = \lim_{r\to 0} \frac{\sup_{\Delta^n(0,r)} \psi}{\log r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{\sup_{|x_j|=r} \psi}{\log r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{\sup_{\Delta^n(0,(r,r^2,..,r^2))} \varphi}{\log r} \\
&= \nu_{(1,2,..,2)}(dd^c\varphi, 0) \\
&= \nu_{(1,2,..,2)}(dd^c\varphi, 0, I_n).
\end{aligned}$$

Soit à présent $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, elle laisse invariant un voisinage V de $p = 0$ et induit une application $\tilde{A}$ dans un voisinage $\tilde{V}$ de E via $(z, [\zeta]) \to (A \cdot z, [A \cdot \zeta])$; clairement $A \circ \pi = \pi \circ \tilde{A}$ et pour tout $\tilde{T} \in \mathcal{T}(\tilde{X})$ et $q \in \tilde{V}$ on a $\nu(\tilde{T}, \tilde{A} \cdot q) = \nu(\tilde{A}^*(\tilde{T}), q)$. Si $m = (0, [\zeta]) \in E$, on choisit A telle que $[A \cdot \zeta] = m_0 := [1, 0, \ldots, 0]$; alors

$$\begin{aligned}
\nu(\pi^*T, m) &= \nu(\tilde{A}^*(\pi^*T), m_0) \\
&= \nu(\pi^*(A^*T), m_0) \\
&= \nu_{(1,2,..,2)}(\varphi \circ A, 0) \\
&= \nu_{(1,2,..,2)}(\varphi, 0, A).
\end{aligned}$$

□

Le corollaire suivant fournit une généralisation ainsi qu'une démonstration simplifiée d'un résultat qui apparaît dans [Di 98] (théorème 2.6) et qui a des applications intéressantes en dynamique complexe à plusieurs variables.

Corollaire 1.2.13 *Soit $f : Y \to X$ une application birationnelle entre deux surfaces complexes. Soit $V = \cup_i V_i$ l'ensemble critique de f (les V_i désignent les composantes irréductibles de V) et $p_i = f(V_i \setminus I_f) \in I_{f^{-1}}$ où I_f (resp. $I_{f^{-1}}$) désigne l'ensemble d'indétermination de f (resp. de son inverse f^{-1}). Alors pour tout $\tilde{T} \in \mathcal{T}(Y)$, il existe $T \in \mathcal{T}(X)$ et $\mu_i \geq 0$ tels que*

$$\tilde{T} = f^*T + \sum_i \left(\mu_i - \nu_{\lambda_f^{(i)}}(T, p_i, A_f^{(i)}) \right) \cdot [V_i],$$

où les constantes $\lambda_f^{(i)}$ et les matrices $A_f^{(i)}$ dépendent de la décomposition de f en produit d'éclatements et de contractions et sont telles que

$$(f^*T)_{|V_i} = \nu_{\lambda_f^{(i)}}(T, p_i, A_f^{(i)})[V_i].$$

En particulier pour tout $T \in \mathcal{T}(X)$, $f^*T - (f^{-1})_*T = \sum_i \nu_{\lambda_f^{(i)}}(T, p_i, A_f^{(i)})[V_i]$ et donc $f^*T = (f^{-1})_*T$ ssi $\nu(T, p) = 0$ en tout point $p \in I_{f^{-1}}$.

Démonstration:

L'application f réalise un biholomorphisme de $Y \setminus V$ sur $X \setminus V'$ où V (resp. V') est l'ensemble critique de f (resp. f^{-1}) ; il est facile d'observer que chaque branche irréductible V_i de V contient un point de I_f et est contractée sur un point $p_i \in I_{f^{-1}}$, réciproquement pour tout point p de $I_{f^{-1}}$ il existe une branche irréductible de V contractée par f sur p. La dernière assertion du corollaire résulte donc de l'encadrement de la proposition 1.2.11.

Si $T \in \mathcal{T}(X)$, on définit le transformé total f^*T de T à l'aide de potentiels locaux (comme expliqué au début du paragraphe 1.2.2) ; le courant $(f^{-1})_*T$ est bien défini dans $Y \setminus V$ et de masse bornée au voisinage de V puisqu'il coïncide avec f^*T dans $Y \setminus V$, on note encore $(f^{-1})_*T$ son extension triviale à travers V (cf théorème 1.1.2). On a donc $f^*T - (f^{-1})_*T = (f^*T)_{|V} = \sum_i c_i \cdot [V_i]$. Il est bien connu qu'une application birationnelle entre deux surfaces peut être décomposée en un nombre fini d'éclatements et de contractions (structure theorem p510 dans [G-H 78]) ; en faisant un usage répété des proposition 1.2.7 et 1.2.12, on exprime les constantes c_i comme des nombres de Kiselman du courant T aux points p_i dont les poids et directions dépendent de la désingularisation de f. □

1.2.4 Support des transformés stricts de courants

Nous cherchons à approximer un courant $T \in \mathcal{T}(X)$ par des diviseurs rationnels $T_j = \frac{1}{N_j}[D_j]$ dont on contrôle le support. Il est immédiat que $\forall K$ compact de X, $\sup_{x \in K \cap \operatorname{Supp} T} d(x, D_j) \to 0$ si $T_j \to T$ faiblement, mais nous voulons de plus que $\sup_{x \in K \cap D_j} d(x, \operatorname{Supp} T) \to 0$, ce qui équivaut à la convergence des D_j vers $\operatorname{Supp} T$ en métrique de Hausdorff. Il s'agit de construire les D_j de telle sorte qu'ils évitent des compacts de plus en plus gros dans $X \setminus \operatorname{Supp} T$.

Afin d'obtenir un procédé d'approximation qui soit stable par éclatement (cf théorème 3.1.2 et corollaire 3.1.3), nous nous intéressons ici au support des transformés stricts de courants.

Définition 1.2.14 *Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X en p, $E = \pi^{-1}(p)$ et $T \in \mathcal{T}(X)$. On appelle transformé strict de T le courant $T' \in \mathcal{T}(\tilde{X})$ défini par $T' = \pi^*T - \nu(T,p)[E]$.*

Il est immédiat que $\operatorname{Supp}(\pi^*T) = \pi^{-1}(\operatorname{Supp} T)$ donc $\operatorname{Supp} T' = \pi^{-1}(\operatorname{Supp} T)$ si $\nu(T,p) = 0$. En fait $\operatorname{Supp} T'$ est l'adhérence de $\pi^{-1}(\operatorname{Supp} T \setminus \{p\})$ dans $\tilde{X}$; si p est un point intérieur à $\operatorname{Supp} T$ ou si $\operatorname{Supp} T$ est assez "épais" en p on a encore $\operatorname{Supp} T' = \pi^{-1}(\operatorname{Supp} T)$, mais l'égalité n'a pas lieu en général.

Exemples 1.2.15

i) Si $T = [H]$ est le courant d'intégration sur une hypersurface complexe H de X telle que $p \in H$, alors $\nu(T,p)$ est la multiplicité algébrique de H en

p (cf 1.2.2.v) et T' est le courant d'intégration sur le diviseur H' -transformé strict de H- défini comme l'adhérence de $\pi^{-1}(H \setminus \{p\})$ dans $\tilde{X}$. Ainsi $H' \cap E$ correspond à l'ensemble des droites complexes tangentes à H en p, c'est un sous-ensemble analytique de codimension 1 dans E.

ii) Si $X = \mathbb{C}^2$ et $T = dd^c\varphi$ où $\varphi = \max(\log|z_1|, \log|z_2|)$, $\tilde{X} = \{(z, [\zeta]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \,/\, z_1\zeta_2 = z_2\zeta_1\}$, alors $T' = \pi^*T - [E]$ admet $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_1x_2) - \log|x_1| = \log^+|x_2|$ pour potentiel dans la carte $\{\zeta_1 = 1\}$. Ainsi

$$S^1 \simeq \mathit{Supp}\, T' \cap E = \{(0, [\zeta]) \,/\, |\zeta_1| = |\zeta_2|\} \subsetneq E.$$

Il se peut que $T_j = \frac{1}{N_j}[D_j] \to T$ avec convergence des nombres de Lelong et $D_j \to \operatorname{Supp} T$ en métrique de Hausdorff dans X sans pour autant que $\operatorname{Supp} T_j' \to \operatorname{Supp} T'$ dans l'éclaté (voir exemple ci-dessous) ; nous verrons cependant au chapitre 3 qu'on peut, localement, approximer T par des diviseurs dont on contrôle le support également dans l'éclaté (i.e. dont on contrôle les directions complexes tangentes aux points d'éclatements, cf proposition 3.1.1). Les techniques utilisées nous permettront alors d'obtenir un procédé d'approximation stable par éclatement et contraction, il suffira e.g. de savoir approximer tout courant d'une surface compacte complexe X pour en déduire l'approximation des courants d'une surface Y birationnelle à X (cf théorème 3.1.2 et corollaire 3.1.3).

Exemples 1.2.16

Soit $\psi_j = \max(\log|z_1|^2, \log|z_2/j|, \log|z_2|^2)$. Il est clair que $\psi_j \xrightarrow{L^1_{loc}} \varphi$ où $\varphi(z) = 2\max(\log|z_1|, \log|z_2|)$ et on vérifie que $\mathit{Supp}\, dd^c\psi_j \to \mathit{Supp}\, dd^c\varphi$ en métrique de Hausdorff. Soit $\pi : \tilde{X} \to \mathbb{C}^2$ l'éclatement de $\mathbb{C}^2$ en 0 ; les courants $S_j' = \pi^*(dd^c\psi_j) - \nu(dd^c\psi_j, 0)[E]$ admettent pour potentiels

$$\psi_j'(x_1, x_2) = \psi_j(x_1, x_1x_2) - \log|x_1| = \max(\log|x_1|, \log|x_2/j|, \log|x_1x_2^2|)$$

dans la carte $\{\zeta_1 \neq 0\}$ donc $\mathit{Supp}\, S_j' \cap E = \{x_1 = x_2 = 0\} = \{(0, [1, 0])\}$.

Par ailleurs, $T' = \pi^*(dd^c\varphi) - \nu(dd^c\varphi, 0)[E]$ est tel que $\mathit{Supp}\, T' \cap E = \{|\zeta_1| = |\zeta_2| = 1\} \simeq S^1$ (cf exemple 1.2.15ii ci-dessus).
Considérons $\varphi_j = \frac{1}{j}[\log|z_1^{2j} + z_2^{2j}| + \frac{1}{p_j}\log|f_j|]$ où $f_j = z_1^{2p_j} + (z_2/j)^{p_j} + z_2^{2p_j}$. Si on choisit une suite (p_j) qui tend assez vite vers l'infini, $\frac{1}{p_j}\log|f_j|$ aura le même comportement asymptotique que ψ_j tandis que $\frac{1}{j}\log|z_1^{2j} + z_2^{2j}| \to \varphi$ avec convergence des nombres de Kiselman et des supports en métrique de Hausdorff; ainsi $T_j' = \pi^*(dd^c\varphi_j) - \nu(dd^c\varphi_j, 0)[E] \to T'$ dans $\tilde{X}$ mais $\mathit{Supp}\, T_j' \cap E \to (\mathit{Supp}\, T' \cap E) \cup \{(0, [1, 0])\}$.

1.3 Convexité rationnelle

1.3.1 Plusieurs définitions possibles

Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$. L'enveloppe rationnelle $r(K)$ de K est définie par

$$r(K) = \{z \in \mathbb{C}^n \ / \ |R(z)| \leq \sup_K |R|, \forall R \text{ fraction rationnelle dont les pôles sont hors de } K \text{ et telle que } z \notin I_R\},$$

où I_R désigne l'ensemble d'indétermination de R; si $R = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux, les pôles de R sont les zéros de Q et $I_R = \{P = 0\} \cap \{Q = 0\}$ est un ensemble analytique de codimension supérieure ou égale à 2. De manière équivalente, un point x se situe hors de $r(K)$ ssi il existe une hypersurface de $\mathbb{C}^n$ qui contient x et ne rencontre pas K. Duval et Sibony ont montré dans [D-S 95] qu'un point x se situe hors de $r(K)$ ssi il existe un courant T positif fermé de bidegré $(1,1)$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que $x \in \operatorname{Supp} T$ mais $\operatorname{Supp} T \cap K = \emptyset$. Il y a donc plusieurs généralisations naturelles de cette notion sur les variétés complexes :

Définition 1.3.1 *Soit K un compact d'une variété complexe X, on définit l'enveloppe (fortement-)rationnellement convexe de K par*

$$r(K) = \{x \in X \,/\, \forall D \text{ diviseur positif, } x \in D \Rightarrow D \cap K \neq \emptyset\}.$$

L'enveloppe méromorphiquement convexe de K est

$$m(K) = \{x \in X \ / \ |f(x)| \leq \sup_K |f|, \forall f \text{ fonction méromorphe sur } X \text{ dont les pôles sont hors de } K \text{ et telle que } x \notin I_f\}.$$

On définit également

$$r_2(K) = \{x \in X \,/\, \forall D \text{ diviseur effectif, } x \in D \Rightarrow D \cap K \neq \emptyset\},$$

et

$$r_3(K) = \{x \in X \,/\, \forall T \in \mathcal{T}(X), \ x \in \operatorname{Supp} T \Rightarrow \operatorname{Supp} T \cap K \neq \emptyset\}.$$

On dira qu'un compact K est rationnellement convexe si $r(K) = K$.

Il est clair que l'on a toujours $K \subset r_3(K) \subset r_2(K) \subset r(K)$ et nous allons voir qu'en général ces inclusions sont strictes. Le fait que $r(K)$ est compact sur une variété projective (resp. Stein) résulte de la proposition qui suit.

Proposition 1.3.2

On a toujours $r_2(K) \subset m(K) \subset r(K)$; $r(K)$ est fermé.

Si X est projective homogène (i.e. le groupe $Aut(X)$ des automorphismes de X agit transitivement sur X) alors $\forall K$, $r_2(K) = m(K)$ est compact.

Si X est Stein alors $\forall K$, $r_2(K) = m(K) = r(K)$ est compact.

Démonstration:

Par définition, une fonction méromorphe sur X est donnée localement par le quotient de deux fonctions holomorphes (cf [G-H 78] p36) et peut donc s'écrire globalement comme un quotient s/h de deux sections holomorphes globales s et h d'un fibré holomorphe en droites L sur X. Si $x \notin m(K)$ on peut donc trouver $s, h \in \Gamma(X, L)$ telles que $\{h = 0\} \cap K = \emptyset$, $x \notin \{s = 0\} \cap \{h = 0\}$, et $|s/h(x)| > \sup_K |s/h|$. Soit on a déjà $h(x) = 0$ et $x \notin r_2(K)$, soit $h(x) \neq 0$, alors la section $g := s - \frac{s}{h}(x) \cdot h \in \Gamma(X, L)$ vérifie $g(x) = 0$ et $\{g = 0\} \cap K = \emptyset$ donc $x \notin r_2(K)$. Ainsi $r_2(K) \subset m(K)$ et on montre de même que $r(K) \subset r'(K)$ où

$$r'(K) := \{x \in X \ / \ |s/h(x)| \leq \sup_K |s/h|, \forall s, h \in \Gamma(X, L), L \text{ positif} \\ \text{t.q. } \{h = 0\} \cap K = \emptyset \ \& \ x \notin \{s = 0\} \cap \{h = 0\}\}.$$

Dans ce cas, comme les fibrés considérés sont positifs, il y a en fait égalité : si $x \notin r(K)$ alors il existe $h \in \Gamma(X, L)$ avec L positif tel que $h(x) = 0$ mais $\{h = 0\} \cap K = \emptyset$; quitte à considérer une puissance assez grande L^k de L et remplacer h par h^k, on peut supposer qu'il existe $s \in \Gamma(X, L)$ telle que $s(x) \neq 0$, alors $|s/h(x)| = +\infty$ tandis que $\sup_K |s/h| < +\infty$ donc $x \notin r'(K)$. Ainsi $r'(K) \subset r(K)$ et donc $r(K) = r'(K)$ est fermé. L'inclusion $m(K) \subset r'(K) = r(K)$ est maintenant évidente.

Lorsque X est projective homogène, tous les fibrés qui interviennent dans la définition de $r_2(K)$ sont semi-positifs (cf Appendice du chapitre 2) et admettent des sections holomorphes qui ne s'annulent pas en point x fixé (quitte à considérer une puissance assez grande des ces fibrés) ; on conclut alors à l'inclusion réciproque $m(K) \subset r_2(K)$ en reprenant la démonstration de $r'(K) \subset r(K)$.

Si X est Stein tout diviseur est positif donc $r_2(K) = m(K) = r(K)$ est fermé ; la compacité résulte par exemple de celle des enveloppes holomorphiquement convexes des compacts de X. □

Remarque 1.3.3 *Il n'était pas évident a priori que $r(K)$ serait compact. L'égalité $r_2(K) = m(K)$ n'est pas vraie en général sur une variété projective et rien n'assure alors que $r_2(K)$ est fermé (cf exemple 1.3.5.v) ci-dessous).*

Proposition 1.3.4 *Toutes ces notions coïncident si X est une variété projective homogène t.q. $H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

Démonstration:

Sous ces hypothèses, tout diviseur effectif est positif donc $r_2(K) = r(K)$. L'homogénéïté de X implique qu'elle se décompose sous forme d'un produit d'un tore algébrique par une variété drapeau (cf [B-R 62]), mais l'hypothèse $H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ force X à être une variété drapeau ou une courbe elliptique. Le cas d'une courbe elliptique est clair ; une variété drapeau est une variété

Fano (i.e. le fibré anticanonique K_X^* est positif) sans torsion, rationnelle dont la cohomologie est assez simple à décrire (cf [B-H 58], [M 97] et chapitre 4 pour le cas des drapeaux du groupe linéaire). L'hypothèse $H^2(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ implique notamment que pour tout courant $T \in \mathcal{T}(X)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ t.q. $[\lambda T] \in H^2(X,\mathbb{Z})$; on peut alors appliquer le théorème d'approximation 2.1.6 pour conclure à $r_3(K) = r(K)$. □

Exemples 1.3.5

i) Si X est une variété compacte non projective, le critère de Kodaira implique qu'il n'y a aucun diviseur positif sur X ; on a donc $r(K) = X$ pour tout compact K de X alors qu'il peut y avoir des fonctions méromorphes non constantes sur X et donc des compacts K tels que $m(K) \neq X$. Il est également facile d'exhiber des exemples de variétés non-compactes qui ne sont pas Stein pour lesquelles certaines de ces enveloppes n'ont aucun interêt. Dans la suite, nous supposerons toujours implicitement que la variété X est soit compacte projective, soit Stein.

ii) Si $X = \mathbb{P}^n$ et K est un compact de $\mathbb{C}^n = \mathbb{P}^n \setminus \{z_0 = 0\}$ alors $r(K)$ coïncide avec la notion usuelle d'enveloppe rationnelle dans $\mathbb{C}^n$. En particulier, tout compact de $X = \mathbb{P}^1$ est rationnellement convexe puisqu'il est soit égal à $\mathbb{P}^1$, soit inclus dans une carte. Plus généralement, si X est une surface de Riemann, tout point est un diviseur positif donc tout compact est rationnellement convexe.

iii) Si X est projective ($\dim_{\mathbb{C}} X \geq 2$) et $K = X \setminus \Omega$ où Ω est un ouvert de Stein de X, alors $r_3(K) = X$. En effet il n'y a aucun courant positif fermé à support compact dans Ω. Si K contient le support d'un courant positif fermé de bidimension $(1,1)$ alors $r(K) = X$ (cf exemple 2.2.3.iii).

iv) Si $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et $K = K_1 \times K_2$ est un compact de X, alors
- soit $K = X = r(K) = r_2(K)$,
- soit $K_1 = \mathbb{P}^1$ et $K_2 \neq \mathbb{P}^1$ (resp. $K_1 \neq \mathbb{P}^1$ et $K_2 = \mathbb{P}^1$) alors $K = r_2(K) \subsetneq r(K) = X$,
- soit K_1 et K_2 sont différents de $\mathbb{P}^1$ et alors $K = r_2(K) = r(K)$.
Il résultera du théorème d'approximation des courants (cf corollaire 3.1.3) et du fait que $r_2(K)$ est compact (puisque X est homogène, cf proposition 1.3.2) que $r_2(K) = r_3(K)$ pour tout compact K de X.

v) Si $\pi : X \to \mathbb{P}^n$ désigne l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ en un point p et si $E = \pi^{-1}(p)$ est le diviseur exceptionnel alors $r(E) = X$ (cf exemple iii) ci-dessus) mais $r_2(E) = r_3(E) = E$; en effet si $x \in X \setminus E$, on peut trouver une hypersurface H de $\mathbb{P}^n$ qui contient $\pi(x)$ mais pas p, alors $\pi^{-1}(H)$ est une hypersurface de X qui contient x mais ne rencontre pas E.

Soit V un petit voisinage ouvert de p dans $\mathbb{P}^n$ tel que $\overline{V}$ est rationnellement convexe et soit $K = \pi^{-1}(\partial V)$. Alors tout diviseur positif irréductible D de X intersecte E donc K (sinon $D \subset\subset \pi^{-1}(V)$ puisque D est irréductible et $D' := \pi(D)$ serait un diviseur positif de $\mathbb{P}^n$ inclus dans un petit voisinage *de p), ainsi $r(K) = X$. Comme $\overline{V}$ est rationnellement convexe dans $\mathbb{P}^n$, on a $r_2(K) \subset r_2(\pi^{-1}(\overline{V})) = m(\pi^{-1}(\overline{V})) = \pi^{-1}(\overline{V})$; mais un point de E n'appartient pas à $r_2(K)$ (puisque $E \cap K = \emptyset$) et si $x \in \pi^{-1}(V) \setminus E$ nous affirmons que $x \in r_2(K)$: soit en effet H une hypersurface irréductible de X telle que $x \in H$ et $H \cap K = \emptyset$, alors le courant d'intégration sur H peut s'écrire*

$$[H] = \pi^* T + (\lambda - \nu(T,p))[E],$$

où $T \in \mathcal{T}(\mathbb{P}^n)$ (cf proposition 1.2.7) ; l'hypothèse $H \cap K = \emptyset$ implique $Supp\, T \cap \partial V = \emptyset$ donc $Supp\, T \subset \mathbb{P}^n \setminus \overline{V}$, mais on a supposé H irréductible donc $T \equiv 0$ et $H = \lambda \cdot E$, ce qui contredit $x \in H \cap (\pi^{-1}(V) \setminus E)$. Ainsi $r_2(K) = \pi^{-1}(\overline{V}) \setminus E$ n'est pas fermé et $r_2(K) \subsetneq m(K) = \pi^{-1}(\overline{V})$.

vi) Si $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$ est un tore abélien de la forme décrite en 2.1.3 et si $K = Supp\, T_0$ pour $T_0 = dd^c(\Re z_1)^+$ alors pour tout $x \in X \setminus K$, il existe $c \in]0,1[$ tel que $x \in Supp\, T_c$ où $T_c = dd^c \max(\Re z_1, c)$, mais $Supp\, T_c \cap K = \emptyset$ donc $r_3(K) = K$. Cependant si H est une hypersurface de X telle que $H \cap Supp\, T_0 = \emptyset$, alors $H \subset D_\alpha$ pour un $\alpha > 1$ contredisant la proposition 2.1.9 ; donc toute hypersurface de X intersecte K et $r_2(K) = r(K) = X$.

1.3.2 Approximation des fonctions holomorphes

Une des motivations pour l'étude des enveloppes rationnellement convexes provient de la théorie des algèbres de Banach et des problèmes d'approximation des fonctions holomorphes par des fractions rationnelles (voir [A-W 97]). Le prototype de résultat d'approximation sur les variétés projectives est fourni par la proposition suivante :

Proposition 1.3.6 *Soit K un compact rationnellement convexe de $\mathbb{P}^n$ et f une fonction holomorphe dans un voisinage de K. Alors f est limite uniforme sur K de fractions rationnelles $\frac{A_j}{B_j}$, où A_j, B_j sont des polynômes homogènes premiers entre eux tels que $\{B_j = 0\} \cap K = \emptyset$.*

Démonstration: Si $K = \mathbb{P}^n$, alors f est constante et tout est dit. On suppose donc que $K \subsetneq \mathbb{P}^n$. Soit $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ la projection canonique et $F := \pi^{-1}(K) \cap \mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ désigne la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$. On vérifie aisément que l'enveloppe rationnellement convexe $r(F)$ de F dans $\mathbb{C}^{n+1}$ est un compact cerclé de $\mathbb{C}^{n+1}$ (i.e. $z \in r(F) \Rightarrow e^{i\theta} \cdot z \in r(F)$) qui évite un voisinage de l'origine (puisque $K \subsetneq \mathbb{P}^n$). Comme $r(F)$ est rationnellement convexe, on peut approximer $g := f \circ \pi$ (qui est holomorphe au voisinage de $r(F) \subset \pi^{-1}(K)$) uniformément sur $r(F)$ par des fractions rationnelles $\frac{A}{B}$ avec $\{B = 0\} \cap r(F) = 0$. On décompose $A = \sum_{\alpha \geq d} P_\alpha$, $B = \sum_{\beta \geq d'} Q_\beta$ en somme de polynômes homogènes où d (resp. d') désigne le premier indexe tel que A_α (resp. B_β) n'est pas identiquement nul. Soit Ω un voisinage cerclé de F dans lequel B ne s'annule pas. On définit

$$R(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{A}{B}(e^{i\theta} z) d\theta;$$

c'est une fonction holomorphe dans Ω qui vérifie $\sup_F |R - g| \leq \sup_F |\frac{A}{B} - g|$ puisque g est invariante par rotation ; R est égale au terme constant du développement en série de Laurent de $\lambda \to \frac{A}{B}(\lambda z)$. Un calcul de résidus permet d'exprimer R en fonction des polynômes A_α et B_β et on obtient $R = \frac{P}{B^m_{d'}}$, où P est un polynôme homogène de degré md'. Clairement $\{B_{d'} = 0\} \cap F = \emptyset$ et l'homogénéité permet de remonter l'approximation sur $K = \pi(F)$. $\square$

Pour formuler un résultat d'approximation sur d'autres variétés projectives nous sommes conduits à nous intéresser à la notion d'enveloppe rationnellement convexe relative à une sous-variété.

Proposition 1.3.7 *Soit K un compact d'une sous-variété complexe Y de X, on note $r_Y(K)$ son enveloppe rationnelle par rapport aux diviseurs positifs de Y et $r_X(K)$ son enveloppe rationnelle dans X.*
On a toujours $r_Y(K) \subset r_X(K)$, de plus :
i) si X est Stein alors $r_X(K)$ est un compact de Y ;
ii) si X est projective alors soit $r_X(K) = X$ soit $r_X(K) \subset Y$.

Démonstration:
Tout diviseur positif de X induit par restriction un diviseur positif sur Y donc $r_Y(K) \subset r_X(K)$.

Si X est Stein on peut la réaliser comme une sous-variété complexe de $\mathbb{C}^N$; si K est un compact de Y, il suffit donc de montrer que $r_{\mathbb{C}^N}(K) \subset Y$. Mais Y est une intersection (non nécessairement complète) d'hypersurfaces de $\mathbb{C}^N$, $Y = \cap_{j=1}^p \{h_j = 0\}$ où $h_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$; si $x \in \mathbb{C}^N \setminus Y$, alors il existe l tel que $h_l(x) \neq 0$. On peut approcher h_l uniformément sur le compact $K \cup \{x\}$ par des polynômes donc $x \notin r_{\mathbb{C}^N}(K)$.

Si X est projective et $r_X(K) \subsetneq X$, alors il existe un diviseur positif D de X tel que $K \subset X \setminus D$. On peut plonger X dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$ de telle sorte que D soit envoyé dans l'hyperplan à l'infini (théorème de Kodaira), alors K correspond à un compact de $\mathbb{C}^N$, $Y \setminus D$ correspond à une sous-variété algébrique de $\mathbb{C}^N$ et $r_X(K) \subset r_{\mathbb{P}^N}(K) = r_{\mathbb{C}^N}(K) \subset Y$ d'après ce qui précède. $\square$

Si $K = Y$ dans le cas projectif, on a bien sûr $r_X(K) = X$; il est naturel de se demander si $r_Y(K) = r_X(K) \cap Y$ pour tout compact de Y. Lorsque Y est une courbe rationnelle singulière de genre (arithmétique) supérieur où égal à 2 dans $\mathbb{P}^n$, Fabre a montré [F 96] que pour presque tout $y \in Y$, il existe $\varepsilon_y > 0$ tel que $r_{\mathbb{P}^n}(Y \setminus B(y, \varepsilon_y)) = \mathbb{P}^n$ (tandis que $r_Y(K) = K$ pour tout compact K de Y). Par ailleurs on a le résultat suivant.

Proposition 1.3.8 *Soit X une variété Stein ou compacte projective et Y une sous-variété complexe de X ; on note $Pic^+(X)$ l'ensemble des fibrés holomorphes en droites positifs sur X.*

Si l'application de restriction $\Phi : L \in Pic^+(X) \mapsto L_{|Y} \in Pic^+(Y)$ est surjective alors $r_Y(K) = r_X(K) \cap Y$ pour tout compact K de Y.

Si $X = \mathbb{P}^n$ et $H^2(Y, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(Y, \mathbb{R}) \neq \mathbb{Z}$ alors il existe un compact K de Y tel que $r_Y(K) = K$ et $r_{\mathbb{P}^n}(K) = \mathbb{P}^n$.

Dans le cas où $X = \mathbb{C}^n$, $r_Y \equiv r_{\mathbb{C}^n}$ ssi $H^2(Y, \mathbb{Z}) = 0$.

Démonstration:

Supposons que Φ est surjective et soit K un compact de Y. Soit $r_Y(K) = Y$ (cas projectif) et alors $r_X(K) = X$ et $r_X(K) \cap Y = r_Y(K)$, soit on peut fixer $x \in Y \setminus r_Y(K)$ et un diviseur positif D sur Y tel que $x \in D$ et $D \cap K = \emptyset$; D est l'ensemble $\{s = 0\}$ des zéros de $s \in \Gamma(Y, L)$ où $L \in Pic^+(Y)$. Par hypothèse L est la restriction à Y d'un fibré L' positif sur X et le théorème d'extension d'Ohsawa-Takegoshi-Manivel [M 93] assure l'existence de $S \in \Gamma(X, L')$ telle que $S_{|Y} \equiv s$ (quitte à considérer une puissance assez grande L^k de L et à remplacer s par s^k). Ainsi $D' = \{x \in X \,/\, S(x) = 0\}$ est un diviseur positif sur X tel que $x \in D'$ et $D' \cap K = \emptyset$ donc $x \notin r_X(K)$. Il résulte de la proposition 1.3.7 que $r_X(K) = r_Y(K)$ dans ce cas.

Dans le cas projectif, une classe entière dans $H^2(Y, \mathbb{Z})$ est la première classe de Chern d'un fibré holomorphe en droites sur Y ssi elle est de type $(1,1)$, i.e si elle appartient au groupe de Neron-Severi $NS(Y) = H^2(Y, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ (cf Lefschetz theorem on $(1,1)$-classes [G-H 78] p163). Si $X = \mathbb{P}^n$ et $NS(Y) \neq \mathbb{Z}$, on peut trouver un diviseur positif D sur Y dont la classe de cohomologie n'est pas du type $k \cdot [\omega_{|Y}]$, où ω désigne la forme de Fubini-Study sur $X = \mathbb{P}^n$ et $k \in \mathbb{N}$. Soit dist une distance quelconque sur Y et $K_\varepsilon = \{y \in Y \,/\, \mathrm{dist}(y, D) \geq \varepsilon\}$. Alors $r_Y(K_\varepsilon)$ est un compact de $Y \setminus D$ pour tout $\varepsilon > 0$ et nous affirmons que $r_{\mathbb{P}^n}(K_\varepsilon) = \mathbb{P}^n$ pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. Supposons le contraire, alors $\forall j \geq 1$, on peut trouver un diviseur positif D_j de $\mathbb{P}^n$ tel que $D_j \cap K_{1/j} = \emptyset$. Soit $T_j = \frac{1}{\|D_j\|}[D_j]$ la suite de courants de $\mathcal{T}(\mathbb{P}^n)$ associée et $T'_j = T_{j|Y}$; on peut extraire de (T'_j) une sous-suite qui converge vers un courant $T' \in \mathcal{T}(Y)$ cohomologue à $\omega_{|Y}$. Alors $\mathrm{Supp}\, T' \subset D$ donc $T' = c[D]$ pour une constante $c > 0$ donc $[D]$ est cohomologue à $\frac{1}{c}\omega_{|Y}$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur D.

