ALEXANDRU LOAN BADULESCU

Correspondance entre GL_n et ses formes intérieures en caractéristique positive

Thèses d'Orsay, 1999

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1999__0536__P0_0>

ORSAY
n° d'ordre : 5645

UNIVERSITÉ de PARIS–SUD
Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée

pour obtenir

le grade de Docteur en Sciences
de l'Université Paris XI Orsay
Spécialité : Mathématiques

par

Alexandru Ioan BADULESCU

Sujet : **Correspondance entre GL_n et ses formes intérieures en caractéristique positive**

soutenue le : 25 janvier 1999 devant la Commission d'examen

Jury : Laurent CLOZEL
Guy HENNIART
Jean-Pierre LABESSE
Gérard LAUMON
Colette MOEGLIN
Pierre TORASSO

À Lucian

A murit prietenul meu, Enkidu, cu care vînam împreună lei.

La parfaite harmonie qu'on trouve chez Guy Henniart entre l'homme, le chercheur et l'enseignant, sa disponibilité, sa modestie, sa bonne humeur inépuisable et son art à *faire accoucher les esprits* m'ont toujours fait penser à Socrate, tel qu'il a été idéalisé par la littérature. Ainsi, peut-être plus que de m'avoir formé comme mathématicien et de m'avoir proposé un si beau sujet de recherche, je dois à Guy Henniart de m'avoir donné pendant cinq années ce merveilleux exemple personnel. Je ne l'en remercierai jamais assez.

Lors de ma venue en France j'ai beaucoup été aidé par ma tante Malina Vornic, mon professeur de Math Sup Jean-Pierre Roudneff, et par Mme Liana Popescu, Mme Doina Cioranescu et M Christian Duhamel. Qu'ils en soient remerciés, car sans eux je ne serais jamais arrivé à faire cette thèse.

Durant l'année 1994-1995, quand mon allocation de recherche m'a été versée avec beaucoup de retard, j'ai été aidé particulièrement par Martin Andler, par Mme Ferrand au nom de l'Association des Anciens Élèves de l'E.N.S., par les enseignants, les chercheurs et les étudiants d'Orsay qui ont adressé une pétition à ce sujet au recteur de Versailles, ainsi que par tous mes amis. Ces signes de solidarité m'ont beaucoup touché et je veux les en remercier tous.

Pour revenir au maths, je remercie tout spécialement Bertrand Lemaire qui m'a beaucoup aidé et qui, comme pionnier de la caractéristique non nulle, a eu la tâche difficile de défricher le terrain ; sans ses résultats, mon sujet aurait été inabordable. Je remercie aussi Marie-France Vignéras, Anne-Marie Aubert et François Courtès avec lesquels j'ai eu des discutions très enrichissantes.

Je remercie très vivement Colette Moeglin et Hervé Jacquet d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, ainsi que Jean-Pierre Labesse, Pierre Torasso, Laurent Clozel, Gérard Laumon et à nouveau Colette Moeglin d'avoir accepté de faire partie du jury.

ABSTRACT: Let F be a local non archimedian field *of characteristic* $p > 0$, and let D be a central division algebra of finite rank d^2 over F. Let r be a positive number and put $n = rd$. Then we prove that there is a Jacquet-Langlands correspondence between the set of classes of irreducible essentialy square-integrable representations of $GL_n(F)$ and the set of classes of irreducible essentialy square-integrable representations of $GL_r(D)$. This correspondence leads to an isomorphism between the Grothendieck group of $GL_r(D)$ and a natural factor of the Grothendieck group of $GL_n(F)$, and furthermore to an isomorphism between the Hopf algebra associated *à la Zelevinski* with $GL_r(D)$ and a natural factor of the Hopf algebra associated by Zelevinski with $GL_n(F)$. We also prove a transfer of integral orbitals between $GL_n(F)$ and $GL_r(D)$.

Consequences of these facts are the local integrability of characters, the orthogonality relations for square integrable representations and the irreducibility of any representation induced from a square-integrable irreducible one on $GL_r(D)$.

If L is now a global field and A is a central division algebra of finite rank d^2 over L, if r is a positif integer, then we also prove the finitude of automorphic cuspidal representations of $GL_r(A)$ with fixed components for almost every place.

Key words: local field, reductive p-adic group, representation theory, Jacquet-Langlands correspondence.

MSC code: 20G25-20G05

Table des matières

INTRODUCTION 3

1 RAPPELS ET NOTATIONS 9

Introduction 10

1.1 Les espaces de fonctions $H(G)$ et $H(G;\omega)$ 11

1.2 Intégrales orbitales 15

1.3 Traces et caractères des représentations 17

1.4 La formule d'intégration de Weyl 20

1.5 Représentations cuspidales, de carré intégrable, tempérées 22

1.6 La classification de Langlands 26

1.7 Le théorème de Paley-Wiener 27

1.8 Les pseudocoefficients 28

1.9 Orthogonalité des caractères 29

1.10 Représentations globales, composantes locales 33

1.11 Les représentations ρ et ρ_0. Représentations automorphes et automorphes cuspidales 35

1.12 La formule des traces simple 39

2 CORRESPONDANCE AVEC UNE ALGÈBRE À DIVISION 40

Introduction 41

2.1 Corps locaux proches et le groupe linéaire. Un résultat de Lemaire 42

2.2 Orthogonalité des caractères sur $GL_n(F)$ en toute caractéristique 47

2.3 Correspondance $GL_n(F) \leftrightarrow D^*$ et transfert en toute caractéristique 51

3 CORRESPONDANCE AVEC UNE ALGÈBRE CENTRALE SIMPLE 60

Introduction 61

3.1 Correspondance $GL_n(F) \leftrightarrow GL_r(D)$ en caractéristique nulle 62

3.2 Corps locaux proches et formes intérieures du groupe linéaire 74

3.3 Correspondance $GL_n(F) \leftrightarrow GL_r(D)$ en caractéristique non nulle 93

4 APPLICATIONS 110
Introduction 111
4.1 Irréductibilité des induites des représentations essentiellement de carré intégrable sur G' 112
4.2 Correspondance de toutes les représentations 119
4.2.1 Correspondance entre les groupes de Grothendieck 119
4.2.2 Correspondance entre les algèbres de Hopf 124
4.3 Transfert de toutes les fonctions 134
4.4 Intégrabilité locale des caractères 147
4.5 Deux résultats globaux 152

ANNEXE 1 153

ANNEXE 2 170

Bibliographie 181

INTRODUCTION

Soient F un corps local non archimédien et D une algèbre centrale simple sur F de dimension finie d^2. Soit r un entier strictement positif. Posons $n = rd$. Il existe alors une injection canonique de l'ensemble des classes de conjugaison des éléments semisimples réguliers de $GL_r(D)$ dans l'ensemble des classes de conjugaison des éléments semisimples réguliers de $GL_n(F)$. Elle induit une correspondance bijective entre l'ensemble des classes de conjugaison des éléments elliptiques réguliers de $GL_r(D)$ et l'ensemble des classes de conjugaison des éléments elliptiques réguliers de $GL_n(F)$. Si le corps F est de caractéristique nulle, Jacquet et Langlands ont montré ([JL]) que pour $d = 2$ et $r = 1$ il existe une correspondance bijective entre les classes d'équivalence des représentations essentiellement de carré intégrable de $GL_n(F)$ et les classes d'équivalence des représentations essentiellement de carré intégrable de $GL_r(D)$ qui a la propriété que les caractères de deux classes de représentations qui se correspondent sont égaux sur des classes de conjugaison qui se correspondent, au signe $(-1)^{n-r}$ près. Flath a montré dans sa thèse ([Fl2]) ce même résultat pour $d = 3$ et $r = 1$, F de caractéristique nulle. Rogawski a généralisé ([Ro2]) à d quelconque, dans le cas où F est de caractéristique nulle et $r = 1$. Le cas d quelconque, r quelconque, toujours en caractéristique nulle, a été finalement démontré par Deligne, Kazhdan et Vignéras dans [DKV] (voir aussi [Fl1]). Les auteurs en déduisent aussi que les induites des représentations de carré intégrable sont irréductibles sur $GL_r(D)$ et un théorème de transfert de toutes les fonctions à support compact de $GL_r(D)$ vers $GL_n(F)$. Le but de cette thèse a été d'établir la correspondance dans le cas d quelconque et r quelconque sans restriction sur la caractéristique de F, ainsi que d'en tirer des conséquences à la manière de [DKV]. Les principaux outils manquant au travail en caractéristique non nulle sont l'intégrabilité locale des caractères (sauf pour $GL_n(F)$, prouvée par Lemaire dans [Le2]), l'orthogonalité des caractères et le calcul des germes au voisinage des éléments semisimples inséparables. Nous avons prouvé la correspondance et ses conséquences en utilisant la méthode de Kazhdan ([Ka1]) qui consiste à procéder par comparaison avec la caractéristique nulle où ces résultats ont déjà été prouvés, et on a réglé au passage le problème de l'intégrabilité locale des caractères et de l'orthogonalité des caractères pour tous les groupes $GL_r(D)$. On donne à la fin de cette introduction une liste de résultats que nous avons obtenu dans cette thèse, avec des références et des précisions sur ce qui était déjà connu là-dessus.

Le premier chapitre est un chapitre de rappels et notations. Comme dans [DKV], on essaye d'y regrouper les résultats généraux utilisés. Cette mise au point est indispensable parce qu'on travaille en caractéristique non nulle et il faut décider dès le début lesquels des résultats usuels en caractéristique nulle sont toujours valables et lesquels ne le sont plus, ou pas prouvés à ce jour. Il faut donc faire attention entre autres aux résultats de géométrie cuspidale de Kazhdan, prouvés dans [Ka1] pour un corps de base de caractéristique nulle et un groupe à centre compact. Faute d'espace dans le chapitre 1, on les a traité dans l'annexe 2.

Dans la première section du chapitre 2 nous donnons une variante du résultat principal de [Le3]. Dans la deuxième section nous prouvons à l'aide des corps proches qu'il y a égalité entre les restrictions aux éléments elliptiques réguliers d'un caractère d'une représentation de carré intégrable de $GL_n(F)$ et du conjugué complexe de l'intégrale orbitale d'un de ses pseudocoefficients. Par un argument de [DKV] (formule d'intégration de Weil) on en déduit l'orthogonalité des caractères dans le cas de $GL_n(F)$, F de caractéristique non nulle. On en déduit aussitôt la correspondance entre $GL_n(F)$ et $GL_r(D)$ pour $r = 1$, en toute caractéristique (sect.3). On montre ensuite un théorème de transfert de toutes les fonctions (à support compact ou à support compact modulo le centre et à caractère central) dans les deux sens, entre $GL_n(F)$ et $GL_1(D)$. Le théorème de correspondance dans le cas particulier $r = 1$ est le premier pas de la récurrence qui aboutit au résultat général (chap.3). Il a aussi deux corollaires concernant $GL_n(F)$ qui sont essentiels dans la preuve de ce dernier.

Le chapitre 3 est consacré à la correspondance dans le cas général (F de caractéristique quelconque, d quelconque et r quelconque). Dans la première section on reprend la démonstration de [DKV] avec un argument de finitude en plus. Dans la deuxième section on construit, pour les groupes du type $GL_r(D)$, des situations proches au sens de Kazhdan ; Kazhdan l'avait fait pour les groupes de Chevalley ([Ka2]) et Lemaire dans le cas du groupe linéaire ([Le1]). Après une préparation du terrain, on suit la démarche du premier, tout en empruntant quelques calculs au deuxième. Dans la quatrième section, après avoir approfondi (laborieusement) le problème du comportement du polynôme caractéristique par rapport au changement de corps proche, on en déduit la correspondance par comparaison avec la caractéristique nulle.

On a regroupé dans le chapitre 4 des résultats qui sont tous plus ou moins des applications de la correspondance. Dans la première section on montre par comparaison avec la caractéristique nulle que l'induite d'une représentation de carré intégrable de $GL_r(D)$ est irréductible ; le principal argument manquant en caractéristique non nulle est l'intégrabilité locale des cractères et le théorème 14 de [H-CvD]. Dans la section 2 on étend la correspondance entre les représentations essentiellement de carré intégrable à toutes les autres représentations. On obtient une injection du groupe de Grothendieck des représentations lisses admissibles de longeur finie de $GL_r(D)$ dans le groupe de Grothendieck des représentations lisses admissibles de longeur finie de $GL_n(F)$ telle que les caractères de deux représentations qui se correspondent sont égaux sur les classes d'équivalence des éléments semisimples réguliers qui se correspondent, au signe $(-1)^{n-r}$ près. Le groupe de Grothendieck de $GL_r(D)$ est naturellement isomorphe à un quotient du groupe de Grothendieck de $GL_n(F)$. En mettant ensemble les groupes de Grothendieck des groupes $GL_r(D)$ pour tous les entiers r positifs ($\mathbb{Z}$ pour $r = 0$ par convention) on peut associer à D une algèbre de Hopf avec inversion à la façon dont Zelevinski l'a fait pour F. On montre que cette algèbre est naturellement isomorphe (en tant qu'algèbre de Hopf avec inversion) à un quotient de l'algèbre de Zelevinski. Dans la section 3 on montre qu'il y a transfert de $GL_r(D)$ vers $GL_n(F)$ de toutes les fonctions à support compact (ou à support compact modulo le centre et à caractère central) ; on y montre également qu'il y a transfert de $GL_n(F)$ vers $GL_r(D)$ de toutes les fonctions à support compact (ou à support compact modulo le centre à caractère central) dont la restriction des intégrales orbitales aux éléments semisimples réguliers sont à support dans les classes de conjugaison provenant de $GL_r(D)$. Ces preuves se font aussi à l'aide des corps proches, par comparaison avec la caractéristique nulle. Dans la quatrième section on montre l'intégrabilité locale des caractères sur $GL_r(D)$. Ce résultat a été prouvé par Lemaire ([Le2]) pour $GL_n(F)$, et nous le "transférons" sur $GL_r(D)$ en utilisant la correspondance et le transfert des fonctions. Dans la section 5 on montre deux résultats globaux concernant le groupe $\mathbb{G}$ des éléments inversibles d'une algèbre centrale simple de dimension finie sur un corps global. Le premier est déjà signalé dans [DKV] comme conséquence de la correspondance : il s'agit de l'existence d'une représentation automorphe cuspidale de $\mathbb{G}$ ayant des composantes locales de carré intégrable fixées à un nombre fini de places finies. Le deuxième est un résultat de multiplicité finie, conséquence directe des raisonnements qu'on a fait dans les trois premières parties de l'annexe 1. Il dit qu'il y a au plus un nombre fini de représentations automorphes cuspidales de $\mathbb{G}$ ayant des composantes locales locales fixées à presque toutes les places.

Il y a deux endroits (sect.3.1 et sect.3.3) dans cette thèse où on n'a pas pu s'en sortir qu'en utilisant les fonctions L et les facteurs ϵ des représentations. Finalement il y avait trois résultats qui faisaient appel à ces outils. Pour ne pas rompre le fil du raisonnement avec de longues démonstrations et l'introduction d'objets nouveaux, on a regroupé les trois démonstrations dans l'annexe 1 (parties I, II,

III) et on a fait une introduction où on a montré des lemmes et propositions utiles pour toutes les trois. Nous avons remarqué qu'une fois montrée la correspondance (chap.3) on peut tirer un corollaire qui, rajouté à la démonstration de la partie I donne un résultat de multiplicité finie pour les représentations automorphes cuspidales du groupe des éléments inversibles d'une algèbre centrale simple globale. Ainsi, on a rajouté ce résultat parmi les applications de la correspondance (sect.5, chap.4) ainsi qu'une partie IV dans cette annexe pour le prouver.

L'annexe 2 est dédiée à une révision des résultats de géométrie cuspidale obtenus par Kazhdan dans [Ka1] pour un corps de base de caractéristique nulle et un groupe à centre compact. Comme nous ne travaillons pas sur un groupe à centre compact et souvent pas en caractéristique nulle, nous y avons donné des preuves des résultats qu'on utilise dans cette thèse. Notament nous étudions le cas des fonctions à support compact modulo le centre. Par ailleurs j'utilise dans mes démonstrations les pseudocoefficients des représentations de carré intégrable ; on a l'habitude de citer ou [Ka1] ou [BDK] pour la preuve de leur existence ou pour leurs propriétés ; comme le premier article se place dans le cas de caractéristique nulle et de centre compact, et que la démonstration de l'existence des pseudocoefficients n'apparaït en fait pas dans le deuxième, j'ai clôturé cette annexe en montrant que le résultat de [BDK] implique bien l'existence des pseudocoefficients (à support compact et à support compact modulo le centre) et qu'ils ont les propriétés qu'on leur prête. Finalement tous les résultats de cette annexe sont connus ainsi que leurs démonstration, mais je n'ai pas trouvé des bonnes références.

Résumé des résultats :

LOCAUX : Soient F un corps local non archimédien de caractéristique quelconque et D une algèbre à division centrale sur F et de dimension finie d^2. Soit r un entier strictement positif et posons $n = rd$. Si g est un élément de $GL_n(F)$ et g' est un élément de $GL_r(D)$, on dit que g et g' se correspondent et on écrit $g \leftrightarrow g'$ si g et g' ont le même polynôme caractéristique et ce polynôme est séparable. On note $GL_n(F)'$ l'ensemble des éléments g de $GL_n(F)$ pour lesquels il existe un élément g' de $GL_r(D)$ tel que $g \leftrightarrow g'$. On note $Grot(GL_n(F))$ le groupe de Grothendieck des représentations complexes lisses de longeur finie de $GL_n(F)$ et $Grot(GL_r(D))$ le groupe de Grothendieck de $GL_r(D)$.

Correspondances.

- Il existe une unique correspondance bijective **C** entre l'ensemble des classes d'équivalence des représentations essentiellement de carré intégrable de $GL_n(F)$ et l'ensemble des classes d'équivalence des représentations essentiellement de carré intégrable de $GL_r(D)$ qui pour toute représentation essentiellement de carré intégrable π de $GL_n(F)$ vérifie la relation entre caractères :

$$\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\mathbf{C}(\pi)}(g')$$

pour tout $g \leftrightarrow g'$ (prop.B.2.a [DKV] pour F de caractéristique nulle et th.3.3.19, cette thèse, pour F de caractéristique non nulle).

- Il existe un morphisme injectif de groupes $\mathbf{JL}_r$ de $Grot(GL_r(D))$ dans $Grot(GL_n(F))$ qui pour tout $\pi \in Grot(GL_r(D))$ vérifie

$$\chi_\pi(g') = (-1)^{n-r}\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(g)$$

pour tout $g \leftrightarrow g'$ (th.4.2.2, cette thèse). Si sur $Grot(GL_n(F))$ on définit une relation d'équivalence en posant $\pi \sim \pi'$ si le caractères de π et de π' sont égaux sur $GL_n(F)'$, alors le quotient de $Grot(GL_n(F))$ par cette relation d'équivalence est un groupe isomorphe à $Grot(GL_r(D))$ (prop.4.2.3, cette thèse).

- On peut, en mettant ensemble les groupes $Grot(GL_r(D))$ pour tous les entiers r positifs ($Grot(GL_0(D)) = \mathbb{Z}$ par convention), associer à D une algèbre de Hopf $\mathcal{R}(D)$ munie d'une inversion de la façon dont Zelevinski a associé (dans [Ze]) à F l'algèbre de Hopf avec inversion $\mathcal{R}(F)$. Alors les morphismes $\mathbf{JL}_r$ pour tous les entiers r strictement positifs induisent un morphisme injectif d'*anneaux* de $\mathcal{R}(D)$ dans $\mathcal{R}(F)$. Il existe un idéal $\mathbf{I}$ de l'anneau $\mathcal{R}(F)$ tel que l'anneau facteur $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}$ hérite d'une structure d'algèbre de Hopf avec inversion et est isomorphe en tant qu'*algèbre de Hopf avec inversion* à $\mathcal{R}(D)$ (th.4.2.6, cette thèse).

- Pour toute fonction f' localement constante à support compact sur $GL_r(D)$, il existe une fonction f localement constante à support compact sur $GL_n(F)$ telle que l'intégrale orbitale de f s'annule sur les éléments semisimples réguliers de $GL_n(F)$ qui ne se trouvent pas dans $GL_n(F)'$, et que pour tout $g \in GL_n(F)'$ on ait l'égalité des intégrales orbitales

$$\Phi(f;g) = \Phi(f';g')$$

si $g \leftrightarrow g'$; pareillement, pour toute fonction f localement constante à support compact sur $GL_n(F)$ telle que l'intégrale orbitale de f s'annule sur les éléments semisimples réguliers de $GL_n(F)$ qui ne se trouvent pas dans $GL_n(F)'$ il existe une fonction f' localement constante à support compact sur $GL_r(D)$ telle que pour tout $g \in GL_n(F)'$ on ait l'égalité des intégrales orbitales

$$\Phi(f;g) = \Phi(f';g')$$

si $g \leftrightarrow g'$ (th.B.2.c.1 de [DKV] si F est de caractéristique nulle et th.4.3.1, cette thèse, si F est de caractéristique non nulle).
Ces mêmes résultats valent pour f et f' localement constantes à support compact modulo le centre et à caractère central fixé (th.4.3.9, cette thèse).

Sur $GL_r(D)$:

- l'induite normalisée d'une représentation de carré intégrable est irréductible ([Ja] si $d = 1$, th.B.2.d de [DKV] si d est quelconque et la caractéristique de F est nulle et th.4.1.1, cette thèse, si d est quelconque et la caractéristique de F est non nulle),

- les distributions caractères des représentations sont localement intégrables (pour F de caractéristique non nulle, th.5.2.4 de [Le2] si $d = 1$ et th.4.4.1, cette thèse, si d est quelconque),

- les caractères des représentations de carré intégrable de caractère central fixé forment un système orthonormal pour le produit hilbertien défini dans [Cl2] (si F est de caractéristique non nulle, dans cette thèse, th.2.2.3 si $d = 1$ et corollaire 3.3.18 si d est quelconque) ; le caractère d'une représentation de carré intégrable est égal sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers au conjugué complexe de l'intégrale orbitale d'un de ses pseudocoefficients à support compact modulo le centre (si F est de caractéristique non nulle, dans cette thèse, th.2.2.1 si $d = 1$ et corollaire 4.4.3 si d est quelconque).

GLOBAUX : Soient F un corps global de caractéristique quelconque et D une algèbre à division centrale sur F et de dimension finie d^2. Soit r un entier strictement positif. Notons G' le groupe $GL_r(D)$. Si v est une place de F, on note G'_v le groupe $G'(F_v)$. Soit S un ensemble fini de places finies de F. Alors

- si pour tout $v \notin S$ on s'est donné un représentation lisse irréductible π_v de G'_v, il existe au plus un nombre fini de représentations automorphes cuspidales du groupe des adèles de G' de caractère central fixé et dont les composantes locales aux places $v \notin S$ sont les π_v (th.4.5.1.a, cette thèse) ;

- si pour tout $v \in S$ on s'est donné une représentation de carré intégrable π_v de G'_v, il existe une représentation automorphe cuspidale du groupe des adèles de G' dont les composantes locales aux places $v \in S$ soient les π_v (c'est déjà prouvé dans [DKV], th.B.2.c.2 ; dans cette thèse c'est le théorème 4.5.1.b).

Chapitre 1

RAPPELS ET NOTATIONS

Introduction

Ce chapitre contient des résultats d'ordre général sur les groupes réductifs sur un un corps local (sauf quelques rares exceptions) et qui sont utilisés dans les chapitres suivants. Pour tous ces résultats nous avons donné ou une référence, ou sinon une démonstration. Chaque fois qu'un résultat n'est prouvé à ce jour que dans le cas où la caractéristique du corps de base est nulle on l'a signalé explicitement. L'annexe 2 est à lire avec ce chapitre. Elle regroupe des résultats de géométrie cuspidale à la Kazhdan, souvent utilisés dans cette thèse.

1.1 Les espaces de fonctions $H(G)$ et $H(G;\omega)$

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps local non archimédien F de caractéristique quelconque. Soit Z le centre de G. Soit dg une mesure de Haar sur G, dz une mesure de Haar sur Z et $d\bar{g}$ la mesure quotient sur G/Z. On note $H(G)$ l'espace des fonctions définies sur G à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont localement constantes et à support compact. Si K est un sous-groupe ouvert compact de G on note $H(G;K)$ le sous-espace de $H(G)$ formé de fonctions biinvariantes par K.

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G. On a $H(G) = \cup_{K\in\mathcal{K}} H(G;K)$.

Soit ω un caractère unitaire de Z. On note $H(G;\omega)$ l'espace des fonctions définies sur G à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui vérifient :

- f est localement constante à support compact modulo Z et

- pour tout $g \in G$ et tout $z \in Z$, $f(zg) = \omega^{-1}(z)f(g)$

Pour tout $K \in \mathcal{K}$ on note $H(G;K;\omega)$ le sous-ensemble de $H(G;\omega)$ formé de fonctions biinvariantes par K.

On a $H(G;\omega) = \cup_{K\in\mathcal{K}} H(G;K;\omega)$.

Soit $E(G)$ l'ensemble de classes d'équivalence des représentations complexes lisses irréductibles de G.

Soit π une représentation admissible de G. Pour tout $f \in H(G)$ on pose $\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg$.

Soit π une représentation admissible de G admettant un caractère central ω (c'est toujours le cas si π est irréductible). Si $f \in H(G;\omega)$ alors pour tout z dans Z et pour tout g dans G on a $f(zg)\pi(zg) = f(g)\pi(g)$ et on pose $\pi(f) = \int_{G/Z} f(\bar{g})\pi(\bar{g})d\bar{g}$.

Pour un caractère ω fixé on peut définir comme dans [He 2] une application de $H(G)$ dans $H(G;\omega)$: pour tout $f \in H(G)$ on pose pour tout $g \in G$:

$$f_\omega(g) = \int_Z \omega(z)f(zg)dz.$$

On a la :

Proposition 1.1.1 . *(a) Quel que soit $f \in H(G)$, $f_\omega \in H(G;\omega)$. On obtient ainsi une application $I_\omega : H(G) \to H(G;\omega)$.*

(b) I_ω est surjective (mais évidement pas injective !).

(c) pour tout $f \in H(G)$, pour toute représentation admissible π de G de caractère central ω, on a $\pi(f) = \pi(f_\omega)$.

(d) pour tout $f \in H(G)$, pour tout $g \in G$, on a:

$$\Phi(f_\omega; g) = \int_Z \omega(z)\Phi(f; zg)dz$$

Remarque. Le point (d) parle d'intégrales orbitales qui ne seront définies que dans la section suivante. On l'a mis ici pour regrouper tous les résultats concernant l'application I_ω. L'importance de ce théorème réside dans le fait que dans la littérature on a tendance à étudier les intégrales orbitales du point de vu "calcule de germes" et "transfert" plutôt pour les fonctions dans $H(G)$ mais de définir la formule des traces pour des fonctions dans $H(G; \omega)$. Le théorème permet donc de passer des unes aux autres.

Démonstration. Prouvons d'abord (a) et (b). On a $H(G) = \cup_{K \in \mathcal{K}} H(G; K)$. Pour $K \in \mathcal{K}$ notons abusivement $K\backslash G/K$ un ensemble de représentants des classes d'équivalence dans $K\backslash G/K$. Alors, pour chaque $K \in \mathcal{K}$ l'ensemble $\{\mathbf{1}_{KgK}\}_{K\backslash G/K}$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H(G; K)$. Soit $g_0 \in K\backslash G/K$. On calcule l'image de $\mathbf{1}_{Kg_0K}$ par l'application I_ω :

Si $g \notin ZKg_0K$ alors

$$I_\omega(\mathbf{1}_{Kg_0K})(g) = \int_Z \omega(z)\mathbf{1}_{Kg_0K}(zg)dz = 0 \text{ car } \forall z \in Z,\ zg \notin Kg_0K.$$

Si $g \in ZKg_0K$ écrivons $g = z_0k_1g_0k_2$ (l'écriture n'est pas unique) où $z_0 \in Z$, $k_1, k_2 \in K$. Alors:

$$I_\omega(\mathbf{1}_{Kg_0K})(g) = \int_Z \omega(z)\mathbf{1}_{Kg_0K}(zz_0k_1g_0k_2)dz = \int_Z \omega(z)\mathbf{1}_{Kg_0K}(k_1zz_0g_0k_2)dz =$$

$$= \int_Z \omega(z)\mathbf{1}_{k_1^{-1}Kg_0Kk_2^{-1}}(zz_0g_0)dz = \int_Z \omega(z)\mathbf{1}_{Kg_0K}(zz_0g_0)dz = \int_Z \omega(z)\mathbf{1}_{Kg_0Kg_0^{-1}}(zz_0)dz =$$

$$= \int_Z \omega(z_0^{-1}z')\mathbf{1}_{Kg_0Kg_0^{-1}}(z')dz' = \omega^{-1}(z_0)\int \omega(z')\mathbf{1}_{Kg_0Kg_0^{-1}}(z')dz' =$$

$$= \omega^{-1}(z_0)\int_{Z\cap Kg_0Kg_0^{-1}} \omega(z')dz'$$

Une simple vérification des axiomes d'un groupe montre que $Z \cap Kg_0Kg_0^{-1}$ est un sous-groupe (ouvert et compact) de Z (même si $Kg_0Kg_0^{-1}$ lui-même n'est pas un groupe!). La restriction de ω est donc un caractère de ce sous-groupe de Z et l'intégrale de cette restriction est nulle dès que la restriction n'est pas triviale. On a donc:

$$\int_{Z\cap Kg_0Kg_0^{-1}} \omega(z')dz' = 0 \text{ si } Z \cap Kg_0Kg_0^{-1} \not\subseteq ker(\omega)$$

et

$$\int_{Z\cap Kg_0Kg_0^{-1}} \omega(z')dz' = mes(Z\cap Kg_0Kg_0^{-1}) \text{ si } Z\cap Kg_0Kg_0^{-1} \subset ker(\omega).$$

Le résultat final est donc :

$$I_\omega(\mathbf{1}_{Kg_0K}) \equiv 0 \; si \; Z\cap Kg_0Kg_0^{-1} \not\subset ker(\omega)$$

et

$$I_\omega(\mathbf{1}_{Kg_0K})(g) = \begin{cases} 0 \text{ si } g \notin ZKg_0K \\ \omega^{-1}(z_0)mes(Z\cap Kg_0Kg_0^{-1}) \; si \; g \in ZKg_0K, \; g = z_0k_1g_0k_2 \end{cases}$$

si $Z\cap Kg_0Kg_0^{-1} \subset ker(\omega)$.

On voit que $I_\omega(\mathbf{1}_{Kg_0K})$ vérifie :

- $supp(I_\omega(\mathbf{1}_{Kg_0K})) \subset ZKg_0K$
- $I_\omega(\mathbf{1}_{Kg_0K})$ est biinvariante par K
- $I_\omega(\mathbf{1}_{Kg_0K})(zg) = \omega^{-1}(z)I_\omega(\mathbf{1}_{Kg_0K})(g) \; \forall z \in Z, \; \forall g \in G.$

Ainsi $I_\omega(\mathbf{1}_{Kg_0K}) \in H(G;K;\omega)$ et le point (a) est démontré.

Montrons la surjectivité de I_ω. Soit $h \in H(G;\omega)$. Il existe K sous-groupe ouvert et compact de G tel que $h \in H(G;K;\omega)$. On va montrer qu'il existe $f \in H(G;K)$ tel que $I_\omega(f) = h$. Soit $\alpha \in supp(h)$. Si $z \in Z\cap K\alpha K\alpha^{-1}$, on a $z\alpha \in K\alpha K$ et donc $h(z\alpha) = h(\alpha)$. Mais $h(z\alpha) = \omega^{-1}(z)h(\alpha)$ et, comme $\alpha \in supp(h)$, cela prouve que $\omega(z) = 1$. En conclusion, si $\alpha \in supp(h)$, on a

$$Z\cap K\alpha K\alpha^{-1} \subset ker(\omega)$$

Maintenant $\{K\alpha K\}_{\alpha\in K\backslash G/K}$ est une partition de G, et h étant biinvariante par K, il existe des $\alpha_j \in G$, $j \in J$, tels que $\{K\alpha_jK\}_{j\in J}$ soit une partition de $supp(h)$ et h soit constante et égale à $h(\alpha_j)$ sur $K\alpha_jK$ pour tout $j \in J$. De plus, si on connaît h sur $K\alpha_jK$, on la connaît sur $zK\alpha_jK$ pour tout $z \in Z$: c'est $\omega^{-1}(z)h(\alpha_j)$. Comme $supp(h)$ est compact modulo Z on peut trouver un sousensemble fini J' de J tel que :

$$h(g) = \begin{cases} \omega^{-1}(z)h(\alpha_j) \text{ si } g \in Kz\alpha_jK \text{ pour un } z \in Z \text{ et un } j \in J' \\ 0 \text{ si } g \notin \cup_{j\in J', z\in Z} Kz\alpha_jK. \end{cases}$$

Comme on a vu que $[\alpha_j \in supp(h)] \Rightarrow [Z\cap K\alpha_jK\alpha_j^{-1} \subset ker(\omega)]$, d'après le calcul de $I_\omega(\mathbf{1}_{Kg_0K})$ qu'on a fait au début, si on pose

$$h = \sum_{j\in J'} h(\alpha_j)[mes(Z\cap K\alpha_jK\alpha_j^{-1})]^{-1}\mathbf{1}_{K\alpha_jK},$$

alors on a bien $I_\omega(f) = h$.

Preuve de (c):

$$\pi(f_\omega) = \int_{G/Z} f_\omega(\bar{g})\pi(\bar{g})d\bar{g} = \int_{G/Z} \Big\{ \int_Z \omega(z) f(z\bar{g})dz \Big\} \pi(\bar{g})d\bar{g} =$$

$$= \int_{G/Z}\int_Z \omega(z) f(z\bar{g})\pi(\bar{g})dzd\bar{g} = \int_{G/Z}\int_Z f(z\bar{g})\pi(z\bar{g})dzd\bar{g} =$$

$$= \int_G g(g)\pi(g)dg = \pi(f)$$

Preuve de (d):

$$\Phi(g_0; f_\omega) = \int_{G/G_{g_0}} f_\omega(\bar{g}^{-1}g_0\bar{g})d\bar{g} = \int_{G/G_{g_0}} \Big\{ \int_Z \omega(z) f(z\bar{g}^{-1}g_0\bar{g})dz \Big\} d\bar{g} =$$

$$= \int_Z \omega(z) \Big\{ \int_{G/G_{g_0}} f(z\bar{g}^{-1}g_0\bar{g})d\bar{g} \Big\} dz = \int_Z \omega(z)\Phi(zg_0; f)dz$$

Le théorème est démontré.

Soit ω un caractère de Z. Si $f \in H(G;\omega)$ on dit que f est *ω-supercuspidale* si pour tous $g_1, g_2 \in G$ et pour tout radical unipotent d'un sous-groupe parabolique propre de G on a:

$$\int_N f(g_1 n g_2)dn = 0.$$

1.2 Intégrales orbitales

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps local non archimédien F de caractéristique quelconque. Soit Z le centre de G. On choisit une mesure de Haar dg sur G et une mesure de Haar dz sur Z. Pour tout tore maximal T de G on fixe une mesure de Haar dt sur T, ces mesures étant reliées par le fait que, si deux tels tores sont conjugués dans G, alors leur mesures associées se correspondent par "transfert de structure". Si γ est un élément de G on dit que γ est semisimple régulier si son polynôme caractéristique est séparable et si le centralisateur $Z_G(\gamma)$ de γ dans G est un tore maximal. On note G^{sr} l'ensemble des éléments semisimples réguliers de G. C'est un sous-ensemble Zariski ouvert de G et dense pour la topologie p-adique. Si γ est un élément semisimple régulier de G, alors on considère sur $G/Z_G(\gamma)$ la mesure quotient $dg_\gamma = dg/dt$ où dt est la mesure qu'on a fixée sur le tore maximal $Z_G(\gamma)$.

Soit ω un caractère de Z. Si $f \in H(G)$ ou $f \in H(G;\omega)$ alors on définit une application $\Phi : G^{sr} \to \mathbb{C}$ en posant pour tout $\gamma \in G^{sr}$:

$$\Phi(f;\gamma) = \int_{G/Z_G(\gamma)} f(g\gamma g^{-1}) dg_\gamma.$$

L'application Φ s'appelle l'*intégrale orbitale* de f et jouit des propriétés suivantes :

- Φ est une application localement constante
- Φ est invariante par conjugaison
- si $f \in H(G;\omega)$ alors on a :

$$\Phi(f;zg) = \omega^{-1}(z)\Phi(f;g) \qquad \forall z \in Z,\ g \in G.$$

Soit P un sous-groupe parabolique de G, L un sous-groupe de Levi de P et $P = LU$ une décomposition de Levi de P. Soit K un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à P et L, c'est à dire tel qu'on ait $G = KP$ et $P \cap K = (L \cap K)(U \cap K)$. On considère des mesures de Haar dk sur K, du sur U et dl sur L telles qu'on ait $vol(K;dk) = vol(U \cap K;du) = vol(L \cap K;dl) = 1$.

On peut associer à tout élément f de $H(G)$ un élément f^P de $H(L)$ par la formule suivante :

$$f^P(l) = \delta_P^{1/2}(l) \int_U \int_K f(k^{-1}luk) dk du$$

où on a noté δ_P le caractère module sur le groupe P.

La fonction f^P est appelée le *terme constant de f le long de P.* C'est un élément de $H(L)$ qui dépend du choix de P.

Théorème 1.2.1 . *Avec les notations plus haut, pour tout élément g de G^{sr} qui appartient à L on a $Z_G(g) \subset L$ et:*

$$\Phi(f;g) = D_{G/L}^{-1/2}(g)\Phi^L(f^P;g)$$

où $D_{G/L}(g) = |det(1 - Ad(g)^{-1}; Lie(G)/Lie(L))|_F$ et Φ^L désigne l'intégrale orbitale sur L pour les mesures plus haut.

Démonstration. Voir [La], Proposition 4.3.11.

1.3 Traces et caractères des représentations

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps local non archimédien F de caractéristique quelconque. Soit π une représentation admissible de G dans un espace V. Comme V peut très bien être de dimension infinie on ne peut pas définir le caractère trace de π comme pour les groupes finis. Dans la section 1 on a défini un opérateur $\pi(f)$ pour tout $f \in H(G)$. Si K est un sous-groupe ouvert et compact de G tel que $f \in H(G; K)$, alors l'image de l'opérateur $\pi(f)$ est incluse dans l'espace V^K des vecteurs fixés par K, et cet espace est de dimension finie car π est admissible. L'image de l'opérateur $\pi(f)$ étant de dimension finie, $tr(\pi(f))$ a un sens. On obtient ainsi une application linéaire :

$$tr\pi : H(G) \to \mathbb{C} \qquad\qquad f \mapsto tr(\pi(f))$$

On appelle cette application *la distribution trace de* π ou tout simplement *la trace de* π.

Harish-Chandra a montré ([H-C2]) que pour toute représentation admissible π de G il existe une (unique) fonction $\chi_\pi : G^{sr} \to \mathbb{C}$ localement constante et invariante par conjugaison, telle que pour tout $f \in H(G)$ à support dans G^{sr} on ait :

$$tr(\pi(f)) = \int_{G^{sr}} \chi_\pi(g) f(g) dg.$$

On appelle χ_π le *caractère de* π. On voudrait obtenir le même résultat sans condition sur le support de f :

$$\forall\ f \in H(G),\ tr(\pi(f)) = \int_{G^{sr}} \chi_\pi(g) f(g) dg$$

A ce jour on dispose de ce résultat si la caractéristique de F est nulle [H-C1] ou si $G = GL_n(F)$ en toute caractéristique [Le2].

Si π est une représentation irréductible et ω est le caractère central de π, alors $\chi_\pi(zg) = \omega(z)\chi_\pi(g)$, $\forall z \in Z$, $\forall g \in G^{sr}$. Si ψ est un caractère du groupe G, alors le caractère de la représentation $\psi \otimes \pi$ est égal à $\psi\chi_\pi$.

Traces, caractères et induction

Dans cette sous-section on étudie la trace et le caractère d'une représentation induite. Le foncteur induction qu'on considère dans cette thèse sera toujours le foncteur de Jacquet, donc normalisé.

Soient $f \in H(G)$. Soit P un sous-groupe parabolique de G et $P = LU$ une décomposition de Levi de P. Soit $f^P \in H(L)$ la fonction définie dans la section

2. On a vu que f^P dépendait de P.

Théorème 1.3.1 . *La trace de f^P dans les représentations admissibles de L ne dépend pas du choix de P. Pour toute représentation π de L on a la relation:*

$$tr\pi(f^P) = tr\ ind_P^G\pi(f)$$

Démonstration. Voir [La] Lemme 7.5.7.

Théorème 1.3.2 . *Soit $(A;P)$ une paire parabolique de G et soit L le centralisateur de A dans P. Soit π une représentation de L. Si g est un élément semisimple régulier de G on a:*

-si g n'est conjugué dans G à aucun élément de L, alors $\chi_{ind_P^G\pi}(g) = 0$

-si g est conjugué dans G à un élément g_L de L alors g_L est semisimple et régulier dans L et on a

$$\chi_{ind_P^G\pi}(g) = \sum_{w\in W(A;G)} D_{G/L^w}(g)^{-1/2}\chi_{\pi^w}(g).$$

Démonstration. Voir [vD] et [Cl1], prop.3.

Traces, caractères et restriction

Dans cette sous-section on étudie la trace et le caractère de la restriction à un sous-groupe de Levi d'une représentation de G. Le foncteur restriction qu'on considére est, comme le foncteur induction, normalisé. Les résultats sont dans ce cas de nature locale. Ils se trouvent dans [Ca1].

Soit g un élément semisimple régulier de G. On lui associe un sous-groupe parabolique P_g de G de la façon suivante:

On pose $T = Z_G(g)$; c'est un tore maximal de G. Soit A un sous-tore maximal déployé de T et soit S un sous-tore maximal anisotrope de T. Alors T est isogène à SA et il existe un m tel que $g^m \in SA$. On pose $g^m = sa$. Soit Σ le système de racines de G associé à A. Soit P un sous-groupe parabolique minimal de G qui contient A et soit Δ le sous-ensemble des racines simples de Σ associé à P. Il existe $y \in G$ tel que, si on pose $a^y = yay^{-1}$, on ait $|\alpha(a^y)|_F \leq 1 \ \ \forall\alpha \in \Delta$. Soit $\Omega = \{\alpha \in \Delta \text{ tel que } |\alpha(a^y)|_F = 1\}$. On pose $A_\Omega = \cap_{\alpha\in\Omega} ker(\alpha)$ et $L_g = y^{-1}Z_G(A_\Omega)y$. On pose également $U_g = \{x \in G \text{ tel que } g^nxg^{-n} \text{ est borné quand } n \text{ varie}\}$ et enfin $P_g = L_gU_g$. Le groupe P_g est un sous-groupe parabolique de G et $P_g = L_gU_g$ est une décomposition de Levi. Alors g est un élément semisimple régulier de L_g.

Théorème 1.3.3 . *Avec les notations plus haut on a pour toute représentation admissible π de G :*

$$\chi_\pi(g) = \chi_{res^G_{P_g}\pi}(g).$$

Démonstration. Voir [Ca1], Théorème 5.2.

Proposition 1.3.4 . *Soit P un sous-groupe parabolique de G et soit L un sous-groupe de Levi de P. Soit g un élément régulier semisimple de G appartenant à L. Alors il existe un élément z du centre Z_L de L tel que $P_{zg} \subset P$. Plus précisément, si Δ' est le système de racines simples de $(A'; P)$ où A' est un sous-tore déployé maximal de $Z_L(g)$ il existe une constante réelle strictement positive $c(g)$ telle que, pour tout $z \in Z_L$ qui vérifie $|\alpha(z)|_F < c(g)$ $\forall \alpha \in \Delta'$, on ait $P_{zg} \subset P$.*

Démonstration. Pour tout $z \in Z_L$ on a $Z_L(zg) = Z_L(g)$ et il suffit d'imposer à $z \in Z_L$ de vérifier: $|\alpha(z)|_F < |\alpha(a)|_F^{-1}$ pour tout $\alpha \in \Delta'$ (il existe des tels z parce que les caractères dans Δ' sont indépendents). Nous posons donc $c(g) = \min_{\alpha\in\Delta'} |\alpha(g)|_F^{-1}$. On a alors $y = 1$ dans la définition de P_{zg} et $P_{zg} \subset P$.

Notation: $P = LU$ et g étant donnés comme plus haut, on pose, pour tout $z \in Z_L$, $N(z) = sup_{\alpha\in\Delta'}|\alpha(z)|_F$ où Δ' est défini comme dans la proposition. La condition sur z s'écrit alors $N(z) < c(g)$.

1.4 La formule d'intégration de Weyl

Soient G un groupe réductif connexe sur un corps local F de caractéristique quelconque et Z le centre de G. On munit F de la valeur absolue normalisée notée $|\ |_F$. Soit dg une mesure de Haar sur G. Soit $\mathcal{T}$ un système de représentants des classes de conjugaison de tores maximaux de G. Sur chaque tore $T \in \mathcal{T}$ on fixe une mesure de Haar dt et on note $W(T)$ son groupe de Weyl dans G. On note $|W(T)|$ le cardinal de ce groupe. Si $T \in \mathcal{T}$ et $t \in T$ on dit que t est régulier si son centralisateur dans G est T. On pose dans ce cas $D(t) = |det(Ad(t^{-1}) - Id; Lie(G)/Lie(T))|_F$ et on sait que $D(t)$ est non nul. On note T^{reg} l'ensemble des éléments réguliers de T et, comme d'habitude, G^{sr} l'ensemble des éléments semisimples réguliers de G.

Théorème 1.4.1 (Formule d'intégration de Weyl).
Pour toute fonction f intégrable sur G, si pour tout $T \in \mathcal{T}$ on munit G/T de la mesure quotient $\overline{dg} = dg/dt$ alors on a:

$$\int_G f(g)dg = \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) \int_{G/T} f(gtg^{-1})\overline{dg}dt.$$

Démonstration. Voir [DKV], A.3.f.

La formule de Weyl sera utilisé souvent dans un cas particulier. Soit π une représentation de G admettant un caractère central et soit ω le caractère central de π. Soit χ_π la fonction caractère de π. On a la

Proposition 1.4.2 . *a) Si $f \in H(G)$, si le caractère de π est localement intégrable sur G ou le support de f est inclus dans G^{sr}, on a*

$$tr\pi(f) = \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t)\chi_\pi(t)\Phi(f;t)dt.$$

b) Si $f \in H(G;\omega)$, si le caractère de π est localement intégrable sur G ou le support de f est inclus dans G^{sr}, on a

$$tr\pi(f) = \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(\bar{t})[\chi_\pi\Phi(f;\cdot)](\bar{t})d\bar{t}.$$

Démonstration. a) On applique la formule d'intégration de Weyl à la fonction $\chi_\pi f$.

b) On remarque que la fonction $\chi_\pi\Phi(f;\cdot)$ est bien définie modulo Z. Soit $h \in H(G)$ telle que $I_\omega(h) = f$ (prop.1.1.1b)). On a alors

$$tr\pi(f) = tr\pi(h) = \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t)\chi_\pi(t)\Phi(h;t)dt$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} \int_Z D(z\bar{t})\chi_\pi(z\bar{t})\Phi(h;z\bar{t})dzd\bar{t}$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(\bar{t}) \int_Z \chi_\pi(\bar{t})\omega(z)\Phi(h;z\bar{t})dzd\bar{t}$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(\bar{t})[\chi_\pi\Phi(f;\cdot)](\bar{t})d\bar{t}$$

parce que $D(z\bar{t}) = D(\bar{t})$ et $\int_Z \omega(z)\Phi(h;zt)dz = \Phi(f;t)$ (prop.1.1.1d)).