Si X est Stein le théorème B de Cartan assure que $H^1(X, \mathcal{O}) = H^2(X, \mathcal{O}) = 0$ et donc $Pic(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$. Toute classe entière est de type $(1,1)$ et, puisque tout diviseur est positif, $Pic^+(X) = H^2(X, \mathbb{Z})$ dans ce cas. En reprenant le raisonnement fait dans le cas projectif, on montre que la surjectivité de Φ est également nécessaire pour que $r_X \equiv r_Y$, elle s'exprime simplement dans ce cadre par le fait que toute classe entière dans $H^2(Y,\mathbb{Z})$ est la restriction à Y d'une classe entière de $H^2(X,\mathbb{Z})$. En particulier si $X = \mathbb{C}^n$, $r_X \equiv r_Y$ ssi $H^2(Y,\mathbb{Z}) = 0$. □

Exemples 1.3.9

i) Dans le cas projectif, si Pic(Y) $= \mathbb{Z}$ alors Φ est surjective. C'est le cas si e.g. Y est la Grassmannienne $G_{k,n}(\mathbb{C})$ des k-plans de $\mathbb{C}^n$ (cf chapitre 4) ou si Y est une hypersurface lisse de degré d dans $\mathbb{P}^n$ avec $\max(d,3) \leq n$; en effet la formule d'adjonction (cf [G-H 78] p147) assure dans ce cas que le fibré anticanonique K_Y^* de Y est égal à la restriction à Y de $\mathcal{O}(n+1-d)$ qui est positif et il résulte alors du théorème d'annulation de Kodaira-Nakano (cf [G-H 78] p154) que $H^1(Y,\mathcal{O}) = H^2(Y,\mathcal{O}) = 0$, donc Pic($Y$) $\simeq H^2(Y,\mathbb{Z})$ et $H^2(Y,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ puisque $n \geq 3$ (cf Lefschetz hyperplane theorem [G-H 78] p156) ; ce sera le cas plus généralement si Y est une variété Fano (i.e. $K_Y^* > 0$) telle que $H^2(Y,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

ii) Si $Y \subset X = \mathbb{P}^3$ est la quadrique $Y = \{[z] \in \mathbb{P}^3 \,/\, z_0z_3 = z_1z_2\}$ image de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans le plongement de Segré, alors Pic(Y) $= NS(Y) = \mathbb{Z}^2$ donc Φ n'est pas surjective. Cependant on aura $r_X(K) = r_Y(K)$ pour les compacts K de Y tels que l'application de restriction des fibrés en droites est surjective dans un voisinage de K. Par exemple, si K est un compact de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, tout diviseur positif de Y est trivial dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ donc $r_X(K) = r_Y(K)$; en particulier le tore $S^1 \times S^1$ est rationnellement convexe aussi bien dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ que dans $\mathbb{P}^3$.

Corollaire 1.3.10 *Soit X une variété compacte projective. Si Pic(X) $= \mathbb{Z}$ alors toute fonction holomorphe au voisinage d'un compact K rationnellement convexe de X est limite uniforme sur K de fractions rationnelles.*

Remarque 1.3.11 *En utilisant le théorème de plongement de Kodaira, on peut se ramener dans le corollaire précédent au cas des compacts rationnellement convexes de $\mathbb{C}^n$; cela fournit une autre démonstration de la proposition 1.3.6.*

1.3.3 Convexité rationnelle des sous-variétés totalement réelles

L'obstruction classique à la convexité rationnelle d'un compact K de $\mathbb{C}^n$ est l'existence d'une surface de Riemann S compacte à bord telle que $\partial S = \partial\Sigma$ où $\Sigma \subset K$ est une surface réelle, on a alors nécessairement $S \subset K$ alors que S n'est pas incluse dans K si e.g. K est totalement réel (cf [St 63] et [D-S 95]). Il se peut cependant qu'il n'existe aucune telle paire (S,Σ) et pourtant $r(K) \setminus K$ est non vide. Duval et Sibony [D-S 95] ont donné une version de ce phénomène en termes de courants dont voici la formulation généralisée au cas des variétés Stein.

Proposition 1.3.12 *Soit K un compact d'une variété Stein X. Soit R un* *courant positif de bidimension* $(1,1)$ *à support compact dans* X. *Si* $dd^cR = dd^c\sigma$ *où* σ *est un courant de dimension* 2 *supporté par* K *alors* $Supp\, R \subset r(K)$.

Démonstration: Adaptation immédiate de la proposition 2.3 de [D-S 95] en utilisant la proposition 2.2.7 du chapitre 2. □

Lorsque K est une sous-variété totalement réelle (voir définition 1.3.13 ci-dessous), la proposition précédente décrit complètement l'enveloppe $r(K)$ (cf théorème 1.3.15).

Proposition-Définition 1.3.13 *Une sous-variété réelle fermée* S *d'une variété complexe* X *est dite totalement réelle si en tout point* $x \in S$ *l'espace tangent réel* $T_x^{\mathbb{R}}(S)$ *à* S *en* x, *vu comme sous-espace réel de* $T_x^{\mathbb{C}}(X)$, *ne contient aucune droite complexe de* $T_x^{\mathbb{C}}(X)$.

Si $(\varrho_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *est une famille de fonctions réelles de classe* C^2 *telles que localement* S *(supposée de classe* C^2*) est donnée par l'ensemble des zéros d'un nombre fini de* ϱ_p, *alors la fonction* $\varrho := \sum_p \chi_p \cdot \varrho_p^2$ *(où les* χ_p *sont des fonctions positives à support compact bien choisies) est une fonction positive de classe* C^2 *globalement définie dans* X *telle que* $S = \{x \in X \,/\, \varrho(x) = \nabla\varrho(x) = 0\}$ *; on vérifie de plus que* ϱ *est strictement psh dans un voisinage de* S *si* S *est totalement réelle.*

Démonstration: On calcule explicitement la forme de Levi de ϱ sur S dans un système de coordonnées locales $(z_1,\ldots,z_n)$, il faut dériver deux fois les termes en ϱ_p^2 pour obtenir une contribution non nulle, on obtient

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2\varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(x) w_j \overline{w_k} = \sum_p \left| \sum_j \frac{\partial \varrho_p}{\partial z_j}(x) \cdot w_j \right|^2,$$

et le membre de droite s'annule ssi $w \in T_x^{\mathbb{R}}(S) \cap iT_x^{\mathbb{R}}(S) = 0$. □

On dispose de bons théorèmes d'approximation des fonctions continues sur les compacts rationnellement convexes - resp. polynomialement convexes - d'une telle variété par des fractions rationnelles - resp. polynômes - (généralisations des théorèmes d'Hartogs-Rosenthal et Lavrentieff dues à Hörmander-Wermer et Nirenberg-Wells, voir [A-W 97]).

L'un des objectifs de cette thèse était de poursuivre la caractérisation de la convexité rationnelle des sous-variétés totalement réelles entreprise par Duval dans [D 91] et [D 94], et dont la forme aboutie pour les sous-variétés totalement réelles de $\mathbb{C}^n$ apparaît dans [D-S 95]. Voici l'énoncé de la caractérisation que nous obtenons dans le cas où la variété ambiante est

Stein ou compacte projective (on en trouvera la démonstration au chapitre 2, théorème 2.2.8).

Théorème 1.3.14 *Soit S une sous-variété lisse compacte totalement réelle d'une variété complexe X supposée Stein ou compacte projective.*
Il y a équivalence entre :
i) S est rationnellement convexe.
ii) Il existe une forme de Hodge ω sur X telle que $\omega_{|S} = 0$.

Lorsque X est Stein on peut dualiser cette caractérisation :

Théorème 1.3.15 *Soit S une sous-variété lisse compacte totalement réelle d'une variété Stein X. Alors $S \subsetneq r(S)$ ssi il existe un courant positif non trivial R de bidimension $(1,1)$ à support compact dans X tel que $dd^cR = dd^cj_*\sigma$ où σ est un courant de dimension 2 sur S et $j : S \to X$ désigne l'inclusion.*

La démonstration de ce résultat est une adaptation immédiate de celle du théorème 3.5 de [D-S 95] modulo le théorème 1.3.14. Lorsque X est compacte projective, il faut disposer d'un voisinage de Stein approprié de S. Les $S_\varepsilon = \{\varrho < \varepsilon\}$ sont des candidats naturels mais ils sont indépendants de la géométrie globale de X qu'il est essentiel de prendre en compte. Si D est un diviseur positif de X qui ne rencontre pas S, alors $X \setminus D$ est un ouvert de Stein d'un type très particulier qui permet une telle dualisation :

Théorème 1.3.16 *Soit X une variété compacte projective, D un diviseur positif de X et S une sous-variété lisse compacte totalement réelle de $X \setminus D$. Alors $S \subsetneq r(S)$ ssi il existe un courant positif non trivial R de bidimension $(1,1)$ à support compact dans $X \setminus D$ tel que $dd^cR = dd^cj_*\sigma$ où σ est un courant de dimension 2 sur S et $j : S \to X \setminus D$ désigne l'inclusion.*

1.4 Convexité polynomiale relative

1.4.1 Condition (C)

Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$. L'enveloppe polynomiale $\widehat{K}$ de K est définie par

$$\widehat{K} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \ / \ |P(z)| \leq \sup_K |P|, \ \forall P \text{ polynôme} \right\}.$$

Il résulte de la solution au problème de Levi (cf [Hö 88]) que $\widehat{K}$ coïncide avec l'enveloppe de K par rapport aux fonctions psh dans $\mathbb{C}^n$. Une autre caractérisation due à Oka, consiste à montrer qu'un point x se situe hors de $\widehat{K}$ ssi il existe une famille continue d'hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$ joignant x à l'infini en évitant K. On peut également définir l'enveloppe psh d'un compact d'une variété Stein, mais il n'existe pas de définition intrinsèque d'une telle enveloppe sur une variété compacte qui prolonge la notion usuelle sur $\mathbb{C}^n$: le compact $K = \{[1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}] \in \mathbb{P}^2, / \, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ est polynomialement convexe dans $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \{z_0 = 0\}$ mais ne l'est pas dans la carte $\mathbb{P}^2 \setminus \{z_1 = 0\} \simeq \mathbb{C}^2$. Nous introduisons une notion d'enveloppe polynomiale relative à un courant $T \in \mathcal{T}(X)$ fixé :

Définition 1.4.1 *Soit T un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur une variété complexe X, et soit K un compact de $X \setminus Supp\, T$. On définit l'enveloppe T-polynomiale $\widehat{K}^T$ de K par*

$$\widehat{K}^T := \left\{ x \in X \setminus Supp\, T \;/\; f(x) \leq \sup_K f,\ \forall f \in \mathcal{C}_T(X) \ t.q.\ dd^c f \geq -T \right\},$$

où $\mathcal{C}_T(X)$ désigne l'ensemble des fonctions $f \in L^1(X)$ telles que $\exp(f + \varphi)$ *est continue si φ est un potentiel local de T.*

On dira que K est T-polynomialement convexe si $\widehat{K}^T = K$.

Remarquons que $f \in \mathcal{C}_T(X)$ est semi-continue inférieurement, ce qui assure que $\widehat{K}^T$ est fermé dans $X \setminus \operatorname{Supp} T$.

L'idée initiale était de remplacer l'hyperplan à l'infini dans $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \{z_0 = 0\}$ par le support d'un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ et de généraliser le principe d'Oka. Il s'est avéré plus utile d'avoir une définition en termes d'enveloppe par rapport à une classe de fonctions globalement définies sur X, psh dans $X \setminus \operatorname{Supp} T$, dont le défaut de plurisousharmonicité "à l'infini" (i.e. sur $\operatorname{Supp} T$) est contrôlé par T. Nous obtenons toutefois un principe d'Oka ainsi qu'un résultat d'approximation des fonctions holomorphes au voisinage d'un compact T-polynomialement convexe lorsque T est le courant d'intégration sur un diviseur positif (voir paragraphe 2.3.2).

Exemples 1.4.2

i) Si X est Stein et $T = 0$ alors $\widehat{K}^T$ est l'enveloppe par rapport aux fonctions psh sur X et coïncide donc avec l'enveloppe holomorphiquement convexe (voir également proposition 2.5.3).

ii) Si $X = \mathbb{P}^n$, $T = [\{z_0 = 0\}]$ et si K est un compact de $\mathbb{C}^n = \mathbb{P}^n \setminus \{z_0 = 0\}$ alors $\widehat{K}^T$ est l'enveloppe polynomiale usuelle de K dans $\mathbb{C}^n$ (cf propriété iv) suivant la définition 2.3.1).

iii) Soit $K = \{[1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}] \in \mathbb{P}^2, / \, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $T_0 = [\{z_0 = 0\}]$ et $T_1 = [\{z_1 = 0\}]$. Alors $\widehat{K}^{T_0} = K$ mais $\widehat{K}^{T_1} = \{[\lambda, 1, \lambda^2] \in \mathbb{P}^2 \,/\, |\lambda| \leq 1\}$.

Quelques exemples simples montrent qu'il faut imposer des restrictions sur le courant T pour obtenir une notion d'enveloppe intéressante (voir exemples 1.1.4.iii) et 2.3.4.iii)) ; la condition (C) que nous définissons à présent va jouer un rôle crucial dans le théorème d'approximation.

Définition 1.4.3 *On dit que T satisfait la condition (C) si*

$$\forall K \subset\subset X \setminus Supp\, T,\ \widehat{K}^T \subset\subset X \setminus Supp\, T.$$

Il est bien connu que le complémentaire du support d'un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ est localement pseudoconvexe (cf [Ce 78]), mais la locale pseudoconvexité est une notion très faible en général (cf exemple 2.3.4.iii)). Pour établir le résultat d'approximation des courants (chapitre 2) nous devons disposer de fonctions psh non triviales dans $X \setminus \operatorname{Supp} T$ dont on contrôle le défaut de plurisousharmonicité sur $\operatorname{Supp} T$; cela explique la nécessité de cette condition qui entraîne l'hyperconvexité de $X \setminus \operatorname{Supp} T$ (corollaire 2.3.6) voire le caractère Stein si T est cohomologue à une forme de Kähler (théorème 2.3.8).

Il est naturel de se demander quel type d'hypothèse va entraîner la condition (C). Si X est homogène, tout courant $T \in \mathcal{T}(X)$ satisfait la condition (C) (cf Appendice du chapitre 2). Autrement on peut essayer d'imposer une condition de courbure sur la variété ; on dispose par exemple d'une solution au problème de Levi lorsque X est de courbure bisectionnelle holomorphe positive (cf [El 75] et [S 76]) ou si X admet une fonction lisse psh d'exhaustion et $K_X^* > 0$ (cf [T 98]) ; cependant l'exemple 2.3.4.iii) montre que l'hypothèse $K_X^* > 0$ n'est pas suffisante pour garantir que la condition (C) sera satisfaite par tous les courants $T \in \mathcal{T}(X)$. On peut préférablement imposer une condition sur la classe de cohomologie de T ; si X est Stein et $[T] \in H^2(X, \mathbb{Z})$ alors T satisfait la condition (C) (proposition 2.5.3). Dans ce dernier exemple $[T]$ est positive et l'exemple 1.1.4.iii) montre qu'il n'est pas suffisant de supposer $[T]$ nef.

Il semble cependant raisonnable de penser que si $[T] = c(L)$ où L est un fibré holomorphe en droites positif sur une variété projective X, alors T va satisfaire la condition (C) (cf question 2.4.5 et section 3.2).

1.4.2 Courants à support compact dans $X \setminus \operatorname{Supp} T$

Soit X une variété complexe et $T \in \mathcal{T}(X)$. Nous généralisons ici l'approche de [D-S 95] qui consiste à décrire l'enveloppe T-polynomiale d'un compact K de $\Omega_T := X \setminus \operatorname{Supp} T$ à l'aide de courants positifs S à support compact dans Ω_T tels que $dd^c S \leq 0$ dans $\Omega_T \setminus K$.

Proposition 1.4.4 *Supposons que $\Omega_T := X \setminus \operatorname{Supp} T$ est Stein et soit K un compact de Ω_T. Soit S un courant positif de bidimension $(1,1)$ à support compact dans $\Omega_T \setminus K$ tel que $dd^c S \leq 0$. Alors $\operatorname{Supp} S \subset \widehat{K}^T$.*

Démonstration:

Soit $x \in \operatorname{Supp} S \setminus \widehat{K}^T$, alors il existe $f \in PSH(\Omega_T)$ telle que $f(x) > 0 > -1 \geq \sup_K f$. L'ouvert Ω_T est Stein, il admet donc une fonction lisse strictement psh φ ; quitte à changer f en $\max(f + \varepsilon\varphi, 0)$ avec $\varepsilon > 0$ très petit, on peut supposer que f est identiquement nulle au voisinage de K, non-négative dans Ω_T et strictement psh au voisinage de x.

On obtient alors
$$0 < \langle S, dd^c f\rangle = \langle dd^c S, f\rangle \leq 0,$$
d'où la contradiction. □

Proposition 1.4.5 *Soit K un compact de Ω_T tel que $\widehat{K}^T \subset\subset \Omega_T$. Alors $\forall x \in \widehat{K}^T$ il existe une mesure de probabilité μ sur K et un courant positif S de bidimension $(1,1)$ à support compact dans Ω_T tel que $dd^c S = \mu - \delta_x$, où δ_x désigne la mesure de Dirac en x.*

Démonstration:

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des distributions à support compact dans Ω_T. Soit F le convexe compact de $\mathcal{E}$ constitué des mesures de probabilité sur K. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert V de $\widehat{K}^T$ tel que $V \subset\subset \Omega_T$; on peut donc trouver $\varphi \in \mathcal{C}_T(X)$ et $\varepsilon > 0$ tels que $dd^c\varphi \geq -T$, $\varphi \equiv 0$ dans un voisinage de $\widehat{K}^T$ et $\varphi \geq \varepsilon > 0$ sur ∂V (cf lemme 2.3.5). Soit $C := \{dd^c S \,/\, S \geq 0 \text{ de bidimension } (1,1)\, \& \operatorname{Supp} S \subset \overline{V}\}$; c'est un cône fermé dans $\mathcal{E}$. Supposons que pour $x \in \Omega_T$ donné, l'équation $dd^c S = \mu - \delta_x$ n'ait pas de solution, alors $\delta_x + C$ est disjoint de F et le théorème de Hahn-Banach implique l'existence de $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_T)$ (le dual de $\mathcal{E}$) telle que
$$\int \theta d\nu \leq 0 < 1 \leq \theta(x) + \langle dd^c S, \theta\rangle,$$
pour tout $(\nu, dd^c S) \in F \times C$. Puisque C est un cône on en déduit que $\langle S, dd^c\theta\rangle \geq 0$ pour tout courant S positif de bidimension $(1,1)$ à support dans $\overline{V}$, donc θ est psh dans V. L'inégalité appliquée à une mesure de Dirac en un point de K et avec $S = 0$ montre que $\theta(x) > \sup_K \theta$. Considérons
$$\tilde{\theta} := \begin{cases} \frac{1}{A}\max(\theta; A\varphi - C) & \text{dans } V \\ \varphi - \frac{C}{A} & \text{dans } X \setminus V \end{cases}$$
alors pour un choix de $C > -\min_K \theta$ et $A > \frac{1}{\varepsilon}[C + \sup_V \theta]$ on a $\tilde{\theta} \equiv \frac{1}{A}\theta$ au voisinage de $\widehat{K}^T$ et $\tilde{\theta} \equiv \varphi - \frac{C}{A}$ près de ∂V. On en déduit que $x \notin \widehat{K}^T$. □

Théorème 1.4.6 *Soit X une variété Kählerienne et T un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur X qui satisfait la condition (C) et est cohomologue à une forme de Kähler. Soit K un compact de $\Omega_T := X \setminus \operatorname{Supp} T$; il y a équivalence entre*

i) $x \in \widehat{K}^T$;

ii) il existe un courant positif S de bidimension $(1,1)$ à support compact dans Ω_T tel que
$$dd^c S = \mu - \delta_x,$$
où μ est une mesure de probabilité sur K et δ_x désigne la masse de Dirac en x.

Démonstration: Le sens ii)$\Rightarrow$i) est conséquence de la proposition précédente. Pour l'autre sens, il suffit de remarquer que Ω_T est Stein (théorème 2.3.8) et d'appliquer la proposition 1.4.4. □

Corollaire 1.4.7 *Si T_1 et T_2 sont deux courants qui satisfont les hypothèses du théorème et ont même support alors pour tout compact K de $X \setminus Supp\, T_i$ on a $\widehat{K}^{T_1} = \widehat{K}^{T_2}$.*

Chapitre 2

Courants positifs et convexité rationnelle

Introduction

We are interested in the approximation of positive closed currents of bidegree $(1,1)$ on a complex manifold X by rational divisors, i.e. currents of the type $\frac{1}{N_j}[H_j]$, where N_j is an integer and $[H_j]$ denotes the current of integration along a complex hypersurface H_j of X.

When X is a pseudoconvex open set in $\mathbb{C}^m$ s.t. $H^2(X,\mathbb{R}) = 0$, Lelong proved [Le 72] that one can always find such an approximation in the weak sense of currents. Demailly [De 82a] generalized this result to the case where X is a Stein or a projective algebraic manifold, modulo some cohomological assumptions: for example one can weakly approximate a positive closed current T of bidegree $(1,1)$ if it has integer class (i.e. $[T] \in H^2(X,\mathbb{Z})$).

Using rational convexity properties of the complement of the support of a positive closed current T of bidegree $(1,1)$ in $\mathbb{C}^m$, Duval and Sibony [D-S 95] showed that one can approximate T by rational divisors whose support converges to $\operatorname{Supp} T$ in the Hausdorff metric.

The purpose of this work is an attempt to generalize this result to the case of projective algebraic and Stein manifolds.

We first consider the case of homogeneous manifolds (X is homogeneous if its group of biholomorphisms $\operatorname{Aut}(X)$ acts transitively on X). There is in this situation a useful regularization process for positive metrics of holomorphic line bundles which we recall in an Appendix. Our main theorem 2.1.6 shows that:

Theorem 2.0.1 *Every positive closed current T of bidegree $(1,1)$ on the projective space $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ (resp. the Grassmann manifold $G_{k,m}(\mathbb{C})$ of k-planes of $\mathbb{C}^m$, resp. the hyperquadric $\mathbb{Q}_m(\mathbb{C})$ for $m \geq 4$) can be weakly approximated by rational divisors whose support converges to $\operatorname{Supp} T$.*

We give an example (paragraph 2.1.3) of a current on an abelian torus for which such an approximation does not hold.

In section 2.2 we define and study the notion of (strong)rational convexity on a complex manifold X : a compact set K is said to be (strongly)rationally convex if $X \setminus K$ is a union of positive divisors. Our main theorem is a generalization of a result of [D-S 95] :

Theorem 2.0.2 *Let S be a smooth compact totally real submanifold of a projective algebraic manifold X. Then S is rationally convex iff it is isotropic for some Hodge form, i.e. $\omega_{|S} = 0$ for some Kähler form ω on X s.t. $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{Z})$.*

There is no intrinsic definition of polynomial convexity on complex manifolds generalizing the usual notion in $\mathbb{C}^m$. However we define a notion of polynomial convexity relative to a positive closed current T of bidegree $(1,1)$:

Definition 2.0.3 *The T-polynomial hull of a compact subset K of X is*

$$\widehat{K}^T := \left\{ x \in X \ / \ f(x) \leq \sup_K f, \ \forall f \in \mathcal{C}_T(X) \ s.t. \ dd^c f \geq -T \right\},$$

where $\mathcal{C}_T(X)$ denotes the set of functions $f \in L^1(X)$ s.t. $\exp(f + \varphi)$ is continous whenever φ is a local potential of T. The compact K is said to be T-polynomially convex when $\widehat{K}^T = K$.

In many cases, $X \setminus \operatorname{Supp} T$ satisfies a convexity property (the "condition (C)" : $\forall K \subset\subset X \setminus \operatorname{Supp} T$, $\widehat{K}^T \subset\subset X \setminus \operatorname{Supp} T$) which turns out to be intermediate between being "rationally convex" and being Runge. An interesting observation on the Levi problem (theorem 2.3.7) yields the following:

Theorem 2.0.4 *Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on a compact Kähler manifold X. If T is cohomologous to a Kähler form and satisfies condition (C), then $X \setminus \operatorname{Supp} T$ is Stein.*

This generalizes the standard situation where s is a holomorphic section of some positive holomorphic line bundle on X and $T = [\{s = 0\}]$ is the current of integration along the positive divisor $\{s = 0\}$.

Our main approximation result gives an approximation of certain positive closed currents by rational divisors with a control of the supports and the Lelong numbers of the approximants:

Theorem 2.0.5 *Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on a projective algebraic manifold X. Assume there is $\lambda > 0$ s.t. $[\lambda T] = c_1(L)$*

for some holomorphic line bundle L which we assume is positive. Assume $T=[H]+R$, where $H=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j[Z_j]$ ($\forall j$, λ_j is a positive constant and Z_j is an irreducible algebraic hypersurface of X) and R is a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on X s.t. the level sets of Lelong numbers of R, $E_c(R)=\{x\in X\,/\,\nu(R,x)\geq c\}$, are of codimension greater or equal than 2. Assume moreover that T satisfies condition (C).
Then there exists $N_j\in\mathbb{N}$ and $s_j\in\Gamma(X,L^{N_j})$ s.t.
i) $T_j=\frac{1}{N_j}[\{s_j=0\}]\longrightarrow T$ in the weak sense of currents;
ii) $\{s_j=0\}\longrightarrow Supp\,T$ in the Hausdorff metric;
iii) $\forall x\in X$, $\nu(T_j,x)\longrightarrow\nu(T,x)$.

It can be seen as a combination of a result of Demailly [De 93] and the approximation result of Duval and Sibony [D-S 95].

Finally we take up our main results in section 2.5 considering the case of Stein manifolds.

We now set some notations and recall a few definitions from complex analytic geometry for the reader's convenience.

Let L be a holomorphic line bundle on a complex manifold X. We always implicitly fix a locally finite open covering $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ of X s.t. $L_{|\mathcal{U}_\alpha}$ is trivial and both the $\mathcal{U}_\alpha$'s and the $\mathcal{U}_{\alpha\beta}:=\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta$ are connected and simply connected. The line bundle is then uniquely determined by its transition functions $g_{\alpha\beta}\in\mathcal{O}^*(\mathcal{U}_{\alpha\beta})$. We denote by $Pic(X)$ the Picard group of holomorphic line bundles of X and we use a multiplicative notation for the group law; $\Gamma(X,L)$ denotes the set of holomorphic sections of L on X, i.e. $s\in\Gamma(X,L)$ is a set $\{s_\alpha\}$ of functions $s_\alpha\in\mathcal{O}(\mathcal{U}_\alpha)$ satisfying the compatibility condition $s_\alpha=g_{\alpha\beta}s_\beta$ in $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$.

A positive (singular-)metric of L is a set $\varphi=\{\varphi_\alpha\}$ of plurisubharmonic functions (psh for short), $\varphi_\alpha\in PSH(\mathcal{U}_\alpha)$, s.t. $\varphi_\alpha=\varphi_\beta+\log|g_{\alpha\beta}|$ in $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$. Note that the curvature current of the metric defined as $dd^c\varphi:=dd^c\varphi_\alpha$ in $\mathcal{U}_\alpha$ (where $d=\partial+\overline{\partial}$ and $d^c=\frac{1}{2i\pi}(\overline{\partial}-\partial)$) is globally well defined on X, since $\log|g_{\alpha\beta}|$ is pluriharmonic in $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$; it is a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on X but not necessarily a smooth form since we allow singularities. Observe also that the difference of two metrics of L is a globally well defined function $f\in L^1(X)$. If $h=\{h_\alpha\}\in\Gamma(X,L)$, then $\log|h|:=\{\log|h_\alpha|\}$ defines a positive singular metric of L on X. We denote by $\mathcal{P}(X,L)$ the set of positive metrics of L on X; if $\varphi=\{\varphi_\alpha\}\in\mathcal{P}(X,L)$ and $h=\{h_\alpha\}\in\Gamma(X,L)$, then the norm of h in the metric φ is defined in each $\mathcal{U}_\alpha$ by $|h|_\varphi:=|h_\alpha|e^{-\varphi_\alpha}$.

When X is compact Kähler, it follows from the Hodge decomposition theorem that if a positive closed current T of bidegree $(1,1)$ on X has integer class (i.e. $[T]\in H^2(X,\mathbb{Z})$), then $[T]$ is equal to the first Chern class of some holomorphic line bundle L on X and there exists a positive metric φ of L on X which is a potential for T (i.e. $T=dd^c\varphi_\alpha$ in $\mathcal{U}_\alpha$ and we then write $T=dd^c\varphi$).

A line bundle $L \in Pic(X)$ is said to be pseudoeffective if there exists a singular positive metric φ of L on X and L is positive (resp. semi-positive) if it admits a smooth positive metric φ on X s.t. the curvature form $dd^c\varphi$ is a Kähler form on X (resp. a semi-positive $(1,1)$-form).

We refer to [De 90] for further details and we finally recall a particular version of the solution to the $\overline{\partial}$-problem with L^2-estimates on projective algebraic and Stein manifolds that we use intensively in the present work:

Theorem 2.0.6 *Let X be a projective algebraic or a Stein manifold of dimension m and fix ω a Kähler form on X. Let L be a holomorphic line bundle on X and suppose there exists a singular metric θ of L s.t. $dd^c\theta \geq \varepsilon\omega$ for some positive constant ε. Then for every smooth $\overline{\partial}$-closed $(m,1)$-form v with values in L, s.t. $\int_X |v|^2 e^{-2\theta} dV_\omega < +\infty$, there exists a smooth $(m,0)$-form u with values in L s.t. $\overline{\partial}u = v$ and*

$$\int_X |u|^2 e^{-2\theta} dV_\omega \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |v|^2 e^{-2\theta} dV_\omega,$$

where $dV_\omega = \frac{1}{m!}\omega^m$ denotes the Kähler volume element.

Acknowledgements

I would like to express my heartfelt thanks to N.Sibony for suggesting this work and helping me through it. Part of it was done while I was visiting Chalmers University of Technology under the support of the Swedish Royal Academy of Sciences. I am particularly grateful to B.Berndtsson for very stimulating discussions.

2.1 Approximation on homogeneous manifolds

2.1.1 A modification procedure

In this section we set up a general construction of holomorphic sections with prescribed bounded norm on the set where a metric of a line bundle is pluriharmonic (proposition 2.1.1). This is an important technical step in the approximation theorem of the next section and we use it as well to establish rational convexity properties of the complement of the support of positive closed currents on homogeneous manifolds (theorem 2.2.6).

Proposition 2.1.1

Let X be a projective algebraic homogeneous manifold. Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on X s.t. $[T] = c_1(L)$ for some holomorphic line bundle L that we assume is positive.
Assume T admits a continuous potential, i.e. there exists a continuous positive metric φ of L s.t. $dd^c\varphi = T$.

For $\varepsilon > 0$ we set $K_\varepsilon = \{m \in X \,/\, d(m, Supp\,T) \geq \varepsilon\} \subset\subset X \setminus Supp\,T$, where d is a pseudo-distance function defined in the Appendix.
Let V be an open subset of X s.t. $K_\varepsilon \subset V \subset\subset X \setminus Supp\,T$ and fix $\delta > 0$.

Then we can find an integer M and construct a continuous positive metric ψ of L^M and a holomorphic section h of L^M in V s.t.

i) $K_\varepsilon \subset \{m \in V \,/\, |h|_\psi(m) \geq 1\} = \{m \in V \,/\, |h|_\psi(m) = 1\} \subset\subset V$

ii) $\| \frac{\psi}{M} - \varphi\|_{L^\infty(X)} \leq \delta$

iii) ψ is C^∞-smooth and $dd^c\psi > 0$ in a neighborhood of $Supp\,T$.

We first prove three lemmas.

Lemma 2.1.2 *Under the above assumptions $X \setminus Supp\,T$ is Stein and we can find large relatively compact Stein open subsets W of $X \setminus Supp\,T$ and positive integers k s.t. $L^k{}_{|W}$ is trivial.*

Proof:

It is an easy consequence of the Kontinuitätssatz that $X \setminus \mathrm{Supp}\,T$ is locally pseudoconvex in X (see [Ce 78]). Since X is homogeneous it is infinitesimally homogeneous (i.e. the global holomorphic vector fields generate the tangent space of X at every point of X, see [Hi 75]). It follows then from a result of Hirschowitz [Hi 75] that $X \setminus \mathrm{Supp}\,T$ is Stein iff it admits no "interior integral curve" (a holomorphic map $\gamma : \mathbb{C} \to X \setminus \mathrm{Supp}\,T$ with relatively compact image whose tangent vectors belong to some holomorphic vector field on X). If such a curve exists, we can construct by a standard argument (see lemma 2.1.3 below) a non trivial positive closed current S of bidimension $(1,1)$ with compact support in $X \setminus \mathrm{Supp}\,T$. Now T is cohomologous to a Kähler form ω (L is positive), hence $T = \omega - dd^c f$ for some $f \in L^1(X)$ which is smooth outside $\mathrm{Supp}\,T$ (see [G-H 78] p149) ; thus Stokes theorem gives

$$\begin{aligned} \|S\| := \textstyle\int_X \omega \wedge S &= \textstyle\int_{X\setminus \mathrm{Supp}\,T} dd^c f \wedge S \\ &= \textstyle\int_{X\setminus \mathrm{Supp}\,T} d^c f \wedge dS \\ &= 0. \end{aligned}$$

Therefore $X \setminus \mathrm{Supp}\,T$ contains no interior integral curve hence it is Stein (see also theorem 2.3.8).