1.5 Représentations cuspidales, de carré intégrable, tempérées

Beaucoup parmi les définitions et résultats de cette section peuvent être généralisés à un groupe topologique localement compact et totalement discontinu quelconque. Néanmoins on va considérer ici un groupe réductif connexe G sur un corps local non archimédien F car c'est le cas qui nous intéresse.

Soit π une représentation lisse irréductible de G dans un espace vectoriel V. Soit v un vecteur de V et v' une forme linéaire lisse sur V. On peut définir une application $f_{v,v'}$ de G à valeurs dans $\mathbb{C}$ en posant :

$$f_{v,v'}(g) = v'(\pi(g)(v))$$

On dit que $f_{v,v'}$ est un *coefficient matriciel* de π. Si ω est le caractère central de π, alors $f_{v,v'}(zg) = \omega(z)f_{v,v'}(g)$ pour tout g dans G et tout z dans Z.

Si π est une représentation lisse irréductible de G, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) il existe un coefficient matriciel non nul de π à support compact modulo Z.

b) tous les coefficients matriciels de π ont un support compact modulo Z.

Une telle représentation est dite *cuspidale*. Attention, dans toute la suite, "représentation cuspidale" sous-entendra donc lisse et irréductible.

Supposons maintenant que π est une représentation lisse irréductible unitaire de G. Alors son caractère central est unitaire et la valeur absolue d'un coefficient de π est invariante par multiplication par des éléments de Z. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) il existe un coefficient matriciel de π de carré intégrable sur G/Z.

b) tous les coefficients matriciels de π sont de carré intégrable sur G/Z.

Une telle représentation est dite *de carré intégrable*. Dans toute la suite, "représentation de carré intégrable" sous-entendra donc lisse et irréductible.

Soient maintenant P un sous-groupe parabolique de G et L un sous-groupe de Levi de P, et soit σ une représentation de carré intégrable de L. Alors $ind_P^G\sigma$ est une représentation unitaire de longueur finie - donc totalement décomposable - de G, et toutes les sous-représentations irréductibles de $ind_P^G\sigma$ sont des représentations unitaires de G. Une telle sous-représentation irréductible de la représentation induite d'une représentation de carré intégrable est dite *tempérée*. Pour toute représentation tempérée τ de G il existe donc une paire $(P;\sigma)$ où P est un sous-groupe parabolique de G et σ est une représentation de carré intégrable du sous-groupe de Levi L de P tel que τ soit une sous-représentation de $ind_P^G\sigma$. La paire $(P;\sigma)$ est unique à conjugaison dans G près. (Voir [BW], théorème 2.3, page 330 où on montre que la définition ci-dessus est équivalente à l'autre définition possible (celle de Silberger [Si] par exemple) d'une représentation tempérée et aussi le résultat d'unicité modulo conjugaison qu'on vient d'énoncer). Dans toute la suite, "représentation tempérée" sous-entendra donc lisse et irréductible.

Une représentation lisse irréductible π de G est dite *essentiellement de carré intégrable* s'il existe une représentation π_0 de G de carré intégrable et un caractère ψ de G tel que $\pi = \psi \otimes \pi_0$. Elle est dite *essentiellement tempérée* s'il existe une représentation tempérée π_0 de G et un caractère ψ de G tels que $\pi = \psi \otimes \pi_0$.

Une représentation essentiellement de carré intégrable est unitaire si et seulement si son caractère central est unitaire ([Ca2], 2.5.4.). Les représentations essentiellement tempérées ont la même propriété.

On note $E(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations lisses irréductibles de G et $E^c(G)$, $E^2(G)$, $E^t(G)$ les ensembles de classes d'équivalence des représentations cuspidales, des représentations essentiellement de carré intégrable et des représentations essentiellement tempérées respectivement. On a $E^c(G) \subset E^2(G) \subset E^t(G)$. On note $E_u(G)$, $E_u^c(G)$, $E_u^2(G)$ et $E_u^t(G)$ les sous-ensembles des ensembles précédents formés de classes d'équivalence des représentations unitaires. À partir de maintenant on identifiera les représentations équivalentes quand il n'y aura pas d'ambiguïté et on considérera par abus qu'une représentation lisse irréductible de G est un élément de $E(G)$ par exemple.

Les représentations cuspidales

Théorème 1.5.1 . *Une représentation lisse irréductible de G est cuspidale si et seulement si sa restriction de Jacquet à tout sous-groupe parabolique de G est nulle.*

Démonstration. Casselman prend cette propriété pour définition et en montre l'équivalence avec notre définition dans [Ca] 5.3.1.

Théorème 1.5.2 . *Soit π une représentation lisse irréductible de G. Il existe alors un couple $(P;\rho)$ où P est un sous-groupe parabolique de G admettant une décomposition de Levi $P = LU$ et ρ est une représentation cuspidale de L tel que π soit une sous-représentation de $ind_P^G\rho$.*

Démonstration. Voir [BZ], 2.5.

Théorème 1.5.3 . *Soit π une représentation lisse irréductible de G. Alors il existe un sous-groupe parabolique P de G tel que la restriction de Jacquet de π à*

P ait un sous-quotient cuspidal. Si P est un tel sous-groupe alors tous les sous-quotients irréductibles de $res_P^G\pi$ sont cuspidaux. Un tel sous-groupe P est unique modulo conjugaison dans G et tous les sous-quotients irréductibles de $res_P^G\pi$ sont conjugués dans G.

Démonstration. Voir [BZ], 2.13.

Théorème 1.5.4 . *Soient P et P' deux sous-groupes paraboliques de G, L et L' des sous-groupes de Levi respectifs et ρ et ρ' deux représentations cuspidales de L et L' respectivement. S'il existe un sous-quotient irréductible de $ind_P^G\rho$ qui soit équivalent à un sous-quotient de $ind_{P'}^G\rho'$ alors les couples $(L;\rho)$ et $(L';\rho')$ sont conjugués dans G.*

Démonstration. Voir [Z], théorème 2.9.

Les représentations de carré intégrable

Le critère de Casselmann :

Soit $(A_0;P_0)$ une paire parabolique minimale pour G. Soit Σ le système de racines associé à $(A_0;P_0)$ et Δ le système des racines simples positives dans Σ. Pour tout $\theta\subset\Delta$ on pose $A_\theta=\cap_{\alpha\in\theta}ker\alpha$. Si $(A;P)$ est une paire parabolique quelconque de G, alors

- $(A;P)$ est dite *standard* si $A\subset A_0$ et $P_0\subset P$
- A est dit *standard* si $A\subset A_0$
- $(A;P)$ est dite *semistandard* si A est standard.

Si $(A;P)$ est une paire semistandard de G, on note $W(G;A)$ le groupe de Weyl de A dans G.

Soit $(A;P)$ une paire parabolique standard de G. Soit $P=LU$ une décomposition de Levi de P. Soit $X(A)$ le groupe des caractères rationnels de A. On pose $\mathfrak{a}=Hom(X(A);\mathbb{R})$. On note $\mathfrak{a}^*$ le dual de $\mathfrak{a}$ et on pose $\mathfrak{a}_\mathbb{C}=\mathfrak{a}^*\otimes\mathbb{C}$. La restriction $X(L)\to X(A)$ induit un isomorphisme $X(L)\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{R}\simeq X(A)\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{R}$ donc aussi un isomorphisme $Hom(X(A);\mathbb{R})\simeq Hom(X(L);\mathbb{R})$. Le groupe $W(G;A)$ agit sur $\mathfrak{a}^*$ et comme il est fini, il existe un produit scalaire $<\,;\,>$ sur $\mathfrak{a}^*$ invariant par l'action de $W(G;A)$, produit scalaire qu'on fixe une fois pour toutes.

Si π est une représentation de G et P est un sous-groupe parabolique de G, on appelle exposant central de π par rapport à P tout caractère central d'un sous-quotient irréductible de la représentation $res_P^G\pi$.

Théorème 1.5.5 (critère de Casselman).
Une représentation lisse irréductible π de G est essentiellement de carré intégrable

si et seulement si pour toute paire parabolique standard $(A;P)$ de G, si $A = A_\theta$, on a :

(Cas) *: $< \nu; \beta > < 0$ pour tout exposant central ν de π par rapport à P et toute racine β dans $\Delta \setminus \theta$.*

Démonstration. Voir [Ca2] 4.4.6.

Variante :

Le théorème reste valable si on remplace "pour toute paire parabolique standard $(A;P)$" par "pour toute paire parabolique standard $(A;P)$ minimale pour la propriété $res_P^G \pi \neq 0$".

Démonstration. Voir [Ca2] 6.5.1.

1.6 La classification de Langlands

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps local non archimédien F de caractéristique quelconque. On expose ici une classification des représentations de G due à Langlands, et dont on trouve deux approches différentes et la preuve dans [Si] et [BW]. Ce qui suit puise dans les notes d'un exposé de François Courtès.

On fixe une paire parabolique minimale $(A_0; P_0)$ de G.

Soit $(A; P)$ une paire parabolique standard de G. Soit L le sous-groupe de Levi standard de P. Soient $X(A)$ le groupe des caractères rationnels de A, $\mathfrak{a} = Hom(X(A); \mathbb{R}) \simeq Hom(X(L); \mathbb{R})$, $\mathfrak{a}^*$ le dual de $\mathfrak{a}$, $W(G; A)$ et le produit scalaire $< ; >$ sur $\mathfrak{a}^*$ invariant par l'action de $W(G; A)$ comme dans le paragraphe précédent. On identifie $\mathfrak{a}^*$ avec $X(L) \otimes \mathbb{R}$. On dit qu'un élément ν de $\mathfrak{a}^*$ est strictement positif si pour toute racine simple α de A dans G on a $< \nu; \alpha > > 0$.

Théorème de classification de Langlands. (a) Un quadruplet $(A; P; \tau; \nu)$ est dit *quadruplet de Langlands* si $(A; P)$ est une paire parabolique standard pour G, τ est une représentation tempérée du sous-groupe de Levi standard L de P et ν est un caractère à valeurs réelles positives qui est aussi un élément strictement positif de $\mathfrak{a}^*$. Alors $ind_P^G(\nu \otimes \tau)$ a un unique quotient irréductible qu'on appelle le quotient de Langlands du quadruplet$(A; P; \tau; \nu)$ et qu'on note $J(A; P; \tau; \nu)$.

(b) Si $(A_1; P_1; \tau_1; \nu_1)$ et $(A_2; P_2; \tau_2; \nu_2)$ sont deux quadruplets de Langlands, alors, si $J(A_1; P_1; \tau_1; \nu_1) = J(A_2; P_2; \tau_2; \nu_2)$, on a $P_1 = P_2$, $\tau_1 = \tau_2$ et $\nu_1 = \nu_2$.

(c) Soit π une représentation irréductible de G. Alors il existe un quadruplet de Langlands $(A; P; \tau; \nu)$ tel que π soit équivalente à la représentation $J(A; P; \tau; \nu)$.

Démonstration. Chapitre XI de [BW], prop. 2.6 et ce qui suit.

Si $(A; P; \tau; \nu)$ est un quadruplet de Langlands, on dit ici que la représentation $ind_P^G(\nu \otimes \tau)$ est une *représentation de Langlands* pour G (certains auteurs les appellent "représentations standard").

Le groupe de Grothendieck $Grot(G)$ de G est le quotient du groupe libre engendré par toutes les représentations lisses de longeur finie de G par les relations données par les suites exactes courtes.

Le théorème de classification plus haut implique, combiné au lemme 2.13 de la page 334 de [BW], le résultat suivant :

Théorème 1.6.1 . *Les images des représentations de Langlands de G dans le groupe de Grothendieck $Grot(G)$ de G forment une base sur $\mathbb{Z}$ de ce dernier.*

Démonstration. Lemme A.4.f de [DKV].

1.7 Le théorème de Paley-Wiener

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps local non archimédien F de caractéristique quelconque. Soit $\Psi(G)$ l'ensemble des caractères non ramifiés de G. Si $\pi \in E(G)$ on note $\Psi(G;\pi)$ le sous-ensemble de $E(G)$ formé par les (classes de) représentations du type $\psi\otimes\pi$, $\psi \in \Psi(G)$. L'ensemble $\Psi(G;\pi)$ a une structure de variété algébrique (isomorphe à un quotient de $\Psi(G)$). On définit de la même façon $\Psi(L;\pi)$ pour tout sous-groupe de Levi L d'un sous-groupe parabolique de G et pour toute représentation lisse irréductible π de L.

Si P et P' sont deux sous-groupes paraboliques de G, si L est un sous-groupe de Levi de P, L' un sous-groupe de Levi de P', et si ρ est une représentation cuspidale de L et ρ' une représentation cuspidale de L', on dit que les couples $(L;\rho)$ et $(L';\rho')$ sont *inertiellement équivalents* s'il existe $g \in G$ tel qu'on ait $L' = gLg^{-1}$ et $Ad(g)(\rho) \in \Psi(L';\rho')$.

Soit h un morphisme de groupes de $Grot(G)$ dans $(\mathbb{C};+)$. On peut regarder h comme une application de $E(G)$ dans $\mathbb{C}$. On dit que h est une *fonction trace* s'il existe $f \in H(G)$ telle que pour tout $\pi \in E(G)$ on ait $h(\pi) = tr\pi(f)$. On dit que h est une *bonne fonction* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- si on considère l'ensemble Y de toutes les classes d'équivalence par rapport à la relation d'équivalence inertielle des couples $(L;\rho)$ où L est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique P de G et ρ est une représentation cuspidale de L, alors il en existe un sous-ensemble fini Y' de Y tel que, si $(L;\rho)$ est tel que L est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parablique P de G, ρ est une représentation cuspidale de L et $h(ind_P^G(\rho)) \neq 0$, alors la classe de $(L;\rho)$ se trouve dans Y'.

- pour tout sous-groupe de Levi L d'un sous-groupe parabolique P de G, pour toute représentation lisse irréductible π de L, l'application $h_L : \Psi(L;\pi) \to \mathbb{C}$ définie par $h_L(\sigma) = h(ind_P^G(\sigma))$ est algébrique.

Théorème de Paley-Wiener. Si h est un morphisme de groupes de $Grot(G)$ dans $(\mathbb{C};+)$, alors h est une fonction trace si et seulement si h est une bonne fonction.

Démonstration. C'est le sujet de l'article [BDK].

1.8 Les pseudocoefficients

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps local non archimédien F de caractéristique quelconque. Soit $\pi \in E_u^2(G)$ et $f \in H(G)$. On dit que f est un *pseudocoefficient à support compact* de π si pour toute σ dans $\Psi(G;\pi)$ on a $tr(\sigma(f)) = 1$ et que pour toute représentation essentiellement tempérée τ de G n'appartenant pas à $\Psi(G;\pi)$ on a $tr\tau(f) = 0$.

Si ω est le caractère central de π et si $f \in H(G;\omega)$ alors on dit que f est un *pseudocoefficient* de π *à support compact modulo le centre* si $tr(\pi(f)) = 1$ et pour toute représentation essentiellement tempérée τ de G de caractère central ω qui n'est pas équivalente à π on a $tr\tau(f) = 0$.

Une propriété intéressante d'un pseudocoefficient d'une représentation de carré intégrable π est l'égalité (qui a été prouvée seulement en caractérisitque nulle pour l'instant) entre ses intégrales orbitales et le caractère de la représentation π sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers (i.e. semisimples réguliers dont le centralisateur est un tore elliptique T, soit T/Z est anisotrope).

La question des pseudocoefficients est assez mal traitée dans la littérature. Les ambiguités proviennent du fait que dans l'article original [Ka1] où Kazhdan montre l'existence des pseudocoefficients et l'égalité entre leurs intégrales orbitales et le caractère de la représentation correspondante sur les éléments elliptiques réguliers il se place en caractéristique nulle et sur un groupe à centre compact. Or, dans ce cas il n'y a plus aucune différence entre fonctions à support compact et fonctions à support compact modulo centre. On sait maintenant que l'existence des coefficients peut être prouvée dans le cas général par le théorème de Paley-Wiener, et on en trouve une démonstration dans [Cl2]. Mais, si on utilise le théorème de Paley-Wiener c'est qu'on a construit un pseudocoefficient à support compact f_π de π. On ne peut pas demander à f_π d'avoir des intégrales orbitales égales au caractère de π sur les éléments elliptiques réguliers, et ce n'est pas vrai non plus pour $I_\omega(f_\pi)$ où ω est le caractère central de π. Finalement, comme nous n'avons pas trouvé une référence où ces choses soient expliquées assez clairement, et comme nous les utilisons dans cette thèse, nous avons dédié l'annexe 2 à la révision de la géométrie cuspidale de Kazhdan sans condition sur le centre.

1.9 Orthogonalité des caractères

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps local non archimédien de caractéristique quelconque F. Soient Z le centre de G et dz une mesure de Haar sur Z. On note G_e l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de G ; sur tout tore elliptique maximal T de G on considère une mesure de Haar dt telle que le volume de T/Z pour la mesure quotient $d\bar{t} = dt/dz$ soit égale à 1 ; pour tout tore maximal T de G on note T^{reg} l'ensemble des éléments réguliers de T, W_T le groupe de Weyl de T et $|W_T|$ le cardinal de ce groupe. Pour tout élément semisimple régulier g de G de centralisateur T, on note $D(g)$ la valeur absolue normalisée de $det(Ad(g^{-1}) - 1)$ agissant sur $Lie(G)/Lie(T)$. Pour tout caractère unitaire ω de Z on note $L^0(G_e;\omega)$ l'espace des fonctions f définies sur G_e à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont localement constantes, invariantes par conjugaison par des éléments de G, et vérifient $f(zg) = \omega(z)f(g)$ pour tout $g \in G$ et tout $z \in Z$. Soit $\mathcal{T}_e$ un ensemble de représentants des classes de conjugaison de tores elliptiques maximaux. On note $L^2(G_e;\omega)$ le sous-espace de $L^0(G_e;\omega)$ formé des fonctions f pour lesquelles

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_e} |W_T|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(\bar{t})|f(\bar{t})|^2 d\bar{t}$$

converge. On définit un produit scalaire dans $L^2(G_e;\omega)$ en posant :

$$< f_1; f_2 >_e = \sum_{T} |W_T|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(\bar{t}) f_1(\bar{t})\overline{f_2(\bar{t})} d\bar{t},$$

ce qui donne à $L^2(G_e;\omega)$ une structure d'espace préhilbertien.

Clozel a montré dans [Cl2] que si la caractéristique de F est nulle alors pour toute représentation π de G de carré intégrable et de caractère central ω la restriction du caractère de π à G_e se trouve dans $L^2(G_e;\omega)$ et que les éléments de $L^2(G_e;\omega)$ ainsi obtenus forment une famille orthonormale pour $< \, ; \, >_e$. Cette propriété qu'ont tous les groupes réductifs en caractéristique nulle est appelée usuellement l'*orthogonalité des caractères*. Il est très plausible que les groupes réductifs sur des corps de caractéristique non nulle vérifient aussi cette propriété. On va démontrer dans le chapitre 2 l'orthogonalité des caractères pour $GL_n(F)$, où F est un corps de caractéristique non nulle. Après avoir établi la correspondance (chapitre 3), on obtiendra l'orthogonalité des caractères pour toute forme intérieure de $GL_n(F)$, toujours en caractéristique non nulle.

Dans le cas particulier où G/Z est compact, alors indépendamment de la caractéristique de F, les caractères de toutes les représentations lisses irréductibles de G de caractère central ω se trouvent dans $L^2(G_e;\omega)$ et forment une base Hilbertienne de cet espace (cela se montre comme pour les groupes compacts). C'est le cas du groupe des éléments inversibles d'une algèbre à division sur F.

Nous profitons pour enoncer ici un lemme qu'on utilise deux fois (et de façon essentielle) dans le chapitre 4, sections 1 et 3.

Lemme 1.9.1 . *Soit ω un caractère de Z. Soit $f \in H(G;\omega)$. Si la caractéristique de F est nulle, alors on a :*

$$\Phi(f;\cdot) \in L^2(G_e;\omega).$$

Démonstration. On a de toute façon (et en toute caractéristique)

$$\Phi(f;\cdot) \in L^0(G_e;\omega).$$

Si le corps F est de caractéristique nulle, le théorème 14, chapitre 8 de [H-CvD] s'applique ; il dit que pour tout tore elliptique maximal T de G la fonction $D(g)^{1/2}\Phi(f;\cdot)$ est bornée sur T^{reg}. C'est donc aussi le cas de la fonction

$$D(g)\Phi(f;\cdot)\overline{\Phi(f;\cdot)}.$$

Le résultat s'ensuit.

Si G et G' sont les groupes des éléments inversibles de deux algèbres centrales simples de même dimension n^2 sur F, on peut identifier leur centres qu'on note avec la même lettre Z. On fixe une fois pour toutes une mesure sur Z. L'application qui à un élément de G associe son polynôme caractéristique sur F réalise une bijection entre les classes de conjugaison d'éléments elliptiques réguliers de G et l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de degré n à coefficients dans F. De même pour G'. On obtient ainsi une bijection de l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments elliptiques réguliers de G sur l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments elliptiques réguliers de G'. On écrit $g \leftrightarrow g'$ si $g \in G$ est elliptique régulier, $g' \in G'$ est elliptique régulier et g et g' ont le même polynôme caractéristique. Il y a un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$i : L^0(G_e;\omega) \simeq L^0(G'_e;\omega)$$

défini par

$$i(f)(g') = f(g) \qquad \text{si } g \leftrightarrow g'.$$

Maintenant, si $g \leftrightarrow g'$, alors il y a un unique isomorphisme de F-algèbres (qui dans ce cas précis sont des corps) $F[g] \simeq F[g']$, qui envoie g sur g'. On a donc un isomorphisme de groupes multiplicatifs $F[g]^* \simeq F[g']^*$. Mais $F[g]^*$ n'est autre que le tore maximal elliptique $Z(g)$ qui contient g et $F[g']^*$ n'est autre que le tore maximal elliptique $Z(g')$ qui contient g'. Toutes ces considérations impliquent que, si on choisit un ensemble de représentants $\mathcal{T}_e$ des classes de conjugaison de tores elliptiques maximaux de G et un ensemble de représentants $\mathcal{T}'_e$ des classes de conjugaison de tores elliptiques maximaux de G', il y a une bijection

$$j : \mathcal{T}_e \to \mathcal{T}'_e$$

qui est caractérisée par $T \simeq j(T)$.

Soit $T \in \mathcal{T}_e$. Notons j_T l'isomorphisme de T sur $j(T)$. Étant un morphisme de groupes, j_T transforme la mesure de T en une mesure de Haar de $j(T)$, donc en un multiple complexe de la mesure qu'on avait choisi sur $j(T)$. Mais la restriction de l'application j_T à Z est l'identité, donc, vu le choix des mesures sur T et $i(T)$, on en déduit que j_T préserve la mesure. Alors la restriction de l'isomorphisme i à $L^2(G_e;\omega)$ induit un isomorphisme d'espaces préhilbertiens de $L^2(G_e;\omega)$ sur $L^2(G'_e;\omega)$. D'une façon plus explicite, on a :

$$< i(f); i(h) >=< f; h > \qquad \forall f, h \in L^2(G_e;\omega).$$

Si maintenant G' est le groupe des éléments inversibles d'une algèbre centrale simple de degré n^2 sur F, si g' est un élément semisimple régulier *quelconque* de G', alors le polynôme caractéristique $P_{g'}$ de g' est séparable et l'ensemble des éléments de G' dont le polynôme caractéristique est $P_{g'}$ est la classe de conjugaison de g'. L'ensemble des éléments de $GL_n(F)$ dont le polynôme caractéristique est $P_{g'}$ est non vide, constitué d'éléments semisimples réguliers, et forme une classe de conjugaison dans $GL_n(F)$. On obtient ainsi une injection de l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments semisimples réguliers de G' dans l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments semisimples réguliers de $GL_n(F)$. On note $g \leftrightarrow g'$ si $g \in G$ est semisimple régulier, $g' \in G'$ est semisimple régulier et g et g' ont le même polynôme caractéristique. Soit T' un tore maximal *quelconque* de G' et $g' \in T^{reg}$. Si $g \leftrightarrow g'$, alors il y a un unique isomorphisme de F-algèbres $F[g] \simeq F[g']$ qui envoie g sur g'. On a donc un isomorphisme de groupes multiplicatifs $F[g]^* \simeq F[g']^*$. Mais $F[g']^*$ n'est autre que le tore T' et $F[g]^*$ est un tore maximal de $GL_n(F)$, le tore maximal qui contient g. On obtient finalement une injection de l'ensemble de classes de conjugaison de tores maximaux de G' dans l'ensemble de classes de conjugaison de tores maximaux de $GL_n(F)$ qui prolonge la bijection j définie plus haut entre l'ensemble de classes de conjugaison de tores maximaux elliptiques de G' et l'ensemble de classes de conjugaison de tores maximaux elliptiques de $GL_n(F)$. On note cette application toujours par la lettre j. Le raisonnement qu'on vient de faire implique aussi que pour tout tore T' de G' il existe un isomorphisme standard de T' sur tout élément T de la classe de conjugaison correspondant à la classe de conjugaison de T'. Donc, si on fixe maintenant des mesures de Haar sur tous les tores maximaux de $GL_n(F)$, avec la propriété que sur deux tels tores conjugués les mesures se correspondent via la conjugaison, on peut obtenir par les isomorphismes plus haut des mesures de

Haar sur tous les tores maximaux non elliptiques de toutes les formes intérieures de $GL_n(F)$.

1.10 Représentations globales, composantes locales

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps global $\mathbb{F}$. Pour toute place v de $\mathbb{F}$ on note G_v le groupe des points de G sur $\mathbb{F}_v$. On suppose que pour presque toute place v K_v est un sous-groupe compact maximal de G_v choisi comme dans [Ti] 3.9 ; on note $\tilde{G}$ les adèles de G (soit le produit restreint des G_v par rapport aux K_v). On se demande quel lien il y a entre les représentations de $\tilde{G}$ et les représentations des G_v. On regroupe plus bas quelques résultats en ce sens :

Proposition 1.10.1 . *Soient G_1 et G_2 deux groupes topologiques localement compacts et totalement discontinus et soit $G = G_1 \times G_2$.*

(a) Si π_i est une représentation admissible irréductible de G_i pour $i = 1, 2$ alors $\pi_1 \otimes \pi_2$ est une représentation admissible irréductible de G.

(b) Si π est une représentation admissible irréductible de G il existe des représentations admissibles irréductibles π_i de G_i, $i = 1, 2$ tels que $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$.

Démonstration. Voir [Fla1], Théorème 1.

Quelques rappels :

Soit $\{E_v\}_{v\in M}$ une famille (infinie) d'espaces vectoriels. Pour presque tout $v \in M$ on fixe un vecteur $e_v \in E_v$. Alors le sous-espace vectoriel de $\bigotimes_{v\in M} E_v$ engendré par les vecteurs $f = \otimes_{v\in M} f_v$ tels que pour presque tout v on ait $f_v = e_v$ s'appelle "le produit restreint des E_v par rapport aux e_v". On le note $\bigotimes_{e_v} E_v$. Si chaque E_v est un espace hilbertien et si presque tous les e_v sont unitaires, alors le sous-espace de $\hat{\bigotimes}_{v\in M} E_v$ topologiquement engendré par les vecteurs $f = \otimes_{v\in M} f_v$ tels que pour presque tout v on ait $f_v = e_v$ est un espace de Hilbert qu'on appelle "le produit restreint hilbertien des espaces E_v par rapport aux e_v" et qu'on note $\hat{\bigotimes}_{e_v} E_v$.

Soit F un corps local non archimédien et H un groupe réductif connexe sur F. Supposons que F admet un sous-groupe compact maximal hyperspécial K. Soit π une représentation admissible irréductible de H dans un espace E. Alors $dim(E^K)$ est indépendante du choix de K et est inférieure ou égale à 1 (le corollaire au théorème 1, [Fla1]). Si $dim(E^K) = 1$ on dit que π est *non ramifiée.* Si $dim(E^K) = 0$ on dit que π est *ramifiée.*

Reprenons les notations adoptées au début de cette section. Soit pour toute place finie v une représentation admissible irréductible π_v de G_v dans un espace E_v. Supposons que, pour presque tout v, π_v est non ramifiée. Pour tout v telle que π_v est non ramifiée fixons un vecteur non nul e_v dans $E_v^{K_v}$. On peut former avec les π_v une représentation $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}$ dans $\bigotimes_{e_v} E_v$. La classe d'équivalence de cette représentation est indépendante du choix des e_v. On écrit par abus $\tilde{\pi} = \otimes_v \pi_v$. C'est une représentation admissible de $\tilde{G}$. On peut faire pareil dans le cas hilbertien.

Théorème 1.10.2 . *(a) Soit $\tilde{\pi}$ une représentation admissible irréductible de $\tilde{G}$. Alors il existe des représentations admissibles irréductibles π_v des G_v presque toutes non ramifiées telles que $\tilde{\pi} = \otimes_v \pi_v$. Les π_v sont uniques à équivalence près.*

(b) Si $\tilde{\pi}$ est une représentation admissible irréductible unitaire de $\tilde{G}$ alors il existe des représentations admissibles irréductibles π_v unitaires des G_v presque toutes non ramifiées telles que $\tilde{\pi} = \hat{\otimes} \pi_v$. Les π_v sont uniques à équivalence près.

Démonstration. Voir [GGP-S], page 282.

Un tel π_v (unique à équivalence près) s'appelle "composante locale de $\tilde{\pi}$ à la place v".

1.11 Les représentations ρ et ρ_0. Représentations automorphes et automorphes cuspidales

Soit G un groupe comme dans la section précédente. On reprend les mêmes notations. Le groupe G se plonge diagonalement dans $\tilde{G}$. Soient Z le centre de G, Z_v le centre de G_v et $\tilde{Z}$ les adèles de Z. Par la suite on utilisera l'abréviation "*pptv*" pour "pour presque tout v".

Soit $\tilde{\omega}$ un caractère unitaire de $\tilde{Z}$ trivial sur Z. On définit les ensembles suivants (ce ne sont pas des espaces vectoriels) :

$H(\tilde{G};\tilde{\omega})$ est l'ensemble des fonctions $\tilde{f}$ définies sur $\tilde{G}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui s'écrivent $\tilde{f} = \Pi_v f_v$, où pour toute place v on a $f_v \in H(G_v;\tilde{\omega})$ et pour presque toute place v on a $f_v = [mesK_v]^{-1} I_{\tilde{\omega}_v}(\mathbf{1}_{K_v})$ et

$\mathcal{SC}(\tilde{G};\tilde{\omega})$ est l'ensemble des fonctions $\tilde{f} \in H(\tilde{G};\tilde{\omega})$ telles que, pour au moins une place finie v_0, f_{v_0} est le coefficient d'une représentation cuspidale de caractère central $\tilde{\omega}_{v_0}$.

On définit également les espaces vectoriels $L^2(\tilde{G};\tilde{\omega})$ et $L^2_0(\tilde{G};\tilde{\omega})$ suivants :

$L^2(\tilde{G};\tilde{\omega})$ est l'espace des fonctions ϕ définies sur $G\backslash\tilde{G}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que

- pour tout $z \in \tilde{Z}$ et tout $g \in \tilde{G}$ on a $\phi(zg) = \tilde{\omega}(z)\phi(g)$ et
- $\int_{G(\mathbb{F})\tilde{Z}\backslash\tilde{G}} |\phi(g)|^2 < \infty\}$.

C'est un espace de Hilbert relativement au produit scalaire

$$< \phi \,;\, \phi' >= \int_{G\tilde{Z}\backslash\tilde{G}} \phi(g)\bar{\phi}'(g)dg.$$

On dit que $\phi \in L^2(\tilde{G};\tilde{\omega})$ est une *forme cuspidale* si pour tout $g \in \tilde{G}$ et pour tout radical unipotent N d'un sous-groupe parabolique propre de G on a :

$$\int_{N\backslash\tilde{N}} \phi(ng)dn = 0$$

On note alors $L^2_0(\tilde{G};\tilde{\omega})$ le sous-espace de $L^2(\tilde{G};\tilde{\omega})$ formé de formes cuspidales.

Alors $\tilde{G}$ agit sur $L^2(\tilde{G};\tilde{\omega})$ par translations à droite. On note ρ cette représentation de $\tilde{G}$. Il est clair que $L^2_0(\tilde{G};\tilde{\omega})$ est un sous-espace stable pour ρ. On note ρ_0 la représentation de $\tilde{G}$ dans $L^2_0(\tilde{G};\tilde{\omega})$ induite par ρ. Alors ρ et ρ_0 sont des représentations unitaires de caractère central $\tilde{\omega}$.

Si $\tilde{f} \in H(\tilde{G};\tilde{\omega})$ on définit un opérateur de $L^2(\tilde{G};\tilde{\omega})$ par :

$$[\rho(\tilde{f})\phi](g) = \int_{\tilde{Z}\backslash\tilde{G}} \tilde{f}(g^{-1}h)\phi(h)dh$$

C'est un opérateur unitaire.

Proposition 1.11.1 . *Si $\tilde{f} \in \mathcal{SC}(\tilde{G};\tilde{\omega})$, alors $\rho(\tilde{f})[L^2(\tilde{G};\tilde{\omega})] \subset L^2_0(\tilde{G};\tilde{\omega})$.*

Démonstration. Voir [He1] et [Ro2].

Si on a fixé un caractère unitaire $\tilde{\omega}$ de $Z\backslash\tilde{Z}$, la représentation ρ définie plus haut est une représentation (unitaire) non irréductible de $\tilde{G}$. Toute sous-représentation irréductible de ρ est dite *automorphe.* On a vu que ρ_0 est une sous-représentation de ρ (donc unitaire) non irréductible. Une sous-représentation irréductible de ρ_0 est dite *automorphe cuspidale.* On se demande quelles sont les représentations de G_v qui sont des composantes locales d'une représentation automorphe ou automorphe cuspidale, et dans combien de telles représentations elles apparaissent. Le problème n'est pas facile et on ne connaît pas une réponse valable pour tout groupe réductif. Je donne plus bas divers résultats concernant ce problème :

Théorème 1.11.2 . *Toute représentation automorphe cuspidale de $\tilde{G}$ apparaît avec multiplicité finie dans ρ_0.*

Démonstration. C'est le théorème 3, page 295, [GGP-S].

Le résultat suivant est prouvé par Henniart dans [He1] :

Théorème 1.11.3 . *Soit S un ensemble fini non vide de places finies de $\mathbb{F}$ et pour tout $v \in S$ soit π_v une représentation admissible irréductible unitaire de G_v de caractère central unitaire $\tilde{\omega}_v$ qui admette un coefficient à support compact modulo le centre Z_v. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}$ telle qu'à toute place $v \in S$ la composante locale de $\tilde{\pi}$ soit équivalente à π_v.*

Démonstration. Voir [He1] Appendice 1.

Les deux résultats suivants, valables pour le groupe $GL_n(\mathbb{F})$, ont été prouvés par Shalika dans [Sh] :

Théorème 1.11.4 . *(dit "de multiplicité un") Soit $\tilde{\pi}$ une représentation automorphe cuspidale de $\tilde{G}$ où $G = GL_n$. Alors la multiplicité de $\tilde{\pi}$ dans ρ_0 est égale à un.*

Théorème 1.11.5 . *Soit $\tilde{\pi}$ une représentation automorphe cuspidale de $\tilde{G}$ où $G = GL_n$. Alors toutes les composantes locales de $\tilde{\pi}$ sont des représentations génériques (i.e. possedant un modèle de Whittaker.*

Démonstration. Voir [Sh] théorème 3.1 ou [P-S] pour le théorème 1.11.4. Voir [Sh] corollaire page 190 pour le théorème 1.11.5.

Théorème 1.11.6 . *(dit "de multiplicité un forte") Soient $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ deux représentations de $\tilde{G}$ où $G = GL_n$. Si les composantes locales de $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ sont équivalentes à toutes les places infinies et à presque toutes les places finies alors les composantes locales de $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ sont équivalentes à toutes les places et $\tilde{\pi}_1$ et $\tilde{\pi}_2$ sont équivalentes.*

Démonstration. Voir [P-S] page 209.

On sait qu'il existe (beaucoup) de groupes sur lesquels ces résultats sont faux. Les démonstrations de ces résutats utilisent fortement des outils spécifiques au groupe linéaire comme le modèle de Whittaker et la notion de représentation "générique". Le résultat suivant est un résultat de finitude valable pour toutes les formes intérieures du groupe linéaire (c.à.d. les groupes des éléments inversibles des algèbres centrales simples sur $\mathbb{F}$). On le montre dans cette thèse.

Théorème 1.11.7 . *Soit G le groupe des éléments inversibles d'une algèbre centrale simple de dimension finie sur $\mathbb{F}$ et soit S un sous-ensemble fini de places finies de $\mathbb{F}$ qui ne contient aucune place infinie. On suppose qu'on s'est donné pour toute place $v \notin S$ une représentation admissible irréductible π_v de G_v. Alors il existe au plus un nombre fini de représentations de $\tilde{G}$ qui ont comme composante locale π_v à toute place $v \notin S$.*

Démonstration. Voir la section 5, chapitre 4.

Une variante du théorème 1.11.3, valable pour $G = GL_n$:

Théorème 1.11.8 . *Soit $G = GL_n(\mathbb{F})$ et soit S un ensemble fini non vide de places finies de $\mathbb{F}$. Soit pour tout $v \in S$ une représentation π_v de carré intégrable de G_v. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}$ telle qu'à toute place $v \in S$ la composante locale de $\tilde{\pi}$ soit équivalente à π_v.*

Démonstration. (Voir aussi [AC] page)On peut supposer qu'une des représentations π_v fixées est cuspidales, sinon on rajoute une place et une représentation cuspidale aux données initialles. En regardant maintenant la démonstration du théorème 1.11.3 plus haut dans [He1], on voit qu'elle s'applique toujours : en fait l'hypothèse est l'existence pour toute place $v \in S$ d'une fonction $f \in H(G_v; \tilde{\omega}_v)$ qui annule les traces de toutes les représentations de G_v de caractère central $\tilde{\omega}_v$ non équivalentes à la représentation donnée π_v, mais la démonstration n'utilise que le fait qu'elle annule les traces de toutes les représentations de caractère central $\tilde{\omega}_v$ *qui apparaissent comme composante locale d'une représentation automorphe cuspidale* et qui sont non équivalentes à π_v. Or, une représentation de carré intégrable π de caractère central ω admet un pseudocoefficient f_π dans $H(G_v; \omega)$ (th. 2a), annexe 2). Comme ici $G = GL_n$, par le théorème 1.11.5 cidessus, toutes les représentations de G_v qui peuvent apparaître comme composante locale d'une représentation automorphe cuspidale sont génériques. Mais, par le théorème 9.7 de [Z], ces représentations sont ou bien de carré intégrable ou bien des représentations strictement induites. Donc leur traces sont de tout façon annulées par f_π, dans le premier cas parce que π est un pseudocoefficient et dans le deuxième par le theórème 2b), annexe 2.

1.12 La formule des traces simple

On reprend les notations des sections 10 et 11 ; G est un groupe réductif connexe sur un corps global $\mathbb{F}$. Pour toute place v de $\mathbb{F}$, G_v est le groupe des points de G sur $\mathbb{F}_v$. On suppose que pour presque toute place v K_v est un sous-groupe compact maximal de G_v choisi comme dans [Ti] 3.9 et on note $\tilde{G}$ les adèles de G (soit le produit restreint des G_v par rapport aux K_v). Le groupe G se plonge diagonalement dans $\tilde{G}$. On note (toujours) G son image. Soient Z le centre de G et $\tilde{Z}$ les adèles de Z. Soit $\tilde{\omega}$ un caractère unitaire de $\tilde{Z}$. Soit $\mathcal{SC}(\tilde{G};\tilde{\omega})$ l'ensemble des fonctions $\tilde{f} \in H(\tilde{G};\tilde{\omega})$ (voir section 11) telles que, pour au moins une place finie v_0, f_{v_0} est le coefficient d'une représentation cuspidale de caractère central $\tilde{\omega}_{v_0}$. Si g est un élément de G on note $C_G(g)$ (resp. $C_{\tilde{G}}(g)$) le centralisateur de g dans G (resp. $\tilde{G}$). Le groupe $C_G(g)$ se plonge diagonalement dans $C_{\tilde{G}}(g)$ et on note toujours $C_G(g)$ son image.

Théorème 1.12.1 (Formule des traces simple). *Soit $\tilde{f} \in H(\tilde{G};\tilde{\omega})$. Alors $\rho(\tilde{f})$ est un opérateur à trace. Supposons que pour au moins une place finie v_1 $\tilde{f}_{v_1}$ est à support dans l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de G_{v_1}. Alors on a*

$$tr(\rho_0(\tilde{f})) = \sum vol(C_G(g)\tilde{Z}\backslash C_{\tilde{G}}(g)) \int_{G\backslash\tilde{G}} \tilde{f}(x^{-1}gx)dx$$

où la somme porte sur l'ensemble de classes des éléments elliptiques réguliers dans $Z\backslash G$.

Démonstration. Voir la partie 1 de [Ro2].

Chapitre 2

CORRESPONDANCE AVEC UNE ALGÈBRE À DIVISION

Introduction

Les résultats originaux de ce chapitre sont le théorème 2.2.1 et le "transfert fort" en caractéristique non nulle. La façon dont on obtient l'orthogonalité des caractères à l'aide du théorème 2.2.1 est classique ([DKV], A.3.h). Le fait que l'orthogonalité des caractères pour le groupe linéaire est suffisante pour démontrer la correspondance avec une algèbre à division en toute caractéristique est sous-jacente à [DKV] et apparent dans la démonstration de Y.Flicker dans [Fl2]. On écrit néanmoins ici une preuve pour que le lecteur se convainque que tous les arguments sont indépendants de la caractéristique. Finalement nous donnons une démonstration du transfert en expliquant pourquoi les preuves de [Ro2], [DKV] et [Fl2], si elles s'appliquaient en caractéristique nulle, ne fonctionnent plus en caractéristique quelconque.

2.1 Corps locaux proches et le groupe linéaire. Un résultat de Lemaire

Si F est un corps local non archimédien, on note O_F l'anneau des entiers de F et P_F l'idéal maximal de O_F. Si F et L sont deux corps locaux non archimédiens et m est un entier strictement positif, on dit que F et L sont *m-proches* s'il y a un isomorphisme d'anneaux $O_F/P_F^m \simeq O_L/P_L^m$. On fixe alors un triplet $(\bar\lambda_{FL}^m; \pi_F; \pi_L)$ où $\bar\lambda_{FL}^m : O_F/P_F^m \to O_L/P_L^m$ est un isomorphisme et π_F et π_L sont des uniformisantes de F et L respectivement tel que $\bar\lambda_{FL}^m(\textit{classe de } \pi_F) = \textit{classe de } \pi_L$.

Kazhdan est le premier qui eut l'idée de comparer, pour un groupe algébrique G, les représentations des groupes $G(F)$ et $G(L)$ où F et L sont deux corps locaux non archimédiens qui sont m-proches. Si par exemple F est de caractéristique non nulle et L est de caractéristique nulle, on peut obtenir un résultat sur les représentations de $G(F)$ par cette méthode, en se basant sur le fait que ce résultat a déjà été démontré pour $G(L)$ par des méthodes spécifiques à la caractéristique nulle. Kazhdan a traité ce sujet pour le cas des groupes de Chevalley dans [Ka2]. Lemaire a étudié dans sa thèse le cas du groupe linéaire pour en tirer une démonstration de la conjecture de Howe pour ce groupe en caractéristique non nulle ([Le1]). Il obtient un résultat de "relèvement des intégrales orbitales" qui a été publié dans [Le3] et c'est dans cet article que puise cette section même si on n'a pas respecté toutes les notations.

Soit F un corps local non archimédien et n un entier strictement positif. On note K_F le sous-groupe compact maximal $GL_n(O_F)$ de $GL_n(F)$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on note K_F^p le sous-groupe de congruence de niveau p de $GL_n(F)$ qui est par définition le noyau de la projection $K_F \to GL(O_F/P_F^p)$. On note $H(GL_n(F); K_F^p)$ la sous-algèbre de Hecke de $H(GL_n(F))$ formée des fonctions qui sont bi-invariantes par K_F^p. Pour un tel corps F on considère d'une façon générale : sur le centre Z de $GL_n(F)$ identifié à F^* la mesure de Haar dz pour laquelle O_F^* est de volume égal à 1, sur $GL_n(F)$ la mesure de Haar dg pour laquelle K_F est de volume égal à 1 et sur tout tore elliptique maximal T la mesure de Haar dt telle que T/Z soit de volume égal à 1 pour la mesure quotient dt/dz. Si g est un élément elliptique régulier de $GL_n(F)$ et $f \in H(GL_n(F))$ ou $f \in H(GL_n(F); \omega)$ pour un caractère ω de Z, $\Phi(f; g)$ désigne l'intégrale orbitale de f au point g pour les mesures ainsi choisies. Si π est une représentation de $GL_n(F)$ on appelle *niveau* de π (notation $niv(\pi)$) le plus petit entier m tel que π ait un vecteur fixe sous K_F^m. Le niveau de π est aussi le plus petit entier m tel que π induise une représentation non identiquement nulle de $H(GL_n(F); K_F^m)$.

On note B_F le sous-groupe de $GL_n(F)$ formé des matrices dans $GL_n(O_F)$

qui sont triangulaires supérieures modulo P_F. On pose aussi, pour tout entier strictement positif m, $B_F^m = 1 + \pi_F^m B_F$ et on note $H(GL_n(F); B_F^m)$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur $GL_n(F)$ qui sont bi-invariantes par B_F^m. Pour tout entier positif m on a :

$$K_F^{m+1} \subset B_F^m \subset K_F^m.$$

Si F et L sont deux corps locaux non archimédiens m-proches alors $\bar{\lambda}_{FL}^m$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $H(GL_n(F); B_F^m)$ sur $H(GL_n(L); B_L^m)$, isomorphisme dépendant du choix de π_F et π_L (fixés dans la suite). Cet isomorphisme d'espaces vectoriels est en fait un isomorphisme d'algèbres (proposition 2.1.1, [Le1]). La restriction de cet isomorphisme à la sous-algèbre $H(GL_n(F); K_F^m)$ de $H(GL_n(F); B_F^m)$ induit un isomorphisme d'algèbres :

$$\bar{\zeta}_{FL}^m : H(GL_n(F); K_F^m) \to H(GL_n(L); K_L^m)$$

(proposition 2.2.1 [Le1]). Par conséquent, $\bar{\zeta}_{FL}^m$ induit une bijection de l'ensemble de classes d'équivalence de représentations lisses irréductibles de $GL_n(F)$ de niveau inférieur ou égal à m sur l'ensemble de classes d'équivalence de représentations lisses irréductibles de $GL_n(L)$ de niveau inférieur ou égal à m – bijection qu'on va toujours noter $\bar{\zeta}_{FL}^m$ – et pour toute représentation π de niveau inférieur ou égal à m de $GL_n(F)$, pour tout $f \in H(GL_n(F); K_F^m)$, on a

$$tr\bar{\zeta}_{FL}^m(\pi)(\bar{\zeta}_{FL}^m(f)) = tr\pi(f).$$

Si A est une partie compacte de $GL_n(F)$ invariante par K_F^m, l'image par $\bar{\zeta}_{FL}^m$ de la fonction caractéristique de A est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble compact B de G_L invariant par K_L^m et on pose par définition $\bar{\zeta}_{FL}^m(A) = B$. On a alors $vol(B) = vol(A)$ si les mesures sur $GL_n(F)$ et $GL_n(L)$ sont comme plus haut.