Let ϱ be a smooth strictly p.s.h. exhaustion function of $X \setminus \mathrm{Supp}\,T$. By Sard's lemma we can find $R \in \mathbb{R}$ as big as we like so that $W = \{x \in X \setminus \mathrm{Supp}\,T \,/\, \varrho(x) < R\}$ is a smooth relatively compact Stein open subset of $X \setminus \mathrm{Supp}\,T$. Therefore the cohomology of W is finite dimensional and $H^1(W, \mathbb{R}) = H^1(W, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$.

Since W is Stein, it follows from Cartan's theorem B that the Picard group $Pic(W) = H^1(W, \mathcal{O}^*)$ is isomorphic to $H^2(W, \mathbb{Z})$.

Now L admits a flat metric in W since $dd^c\varphi = 0$ in W hence the image of the first Chern class of L via $H^2(W, \mathbb{Z}) \to H^2(W, \mathbb{R}) \simeq H^2_{dR}(W, \mathbb{R})$ is 0. In terms of Čech cohomology this means that a finite number of equations in a finite number of unknowns with coefficients in $\mathbb{Z}$ admits a solution in $\mathbb{R}$. Therefore it must have some solution in $\mathbb{Q}$, and multiplying the equations by some large integer k gives a solution in $\mathbb{Z}$ to the corresponding system, i.e. $c_1(L^k) = 0$ in $H^2(W, \mathbb{Z})$. Since c_1 is an isomorphism between $Pic(W)$ and $H^2(W, \mathbb{Z})$, this shows that ${L^k}_{|W}$ is trivial. □

Lemma 2.1.3 *Let Ω be an open subset of a complex Kähler manifold X and let $\gamma : \mathbb{C} \to \Omega$ be a non constant holomorphic map with relatively compact image in Ω. Then there exists a non trivial positive closed current of bidimension $(1,1)$ with support in $\overline{\gamma(\mathbb{C})}$.*

Proof:

Fix ω a Kähler form on X and let S_R be the current of integration over the analytic disc $\gamma(\Delta(R))$, where $\Delta(R)$ denotes the disc of radius R centered at 0 in $\mathbb{C}$. We normalize S_R in the following way:

$$\langle S_R, \theta \rangle := \frac{1}{\int_{\gamma(\Delta(R))} \omega} \int_{\gamma(\Delta(R))} \theta,$$

where θ is any test form of bidegree $(1,1)$ on X. Therefore S_R are positive currents of bidimension $(1,1)$ and of mass 1 on X. We want to extract a weak limit that is closed; it will have compact support in $\overline{\gamma(\mathbb{C})}$.

We claim there exists a sequence of radii $R_j \to +\infty$ s.t.

$$\frac{R_j^{1/2} \left[\int_{\partial \Delta(R_j)} |\gamma'|_\omega^2 \right]^{1/2}}{\int_{\Delta(R_j)} |\gamma'|_\omega^2} \to 0.$$

Assume the contrary. Then there exists $c > 0$ s.t. $\forall R > 0$,

$$\frac{R^{1/2} \left[\int_{\partial \Delta(R)} |\gamma'|_\omega^2 \right]^{1/2}}{\int_{\Delta(R)} |\gamma'|_\omega^2} \geq c > 0.$$

Set $f(t) = \int_{\Delta(e^t)} |\gamma'|_\omega^2$. This is a well defined function of $t \in \mathbb{R}$ which is smooth, positive, and s.t. $f'(t) = e^t \int_{\partial \Delta(e^t)} |\gamma'|_\omega^2 \geq 0$. We thus have $\frac{f'(t)}{f^2(t)} \geq c^2 > 0$. This implies

$$\frac{1}{f(0)} \geq \frac{-1}{f(t)} + \frac{1}{f(0)} \geq c^2 t, \ \forall t \geq 0,$$

a contradiction.

Fix such a sequence R_j. Since $\|S_{R_j}\| = 1$, there exists a subsequence $(S_{R_{j_k}})$ which converges in the weak sense of currents towards a positive current S of bidimension $(1,1)$. Again $\|S\| = 1$ and S has relatively compact support in Ω. We claim that S is closed. Indeed let θ be a test form of degree 1. Then

$$\langle dS, \theta\rangle = -\langle S, d\theta\rangle = -\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{\int_{\partial\Delta(R_{j_k})}\gamma^*\theta}{\int_{\Delta(R_{j_k})}\gamma^*\omega}\right]$$

Now there exists $C > 0$ s.t. $|\gamma^*\theta| \leq C|\gamma'|_\omega$ and Cauchy-Schwarz inequality gives

$$\left|\int_{\partial\Delta(R_{j_k})}\gamma^*\theta\right| \leq C\int_{\partial\Delta(R_{j_k})}|\gamma'|_\omega \leq CR_{jk}^{1/2}\left[\int_{\partial\Delta(R_{j_k})}|\gamma'|_\omega^2\right]^{1/2}$$

On the other hand $\gamma^*\omega = |\gamma'|_\omega^2$ hence by definition of R_j,

$$\frac{|\int_{\partial\Delta(R_{j_k})}\gamma^*\theta|}{\int_{\Delta(R_{j_k})}|\gamma'|_\omega^2} \to 0,$$

hence S is closed. □

Let $PH(W)$ be the real vector space of pluriharmonic functions in W. Let $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ be an open covering of W s.t. both the $\mathcal{U}_\alpha$'s and the $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ are connected and simply connected.

Let $\varphi \in PH(W)$. We can write $\varphi = \Re(h_\alpha)$ in $\mathcal{U}_\alpha$ where $h_\alpha \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_\alpha)$ and we set $v_{\alpha\beta} = \frac{1}{2i\pi}[h_\alpha - h_\beta]$. This is a holomorphic function in $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ which has imaginary part equal to zero hence $v_{\alpha\beta}$ is constant. Moreover $v_{\alpha\beta} + v_{\beta\gamma} + v_{\gamma\alpha} \equiv 0$ in $\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}$, thus $\{v_{\alpha\beta}\}$ is a real Čech 1-cocycle and defines a class $[v_{\alpha\beta}(\varphi)] \in H^1(W, \mathbb{R})$.

Lemma 2.1.4 *The map*

$$\begin{array}{rcl}\Phi : PH(W) & \to & H^1(W,\mathbb{R}) \\ \varphi & \to & [v_{\alpha\beta}(\varphi)] = \Phi(\varphi)\end{array}$$

is a morphism of real vector spaces s.t. $\ker\Phi = \Re(\mathcal{O}(W))$.

Given $\varphi \in PH(W)$, *there exists* $H \in \mathcal{O}^*(W)$ *s.t.* $\varphi = \log|H|$ *in* W *iff* $\Phi(\varphi) \in H^1(W, \mathbb{Z}) \subset H^1(W, \mathbb{R})$.

If moreover W *is Stein, then* Φ *is surjective.*

Proof:

The first assertion is clear.

Let $\varphi \in PH(W)$ and assume $\Phi(\varphi) = [v_{\alpha\beta}] \in H^1(W,\mathbb{Z}) \subset H^1(W,\mathbb{R})$. Then there exists $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ and $w_\alpha \in \mathbb{R}$, s.t. $v_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} + w_\alpha - w_\beta$. Thus we have

$$h_\alpha + 2i\pi w_\alpha = h_\beta + 2i\pi w_\beta + 2i\pi c_{\alpha\beta}$$

and we can define a global holomorphic function by setting $H = e^{h_\alpha + 2i\pi w_a}$ in $\mathcal{U}_\alpha$. Clearly $\log|H| = \varphi$ in W.

Conversely assume there exists $H \in \mathcal{O}^*(W)$ s.t. $\log|H| = \varphi$ in W. We fix a determination $h_\alpha = \log H$ of the complex logarithm of H in $\mathcal{U}_\alpha$. Two such determinations only differ by an integer multiple of $2i\pi$ hence

$$v_{\alpha\beta} = \frac{1}{2i\pi}\left[h_\alpha - h_\beta\right] = c_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}.$$

This shows that $[v_{\alpha\beta}] \in H^1(W,\mathbb{Z}) \subset H^1(W,\mathbb{R})$.

Assume now that W is Stein and let $[v_{\alpha\beta}] \in H^1(W,\mathbb{R})$. It also defines a class in $H^1(W,\mathcal{O}) = \{0\}$. Thus there exists $h_\alpha \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_\alpha)$ s.t. $v_{\alpha\beta} = \frac{1}{2i\pi}\left[h_\alpha - h_\beta\right]$. Hence $f = \Re h_\alpha$ is a globally well defined pluriharmonic function on W s.t. $\Phi(f) = [v_{\alpha\beta}]$. □

Remark 2.1.5 *This can be seen as a reformulation in terms of Čech cohomology of lemma 1.3 in [D-S 95].*

Proof of proposition 2.1.1:

Let φ^ε be the regularized metric of φ defined in the Appendix. It is a smooth metric for the same line bundle L that decreases uniformly towards φ when ε decreases towards 0 since we assumed φ is continuous. We can therefore assume that $\|\varphi^\varepsilon - \varphi\|_{L^\infty(X)} \leq 5\delta/8$ (otherwise, replace ε by some smaller constant)

Moreover, $\varphi^\varepsilon = \varphi$ on K_ε, and $\varphi^\varepsilon > \varphi$ in $X \setminus K_\varepsilon$, hence we can also assume that $\varphi^\varepsilon \geq \varphi + 4\delta'/8$ on ∂V (with $0 < \delta' \leq \delta$).

Let W be a smooth Stein open subset of $X \setminus \operatorname{Supp} T$ s.t. $V \subset\subset W \subset\subset X \setminus \operatorname{Supp} T$ and $H^1(W,\mathbb{R})$ is equal to $H^1(W,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ and of finite dimension, and $L^k{}_{|W}$ is trivial for some positive integer k (see lemma 2.1.2).

Therefore $k\varphi$ is a continuous metric of L^k on X which defines a pluriharmonic function in W. Since $\Phi : PH(W) \to H^1(W,\mathbb{R})$ is surjective, we can find $f_1, \ldots, f_p$ in $PH(W)$ s.t. $(\Phi(f_j))$ is a $\mathbb{Z}$-basis of $H^1(W,\mathbb{R})$. We can thus choose $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ so small that $\theta_\lambda = k\varphi + \sum_{j=1}^p \lambda_j . f_j$ (which is a continuous metric of L^k in W) satisfies $\Phi(\theta_\lambda) \in H^1(W,\mathbb{Q}) = H^1(W,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ and $\|\frac{1}{k}\theta_\lambda - \varphi\|_{L^\infty(\overline{V})} < \delta'/8$.

Fix $M_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $\Phi(M_1.\theta_\lambda) \in H^1(W,\mathbb{Z})$. By lemma 2.1.4 we can find a holomorphic section h of L^M in W ($M = kM_1$) which has constant norm equal to 1 in the metric $M_1\theta_\lambda$ (i.e. $|h|e^{-M_1\theta_\lambda} \equiv 1$).

Since L is positive, we can find a smooth metric G of L s.t. $dd^cG > 0$ in X. Consider $f_\eta = \eta.G + (1-\eta)\left[\varphi^\varepsilon - 2\delta'/8\right]$ $(0 \leq \eta < 1)$. It is a smooth metric of L s.t. $dd^c f_\eta > 0$ in X if $\eta > 0$ and $\|f_\eta - (\varphi^\varepsilon - 2\delta'/8)\|_{L^\infty(X)} = \eta.\|G - (\varphi^\varepsilon - 2\delta'/8)\|_{L^\infty(X)} \leq \delta'/8$ if we choose η small enough.

We define

$$\psi = \begin{cases} M_1 \sup(kf_\eta, \theta_\lambda) & \text{in V} \\ M.f_\eta & \text{in } X \setminus V \end{cases}$$

It is a well defined continuous positive metric of L^M in X since the maximum of two continuous positive metrics of a holomorphic line bundle is a continuous positive metric of the same line bundle and

$$f_\eta \le (\varphi^\varepsilon - 2\delta'/8) + \delta'/8 = \varphi - \delta'/8 < \frac{1}{k}\theta_\lambda \text{ on } K_\varepsilon$$

whereas

$$f_\eta \ge (\varphi^\varepsilon - 2\delta'/8) - \delta'/8 \ge \varphi + \delta'/8 > \frac{1}{k}\theta_\lambda \text{ on } \partial V.$$

We have $dd^c\psi = M.dd^c f_\eta \ge M\eta dd^c G > 0$ in $X \setminus V$ and

$$\|\psi/M - \varphi\| \le \max\left\{\|f_\eta - \varphi\|_{L^\infty(X)}; \|\theta_\lambda/k - \varphi\|_{L^\infty(\overline{V})}\right\} \le \delta$$

since

$$\begin{aligned} \|f_\eta - \varphi\|_{L^\infty(X)} &\le \|f_\eta - (\varphi^\varepsilon - 2\delta'/8)\|_{L^\infty(X)} + 2\delta'/8 + \|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L^\infty(X)} \\ &\le 3\delta'/8 + 5\delta/8 \le \delta. \end{aligned}$$

Finally, $\psi = M_1.\theta_\lambda = \log|h|$ in a neighborhood of K_ε hence

$$K_\varepsilon \subset \left\{m \in V \,/\, |h|e^{-\psi} \ge 1\right\} = \left\{m \in V \,/\, |h|e^{-\psi} = 1\right\} \subset\subset V,$$

and the proof is complete. □

2.1.2 Approximation of $(1,1)$-positive closed currents

Theorem 2.1.6 *Let X be a projective algebraic homogeneous manifold and T a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on X. Assume that $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{*+}$ s.t. $[\lambda T] \in H^2(X, \mathbb{Z})$, hence $[\lambda T] = c_1(L)$ for some holomorphic line bundle which, we assume, is positive.*

Then there exists (H_j) algebraic hypersurfaces of X and (N_j) integers s.t.

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda N_j}[H_j] \to T \text{ in the weak sense of currents} \\ \text{and} \\ H_j \to \operatorname{Supp} T \text{ in the Hausdorff metric.} \end{cases}$$

Remark 2.1.7 *The cohomological and the positivity assumptions on the cohomology class of T are always satisfied if $H^{1,1}(X) = \mathbb{C}$. This the case if X is the complex projective space $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, the Grassmann manifold $G_{k,m}(\mathbb{C})$ of complex k-planes of $\mathbb{C}^m$ or the hyperquadric $\mathbb{Q}_m(\mathbb{C})$ $(m \ge 4)$.*

Proof:

We can assume that T is smooth since, on a homogeneous manifold, we can regularize T in such a way that $[T^\varepsilon] = [T]$ and T^ε tends to T in the sense of the theorem (see Appendix).

We can also assume $\lambda = 1$ and we denote by $\varphi = \{\varphi_\alpha \in PSH(\mathcal{U}_\alpha)\}$ a smooth positive metric of L s.t. $dd^c\varphi = T$ (two such metrics only differ by a constant).

Let $K_n = \{m \in X \,/\, d(m, \operatorname{Supp} T) \geq \frac{1}{n}\}$, and $\delta_n > 0$ a sequence converging towards 0. We fix neighborhoods $V_n \subset\subset X \setminus \operatorname{Supp} T$ of K_n. By proposition 2.1.1, we can find integers M_n, continuous positive metrics ψ_n of L^{M_n} and holomorphic sections h_n of L^{M_n} in V_n with the prescribed properties.

Fix $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a sequence of points dense in $\operatorname{Supp} T$.We are going to construct for each n, an integer N_n and a global holomorphic section S_n of $L^{N_n.M_n}$ s.t.

$$\begin{aligned}
&|S_n|e^{-N_n\psi_n} \leq 1 \text{ on } X\\
&|S_n|e^{-N_n\psi_n} \geq \frac{1}{2} \text{ on } \{a_1,\ldots,a_n\} \cup K_n
\end{aligned}$$

Thus we get by ii) of proposition 2.1.1 :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N_n.M_n}\log|S_n| \leq \varphi + \delta_n \text{ on } X\\
&\frac{1}{N_n.M_n}\log|S_n| \geq \varphi - \delta_n - \frac{\log 2}{M_n} \text{ on } \{a_1,\ldots,a_n\}\\
&|S_n| > 0 \text{ on } K_n.
\end{aligned}$$

The first two inequalities show the convergence of $\frac{1}{N_n.M_n}\log|S_n|$ in L^1_{loc} towards φ (c.f. lemma 15.1.7. in [Hö 85]), and the Lelong-Poincare equation then gives the convergence of $\frac{1}{N_n.M_n}[\{S_n = 0\}]$ towards T in the weak sense of currents, while the last inequality shows that $\{S_n = 0\} \subset X \setminus K_n$, and since K_n exhausts $X \setminus \operatorname{Supp} T$, this gives the convergence of $\{S_n = 0\}$ towards $\operatorname{Supp} T$ in the Hausdorff metric.

We construct now the sections S_n. From now on, n is fixed and we might not mention the subscript. We fix an open covering $\{U_\alpha\}$ of X which is fine enough s.t. $\forall 1 \leq i \leq n$, $\exists! a_i \in U_{\alpha_i}$ and $L_{|U_{\alpha_i}}$ is trivial.

Since ψ is smooth in a neighborhood of $\operatorname{Supp} T$, and $dd^c\psi > 0$ on $\operatorname{Supp} T$, there are holomorphic polynomials P_i s.t. $\psi_{\alpha_i}(x) - \Re(P_i)(x) \geq c_i d^2_{eucl}(a_i, x)$, in a neighborhood W_i of a_i, $W_i \subset U_{\alpha_i}$, for some strictly positive constants c_i. We choose the W_i's small enough so that $W_i \cap U_\beta = \emptyset$, $\forall \beta \neq \alpha_i$.

Let $\chi_i \in \mathcal{C}^\infty_0(W_i)$ with $0 \leq \chi_i \leq 1$, and $\chi_i \equiv 1$ in a neighborhood of a_i. We define smooth sections f_i of L^{NM} by $f_i^\alpha = 0$ if $\alpha \neq \alpha_i$ and $f_i^{\alpha_i} = \chi_i e^{NP_i}$ (N is an integer to be chosen later).

Let χ be a test function in a neighborhood of $K' = \{|h|e^{-\psi} \geq 1\}$ $(0 \leq \chi \leq 1$ and $\chi \equiv 1$ in a neighborhood of $K')$, s.t $\operatorname{Supp}\chi$ is disjoint from the supports of the χ_i's.

Set $u = \chi.h^N + \sum_{i=1}^n f_i$. This is a smooth global section of L^{NM} on X, hence $\overline{\partial}u$ is a smooth $\overline{\partial}$-closed $(0,1)$-form with values in L^{NM}, i.e. a smooth $\overline{\partial}$-closed $(m,1)$-form with values in $L^{NM} \otimes K_X^*$ (m is the dimension of X).

We set $N = N_1 + N_2$ where we fix $N_2 \in \mathbb{N}$ s.t $L^{N_2.M} \otimes K_X^*$ is positive and N_1 will be chosen later. Fix ω a Kähler metric on X, $\varepsilon > 0$ and G a smooth metric of $L^{N_2.M} \otimes K_X^*$ s.t $dd^cG \geq \varepsilon.\omega$. We solve $\overline{\partial}v = \overline{\partial}u$ on X with L^2 estimates associated to the metric $\theta = N_1.\psi + G$ and get

$$\int_X |v|^2 e^{-2\theta} dV_\omega \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |\overline{\partial}u|^2 e^{-2\theta} dV_\omega.$$

Since $\operatorname{Supp}\overline{\partial}\chi \subset \{|h|e^{-\psi} < 1\}$, and $\operatorname{Supp}\overline{\partial}\chi_i \subset \{|e^{MP_i}|e^{-\psi} < 1\}$, we can fix $a < 1$ s.t. $|\overline{\partial}u|^2 e^{-2N\psi} \leq C_1 a^{2N_1}$ with C_1 independent of N_1. Thus

$$\int_X |v|^2 e^{-2\theta} dV_\omega \leq C_2 a^{2N_1}.$$

We estimate now v on X. It is standard (see lemma 15.1.8 in [Hö 85]) that

$$\begin{aligned}
|v(x)|^2 &\leq C_3 \left(r^2 \sup_{B(x,r)} |\overline{\partial}v|^2 + r^{-2m} \|v\|^2_{L^2(B(x,r))} \right) \\
&\leq C_4 e^{2N\psi(x)} e^{2N_1\eta} \left[(\sup |\overline{\partial}u|^2 e^{-2N}) + \|v\|^2_\theta \right] \\
&\leq C_5 (e^\eta a)^{2N_1} e^{2N\psi(x)},
\end{aligned}$$

with C_5 independent of N_1 and where η is the uniform oscillation of ψ on the balls $B(x,r)$. Here $B(x,r)$ implicitly stands for the pull back of an euclidean ball via a coordinate chart. We choose r so that $e^\eta a < 1$ and N_1 so that $C_5(e^\eta a)^{N_1} < \frac{1}{9}$ and set $S_n = \frac{3}{4}(u - v)$. Then S_n is a holomorphic $(m,0)$-form with values in $L^{NM} \otimes K_X^*$, i.e. it is a holomorphic section of L^{NM} on X and it satisfies all our requirements. □

Remark 2.1.8 *It follows from the Borel-Weil theorem (see e.g. [Ak 95]) that a semi-positive holomorphic line bundle L on a projective algebraic homogeneous manifold X is either positive, or the pull-back p^*L' under a morphism $p : X \to Y$, where Y is a projective algebraic homogeneous manifold of lower dimension, of a positive holomorphic line bundle L' on Y. A positive closed current T of bidegree $(1,1)$ on X s.t. $[T] = c_1(L)$ thus satisfies $T = p^*T'$ for some positive closed current T' of bidegree $(1,1)$ on Y with $[T'] = c_1(L')$, and the approximation of T reduces to that of T' on Y.*

2.1.3 On a counterexample of Grauert

We explain here an example due to Grauert ([Na 63]) of a pseudoconvex domain in a complex torus which is not holomorphically convex hence not Stein. We show that there is in fact no complex hypersurface of the torus contained in this pseudoconvex domain, whereas it contains the support of a $(1,1)$-positive closed current. Finally we give an explicit example in the 2-dimensional case of this situation, where the parameters are chosen so that the torus is algebraic. This provides a counterexample to the approximation theorem of the previous section if we omit the cohomological and the positivity assumption.

Let Λ be the lattice of $\mathbb{C}^m$ generated by

$$\lambda_1 = (1, 0, \ldots, 0) \text{ and } \lambda_j = (ia_j, a_{j2}, \ldots, a_{jm}) = (ia_j, \lambda'_j),\ 2 \leq j \leq 2m$$

where $(\lambda_j)_{1\leq j\leq 2m}$ is a $\mathbb{R}$-free family in $\mathbb{C}^m \simeq \mathbb{R}^{2m}$, and $(a_j)_{2\leq j\leq 2m}$ are real constants s.t. a_2 and a_3 are $\mathbb{Z}$-independent. We denote by X the corresponding complex torus and $\pi : \mathbb{C}^m \to X = \mathbb{C}^m/\Lambda$ the canonical projection.

Consider $U_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^m \,/\, 0 < \Re(z_1) < \frac{1}{\alpha}\}$, and $D_\alpha = \pi(U_\alpha)$, where $\alpha > 1$. Set $\varphi(z) = \frac{1}{1-\alpha\Re(z_1)} + \frac{1}{\Re(z_1)}$. An easy computation shows that φ is plurisubharmonic in U_α, and it is moreover a C^∞-smooth exhaustion function for U_α. Now since φ is invariant by any element $\lambda \in \Lambda$ s.t. $\overline{\lambda + U_\alpha} \cap \overline{U_\alpha} \neq \emptyset$, φ also defines a smooth-psh exhaustion function for D_α, hence D_α is pseudoconvex.

Proposition 2.1.9 *There is no compact analytic subset of X of dimension $m-1$ contained in the domain D_α.*

Proof:

Assume the contrary and let A be such a set which, we can assume, is connected. $f(z) = \Re(z_1)$ is a well defined pluriharmonic function on D_α. If A is compact, f attains its maximum on A thus is constant on A and $A \subset \pi(\{\Re(z_1) = t\})$ for some real constant t. This necessarily means that $A \subset \pi(\{z_1 = c\})$, with equality if A is of dimension $m-1$. But since a_2 and a_3 are $\mathbb{Z}$-independent, $\pi(\{z_1 = c\})$ is dense in $\pi(\{\Re z_1 = \Re c\})$, hence it cannot be closed. A contradiction. $\square$

On the other hand, $T = dd^c(\max(\Re(z_1) - \frac{1}{2\alpha}, 0))$ is a well defined positive closed current of bidegree $(1,1)$ on X s.t. $\operatorname{Supp} T = \pi(\{\Re(z_1) = \frac{1}{2\alpha}\}) \subset\subset D_\alpha$. This current is not approximable in the sense of our theorem, since D_α is a neighborhood of $\operatorname{Supp} T$ which does not contain any hypersurface of X.

Note that there is no $\lambda > 0$ s.t. $[\lambda T] \in H^2(X, \mathbb{Z})$ since a_2 and a_3 are $\mathbb{Z}$-independent; T is moreover not cohomologous to a Kähler form (it is cohomologous to $c.\frac{i}{2} dz_1 \wedge d\bar{z}_1$) and in particular $X \setminus \operatorname{Supp} T$ is not Stein since it admits non trivial $(1,1)$-positive closed currents with compact support (any $dd^c(\max(\Re(z_1)-t,0))$, for $t \neq \frac{1}{2\alpha}$).

We exhibit now an explicit algebraic example:
Recall that a torus $\mathbb{C}^m/\Lambda$ is algebraic iff there exists $H \in GL_m(\mathbb{C})$ a positive definite hermitian matrix s.t. $\Im H(\Lambda,\Lambda) \subset \mathbb{Z}$ (see [G-H 78] p303). Let Λ be the lattice in $\mathbb{C}^2$ generated by

$$\begin{array}{cc} \lambda_1 = (1,0)\,; & \lambda_2 = (i,0)\,; \\ \lambda_3 = (i\sqrt{2},1)\,; & \lambda_4 = (0,i\sqrt{2}); \end{array}$$

and define

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

H is a hermitian matrix which satisfies

$$tr\, H = 3+\sqrt{2} > 0 \text{ and } det\, H = \sqrt{2} > 0,$$

hence it is positive definite. Of course, $\Im H(\lambda,\lambda) = 0$, $\forall \lambda \in \Lambda$, and we easily check that:

$$\begin{array}{lll} H(\lambda_1,\lambda_2) = -i & \text{and } H(\lambda_1,\lambda_3) = 0 & \text{and } H(\lambda_1,\lambda_4) = 2 \\ H(\lambda_2,\lambda_3) = 0 & \text{and } H(\lambda_2,\lambda_4) = 2i & \text{and } H(\lambda_3,\lambda_4) = -2i \end{array}$$

hence $\Im H(\Lambda,\Lambda) \subset \mathbb{Z}$ and the complex torus $X = \mathbb{C}^2/\Lambda$ is algebraic.

2.2 Rational convexity on complex manifolds

Recall that the rational hull of a compact set K of $\mathbb{C}^m$ is defined as the complement of the union of hypersurfaces of $\mathbb{C}^m$ that do not intersect K. Duval and Sibony show in [D-S 95] that one can replace the hypersurfaces in the definition by positive closed currents of bidegree $(1,1)$ in $\mathbb{C}^m$ whose support does not intersect K.

Therefore there are several natural generalizations of this notion to complex manifolds whether one considers the hull with respect to effective divisors (resp. positive divisors) or positive closed currents of bidegree $(1,1)$ (with or without cohomological restrictions). Although these notions might coincide (e.g. on $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$), most of the time they differ considerably (e.g. on abelian tori). We are going to consider the strongest notion of rational convexity (see definition 2.2.1 below) because it allows the use of L^2-techniques and it is the proper notion to consider for the generalization of the main theorem in [D-S 95] (see theorem 2.2.8 below), which was our main motivation for the study of rational convexity.

Definition 2.2.1 *Let K be a compact subset of a projective algebraic manifold X. We define the rational hull of K by*

$$r(K) := \{m \in X \,/\, \forall H \text{ positive divisor of } X,\ m \in H \Rightarrow H \cap K \neq \emptyset\},$$

and K is said to be rationally convex when $r(K) = K$.

Lemma 2.2.2

$$\begin{aligned} r(K) = \Big\{m \in X \,/\, & \left|\tfrac{f}{g}(m)\right| \leq \sup_K \left|\tfrac{f}{g}\right|,\ \forall L \in Pic(X) \text{ positive and} \\ & \forall f, g \in \Gamma(X, L) \text{ s.t. } \{g = 0\} \cap K = \emptyset \text{ and } m \notin \{f = 0\} \cap \{g = 0\}\Big\} \end{aligned}$$

therefore $r(K)$ is compact and $r(r(K)) = r(K)$.

Proof:

Let $m \notin r(K)$; since positive divisors coincide (modulo linear equivalence) with positive line bundles on a projective algebraic manifold, we can find a holomorphic section s of a positive line bundle L s.t. $s(m) = 0$ and $\{s = 0\} \cap K = \emptyset$. Since L is positive, we can find $k \geq 1$ and a holomorphic section f of L^k s.t. $f(m) \neq 0$. Set $g = s^k$; we thus have $|\frac{f}{g}(m)| = +\infty$ whereas $\sup_K |\frac{f}{g}| < +\infty$, hence $m \notin r'(K)$, where $r'(K)$ denotes the right hand side in the lemma.

Fix now $m \notin r'(K)$ and f, g holomorphic sections of a positive holomorphic line bundle L s.t. $|\frac{f}{g}(m)| > \sup_K |\frac{f}{g}|$. Either $g(m) = 0$ and we are done, or $g(m) \neq 0$ and we may consider $s = f - \frac{f}{g}(m).g$: it is a holomorphic section of L s.t. $s(m) = 0$ and $\{s = 0\} \cap K = \emptyset$. □

Example 2.2.3

i) When $X = \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ and $K \subset\subset \mathbb{C}^m \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, this coincides with the usual notion of rational convexity.

ii) $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) = \{[z_0, \ldots, z_m] \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \,/\, \frac{z_i}{z_j} \in \mathbb{R}$ whenever $z_j \neq 0\}$ is a smooth compact totally real submanifold of $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ which is rationally convex and intersects every hyperplane of $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$. Indeed let $[x] \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$; we can assume $x_0 = 1$ and $x_1 \notin \mathbb{R}$ (otherwise rotate coordinates). Consider the homogeneous polynomial of degree 2, $P_\varepsilon(z) = z_1^2 - x_1^2 z_0^2 + \varepsilon[z_2^2 + \ldots + z_m^2 - (x_2^2 + \ldots + x_m^2) z_0^2]$; clearly $P_\varepsilon(x) = 0$, but for $\varepsilon > 0$ small enough, $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \cap \{P_\varepsilon = 0\} = \emptyset$ since $x_1^2 \notin \mathbb{R}^+$.

iii) Let T be a non trivial positive closed current of bidimension $(1,1)$ on X, then its support intersects every positive divisor, hence $r(Supp T) = X$. Indeed assume θ is the current of integration along a positive divisor which does not intersect the support of T ; since θ is cohomologous to a Kähler form ω, we have $\|T\| = \int_X \omega \wedge T = \int_X \theta \wedge T = 0$, a contradiction.

2.2.1 A fundamental lemma

Lemma 2.2.4 *Let X be a projective algebraic manifold of dimension m. Let L be a positive holomorphic line bundle on X and let φ be a positive continuous metric of L on X. Let s be a holomorphic section of L defined on an open subset V of X and assume $K = \{a \in V \,/\, \|s(a)\|_\varphi = |s(a)|e^{-\varphi(a)} \geq 1\}$ is compact.*

Then K is rationally convex.

Proof:

More precisely, $a \in X \setminus K$ being fixed, we are going to construct a global holomorphic section S of L^M (M a large integer to be chosen later) s.t. $S(a) = 0$ and $\{S = 0\} \cap K = \emptyset$.

Let $\chi \in C_0^\infty(V)$ be s.t. $0 \leq \chi \leq 1$ and $\chi \equiv 1$ in a neighborhood of K, and $a \notin \operatorname{Supp}\chi$. We consider $v = \overline{\partial}(\chi s^M) = \overline{\partial}\chi . s^M$. This is a smooth $\overline{\partial}$-closed $(0,1)$-form with values in L^M or equivalently a smooth $\overline{\partial}$-closed $(m,1)$-form with values in $L^M \otimes K_X^*$.