Proposition 2.1.1 . *Si $m \geq 2$, $\bar{\zeta}_{FL}^m$ réalise une bijection entre les classes d'équivalence des représentations génériques irréductibles de $GL_n(F)$ de niveau inférieur ou égal à $m-1$ et les classes d'équivalence des représentations génériques irréductibles de $GL_n(L)$ de niveau inférieur ou égal à $m-1$.*

Démonstration. On a expliqué plus haut que la bijection $\bar{\zeta}_{FL}^m$ est la restriction aux représentations de $GL_n(F)$ de niveau inférieur ou égal à m de la bijection ζ introduite au chapitre 1 de [Le1]. On applique donc le corollaire 3.3.3 de [Le1] tenant compte du fait que si une représentation π a un vecteur fixe sous K_F^{m-1} elle a un vecteur fixe sous B_F^{m-1}.

On va maintenant rappeler un résultat de Lemaire qui nous sera très utile par la suite. Il s'agit du fait que pour tout élément elliptique régulier g de $GL_n(F)$ et tout entier strictement positif m il existe un voisinage $V(g;m)$ de g inclus dans l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de $GL_n(F)$ tel que pour toute fonction f dans $H(GL_n(F);K_F^m)$ l'intégrale orbitale de f soit constante sur $V(g;m)$ égale à $\Phi(f;g)$, et qu'il existe un entier $m'' \geq m$ tel que, si L est un corps m''-proche de F, $V' = \bar{\zeta}_{FL}^{m''}(V(g;m))$ soit bien défini et l'intégrale orbitale de $\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(f)$ soit constante et égale à $\Phi(f;g)$ sur V'.

Soit g un élément elliptique régulier de $GL_n(F)$. Soient:
- $F_g = F[g]$ le sous-corps maximal de $M_n(F)$ engendré par g,
- e l'indice de ramification de l'extension (de degré n) de corps locaux non archimédiens F_g/F,
- $\mathcal{G}$ l'unique O_F-ordre héréditaire de $M_n(F)$ normalisé par F_g^*,
- $J_\mathcal{G}$ le radical de Jacobson de $\mathcal{G}$,
- $\nu_\mathcal{G}$ la valuation sur $M_n(F)$ définie par $\nu_\mathcal{G}(x) = \max\{i \in \mathbb{Z} : x \in J_\mathcal{G}^i\}$,
- pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{N}_k = \{x \in \mathcal{G} : xg - gx \in J_\mathcal{G}^k\}$,
- $k_0 = \max\{k \in \mathbb{Z} : \mathcal{N}_k \not\subset O_{F_g} + J_\mathcal{G}\}$,
- $k_1 = k_0 - \nu_\mathcal{G}(g)$
- $\bar{k}_1 = k_1/e$,
- $A = P_{G_g}^{1-k_1}\mathcal{N}_{k_0}$.

Fixons un caractère additif ψ_F de F de conducteur P_F (trivial sur P_F et non trivial sur O_F). Soit

$$\Lambda = \{x \in M_n(F) : tr(xy) \in ker(\psi_F),\ \forall y \in A\}.$$

Soit m un entier strictement positif. Soient:
- $m' = m'(g;m)$ le plus petit entier supérieur ou égal à $\max\{1+\bar{k}_1, m-\bar{k}_1\}$,
- $m'' = m''(g;m)$ le plus petit entier supérieur ou égal à $m'(g;m) + \bar{k}_1 + 1$.

Théorème 2.1.2 . *Soit g un élément elliptique régulier de $GL_n(F)$ et m un entier strictement positif. Alors le voisinage $V(g;m)$ de g défini par $V(g;m) = g(1+\pi_F^{m'(g;m)}\Lambda)$ est contenu dans l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de $GL_n(F)$ et vérifie*

a) $V(g;m)$ est bi-invariante par $K_F^{m''}$ et pour toute fonction $f \in H(GL_n(F);K_F^m)$ l'intégrale orbitale de f est constante égale à $\Phi(f;g)$ sur $V(g;m)$,

b) pour tout corps L m''-proche de F, $\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(V(g;m))$ est incluse dans l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de $GL_n(L)$ et pour toute fonction $f \in H(GL_n(F);K_F^m)$, l'intégrale orbitale de $\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(f)$ est constante égale à $\Phi(f;g)$ sur $\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(V(g;m))$.

Démonstration. a) On a $K_F^{m''} \subset B_F^{m''-1}$ et on applique le théorème de la page 1042 de [Le3].

b) On a

$$f \in H(GL_n(F);K_F^m) \Rightarrow f \in H(GL_n;B_F^m).$$

On applique à nouveau le théorème de la page 1042 de [Le3].

Variante

On a besoin d'une variante du théorème 2.1.2 qui concerne les fonctions de $H(GL_n(F);\omega)$ où ω est un caractère unitaire fixé du centre Z_F de $GL_n(F)$. Tout d'abord un tel caractère est une représentation lisse et irréductible de $GL_1(F)$ et par conséquent, s'il est trivial sur $1+P_F^m$ et non trivial sur $1+P_F^{m-1}$ alors pour tout corps L m-proche de F on sait définir $\bar{\zeta}_{FL}^m(\omega)$ qui est un caractère de $GL_1(L)$ qu'on identifiera au centre Z_L de $GL_n(L)$. Si π est une représentation lisse irréductible de $GL_n(F)$ de niveau m et de caractère central ω alors le noyau de ω contient $!+P_F^m$ et pour tout corps L m-proche de F le caractère central de $\bar{\zeta}_{FL}^m(\pi)$ est $\bar{\zeta}_{FL}^m(\omega)$. Si ω est un tel caractère de F^* de niveau inférieur ou égal à m, si $f \in H(GL_n(F);K_F^m)$, alors on a, avec les notations de la section 2, chap.1 :

Théorème 2.1.3 . *Si g est un élément elliptique régulier de $GL_n(F)$ et $V(g;m)$ et $m''(g;m)$ sont comme plus haut, alors l'intégrale orbitale de $I_\omega(f)$ est constante égale à $\Phi(I_\omega(f);g)$ sur $V(g;m)$ et pour tout corps local L qui est $m''(g;m)$-proche de F, l'intégrale orbitale de $I_{\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(\omega)}(\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(f))$ est constante et égale à $\Phi(I_\omega(f);g)$ sur $\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(V(g;m))$.*

Démonstration. On a vu dans (sect.2, chap.1) la relation

$$\Phi(I_\omega(f);g) = \int_Z \omega(z)\Phi(f;zg)dz.$$

Montrons que pour tout $z \in Z$ nous avons $V(zg;m) = zV(g;m)$ et $m''(zg;m) = m''(g;m)$. On reprend un par un les objets associés au début de cette section à g et m et qui servent à définir $V(g;m)$ et $m''(g;m)$, et on compare en suivant les définitions pas à pas ; on a :

- $F_{zg}=F_g$,
- $e(zg) = e(g)$,
- $\mathcal{G}(zg) = \mathcal{G}(g)$,
- $J_{\mathcal{G}}(zg) = J_{\mathcal{G}}(g)$,
- la valuation $\nu_{\mathcal{G}}$ est la même,
- $\mathcal{N}_k(zg) = \mathcal{N}_{k-\nu_{\mathcal{G}}(z)}(g)$,
- $k_0(zg) = k_0(g) + \nu_{\mathcal{G}}(z)$,
- $k_1(zg) = k_1(g)$ car $\nu_{\mathcal{G}}(zg) = \nu_{\mathcal{G}}(g) + \nu_{\mathcal{G}}(z)$,
- $\bar{k}_1(zg) = \bar{k}_1(g)$,

- $A(zg) = A(g)$ car $\mathcal{N}_{k_0(zg)}(zg) = \mathcal{N}_{k_0(g)}(g)$ (même si $k_0(zg) \neq k_0(g)$),
- $\Lambda(zg) = \Lambda(g)$,
- $m'(zg; m) = m'(g; m)$,
- $m''(zg; m) = m''(g; m)$.

La fonction à support compact $\phi : Z_F = F^* \to \mathbb{C}$ définie par

$$\phi(z) = \omega(z)\Phi(f; zg)$$

est alors d'après le théorème 2.1.2a) invariante par le sous-groupe $(1+\pi^{m'(g;m)}\Lambda) \cap Z_F$ de Z_F. Soit L un corps $m''(g;m)$-proche de F, et soit g' un élément quelconque dans $\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(V(g;m))$. En appliquant le théorème 2.1.2b), on trouve que la fonction $\phi' : Z_L = L^* \to \mathbb{C}$ définie par

$$\phi'(z') = \bar{\zeta}_{FL}^{m''}(\omega)(z')\Phi(\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(f); z'g')$$

a la même intégrale sur Z_L que ϕ sur Z_F car les deux intégrales sont des sommes finies de termes égaux deux à deux. Comme

$$\int_{Z_L} \bar{\zeta}_{FL}^{m''}(\omega)(z')\Phi(\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(f); z'g')dz' = \Phi(I_{\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(\omega)}(\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(f)); g')$$

on trouve bien

$$\Phi(I_\omega(f); g) = \Phi(I_{\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(\omega)}(\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(f)); g').$$

2.2 Orthogonalité des caractères sur $GL_n(F)$ en toute caractéristique

Soit G un groupe réductif sur un corps local nonarchimédien F. On suppose que sur G on a fixé une mesure de Haar dg, que sur le centre Z de G on a fixé une mesure de Haar dz et que sur tout tore elliptique maximal T de G on a fixé la mesure de Haar dt telle que T/Z ait un volume égal à 1 pour la mesure quotient dt/dz. On a fixé des mesures quelconques sur les tores non elliptiques. Si le corps F est de caractéristique nulle, G a la propriété **(P)** suivante qui va main dans la main avec l'orthogonalité des caractères (voir sect.9 et 10, chap.1 pour les définitions et les notations, ainsi que l'annexe 2, th.2d)) :

(P) Pour toute représentation de carré intégrable π de G de caractère central (unitaire) ω, si on note f_π un pseudocoefficient de π dans $H(G;\omega)$ et χ_π le caractère de π défini sur les éléments semisimples réguliers de G, alors
- l'intégrale orbitale de f_π est nulle sur les éléments semisimples réguliers non elliptiques et
- l'intégrale orbitale de f_π est égale au conjugué complexe de χ_π sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de G (pour le choix de mesures plus haut).

C'est un fait connu ([DKV], A.3.h) que si F est un corps de caractéristique non nulle et G est un groupe réductif sur F qui a cette propriété ainsi que la propriété que les caractères de ses représentations soient localement intégrables alors par application de la formule d'intégration de Weyl on obtient l'orthogonalité des caractères sur G. Lemaire a montré que les caractères des représentations de $GL_n(F)$ étaient localement intégrables même si la caractéristique de F était non nulle. C'est la propriété **(P)** qu'on va démontrer ici pour $GL_n(F)$ où F est de caractéristique non nulle, à l'aide de la théorie des corps proches.

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique non nulle et n un entier strictement positif. Soit π une représentation de carré intégrable de $GL_n(F)$ de caractère central (unitaire) ω et χ_π le caractère de π. Soit f_π un pseudocoefficient à support compact modulo centre de π. On suppose que sur le centre Z de $GL_n(F)$, sur $GL_n(F)$ lui-même et sur ses tores elliptiques on a fixé des mesures de Haar comme dans la section précédente.

Théorème 2.2.1 . *L'intégrale orbitale de f_π vérifie:*
(i) $\Phi(f_\pi; g) = 0$ si g est semisimple régulier non elliptique,
(ii) $\Phi(f_\pi; g) = \overline{\chi_\pi(g)}$ si g est elliptique régulier.

Démonstration. (i) C'est le théorème 2c), annexe 2.

(ii) Soit $h \in H(GL_n(F))$ telle que $I_\omega(h) = f_\pi$ (h existe par la proposition 1.1.1b)). Supposons que $h \in H(GL_n(F); K_F^a)$. Montrons un lemme :

Lemme 2.2.2 . *a) Il existe un entier m' tel que, si L est un corps m'-proche de F, alors $\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(\pi)$ est une représentation de carré intégrable de $GL_n(L)$.*

b) Si on choisit un m' qui vérifie le point a) tel qu'en plus il soit strictement supérieur à a, $I_{\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(\omega)}(\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(h))$ est un pseudocoefficient à support compact modulo le centre de $\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(\pi)$.

Démonstration. a) Voir le théorème 3.2.14.b.

b) Montrons que $I_{\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(\omega)}(\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(h))$ vérifie la définition d'un pseudocoefficient de $\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(\pi)$: d'une part

$$tr\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(\pi)(I_{\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(\omega)}(\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(h))) = tr\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(\pi)(\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(h)) = tr\pi(h) = tr\pi(f_\pi) = 1\ ;$$

d'autre part, si σ' est une représentation générique irréductible de $GL_n(L)$ de caractère central $\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(\omega)$ mais non équivalente à $\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(\pi)$, alors ou bien σ' est de niveau supérieur strictement à a alors que $\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(h)$ est invariante par K_L^a et on a de ce fait

$$tr\sigma'(\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(h)) = 0,$$

ou bien le niveau de σ' est inférieur ou égal à a et alors σ' est image par $\bar{\zeta}_{FL}^{m'}$ d'une représentation générique irréductible (prop. 2.1.1, car $m' \geq a+1$) σ de $GL_n(F)$, de caractère central ω mais différente de π, et on a

$$tr\sigma'(\bar{\zeta}_{FL}^{m'}(h)) = tr\sigma(h) = tr\sigma(f_\pi) = 0.$$

Démontrons maintenant le point (ii) du théorème. Soit g un élément elliptique régulier. Soit W un voisinage de g sur lequel χ_π est constant et soit m un entier suffisamment grand pour qu'on ait $V(g;m) \subset W$ et que le lemme précédent soit vérifié ($\bar{\zeta}_{FL}^{m}(\pi)$ est une représentation de carré intégrable de $GL_n(L)$ et $I_{\bar{\zeta}_{FL}^{m}(\omega)}(\bar{\zeta}_{FL}^{m}(h))$ est un pseudocoefficient de $\bar{\zeta}_{FL}^{m}(\pi)$). Soit L un corps de caractéristique nulle, $m''(g;m)$-proche de F. On a dans cette situation :

1) χ_π est constant sur $V(g;m)$ égal à $\chi_\pi(g)$, car $V(g;m) \subset W$,

2) $\Phi(I_\omega(h);\cdot)$ est constante sur $V(g;m)$ égale à $\Phi(I_\omega(h);g)$ (th.2.1.3a)) et

3) $\Phi(I_{\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(\omega)}(\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(h));\cdot)$ est constante sur $\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(V(g;m))$ égale à $\Phi(I_\omega(h);g)$ (th.2.1.3) .

Or, $I_\omega(h) = f_\pi$. Le corps L étant de caractéristique nulle, $GL_n(L)$ a la propriété **(P)**. Du lemme 2.2.2b) on en déduit alors que : $\chi_{\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(\pi)}$ est constant sur $\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(V(g;m))$ égal à $\overline{\Phi(f_\pi;g)}$. Finalement, en appliquant le point 3 ci-dessus, on trouve

4) $\chi_{\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(\pi)}$ est constant sur $\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(V(g;m))$ égal à $\overline{\Phi(f_\pi;g)}$.

En notant I la fonction caractéristique de $V(g;m)$, de 1) on a

$$tr\pi(I) = vol(V(g;m))\chi_\pi(g).$$

D'autre part $\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(I)$ est bien définie et est la fonction caractéristique de $\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(V(g;m))$ (par définition même de cette dernière) et alors de 4) on en déduit que

$$tr(\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(\pi))(\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(I)) = vol(\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(V(g;m)))\overline{\Phi(f_\pi;g)}.$$

Comme on a

$$vol(\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(V(g;m))) = vol(V(g;m))$$

et qu'on sait que

$$tr(\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(\pi))(\bar{\zeta}_{FL}^{m''}(I)) = tr\pi(I),$$

on trouve bien

$$\chi_\pi(g) = \overline{\Phi(f_\pi;g)}.$$

Rappelons comment le théorème 2.2.1, ajouté à l'intégrabilité locale des caractères, implique l'orthogonalité des caractères. On adopte les notations du chap.1, sect.3 et 10.

Théorème 2.2.3 . (Orthogonalité des caractères pour GL_n) *L'ensemble des fonctions caractères associées aux classes d'équivalence des représentations de carré intégrable de $GL_n(F)$ de caractère central ω fixé forme un système orthonormal pour l'espace de Hilbert $L^2(GL_n(F)_e;\omega;\ <\ ;\ >_e)$.*

Démonstration On suit [DKV], partie A.3.h. Soient π et π' deux représentations de carré intégrable de $GL_n(F)$ de caractère central ω. Soit f_π un pseudocoefficient de π. On a alors:

$$tr\pi'(f_\pi) = \int_G \chi_{\pi'}(g)f_\pi(g)dg$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) \int_{G/T} \chi_{\pi'}(x^{-1}tx)f(x^{-1}tx)d\bar{x}dt$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t)\chi_{\pi'}(t) \int_{G/T} f(x^{-1}tx)d\bar{x}dt$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_e} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) \chi_{\pi'}(t) \int_{G/T} f(x^{-1}tx) d\bar{x} dt$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_e} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) \chi_{\pi'}(t) \overline{\chi_\pi(t)} dt = < \chi_{\pi'}; \chi_\pi > .$$

On a utilisé l'intégrabilité locale des caractères sur $GL_n(F)$ ([Le2])pour la première égalité, la formule de Weyl pour la deuxième, le points (i) et (ii) du théorème 2.2.1 plus haut pour la quatrième et la cinquième ainsi que la stabilité par conjugaison des fonctions caractères. Finalement on a trouvé que $< \chi_{\pi'}; \chi_\pi >_e$ vaut 1 si π et π' sont équivalentes et 0 sinon.

2.3 Correspondance $GL_n(F) \leftrightarrow D^*$ et transfert en toute caractéristique

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique quelconque et D une algèbre à division centrale de dimension finie sur F. Soit D^* le groupe des éléments inversibles de D. La dimension de D en tant qu'espace vectoriel sur F est un carré n^2. On pose $G = GL_n(F)$. On fixe des mesures de Haar sur G et D^*. Si g est un élément de G et g' est un élément de D^* on écrit $g \leftrightarrow g'$ si g et g' sont réguliers et ont le même polynôme caractéristique. On dit alors que g et g' se correspondent. Ça revient à dire que g est elliptique régulier et a le même polynôme caractéristique que g'. Il existe des isomorphismes canoniques $Z_G \simeq F^*$ et $Z_{D^*} \simeq F^*$ et donc un isomorphisme canonique $Z_G \simeq Z_{D^*}$. On note ces deux groupes indistinctement Z. On fixe une mesure de Haar dz sur Z. Sur tout tore maximal elliptique T de G ou de D^* on considère la mesure de Haar dt telle que T/Z ait volume 1 pour la mesure quotient dt/dz. Sur les tores non elliptiques de G on fixe des mesures de Haar quelconques. (Voir aussi sect.10, chap.1.)

Si $f \in H(G)$ et $f' \in H(D^*)$ on dit que f et f' *se correspondent* si leurs intégrales orbitales ont la même valeur sur des éléments de G et de D^* qui se correspondent et que les intégrales orbitales de f sont nulles sur les éléments semisimples réguliers non elliptiques de G. On écrit $f \leftrightarrow f'$. On dit aussi que f *se transfère* ou que f' *se transfère.* Si ω est un caractère de Z la définition plus haut vaut aussi pour $f \in H(G;\omega)$ et $f' \in H(D^*;\omega)$. Nous donnons plus bas un résultat partiel de transfert qui est suffisant pour la démonstration du résultat principal (th.2.3.2). De ce résultat principal on pourra déduire que toutes les fonctions de $H(D^*)$ se transfèrent.

Transfert faible

Théorème 2.3.1 . (a) *Pour tout $f \in H(G)$ à support dans l'ensemble des éléments elliptiques réguliers il existe une fonction $f' \in H(D^*)$ à support dans l'ensemble des éléments elliptiques réguliers telle que $f \leftrightarrow f'$.*

(b) *Pour tout $f' \in H(D^*)$ à support dans l'ensemble des éléments réguliers il existe une fonction $f \in H(G)$ telle que $f \leftrightarrow f'$.*

Démonstration. C'est une application connue du principe de submersion de Harish-Chandra ([Fla2]).

On note $E^2(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations essentiellement de carré intégrable de $GL_n(F)$ et $E(D^*)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de D^* (qui sont toutes essentiellement de carré intégrable et même cuspidales, puisque D^* est compact modulo le centre).

Théorème 2.3.2 . *Il existe une unique bijection :*

$$\mathbf{C} : E^2(G) \to E(D^*)$$

telle que pour tout $\pi \in E^2(G)$ on ait

$$\chi_\pi(g) = (-1)^{n-1}\chi_{\mathbf{C}(\pi)}(g') \qquad \forall g \leftrightarrow g'.$$

Les représentations π et $\mathbf{C}(\pi)$ ont le même caractère central.
L'application $\mathbf{C}$ commute à la tensorisation avec les caractères.
On a aussi $tr\pi(f) = (-1)^{n-1}tr\mathbf{C}(\pi)(f')$ pour tout $f \leftrightarrow f'$.

Démonstration. Ce théorème a été démontré par Rogawski [Ro] pour le cas où la caractéristique de F est nulle. On donne plus bas cette démonstration simplifiée par les résultats généraux sur les groupes réductifs démontrés depuis, et qui est indépendante de la caractéristique une fois l'orthogonalité des caractéres sur GL_n prouvée. Voir aussi [DKV] et [Fl2].

Tout d'abord l'orthogonalité des caractères sur G (et sur D^*) garantit que la restriction du caractère d'une représentation essentiellement de carré intégrable de G (ou de D^*) aux éléments elliptiques réguliers détermine sa classe d'équivalence. Donc, si une application $\mathbf{C}$ comme plus haut existe, son unicité est évidente.

Considérons un corps global $\mathbb{F}$ et une algèbre à division $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{F}$ tels que :
- il existe une place v_0 de $\mathbb{F}$ telle que $\mathbb{F}_{v_0} \simeq F$ et $\mathbb{D}_{v_0} \simeq D$
- aux places infinies $\mathbb{D}$ est scindée
- à toute place v où $\mathbb{D}$ est ramifiée $\mathbb{D}_v$ est isomorphe à une algèbre à division sur $\mathbb{F}_v$.

Soient $v_0, v_1 ... v_m$ les places où $\mathbb{D}$ est ramifiée. On fixe une fois pour toutes un isomorphisme $\mathbb{D}_{v_0} \simeq D$ identifiant $\mathbb{F}_{v_0}$ à F et des isomorphismes $\mathbb{D}_v \simeq M_n(\mathbb{F}_v)$ pour toutes les places v où $\mathbb{D}$ est scindée. Pour toute place v on note G_v le groupe $GL_n(\mathbb{F}_v)$.

On note indistinctement $Z_v = Z_{GL_n(\mathbb{F}_v)} \simeq Z_{\mathbb{D}_v^*}$. Les adèles des groupes GL_n et $\mathbb{D}^*$ sur $\mathbb{F}$ seront notées $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ et $\mathbb{D}^*(\mathbb{A}_\mathbb{F})$.

a. Définition de l'application C

L'application $\psi \mapsto \psi \circ det$ est une bijection entre l'ensemble des caractères de F^* et l'ensemble des caractères de GL_n. De même, l'application $\psi \mapsto \psi \circ N$ où N est la norme réduite sur D est une bijection entre l'ensemble des caractères de F^* et l'ensemble des caractères de D^*. Il existe donc une bijection canonique de l'ensemble des caractères de GL_n sur l'ensemble des caractères de D^*. Si l'image de ψ par cette bijection est ψ', alors on a évidement $\psi(g) = \psi'(g')$ pour tout $g \leftrightarrow g'$. C'est à travers cette bijection canonique qu'on voudrait que $\mathbf{C}$ commute à la tensorisation avec les caractères, c. à. d. que pour toute représentation essentiellement de carré intégrable de G et pour tout caractère ψ de Z on ait:

$$\mathbf{C}(\pi \otimes (\psi \circ det)) = \mathbf{C}(\pi) \otimes (\psi \circ N).$$

Du fait que toute représentation essentiellement de carré intégrable s'écrit comme produit d'un caractère et d'une représentation de carré intégrable, il suffit de définir $\mathbf{C}(\pi)$ pour chaque représentation de carré intégrable π de G et de la prolonger via cette propriété de commutativité. Il est évident qu'il n'y a pas de problème de compatibilité, puisque deux représentations de D^* dont les caractères coïncident sur les éléments réguliers sont nécessairement équivalentes.

Soit π_0 une représentation de carré intégrable de G de caractère central (unitaire) ω. Soit v_{m+1} une place finie de $\mathbb{F}$ où $\mathbb{D}$ n'est pas ramifiée. On pose $S = \{v_0 ... v_{m+1}\}$. On sait qu'en se donnant pour tout $i \in \{0, 1, 2 ... m+1\}$ un caractère unitaire ω_{v_i} de Z_{v_i} et une représentation $\pi_{v_i} \in E^2(GL_n(\mathbb{F}_{v_i}); \omega_{v_i})$ tel qu'au moins une de ces représentations soit cuspidale, il existe une représentation globale automorphe cuspidale $\tilde{\pi}$ de $GL_n(\mathbb{F})$ telle que $\tilde{\pi}_{v_i}$ soit équivalente à π_{v_i} pour toute place $v_i \in S$ (voir th.1.11.8). Posons:

- $\omega_{v_0} = \omega$, $\pi_{v_0} = \pi_0$
- ω_{v_i} trivial pour tout $i \in \{1, 2 ... m+1\}$
- $\pi_{v_i} \in E^2(GL_n(\mathbb{F}_{v_i}); 1_{Z_{v_i}})$ la représentation de Steinberg de $GL_n(\mathbb{F}_{v_i})$ pour tout $i \in \{1, 2 ... m\}$
- π_{m+1} une représentation supercuspidale de caractère central trivial de $GL_n(\mathbb{F}_{v_i})$.

Notons $\tilde{\pi}$ une représentation globale automorphe cuspidale qui vérifie les conditions plus haut et $\tilde{\omega}$ son caractère central.

Avec les notations de la section 11, chapitre 1, si $\tilde{f} \in H(GL_n(\mathbb{F}); \tilde{\omega}))$ et $\tilde{f}' \in H(\mathbb{D}^*; \tilde{\omega})$ on dit que $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ se *correspondent* et on écrit $\tilde{f} \leftrightarrow \tilde{f}'$ si

- pour tout $i \in \{1, 2 ... m\}$ $\tilde{f}_{v_i}$ et $\tilde{f}'_{v_i}$ sont à support dans l'ensemble des éléments elliptiques réguliers,
- pour tout $i \in \{0, 1, 2 ... m\}$ on a $\tilde{f}_{v_i} \leftrightarrow \tilde{f}'_{v_i}$ et
- pour toute place v où $\mathbb{D}$ est scindée on a $\tilde{f}_v = \tilde{f}'_v$ (via les isomorphismes à ces places fixés au début).

Proposition 2.3.3 . *Si* $\tilde{f} \in H(GL_n(\mathbb{F});\tilde{\omega})$ *et* $\tilde{f}' \in H(\mathbb{D}^*;\tilde{\omega})$ *sont telles que* $\tilde{f} \leftrightarrow \tilde{f}'$ *et si* $\tilde{f}_{v_{m+1}}$ *est un coefficient d'une représentation cuspidale de* $G_{v_{m+1}}$, *alors on a, avec les notatations de 1.11 :*

$$tr\rho_0(\tilde{f}) = tr\rho'_0(\tilde{f}')$$

Proposition 2.3.4 . *On pose*

$$V = \{v_0, v_1 ... v_m\}.$$

Posons $G_V = \Pi_{v\in V} G_v$, $\mathbb{D}^*_V = \Pi_{v\in V}\mathbb{D}^*_v$ *et* $\omega_V = \Pi_{v\in V}\tilde{\omega}_v$. *Notons* $\tilde{\pi}_V$ *la représentation de* G_V *induite par* $\tilde{\pi}$. *Si* $f_V \in \prod_{i=0}^m H(G_{v_i};\omega_{v_i})$ *et* $f'_V \in \prod_{i=0}^m H(G'_{v_i};\omega_{v_i})$, *on écrit* $f_V \leftrightarrow f'_V$ *si pour tout* $i \in \{1,2...m\}$ f_{v_i} *et* f'_{v_i} *sont à support dans les éléments elliptiques réguliers et pour tout* $i \in \{0,1,2...m\}$ *on a* $f_{v_i} \leftrightarrow f'_{v_i}$. *On a alors :*

$$tr\tilde{\pi}_V(\tilde{f}_V) = \sum_{\tilde{\pi}'\in U'} m(\tilde{\pi}')tr\tilde{\pi}'_V(\tilde{f}'_V)$$

où U' *est l'ensemble des représentations automorphes cuspidales* $\tilde{\pi}'$ *de* $\mathbb{D}^*$ *telles que pour toute place* $v \notin V$, $\tilde{\pi}'_v = \tilde{\pi}_v$, $m(\tilde{\pi}')$ *est la multiplicité de* $\tilde{\pi}'$ *dans* ρ'_0 *et l'indice* V *veut dire "restriction aux places dans* V*".*

Proposition 2.3.5 . *L'ensemble* U' *est fini.*

Proposition 2.3.6 . *Il existe un entier strictement positif* k, *des entiers strictement positifs* a_j, $1 \leq j \leq k$ *et des représentations* π'_{Vj} *de* $\mathbb{D}^*_V$ *tel que pour tout* $f_V \in \prod_{i=0}^m H(G_{v_i};\omega_{v_i})$ *et* $f'_V \in \prod_{i=0}^m H(G'_{v_i};\omega_{v_i})$ *tels que* $f'_V \leftrightarrow f_V$ *on ait :*

$$tr\tilde{\pi}_V(f_V) = \sum_{j=1}^{k} a_j tr\pi'_{Vj}(f'_V)$$

La démonstration de cette suite de propositions est classique. Elle consiste à appliquer la formule des traces simple (on s'est assuré d'avoir une fonction supercuspidale à la place v_{m+1} et des fonctions à support dans l'ensemble des éléments elliptiques réguliers aux places $v_1, v_2 ... v_m$) et à simplifier la relation obtenue. On en trouve des détails dans [Fla2] et [Ro2]. On trouve dans [Ro2] également la preuve de la proposition 2.3.5 (Rogawski montre en fait un théorème de multiplicité finie pour les représentations automorphes cuspidales fixées à presque toutes les places des adèles du groupe des éléments inversibles d'une algèbre à division globale et qui à toute place est ou scindée ou une algèbre à division ; ce résultat pose un problème dans le cas plus général de la correspondance avec le groupe des éléments inversibles d'une algèbre centrale simple quelconque, essentiellement parce que la liaison entre le conducteur et le niveau d'une représentation d'un tel groupe est moins évidente). Pour la proposition 2.3.4 on a utilisé le fait qu'un pseudocoefficient d'une représentation cuspidale annule les traces de toutes les autres représentations irréductibles.

Proposition 2.3.7 . *Il existe une représentation π' irréductible de D^* telle que*

$$\chi_{\pi_0}(g) = (-1)^{n-1}\chi_{\pi'}(g')$$

pour tout $g \leftrightarrow g'$.

Démonstration. Par le passage de $H(G)$ à $H(G;\omega)$ (prop.1.1.1), l'égalité de la proposition 2.3.6 est vraie aussi si l'on choisit f_V et $f_{V'}$ à support compact telles que $f_V \leftrightarrow f'_V$. Mais on sait que toutes les fonctions à support compact inclus dans l'ensemble des éléments elliptiques réguliers se transfèrent (th.2.3.1, ci-dessus). En considérant alors des fonctions caractéristiques de petits ouverts sur lesquels toutes les fonctions caractères qui apparaissent sont constantes on obtient l'égalité ponctuelle :

$$\chi_{\pi_V}(g) = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{\pi'_{Vj}}(g') \quad \forall g \leftrightarrow g'$$

Avec les notations de 1.9, cela s'écrit $i(\chi_{\pi_V}) = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{\pi'_{Vj}}$. L'isomorphisme i préservant la norme, le carré de la norme de χ_{π_V} dans l'espace $L^2(GL_n(F)_{Ve};\omega)$ est égal au carré de la norme de $\sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{\pi'_{Vj}}$ dans l'espace $L^2(D^*_{Ve};\omega)$. Par l'orthonormalité des caractères on trouve $1 = \sum_1^k a_j^2$. On en déduit qu'il y avait un seul a_j à droite et qu'il était égal à 1. Il s'ensuit l'existence de constantes complexes $b_0, b_1 ... b_m$ telles que pour tout $i \in \{0, 1...m\}$ on ait $\chi_{\tilde{\pi}_{v_i}}(g) = b_i \chi_{\tilde{\pi}'_{v_i}}(g')$ si $g \leftrightarrow g'$. Mais, pour toutes les places $v_1, v_2 ... v_m$, $\tilde{\pi}_{v_i}$ est la représentation de Steinberg dont on connaît le caractère sur les éléments elliptiques réguliers et on sait qu'il est égal à $(-1)^{n-1}$. Par indépendance linéaire des caractères sur $\mathbb{D}^*_{v_i}$ on en déduit que pour tout $i \in \{1, 2...m\}$ $\tilde{\pi}'_{v_i}$ est la représentation triviale ; on a donc pour tout $i \in \{1, 2...m\}$ $b_i = (-1)^{n-1}$ et par conséquent $b_0 = (-1)^{n-1}$ car si n est pair, $\mathbb{D}$ est ramifiée en un nombre pair de places. D'où le résultat cherché.

$\mathbf{C}(\pi_0)$ est définie. Par les considérations faites au début de la démonstration, on peut étendre $\mathbf{C}$ à toutes les représentations essentiellement de carré intégrable. On a construit ainsi $\mathbf{C}$.

b. Injectivité de l'application C

Elle découle aussitôt de l'orthogonalité des caractères sur $GL_n(F)$.

c. Surjectivité de l'application C

Soit π_0' une représentation de carré intégrable de D^*. Plaçons-nous à nouveau dans la "situation globale" qu'on a définie avant de commencer la démonstration de l'existence de C. On utilise le théorème 1.11.3 sur $\mathbb{D}^*(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ cette fois en prenant π_0' à la place v_0, la représentation triviale à toutes les autres places où $\mathbb{D}^*$ est ramifiée et une représentation cuspidale à une place v_{m+1} où $\mathbb{D}^*$ est scindée. On note $\tilde{\pi}'$ la représentation globale correspondante. On applique la formule des traces et on arrive aussitôt à un résultat semblable à celui de la proposition 2.3.6 à la seule différence que dans le membre de gauche ou bien on a un "morceau" d'une représentation cuspidale de $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ (il ne peut pas y en avoir plus par le théorème de multiplicité un forte (1.11.6)) ou bien on n'a rien. On sait que U' n'est pas vide car $\tilde{\pi}'$ s'y trouve. On passe aux caractères comme dans la démonstration de la proposition 2.3.7. Par indépendance linéaire des caractères sur $\mathbb{D}^*_V$ on montre qu'on ne peut pas ne rien avoir à gauche de l'égalité, donc on a bien une représentation π_V de G_V. Sa multiplicité est un par le théorème de multiplicité un (1.11.4). Les composantes locales de π_V sont de carré intégrable car génériques irréductibles (théorème 1.11.5) et elliptiques (voir la classification des représentations génériques, théorème 9.7 dans [Z]) et de caractère central unitaire. On applique l'orthogonalité des caractères maintenant des deux côtés comme on l'a fait dans la démonstration de la proposition 2.3.7 et on montre ainsi que dans le membre de droite il n'y avait en fait qu'une seule représentation et que son coefficient est 1. C'était donc π_V'. On trouve comme dans la proposition 2.3.7 que la composante locale de π_V à la place v_0 a un caractère qui correspond à celui de π_0'. La démonstration est terminée.

On donne trois applications de cette correspondance: un corollaire qui est très utile pour démontrer la correspondance de G avec les groupes des éléments inversibles des autres algèbres centrales simples sur F, un corollaire qui permet de montrer facilement la surjectivité de cette correspondance en caractéristique nulle et un théorème de transfert de fonctions entre G et D^* qui est un résultat intéressant en soi.

Corollaire 2.3.8 . *Soit π une représentation essentiellement de carré intégrable de $GL_n(F)$. Il existe alors un voisinage V de l'unité dans $GL_n(F)$ tel que le caractère de π soit constant sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de V. Cette constante est réelle non nulle de signe $(-1)^{n-1}$.*

Démonstration. Si π' est une représentation irréductible d'un algèbre à division sur F, alors son caractère est constant réel positif sur l'ensemble des éléments réguliers situés dans un voisinage de l'unité. Le corollaire en résulte par la correspondance.

Corollaire 2.3.9 . *Soit ω un caractère unitaire de Z. L'ensemble des restrictions à G_e des caractères de toutes les représentations de carré intégrable de G de caractère central ω est un système orthonormal complet de l'espace $L^2(G_e;\omega)$.*

Démonstration. C'est vrai pour D^* et $L^2(D^*;\omega)$ parce que D^* est compact modulo Z. Par la correspondance et via l'isomorphisme i défini à la section 10, chapitre 1, ce résultat est vrai aussi pour G.

Transfert fort

Théorème 2.3.10 . *Soit ω un caractère de Z.*

(a) Pour tout $f \in H(G)$ dont l'intégrale orbitale est à support dans les éléments elliptiques il existe une fonction $f' \in H(D^*)$ telle que $f \leftrightarrow f'$, et pour tout $f \in H(G;\omega)$ dont l'intégrale orbitale est à support dans les éléments elliptiques il existe un $f' \in H(D^*;\omega)$ tel que $f \leftrightarrow f'$.

(b) Pour tout $f \in H(D^*)$ il existe un $f' \in H(G)$ tel que $f \leftrightarrow f'$ et pour tout $f' \in H(D^*;\omega)$ il existe un $f \in H(G;\omega)$ tel que $f \leftrightarrow f'$.

Démonstration. Dans la section 2.3 on a montré que G avait la propriété **P** (définie au début de la section 2.2). Le groupe D^* a aussi la propriété **P** parce qu'il est compact modulo le centre. Le théorème de correspondance plus haut implique alors qu'un pseudocoefficient d'une représentation π essentiellement de carré intégrable de G correspond à un (pseudo)coefficient de $\mathbf{C}(\pi)$ multiplié par $(-1)^{n-1}$. Donc les pseudocoefficients se transfèrent.

Soient ω un caractère de Z et f une fonction dans $H(D^*;\omega)$. Si on pose

$$h = f - \sum_{\pi} tr\pi(f) f_\pi,$$

où la somme porte sur le nombre fini de représentations π de D^* de caractère central ω dont la trace ne s'annule pas sur f et, pour chaque tel π, f_π désigne un pseudocoefficient, on trouve que pour toute représentation π de D^* de caractère central ω, $tr\pi(h) = 0$; ce qui implique que l'intégrale orbitale de h s'annule sur les éléments réguliers de D^* (prop.1, annexe 2). On en déduit que la famille des intégrales orbitales des pseudocoefficients des représentations de D^* de caractère central ω est une base (algébrique) pour le sous-espace de $L^0(D^*;\omega)$ formé par les intégrales orbitales des fonctions de $H(D^*;\omega)$.

Prenons cette fois une fonction $f \in H(G;\omega)$ dont l'intégrale orbitale s'annule sur les éléments semisimples réguliers non elliptiques et considérons la fonction

$$h = f - \sum_{\pi} tr\pi(f) f_\pi,$$

où la somme porte sur le nombre fini de représentations essentiellement de carré intégrable de G de caractère central ω dont la trace ne s'annule pas sur f. D'après la classification de Zelevinski, les classes d'équivalence des représentations qui sont des induites (strictes ou non) de représentations essentiellement de carré intégrable forment une base de $Grot(GL_n(F))$. Décomposons une représentation π de $GL_n(F)$ sur cette base. Si le caractère central de π est ω, le caractère central de ces représentations essentiellement de carré intégrable ou induites de représentations essentiellement de carré intégrable est aussi ω par indépendance linéaire des caractères sur $Z = F^*$. Mais les traces des représentations essentiellement de carré intégrable s'annulent sur h (par simple calcul) et les intégrales orbitales des représentations strictement induites de caractère central ω s'annulent sur h parce que les intégrales orbitales de h sont nulles sur les éléments semisimples réguliers non elliptiques et parce que les caractères sont localement intégrables. On en déduit que la trace de toute représentation de $GL_n(F)$ de caractère central ω est nulle sur h. Donc l'intégrale orbitale de h est nulle sur tout élément semisimple régulier (proposition 1, annexe 2). On obtient (cette fois sur G): les intégrales orbitales des pseudocoefficients des représentations essentiellement de carré intégrable de caractère central ω forment une base du sous-espace de $L^0(G;\omega)$ formé par les intégrales orbitales des fonctions de $H(G;\omega)$ dont les intégrales orbitales s'annulent sur les éléments semisimples réguliers non elliptiques.

D'après ce qu'on vient de voir et le fait que les pseudocoefficients des représentations essentiellement de carré intégrable se transfèrent dans les deux sens on obtient les moitiés des points a) et b) qui concernent les fonctions dans $H(G;\omega)$ et dans $H(D^*;\omega)$.

Pour obtenir la variante du transfert fort pour les fonctions à support compact on utilise le théorème de Paley-Wiener: soit f' une fonction dans $H(D^*)$. Il existe alors une fonction f dans $H(G)$ telle que pour toute représentation π essentiellement de carré intégrable de G on ait

1) $tr\pi(f) = tr[\mathbf{C}(\pi)](f')$ et

2) $tr\pi(f) = 0$ pour toute représentation induite sur G (les conditions de Paley-Wiener sont très facile à vérifier sur GL_n).

La condition 2) implique que l'intégrale orbitale de f est nulle sur les éléments semisimples réguliers non elliptiques de G (voir Annexe 2).

La condition 1) implique que pour tout caractère ω de Z et toute représentation essentiellement de carré intégrable π de G de caractère central ω on a $tr\pi(I_\omega(f)) = tr\mathbf{C}(\pi)(I_\omega(f'))$ (voir sect.1, chap.1 pour les notations). La démonstration plus haut implique alors que les intégrales orbitales de $I_\omega(f)$ et de $I_\omega(f')$ sont égales sur les éléments elliptiques réguliers qui se correspondent. En se rappelant le lien entre l'intégrale orbitale de f et celle de $I_\omega(f)$ on trouve que les intégrales orbitales $\Phi(f;\ )$ et $\Phi(f';\ )$ de f et f' respectivement ont la propriété suivante : pour tout élément elliptique régulier g de G, pour tout caractère ω de Z,

$$\int_Z (\Phi(f; zg) - \Phi(f'; zg'))\omega(z)dz = 0.$$

On en déduit comme dans l'annexe 2 (preuve de la prop.2) que $\Phi(f; g) = \Phi(f; g')$ pour tout $g \leftrightarrow g'$ et donc f' se transfère. Le transfert dans l'autre sens se fait de la même façon.

Remarque. Pour la partie concernant les fonctions à support compact modulo Z de ce théorème on a une construction "à la main" du transfert par Rogawski [Ro2] en caractéristique nulle qui ne marche pas en toute caractéristique parce qu'elle utilise de façon essentielle la finitude du nombre de classes de conjugaison des tores elliptiques. Pour les fonctions à support compact, toujours en caractéristique nulle, on peut donner une démonstration en deux lignes en utilisant la caractérisation des intégrales orbitales de Vignéras [Vi], le calcul des germes elliptiques au voisinage de 1 sur G et D^* de Rogawski ([Ro1]) et le procédé de descente au voisinage des autres éléments elliptiques. En caractéristique non nulle cette démonstration ne fonctionne pas (pour l'instant) : on dispose d'une caractérisation des intégrales orbitales (par Lemaire [Le1]) et du calcul des germes elliptiques au voisinage de 1 par Henniart ([He], Appendice 3) mais pas du procédé de descente (du moins au voisinage des éléments non séparables). La démonstration de [Fl2] du transfert ne marche pas en toute caractéristique parce qu'on ne peut pas être sûrs qu'une intégrale orbitale de $GL_n(F)$ nulle sur les éléments semisimples réguliers non elliptiques et de caractère central ω se trouve forcément dans l'espace $L^2(GL_n(F)_e; \omega)$.

Chapitre 3

CORRESPONDANCE AVEC UNE ALGÈBRE CENTRALE SIMPLE

Introduction

Tout ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème de correspondance en caractéristique non nulle. Le lecteur qui n'est pas intéressé par les preuves devrait lire directement le théorème 3.3.19 et le corollaire 3.3.18, seuls résultats qui ont un intérêt en soi. Dans la première section nous rappelons la preuve de la correspondance en caractéristique nulle ([DKV]) pour des raisons qui y sont exposées. Dans la deuxième section on étudie les groupes $GL_r(D)$ définis sur des corps proches, en suivant les indications de Kazhdan ([Ka1]). Dans la troisième section on prouve quelques résultats concernant l'analyse harmonique de deux groupes du type $GL_r(D)$ définis sur des corps proches et on en déduit finalement la correspondance en caractéristique non nulle. On obtient comme corollaire l'orthogonalité des caractères sur les groupes $GL_r(D)$ en caractéristique non nulle.