Since L is positive, there exists $M_1 \in \mathbb{N}$ and global holomorphic sections $h_1, \dots, h_m$ of L^{M_1} which form a local coordinate system at a. More precisely, we can find the h_j's s.t. $h_j(a) = 0$ and $\bigcap_{j=1}^m \{h_j = 0\} = \{a\}$. Thus $G_1 = \frac{m}{2}\log[\sum_{j=1}^m |h_j|^2]$ is a singular metric of L^{mM_1} which is smooth in $X \setminus \{a\}$ and admits a logarithmic singularity of coefficient m at the point a.

Fix ω a Kähler metric on X. Since L is positive, there exists $M_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $L^{M_2} \otimes K_X^*$ is positive. Taking M_2 large enough, we can even assume the existence of a smooth metric G_2 of $L^{M_2} \otimes K_X^*$ s.t $\Theta_{G_2}(L^{M_2} \otimes K_X^*) := dd^c G_2 \geq \omega$.

We now solve $\overline{\partial} u = v$ on X with L^2-estimates associated to the metric $\psi = G_1 + G_2 + M_3\varphi$ of $L^M \otimes K_X^*$ ($M = mM_1 + M_2 + M_3$), which satisfies $dd^c\psi \geq \omega$. We obtain therefore a smooth section u of L^M st:

$$\int_X |u|^2 e^{-2\psi} dV_\omega \leq \int_X |v|^2 e^{-2\psi} dV_\omega,$$

where dV_ω denotes the Kähler volume element $\frac{1}{m!}\omega^m$.

Since $\chi \equiv 0$ in a neighborhood of a which is the only singularity of the metric ψ, the integral on the right hand-side is obviously convergent. Moreover, $\chi \equiv 1$ hence $\overline{\partial}\chi \equiv 0$ in a neighborhood of K, thus we can fix $\alpha \in]0,1[$ s.t. $|s|e^{-\varphi} \leq \alpha < 1$ on $\operatorname{Supp}\overline{\partial}\chi$. Hence

$$\int_X |u|^2 e^{-2\psi} dV_\omega \leq C_1 \alpha^{2M_3},$$

where C_1 is a constant independent of M_3.

Since ψ has a logarithmic singularity of coefficient $m = dim_{\mathbb{C}} X$ at the point a, we necessarily have $u(a) = 0$.

Fix $\eta > 0$ s.t $\alpha e^{\eta} < 1$. Fix $r > 0$ s.t. $\chi \equiv 1$ on the pseudo-balls $B(y, 2r)$ (which are the pull-back of euclidean balls via a coordinate chart), $y \in K$, and the oscillation of ψ (which is uniformly continuous on any compact neighborhood of K which avoids a) is smaller than η. Observe that u is holomorphic hence $|u|^2$ is subharmonic on the pseudo-balls $B(y,r)\, y \in K$, so :

$$\begin{aligned} |u(y)|^2 &\leq C_2 \int_{B(y,r)} |u|^2 dV_\omega \\ &\leq C_2 e^{2M_3(\varphi(y)+\eta)} \int_{B(y,r)} |u|^2 e^{-2M_3\varphi} dV_\omega \\ &\leq C_3 e^{2\psi(y)} e^{2M_3\eta} \int_{B(y,r)} |u|^2 e^{-2\psi} dV_\omega \\ &\leq C_4 e^{2\psi(y)} (\alpha e^{\eta})^{2M_3}, \end{aligned}$$

where $C_4 = C_1.C_3$ is a constant independent of M_3.

Fix $\delta > 0$ s.t. $|s|^{M_1+M_2} e^{-(G_1+G_2)} \geq \delta > 0$ on K and fix M_3 large enough so that $|u|e^{-\psi} \leq \frac{\delta}{2}$.

Now we set $S = \chi.s^M - u$. This is a global holomorphic section of L^M s.t $S(a) = 0$ and $|S|e^{-\psi} \geq \frac{\delta}{2} > 0$ on K, hence $\{S = 0\} \cap K = \emptyset$ (ψ is smooth on K) and we are done. □

Theorem 2.2.5 *Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on a projective algebraic homogeneous manifold X s.t $[T] = c_1(L)$ for some positive holomorphic line bundle L. Then for every $\varepsilon > 0$, the compact set $K_\varepsilon = \{m \in X \,/\, d(m, Supp\, T) \geq \varepsilon\}$ is rationally convex.*

Proof:

Fix $\varepsilon > 0$ and $a \in X \setminus K_\varepsilon$. Using proposition 2.1.1, we can fix a neighborhood V of K_ε which does not contain a, a sufficiently big integer M, a global continuous metric ψ of L^M and a local holomorphic section h of L^M defined on V s.t $K_\varepsilon \subset F = \{m \in V \,/\, |h(m)|e^{-\psi(m)} \geq 1\} \subset\subset V$. But F is rationally convex by the previous lemma and $a \notin V$ hence we can construct a global holomorphic section S of some power of L s.t. $S(a) = 0$ and $\{S = 0\} \cap K_\varepsilon \subset \{S = 0\} \cap F = \emptyset$. □

Remark 2.2.6 *If $T = dd^c \max(\Re z_1, c)$ in the example 2.1.3, $X \setminus Supp\, T$ cannot be exhausted by rationally convex compact sets, since it contains non trivial positive closed currents with compact support (see example 2.2.3.iii).*

2.2.2 Rational convexity of totally real submanifolds

Proposition 2.2.7 *Let X be a projective algebraic manifold equipped with a Kähler metric ω. Let K be a compact subset of X.*

i) For every $a \notin r(K)$, there exists a positive closed current T of bidegree $(1,1)$ on X which admits a continuous potential and s.t. T is smooth and strictly positive at a, T vanishes in a neighborhood of $r(K)$ and moreover $[T] \in H^2(X,\mathbb{Z})$.

ii) For every $\varepsilon > 0$ and every fixed neighborhood V of $r(K)$, we can find a smooth $(1,1)$-form ω_ε which satisfies the following properties:

a) $\omega_\varepsilon \geq \omega$ *in* $X \setminus V$

b) $\omega_\varepsilon \equiv 0$ *in a neighborhood of* $r(K)$

c) $\omega_\varepsilon \geq -\varepsilon.\omega$ *in* V

d) $[\omega_\varepsilon] \in H^2(X,\mathbb{Z})$.

Proof:

i) Let $a \in X \setminus r(K)$. There exists a global holomorphic section s of a positive holomorphic line bundle L on X s.t. $s(a) = 0$ and $\{s = 0\} \cap K = \emptyset$, hence $\{s = 0\} \cap r(K) = \emptyset$ since $r(r(K)) = r(K)$. Let G be a smooth metric of L on X s.t. $dd^cG > 0$. Changing s in $\lambda.s$ for some large real positive constant λ if necessary, we can assume $|s|e^{-G} > 1$ on $r(K)$. Consider $\psi = \max(\log|s|, G)$. This is a well defined continuous positive metric of L on X s.t. $\psi \equiv G$ in a neighborhood of a and $\psi \equiv \log|s|$ in a neighborhood of $r(K)$. Therefore $T = dd^c\psi$ satisfies all our requirements since moreover $[T] = [dd^c\psi] = c_1(L) \in H^2(X,\mathbb{Z})$.

ii) Since $X \setminus V$ is compact, we can find a finite number of points a_j s.t. $T = \sum T_{a_j}$ is a $(1,1)$-positive closed current which is strictly positive in $X \setminus V$, vanishes in a neighborhood of $r(K)$ and has integer class. Since moreover T admits a continuous potential, we can use a regularization theorem due to Richberg [Ri 68] to approximate T by smooth forms with small negative part to obtain what we need. □

Recall that a submanifold S of X is totally real if $\forall x \in S$, the real tangent space $T_x^{\mathbb{R}}(S)$ of S at x contains no complex line. We show now that a compact totally real submanifold of X is rationally convex iff it is isotropic for some Hodge form (i.e. a Kähler form whose cohomology class belongs to $H^2(X,\mathbb{Z})$). More precisely, we have the following

Theorem 2.2.8 *Let S be a smooth compact totally real submanifold of a projective algebraic manifold X. The following are equivalent:*

i) S is rationally convex.

ii) There exists a smooth Hodge form θ for X s.t. $j^*\theta = 0$,

where $j : S \to X$ denotes the inclusion map.

Proof:

i) $\Rightarrow$ *ii)* Since S is smooth and totally real, there exists a positive function ρ which is smooth and strictly plurisubharmonic in a neighborhood of S and s.t. $S = \rho^{-1}(0)$ and $\nabla\rho = 0$ on S. Indeed S can be defined as the zero set of a finite number of smooth globally defined funtions g_i, then $\rho := \sum g_i^2$ will be strictly psh in a neighborhood of S since S is totally real. Set $S_\delta = \{m \in X \,/\, \rho(m) < \delta\}$ and fix $\delta > 0$ small enough.

Fix $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(S_{2\delta})$ with $0 \leq \chi \leq 1$ and $\chi \equiv 1$ in a neighborhood of $\overline{S_\delta}$ and define $\omega_1 = dd^c(\chi.\rho)$. Fix a Kähler metric ω on X and a positive integer A s.t. $\omega_1 \geq -A.\omega$ on X and $\omega_1 \geq \frac{1}{A}\omega$ on $\overline{S_\delta}$.

We can use proposition 2.2.7 with $V = S_\delta$, $\varepsilon = \frac{1}{4A^2}$ and the fact that $r(S) = S$ to construct a smooth $(1,1)$-form ω_2 which satisfies:

$$
\begin{aligned}
&a)\, \omega_2 \geq \omega \text{ in } X \setminus S_\delta\\
&b)\, \omega_2 \equiv 0 \text{ in a neighborhood of S}\\
&c)\, \omega_2 \geq -\frac{1}{4A^2}\omega \text{ in } S_\delta\\
&d)\, [\omega_2] \in H^2(X, \mathbb{Z}).
\end{aligned}
$$

Consider now $\theta = \omega_1 + 2A\omega_2$. This is a smooth strictly positive $(1,1)$-form on X s.t. $j^*\theta = j^*\omega_1 = j^*(dd^c\rho) = d(j^*d^c\rho) = 0$ since the gradient of ρ vanishes on S. Furthermore $[\theta] \in H^2(X,\mathbb{Z})$ since $[\omega_1] = 0$, hence θ is the desired Hodge form.

ii) $\Rightarrow$ *i)* There exists a positive holomorphic line bundle L on X s.t. $c_1(L) = [\theta]$. We need the following

Lemma 2.2.9 *There exists a Stein neighborhood V of S and an integer k s.t. ${L^k}_{|V}$ is trivial.*

We show how the lemma implies the theorem.
We can assume $k = 1$, therefore positive metrics of L define psh functions on V. We only need to follow the corresponding proof in [D-S 95], where the psh functions are replaced by positive metrics of the line bundles L^M, which can be viewed as functions on V.

Starting with a smooth strictly positive metric φ of L with $j^*(dd^c\varphi) = 0$, we define a small perturbation $\varphi_\varepsilon = \varphi + \sum_{j=1}^p \varepsilon_j\psi_j$ which is again a strictly positive metric of L with ψ_j smooth functions with compact support in V and such that $d^cM\varphi_\varepsilon$ has periods in $2\pi\mathbb{Z}$ on S. The latter allows us to construct a smooth function h on S with values in $\mathbb{R}$ that we extend locally to V in a function h_s (which is equivalently a smooth section of L^M above V) satisfying

$$
\begin{aligned}
&a)\, \overline{\partial} h_s = 0 \text{ to order s on } S\\
&b)\, M\varphi_\varepsilon - \log|h_s| \text{ vanishes to order 2 on} S.
\end{aligned}
$$

Using lemma 3.3 in [D-S 95] we can modify $M\varphi_\varepsilon$ locally in V and obtain a new strictly positive smooth metric $\tilde{\varphi}$ of L^M which, together with h_s, fulfils the hypotheses of lemma 3.2 in [D-S 95]. As the construction of the holomorphic section h of L^M on V only requires the solution of the $\overline{\partial}$-equation on a Stein neighborhood S_δ of S, and as L is trivial there, we can again use the same construction as in [D-S 95] and then apply our lemma 2.2.4 to conclude that S is rationally convex. □

There remains to prove lemma 2.2.9.

Proof of lemma 2.2.9:

Let $V = S_\delta$ be a tubular neighborhood of S; then $H^2(V,\mathbb{Z}) \simeq H^2(S,\mathbb{Z})$. Since V is Stein, $Pic(V) \simeq H^2(V,\mathbb{Z})$. But $c_1(L_{|S}) = [j^* dd^c\varphi] = [0]$, hence $c_1(L_{|V}) = [0]$, i.e. the image of the first Chern class of L in $H^2_{dR}(V,\mathbb{R})$ via the morphism induced by the canonical inclusion $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ is trivial. As we have already explained in the proof of lemma 2.1.2, this implies that $L^k_{|V}$ is trivial for some integer k. □

2.3 T-polynomial convexity

There is no intrinsic definition of polynomial convexity on complex manifolds extending the usual notion in $\mathbb{C}^m$. Indeed, $K = \{[1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \,/\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ is polynomially convex when viewed as a subset of $\mathbb{C}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{z_0 = 0\}$, but it is not polynomially convex as a subset of the other chart $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{z_1 = 0\} \simeq \mathbb{C}^2$.

However we define a notion of polynomial convexity relative to a fixed positive closed current T of bidegree $(1,1)$ on a complex manifold X. It is an interesting tool to describe the convexity properties of $X \setminus \operatorname{Supp} T$ (see paragraph 2.3.1) and there is an analogue of the classical Oka principle when T is the current of integration along a positive divisor of a projective algebraic manifold X (see paragraph 2.3.3). The case of Stein manifold will be considered in paragraph 2.5.1.

Definition 2.3.1 *Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on a complex manifold X, and let K be a compact subset of $X \setminus \operatorname{Supp} T$.*
We define the T-polynomial hull of K by

$$\widehat{K}^T := \left\{ x \in X \setminus \operatorname{Supp} T \,/\, f(x) \leq \sup_K f,\ \forall f \in \mathcal{C}_T(X) \text{ s.t. } dd^c f \geq -T \right\},$$

where $\mathcal{C}_T(X)$ denotes the set of functions $f \in L^1(X)$ s.t. $\exp(f + \varphi)$ is continous whenever φ is a local potential of T. Note in particular that any f in $\mathcal{C}_T(X)$ is lower semi-continuous.

The compact K is said to be T-polynomially convex when $\widehat{K}^T = K$.

We list a few elementary properties of these hulls:

i) $\widehat{K}^T$ is closed in $X \setminus \mathrm{Supp}\, T$ and $\widehat{\widehat{K}^T}^T = \widehat{K}^T$.

ii) $\forall \lambda > 0$, $\widehat{K}^{\lambda T} = \widehat{K}^T$.

iii) If $T = T_1 + T_2$ is a sum of two positive closed current of bidegree $(1,1)$ then $\widehat{K}^T \subset \widehat{K}^{T_1} \cap \widehat{K}^{T_2}$.

iv) When $X = \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, $T = [\{z_0 = 0\}]$ and K is a compact subset of $\mathbb{C}^m = \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \setminus \{z_0 = 0\}$, then $\widehat{K}^T$ is the usual polynomial hull of K in $\mathbb{C}^m$. Indeed, a function $f \in \mathcal{C}_T(X)$ defines a psh log-homogeneous function in $\mathbb{C}^{m+1}$ via $\varphi(z) = f([z]) + \log|z_0|$ hence $\varphi_{|\{z_0=1\}} = f_{|\mathbb{C}^m} \in PSH(\mathbb{C}^m)$ and is s.t. $f(\zeta) \leq \log^+|\zeta| + C$; conversely any function $\psi \in PSH(\mathbb{C}^m)$ with log-growth defines a log-homogeneous psh function in $\mathbb{C}^{m+1}$ setting $\varphi(z) = \psi(z_1/z_0, \ldots, z_m/z_0) + \log|z_0|$ if $z_0 \neq 0$ and $\varphi(0,\zeta) = \limsup_{z \to (0,\zeta),\, z_0 \neq 0} \varphi(z)$. The function φ corresponds to a function $f \in \mathcal{C}_T(X)$ via $f([z]) = \varphi(z) - \log|z_0|$. Thus $\widehat{K}^T$ equals the hull of K with respect to the psh functions of log-growth in $\mathbb{C}^m$, and it is standard that this hull is exactly the polynomial hull of K (see also the second assertion of proposition 2.3.2 below).

Proposition 2.3.2 *Let X be a complex manifold.*

When $[T]$ is equal to the first Chern class $c_1(L)$ of a holomorphic line bundle L on X, then

$$\widehat{K}^T = \left\{ x \in X \setminus Supp\, T \;/\; (\psi - \varphi)(x) \leq \sup_K (\psi - \varphi),\ \forall \psi \in \mathcal{P}_c(X, L) \right\},$$

where $\mathcal{P}_c(X,L)$ denotes the set of positive metrics ψ of L on X s.t. e^ψ is continuous, and φ is a positive metric of L on X s.t. $dd^c\varphi = T$.

Moreover if we define

$$p_T(K) = \left\{ x \in X \setminus Supp\, T \;/\; |h|_{k\varphi}(x) \leq \sup_K |h|_{k\varphi},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall h \in \Gamma(X, L^k) \right\},$$

then $\widehat{K}^T \subset p_T(K)$, with equality if L is positive and X is a projective algebraic homogeneous manifold (resp. a Stein manifold).

Proof:

Fix $\mathcal{U}_\alpha$ an open covering of X trivializing L. If $[T] = c_1(L)$, then there exists a positive metric $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$ of L on X s.t. $dd^c\varphi = T$, and two such metrics (with respect to this covering) only differ by a pluriharmonic function which is globally well defined on X, thus the definition of the right hand side is independent of the choice of the potential φ of T. Let $\psi = \{\psi_\alpha\}$ be a positive metric of L s.t. e^ψ is continuous, then $f = \psi - \varphi$ is a globally well defined function on X which lies in $\mathcal{C}_T(X)$ and s.t. $dd^c f \geq -dd^c\varphi = -T$.

Conversely, if $f \in \mathcal{C}_T(X)$ is s.t. $dd^c f \geq -T$, then $\psi = \{f + \varphi_\alpha\}$ is a positive metric of L on X s.t. e^ψ is continuous; the first assertion follows.

Let $k \in \mathbb{N}$ and $h \in \Gamma(X, L^k)$, then $\psi = \frac{1}{k}\log|h|$ defines a positive metric of L on X s.t. e^{ψ} is continuous, hence $\widehat{K}^T \subset p_T(K)$.

Conversely let $a \in (X \setminus \operatorname{Supp} T) \setminus \widehat{K}^T$; there exists $\psi \in \mathcal{P}_c(X, L)$ s.t. $(\psi - \varphi)(a) > \sup_K(\psi - \varphi)$. If X is homogeneous we can assume ψ is smooth (otherwise replace ψ by its regularized metric ψ^{ε} for $\varepsilon > 0$ small enough). If moreover L is positive, we can assume ψ has strictly positive curvature, replacing if necessary ψ by $(1-\eta)\psi + \eta G$, where G is a smooth metric of L s.t. $dd^cG > 0$ and $\eta > 0$ is small enough.

Since $dd^c\psi(a) > 0$, there exists a holomorphic polynomial P and a positive constant c s.t. $\psi_{\alpha}(x) - \Re(P)(x) \geq cd(x,a)^2$ in a neighborhood of $a \in \mathcal{U}_{\alpha}$. Let χ be a positive test function defined in this neighborhood, s.t. $\chi \equiv 1$ in a smaller neighborhood of a and $0 \leq \chi \leq 1$. If X is projective algebraic we can solve $\overline{\partial}v = \overline{\partial}(\chi e^{NP})$ with L^2-estimates associated to the weight $N\psi$ and construct, in the same vein as what has been done in the proof of theorem 2.1.6, a holomorphic section h of L^N on X s.t. $|h|e^{-N\psi} \leq 1$ on X and $|h(a)|e^{-N\psi(a)} \geq 1/2$. Thus for a choice of N large enough, we get

$$\left(\frac{1}{N}\log|h| - \varphi\right)(a) > \sup_K\left(\frac{1}{N}\log|h| - \varphi\right),$$

hence $a \notin p_T(K)$. The Stein case will be considered in proposition 2.5.3. □

2.3.1 Steinness of $X \setminus \operatorname{Supp} T$

Definition 2.3.3 *T is said to satisfy condition (C) if*

$$\forall K \subset\subset X \setminus \mathit{Supp}\, T,\ \ \widehat{K}^T \subset\subset X \setminus \mathit{Supp}\, T.$$

Example 2.3.4

i) When X is homogeneous, the regularization process insures that every positive closed current of bidegree $(1,1)$ s.t. $[T] = c_1(L)$ satisfies condition (C). Indeed $T = dd^c\varphi$ for some positive metric of L, and the regularized metrics φ^{ε} of φ (see Appendix) satisfy $\varphi^{\varepsilon} - \varphi \equiv 0$ in a neighborhood of K if $\varepsilon > 0$ is small enough whereas $\varphi^{\varepsilon} - \varphi > 0$ in a neighborhood of Supp T.

ii) When $T = [\{s = 0\}]$ where $s \in \Gamma(X, L)$ and L is semi-positive, then T satisfies condition (C). Indeed L admits a positive continuous metric ψ on X, hence ψ is locally bounded on Supp T whereas $\log|s| \equiv -\infty$ on Supp T.

iii) If $\pi : \tilde{X} \to X$ is the blow-up at a point p of a compact complex manifold X ($\dim_{\mathbb{C}}(X) \geq 2$), and if T is the current of integration along the exceptional divisor $E = \pi^{-1}(p)$, then $\forall K \subset\subset \tilde{X} \setminus \mathit{Supp}\, T$, $\widehat{K}^T = \tilde{X} \setminus \mathit{Supp}\, T$, since every function $f \in \mathcal{C}_T(\tilde{X})$ s.t. $dd^cf \geq -T$ defines a plurisubharmonic function in $\tilde{X} \setminus E \simeq X \setminus \{p\}$, hence is constant; thus $T = [E]$ does not satisfy condition (C).

Lemma 2.3.5 *If $K = \widehat{K}^T$, then for any open neighborhood V of K, there exists a non negative function $f \in L^1(X)$ s.t. $f + \varphi$ is upper semi-continuous whenever φ is a local potential of T and moreover $dd^c f \geq -T$ on X with $f \equiv 0$ on K and $f > 0$ in $X \setminus V$.*

Proof:

Let $a \in (X \setminus \operatorname{Supp} T) \setminus K = (X \setminus \operatorname{Supp} T) \setminus \widehat{K}^T$, then there exists $f_a \in \mathcal{C}_T(X)$ s.t. $dd^c f_a \geq -T$ and $f_a(a) > 0 \geq \sup_K f_a$. Since f is lower semi-continuous at a, $f > 0$ in a small ball $B(a, \varepsilon_a)$.

We can consider $f_a^+ = \max(f_a, 0)$. Then $f_a^+ \equiv 0$ on K and $f_a^+ + \varphi$ is upper semi-continuous (u.s.c.) as a maximum of two u.s.c. functions. Moreover $f_a^+ = \max(f_a + \varphi, \varphi) - \varphi$ hence $dd^c f_a^+ \geq -T$ on X.

Now we can cover $X \setminus V$ by a finite number of balls $B(a_i, \varepsilon_{a_i})$ and consider $f = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} f_{a_i}^+$ to conclude. □

Corollary 2.3.6 *If T satisfies condition (C), then $X \setminus \operatorname{Supp} T$ admits a psh exhaustion function.*

Proof:

By hypothesis, we can exhaust $X \setminus \operatorname{Supp} T$ by an increasing sequence of compact sets K_j that satisfy $\widehat{K_j}^T = K_j$ and $K_j \subset (K_{j+1})^\circ$.

By the previous lemma, we can find for each j, a non negative function f_j which is psh in $X \setminus \operatorname{Supp} T$, identically 0 on K_j and positive outside $(K_{j+1})^\circ$. Multiplying by some large constant, we can even assume $f_j \geq 2^j$ on $K_{j+2} \setminus (K_{j+1})^\circ$. Therefore $f = \sum_{j \geq 0} f_j$ is a psh exhaustion function for $X \setminus \operatorname{Supp} T$ (the sum is finite on each compact set). □

Theorem 2.3.7 *Let Ω be a complex manifold which admits a psh exhaustion function. Then Ω is Stein iff there is no non trivial positive dd^c-closed current of bidimension $(1,1)$ with compact support in Ω.*

Proof:

If Ω is Stein, it admits a smooth strictly psh exhaustion function φ. Let S be a positive current of bidimension $(1,1,)$ with compact support in Ω and s.t. $dd^c S = 0$. Then $dd^c \varphi \wedge S$ is a well defined positive measure which measures the mass of S. Stokes theorem gives

$$\int_\Omega dd^c \varphi \wedge S = \int_\Omega \varphi dd^c S = 0,$$

hence $S \equiv 0$.

Conversely, let f be a psh exhaustion function of Ω, and define $\Omega_j = \{x \in \Omega \,/\, f(x) < j\}$. We set

$$\mathcal{H} = \{S \text{ current of bidimension } (1,1) \text{ on } \Omega \text{ s.t. } dd^c S = 0\},$$

and

$$\mathcal{K}_j = \left\{S \geq 0 \text{ current of bidim. } (1,1) \text{ on } \Omega \text{ s.t. } \|S\| = 1 \text{ and } \operatorname{Supp} S \subset \overline{\Omega_j}\right\}.$$

Then $\mathcal{H}$ is a hyperplane of the set $\mathcal{T}_{(1,1)}(\Omega)$ of currents of bidimension $(1,1)$ on Ω and $\mathcal{K}_j$ is a convex compact subset of $\mathcal{T}_{(1,1)}(\Omega)$.

We assume that $\forall j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}_j = \emptyset$; the theorem of Hahn-Banach insures the existence of a linear functional Φ_j on $\mathcal{T}_{(1,1)}(\Omega)$ s.t. $\Phi_j(\mathcal{H}) = 0$ and $\Phi_j(\mathcal{K}_j) \geq c_j > 0$. This functional is defined by a smooth $(1,1)$-form ω_j, s.t. $\Phi_j(S) = \int_X S \wedge \omega_j$. Since it belongs to $\mathcal{H}^\perp = \overline{\{dd^c g\}}$, we can write $\omega_j = \lim dd^c g_k$; thus for k_j large enough, $\varphi_j = g_{k_j}$ is a smooth function on X s.t. $\int_\Omega S \wedge dd^c \varphi_j > 0$ for every $S \in \mathcal{K}_j$, since $\mathcal{K}_j$ is compact, hence φ_j is strictly psh in a neighborhood of $\overline{\Omega_j}$.

Without loss of generality we can assume $-\frac{3}{4} \leq \varphi_j \leq -\frac{1}{2}$ on $\overline{\Omega_j}$ (otherwise replace φ_j by $A_j \varphi_j + B_j$ for some properly chosen constants A_j and B_j). Consider now

$$\psi_j = \begin{cases} \varphi_j & \text{in } \Omega_{j-1} \\ \max(\varphi_j, f - j) & \text{in } \Omega_j \setminus \Omega_{j-1} \\ f - j & \text{in } \Omega \setminus \Omega_j \end{cases}$$

This is clearly a psh function in Ω which is strictly psh in Ω_{j-1} and moreover $\psi_j \geq -\frac{3}{4}$ in Ω and $\psi_j \leq 0$ in Ω_j.

We set finally $\psi = f + \sum_{j \geq 1} 2^{-j} \psi_j$. Then ψ is an exhaustion function for Ω which is strictly psh; it follows from a result of Fornaess-Narasimhan ([F-N 80]) that Ω is Stein. □

Theorem 2.3.8 *Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on a compact Kähler manifold X. Assume T is cohomologous to a Kähler form and satisfies condition (C), then $X \setminus \operatorname{Supp} T$ is Stein.*

Proof:

Let ω be a Kähler form cohomologous to T. Since T is real and X is Kähler, $T - \omega$ is in fact dd^c-exact; there exists a distribution f on X s.t. $T = \omega - dd^c f$. Note that f is a smooth strictly psh function in $X \setminus \operatorname{Supp} T$.

Let S be a positive dd^c-closed current of bidimension $(1,1)$ with compact support in $X \setminus \operatorname{Supp} T$. Stokes theorem gives

$$\int_X \omega \wedge S = \int_{X \setminus \operatorname{Supp} T} \omega \wedge S = \int_{X \setminus \operatorname{Supp} T} dd^c f \wedge S = \int_{X \setminus \operatorname{Supp} T} f\, dd^c S = 0,$$

hence $S \equiv 0$.

Now T satisfies condition (C) thus $X \setminus \operatorname{Supp} T$ admits a psh exhaustion function (corollary 2.3.6) ; therefore $X \setminus \operatorname{Supp} T$ is Stein by the previous theorem. □

Remark 2.3.9 *This can be seen as a generalization of the standard result: $X \setminus \{s = 0\}$ is Stein, when s is a holomorphic section of some positive holomorphic line bundle on X.*

2.3.2 Oka principle

In this section we want to investigate the case where T is the current of integration along a positive divisor of a projective algebraic manifold X.

Let L be a positive holomorphic line bundle on X, $s \in \Gamma(X, L)$ and $T = [\{s = 0\}]$. By the Kodaira embedding theorem, there exists $k \in \mathbb{N}$ and a basis $(s_0 = s^k, s_1, \ldots, s_N)$ of $\Gamma(X, L^k)$ s.t. the map

$$\begin{array}{rcl} \Phi : X & \to & \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \\ x & \mapsto & [s_0(x), \ldots, s_N(x)] \end{array}$$

defines a holomorphic embedding of X onto a subvariety V of $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ with $L = \Phi^*(\mathcal{O}(1)_{|V})$. If K is a compact subset of $X \setminus \operatorname{Supp} T$, $\Phi(K)$ thus is a compact subset of $V \setminus \{z_0 = 0\} \subset \mathbb{C}^N$ and one easily checks that

$$\Phi^{-1}(\widehat{\Phi(K)}) = p_T(K) \subset\subset X \setminus \operatorname{Supp} T,$$

where $\widehat{\Phi(K)}$ denotes the usual polynomial hull of $\Phi(K)$ in $\mathbb{C}^N$. Indeed every holomorphic section of L^p defines a holomorphic section of $\mathcal{O}(p)_{|V}$ that extends to a holomorphic section of $\mathcal{O}(p)$ on $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ and conversely.

If f is a function holomorphic in a neighborhood of $p_T(K)$ then $F = f \circ \Phi^{-1}$ is a function holomorphic in a neighborhood of $\widehat{\Phi(K)}$ in V that extends to a function holomorphic in a neighborhood of $\widehat{\Phi(K)}$ in $\mathbb{C}^N$. The classical theorem of Oka-Weil asserts that F is a uniform limit on $\widehat{\Phi(K)}$ of polynomials in z_i/z_0, $1 \leq i \leq N$. Therefore we have the following

Theorem 2.3.10 (Oka-Weil) *Let $T = [\{s = 0\}]$ with $s \in \Gamma(X, L)$, L positive. Let K be a compact subset of $X \setminus \operatorname{Supp} T$. Then every function holomorphic in a neighborhood of $p_T(K)$ is a uniform limit on $p_T(K)$ of polynomials in s_i/s^k where $s_i \in \Gamma(X, L)$ (and k is an integer s.t. L^k is very ample), i.e. of meromorphic functions of the type h/s^p where $h \in \Gamma(X, L^p)$.*

Definition 2.3.11 *Let $L \in Pic(X)$. We say that $(H_t)_{t \geq t_0}$ is a continuous L-family of algebraic hypersurfaces if the following holds:*

i) $\forall t \geq t_0$, there exists $d_t \in \mathbb{N}$ and $s_t \in \Gamma(X, L^{d_t})$ s.t $H_t = \{s_t = 0\}$;
ii) $t \mapsto d_t$ is bounded on each compact set;
iii) $(t, x) \mapsto s_t(x)$ is continuous on $[t_0, +\infty[\times X$.
Moreover the family is said to join x to H_∞ avoiding a compact set K if
i) $x \in H_{t_0}$ and $\forall t \geq t_0$, $H_t \cap K = \emptyset$;
ii) $\sup_{x\in H_t} d(x, H_\infty) \to 0$ as $t \to +\infty$.

Definition 2.3.12 *Let K be a compact subset of $X \setminus \{s = 0\}$, where $s \in \Gamma(X, L)$, L positive, and set $T = [\{s = 0\}]$. The Oka-hull $O_T(K)$ of K relative to T is defined by saying that a point $x \in X$ lies in $X \setminus O_T(K)$ iff there exists a continuous L-family of algebraic hypersurfaces (H_t) joining x to $H_\infty = \{s = 0\}$ avoiding K.*

Theorem 2.3.13 (Oka principle)
Let $s \in \Gamma(X, L^d)$, whith $L \in Pic(X)$ positive and set $T = [\{s = 0\}]$. Then
$$\forall K \subset\subset X \setminus Supp\, T, \;\; p_T(K) = O_T(K).$$

Proof:
Let $x \in (X \setminus \operatorname{Supp} T) \setminus p_T(K)$; there exists $k \in \mathbb{N}$ and $h \in \Gamma(X, L^k)$ s.t. $h/s^k(x) = 1 > \sup_K |h/s^k|$. Therefore $(H_t := \{h - ts^k = 0\})_{t\geq 1}$ is a continuous L-family of algebraic hypersurfaces which joins x to H_∞ avoiding K, hence $x \notin O_T(K)$.