3.1 Correspondance $GL_n(F) \leftrightarrow GL_r(D)$ en caractéristique nulle

Soit F un corps local non archimédien *de caractéristique nulle* et A une algèbre centrale simple sur F. Soit A^* le groupe des éléments inversibles de A. On sait que A^* est isomorphe à $GL_r(D)$ où D est une algèbre à division sur F et on l'identifiera avec ce groupe. La dimension de D en tant qu'espace vectoriel sur F est un carré d^2. On pose $n = rd$, $G = GL_n(F)$ et $G' = GL_r(D)$. On fixe des mesures de Haar sur G et G'. Si g est un élément de G et g' est un élément de G' on écrit $g \leftrightarrow g'$ si g et g' sont semisimples réguliers et ont le même polynôme caractéristique. On dit alors que g et g' *se correspondent.* Il existe des isomorphismes canoniques $Z_G \simeq F^*$ et $Z_{G'} \simeq F^*$ et donc un isomorphisme canonique $Z_G \simeq Z_{G'}$. On note ces deux groupes indistinctement Z. On fixe une mesure de Haar dz sur Z. Sur tout tore maximal elliptique T de G ou de G' on considère la mesure de Haar dt telle que T/Z ait volume 1 pour la mesure quotient dt/dz. Sur les tores maximaux non elliptiques de G on fixe des mesures de Haar quelconques avec la seule condition que si deux tels tores sont conjugués dans G les mesures se correspondent via l'isomorphisme induit par la conjugaison (ça ne dépend pas du choix). Sur les tores maximaux de G' on considère des mesures correspondant à celles fixées sur les tores maximaux de G comme on l'a expliqué dans la section 1.10 : si T' est un tore maximal de G' alors il existe un élément (semisimple forcément) régulier g' de G' tel que T' soit le commutant de g' dans G'. On choisit $g \in G$ tel que $g \leftrightarrow g'$ et le commutant de g dans G est alors un tore maximal T de G isomorphe à T'. La mesure sur T' sera l'image de la mesure déjà fixée sur T par cet isomorphisme (voir section 1.9). Ça ne dépend pas des choix faits et si deux tores maximaux de G' sont conjugués dans G', leurs mesures se correspondent via cette conjugaison.

On note $G_{G'}$ l'ensemble des éléments g de G pour lesquels il existe un élément de G' qui correspond à g.

Si $f \in H(G)$ et $f' \in H(G')$ on dit que f et f' *se correspondent* si leurs intégrales orbitales ont la même valeur sur les éléments de G et de G' qui se correspondent et les intégrales orbitales de f sont nulles sur les éléments semisimples réguliers de $G \backslash G_{G'}$. On dit dans ce cas que f *se transfère* ou que f' *se transfère.* On écrit $f \leftrightarrow f'$. Si ω est un caractère de Z la définition plus haut vaut aussi pour $f \in H(G;\omega)$ et $f' \in H(G';\omega)$.

Transfert faible

Théorème 3.1.1 . (a) *Pour tout $f \in H(G)$ à support dans $G_{G'}$ il existe une fonction $f' \in H(G')$ à support dans les éléments semisimples réguliers telle que*

$f \leftrightarrow f'$.

(b) *Pour tout* $f' \in H(G')$ *à support dans les éléments semisimples réguliers il existe une fonction* $f \in H(G)$ *à support dans* $G_{G'}$ *telle que* $f \leftrightarrow f'$.

Démonstration. C'est une application connue du principe de submersion de Harish-Chandra.

Correspondance

On note $E^2(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations essentiellement de carré intégrable de $GL_n(F)$ et $E^2(G')$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations essentiellement de carré intégrable de G'.

Théorème 3.1.2 . *Il existe une unique bijection:*

$$\mathbf{C} : E^2(G) \to E^2(G')$$

telle que pour tout $\pi \in E^2(G)$ *on ait*

$$\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\mathbf{C}(\pi)}(g') \qquad \forall g \leftrightarrow g'.$$

Les représentations π *et* $\mathbf{C}(\pi)$ *ont le même caractère central.*
L'application $\mathbf{C}$ *commute à la tensorisation avec les caractères.*

Démonstration.
Commentaire. Ce théorème a été démontré par P.Deligne, D.Kazhdan et M.-F.Vignéras dans [DKV], démonstration reprise par Y.Flicker dans [Fl1]. Je suis obligé de reprendre ici cette même démonstration pour la raison suivante : la partie qui est traitée plus bas sous le titre "intermezzo" est esquisée très rapidement dans [DKV], B.2.e, où a priori on part avec une somme infinie de représentations dans la formule ($\mathbf{E_0}$) (voir plus bas). Or, en écrivant soigneusement la démonstration j'ai eu l'impression que cela ne marche que dans le cas où on a un nombre fini de représentations qui apparaissent dans la dite somme. Les auteurs de [DKV] s'y réduisent à une somme finie à condition de prendre les traces des représentations sur l'espace des fonctions bi-invariantes par un certain ouvert compact ; mais rien ne garantit l'indépendance linéaire des distributions caractères sur cet espace de fonctions ; si on veut "diminuer" le compact, il faut augmenter le nombre de représentations qui apparaissent dans la somme. Il m'a parut que la démonstration de [Fl] (§4, chap.II) ne surmontait pas ce problème non plus. Il fallait donc montrer un résultat de finitude comme J.Rogawski l'avait fait ([Ro2]) pour la

correspondance avec une algèbre à division. G.Henniart m'a signalé qu'on pouvait maintenant obtenir un tel résultat de finitude grâce aux derniers travaux de P.Broussous, une fois qu'on arrive à donner une borne du niveau d'une représentation de G' en fonction de son conducteur. Il y a sûrement plusieurs façons d'aborder ce problème, mais la plus simple façon que j'ai trouvé pour le résoudre a été de prouver par récurrence le théorème plus haut, *ensemble* avec la proposition qu'on énonce maintenant :

Proposition 3.1.3 . *Soit π' une représentation cuspidale de G'. Soit $m(\pi')$ le conducteur de π' (voir l'annexe 1). On a alors*

$$-4n \leq m(\pi').$$

L'inégalité est très grossière (le résultat qu'on attend serait plutôt $0 \leq m(\pi')$) ; mais elle est suffisante pour le but qu'on s'est proposé.

On raisonne par récurrence. L'hypothèse de récurrence est :

($\mathbf{H_k}$) Si D est l'algèbre à division fixée au début de cette section, si $G = GL_{dk}(F)$ et $G' = GL_k(D)$, alors le théorème 3.1.2 et la proposition 3.1.3 sont vérifiées pour G et G'.

Le premier pas ($r = 1$) a été traité dans la section 2.4. Nous supposons que le théorème plus haut est vérifié pour tout entier k entre 1 et $r-1$. On pose $G = GL_{dr}(F)$ et $G' = GL_r(D)$, pour vérifier l'hypothèse $\mathbf{H_r}$.

Tout d'abord, le corps F étant de caractéristique nulle, il y a orthogonalité des caractères sur G et G'. Ainsi, la classe d'équivalence d'une représentation essentiellement de carré intégrable π de G ou de G' est caractérisée par la restriction du caractère de π à l'ensemble des éléments elliptiques réguliers. Donc, si une application $\mathbf{C}$ comme dans le théorème existe, elle est unique.

Considérons un corps global $\mathbb{F}$ et une algèbre à division $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{F}$ tels que :

- il existe une place v_0 de $\mathbb{F}$ telle que $\mathbb{F}_{v_0} \simeq F$ et $\mathbb{D}_{v_0} \simeq A$
- aux places infinies $\mathbb{D}$ est scindée
- à toute place v différente de v_0 où $\mathbb{D}$ est ramifiée $\mathbb{D}_v$ est isomorphe à une algèbre à division sur $\mathbb{F}_v$.

Soient $v_0, v_1 ... v_m$ les places de $\mathbb{F}$ où $\mathbb{D}$ est ramifiée. On fixe une fois pour toutes un isomorphisme $\mathbb{D}_{v_0} \simeq A$ et des isomorphismes $\mathbb{D}_v \simeq M_n(\mathbb{F}_v)$ pour toutes les places v où $\mathbb{D}$ est scindée. Pour toute place v de $\mathbb{F}$ on note $GL_n(\mathbb{F}_v)$ par G_v et $\mathbb{D}_v^*$ par G'_v.

On note indistinctement $Z_v = Z_{GL_n(\mathbb{F}_v)} \simeq Z_{\mathbb{D}_v^*}$. Les adèles des groupes GL_n et $\mathbb{D}^*$ sur $\mathbb{F}$ seront notées $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ et $\mathbb{D}^*(\mathbb{A}_\mathbb{F})$.

a. Définition de l'application C

Il suffit de définir **C** sur les représentations de carré intégrable de G pour les mêmes raisons exposées au début de la démonstration de 2.4a. Soit π_0 une représentation de carré intégrable de G de caractère central (unitaire) ω.

Soit v_{m+1} une place finie de $\mathbb{F}$ où $\mathbb{D}$ n'est pas ramifiée. On pose $S = \{v_0...v_{m+1}\}$. Posons comme dans la démonstration de la correspondance avec une algèbre à division :

- $\omega_{v_0} = \omega$, $\pi_{v_0} = \pi_0$
- ω_{v_i} trivial pour tout $i \in \{1, 2...m+1\}$
- $\pi_{v_i} \in \Pi^2(GL_n(\mathbb{F}_{v_i}); \mathbf{1}_{Z_{v_i}})$ la représentation de Steinberg de $GL_n(\mathbb{F}_{v_i})$ pour tout $i \in \{1, 2...m\}$
- π_{m+1} une représentation cuspidale de caractère central trivial de $GL_n(\mathbb{F}_{v_i})$.

Notons $\tilde{\pi}$ une représentation globale automorphe qui vérifie les conditions locales plus haut et $\tilde{\omega}$ son caractère central.

Avec les notations de la sect.1, chap.1, si $\tilde{f} \in H(GL_n(\mathbb{F}); \tilde{\omega}))$ est telle que pour tout $i \in \{1, 2...m\}$ $\tilde{f}_{v_i}$ est à support dans les éléments elliptiques réguliers de G_{v_i}, et si $\tilde{f}' \in H(\mathbb{D}^*; \tilde{\omega})$ est telle que pour tout $i \in \{1, 2...m\}$ $\tilde{f'}_{v_i}$ est à support dans les éléments elliptiques réguliers de G'_{v_i} on dit que $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ se correspondent et on écrit $\tilde{f} \leftrightarrow \tilde{f}'$ si pour tout $i \in \{0, 1, 2...m\}$ on a $\tilde{f}_{v_i} \leftrightarrow \tilde{f'}_{v_i}$ et pour toute place v où $\mathbb{D}$ n'est pas ramifiée on a $\tilde{f}_v = \tilde{f'}_v$ (via les isomorphismes à ces places fixés au debut).

Proposition 3.1.4 . *Si $\tilde{f} \in H(GL_n(\mathbb{F}); \tilde{\omega})$ et $\tilde{f}' \in H(\mathbb{D}^*; \tilde{\omega})$ sont telles que $\tilde{f} \leftrightarrow \tilde{f}'$ et si $\tilde{f}_{v_{m+1}}$ est un coefficient d'une représentation cuspidale de $G_{v_{m+1}}$, alors on a :*

$$tr\rho_0(\tilde{f}) = tr\rho'_0(\tilde{f}').$$

Proposition 3.1.5 . *On pose*

$$V = \{v_0, v_1...v_m\}$$

Posons $G_V = \Pi_{v \in V} G_v$, $G'_V = \Pi_{v \in V} G'_v$ et $\omega_V = \Pi_{v \in V} \tilde{\omega}_v$. Notons $\tilde{\pi}_V$ la représentation de G_V induite par $\tilde{\pi}$. Si $f_V \in \prod_{i=0}^m H(G_{v_i}; \omega_{v_i})$ et $f'_V \in \prod_{i=0}^m H(G'_{v_i}; \omega_{v_i})$, on écrit $f_V \leftrightarrow f'_V$ si pour tout $i \in \{1, 2...m\}$ f_{v_i} et f'_{v_i} sont à support dans les éléments elliptiques réguliers et pour tout $i \in \{0, 1, 2...m\}$ on a $f_{v_i} \leftrightarrow f'_{v_i}$. On a alors :

$$tr\tilde{\pi}_V(\tilde{f}_V) = \sum_{\tilde{\pi}' \in U'} m(\tilde{\pi}') tr\tilde{\pi}'_V(\tilde{f}'_V)$$

où U' est l'ensemble des représentations automorphes cuspidales $\tilde{\pi}'$ de $\mathbb{D}^*$ telles que pour tout $v \notin V$ on a $\tilde{\pi}'_v = \tilde{\pi}_v$, $m(\tilde{\pi}')$ est la multiplicité de $\tilde{\pi}'$ dans ρ'_0 et l'indice V veut dire "restriction aux places dans V".

Proposition 3.1.6 . *L'ensemble U' est fini.*

Démonstration. On prouve dans la partie I de l'annexe 1 que l'hypothèse de récurrence implique ce résultat.

Proposition 3.1.7 . *Posons $V = \{v_0, v_1...v_m\}$ comme plus haut. Il existe alors un nombre fini k d'entiers strictement positifs a_j, $1 \leq j \leq k$, et des représentations irréductibles π'_{Vj} de G'_V tel que pour tout $f_V \in \prod_{i=0}^m H(G_{v_i};\omega_{v_i})$ et pour tout $f'_V \in \prod_{i=0}^m H(G'_{v_i};\omega_{v_i})$ telles que $f'_V \leftrightarrow f_V$ on ait:*

$$tr\tilde{\pi}_V(f_V) = \sum_{j=1}^{k} a_j tr\pi'_{Vj}(f'_V)$$

Comme on l'a déjà dit au moment de la correspondance avec une algèbre à division, les propositions 3.1.4, 3.1.5 et 3.1.7 sont connues et on en trouve des démonstrations dans [Fla2].

Proposition 3.1.8 . *Il existe un nombre fini k' d'entiers strictement positifs a_p, $1 \leq p \leq k'$, et de représentations irréductibles π'_p de G' tels qu'on ait:*

$$\chi_{\pi_0}(g) = (-1)^{n-r} \sum_{p=1}^{k'} a_p \chi_{\pi'_p}(g') \qquad \forall g \leftrightarrow g'.$$

Démonstration. On passe aux fonctions caractères dans l'égalité obtenue à la proposition 3.1.7 par le même raisonnement que pour la proposition 2.3.7. Nous ne pouvons pas utiliser l'orthogonalité des caractères sur les groupes G_V et G'_V comme dans la démonstration de la proposition 2.3.7, car on ne sait pas si les composantes locales des représentations de G'_V à la place v_0 sont de carré intégrable. Passons alors tout du côté gauche de l'égalité pour obtenir

$$\chi_{\tilde{\pi}_V}(g) - \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{\pi'_{Vj}}(g') = 0 \qquad \forall g \leftrightarrow g'.$$

Les composantes locales de $\tilde{\pi}_V$ aux places $v_1, v_2...v_m$ sont des représentations de Steinberg. Le caractère de la représentation de Steinberg de G_{v_i} correspond par la correspondance avec une algèbre à division au caractère de la représentation triviale de G'_{v_i}. On utilise alors la linéaire indépendance des caractères sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de $\Pi_{i=1}^{m}\mathbb{D}^*_{v_m}$ qui est compact modulo le centre. La nullité du coefficient du caractère de la représentation triviale de ce groupe donne la relation voulue sur les caractères fonction. Le $(-1)^{n-r}$ vient après un simple calcul de la loi de réciprocité et du fait que les caractères de la représentation de Steinberg de $GL_n(F_{v_i})$ et de la représentation triviale de $\mathbb{D}^*_{v_i}$ (pour i de 1 à m) diffèrent par le signe $(-1)^{n-1}$.

Proposition 3.1.9 . *Les représentations π'_p qui apparaissent dans l'égalité de la proposition 3.1.8 sont de carré intégrable.*

INTERMEZZO. Cet intermezzo est dédié à un long raisonnement aboutissant à la proposition B. Cette proposition B s'applique d'un part pour prouver la proposition 3.1.9 plus haut et d'autre part dans la section 4.3 plus loin. L'idée de la démonstration de la proposition B vient de [DKV].

Soient π_i, $i \in \{1, 2...k\}$ des représentations lisses irréductibles de G et π'_j, $j \in \{1, 2...k'\}$ des représentations lisses irréductibles de G', et supposons qu'on ait la relation :

$$(\mathbf{E_0}) \quad (\sum_{i=1}^{k} a_i\chi_{\pi_i})(g) = (-1)^{n-r}(\sum_{j=1}^{k'} a'_j\chi_{\pi'_j})(g') \quad \text{pour tout } g \in G \leftrightarrow g' \in G'$$

où les a_i et les a'_j sont des nombres complexes.

Sur G (resp. G') on fixe la paire parabolique minimale standard $(A; P)$ (resp. $(A'; P')$) où A (resp. A') est le tore diagonal et P (resp. P') est le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles. Donc, si L est un sous-groupe de Levi standard de G, L est le groupe des matrices inversibles diagonales par blocs d'une taille donnée. Il correspond de façon biunivoque à une suite finie d'entiers strictement positifs $(n_1; n_2; ...n_p)$ où

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_p$$

et les n_i représentent les tailles des dits blocs dans l'ordre, en lisant de haut à gauche vers le bas à droite. Pareillement, à un sous-groupe de Levi standard de G' il correspond de façon biunivoque une suite finie d'entiers strictement positifs $(n'_1; n'_2; ...n'_p)$ où

$$r = n'_1 + n'_2 + ... + n'_p.$$

On dit alors que L *se transfère* si pour tout $i \in \{1, 2, ...p\}$, d divise n_i. Soit L' le sous-groupe de Levi standard de G' qui correspond à la suite $(n'_1; n'_2; ...n'_p)$ telle que, pour tout $i \in \{1, 2, ...p\}$, $n'_i = n_i/d$. On dit alors que L' correspond à L ou que L correspond à L' ou que L et L' se correspondent. Si L est un sous-groupe de Levi quelconque de G il est conjugué à un unique sous-groupe de Levi standard M de G et on dit que L se transfère si M se transfère. Si P est un sous-groupe parabolique standard de G et $P = LU$ est une décomposition de Levi standard de P, on dit que P *se transfère* si L se transfère. Alors, si L' est le sous-groupe de Levi standard de G' qui correspond à L et P' est le sous-groupe parabolique standard de G' qui a pour sous-groupe de Levi standard L', on dit que P et P' se correspondent. Si P est un sous-groupe parabolique quelconque de G, il est conjugué à un unique sous-groupe parabolique standard Q de G et on dit alors que P se transfère si Q se transfère. Si L et L' sont deux sous-groupes de Levi standard de G et G' respectivement, on utilise la notation $L \leftrightarrow L'$ pour dire que L et L' se correspondent. On adopte la même notation pour des sous-groupes paraboliques standard qui se correspondent.

Soit $P = LU$ un sous-groupe parabolique standard de G qui se transfère et soit $P' = L'U'$ le sous-groupe parabolique standard de G' qui lui correspond. On se demande si on a alors la relation :

$$(\mathbf{E_P}) \quad (\sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{res^G_P \pi_i})(l) = (-1)^{n-r} (\sum_{j=1}^{k'} a'_j \chi_{res^{G'}_{P'} \pi'_j})(l') \text{ pour tout } l \in L \leftrightarrow l' \in L'.$$

Posons
$A_P = \{\omega \in X(Z_L) : \omega$ est un exposant central de l'un des π_i relatif à $P\}$ et
$A'_{P'} = \{\omega \in X(Z_{L'}) = X(Z_L) : \omega$ est un exposant central de l'un des π'_j relatif à $P'\}$

PROPOSITION A. *Si* $(\mathbf{E_0})$ *est vérifiée et si*

- tous les a_i sont des nombres réels non nuls de même signe et tous les a'_j sont des nombres réels non nuls de même signe et

- pour tout $i \in \{1, 2...k\}$ tout sous-quotient irréductible de $res^G_P \pi_i$ est une représentation essentiellement de carré intégrable et

- pour tout $j \in \{1, 2...k'\}$ tout sous-quotient irréductible de $res^{G'}_{P'} \pi'_j$ est une représentation essentiellement de carré intégrable

alors :

i)$A_P = A'_{P'}$

ii)$(\mathbf{E_P})$ est vérifiée.

Démonstration. (i) Tout d'abord on a que pour tout n' tel que $n' < n$ le caractère d'une représentation essentiellement de carré intégrable de $GL_{n'}(F)$ est constant, réel et de signe $(-1)^{n'-1}$ sur les éléments elliptiques réguliers d'un voisinage de l'unité dans $GL_{n'}(F)$ (corollaire 2.3.8) mais aussi, par conséquent, que pour tout $r' < r$ le caractère d'une représentation essentiellement de carré intégrable de $GL_{r'}(D)$ est constant, réel et de signe $(-1)^{r'-1}$ sur les éléments elliptiques réguliers d'un voisinage de l'unité dans $GL_{r'}(D)$ par l'hypothèse de récurrence. Ça s'applique en particulier à L et L'. Il existe donc un voisinage V de l'unité dans L tel que le caractère de tout sous-quotient irréductible de $res_P^G \pi_i$ soit constant réel de signe $(-1)^{n-1}$ sur l'ensemble V_e des éléments elliptiques réguliers de V pour tout $i \in \{1, 2...k\}$ et il existe un voisinage de l'unité V' dans L' tel que le caractère de tout sous-quotient irréductible de $res_{P'}^{G'} \pi'_j$ soit constant réel de signe $(-1)^{r-1}$ sur l'ensemble ${V'}_e$ des éléments elliptiques réguliers de V' pour tout $j \in \{1, 2...k'\}$.

Soit $g' \in V'_e$ tel qu'il existe $g \in V$ avec la propriété $g \leftrightarrow g'$. On a évidement $g \in V_e$. Soit $z \in Z_L = Z_{L'}$ tel que $P_{zg} = P$ et $P_{zg'} = P'$ (prop.1.3.4). Cette propriété est vérifiée par tous les z tels que $N(z) < c = inf(c(g); c(g'))$ (toujours prop.1.3.4). Posons en semisimplifiant :

$$res_P^G \pi_i = \sum_{s=1}^{k_i} \alpha_s \pi_i^s, \qquad \alpha_s > 0$$

et

$$res_{P'}^{G'} \pi'_j = \sum_{t=1}^{k_j} \alpha'_t {\pi'}_j^t, \qquad \alpha'_t > 0$$

Par le théorème 1.3.3 on a :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{s=1}^{k_i} \alpha_s \chi_{\pi_i^s}(zg) = (-1)^{n-r} \sum_{j=1}^{k'} a'_j \sum_{t=1}^{k'_j} \alpha'_t \chi_{{\pi'}_j^t}(zg')$$

Si ω_i^s sont les caractères centraux des π_i^s et ω_j^t sont les caractères centraux des ${\pi'}_j^t$ alors on a l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{s=1}^{k_i} \alpha_s \omega_i^s(z) \chi_{\pi_i^s}(g) = (-1)^{n-r} \sum_{j=1}^{k'} a'_j \sum_{t=1}^{k'_j} \alpha'_t \omega_j^t(z) \chi_{{\pi'}_j^t}(g')$$

On obtient en regroupant une relation :

$(\mathbf{F_0})$

$$\sum_{\omega \in A_P} n_\omega \omega(z) = \sum_{\omega' \in {A'}_{P'}} n_{\omega'} \omega'(z)$$

où, chose très importante, les n_ω et les $n_{\omega'}$ sont tous non nuls comme somme de nombres réels non nuls et de même signe. Or, cette relation est vraie pour tout z tel que $N(z) < c$. Pour avoir $A_P = A'_{P'}$ le lemme suivant suffit :

Lemme. *Si $\omega_1, \omega_2...\omega_v$ sont des caractères distincts de Z_L et $a_1, a_2...a_v$ sont des nombres complexes tels qu'on ait :*

$$\forall z \in Z_L \text{ tel que } N(z) < c, \quad \Sigma_{i=1}^{v} a_i \omega_i(z) = 0$$

alors on a $a_i = 0$ pour tout i.
Démonstration du lemme. Raisonnons par l'absurde et supposons v minimal tel que

(F)

$$\sum_{i=1}^{v} a_i \omega_i(z) = 0$$

pour tout $z \in Z_L$ tel que $N(z) < c$ et il existe au moins un a_i non nul.