Conversely, let $x \in p_T(K)$ and assume there exists a continuous L-family of algebraic hypersurfaces $(H_t = \{s_t = 0\})_{t\geq 1}$ that joins x to $H_\infty = \{s = 0\}$ avoiding K.

Since $p_T(K)$ is compact, there exists $r \geq 1$ s.t. $H_r \cap p_T(K) \neq \emptyset$ and $\forall t > r$, $H_t \cap p_T(K) = \emptyset$.

Since (H_t) avoids K, the function $(t, x) \mapsto f_t(x) = \frac{s^{d_t}}{s_t^d}(x)$ is bounded on $[r, r + 1] \times K$.

Now let $y \in p_T(K) \cap H_r$; $|f_r(y)| = +\infty$ hence by continuity of H_t, $|f_t(y)| \to +\infty$ as $t \to r^+$. Thus there exists $t > r$ s.t. $|f_t(y)| > \sup_K |f_t|$. Since $H_t \cap p_T(K) = \emptyset$, f_t is holomorphic in a neighborhood of $p_T(K)$ hence we can approximate it uniformly on $p_T(K)$ by functions of the type h/s^p with $h \in \Gamma(X, L^p)$, thus y cannot lie in $p_T(K)$, a contradiction. □

2.4 Approximation on projective manifolds

In this section we wish to extend theorem 2.1.6 to the case of non homogeneous projective algebraic manifolds. We need to make an extra assumption (T satisfies condition (C)) which is always satisfied in the homogeneous case; on the other hand we obtain a control on the Lelong numbers of the approximants (such a control was obtained by Demailly in [De

93]) and this gives a refinement of theorem 1.6 in the homogeneous case (see corollary 4.3). Recall that by a theorem of Siu [Siu 74], the level sets $E_c(T) = \{x \in X \,/\, \nu(T,x) \geq c\}$ of Lelong numbers of a positive closed current T on X are proper closed analytic subsets of X for each $c > 0$.

Theorem 2.4.1 *Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on a projective algebraic manifold X. Assume $[\lambda T] = c_1(L)$ for some holomorphic line bundle L which we assume is positive. Assume $T = [H] + R$, where $H = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j [Z_j]$ ($\forall j$, λ_j is a positive constant and Z_j is an irreducible algebraic hypersurface of X) and R is a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on X s.t. the level sets of Lelong numbers of R, $E_c(R) = \{x \in X \,/\, \nu(R,x) \geq c\}$, are of codimension greater or equal than 2. Assume moreover that T satisfies condition (C).*
Then there exists $N_j \in \mathbb{N}$ and $s_j \in \Gamma(X, L^{N_j})$ s.t.
i) $T_j = \frac{1}{N_j}[\{s_j = 0\}] \longrightarrow T$ in the weak sense of currents;
ii) $\{s_j = 0\} \longrightarrow \operatorname{Supp} T$ in the Hausdorff metric;
iii) $\forall x \in X$, $\nu(T_j, x) \longrightarrow \nu(T,x)$.

We first need a proposition:

Proposition 2.4.2 *Under the hypotheses of the theorem (with $\lambda = 1$), let φ be a positive metric of L which is a potential for T, let K be a compact subset of $X \setminus \operatorname{Supp} T$ s.t. $K = \widehat{K}^T$ and fix ω a Kähler form on X.*

Then for every open set V s.t. $K \subset V \subset\subset X \setminus \operatorname{Supp} T$ and every $\delta > 0$, we can find $M \in \mathbb{N}$ and construct a positive metric ψ of L^M on X and a section $h \in \Gamma(V, L^M)$ s.t.
i) $K \subset \{m \in V \,/\, |h|_\psi \geq 1\} = \{m \in V \,/\, |h|_\psi \equiv 1\} \subset\subset V$,
ii) $\|\psi/M - \varphi\|_{L^\infty(\overline{V})} \leq \delta$ and $\|\psi/m - \varphi\|_{L^1(X)} \leq \delta$,
iii) $\sup_{x\in X} |\nu(\psi/M, x) - \nu(\varphi, x)| \leq \delta$,
iv) $dd^c\psi \geq \varepsilon.\omega$ in a neighborhood of $\operatorname{Supp} T$ for some constant $\varepsilon > 0$,
v) ψ is continuous in $X \setminus \operatorname{Supp} T$ and smooth on a dense subset of $X \setminus E_{c_0}(T)$ for some $c_0 > 0$.

Proof:

Following Demailly, we set $\varphi_s = \frac{1}{s} \sup_{1\leq j\leq N}[\log |f_j|]$ where $(f_1, \ldots, f_N)$ is an orthonormal basis of sections of $\Gamma(X, L^s)$ with finite L^2-norm $\int_X \|f\|^2_{s\varphi} dV_\omega$. It is proved in [De 93] (proposition 9.1) that:

a) $\|\varphi_s - \varphi\|_{L^1(X)} \to 0$ as $s \to +\infty$ and the convergence is uniform on compact subsets of $X \setminus \{x \in X \,/\, \varphi \text{ is not continuous at } x\}$, hence in particular on compact subsets of $X \setminus \operatorname{Supp} T$;

b) $\nu(T,x) - m/s \leq \nu(T_s, x) \leq \nu(T,x)$, $\forall x \in X$, where $m = \dim_{\mathbb{C}} X$ and $T_s = dd^c\varphi_s$.

Clearly $E^+(T_s) := \{x \in X \,/\, \nu(T_s, x) > 0\}$ is equal to $E_{1/s}(T_s) = \{x \in X \,/\, \nu(T_s, x) \geq 1/s\} \subset E_{1/s}(T)$ and φ_s is smooth on a dense subset of $X \setminus E^+(T_s)$.

Let U be a relatively compact open neighborhood of ∂V in $X \setminus \operatorname{Supp} T$ s.t. $K = \widehat{K}^T \subset\subset V \setminus \overline{U}$. Let $x \in \overline{U}$. There exists $\psi_x \in \mathcal{P}_c(X, L)$ and $\delta_x > 0$ s.t. $(\psi_x - \varphi)(x) \geq \delta_x > 0 > -\delta_x \geq \sup_K(\psi_x - \varphi)$. Since $(\psi_x - \varphi)$ is lower semi-continuous (l.s.c.) at x, $(\psi_x - \varphi) > \delta_x$ in a small ball $B(x, \varepsilon_x)$. We can cover $\overline{U}$ by a finite number of balls $B(x_i, \varepsilon_i)$ and consider $\psi_1, \ldots, \psi_p$ the corresponding metrics.

We set $\delta' = \min(\delta, \delta_1/8, \ldots, \delta_p/8)$ and we fix s large enough so that $\|\varphi_s - \varphi\|_{L^\infty(\overline{V \cap U})} < \delta'$ and $\|\varphi_s - \varphi\|_{L^1(X)} < \delta'$. Thus $\forall i = 1, \ldots, p$, $(\psi_i - \varphi_s) \geq 4\delta' > 0$ in $B(x_i, \varepsilon_i)$ and $\sup_K(\psi_i - \varphi_s) \leq -4\delta' < 0$. Therefore

$$f_s := \frac{1}{p} \sum_{i-1}^{p} \max(\psi_i - \varphi_s, 0)$$

is a non negative function in $L^1(X)$ s.t. $f_s + \varphi_s$ is u.s.c. and which satisfies $dd^c f_s \geq -T_s$ on X with $f_s \equiv 0$ on $K = \widehat{K}^T$ and $f_s \geq 4\delta' > 0$ in U.

Since T is cohomologous to a Kähler form (L is positive) and satisfies condition (C), $X \setminus \operatorname{Supp} T$ is Stein by theorem 2.3.8. We can therefore find, as in the proof of proposition 2.1.1, a relatively compact Stein open subset W of $X \setminus \operatorname{Supp} T$ that contains $\overline{V}$, and construct integers k and M_1, a small perturbation θ_λ of $k\varphi$ in W and a holomorphic function h in W s.t.

a) $L^k_{|W}$ is trivial;

b) $\|\frac{1}{k}\theta_\lambda - \varphi\|_{L^\infty(\overline{V})} < \delta'$;

c) $M_1 \theta_\lambda = \log|h|$.

Now let G be a smooth metric of L s.t. $dd^c G > 0$ on X and consider

$$\psi = \begin{cases} \max\left(M_1.\theta_\lambda; M[(1-\eta)(f_s + \varphi_s) + \eta G - 2\delta']\right) & \text{in } V \\ M[(1-\eta)(f_s + \varphi_s) + \eta G - 2\delta'] & \text{on } X \setminus V, \end{cases}$$

where $M = k.M_1$. Then for a choice of $\eta > 0$ small enough and s large enough, ψ is a positive metric of L^M which satisfies all our requirements. □

Proof of theorem 2.4.1:

Replacing T by T/λ_j if necessary, where (λ_j) is a sequence of positive rational numbers converging to λ, we can assume $\lambda = 1$. Let K_n be a sequence of compact subsets of $X \setminus \operatorname{Supp} T$ that exhausts $X \setminus \operatorname{Supp} T$ and s.t. $\widehat{K_n}^T = K_n$. We fix $\delta_n > 0$ a sequence converging towards 0 and open neighborhoods V_n of K_n that are relatively compact subsets of $X \setminus \operatorname{Supp} T$. Using proposition 2.4.2, we construct integers M_n, positive metrics ψ_n of L^{M_n} on X and holomorphic sections h_n of L^{M_n} in V_n with the prescribed properties.

Fix (a_j) a dense sequence of points in $\operatorname{Supp} T$, s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n$ belong to $\operatorname{Supp} T \setminus E_{c_n}(T)$ where (c_n) is a sequence of positive numbers converging to 0 s.t. ψ_n is smooth and $dd^c\psi_n > 0$ at the points $a_1, \ldots, a_n$ (see iv) and v) of proposition 2.4.2).

Let (F_n) be an increasing sequence of compact subsets of $X \setminus E^+(T)$ s.t. $\bigcup F_n = X \setminus E^+(T)$ and $K_n \cup \{a_1, \ldots, a_n\} \subset F_n \subset\subset X \setminus E_{c_n}(T)$. We are going to construct for each n an integer N_n and a section $S_n \in \Gamma(X, L^{N_n \cdot M_n})$ s.t.

$$\begin{array}{ll} |S_n| e^{-N_n \psi_n} \leq 1 & \text{on } F_n \\ |S_n| e^{-N_n \psi_n} \geq 1/2 & \text{on } K_n \cup \{a_1, \ldots, a_n\} \\ \nu(\frac{1}{N_n} \log |S_n|, x) \geq (1 - 1/\sqrt{N_n}) \nu(dd^c\psi_n, x) - m/N_n, & \forall x \in E_{c_n}(dd^c\psi_n) \\ \int_X |S_n| e^{-N_n \psi_n} dV_\omega \leq C, & \end{array}$$

where C is a constant independent of n in the last inequality and $m = \dim_{\mathbb{C}} X$.

The first two inequalities, together with Lelong-Poincaré equation and ii) of proposition 2.4.2, imply that $T_n = dd^c(\frac{1}{N_n \cdot M_n} \log |S_n|)$ converges weakly towards T in $X \setminus E^+(T)$. Since $T = [H] + R$ with $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} E_c(R) \geq 2$, $\forall c > 0$, the Hausdorff dimension of $E^+(R) = E^+(T) \setminus \cup_{j=1}^p Z_j$ is less or equal than $2m - 4$ hence T_n actually converges towards T on $X \setminus \cup_{j=1}^p Z_j$ (see e.g. [F-S 95]).

One easily checks that $\forall x \in X \setminus \cup Z_j$, $\limsup \nu(T_n, x) \leq \nu(T, x)$ since $T_n \to T$ in the weak sense of currents. Therefore the third inequality together with iii) of proposition 2.4.2 insures that $\forall x \in E^+(T) \setminus \cup Z_j$, $\nu(T_n, x) \to \nu(T, x)$ hence $\forall x \in X \setminus \cup Z_j$, $\nu(T_n, x) \to \nu(T, x)$. Now $(\|T_n\|)$ is bounded by the last inequality and ii) of proposition 2.4.2, thus (T_n) admits a subsequence that converges weakly towards a positive closed current T' of bidegree $(1,1)$ on X. Clearly $T' \equiv T$ on $X \setminus \cup Z_j$ and $T' \geq T$ on $\cup Z_j$ by the third inequality, therefore $T' \equiv T$ on X since X is compact Kähler and $[T'] = [T] = c_1(L)$; thus T_n converges weakly towards T on X and $\nu(T_n, x) \to \nu(T, x)$, $\forall x \in X$.

Finally since $|S_n| > 0$ on K_n and $T_n \to T$, $\{S_n = 0\}$ converges towards $\operatorname{Supp} T$ in the Hausdorff metric.

From now on, n is fixed, and we will not mention the subscript. We proceed as in the proof of theorem 2.1.6 and construct, using i),iv),v) of proposition 2.4.2, a smooth $(m,0)$-form $u = \chi . h^N + \sum_{i=1}^n \chi_i e^{N.P_i}$ with values in $L^{N.M} \otimes K_X^*$ s.t. $|u| e^{-N.\psi} = 1$ on $K \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$ and $|u| e^{-N.\psi} < 1$ outside a neighborhood of this set. We solve $\overline{\partial} v = \overline{\partial} u$ on X with L^2-estimates associated to a weight $\theta = N_1 \psi + G$ and get an estimate

$$\int_X |v|^2 e^{-2\theta} dV_\omega \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |\overline{\partial} u|^2 e^{-2\theta} dV_\omega \leq C_1 a^{2N_1}.$$

We use now the fact that ψ is continuous on $X \setminus E_{c_n}(T)$ hence uniformly continuous on a compact neighborhood of F which is relatively compact in

$X \setminus E_{c_n}(T)$. We obtain, in the same vein as what has been done in the proof of theorem 2.1.6, a uniform estimate for v:

$$|v(x)|^2 \leq C_2(e^{\eta}a)^{2N_1}e^{2N\psi(x)}, \ \forall x \in F,$$

where $e^{\eta}a < 1$ and C_2 is a constant independent of N_1. We choose N_1 large enough so that $|v|e^{-N\psi} \leq \frac{1}{3}$ on F and we set $S = \frac{3}{4}(u - v)$. Thus S satisfies the first two inequalities.

To get the third one, observe that $u \equiv 0$ in a neighborhood of any $x \in E_{c_n}(dd^c\psi)$. Thus v is holomorphic there and the convergence of $\int_X |v|^2e^{-2\theta}dV_\omega$ forces v to vanish at x at an order greater or equal than $N_1\nu(dd^c\psi, x) - m$. Therefore

$$\nu(\frac{1}{N}\log|S|, x) \geq \frac{N_1}{N}\nu(dd^c\psi, x) - \frac{1}{N} \geq (1 - \frac{1}{\sqrt{N}})\nu(dd^c\psi, x) - \frac{1}{N},$$

for a choice of N_1 large enough, since $N = N_1 + N_2$ where N_2 is a fixed integer.

Finally we observe that $\int_X |v|^2e^{-2\theta}dV_\omega \leq C_1$ hence $\int_X |v|^2e^{-2N\psi}dV_\omega \leq C_2$; since $\int_X |u|^2e^{-2N\psi}dV_\omega \leq C_3$ we obtain

$$\int_X |S|e^{-N\psi}dV_\omega \leq C_4\int_X |S|^2e^{-2N\psi}dV_\omega \leq C_5,$$

where all the constants involved are independent of N_1. □

Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on a projective algebraic manifold X. By a theorem of Siu [Siu 74], we can decompose T as

$$T = \sum_{j\geq 1}\lambda_j[Z_j] + R,$$

where each Z_j is an irreducible analytic subset of X of pure codimension 1, the λ_j's are positive constants and R is a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on X s.t. $\forall c > 0$, $E_c(R) = \{x \in X \,/\, \nu(R, x) \geq c\}$ is a closed analytic subset of X of codimension greater or equal than 2.

When X is homogeneous we can approximate T by currents

$$T_n = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j[Z_j] + R + \sum_{j=n+1}^{+\infty}\lambda_j\omega_j^{\varepsilon_n}, = [H_n] + R_n$$

where ω_j^{ε} denotes the regularization of $[Z_j]$ and we choose a sequence $\varepsilon_n \to 0$. Since ω_j^{ε} is cohomologous to $[Z_j]$, T_n is cohomologous to T; since $\lambda_j \to 0$ as $j \to +\infty$, $T_n \to T$ in the weak sense of currents with convergence of the Lelong numbers and convergence of the supports in the Hausdorff metric

($\mathrm{Supp}\,\omega_j^{\varepsilon_n} \to Z_j$ as $n \to +\infty$). Thus it is sufficient to approximate each T_n in the sense of theorem 2.4.1 to get a similar approximation for T.

Now since X is homogeneous each T_n satisfies condition (C) and since $\omega_j^{\varepsilon_n}$ is smooth, $\mathrm{codim}_{\mathbb{C}} E_c(R_n) = \mathrm{codim}_{\mathbb{C}} E_c(R) \geq 2$; therefore we have the following refinement of theorem 2.1.6:

Corollary 2.4.3 *Let X be a projective algebraic homogeneous manifold and let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on X s.t. $[T] = c_1(L)$ for some positive holomorphic line bundle L on X. Then there exists $N_j \in \mathbb{N}$ and $s_j \in \Gamma(X, L^{N_j})$ s.t.*
i) $T_j = \frac{1}{N_j}[\{s_j = 0\}] \longrightarrow T$ in the weak sense of currents;
ii) $\{s_j = 0\} \longrightarrow \mathrm{Supp}\,T$ in the Hausdorff metric;
iii) $\forall x \in X$, $\nu(T_j, x) \longrightarrow \nu(T, x)$.

When does a positive closed current of bidegree $(1,1)$ satisfy condition (C)? When $\pi : \tilde{X} \to X$ is the blow up at a point p of a compact manifold X, we have seen previously (Example 2.3.4.iii) that the current of integration along the exceptional divisor does not satisfy condition (C). One might hope that a stronger positivity assumption on the line bundle will imply that T satisfies condition (C). However in [D-P-S 94], the authors give an example of a line bundle L on a ruled surface X that is numerically effective (i.e. $L.\mathcal{C} \geq 0$, for every curve $\mathcal{C}$ of X) and which only admits one positive (singular) metric φ (up to additive constants); thus $T = dd^c\varphi$ does not satisfy condition (C). We briefly recall their construction:

Example 2.4.4 *Let $\tau \in \mathbb{C}$ s.t. $\Im(\tau) > 0$, and consider the manifold X defined as the quotient of $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ by the equivalence relation*

$$(z', [w']) \sim (z, [w]) \text{ iff } \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \text{ s.t. } z' = z + a + b\tau \;\&\; [w'] = [w_0, w_1 + bw_0]$$

We denote by π the canonical projection of $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ onto X and by p_1 the canonical projection of $\mathbb{C}$ onto the elliptic curve $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau]$. The mapping

$$\begin{array}{rlcl} p: & X & \longrightarrow & \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau] \\ & \pi(z,[w]) & \longmapsto & p_1(z) \end{array}$$

expresses X as a ruled surface over E. We denote by E_∞ the elliptic curve at infinity $\pi(\{(z,[0,1]) \in \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 \,/\, z \in \mathbb{C}\}) \simeq E$.

It can be shown (see [D-P-S 94]) that the line bundle L_∞ corresponding to the divisor E_∞ is nef and only admits one positive metric (up to additive constants), hence $T_\infty = [E_\infty]$ does not satisfy condition (C) since $\forall K \subset\subset X \setminus \mathrm{Supp}\,T_\infty$, $\widehat{K}^{T_\infty} = X$. Moreover $\Omega_\infty = X \setminus \mathrm{Supp}\,T_\infty$ is Stein since the function $f(z,[w]) = (\Im w)^2 + (\Re w - \Im z/\Im\tau)^2$ is smooth, well defined in Ω_∞ and easily seen to be a strictly psh exhaustion function for Ω_∞; therefore condition (C) is not necessary for $X \setminus \mathrm{Supp}\,T$ to admits a psh exhaustion function.

Question 2.4.5 *Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on a projective algebraic manifold X s.t. $[T] = c_1(L)$ for some positive holomorphic line bundle L on X. Does T satisfy condition (C) ?*

2.5 Stein manifolds

The proofs of our main results show, with very slight modifications, that they also hold on Stein manifolds (essentially the uniform estimates have to be performed on compact subsets of the manifold).

However, as there are some considerable simplifications on these manifolds to technical problems we came across when working on algebraic manifolds, we therefore reformulate in this section some of the main results after recalling a few well-known facts about Stein manifolds.

Fact 2.5.1 *If X is Stein, then every holomorphic line bundle on X is positive and $Pic(X) \simeq H^2(X,\mathbb{Z}) \simeq Div(X)$ (modulo linear equivalence).*

A theorem of Docquier and Grauert [D-G 60] asserts that every locally pseudoconvex open subset of a Stein manifold is Stein. Thus we have:

Fact 2.5.2 *Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on a Stein manifold X then $X \setminus Supp\,T$ is Stein.*

2.5.1 Approximation of currents

The T-polynomially convex hull $\widehat{K}^T$ of a compact subset K of a complex manifold X is a closed subset of X defined in 2.3.1. Notice that it is compact if X is Stein, since X admits a smooth psh exhaustion function.

Proposition 2.5.3 *Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on a Stein manifold X s.t. $[T] = c_1(L)$ for some $L \in Pic(X)$. Then T satisfies condition (C) and for every compact subset K of X, we have*

$$\widehat{K}^T = p_T(K) = \left\{ x \in X \,/\, \forall h \in \mathcal{O}(X),\ |h|(x)e^{-\varphi(x)} \leq \sup_K |h|e^{-\varphi} \right\},$$

where φ is a metric of L which is a potential for T.

Proof:

We can assume X is a closed complex submanifold of $\mathbb{C}^N$ (for N large enough). By a theorem of Docquier-Grauert [D-G 60], there exists a holomorphic retraction $\pi : V \to X$ defined in a neighborhood V of X in $\mathbb{C}^N$.

Let $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ be an open covering of X trivializing L. Let $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(\mathcal{U}_{\alpha\beta})$ be the associated transition functions of L and let $\varphi = \{\varphi_\alpha \in PSH(\mathcal{U}_\alpha)\}$ be a positive metric of L which is a potential for T. Considering a finer open covering, we can assume the φ_α's are defined in some slightly bigger open subset $\mathcal{U}'_\alpha$ so that $B(z,\varepsilon)\cap X \subset \mathcal{U}'_\alpha$ for every $z \in \mathcal{U}_\alpha \cap B(0,2R)$ and $\varepsilon > 0$ small enough, where R is a positive constant to be chosen later.

Now π^*L is a positive holomorphic line bundle on V and $G_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta}\circ\pi \in \mathcal{O}^*(\tilde{\mathcal{U}}_{\alpha\beta})$ are its transition functions associated to the trivializing open covering $\{\tilde{\mathcal{U}}_\alpha\} = \{\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)\}$. Thus $\tilde\varphi = \{\tilde\varphi_\alpha\} := \{\varphi_\alpha \circ \pi\}$ satisfies $\tilde\varphi_\alpha = \tilde\varphi_\beta + \log|G_{\alpha\beta}|$ in $\tilde{\mathcal{U}}_{\alpha\beta} = \tilde{\mathcal{U}}_\alpha \cap \tilde{\mathcal{U}}_\beta$, i.e. $\tilde\varphi$ is a positive metric of π^*L on V. A straightforward computation shows that $(z \in \operatorname{Supp} dd^c(\tilde\varphi)) \iff (\pi(z) \in \operatorname{Supp} dd^c\varphi)$.

We can regularize this metric in $V \cap B(0,2R)$ in the following way; we set

$$\tilde\varphi^\varepsilon_\alpha(z) := \int_{\mathbb{C}^N} \tilde\varphi_\alpha(w)\chi_\varepsilon(z-w)d\lambda(w),$$

where χ_ε is a smooth non-negative function in $\mathbb{C}^N$, invariant by rotation, with compact support equal to $B(0,\varepsilon)$ and s.t. $\int_{\mathbb{C}^N}\chi_\varepsilon \equiv 1$. Thus for $\varepsilon > 0$ small enough, $\tilde\varphi^\varepsilon_\alpha$ is a psh function in $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha \cap B(0,2R)$ and one easily checks that:

i) $\tilde\varphi^\varepsilon_\alpha = \tilde\varphi^\varepsilon_\beta + \log|G_{\alpha\beta}|$ in $\tilde{\mathcal{U}}_{\alpha\beta} \cap B(0,2R)$;

ii) $\tilde\varphi^\varepsilon_\alpha(z) = \tilde\varphi_\alpha(z)$ if $d(z, \operatorname{Supp} dd^c\tilde\varphi) > \varepsilon$ and $\tilde\varphi^\varepsilon_\alpha(z) > \tilde\varphi_\alpha(z)$ otherwise (here d stands for the euclidean distance in $\mathbb{C}^N$).

Let θ_R be a non negative test function in $\mathbb{C}^N$ s.t. $\theta_R \equiv 1$ in a neighborhood of $\overline{B}(0,R) = \{z \in \mathbb{C}^N \,/\, |z| \le R\}$ and $\theta \equiv 0$ outside $B(0,2R)\cap V$. Let f be a smooth positive metric of L on X and consider

$$\tilde\psi^\varepsilon = \theta_R.\tilde\varphi^\varepsilon + (1-\theta_R)f\circ\pi + A\max(|z|^2 - R^2, 0).$$

Then for a choice of $A > 0$ large enough, $\tilde\psi^\varepsilon$ defines a continuous positive metric of π^*L on V s.t. $\tilde\psi^\varepsilon \equiv \tilde\varphi^\varepsilon$ on $V \cap \overline{B}(0,R)$.

Now let K be a compact subset of $X\setminus \operatorname{Supp} T$ and fix $R > 0$ large enough so that $\widehat{K}^T \subset\subset X \cap B(0,R)$. Then for $\varepsilon > 0$ small enough, the continuous positive metric $\psi^\varepsilon := \tilde\psi^\varepsilon_{|X}$ of L on X satisfies $\inf_{\operatorname{Supp} T\cap\overline{B}(O,R)}(\psi^\varepsilon - \varphi) > 0 = \sup_K(\psi^\varepsilon - \varphi)$, hence $\widehat{K}^T \subset\subset X \setminus \operatorname{Supp} T$ and T satisfies condition (C).

The equality $\widehat{K}^T = p_T(K)$ follows from a standard application of the techniques of L^2-estimates on Stein manifold (see [Hö 88] and the proof of proposition 2.3.2) noticing that we can regularize any positive metric of a holomorphic line bundle on compact subsets of a Stein manifold and add a small smooth strictly psh function as well. $\square$

Remark 2.5.4 *Note that $X \setminus \operatorname{Supp} T$ is usually not a Runge domain, i.e. T does not necessarily satisfies condition (C') obtained by replacing $dd^cf \ge -T$ by $dd^cf \ge 0$ in the definition of $\widehat{K}^T$ (take e.g. $X = \mathbb{C}^2$ and $T = [\{z_1 = 0\}]$).*

Theorem 2.5.5 *Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on a Stein manifold X. Assume $[T] \in H^2(X,\mathbb{Z})$, i.e. $[T] = c_1(L)$ for some holomorphic line bundle L on X. Then there exists $N_j \in \mathbb{N}$ and $s_j \in \Gamma(X, L^{N_j})$ on X s.t.*

i) $T_j := \frac{1}{N_j}[\{s_j = 0\}] \to T$ in the weak sense of currents;

ii) $\{s_j = 0\} \to \mathrm{Supp}\, T$ in the Hausdorff metric;

iii) $\forall x \in X$, $\nu(T_j, x) \to \nu(T, x)$.

Proof:

By Siu's theorem we can decompose T as $T = \sum_{j\geq 1} \lambda_j [Z_j] + R$.

We can weakly approximate each current $[Z_j]$ by positive smooth $(1,1)$-forms ω_j^ε s.t. moreover $\mathrm{Supp}\,\omega_j^\varepsilon \to Z_j$ as $\varepsilon \to 0$ (for this we can regularize $[Z_j]$ on a compact subsets of X and add a smooth strictly psh function that vanishes on a large compact subset of X as it has been done in the proof of proposition 2.5.3). We can therefore weakly approximate T by currents

$$T_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [Z_j] + R + \sum_{j=m+1}^{+\infty} \lambda_j \omega_j^{\varepsilon_m} = [H_m] + R_m,$$

with convergence of the supports in the Hausdorff metric and convergence of the Lelong numbers since $\lambda_j \to 0$ as $j \to +\infty$.

Now $[\lambda T_m] = [\lambda T] = c_1(L)$ since $\omega_j^{\varepsilon_m}$ is cohomologous to$[Z_j]$, T_m satisfies condition (C) by proposition 2.5.3, and $\mathrm{codim}_{\mathbb{C}} E_c(R_m) = \mathrm{codim}_{\mathbb{C}} E_c(R) \geq 2$; thus we can use an analogue of theorem 2.4.1 in the Stein case to get an approximation of T_m by rational divisors which yields the desired approximation for T. □

2.5.2 Rational convexity

Since every divisor is positive on a Stein manifold, the analogue of definition 2.2.1 in this case is the natural generalization of the standard one in $\mathbb{C}^m$:

Definition 2.5.6 *Let K be a compact subset of a Stein manifold X; the rational hull of K is defined by*

$$r(K) = \{m \in X \,/\, \forall H \text{ complex hypersurface of } X,\, m \in H \Rightarrow H \cap K = \emptyset\},$$

and K is said to be rationally convex when $r(K) = K$.

As in the algebraic case, $r(K)$ is a compact subset of X and $r(r(K)) = r(K)$. Since every positive closed current of bidegree $(1,1)$ with integer class satisfies condition (C) on a Stein manifold, we have the following analogue of theorem 2.2.5 :

Theorem 2.5.7 *Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on a Stein manifold X s.t. $[T] \in H^2(X,\mathbb{Z})$.*
Then $X \setminus Supp\,T$ can be exhausted by rationally convex compact sets.

Finally a very similar proof to that of theorem 2.2.8 gives

Theorem 2.5.8 *Let S be a smooth compact totally real submanifold of a Stein manifold X ; the following are equivalent :*
i) S is rationally convex.
ii) There exists a smooth Hodge form θ for X s.t. $j^*\theta = 0$, where $j : S \to X$ denotes the inclusion map.

2.6 Appendix : Regularization process

It is in general not possible to approximate positive currents by positive smooth forms on complex manifolds. However this can be done on homogeneous manifolds (i.e. complex manifolds with a transitive group of automorphisms) where there is a natural regularization procedure. We explain here how to regularize the positive singular metrics of a holomorphic line bundle on a compact homogeneous manifold. The case of positive currents was considered by Richthofer (see [Hu 94]).

Let X be a compact complex homogeneous manifold ; let G be the connected component of the identity of $Aut(X)$ and let $H = \{g \in G \,/\, g(x_0) = x_0\}$ be the isotropy group of a point $x_0 \in X$; then X is naturally isomorphic to G/H. Let T be a $(1,1)$-positive closed current on $X = G/H$ and let $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$ a non negative function with compact support in G, s.t. $\chi(id) > 0$ and $\int_G \chi(g)dg = 1$, where id stands for the identity element in G. We define

$$T_\chi = \int_G \chi(g)\, l^*_{g^{-1}}(T)dg,$$

where dg is the Haar measure on G and l_g will stand for the multiplication on the left by g both in G and in $X = \{g.H\}$, according to the context. It is clear from the definition that T_χ defines a smooth $(1,1)$-positive closed current on X. Furthermore,

Theorem 2.6.1
i) T_χ is cohomologous to T.

ii) If T is strictly positive at a point x_0, then T_χ is strictly positive on $U.x_0 = \{g(x_0) \in X \,/\, g \in U\}$, where U is the interior of the support of χ (in particular, T_χ is strictly positive at x_0).

We refer to [Hu 94] for a detailed proof.

We now define the regularized metrics φ^ε of a given metric φ of a pseudoeffective holomorphic line bundle L on X. We first construct a pseudo-distance function on X that will tell us exactly when φ^ε is equal to φ.

Let Φ be a biholomorphic map from a relatively compact open neighborhood U of zero in $\mathbb{C}^N$ onto a relatively compact open neighborhood V of the identity in G which maps 0 to id; we write here X in the Klein form G/H. We can assume that U is included in the unit ball of $\mathbb{C}^N$ (N is the complex dimension of G). We define a positive function on G^2 via

$$D(g,f) = \begin{cases} \|\Phi^{-1}(g^{-1}.f)\| & \text{if } g^{-1}.f \in V \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $\|\zeta\|$ stands for the euclidean norm of ζ in $\mathbb{C}^N$. This is a (a priori) non symmetrical non-negative function on G^2 which is bounded by 1, upper semi continuous and obviously satisfies $D(g,f) = 0$ iff $g = f$. When F is a closed subset of G, we define $D_F(g) = \inf_{f \in F} D(g,f)$. If F is invariant by multiplication on the left by the elements of H, i.e. $h.F = F$, then $\forall (g,h) \in G \times H$, $D_F(g) = D_F(h.g)$ since $D(h.g, h.f) = D(g,f)$ for any $f \in F$. This allows us to define a similar function on X: if K is a closed subset of X, we set $d_K(x) = D_{\pi^{-1}(K)}(z_x)$ where $\pi : G \to X = G/H$ is the canonical projection and z_x is any element in $\pi^{-1}(\{x\})$. The definition is independent of the choice of the preimage z_x thanks to the invariance of $\pi^{-1}(K)$, and we have:

1) $0 \le d_K(x) \le 1, \forall x \in X$
2) $d_K(x) = 0 \Leftrightarrow x \in K$
3) d_K is upper semi continuous

The sets $K_\varepsilon = \{x \in X \,/\, d_K(x) = d(x,K) \ge \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$) are therefore compact subsets of X which exhaust $X \setminus K$ when ε decreases towards 0.

Let θ_ε be a usual approximation of the identity for the convolution product in $\mathbb{C}^N$ and χ_ε the related approximation in G, that is:

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{C}^N) \text{ is invariant by rotation} \\ \theta_\varepsilon \ge 0 \text{ and } \int_{\mathbb{C}^N} \theta_\varepsilon = 1 \\ \operatorname{Supp} \theta_\varepsilon = \overline{B}(0,\varepsilon) \end{cases}$$

and we then define χ_ε on G by $\chi_\varepsilon(g)dg = (\Phi^{-1})^*(\theta_\varepsilon(\zeta)d\zeta)$ so that χ_ε is a positive test function on G with $\int_G \chi_\varepsilon = 1$ and the support of χ_ε converges to $\{\text{id}\}$ as ε decreases towards 0.

Let now φ be a singular positive metric of a pseudoeffective holomorphic line bundle L. That is φ is a given set of plurisubharmonic functions φ_α in $\mathcal{U}_\alpha$, where $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ is an appropriate open covering of X. The line bundle is trivial in each open subset $\mathcal{U}_\alpha$ and is described by the transition functions $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(\mathcal{U}_{\alpha\beta})$. The φ_α's satisfy the relations $\varphi_\alpha = \varphi_\beta + \log|g_{\alpha\beta}|$ in $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$. Considering a finer open covering we can assume (and we will in the sequel) that all the functions φ_α (resp. $g_{\alpha\beta}$) are defined in some slightly bigger open subsets than $\mathcal{U}_\alpha$ (resp. $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$).

Since $dd^c(\varphi_\alpha) = dd^c(\varphi_\beta)$ in $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$, the curvature form of the metric is globally well defined and its support $\operatorname{Supp} dd^c\varphi$ as well.

The line bundle π^*L is well defined and holomorphic on G, and we denote by $G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\circ\pi$ its transition functions associated to the covering $\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$. We define a positive metric ψ of π^*L by $\psi = \varphi\circ\pi$.

Similarly to the case of currents, we set

$$\begin{cases} \varphi_\alpha^\varepsilon(x) = \int_G \chi_\varepsilon(g) l_{g^{-1}}^*(\varphi_\alpha(x))dg, \\ \psi_\alpha^\varepsilon(z) = \varphi^\varepsilon\circ\pi(z) = \int_G \chi_\varepsilon(g)\psi_\alpha(g^{-1}.z)dg. \end{cases}$$

These are smooth functions that are well defined in $\mathcal{U}_\alpha$, resp. $\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ if $\varepsilon > 0$ is small enough, since φ_α (resp. ψ_α) is defined in a slightly bigger open subset than $\mathcal{U}_\alpha$ (resp. $\pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$).

Proposition 2.6.2 *The functions $\varphi^\varepsilon = \{\varphi_\alpha^\varepsilon\}$ (resp. $\psi^\varepsilon = \{\psi_\alpha^\varepsilon\}$) define a smooth positive metric of L (resp. π^*L) which is strictly positive at a point x whenever φ is strictly positive at x.*

φ^ε (resp. ψ^ε) decreases towards φ (resp. ψ) when ε decreases towards 0^+ and $\operatorname{Supp} dd^c\varphi^\varepsilon$ (resp. $\operatorname{Supp} dd^c\psi^\varepsilon$) converges to $\operatorname{Supp} dd^c\varphi$ (resp. $\operatorname{Supp} dd^c\psi$) in the Hausdorff metric.

More precisely, for ε small enough we have

$$\begin{cases} \varphi^\varepsilon(x) = \varphi(x) & \text{if } \; d_K(x) = d(x, \operatorname{Supp} dd^c\varphi) > \varepsilon \\ \varphi^\varepsilon(x) > \varphi(x) & \text{if } \; 0 \le d_K(x) \le \varepsilon \end{cases}$$

where K denotes the support of $dd^c\varphi$.

Proof:

From $\psi_\alpha = \psi_\beta + \log|G_{\alpha\beta}|$ in $\pi^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha\beta})$ we deduce

$$\psi_\alpha^\varepsilon = \psi_\beta^\varepsilon + \int_G \chi_\varepsilon(g)\log|G_{\alpha\beta}(g^{-1}.z)|dg = \psi_\beta^\varepsilon + \int_{\mathbb{C}^N} \theta_\varepsilon(\zeta)\log|G_{\alpha\beta}(\Phi(\zeta)^{-1}.z)|d\zeta.$$

Now the function $h : \zeta \to \log|G_{\alpha\beta}(\Phi(\zeta)^{-1}.z)|$ is pluriharmonic in U and therefore the last integral is equal to $h(0) = \log|G_{\alpha\beta}(z)|$ since $\Phi(0) = id$. Thus $\psi_\alpha^\varepsilon = \psi_\beta^\varepsilon + \log|G_{\alpha\beta}|$ and ψ^ε is a smooth metric of π^*L. Of course this also gives the corresponding result for φ^ε. The positivity assertions directly follow from the fact that $dd^c\varphi^\varepsilon = T_{\chi_\varepsilon}$ with the notation of theorem 2.6.1.

Fixing α and z we denote by H the plurisubharmonic function defined in a neighborhood of 0 in $\mathbb{C}^N$ by $H(\zeta) = \psi_\alpha^\varepsilon(\Phi(\zeta)^{-1}.z)$. Thus

$$\psi_\alpha^\varepsilon(z) = \int \theta_\varepsilon(\zeta)H(\zeta)d\zeta = \int \theta(\zeta)H(\varepsilon\zeta)d\zeta \geq \int \theta(\zeta)H(\varepsilon'\zeta), \text{ if } \varepsilon \geq \varepsilon',$$

since θ is invariant by rotation and H is plurisubharmonic. Therefore ψ^ε is decreasing and φ^ε as well. It is now enough to prove the last assertion to obtain the whole proposition.

It is absolutely equivalent to proving the similar results for ψ, i.e.

$$\begin{cases} \psi^\varepsilon(z) = \psi(z) & \text{if } \ D_F(z) = D(z, \operatorname{Supp} dd^c\psi) > \varepsilon \\ \psi^\varepsilon(z) > \psi(z) & \text{if } \ 0 \leq D_F(z) \leq \varepsilon \end{cases}$$

where $F = \operatorname{Supp}\psi = \pi^{-1}(K)$. Of course this implicitly means that for each α and each $z \in \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ the inequalities between ψ_α and ψ_α^ε hold, but we don't write the subscript α anymore. Setting $\zeta = \Phi(g)$, we have

$$\begin{aligned} \psi^\varepsilon(z) \quad &= \int_V \chi_\varepsilon(g)\psi(g^{-1}.z)dg \\ &= \int_U \chi_\varepsilon(\Phi(\zeta))\psi(\Phi(\zeta)^{-1}.z)|Jac\Phi(\zeta)|^2 d\zeta \\ &= \int_U \theta_\varepsilon(\zeta)f(\zeta)d\zeta, \end{aligned}$$

where $\zeta \to f(\zeta) = \psi(\Phi(\zeta)^{-1}.z)$ is a plurisubharmonic function (in fact a set of plurisubharmonic funtions, but we omit to mention it from now on) since Φ is holomorphic and the group operations $g \to g^{-1}$ and $g \to g.z$ as well. Therefore

$$\begin{cases} \psi^\varepsilon(z) = f(0) = \psi(z) & \text{if } d_{eucl}(0, \operatorname{Supp} dd^c f) > \varepsilon \\ \psi^\varepsilon(z) > f(0) = \psi(z) & \text{otherwise} \end{cases}$$

A straightforward computation shows that the Levi form of f at the point ζ applied to w satisfies $L_f(\zeta).w = L_\psi(\Phi(\zeta)^{-1}.z).(J(\zeta).w)$, where $J(\zeta)$ denotes the jacobian matrix of the map $\zeta \to \Phi(\zeta)^{-1}.z$ which is biholomorphic. Hence $\operatorname{Supp} dd^c f = \Phi^{-1}([\operatorname{Supp} dd^c\psi]^{-1}.z)$ and if $\varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned} d_{eucl}(0, \operatorname{Supp} dd^c f) \geq \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \inf_{f \in F} \|\Phi^{-1}(f^{-1}.z)\| \geq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow D_F(z) \geq \varepsilon \end{aligned}$$

□

As an application we have the following:

Corollary 2.6.3 *If L is a holomorphic line bundle on a compact complex homogeneous Kähler manifold, it is equivalent to say that L is pseudoeffective* *or nef or semi-positive: given a singular positive metric φ on L, φ^ε is a smooth positive metric of L.*

Moreover, if there exists a singular metric φ of L s.t. $dd^c\varphi$ is strictly positive at one point, then L is positive.

Proof:

The equivalence between the three notions of weak positivity directly comes from $[dd^c\varphi] = [dd^c\varphi^\varepsilon]$ since $\int_G \chi_\varepsilon(g)dg = 1$ (cf i) in theorem 2.6.1).

Let now φ be a singular metric of a holomorphic line bundle L which is strictly positive at some point $a \in X$. Fix $\varepsilon > 0$ small enough, then $T = dd^c\varphi^\varepsilon$ is a smooth positive current which is strictly positive at a. Thus T_χ is a smooth positive current cohomologous to T which is strictly positive in $U.a$ by theorem 2.6.1, where χ is any positive test function on G with $\int_G \chi = 1$ and U is the interior of the support of χ. Since the action of G is transitive on X, we can cover X by a finite number of $U_j.a$ (we don't necessarily assume that $id \in U_j$ here) and obtain that way a current $S = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} T_{\chi_j}$ which is smooth, strictly positive and cohomologous to T, i.e. S is a Kähler form on X s.t. $[T] = [S]$.

It is now a standard consequence of Hodge theory on compact Kähler manifold that there exists $v \in \mathcal{C}^\infty(X)$ s.t. $S = T + dd^cv$. Therefore $G_\alpha = \varphi_\alpha^\varepsilon + v$ defines a smooth metric of L s.t $dd^cG = S$ is Kähler. □

Chapitre 3

Compléments

3.1 Contrôle des directions complexes tangentes

Nous affinons ici nos résultats d'approximation des courants (théorèmes 2.4.1 et 2.5.5), en montrant qu'on peut également faire en sorte de contrôler les directions complexes tangentes aux diviseurs en un point où le courant admet une singularité logarithmique. Comme il a été annoncé au paragraphe 1.2.4, cela va permettre d'obtenir un procédé d'approximation stable par éclatement. Nous commençons par établir ce résultat localement.

Proposition 3.1.1 *Soit φ une fonction psh dans $\Delta^n(r)$ (polydisque de $\mathbb{C}^n$ de rayon r centré en 0) telle que $\varphi(z) \leq \gamma \log|z| + C$ dans $\Delta^n(r)$ avec $\gamma > 0$. Soit $\pi : \tilde{\Delta} \to \Delta^n(r)$ l'éclatement de $\Delta^n(r)$ en 0 et $E = \pi^{-1}(0)$. Alors il existe des fonctions $f_j \in \mathcal{O}(\Delta^n(r))$ et des entiers $N_j \in \mathbb{N}$ tels que*

i) $\varphi_j = \frac{1}{N_j}\log|f_j| \to \varphi$ dans $L^1_{loc}(\Delta^n(r))$,

ii) $\nu(dd^c\varphi_j, x) \to \nu(dd^c\varphi, x)$ pour tout point $x \in \Delta^n(r)$,

iii) $\operatorname{Supp} dd^c\varphi_j \to \operatorname{Supp} dd^c\varphi$ en métrique de Hausdorff,

iv) Supp $(\pi^* dd^c\varphi_j - \nu(dd^c\varphi_j, 0)[E]) \to$ Supp $(\pi^* dd^c\varphi - \nu(dd^c\varphi, 0)[E])$ pour la métrique de Hausdorff dans $\tilde{\Delta}$.

Démonstration:

Le théorème 2.5.5 fournit une suite d'approximants (φ_j) qui vérifie i),ii),iii), de plus iv) est automatiquement vérifié si $\operatorname{Supp} T' \cap E = E$, où $T' = \pi^* dd^c\varphi - \gamma[E]$. Il nous faut procéder différemment si $\operatorname{Supp} T' \cap E \subsetneq E$ (cf exemple 1.2.16). On travaille dans la carte $\{\zeta_1 = 1\}$ de $\tilde{\Delta}$ avec le système de coordonnées $(x_1 = z_1, x_2 = \zeta_2, \ldots, x_n = \zeta_n)$, ainsi $\psi(x) = \varphi(x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_n) - \gamma \log|x_1|$ est un potentiel de T' dans l'ouvert

$$\Omega = \{x \in \mathbb{C}^n \;/\; |x_1| < r \text{ et } |x_1x_j| < r,\, j \geq 2\} = \tilde{\Delta} \cap \{\zeta_1 = 1\}.$$

La décroissance logarithmique de φ implique $\psi(x) \leq \frac{\gamma}{2}\log\left[1 + |x'|^2\right] + C$, où $x' = (x_2, \ldots, x_n)$ et $|x'|^2 = \sum_{j=2}^n |x_j|^2$. L'ouvert Ω est pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$, on peut donc utiliser le théorème 2.5.5 pour approximer ψ dans Ω. On commence par approcher ψ par ψ_j en utilisant la version Stein de la proposition 2.4.2, les ψ_j vont vérifier $\psi_j(x) \leq (\gamma/2 - \eta_j)\log[1 + |x'|^2] + \eta_j \log^+ |x| + C'$ dans Ω, où $\eta_j \to 0$, et le théorème 2.5.5 fournit des fonctions $f_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ et des entiers N_j tels que la suite $\frac{1}{N_j}\log|f_j|$ approxime ψ au sens i),ii),iii) avec $\int_\Omega |f_j|^2 e^{-2N_j\psi_j} \leq C_3$ (voir démonstration du théorème 2.4.1). On va montrer qu'on peut "redescendre" l'approximation dans $\Delta^n(r)$.

Pour alléger les notations, nous n'écrivons plus l'indice j dans la suite et nous supposons que $\eta_j = 0$. Pour $x \in \Omega$, on note $\Delta^n(x, (\varepsilon, \delta'))$ le polydisque centré en x de rayon $\varepsilon > 0$ sur la première composante et $\delta' = (\delta, \ldots, \delta)$ sur les autres. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $|f|^2$ est psh donc pour $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
|f(x)|^2 &\leq \frac{C_4}{\varepsilon^2\delta^{2(n-1)}}\int_{\Delta^n(x,(\varepsilon,\delta))}|f|^2 \\
&\leq \frac{C_4}{\varepsilon^2\delta^{2(n-1)}} e^{2N\sup_{\Delta^n(x,(\varepsilon,\delta))}\psi}\int_{\Delta^n(x,(\varepsilon,\delta))}|f|^2 e^{-2N\psi} \\
&\leq \frac{C_5 e^{N\gamma C'}}{\varepsilon^2}[1+|x'|^2]^{N\gamma} \\
&\leq C_6\frac{[1+|x'|^2]^{N\gamma}}{|x_1|^2},
\end{aligned}$$

pour tout $x \in \Omega$ tel que $\varepsilon \leq |x_1| \leq 2\varepsilon$. L'ouvert Ω est un domaine de Reinhardt connexe qui contient l'origine, on peut donc développer f en série entière dans Ω :

$$f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{n-1}} a_\alpha(x_1)x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}, \text{ où } \alpha = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \text{ et } a_\alpha \in \mathcal{O}(\Delta^1(r)).$$

On a $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x_1, e^{i\theta}x')|^2 d\theta = \sum_\alpha |a_\alpha(x_1)|^2|x_2|^{2\alpha_2}\ldots|x_n|^{2\alpha_n}$ et l'inégalité contrôlant la croissance de f lorsque $|x_1| \to 0$ assure, pour $r/2 < |x_1x_j| < r$, que

$$\sum_\alpha |a_\alpha(x_1)|^2\left(\frac{r/2}{|x_1|}\right)^{2|\alpha|} \leq \sum_\alpha |a_\alpha(x_1)|^2|x'|^{2\alpha} \leq C_6\frac{\left[1+(n-1)\frac{r^2}{|x_1|^2}\right]^{N\gamma}}{|x_1|^2}.$$

Cela implique que a_α s'annule en 0 à un ordre supérieur ou égal à $E(|\alpha| - [1 + N\gamma])$, où $|\alpha| = \sum_{j=2}^n \alpha_j$ et $E(\lambda)$ désigne la partie entière du réel λ. Les fonctions $F_j(z) = z_1^{E(1+N_j\gamma)}f_j(z_1, z_2/z_1, \ldots, z_n/z_1)$ sont donc holomorphes dans $\Delta^n(r)$ et la suite $\varphi_j = \frac{1}{N_j}\log|F_j|$ approxime φ au sens désiré. □

Dans la proposition précédente, il y a en fait convergence simple de tous les nombres de Lelong directionnels (voir définition 1.2.11). La technique d'approximation fournit en effet un contrôle de la norme L^2 des sections holomorphes que l'on construit, par rapport à une métrique positive qui a les mêmes nombres de Kiselman que le potentiel de départ, le lemme suivant permet de conclure.

Lemme 3.1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\varphi \in PSH(\Omega)$. Si $f_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ est telle que $\int_\Omega |f_j|^2 e^{-2N_j\varphi} < +\infty$, alors $\forall z \in \Omega$, $\forall \lambda \in (\mathbb{R}^+)^n$ et $\forall A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$,*

$$\nu_\lambda\left(\frac{1}{N_j}[\{f_j = 0\}], z, A\right) \geq \nu_\lambda\left(dd^c\varphi, z, A\right) - \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{N_j}.$$

En particulier $\nu_\lambda(\frac{1}{N_j}[\{f_j = 0\}], z, A) \to \nu_\lambda(dd^c\varphi, z, A)$ si $\frac{1}{N_j}\log|f_j| \to \varphi$.

Démonstration:

L'inégalité, qui traduit la non intégrabilité locale de $e^{-2\psi}$, ψ étant une fonction psh ayant une trop grande singularité logarithmique, est une conséquence immédiate de la proposition 5.4 de [Ki 94] (lorsque $\lambda = (1, \ldots, 1)$, le résultat correspondant sur les nombres de Lelong est dû à Skoda).

Si $\varphi_j = \frac{1}{N_j}\log|f_j| \to \varphi$, l'inégalité inverse provient des propriétés de semi-continuité des nombres de Lelong directionnels. Il y a donc convergence simple de tous les nombres de Kiselman. □

Cette observation montre qu'il y a également convergence simple des nombres de Kiselman dans les théorèmes 2.4.1 et 2.5.5. On en déduit le raffinement suivant du théorème 2.4.1.

Théorème 3.1.3 *Soit X une variété compacte projective algébrique et T un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur X. On suppose que*

a) $[T] = c(L)$ où L est un fibré holomorphe en droites positif sur X,

b) $T = \sum_{j=1}^p \lambda_j[Z_j] + R$ où $R \in \mathcal{T}(X)$ est tel que les ensembles de niveau $E_c(R)$ sont de codimension supérieure ou égale à 2 (pour $c > 0$),

c) T satisfait la condition (C).

Soit I un sous ensemble dénombrable de $E^+(R) := \bigcup_{c>0} E_c(R)$. Alors il existe $N_j \in \mathbb{N}$ et $s_j \in \Gamma(X, L^{N_j})$ tels que

i) $T_j = \frac{1}{N_j}[\{s_j = 0\}] \to T$ au sens faible des courants;

ii) $\{s_j = 0\} \to \operatorname{Supp} T$ en métrique de Hausdorff;

iii) $\nu_\lambda(T_j, x, A) \to \nu_\lambda(T, x, A)$, $\forall (x, \lambda, A) \in X \times (\mathbb{R}^+)^n \times \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$;

iv) $\forall x \in I$, $\mathcal{E}_x(T_j) \to \mathcal{E}_x(T)$ en métrique de Hausdorff, où $\mathcal{E}_x(T)$ désigne le support du transformé strict $\pi^*T - \nu(T,x)[\pi^{-1}(x)]$ de T dans l'éclatement $\pi : \tilde{X} \to X$ de X en x.

Démonstration:

Soit $K = K_j$ un compact T-polynomialement convexe de $X \setminus \operatorname{Supp} T$ et $p_1, \ldots, p_j \in I$. Le théorème 2.4.1 assure l'existence de $h = h_j \in \Gamma(X, L^{M_j})$

telle que $K \cap D = \emptyset$ (où $D := \{h = 0\}$) ; quitte à considérer $h + \varepsilon f$ ($0 < \varepsilon << 1$), où $f \in \Gamma(X, L^M)$ est une section holomorphe qui ne s'annule pas en $p_1, \ldots, p_j$, on peut supposer que $p_i \in X \setminus D$.

Il est bien connu que $X \setminus D$ est Stein puisque D est positif (cf remarque 2.3.9); le fibré L^M est trivial dans $X \setminus D$ et un potentiel de T y est donc défini par une fonction psh φ. En travaillant dans une carte de l'éclaté de $X \setminus D$ aux points $p_1, \ldots, p_j$, on obtient une version de la proposition 3.1.1 valable dans $X \setminus D$; on utilise pour cela des estimées L^2 par rapport à un poids ψ, légère modification de φ (cf proposition 2.4.2), qui a la même croissance que φ au voisinage de D. Les fonctions holomorphes que l'on construit dans $X \setminus D$ se "prolongent" donc à travers D pour définir des sections holomorphes de L^{NM} qui vont fournir l'approximation souhaitée. □

Corollaire 3.1.4 *Le procédé d'approximation est stable par éclatement et contraction. En particulier, tout courant positif fermé de bidegré* $(1,1)$ *sur une surface réglée rationnelle est approximable au sens précédent.*

3.2 Extension des métriques d'un fibré positif

Une réponse positive à la question 2.4.5 (i.e. tout courant $T \in \mathcal{T}(X)$ tel que $[T] = c(L)$, $L > 0$, satisfait la condition (C) sur X compacte projective) aurait plusieurs conséquences intéressantes sur les problèmes de convexité rationnelle et d'approximation de courants. Nous en mentionnons deux.

Conséquence 1: Soit X une variété compacte projective et $T \in \mathcal{T}(X)$ tel que $[T] = c(L)$ pour un fibré holomorphe en droites positif L sur X.
Alors T est approximable au sens des théorèmes 2.4.1 et 3.1.3.

Démonstration: Le théorème de Siu assure que T se décompose sous la forme

$$T = \sum_{j \geq 1} c_j [Z_j] + R,$$

avec $\mathrm{codim}_{\mathbb{C}} E_c(R) \geq 2$, $\forall c > 0$. Si $\{j \,/\, c_j > 0\}$ est fini, on peut appliquer le théorème 3.1.3 ; sinon on peut approximer T par

$$T_k = \sum_{j=1}^{N_k} c_j^{(k)} [Z_j] + R,$$

où $c_j^{(k)} \to c_j$ et $N_k \to +\infty$ sont choisis de telle sorte que $[T_k] = [T] = c(L)$ (c'est possible puisque $H^{1,1}(X, \mathbb{R}) \cap H^2(X, \mathbb{Z})$ est de type fini), alors chaque T_k vérifie les hypothèses du théorème 3.1.2. □

Conséquence 2: Si X est une variété projective telle que $H^2(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (e.g. une hypersurface de $\mathbb{P}^n$, $n \geq 4$) alors $r \equiv r_2 \equiv r_3$.

Cherchant à répondre à la question 2.4.5, nous avons été amenés à nous intéresser au problème d'extension suivant. Soit $L \to X$ un fibré holomorphe en droites positif sur une variété compacte projective X et $T = dd^c\varphi \in \mathcal{T}(X)$ tel que $[T] = c(L)$ (i.e. $\varphi \in \mathcal{P}(X,L)$) ; quitte à changer T en kT (resp. L en L^k), on peut supposer que L est très ample et réaliser X comme une sous-variété complexe de $\mathbb{P}^n$ de telle sorte que $L = \mathcal{O}(1)_{|X}$ (théorème de Kodaira). Il est naturel de se demander si φ est la restriction à X d'une métrique $\psi \in \mathcal{P}(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ telle que $\mathrm{Supp}\,(dd^c\psi) \cap X = \mathrm{Supp}\, dd^c\varphi$. Cela assurerait la condition (C) puisque l'on sait régulariser ψ sur $\mathbb{P}^n$ (cf Appendice 2.6). Notons que ce problème d'extension (sans contrôle du support ni de la croissance) a été considéré par Sadullaev lorsque X est Stein et L est le fibré trivial (cf [Sa 82]). Dans le cas où la métrique initiale φ est lisse et de courbure strictement positive, on a le résultat suivant dû à Schumacher [Sc 98].

Théorème 3.2.1 *Soit X une sous-variété complexe de $\mathbb{P}^n$ et φ une métrique lisse de $\mathcal{O}(1)_{|X}$ telle que $dd^c\varphi$ est une forme de Kähler sur X.*
Alors il existe ψ une métrique lisse de $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n$ telle que $dd^c\psi$ est une forme de Kähler sur $\mathbb{P}^n$ et $\psi_{|X} \equiv \varphi$.

Nous commençons par établir une inégalité élémentaire.

Lemme 3.2.2 *Soit ψ_1 et ψ_2 deux métriques d'un fibré holomorphe en droites L sur une variété complexe X. Alors $\psi := \log\left[e^{\psi_1} + e^{\psi_2}\right]$ est une métrique de L sur X qui vérifie*

$$e^{\psi} dd^c\psi \geq e^{\psi_1} dd^c\psi_1 + e^{\psi_2} dd^c\psi_2.$$

Démonstration:
Si $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(\mathcal{U}_{\alpha\beta})$ sont les fonctions de transition du fibré L dans un recouvrement trivialisant L, les métriques ψ_i sont définies par des fonctions $\psi^i_\alpha \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}_\alpha)$ telles que $\psi^i_\alpha = \psi^i_\beta + \log|g_{\alpha\beta}|$ dans $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$. On a donc $e^{\psi^1_\alpha} + e^{\psi^2_\alpha} = |g_{\alpha\beta}|\left[e^{\psi^1_\beta} + e^{\psi^2_\beta}\right]$ dans $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ et $\psi_\alpha := \log\left[e^{\psi^1_\alpha} + e^{\psi^2_\alpha}\right]$ définit bien une métrique de L sur X.

Pour établir l'inégalité, on suppose les métriques lisses, il suffira de régulariser localement pour obtenir le cas général. On a

$$\frac{\partial\psi}{\partial z_j} = \frac{e^{\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial z_j} + e^{\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial z_j}}{e^{\psi_1} + e^{\psi_2}},$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial z_j\partial\overline{z}_k} &= e^{-\psi}\left\{e^{\psi_1}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}+e^{\psi_2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\right\}\\ &+e^{-\psi}\left\{e^{\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial z_j}\frac{\partial\psi_1}{\partial\overline{z}_k}+e^{\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial z_j}\frac{\partial\psi_2}{\partial\overline{z}_k}\right\}\\ &-e^{-2\psi}\left\{e^{\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial z_j}+e^{\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial z_j}\right\}\left\{e^{\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\overline{z}_k}+e^{\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\overline{z}_k}\right\},\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$e^{\psi}L_{\psi}(z).w = e^{\psi_1}L_{\psi_1}(z).w + e^{\psi_2}L_{\psi_2}(z).w + \left|\langle\nabla\psi_1,\overline{w}\rangle - \langle\nabla\psi_2,\overline{w}\rangle\right|^2,$$

où $L_{\psi}(z).w$ désigne la forme de Lévi de ψ en z appliquée au vecteur w. □

Démonstration du théorème 3.2.1:

On commence par étendre φ de manière lisse en une métrique hermitienne $\tilde{\varphi}$ de $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n$ sans se préoccuper de la positivité. La fonction $\varrho : z \mapsto [\mathrm{dist}(z,X)]^2$ est lisse dans un voisinage de X et sa forme de Lévi calculée sur X

$$L_{\varrho}(z) = 2\left|\langle\nabla\mathrm{dist}(z),\overline{w}\rangle\right|^2$$

montre que ϱ est strictement psh dans les directions normales à X. Or $L_{\tilde{\varphi}}(z).w = L_{\varphi}(z).w > 0$ si $w \in T_z^{\mathbb{C}}(X)\setminus\{0\}$ puisque $dd^c\varphi$ est Kählerienne sur X, donc $\varphi_A := \tilde{\varphi} + A\varrho$ est une métrique lisse de courbure strictement positive dans un voisinage V de X si on fixe A assez grand.

Soit θ une fonction positive à support compact dans V telle que $\theta \equiv 1$ au voisinage de X. Soit G une métrique lisse de $\mathcal{O}(1)$ dans $\mathbb{P}^n$ telle que dd^cG est une forme de Kähler. On pose $\psi_1 = \theta\varphi_A + (1-\theta)G$, c'est une métrique lisse de $\mathcal{O}(1)$ dans $\mathbb{P}^n$. Le théorème de Chow assure que $Y = \bigcap_{i=1}^p\{s_i = 0\}$ où $s_i \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(M))$. Soit

$$\psi_2 = \frac{1}{2}G + \frac{1}{4M}\log\left[\sum_{i=1}^p |s_i|^2\right];$$

c'est une métrique de $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n$ qui est lisse hors de Y et de forme de courbure strictement positive. Notons de plus que $e^{4M\psi_2}$ est lisse. Soit

$$\psi_C := \frac{1}{4M}\log\left[e^{4M\psi_1} + e^{4M\psi_2 + C}\right].$$

Alors ψ_C est une métrique lisse de $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n$ telle que $\psi_{C|X} \equiv \varphi$ puisque $\psi_{2|X} \equiv -\infty$ et $\psi_{1|X} \equiv \tilde{\varphi}_{|X} \equiv \varphi$. De plus le lemme précédent assure que

$$e^{4M\psi_C}dd^c\psi_C \geq e^{4M\psi_1}dd^c\psi_1 + \frac{1}{2}e^Ce^{4M\psi_2}dd^cG > 0$$

pour un choix de $C > 0$ assez grand. □

Les hypothèses de régularité et de positivité dans le résultat précédent sont cruciales comme on l'a vu dans la démonstration. Nous proposons à présent une idée de démonstration différente, susceptible de fournir l'extension de métriques singulières.

Soit X une variété compacte projective, Y une sous-variété complexe de X et L un fibré holomorphe en droites positif sur X. Etant donnée $\varphi \in \mathcal{P}(Y, L_{|Y})$, on cherche $\psi \in \mathcal{P}(X, L)$ telle que $\psi_{|Y} \equiv \varphi$. On sait approximer φ dans $L^1_{\text{loc}}(Y)$ par $\varphi_j = \frac{1}{N_j}\log|s_j|$ où $s_j \in \Gamma(Y, L^{N_j}{}_{|Y})$ (cf théorème 9.1 dans [De 93] : on n'a pas besoin de la condition (C) si on ne cherche pas à contrôler les supports des diviseurs $\{s_j = 0\}$). Le théorème d'extension d'Ohsawa-Takegoshi-Manivel (cf [M 93]) donne l'existence de $S_j \in \Gamma(X, L^{N_j})$ t.q. $S_{j|Y} \equiv s_j$ ainsi qu'un contrôle de la norme L^2 de ces extensions. On peut donc extraire une sous-suite $\psi_k = \frac{1}{N_{j_k}}\log|S_{j_k}|$ qui converge dans $L^1_{\text{loc}}(X)$ vers $\psi \in \mathcal{P}(X, L)$. On éspère alors que $\psi_{|Y} \equiv \varphi$. L'exemple suivant montre qu'il n'en est rien a priori, si l'on ne dispose pas d'information supplémentaire sur les extensions holomorphes S_j.

Exemples 3.2.3 *Soit $\psi' \in \mathcal{P}(X, L)$ et $H_j \in \Gamma(X, L^{N_j})$ t.q. $\frac{1}{N_j}\log|H_j| \to \psi$ dans $L^1_{loc}(X)$ et $\frac{1}{N_j}\log|s_j| \to \varphi := \psi'_{|Y}$ dans $L^1_{loc}(Y)$, où $s_j := H_{j|Y}$. Supposons que $Y = \{g = 0\}$ est une hypersurface de X avec $g \in \Gamma(X, L)$. Soit $f \in \Gamma(X, L)$ une section holomorphe quelconque et*

$$S_j := H_j + g \cdot f^{N_j - 1} \in \Gamma(X, L^{N_j}).$$

Alors $S_{j|Y} = s_j$ mais $\frac{1}{N_j}\log|S_j| \to \psi = \max(\psi', \log|f|)$, donc $\psi_{|Y} \neq \varphi$ si on choisit f convenablement.

Pour obtenir $\psi_{|Y} \equiv \varphi$, il faut établir un résultat d'extension un peu plus précis : étant donnée $s_j \in \Gamma(Y, L^{N_j}{}_{|Y})$, on cherche une extension $S_j \in \Gamma(X, L^{N_j})$ telle que les dérivées de S_j normales à Y s'annulent jusqu'à un ordre M_j, avec $M_j/N_j \to \alpha > 0$ et avec un contrôle en norme L^2.

Proposition 3.2.4 *Pour une telle extension, toute valeur d'adhérence ψ de la suite $\frac{1}{N_j}\log|S_j|$ vérifie $\psi_{|Y} \equiv \varphi$.*

Démonstration:

Localement, on peut considérer une rétraction holomorphe $\pi : V \to U$, définie dans un voisinage tubulaire V d'un ouvert U de Y et définir $F_j = s_j \circ \pi$. Bien entendu, $\frac{1}{N_j}\log|F_j| = \pi^*(\frac{1}{N_j}\log|s_j|) \to \varphi \circ \pi$ dans V et $\varphi \circ \pi_{|Y} \equiv \varphi$. Supposons que $\frac{1}{N_j}\log|S_j| \to \psi$, alors pour tout x dans X, on a $\limsup \frac{1}{N_j}\log|S_j(x)| \leq \psi(x)$ avec égalité pour presque tout $x \in X$.

En particulier, si $x \in Y$, on obtient $\lim \frac{1}{N_j} \log |s_j(x)| = \varphi(x) \leq \psi(x)$ pour presque tout $x \in Y$, donc $\varphi \leq \psi_{|Y}$.

Réciproquement, supposons que Y est une hypersurface, elle est définie dans V par $\{h = 0\}$ où $h \in \mathcal{O}(V)$. Les fonctions F_j et S_j coïncident à l'ordre M_j sur Y donc il existe $G_j \in \mathcal{O}(V)$ t.q. $S_j = F_j + h^{M_j} \cdot G_j$. On a

$$u_j = \frac{1}{N_j} \log |h^{M_j} \cdot G_j| \leq \max \left(\frac{1}{N_j} \log |S_j|, \frac{1}{N_j} \log |F_j| \right) + \frac{\log 2}{N_j},$$

donc u_j est une suite de fonctions psh dans V qui est localement uniformément majorée. Soit elle converge vers $-\infty$ uniformément sur les compacts de V et alors $\psi \leq \varphi \circ \pi$ donc $\psi_{|Y} \equiv \varphi$, soit on peut extraire une sous-suite u_{j_k} qui converge vers $u \in PSH(V)$. Or pour $x \in Y$, on a $\nu(dd^c u_{j_k}, x) \geq \nu(\frac{M_{j_k}}{N_{j_k}} \log |h|, x) \to \alpha$, donc $\nu(u, x) \geq \alpha$ pour tout $x \in Y = \{h = 0\}$; autrement dit, $v = u - \alpha \log |h| \in PSH(V)$. On a

$$\frac{1}{N_j} \log |S_j| \leq \max \left(\frac{1}{N_j} \log |F_j|, \frac{M_j}{N_j} \log |h| + \frac{1}{N_j} \log |G_j| \right) + \frac{\log 2}{N_j},$$

donc $\psi \leq \max(\varphi \circ \pi, \alpha \log |h| + v)$ et $\psi_{|Y} \equiv \varphi$.

Si Y n'est pas une hypersurface, localement c'est une intersection complète et on peut procéder par étape successive. $\square$

S'il semble raisonnable d'éspérer montrer un tel résultat d'extension des sections holomorphes de fibrés positifs (en reprenant les techniques de [M 93] et les simplifications apportées par Berndtsson [Be 96]), il faudrait - pour pouvoir répondre à la question 2.4.5 - également contrôler le support des extensions. Ce dernier point semble beaucoup plus délicat et, probablement, au moins aussi difficile à obtenir que la condition (C) elle même.

Chapitre 4

Courants positifs de bidegré $(1,1)$ sur les variétés drapeaux de $GL_m(\mathbb{C})$

Introduction

Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on the complex projective space $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$; it is well known (see [Le-G 86] or [F-S 94]) that there is a unique plurisubharmonic function $\varphi \in PSH(\mathbb{C}^m)$ s.t. $\pi^*T = dd^c\varphi$, $\sup_B \varphi = 0$ and

$$\varphi(\lambda z) = \alpha \log|\lambda| + \varphi(z), \ \forall(\lambda, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m,$$

where $\pi : \mathbb{C}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ is the canonical projection map and α is the mass of T computed with respect to the Fubini-Study Kähler metric of $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$.

The purpose of this note is to show that there is a similar representation for the positive closed currents of bidegree $(1,1)$ on the flag manifolds of the linear group $GL_m(\mathbb{C})$. Formally a complex homogeneous manifold $X = G/H$ is flag if the closed subgroup H contains a maximal connected solvable subgroup of the complex Lie group G (H is then said to be parabolic) ; when $G = GL_m(\mathbb{C})$, there is a quite explicit construction of these manifolds (see paragraph 4.2) which actually justifies their name.

In the sequel we denote by $\mathcal{T}(X)$ the set of positive closed currents of bidegree $(1,1)$ on the complex manifold X and we use the standard normalization $d = \partial + \overline{\partial}$ and $d^c = \frac{i}{2\pi}(\overline{\partial} - \partial)$.

We first consider the particular case of the Grassmann manifold $G_{k,m}(\mathbb{C})$ of k-planes of $\mathbb{C}^m$. To a current $T \in \mathcal{T}(G_{k,m}(\mathbb{C}))$ corresponds in a unique way a function $\varphi \in PSH(\mathbb{C}^{mk})$ satisfying the functional equation

$$\varphi(A \cdot Z) = \alpha \log|\det A| + \varphi(Z), \ \forall(A, Z) \in GL_k(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{mk},$$

and normalized so that $\sup_B \varphi = 0$, where B denotes the unit ball in $\mathbb{C}^{mk}$ (see theorem 4.1.1). We give an explicit regularization process for these functions.

In paragraph 4.2 we prove a similar representation for the positive closed currents of bidegree $(1,1)$ on a general irreducible flag manifold of the linear group (theorem 4.2.1). The non irreducible case is finally considered in paragraph 4.3. It is a straightforward consequence of the results established in paragraph 4.2 but the notations become quite tricky.

4.1 Grassmannians

Let $X = G_{k,m}(\mathbb{C})$ be the Grassmann manifold of k-planes of $\mathbb{C}^m$ ($1 \leq k \leq m$). If we fix a basis $(Z^1, \ldots, Z^k)$ of an element E in X, every other basis is obtained from this one by multiplication by a matrix $A \in GL_k(\mathbb{C})$. Hence $X = M_{k,m}(\mathbb{C})/GL_k(\mathbb{C})$ where $M_{k,m}(\mathbb{C})$ stands for the matrices with k lines and m columns of rank k, and the action of $GL_k(\mathbb{C})$ is by multiplication on the left. We set $\pi : \mathbb{C}^{mk} \setminus O^k_m = M_{k,m}(\mathbb{C}) \to X$, where O^k_m stands for the (k,m)- matrices of rank strictly less than k, and we adopt the matrix notation $Z = [Z_{ij}] = [Z^i]_{1 \leq i \leq k}$ for the elements in $\mathbb{C}^{mk} = \mathcal{M}_{k,m}(\mathbb{C})$. When $k = 1$, $O^k_m = \{0\}$ and $X = \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$.

Let $(e_1, \ldots, e_m)$ be the canonical basis of $\mathbb{C}^m$, and $e_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$ be the standard basis of $\Lambda^k \mathbb{C}^m$. If $Z = [Z^i]_{1 \leq i \leq k} \in \mathbb{C}^{mk}$, $Z^1 \wedge \ldots \wedge Z^k = \sum_I \Delta_I(Z) e_I$, where the Δ_I are homogeneous polynomials of degree k satisfying $\Delta_I(A \cdot Z) = (\det A) \cdot \Delta_I(Z)$, for any $A \in GL_k(\mathbb{C})$. Thus there is a well defined map

$$\begin{array}{rcl} \Phi : X & \to & \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^m) \\ \pi(Z) & \to & [Z^1 \wedge \ldots \wedge Z^k] \end{array}$$

which turns out to be a holomorphic embedding of X onto a compact complex submanifold of $\mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^m)$. This is the Plücker embedding, and the $\Delta_I(Z)$'s are called the Plücker-Cayley-Grassmann coordinates.

The charts $\mathcal{U}_I = \{\pi(Z) \in X \,/\, \Delta_I(Z) \neq 0\}$ are biholomorphic to $\mathbb{C}^{k(m-k)}$ (if we formally set $Z = [A_I, B_I] \in \mathcal{U}_I$ where $A_I(Z)$ is the square matrix obtained from Z in keeping only the k columns $(i_1, \ldots, i_k)$, then $\psi_I : \pi(Z) \in \mathcal{U}_I \to A_I^{-1}(Z).B_I(Z) \in \mathbb{C}^{k(m-k)}$ is a biholomorphic map) and form an acyclic open covering of X, thus X is a projective algebraic manifold of dimension $k(m-k)$ (see [G-H 78]).

Let $\mathcal{P} = \bigcup_{\alpha \geq 0} \mathcal{P}_\alpha$ with

$$\mathcal{P}_\alpha = \left\{ \varphi \in PSH(\mathbb{C}^{mk}) \,/\, \varphi \text{ satisfies } (*)_\alpha \text{ and } \sup_B \varphi = 0 \right\},$$

where B denotes the unit ball of $\mathbb{C}^{mk}$ and

$$(*)_\alpha \quad \varphi(A\cdot Z)=\alpha\log|\det A|+\varphi(Z),\ \ \forall(A,Z)\in GL_k(\mathbb{C})\times M_{k,m}(\mathbb{C}).$$

To a function $\varphi\in\mathcal{P}$ we associate a current $T=\mathcal{L}(\varphi)\in\mathcal{T}(X)$ in the following way: if U is an open subset of X and $s:U\to\mathbb{C}^{mk}\setminus O_m^k$ is a local holomorphic section of π on U, we define $T:=T_s=dd^c(\varphi\circ s)$ in U. If s' is another holomorphic section of π in U', then $s'=A\cdot s$ in $U\cap U'$, where $A\in\mathcal{O}(U\cap U',GL_k(\mathbb{C}))$; therefore $\det A$ is a nowhere vanishing holomorphic function hence

$$T_{s'}=dd^c(\varphi\circ s')=\alpha dd^c(\log|\det A|)+dd^c(\varphi\circ s)=T_s,$$

and $T=\mathcal{L}(\varphi)$ is a globally well defined positive closed current of bidegree $(1,1)$ on X. We have the following

Theorem 4.1.1 *The operator $\mathcal{L}$ is an isomorphism between $\mathcal{P}$ (with the L^1_{loc} topology) and $\mathcal{T}(G_{k,m}(\mathbb{C}))$ (endowed with the weak topology of currents). Moreover, if $\varphi\in\mathcal{P}_\alpha$ and $T=\mathcal{L}(\varphi)$, then*

$$\|T\|=\int_{G_{k,m}(\mathbb{C})}T\wedge\omega^{k(m-k)-1}=\alpha,$$

where $\omega=\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\log\det(Z^t\overline{Z})\right)$ denotes the Fubini-Study metric of $\mathbb{P}(\Lambda^k\mathbb{C}^m)$ restricted to $G_{k,m}(\mathbb{C})$ in the Plücker embedding. The Lelong number of T at the point $\pi(W)$ is given by

$$\nu(T,\pi(W))=\sup\left\{\gamma\geq 0\,/\,\varphi(Z)\leq\frac{\gamma}{2}\log[\det(Z-W)^t(\overline{Z-W})]+O(1)\right\}.$$

We first need to set up some informations about the class $\mathcal{P}$. It is well known that for $Z=[Z_{ij}]\in\mathcal{M}_{k,m}(\mathbb{C})=\mathbb{C}^{mk}$, the matrix $Z.{}^t\overline{Z}$ is hermitian positive, and it is definite iff Z is of rank k (i.e. $Z\in M_{k,m}(\mathbb{C})$).

Consider the map $\Phi:Z\in M_{k,m}(\mathbb{C})\to Z.{}^t\overline{Z}\in\mathcal{H}_k^+$, where

$$\mathcal{H}_k^+=\{\text{positive definite hermitian square matrices of size k}\},$$

and ${}^tW=[W_{ji}]$ stands for the transpose matrix of $W=[W_{ij}]$. One easily checks that Φ is a surjective map. For $H\in\mathcal{H}_k^+$, we set

$$\mathcal{S}_H=\left\{W\in\mathbb{C}^{mk}\,/\,W.{}^t\overline{W}=H\right\};$$

this is a compact real-analytic submanifold of $\mathbb{C}^{mk}$ which is included in the sphere of radius $\sqrt{tr\,H}$ centered at 0, since $tr\,H=tr\,W.{}^t\overline{W}=\|W\|^2$. Since any $H\in\mathcal{H}_k^+$ has a well defined positive square root, setting $W=H^{-1/2}\cdot Z$, we obtain $W.{}^t\overline{W}=I_k$ for $Z\in\mathcal{S}_H$ (I_k stands for the matrix identity). Thus

$$\mathcal{S}_H=H^{1/2}\cdot\mathcal{S}_{I_k}$$

We define

$$\Gamma(k,m,\mathbb{C}) := \left\{\gamma \in GL_{mk}(\mathbb{C}) \,/\, \gamma(W).^t\overline{\gamma(W)} = W.^t\overline{W},\ \forall W \in \mathbb{C}^{mk}\right\}.$$

This is a compact subgroup of the unitary group Γ_{mk} of $\mathbb{C}^{mk}$ which acts naturally on the "spheres" S_H. If $d\gamma$ denotes its Haar mesure, we easily check that for $Z \in M_{k,m}(\mathbb{C})$ and $H \in \mathcal{H}_k^+$:

$$\int_{S_H} f\left((Z.^t\overline{Z})^{1/2}\cdot W\right) d\sigma_{S_H}(W) = \int_{\Gamma(k,m,\mathbb{C})} f\left(H\cdot\gamma(Z)\right) d\gamma,\ \ \forall f \in L^1_{loc}(\mathbb{C}^{mk}).$$

Let χ_ε be a radial approximation of the identity for the convolution product in $\mathbb{C}^{mk}$: $\chi_\varepsilon(Z) = \rho_\varepsilon(\|Z\|^2) = \frac{1}{\varepsilon^{2mk}}\rho(\|\frac{W}{\varepsilon}\|^2)$, where ρ is a smooth non-negative function with compact support s.t. $\int_{\mathbb{C}^{mk}} \rho(\|W\|^2)dW = 1$. For $\varphi \in \mathcal{P}_\alpha$, we define

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(Z) &= \int_{\mathbb{C}^{mk}} \varphi(Z-(Z.^t\overline{Z})^{1/2}\cdot W)\chi_\varepsilon(W)dW \\ &= \Delta(Z)^m.\int_{\mathbb{C}^{mk}} \varphi(Z-(Z.^t\overline{Z})\cdot W)\rho_\varepsilon(< Z.^t\overline{Z}\cdot W, W >)dW \\ &= \frac{1}{\Delta(Z)^m}\int_{\mathbb{C}^{mk}} \varphi(W)\rho_\varepsilon(< Z-W, (Z.^t\overline{Z})^{-1}\cdot(Z-W) >)dW,\end{aligned}$$

where $\Delta(Z) = \det(Z.^t\overline{Z})$ and $< Z, W >= {}^T\overline{W}.Z$ denotes the usual hermitian scalar product on $\mathbb{C}^{mk}$, the equalities being justified by a linear change of variables (for $Z \in M_{k,m}(\mathbb{C})$). Note that a change of variables $W' = A\cdot W$ (where $A \in GL_k(\mathbb{C})$) has jacobian equal to $|\det A|^{2m}$ since it corresponds to the multiplication by a block-diagonal matrix of $GL_{mk}(\mathbb{C})$ which has m-blocks A on its diagonal. We have the following

Lemma 4.1.2 *The functions φ_ε lie in $\mathcal{P}_\alpha \cap C^\infty(\mathbb{C}^{mk}\setminus O_m^k)$ and decrease pointwise to φ as ε decreases to 0.*

Proof: The smoothness of φ_ε is clear from the last equality above and using the second one we get :

$$\begin{aligned}&\varphi_\varepsilon(AZ) \\ &\quad= \Delta(AZ)^m\int_{\mathbb{C}^{mk}} \varphi(AZ-A(Z.^t\overline{Z})^t\overline{A}W)\rho_\varepsilon(< AZ.^t\overline{AZ}W, W >)dW \\ &\quad= \alpha\log|\det A|\int_{\mathbb{C}^{mk}} \Delta(AZ)^m\rho_\varepsilon(< AZ.^t\overline{AZ}W, W >)dW \\ &+\Delta(Z)^m\int_{\mathbb{C}^{mk}} \varphi(Z-(Z.^t\overline{Z})^t\overline{A}W)\rho_\varepsilon(< (Z.^t\overline{Z})^t\overline{A}W,{}^t\overline{A}W >)|\det A|^{2m}dW,\end{aligned}$$

since $< AZ.^t\overline{AZ}W, W >= {}^T\overline{W}.AZ.^t\overline{Z}^t\overline{A}W =< (Z.^t\overline{Z})^t\overline{A}W,{}^t\overline{A}W >$.

Now $\int_{\mathbb{C}^{mk}} \Delta(AZ)^m \rho_\varepsilon(< AZ.^t\overline{AZ}W, W > dW = 1$ and $|\det A|^{2m}$ is the jacobian of the change of variables $W \mapsto {}^t\overline{A}W$, hence

$$\varphi_\varepsilon(A \cdot Z) = \alpha \log|\det A| + \varphi_\varepsilon(Z).$$

Since φ_ε and φ have the same homogeneity constant and since, for $A = (Z.^t\overline{Z})^{-1/2}$ and $W = A \cdot Z$, we get $W.^t\overline{W} = I_k$, it is enough to prove the convergence for $Z \in \mathcal{S}_{I_k}$. But in this case the first equality yields $\varphi_\varepsilon(Z) = \int \varphi(Z-W)\chi_\varepsilon(W)dW$ and the second term is the usual regularization process of plurisubharmonic functions in $\mathbb{C}^{mk}$ which has the desired convergence property.

There remains to show that $\varphi_\varepsilon \in PSH(\mathbb{C}^{mk})$; now

$$\begin{aligned}
\varphi_\varepsilon(Z) &= \int_{\mathbb{C}^{mk}} \varphi(Z - (Z.^t\overline{Z})^{1/2} \cdot W)\rho_\varepsilon(\|W\|^2)dW \\
&= \int_{H\in\mathcal{H}_k^+} \rho_\varepsilon(tr\, H) \int_{W\in\mathcal{S}_H} \varphi(Z - (Z.^t\overline{Z})^{1/2} \cdot W)\, d\sigma_H(W)\, dH \\
&= \int_{H\in\mathcal{H}_k^+} \rho_\varepsilon(tr\, H) \int_{\gamma\in\Gamma(k,m,\mathbb{C})} \varphi(Z - H\cdot\gamma(Z))\, d\gamma\, dH,
\end{aligned}$$

where dH denotes the Haar measure on the locally compact group $\mathcal{H}_k^+$. Since $\forall H, \forall\gamma$, $Z \mapsto Z - H\cdot\gamma(Z)$ is holomorphic, and $\rho_\varepsilon \geq 0$, φ_ε is plurisubharmonic. □

Remark 4.1.3 *One can more generally regularize the positive closed currents and the positive (singular) metrics of holomorphic line bundles on a complex homogeneous manifold (see [Hu 94] and the Appendix 2.6).*

Example 4.1.4 *Consider* $f(Z) = \frac{1}{2}\log\det(Z.^t\overline{Z})$. *Clearly,* $f \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^{mk} \setminus O_m^k)$ *and we easily check that* $\det(Z.^t\overline{Z}) = \sum |\Delta_I(Z)|^2$ *where the* $\Delta_I(Z)$ *are the Plücker-Cayley-Grassmann coordinates and the sum is taken over all k-indices* $I = (i_1, \ldots, i_k)$ *s.t.* $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$, *thus* $\omega = \mathcal{L}(f)$ *is exactly the Fubini-Study form of* $\mathbb{P}(\Lambda^k\mathbb{C}^m)$ *restricted to X in the Plücker embedding, hence it is a Kähler form on X. Moreover if* f_I *denotes the restriction of f in a chart* $\mathcal{U}_I \simeq \mathbb{C}^{k(m-k)}$, *it is standard, since* f_I *grows exactly like* $\log^+|z|$ *that* $\int_X \omega^{k(m-k)} = \int_{\mathbb{C}^{k(m-k)}} (dd^c f_I)^{k(m-k)} = 1$ *(see e.g [K 91]).*

Proof of theorem 4.1.1:

Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on $G_{k,m}(\mathbb{C})$; $S = \pi^*T$ is a well defined positive closed current of bidegree $(1,1)$ in $\mathbb{C}^{mk} \setminus O_m^k$. Now O_m^k is a closed subset of $\mathbb{C}^{mk}$ of Hausdorff dimension equal to $2m(k-1) < 2(mk-1)-1$ $(m \geq 2)$; it follows from a theorem of Harvey [Ha-P 75] that S has locally bounded mass near O_m^k and extends trivially in a positive closed current of bidegree $(1,1)$ in all of $\mathbb{C}^{mk}$. Hence there exists $u \in PSH(\mathbb{C}^{mk})$ s.t. $S = dd^c u$.

Consider $v(Z) = \int_{\Gamma_k} u(\gamma \cdot Z) d\gamma$ where $d\gamma$ denotes the Haar measure on the unitary group $\Gamma_k \subset GL_k(\mathbb{C})$. Clearly $v \in PSH(\mathbb{C}^{mk})$ and if we set $h_\gamma : Z \mapsto \gamma \cdot Z$, then

$$h_\gamma^* S = h_\gamma^*(\pi^* T) = (\pi \circ h_\gamma)^* T = \pi^* T = S,$$

hence $dd^c v = S$ and v is invariant under the action of any element of Γ_k.

Let $A \in GL_k(\mathbb{C})$ and define $w_A(Z) = v(A \cdot Z) - v(Z)$. Since $U_\theta = e^{i\theta} \cdot I_k \in \Gamma_k$ commutes with A, we have

$$w_A(e^{i\theta} \cdot Z) = v(A \cdot U_\theta \cdot Z) - v(U_\theta \cdot Z) = w_A(Z),$$

i.e w_A is invariant by rotation. Now w_A is pluriharmonic in $\mathbb{C}^{mk}$ since $\pi(A.) = \pi(.)$, hence it is constant and we get $v(A \cdot Z) = v(Z) + c(A)$, $\forall (A, Z) \in GL_k(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{mk}$. The polar decomposition $A = U \cdot H$, where $U \in \Gamma_k$ and $H \in \mathcal{H}_k^+$ is the positive square root of ${}^t\overline{A} \cdot A$, implies $c(A) = c(H) = f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ where the λ_j's are the positive square roots of the eigenvalues of ${}^t\overline{A} \cdot A$. Since we can change the order of the λ_j's (permutation matrices are unitary), f is necessarily symmetrical in $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. We clearly have $c(A \cdot B) = c(A) + c(B)$ hence by symmetry

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(\lambda_1, 1, \ldots, 1) + \ldots + f(1, \ldots, 1, \lambda_k) = \sum_{j=1}^{k} g(\lambda_j),$$

where $g(\lambda) = f(\lambda, 1, \ldots, 1)$.

It is well known that $M(0, r, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta$ is an increasing function of r if v is subharmonic. In our case, $M(0, |\lambda| \cdot |Z|, v) = v(|\lambda \cdot Z|) = v(\lambda Z) \geq v(Z)$ for every complex number λ s.t. $|\lambda| \geq 1$, hence $g(\lambda) \geq 0$ if $|\lambda| \geq 1$.

Consider $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by $h(t) = g(e^t)$; then $h(t + t') = h(t) + h(t')$, $h(0) = 0$ and $h(t) \geq 0$ if $t \geq 0$, hence h is increasing and there exists $\alpha \in \mathbb{R}^+$ s.t. $h(t) = \alpha t$; therefore $g(\lambda) = \alpha \log |\lambda|$ and $c(A) = \alpha \log |\det A|$. This proves the surjectivity of the operator $\mathcal{L}$.

Since d and d^c are continuous, $\mathcal{L}$ is continuous. In particular if $T = \mathcal{L}(\varphi)$, for $\varphi \in \mathcal{P}_\alpha$, and $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{P}_\alpha$ are the smooth functions defined in lemma 4.1.2, they tend to φ in L^1_{loc} and $T_\varepsilon = \mathcal{L}(\varphi_\varepsilon)$ are smooth forms which tend to T in the weak sense of currents. But $T_\varepsilon - \alpha\omega = dd^c v_\varepsilon$ for some smooth function

$v_\varepsilon(\pi(Z)) = \varphi_\varepsilon(Z) - \frac{\alpha}{2}\log|\det(Z.{}^t\overline{Z})|$ on X. Using Stokes theorem we get

$$\begin{aligned}\|T\| &= \int T \wedge \omega^{k(m-k)-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int T_\varepsilon \wedge \omega^{k(m-k)-1}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int (\alpha\omega + dd^c v_\varepsilon)\wedge \omega^{k(m-k)-1}\\ &= \int \alpha\omega^{k(m-k)} = \alpha\end{aligned}$$

Assume $\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}(\psi) = T$ then $\pi^*T = dd^c\varphi = dd^c\psi$ in $\mathbb{C}^{mk}$ and the two functions have the same homogeneity constant, hence $\varphi - \psi$ defines a pluriharmonic function on X which is compact, thus $\varphi - \psi$ is constant. The normalization implies then $\varphi \equiv \psi$, and $\mathcal{L}$ is injective.

Now let $T_j \to T$ in $\mathcal{T}(X)$, and $v_j = \mathcal{L}^{-1}(T_j)$, $v = \mathcal{L}^{-1}(T)$. We denote by α_j, α the corresponding homogeneity constants; then $\alpha_j = \|T_j\| \to \|T\| = \alpha$. Since $\sup_B v_j = 0$ and (α_j) is bounded, the sequence (v_j) is locally uniformly bounded from above and does not converge uniformly to $-\infty$. We can extract some convergent subsequence $v_{j_p} \to u$ in L^1_{loc}. Necessarily $u \in \mathcal{P}_\alpha$ and $\mathcal{L}(u) = T$, hence $u \equiv v$ by injectivity of $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}^{-1}$ is continuous.

The last assertion is a straightforward application, working in a coordinate chart, of the standard fact that if $T = dd^c u$ for some psh function u in a neighborhood of the point x and if ζ denotes local coordinates around x, then $\nu(T,x) = \sup\{\gamma \geq 0 \,/\, u(\zeta) \leq \gamma\log|\zeta - x| + O(1)\}$ (see e.g. [De 91]). □

Remark 4.1.5 *Let $\varphi \in \mathcal{P}$ and let $L_\varphi(Z).W$ denote the Levi form of φ at Z applied to $W \in \mathbb{C}^{mk}$. A straightforward but fastidious computation shows that:*

i) $\forall A \in GL_k(\mathbb{C})$, and $\forall (Z,W) \in M_{k,m}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{mk}$, $L_\varphi(AZ).AW = L_\varphi(Z).W$, thus to determine the Levi form of φ it is sufficient to compute it a a point $Z \in \mathcal{S}_{I_k}$ (i.e. $Z.{}^t\overline{Z} = I_k$).

ii) $\forall Z \in \mathbb{C}^{mk}$ and $\forall W \in \pi(Z)$, $L_\varphi(Z).W = 0$.

iii) $\mathcal{L}(\varphi)$ is a Kähler form on X iff $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M_{k,m}(\mathbb{C}))$ and

$$L_\varphi(Z).W = 0 \iff \exists A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \text{ s.t. } W = A.Z \iff W \in \pi(Z).$$

In particular if $f(Z) = \frac{1}{2}\log\det(Z.{}^t\overline{Z})$ and $Z \in \mathcal{S}_{I_k}$, one can check that

$$L_f(Z).W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left[\|W^i\|^2 - \|p_Z(W^i)\|^2\right],$$

where p_Z denotes the orthogonal projector onto the k-plane $\pi(Z)$ generated by Z, hence $L_\varphi(Z).W \geq 0$ with equality iff $W \in \pi(Z)$.

4.2 Irreducible flag manifolds of $GL_m(\mathbb{C})$

We fix a decomposition of the integer m:

$$m = d_1 + d_2 + \ldots + d_{k+1},\ k \in \mathbb{N}^*,\ d_j \in \mathbb{N}^*.$$

We note $d = (d_1, \ldots, d_{k+1})$ and $D_j = \sum_{l=1}^{j} d_l$. A flag of type d in $\mathbb{C}^m$ is a sequence of linear subspaces

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{k+1} = \mathbb{C}^m$$

s.t. $\dim V_j = D_j$, $\forall 1 \leq j \leq k+1$. We denote by $\mathbb{F}(d)$ the set of all flags of $\mathbb{C}^m$ of type d. In particular, for $k=1$ we get $\mathbb{F}(1, m-1) = \mathbb{P}^{m-1}$ and $\mathbb{F}(s, m-s) = G_{s,m}(\mathbb{C})$. The group $GL_m(\mathbb{C})$ acts in a natural way on $\mathbb{F}(d)$, and this action is transitive. We can fix a special point V^0 in $\mathbb{F}(d)$ to determine the corresponding stationary subgroup $H(d) := \{A \in GL_m(\mathbb{C}) \,/\, A \cdot V^0 = V^0\}$; $\mathbb{F}(d)$ will then be isomorphic to the quotient $GL_m(\mathbb{C})/H(d)$. If (z_j) denotes the canonical coordinates in $\mathbb{C}^m$, we set

$$V_j^0 = \left\{ z \in \mathbb{C}^m \,/\, z_m = \cdots = z_{1+D_j} = 0 \right\} \quad (0 \leq j \leq k+1).$$

Then $H(d)$ consists of invertible matrices of size m with square invertible blocks of size $d_1, d_2, \ldots, d_{k+1}$ along the main diagonal, below these blocks there are zeros, and above the elements are arbitrary. $H(d)$ contains the subgroup of upper triangular matrices which is a Borel subgroup (i.e. a maximal connected solvable subgroup) in $GL_m(\mathbb{C})$ hence $H(d)$ is a parabolic subgroup, and one can show conversely that any parabolic subgroup of $GL_m(\mathbb{C})$ is conjugate to one of the subgroups $H(d)$ (see [Ak 95]). Thus $\mathbb{F}(d) \simeq GL_m(\mathbb{C})/H(d)$ is a flag manifold of $GL_m(\mathbb{C})$ of dimension

$$s = m^2 - \sum_{j=0}^{k} d_{j+1}(m - D_j) = \sum_{j=1}^{k} d_{j+1} Dj,$$

(with the convention $D_0 = 0$), and conversely any irreducible flag manifold of this group can be obtained in this way (see [Ak 95] or [M 97] for further information about these fundamental manifolds).

For our purpose, we adopt the following description of $\mathbb{F}(d)$.
Since $d_{k+1} = m - \sum_{j=1}^{k} d_j = m - D_k$ is already determined by the other d_j's, we can forget it, and $V_{k+1} = \mathbb{C}^m$ as well. We denote by O_m^d the set of matrices of $\mathcal{M}_{D_k,m}$ (D_k lines and m rows) which are of rank strictly less than D_k. There is a canonical projection map

$$\pi : \mathbb{C}^{mD_k} \setminus O_m^d \to \mathbb{F}(d) = (\mathbb{C}^{mD_k} \setminus O_m^d)/H(d'),$$

where $d' = (d_1, \ldots, d_k)$ and $H(d')$ is the set of invertible square matrices of size D_k with square invertible blocks of size $d_1, \ldots, d_k$ along the main diagonal, below these blocks there are zeros and above the elements are arbitrary.

Theorem 4.2.1 *Let $d = (d_1, \ldots, d_k, m - D_k)$ be a decomposition of the integer $m \geq 2$, $D_k = \sum_{j=1}^{k} d_j$, and let $\pi : \mathbb{C}^{mD_k} \setminus O_m^d \to \mathbb{F}(d)$ be the canonical projection map.*

There is an isomorphism $\mathcal{L}$ between the set $\mathcal{P} = \cup_{\alpha \in \mathbb{R}_+^k} \mathcal{P}_\alpha$ and $\mathcal{T}(\mathbb{F}(d))$, where $\mathbb{R}_+^k = \{\alpha \in \mathbb{R}^k \,/\, \forall j,\ \alpha_j \geq 0\}$ and $\mathcal{P}_\alpha = \{\varphi \in PSH(\mathbb{C}^{mD_k}) \,/\, \sup_B \varphi = 0$ and φ satisfies $(*)_\alpha\}$, where

$$(*)_\alpha \quad \varphi(A \cdot Z) = \varphi(Z) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \log |\det A_j| \,,$$

$\forall Z \in M_{D_k,m}(\mathbb{C})$ and $\forall A \in H(d')$ which has k blocks $A_j \in GL_{d_j}(\mathbb{C})$ on its diagonal.

Moreover if $T = \mathcal{L}(\varphi)$ for some $\varphi \in \mathcal{P}_\alpha$, then $\pi^* T = dd^c \varphi$ and $\alpha_i = \int_{X_d} p^* T \wedge \Omega_i$, where $p : X_d := G_{d_1,m}(\mathbb{C}) \times \ldots G_{d_k,m}(\mathbb{C}) \to \mathbb{F}(d)$ is the natural projection map and $\Omega_i = \omega_1^{d_1(m-d_1)} \wedge \ldots \wedge \omega_i^{d_i(m-d_i)-1} \wedge \ldots \wedge \omega_k^{d_k(m-d_k)}$, where ω_j stands for the pull-back of the Fubini-Study metric of the j^{th} factor.

Proof: We set $N = mD_k$.

Given $\varphi \in \mathcal{P}$, we define a positive closed current $T = \mathcal{L}(\varphi) \in \mathcal{T}(\mathbb{F}(d))$ in a very similar way to what has been done in the case of the Grassmannian, setting $T := dd^c(\varphi \circ s)$ whenever s is a local holomorphic section of π.

Let T be a positive closed current of bidegree $(1,1)$ on $\mathbb{F}(d)$; we can define a positive closed current of bidegree $(1,1)$ in $\mathbb{C}^N \setminus O_m^d$ by setting $S = \pi^* T$. Since O_m^d is a closed subset of $\mathbb{C}^N$ of Hausdorff dimension $2m(D_k - 1) < 2(N-1) - 1$ $(m \geq 2)$, S extends trivially in a positive closed current of bidegree $(1,1)$ in all of $\mathbb{C}^N$, which satisfies $f_A^* S = S$, for all $A \in H(d')$, where $f_A : Z \in \mathbb{C}^N \to A \cdot Z \in \mathbb{C}^N$ (with the matricial notation $Z = [Z_{ij}]_{1 \leq i \leq D_k; 1 \leq j \leq m}$ for the points in $\mathbb{C}^N$, as it was done for the Grassmaniann).

We can thus write $S = dd^c u$ for some $u \in PSH(\mathbb{C}^N)$. We average u on the compact subgroup $\Gamma(d') = \Gamma_{d_1} \times \ldots \times \Gamma_{d_k}$ of the unitary group Γ_{D_k} to obtain a function $v \in PSH(\mathbb{C}^N)$ s.t. $dd^c v = S$ and v is invariant under the action of $\Gamma(d')$.

Let $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^k) \in (\mathbb{C}^*)^{D_k}$ with $\lambda^j = (\lambda_1^j, \ldots, \lambda_{d_j}^j) \in (\mathbb{C}^*)^{d_j}$ and Δ_λ be the diagonal matrix of $GL_{D_k}(\mathbb{C})$ with $\lambda_1^1, \ldots, \lambda_{d_1}^1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_{d_k}^k$ on its diagonal. We set $w_\lambda(Z) = v(\Delta_\lambda \cdot Z) - v(Z)$. This is a pluriharmonic function in $\mathbb{C}^N$ which is invariant by rotation since the matrices $e^{i\theta} \cdot I_{D_k}$ are in $\Gamma(d')$ and commute with any other matrix. Hence $w_\lambda(Z) = c(\lambda)$ is constant and satisfies $c(\lambda \cdot \mu) = c(\lambda) + c(\mu)$, with the obvious notations.

We can split c into $c(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} c_j(\lambda^j)$, each c_j satisfying a similar functional equation. Since the permutation matrices are unitary, we can write for each j:

$$c_j(\lambda^j) = f_j(\lambda_1^j) + \ldots + f_j(\lambda_{d_j}^j).$$

Since we clearly have $f_j(1) = 0$ and $f_j(a) \geq 0$ for every complex number a s.t. $|a| \geq 1$ (average properties of plurisubharmonic functions when restricted to linear subspaces), we get the existence of a positive constant $\alpha_j \in \mathbb{R}^+$ s.t. $f_j(a) = \alpha_j \log |a|$. This leads to

$$v(\Delta_\lambda \cdot Z) = v(Z) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \log |\det\ \Delta_j|,$$

where Δ_j stands for the j^{th} block of the diagonal of Δ_λ.

The invariance of v under the action of $\Gamma(d')$ and the polar decomposition insures that

$$v(A \cdot Z) = v(Z) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \log |\det\ A_j|,$$

for every invertible block-diagonal matrix A with k blocks A_j of size d_j.

Since v is invariant by rotation, we have $v(A \cdot Z) = v(Z) + c(A)$ for every matrix $A \in H(d')$ and we want to show now that $c(A) = 0$ if $A \in H(d')$ is an upper-triangular matrix with diagonal equal to the identity matrix. We need the following:

Lemma 4.2.2 *Let $A_s \in GL_s(\mathbb{C})$ be an upper-triangular matrix whose diagonal consists of complex numbers $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ satisfying*

$$\lambda_1 = 1 \text{ and } \lambda_{j+1}^{2^j} = -\lambda_j^{2^j},\ 1 \leq j \leq s-1,$$

then $A_s^{2^s} = \Delta_s^{2^s}$ where Δ_s stands for the diagonal (matrix) of A_s.

Proof of the lemma:

We show this by induction on $s \geq 1$. It is obvious for $s = 1$, so assume it has been proved for some $s \geq 1$, and let $A_{s+1} \in GL_{s+1}(\mathbb{C})$ where the diagonal elements of A_{s+1} are satisfying the required relations. We have by induction hypothesis:

$$A_{s+1}^{2^s} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{2^s} & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & \lambda_2^{2^s} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_s^{2^s} & a_s \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_{s+1}^{2^s} \end{bmatrix},$$

for some complex numbers $a_1, \dots, a_s$. Hence

$$A_{s+1}^{2^{s+1}} = A_{s+1}^{2^s}.A_{s+1}^{2^s} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{2^{s+1}} & \dots & 0 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_s^{2^{s+1}} & b_s \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{s+1}^{2^{s+1}} \end{bmatrix},$$

where $b_j = \lambda_j^{2^s}.a_j + a_j.\lambda_{s+1}^{2^s} = 0$ thanks to the relations that the λ_j's satisfy. □

Since $c(A \cdot B) = c(A) + c(B)$, we obtain $c(A_s) = c(\Delta_s)$; but $A_s = \Delta_s(I_{D_k} + N)$ hence $c(I_{D_k} + N) = 0$. Since the elements above the diagonal were arbitrary, this proves that $c(I_{D_k} + N) = 0$ for any upper-triangular nilpotent matrix N. In particular, if $A \in H(d')$ has k blocks A_j along its diagonal, then $c(A)$ only depends on these blocks, and we have thus associated to any positive closed current T of bidegree $(1,1)$ on $\mathbb{F}(d)$ a function $v \in PSH(\mathbb{C}^N)$ and non-negative constants $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ s.t:

$$\pi^* T = dd^c v \text{ and } v(A \cdot Z) = v(Z) + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \log|\det A_j|, \ \forall Z, A,$$

where $A_1, \dots, A_k$ are the blocks of size $d_1, \dots, d_k$ along the diagonal of A. We normalize v so that $\sup_B v = 0$ (B is the unit ball of $\mathbb{C}^N$). This proves the surjectivity of $\mathcal{L}$.

There is a natural projection map $p : X_d = G_{d_1,m}(\mathbb{C}) \times \dots \times G_{d_k,m}(\mathbb{C}) \to \mathbb{F}(d)$ induced by the inclusion $\mathcal{D}(d') \subset H(d')$, where $\mathcal{D}(d')$ denotes the block-diagonal matrices of $GL_{D_k}(\mathbb{C})$ with k invertible blocks of size $d_1, \dots, d_k$ on the diagonal. The cohomology group $H^{1,1}(X_d, \mathbb{C})$ is isomorphic to $\mathbb{C}^k$ and is generated by $\omega_1, \dots, \omega_k$, where ω_j denotes the pull-back of the Fubini-Study metric on the j^{th} factor; clearly if $T = \mathcal{L}(u) \in \mathcal{T}(\mathbb{F}(d))$ with $u \in \mathcal{P}_\alpha$, then $p^*T \in \mathcal{T}(X_d)$ is cohomologous to $\sum_{j=1}^k \alpha_j \omega_j$, and $\alpha_j = \int_{X_d} p^*T \wedge \Omega_j$ as stated in the theorem. Thus if $T = \mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v)$, with $u \in \mathcal{P}_\alpha$ and $v \in \mathcal{P}_\beta$, then $\alpha = \beta$ and $\pi^*T = dd^c u = dd^c v$, hence $u - v$ is a radial pluriharmonic function in $\mathbb{C}^N$, thus it is constant and the normalization yields $u \equiv v$, i.e. $\mathcal{L}$ is injective.

Since d and d^c are continuous, $\mathcal{L}$ is continuous. Conversely let $T_l \to T$ in $\mathcal{T}(\mathbb{F}(d))$ and $v_l = \mathcal{L}^{-1}(T_l) \in \mathcal{P}_{\alpha^{(l)}}$, $v = \mathcal{L}^{-1}(T) \in \mathcal{P}_\alpha$. One easily checks that $p^*T_l \to p^*T$ in $\mathcal{T}(X_d)$ hence $\alpha_j^{(l)} \to \alpha_j$ for each j; since moreover $\sup_B v_l = 0$, the sequence (v_l) is uniformly bounded from above on each compact subset of $\mathbb{C}^N$ and does not converge uniformly to $-\infty$. We can extract a convergent subsequence $v_{l_p} \to u$ in $L^1_{loc}(\mathbb{C}^N)$; now $\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(v) = T$ therefore $u \equiv v$ by injectivity of $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}^{-1}$ is continuous; this completes the proof. □

We now consider the case of "complete" irreducible flags (see [M 97]).

Proposition 4.2.3 *Let $T = \mathcal{L}(\varphi) \in \mathcal{T}(\mathbb{F}(d))$ with $\varphi \in \mathcal{P}_\alpha$ and assume $d_1 = d_2 = \cdots = d_k$ (i.e. $\mathbb{F}(d)$ is a complete flag).*

i) Then $0 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_k$.

ii) Let $p_i : \mathbb{F}(d) \to G_{D_i',m}(\mathbb{C})$ be the natural projection map, where $D_i' = D_k - D_{i-1} = (k-i+1)d_1$, $1 \leq i \leq k$, and let θ_i be the pull back by p_i of the Fubini-Study Kähler form on $G_{D_i',m}(\mathbb{C})$; then $\theta := \sum_{i=1}^k \varepsilon_i\theta_i$ is a Kähler form on $\mathbb{F}(d)$ if $\varepsilon_i > 0$ for each i.

iii) T is cohomologous to a Kähler form iff $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k$.

If T is not cohomologous to a Kähler form, there exists a morphism $f : \mathbb{F}(d) \to Y$, where Y is a subflagmanifold of $\mathbb{F}(d)$, and there exists $T' \in \mathcal{T}(Y)$ s.t. $T = f^*T'$.

Remark 4.2.4 *The last assertion of the proposition can be seen as a generalization (in the case of complete flags) of the standard result that a semi-positive holomorphic line bundle on a projective algebraic homogeneous manifold X is either positive or the pull back p^*L of a positive holomorphic line bundle L on Y under a morphism $p : X \to Y$, where Y is another projective algebraic homogeneous manifold of lower dimension (see [Ak 95]).*

For the sake of simplicity we will only treat the case $k = 2$. We first need the following lemma

Lemma 4.2.5 *Set $X_d := G_{d_1,m}(\mathbb{C}) \times G_{d_1,m}(\mathbb{C})$ and let $f_1 : X_d \to \mathbb{F}(d_1, d_1, m - D_2)$, $f : X_d \to G_{D_2,m}(\mathbb{C})$ be the natural projection maps. Let $T \in \mathcal{T}(X_d)$ be cohomologous to $\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$ (where ω_i is the pull back of the Fubini-Study Kähler form on the i^{th} factor) and set $\delta(T) = \inf_{x \in \Delta_d} \nu(T, x)$, where $\Delta_d := \{(\pi(Z_1), \pi(Z_2)) \in X_d \,/\, (Z_1, Z_2) \in O_m^{D_2}\}$ is the "diagonal" of X_d (here $\pi : \mathbb{C}^{md_1} \setminus O_m^{d_1} \to G_{d_1,m}(\mathbb{C})$ denotes the canonical projection). Then*

i) $\delta(T) \leq \min(\alpha_1, \alpha_2)$;

ii) if $\delta(T) = \alpha_1$, there exists $T_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{F}(d_1, d_1, m - D_2))$ s.t. $T = f_1^*(T_1)$, and conversely for every $T_1 = \mathcal{L}(\varphi) \in \mathcal{T}(\mathbb{F}(d_1, d_1, m - D_2))$ with $\varphi \in \mathcal{P}_{(\alpha_1, \alpha_2)}$, $\inf_{x \in \Delta_d} \nu(f_1^*T_1, x) = \alpha_1$;

iii) if $\delta(T) = \alpha_1 = \alpha_2$, there exists $T' \in \mathcal{T}(G_{D_2,m}(\mathbb{C}))$ s.t. $T = f^*T'$ and conversely for every $T' \in \mathcal{T}(G_{D_2,m}(\mathbb{C}))$ of mass α, $\inf_{x \in \Delta_d} \nu(f^*T', x) = \alpha$.

Proof: First observe that

$$\begin{aligned}
\Delta_d &= \{(\pi(BZ_2), \pi(Z_2)) \in X_d \,/\, (Z_2, B) \in M_{d_1,m}(\mathbb{C}) \times GL_{d_1}(\mathbb{C})\} \\
&= \left\{(\pi(Z_1), \pi(B'Z_1)) \in X_d \,/\, (Z_1, B') \in M_{d_1,m}(\mathbb{C}) \times GL_{d_1}(\mathbb{C})\right\}.
\end{aligned}$$

Let $T \in \mathcal{T}(X_d)$ be cohomologous to $\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$, then T corresponds in a unique way to a function $\varphi \in PSH(\mathbb{C}^{md_1} \times \mathbb{C}^{md_1})$ s.t. $\sup_B \varphi = 0$ and

$$\varphi(A_1Z_1, A_2Z_2) = \alpha_1 \log|\det A_1| + \alpha_2 \log|\det A_2| + \varphi(Z_1, Z_2),$$

$\forall(A_1, A_2, Z_1, Z_2) \in GL_{d_1}(\mathbb{C}) \times GL_{d_1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{md_1} \times \mathbb{C}^{md_1}$ (theorem 4.3.1). Moreover $\nu(T, (\pi(X_1), \pi(X_2))) = \sup\{\gamma \geq 0 / \varphi(Z_1, Z_2) \leq \frac{\gamma}{2}\log[\det(Z_1 - X_1)^t(\overline{Z_1 - X_1}) + \det(Z_2 - X_2)^t(\overline{Z_2 - X_2})] + O(1)\}$.

Consider $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto \varphi(Z_1 + \lambda BZ_2, Z_2)$, where (Z_1, Z_2, B) is fixed in $M_{d_1,m}(\mathbb{C}) \times M_{d_1,m}(\mathbb{C}) \times GL_{d_1}(\mathbb{C})$, then $f \in SH(\mathbb{C})$. Let $\gamma = \nu(T, (\pi(BZ_2), \pi(Z_2)))$, there exists $C > 0$ s.t. for $|\lambda|$ large enough,

$$\varphi(Z_1/\lambda + BZ_2, Z_2) \leq \frac{\gamma}{2}\log[\det(Z_1/\lambda)^t(\overline{Z_1/\lambda})] + C \leq -\gamma d_1 \log|\lambda| + C',$$

thus

$$f(\lambda) = \alpha_1 d_1 \log|\lambda| + \varphi(Z_1/\lambda + BZ_2, Z_2) \leq d_1(\alpha_1 - \gamma)\log|\lambda| + C'_\varepsilon.$$

If $\gamma > \alpha_1$ this implies $f \equiv -\infty$; in particular $f(0) = \varphi(Z_1, Z_2) = -\infty$. Since (Z_1, Z_2) was arbitrary we get $\nu(T, (\pi(BZ_2), \pi(Z_2))) \leq \alpha_1$ for almost every (B, Z_2) hence $\delta(T) \leq \alpha_1$. Similarly $\delta(T) \leq \alpha_2$.

If $\gamma = \alpha_1$ then f has to be constant, thus

$$\varphi(Z_1 + BZ_2, Z_2) = f(1) = f(0) = \varphi(Z_1, Z_2).$$

Therefore φ defines a current $T_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{F}(d_1, d_1, m - D_2))$ if $\delta(T) = \alpha_1$ and $T = f_1^*(T_1)$.

Conversely if $T = f_1^*(T_1)$ for some $T_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{F}(d_1, d_1, m - D_2))$, the functional equation satisfied by φ shows that $\delta(T) = \alpha_1$.

If moreover $\delta(T) = \alpha_2$ we obtain $\varphi(Z_1, Z_2 + B'Z_1) = \varphi(Z_1, Z_2), \forall(Z_1, Z_2, B')$ in $M_{d_1,m}(\mathbb{C}) \times M_{d_1,m}(\mathbb{C}) \times GL_{d_1}(\mathbb{C})$. Now every $M \in GL_{D_2}(\mathbb{C})$ can be decomposed into $M = L \cdot U$ with L lower triangular and U upper triangular which we write in the following block-form

$$L = \begin{bmatrix} A_1{}' & 0 \\ B' & A_2{}' \end{bmatrix} \text{ and } U = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2' \end{bmatrix}.$$

Let $Z = (Z_1, Z_2) \in M_{D_2,m}(\mathbb{C})$ and $W = (W_1, W_2) = U.M$, then

$$\begin{aligned} \varphi(M.Z) &= \varphi(L.W) = \varphi(A_1'W_1, B'W_1 + A_2'W_2) \\ &= \delta\log|\det A_1'| + \delta\log|\det A_2'| + \varphi(W_1, W_2) \\ &= \delta\log|\det L| + \varphi(A_1Z_1 + BZ_2, A_2Z_2) \\ &= \delta\log|\det M| + \varphi(Z), \end{aligned}$$

thus φ defines a current $T' \in \mathcal{T}(G_{D_2,m}(\mathbb{C}))$ s.t. $T = f^*(T')$. □

Proof of proposition 4.2.3:

Let $p : X_d = G_{d_1,m}(\mathbb{C}) \times G_{d_1,m}(\mathbb{C}) \to \mathbb{F}(d)$ be the natural projection map. Given a current $T = \mathcal{L}(\varphi) \in \mathcal{T}(\mathbb{F}(d))$ with $\varphi \in \mathcal{P}_\alpha$, we can define $p^*T \in \mathcal{T}(X_d)$ which is cohomologous to $\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$ with the notations of lemma 4.2.5. By 4.2.5.ii) we know $\delta = \alpha_1 \leq \min(\alpha_1, \alpha_2)$ therefore $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

We have $\theta = \varepsilon_1\theta_1 + \varepsilon_2\theta_2 = \mathcal{L}(\varphi)$, where $\varphi = \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2$ with $\varphi_1(Z) = \frac{1}{2}\log\det(Z.{}^t\overline{Z})$, $Z = (Z_1, Z_2)$, and $\varphi_2(Z_1, Z_2) = \frac{1}{2}\log\det(Z_2.{}^t\overline{Z_2})$. Thus the Levi form of φ satisfies

$$L_\varphi(Z).W = \varepsilon_1 L_{\varphi_1}(Z).W + \varepsilon_2 L_{\varphi_2}(Z_2).W_2$$

It follows e.g. from remark 4.1.5 that θ is a Kähler form on $\mathbb{F}(d)$ if ε_1 and ε_2 are both positive.

Note that $\varphi = \varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2 \in \mathcal{P}_\alpha$ with $\alpha = (\varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, thus if $T = \mathcal{L}(\psi)$, $\psi \in \mathcal{P}_\alpha$ with $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, then T is cohomologous to a Kähler form by ii). Now if $\alpha_1 = 0$, then ψ is independent of Z_1 hence $T = p_1^* T'$ where $T' \in \mathcal{T}(G_{d_2,m}(\mathbb{C}))$. If $0 < \alpha_1 = \alpha_2$ then $\delta(T) = \alpha_1 = \alpha_2$ hence by 4.2.5.iii) there exists $T' \in \mathcal{T}(G_{D_2,m}(\mathbb{C}))$ s.t. $T = f^*(T')$. □

4.3 General case

Let X be a flag manifold of $GL_m(\mathbb{C})$, then X can be decomposed as a direct product of irreducible flag manifolds $X = \mathbb{F}_1 \times \ldots \times \mathbb{F}_l$, where $\mathbb{F}_i = \mathbb{F}(d_1^{(i)}, \ldots, d_{k_i}^{(i)}, m_i - D^{(i)})$, $D^{(i)} = \sum_{j=1}^{k_i} d_j^{(i)}$. Since each factor is a Fano manifold (i.e the anticanonical line bundle $K_{F_i}^*$ is positive), the vanishing theorem of Kodaira yields $H^{1,1}(X) = H^{1,1}(\mathbb{F}_1) \oplus \ldots \oplus H^{1,1}(\mathbb{F}_l)$ and we can show the following:

Theorem 4.3.1 *Set $K = \sum_{i=1}^{l} k_i$ and $N = \sum_{i=1}^{l} m_i.D^{(i)}$.*

There is an isomorphism $\mathcal{L}$ between the set $\mathcal{P} = \cup_{\alpha\in\mathbb{R}_+^{(K)}} \mathcal{P}_\alpha$ and $\mathcal{T}(X)$, where $\mathbb{R}_+^{(K)} = \mathbb{R}_+^{k_1} \times \ldots \times \mathbb{R}_+^{k_l}$ and $\mathcal{P}_\alpha = \{\varphi \in PSH(\mathbb{C}^N) \,/\, \sup_B \varphi = 0$ and φ satisfies $(*)_\alpha\}$, where

$$(*)_\alpha \quad \varphi(A^1 Z^1, \ldots, A^l Z^l) = \varphi(Z^1, \ldots, Z^l) + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_j^{(i)} \log|\det A_j^{(i)}|,$$

$\forall Z^i \in M_{D^{(i)},m}(\mathbb{C})$ and $\forall A^i \in H(d^{(i)\prime})$ which has k_i blocks $A_j^{(i)}$ along its diagonal.

The proof is a straightforward consequence of paragraph 4.2 as well as the fact that we can express each coefficient $\alpha_j^{(i)}$ as the mass of the pull-back of the current T computed with respect to a suitable positive smooth form of bidimension $(1,1)$ in a direct product of Grassmannians.

Bibliographie

Ak 95 D.-N.AKHIEZER : Lie group actions in Complex Analysis, Aspects of Math., Viehweg (1995).

A-W 97 H.ALEXANDER & J.WERMER : Several Complex Variables and Banach Algebras, 3rd edition G.T.M., Springer (1997).

Be 94 B.BERNDTSSON : L^2-methods for the $\overline{\partial}$-equation. Lecture notes, C.T.H. Göteborg (1994).

Be 96 B.BERNDTSSON : The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donnelly-Fefferman. Ann.Inst.Fourier(Grenoble) 46 (1996), 1083-1094.

B-H 58 A.BOREL & F.HIRZEBRUCH : Characteristic classes and homogeneous spaces. Am.J.Math. 80 (1958), 458-538.

B-R 62 A.BOREL & R.REMMERT : Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten. Math.Ann. 145 (1962), 429-439.

Br 56 H.-J.BREMERMANN : On the conjecture of the equivalence of the plurisubharmonic functions and the Hartogs functions, Math.Ann. 131 (1956), 76-86.

Ce 78 U.CEGRELL : Removable singularities for p.s.h. functions and related problems. Proc.Lond.Math.Soc. 36 (1978), 310-336.

De 82a J.-P.DEMAILLY : Courants positifs extrêmaux et conjecture de Hodge. Invent.Math. 69 (1982), 347-374.

De 82b J.-P.DEMAILLY : Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au dessus d'une variété kählérienne complète, Ann.Sci.E.N.S. 15 (1982), 457-511.

De 90 J.-P.DEMAILLY : Singular hermitian metrics on positive line bundles, Proc.Conf. Complex Algebraic Varieties, Bayreuth (1990), Lecture Note in Math. 1507, Springer, Berlin, 1992.

De 91 J.-P.DEMAILLY : Monge-Ampère Operators, Lelong numbers and intersection theory, in Complex analysis and geometry. A.Ancona & A.Silva ed., Plenum Press 1993,115-193.

De 92 J.-P.DEMAILLY : Regularization of closed positive currents and intersection theory. J.Alg.Geom. 1 (1992), 361-409.

De 93 J.-P.DEMAILLY : A numerical criterion for very ample line bundles. J.Diff.Geom.37 (1993), 323-374.

D-P-T 94 J.-P.DEMAILLY & T.PETERNELL & M.SCHNEIDER : Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles. J.Alg.Geom. 3 (1994), 295-345.

dR 55 G. de RHAM : Variétés différentiables. Paris Hermann (1955).

Di 98 J.DILLER : Dynamics of birational maps II, preprint Cornell (1998).

D-G 60 F.DOCQUIER & H.GRAUERT : Levisches Problem und Rungeschen Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten. Math.Ann. 140 (1960), 94-123.

D 91 J.DUVAL : Convexité rationnelle des surfaces Lagrangiennes. Invent.Math. 104 (1991),581-599.

D 94 J.DUVAL : Une caractérisation Kählerienne des surfaces rationnellement convexes. Acta Math. 172(1994), 77-89.

D-S 95 J.DUVAL & N.SIBONY : Polynomial convexity, rational convexity and currents. Duke Math.J. 79 (1995) 487-513.

El 75 G.ELLENCWAJG : Pseudoconvexité locale dans les variétés Kählériennes. Ann.Inst.Fourier 25 (1975),295-314.

F 96 B.FABRE : Sur l'intersection d'une surface de Riemann avec des hypersurfaces algébriques. C.R.A.S Série I n^o4 t.322, Géométrie analytique (1996), 371-376.

Fa 98 C.FAVRE : Pull-back and Lelong number of currents, manuscript (1998).

F-N 80 J.-E.FORNAESS & R.NARASIMHAN : The Levi problem on Complex Spaces with Singularities. Math.Ann. 248 (1980), 47-72.

F-S 94 J.-E.FORNAESS & N.SIBONY : Complex dynamics in higher dimensions, in Complex Potential Theory, Montreal 1993, Kluwer Ac.Publ. (1994), 131-186.

F-S 95 J.-E.FORNAESS & N.SIBONY : Oka's inequality for currents and applications. Math.Ann. 301 (1995), 399-419.

G-H 78 P.-A.GRIFFITHS & J.HARRIS : Principles of algebraic geometry, Wiley, New-York (1978).

G 97a V.GUEDJ : Representation theorems for positive closed $(1,1)$-currents on flag manifolds of $GL_m(\mathbb{C})$, preprint (1997).

G 97b V.GUEDJ : On the approximation of positive closed $(1,1)$-currents by analytic varieties, licenciate thesis, Chalmers University of Technology (Göteborg, Sweden), preprint (1997).

G 97c V.GUEDJ : Approximation of currents on complex manifolds, to appear in Math.Ann.

H 77 R.HARTSHORNE : Algebraic geometry, G.T.M., Springer-Verlag (1977).

Ha 77 R.HARVEY : Holomorphic chains and their boundaries, Proc. of Symposia in Pure Math., Sev.Comp.Var., Williamstown 1975, vol XXX, part I, ed. R.-O.Wells (1977). 309-382.

Ha-P 75 R.HARVEY & J.POLKING : Extending analytic objects. Comm.Pure Appl.Math. 28 (1975), 701-727.

Hi 75 A.HIRSCHOWITZ : Le problème de Lévi pour les espaces homogènes. Bull.Soc.Math.France 103 (1975), 191-201.

Hö 85 L.HÖRMANDER : The Analysis of Linear Partial Differential operators, vol II, Grundlehren der math. Wissens., Springer-Verlag (1985).

Hö 88 L.HÖRMANDER : An introduction to Complex Analysis in Several Variables. Third edition, North-Holland math. libr. vol.7, Amsterdam, London (1988).

Hu 94 A.HUCKLEBERRY : Subvarieties of homogeneous and almost homogeneous manifolds, in Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry dedicated to P.Dolbeault. H.Skoda & J.-M. Trépreau ed.(1994), 189-232.

Ki 87 C.O.KISELMAN : Un nombre de Lelong raffiné. Annales de la Faculté des Sciences et Techniques de Monastir (1987),61-70.

Ki 94 C.O.KISELMAN : Attenuating the singularities of plurisubharmonic functions. Ann.Pol.Math. 60 (1994),173-197.

Ki 98 C.O.KISELMAN: Ensembles de sous-niveau et images inverses des fonctions plurisousharmoniques. Communication, colloque en l'honneur de G.Coeuré, Lille (juin 1998).

K 91 M.KLIMEK: Pluripotential theory, Oxford (1991).

Le 57 P.LELONG: Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull.Soc.Math.Fr. 85 (1957), 239-262.

Le 72 P.LELONG: Eléments extrêmaux sur le cône des courants positifs fermés. Séminaire P.Lelong (Analyse), 12e année 1971-72, Lecture Notes in Math. vol 332, Springer (1972).

Le 85 P.LELONG: Les objets souples de l'analyse complexe, Expo.Math. 3 (1985), 149-164.

Le-G 86 P.LELONG & L.GRUMAN: Entire functions of several complex variables, Grundlehren der math. Wissens., Springer-Verlag (1986).

M 93 L.MANIVEL: Un théorème de prolongement L^2 pour des sections holomorphes d'un fibré hermitien. Math.Zeit. 212 (1993), 107-122.

M 97 L.MANIVEL: Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence, to appear in Cours spécialisés de la S.M.F. (1997).

Me 96 M.MEO: Transformations intégrales pour les courants positifs fermés et théorie de l'intersection. Thèse Grenoble (1996).

Na 63 R.NARASIMHAN: The Levi problem in the theory of functions of several complex variables. Proc.Int.Cong.Math. Stockholm 1962, Almgvist and Wiksells, Uppsala (1963), 385-388.

O-T 87 T.OHSAWA-K.TAKEGOSHI: On the extension of L^2 holomorphic functions, Math.Z. 195 (1987), 197-204.

Ri 68 R.RICHBERG: Stetige streng pseudoconvexe Funktionen. Math.Ann. 175 (1968), 257-286.

Sa 82 S.SADULLAEV: Extension of plurisubharmonic functions from a submanifold. D.A.N.Uz. 5 (1982), 3-4.

Sc 98 G.SCHUMACHER: Asymptotics of Kähler-Einstein metrics on quasi-projective manifolds and an extension theorem on holomorphic maps. Math.Ann. 311 (1998), 631-667.

Si 85 N.SIBONY : Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe. Duke Math. J. 52 (1985), 157-197.

Si 98 N.SIBONY : Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$. Survey (1998).

Siu 74 Y.-T.SIU : Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents. Invent.Math. 2 (1974),53-156.

Sk 86 H.SKODA : Extension problems and positive currents in complex analysis. Contributions to Several Complex Variables, A.Howard & P.-M.Wong ed., Aspects of Mathematics (1986), 299-328.

St 63 G.STOLZENBERG : Polynomially and rationally convex sets. Acta Math. 109 (1963), 259-289.

S-D 74 H.-P.-F.SWINNERTON-DYER : Analytic theory of abelian varieties. London Math.Soc.Lecture Note Serie 14, Cambridge Univ.Press (1974).

S 76 O.SUZUKI : Pseudoconvex domains on a Kähler manifold with positive holomorphic bisectional curvature. Publ.Res.Inst.math.Sci. 12 (1976/77),191-214 & 439-445.

T 98 S.TAKAYAMA : Adjoint linear series on weakly 1-complete Kähler manifolds. Math.Ann. 311 (1998), 501-531.

Th 67 P.THIE : The Lelong number of a point of a complex analytic set. Math.Annalen 172 (1967),269-312.