Évidemment $v \geq 2$ et tous les a_i sont non nuls. Soit $z_0 \in Z_L$ tel que $N(z_0) < 1$. Alors pour tout z tel que $N(z) < c$ on a $N(z_0 z) < c$ donc $\Sigma_{i=1}^{v} a_i \omega_i(z_0 z) = 0$ ce qui donne $\Sigma_{i=1}^{v} a_i \omega_i(z_0)\omega_i(z) = 0$. En multipliant **(F)** par $\omega_1(z_0)$ et en faisant la différence avec la dernière relation obtenue on trouve une relation du type **(F)** avec un v strictement inférieur donc une relation dans laquelle tous les coefficients sont nuls. Ceci implique que pour tout $i \in \{1, 2..v\}$ on a $\omega_i(z_0) = \omega_1(z_0)$. Mais alors on a en particulier :

$$\omega_1(z_0) = \omega_2(z_0) \qquad \forall z_0 \text{ tel que } N(z_0) < 1$$

et aussi, les ω_i étant des caractères,

$$\omega_1(z_0^{-1}) = \omega_2(z_0^{-1}) \qquad \forall z_0 \text{ tel que } N(z_0) < 1$$

Comme tout élément $c \in Z_L$ s'écrit $c = xy^{-1}$ où $N(x) < 1$ et $N(y) < 1$ (prendre y tel qu'on ait simultanément $N(y) < 1$ et $N(cy) < 1$, et mettre $x = cy$) on aboutit à $\omega_1 = \omega_2$ ce qui contredit nos hypothèses.

Ainsi le point (i) de la proposition est démontré.

(ii) Prenons maintenant $g' \in L'^{reg}$ quelconque et $g \leftrightarrow g'$. C'est toujours vrai que pour tout $z \in Z_L$ qui vérifie $N(z) < c = inf(c(g); c(g'))$ on a $P_{zg} \subset P$ et $P'_{zg'} \subset P'$ et on arrive toujours à une relation du type $(\mathbf{F_0})$ avec la seule différence qu'on ne peut plus garantir le fait que les coefficients qui apparaissent soient tous positifs. On écrit cette relation :

$$\sum_{\omega \in A_P} n_\omega \omega(z) = \sum_{\omega \in A'_{P'}} n'_\omega \omega(z).$$

Par le point (i) on a $A_P = A'_{P'}$ et par le lemme plus haut on en déduit que $n_\omega = n'_\omega$ pour tout $\omega \in A_P = A'_{P'}$. En particulier $\sum_\omega n_\omega = \sum_\omega n'_\omega$ et cette relation, si on regarde qui étaient les coefficients n_ω et n'_ω, n'est autre que la relation $(\mathbf{E_P})$ appliquée à $g \leftrightarrow g'$. Le point (ii) est démontré.

PROPOSITION B. *Si* $(\mathbf{E_0})$ *est vérifiée et si*

- tous les a_i sont des nombres réels non nuls de même signe et tous les a'_j sont des nombres réels non nuls de même signe et

- pour tout $i \in \{1, 2...k\}$, π_i est une représentation essentiellement de carré intégrable
alors :

(i) $A_P = A'_{P'}$ *pour tout* $P \leftrightarrow P'$

(ii) $(\mathrm{E_P})$ *est vérifiée pour tout* P *qui se transfère.*

(iii) *Tous les* π'_j *sont des représentations essentiellement de carré intégrable.*

Démonstration. La démonstration utilise plusieurs fois le critère de Casselman (chap.1, sect.5) et la proposition A plus haut. Le critère de Casselman implique déjà que tout sous-quotient irréductible d'une restriction d'une représentation essentiellement de carré intégrable est une représentation essentiellement de carré intégrable.

Pour chaque représentation π'_j il existe un sous-groupe parabolique standard P'_j de G' tel que la restriction de π'_j à P'_j soit cuspidale. Soit B_0 l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard P' de G' tels que pour au moins un j la restriction de π_j à P soit cuspidale. Définissons une relation d'ordre partielle sur U'_0 en posant $P' < Q'$ si et seulement si $P' \subset Q'$. Soit P'_0 un élément minimal de B_0. Alors pour tout $j \in \{1, 2...k'\}$ la restriction de π'_j à P'_0 est ou nulle ou cuspidale.

On a trouvé que tous les sous-quotients irréductibles des restrictions des π'_j à P'_0 et tous les sous-quotients irréductibles des restrictions des π_i à $P_0 \leftrightarrow P'_0$ sont des représentations essentiellement de carré intégrable. On peut donc appliquer le point (i) de la proposition A pour en déduire que $A_{P_0} = A'_{P'_0}$. Le critère de Casselman implique que les caractères dans A_{P_0} vérifient **(Cas)** et alors la variante du critère de Casselman implique que toutes les représentations π'_j dont la restriction à P'_0 est non nulle sont des représentations essentiellement de carré intégrable.

On montre alors le point (iii) de notre proposition par récurrence: posons $B_1 = B_0 \backslash \{P'_0\}$. Prenons un élément minimal P'_1 de B_1. Soit $j \in \{1, 2...k'\}$. Si la restriction de π'_j à P'_1 n'est pas nulle ou cuspidale c'est que $P'_0 \not\subseteq P'_1$ et que la restriction de π'_j à P'_0 est cuspidale, et donc π'_j est une représentation essentiellement de carré intégrable. On a vu que le critère de Casselman implique alors que tous les sous-quotients irréductibles de sa restriction à P'_1 sont des représentations essentiellement de carré intégrable. En conclusion tous les sous-quotients irréductibles des restrictions non nulles des π'_j à P'_1 sont des représentations essentiellement de carré intégrable. Comme du côté de G c'est pareil (car par hypothèse les π_i sont des représentations essentiellement de carré intégrable) on applique encore une fois le point (i) de la proposition précédente pour avoir que $A_{P_1} = A'_{P'_1}$. On applique le critère de Casselman du côté G de l'égalité pour voir que les éléments de A_{P_1} vérifient **(Cas)**, donc les éléments de $A'_{P'_1}$ vérifient **(Cas)** et on utilise alors la variante du critère de Casselman du côté G' de l'égalité pour trouver que toutes les représentations π'_j dont la restriction à P'_1 est cuspidale sont essentiellement de carré intégrable. Ainsi de suite; après $card(B_0)$ pas on trouve que toutes les représentations π'_j sont essentiellement de carré intégrable et le point (iii) est démontré. Il implique directement les points (i) et (ii) par application de la proposition A et par le fait que tous les sous-quotients irréductibles des restrictions des représentations essentiellement de carré intégrable sont des représentations essentiellement de carré intégrable. La proposition B est démontrée.

Remarque. Après avoir établi la correspondance on va étudier ce problème de la restriction pour des représentations admissibles quelconques (section 4.2). On vera que si on remplace les représentations essentiellement de carré intégrable par des représentations quelconques la proposition B n'est plus vraie.

Démonstration de la proposition 3.1.9. C'est évident par la proposition B.

Maintenant on procède comme pour la correspondance avec une algèbre à division: en appliquant l'orthonormalité des caractères on montre que du côté gauche de l'égalité entre les fonctions caractères de la proposition 3.1.8 il n'y a qu'une seule représentation π' avec un coefficient égal à 1. On pose $\mathbf{C}(\pi_0) = \pi'$. On remarque que l'égalité de la proposition 3.1.7 était vraie pour *toutes les fonctions* comme dans le théorème de transfert (transfert faible) et on en déduit facilement que les caractères de π_0 et π' se correspondent pour tous $g \leftrightarrow g'$ (et pas seulement pour les elliptiques réguliers par exemple). On prolonge l'application ainsi définie sur les représentations de carré intégrable à toutes les représentations essentiellement de carré intégrable en tordant par des caractères de G.

b. Injectivité de l'application C

Elle est évidente à cause de l'orthogonalité des caractères pour GL_n.

c. Surjectivité de l'application C

Supposons qu'il existe une représentation de carré intégrable π' de G' de caractère central ω qui ne se trouve pas dans l'image de $\mathbf{C}$. Le corps F étant de caractéristique nulle, la restriction du caractère de π' à G'_e est dans l'espace $L^2(G'_e;\omega)$ et de plus il est orthogonal à toute restriction à G'_e d'un caractère d'une autre représentation de carré intégrable de caractère central ω de G'. En particulier il est orthogonal aux caractères des représentations qui se trouvent dans l'image de $\mathbf{C}$ donc en identifiant $L^2(G_e;\omega)$ et $L^2(G'_e;\omega)$ par l'isomorphisme i (chap.1, sect.9) et en utilisant la correspondance, la restriction du caractère de π' est orthogonale à la restriction de tout caractère d'une représentation de carré intégrable de G. D'après le corollaire 2.3.9, les restrictions des caractères des représentations de carré intégrable de G de caractère central ω forment un système orthonormal complet de $L^2(G_e;\omega)$; le caractère de π' serait alors nul sur G'_e. C'est impossible car π' est de norme 1 dans $L^2(G'_e;\omega)$.

Remarque 1. (qui sert pour la partie I de l'annexe 1) On a obtenu au passage le résultat suivant : en se plaçant dans la situation globale déjà définie, si π est une représentation de carré intégrable de G, il existe une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\pi}$ de $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ et une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\pi}'$ de $\mathbb{D}(\mathbb{A}_\mathbb{F})^*$ telles qu'aux places où $\mathbb{D}$ est scindée les composantes locales de $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ sont égales, aux places ramifiées différentes de v_0 les composantes locales de $\tilde{\pi}$ sont des représentations de Steinberg et les composantes locales de $\tilde{\pi}'$ sont des représentations triviales, et la composante locale de $\tilde{\pi}$ à la place v_0 est π et la composante locale de $\tilde{\pi}'$ à la place v_0 est $\mathbf{C}(\pi)$.

Remarque 2. Le seul résultat qu'on a utilisé et dont on ne dispose pas en caractéristique non nulle est l'orthogonalité des caractères sur G'. On s'est servi de l'orthogonalité en deux endroits : pour construire la correspondance et, un peu plus haut, pour la surjectivité. Je ne suis pas arrivé à trouver une preuve de la surjectivité qui n'utilise pas ça. En effet, la preuve qui consiste à refaire la même opération à l'envers, en partant d'une représentation de carré intégrable de G' ne marche pas, car *on ne sait pas que toute représentation de carré intégrable est composante locale d'une représentation automorphe cuspidale* dans le cas de G'.

Il faut maintenant prouver que la proposition 3.1.3 est vraie pour G' pour boucler ainsi la récurrence.

Proposition 3.1.10 . *Avec les notations de l'annexe 1, on a, pour toute représentation de carré intégrable π de G :*

$$-4n + m(\pi) \leq m(\mathbf{C}(\pi)) \leq m(\pi) + 4n.$$

Démonstration. Cette démonstration fait l'objet la partie II de l'annexe 1.

Maintenant, le théorème 5.1a) de [JP-SS] nous dit que si π est une représentation lisse irréductible générique de G, alors $m(\pi)$ est positif ou nul. Comme une représentation essentiellement de carré intégrable est générique, la proposition 3.1.10 et le fait que la correspondance est surjective impliquent la proposition 3.1.3.

3.2 Corps locaux proches et formes intérieures du groupe linéaire

Soient F un corps local non archimédien, D_F une algèbre à division centrale de dimension n^2 sur F et G'_F le groupe $GL_r(D_F)$. Soient $m \in \mathbb{N}$ et L un corps local m-proche de F. On voudrait définir un groupe G'_L sur L tel qu'il y ait une ressemblance entre la théorie des représentations de G'_F et celle de G'_L à la manière dont Kazhdan l'a fait pour les groupes de Chevalley dans [Ka2] et Lemaire pour GL_n dans [Le1]. L'idée est simple: choisir une algèbre à division D_L centrale sur L de dimension n^2 qui ait le même invariant de Hasse que D_F, et poser $G'_L = GL_r(D_L)$. Dans ce qui suit on montre que ce groupe est effectivement solution de notre problème; on construit G'_L de façon à pouvoir vérifier les théorèmes que Kazhdan a montrés pour les groupes de Chevalley, et montrer aussi quelques autres résultats utiles pour la suite. Les résultats de 2)b) et 1)b) sont démontrés dans un cadre général dans [De]. On les a redémontrés ici d'une façon concrète dans ce cas particulier pour fixer les notations qu'on utilise par la suite.

1a) Préliminaires sur les algèbres à division

Soient F un corps local non archimédien, v_F la valuation normalisée de F, O_F l'anneau des entiers de F, P_F l'idéal maximal de O_F formé des éléments de F de valuation strictement positive, $k_F = O_F/P_F$ le corps résiduel (de cardinal fini q) de F et π_F une uniformisante de F. Soit D une algèbre à division centrale sur F. On identifie F au sous-corps $1_D F$ de D. On sait que $dim_F(D)$ est un carré n^2. On sait également qu'il existe une valuation v_D sur D à valeurs dans $\mathbb{Z}$ surjective qui prolonge nv_F; on note O_D l'ensemble des éléments de D de valuation positive ou nulle et P_D l'ensemble des éléments de D de valuation strictement positive; O_D est un anneau non commutatif et P_D est un idéal (bilatère) maximal de O_D.

On dispose d'une classification des algèbres à division centrales sur F de dimension n^2: si D est une telle algèbre, il existe un sous-corps commmutatif maximal E de D qui soit une extension de degré n non ramifiée de F; il existe également un élément π_D de D et un générateur σ du groupe de Galois de l'extension E/F tel que:

- $\pi_D^n = \pi_F$
- $v_D(\pi_D) = 1$
- $D = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \pi_D^i E$
- pour tout $e \in E$ on a $\pi_D^{-1} e \pi_D = \sigma(e)$. L'élément σ est uniquement déterminé et permet de calculer l'invariant de Hasse de D.

Réciproquement, en se donnant un générateur σ du groupe de Galois de E/F

où E est l'unique (modulo isomorphisme) extension non ramifiée de degré n de F, on peut construire une algèbre à division centrale sur F de dimension n^2 en lui imposant les trois conditions plus haut. Si on fixe une extension non ramifiée E de F de dimension n, deux telles algèbres sont isomorphes si et seulement si $\sigma \in Gal(E/F)$ est le même. Ce sont les résultats de la Proposition a, page 277, et Corollaire b, page 335 de [Pi].

Il faut donc commencer par s'intéresser à la relation entre les extensions non ramifiées de même degré sur deux corps locaux proches.

2a) Préliminaires sur les extensions non ramifiées d'un corps local

Soient $F, v_F, O_F, P_F, \pi_F, k_F, q = card(k_F)$ comme plus haut. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si on fixe une clôture algébrique $\bar{F}$ de F, alors il existe une unique extension E non ramifiée de degré n de F incluse dans $\bar{F}$. On a les propriétés suivantes:

- la valuation normalisée de E prolonge celle de F et π_F est une uniformisante de E;

- si $l = q^n$ et P est le polynôme $P(X) = X^{l-1} - 1 \in F[X]$, alors E est un corps de décomposition de P; en particulier, pour toute racine primitive d'ordre $l-1$ de l'unité y_E dans $\bar{F}$, on a $y_E \in E$ et $E = F[y_E]$;

- le cardinal du corps résiduel $k_E = O_E/P_E$ de E est égal à q^n et on a un isomorphisme de groupes $g_{E/F}$ de $Gal(E/F)$ sur $Gal(k_E/k_F)$; cet isomorphisme est donné par l'application suivante: si $\sigma \in Gal(E/F)$ alors σ induit un automorphisme σ' de O_E qui envoie P_E sur P_E et qui agit comme l'identité sur O_F; σ' induit par conséquence un isomorphisme σ'' de k_E sur k_E dont la restriction à k_F est l'identité et on pose $g_{E/F}(\sigma) = \sigma''$.

C'est la Proposition 17.8, page 334, [Pi].

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $O_{Fm} = O_F/P_F^m$ et $O_{Em} = O_E/P_E^m$. Dans ce qui suit, une barre au dessus d'un symbole rappelle que ce symbole est rattaché (d'une façon ou d'une autre) à k_F ou k_E, et un chapeau au dessus d'un symbole rappelle qu'il est rattaché à O_{Fm} ou O_{Em}. Soient P le polynôme $X^{l-1} - 1 \in F[X]$, $\hat{P}$ le polynôme $X^{l-1} - \hat{1} \in O_{Fm}[X]$ et $\bar{P}$ le polynôme $X^{l-1} - \bar{1} \in k_F[X]$. Soit $\bar{P} = \bar{P}_1\bar{P}_2...\bar{P}_k$ une décomposition en produit de polynômes unitaires irréductibles de $\bar{P}$ dans $k_F[X]$. Supposons (sans restreindre la généralité) que $\bar{P}_1$ ait une racine primitive d'ordre $l-1$ de l'unité $\bar{y}$ dans l'extension k_E de k_F. On sait qu'alors le degré de $\bar{P}_1$ est égal à n.

Proposition 3.2.1 . *a) Il existe un unique polynôme unitaire $\hat{P}_1 \in O_{Fm}[X]$ tel que*

A) $\hat{P}_1$ divise $\hat{P}$ et

B) l'image de $\hat{P}_1$ dans $k_F[X]$ soit $\bar{P}_1$ (en particulier $\hat{P}_1$ est irréductible).

b) Soit y l'unique racine de P dans E telle que l'image de y dans k_E soit $\bar{y}$. Notons $\hat{y}$ l'image de y dans O_{Em}. Il existe un isomorphisme de O_{Fm}-algèbres $\hat{f}_m : O_{Fm}[X]/(\hat{P}_1) \to O_{Em}$ induit par le morphisme $f_m : O_{Fm}[X] \to O_{Em}$ donné par $Q \mapsto Q(\hat{y})$.

Démonstration. a) On montre l'existence et l'unicité.

EXISTENCE : Dans la démonstration de la Proposition a, page 277 de Pierce on montre que la décomposition de P en produit de polynômes unitaires irréductibles est du type $P = P_1 P_2 ... P_k$ où pour tout $i \in \{1, 2...k\}$, l'image facteur de P_i dans $k_F[X]$ est $\bar{P}_i$. On vérifie facilement que l'image facteur de P_1 dans $O_{Fm}[X]$ satisfait à A) et B).

UNICITÉ : Si $\hat{P}_2$ est un autre polynôme unitaire de $O_{Fm}[X]$ qui satisfait à A) et B), alors $\hat{P}_1$ et $\hat{P}_2$ sont en particulier unitaires, de même degré, et distincts ; $\hat{P}_1$ étant irréductible, ils sont premiers entre eux. Comme ils vérifient tous les deux A) on en déduit que leur produit divise P. Mais alors, comme ils vérifient tous les deux B), $\bar{P}_1^{\,2}$ divise $\bar{P}$. C'est impossible car toutes les racines de $\bar{P}$ dans une clôture algébrique de k_F sont distinctes.

b) L'application f_m est visiblement un morphisme de O_{Fm}-algèbres. Montrons qu'elle est surjective. L'algèbre O_{Em} est un O_{Fm}-module libre de rang n dont une base est $\mathcal{B} = \{\hat{1}, \hat{y}, \hat{y}^2 ... \hat{y}^{n-1}\}$; en effet, $\mathcal{B}$ est une famille génératrice car $\{1; y; y^2 ... y^{n-1}\}$ était une famille génératrice de O_E sur O_F ([We], prop.5, page 20) et $\mathcal{B}$ est une famille libre car, $\hat{P}_1$ étant irréductible, c'est le polynôme minimal de $\hat{y}$. Or, la base $\mathcal{B}$ se trouve dans l'image de f_m donc f_m est bien surjective. Comme le noyau de f_m est clairement l'idéal principal engendré par $\hat{P}_1$, le résultat en découle.

Proposition 3.2.2 . *On note G_m l'ensemble des O_{Fm}-automorphismes de l'algèbre O_{Em}. Alors le morphisme naturel $g_{m,E/F} : Gal(E/F) \to G_m$ est un isomorphisme de groupes.*

Démonstration. On rappelle qu'on a noté $g_{E/F}$ l'isomorphisme canonique

$$Gal(E/F) \simeq Gal(k_E/k_F).$$

S'il existait σ et σ' distincts dans $Gal(E/F)$ tels que $g_{m,E/F}(\sigma) = g_{m,E/F}(\sigma')$ alors on aurait également $g_{E/F}(\sigma) = g_{E/F}(\sigma')$ ce qui est impossible car $g_{E/F}$ est un isomorphisme. Donc $g_{m,E/F}$ est injective. D'autre part, d'après la proposition 3.2.1b), un O_{Fm}-automorphisme de l'algèbre O_{Em} est uniquement déterminé par l'image de $\hat{y}$, et par ailleurs cette image doit être une racine de $\hat{P}_1$. Comme le degré de $\hat{P}_1$ est n, le cardinal de G_m est inférieur ou égal à n qui est le cardinal de $Gal(E/F)$. L'application $g_{m,E/F}$ étant injective elle est forcément surjective et finalement bijective.

2b) Corps locaux proches et extensions non ramifiées

Soient F et L deux corps locaux m-proches ($m \geq 1$) et $(\pi_F; \pi_L; \bar{\lambda}^m_{FL})$ le triplet de m-proximité correspondant. Soient $n \geq 1$, E une extension non ramifiée de dimension n de F et K une extension non ramifiée de dimension n de L.

Théorème 3.2.3 . *Les corps E et K sont m-proches.*

Démonstration. L'isomorphisme $\bar{\lambda}^m_{FL} : O_{Fm} \to O_{Lm}$ s'étend de façon naturelle en un isomorphisme $\bar{\lambda}^m_{FL} : O_{Fm}[X] \to O_{Lm}[X]$. Soient $\bar{P}_F \in k_F[X]$ et $\hat{P}_F \in O_{Fm}[X]$ choisis comme $\bar{P}_1$ et $\hat{P}_1$ dans la proposition 3.2.1. Posons $\bar{P}_L = \bar{\lambda}^m_{FL}(\bar{P}_F) \in k_L[X]$ et $\hat{P}_L = \bar{\lambda}^m_{FL}(\hat{P}_F) \in O_{Lm}[X]$. Alors on a un isomorphisme

$$\bar{\lambda}^m_{FL} : O_{Fm}[X]/(\hat{P}_F) \simeq O_{Lm}/(\hat{P}_L).$$

Maintenant on sait par le point b) de la proposition 3.2.1 que

$$(I_1) \qquad O_{Fm}[X]/(\hat{P}_F) \simeq O_{Em},$$

isomorphisme qui dépend du choix d'une racine primitive d'ordre $l-1$ de l'unité dans E. D'autre part $\hat{P}_L$ est un polynôme qui vérifie les conditions A) et B) de la proposition (avec corps de base cette fois le corps L). Par unicité et par le point b) de la proposition 3.2.1 (appliquée cette fois sur L) on a un isomorphisme

$$(I_2) \qquad O_{Lm}[X]/(\hat{P}_L) \simeq O_{Km}$$

qui dépend du choix d'une racine primitive d'ordre $l-1$ de l'unité dans K. Avec les trois isomorphismes plus haut on peut construire un isomorphisme

$$\bar{\lambda}^m_{EK} : O_{Em} \simeq O_{Km}.$$

Le triplet $(\pi_F; \pi_L; \bar{\lambda}^m_{EK})$ est un triplet de m-proximité pour les corps E et K.

1b) Corps locaux proches et algèbres à division

Soient F et L deux corps locaux m-proches ($m \geq 1$) et soit D_F une algèbre à division centrale de dimension n^2 sur F. On choisit un sous-corps non ramifié maximal E de D_F et supposons que σ_E est le générateur du groupe de Galois de l'extension E/F qui correspond à D_F comme dans l'introduction. Soit K une extension non ramifiée de degré n de L. Il existe un isomorphisme canonique $g_{E/F,K/L} : Gal(E/F) \simeq Gal(K/L)$, image de l'isomorphisme $g : Gal(k_E/k_F) \simeq Gal(k_K/k_L)$ qui envoie le Frobenius sur le Frobenius. A son tour, l'isomorphisme $g_{E/F,K/L}$ induit (par la proposition 3.2.2 un isomorphisme $g_{m,E/F,K/L} : G_{m,E/F} \simeq G_{m,K/L}$. Il est facile de vérifier que:

$$(*) \qquad \forall \hat{\sigma} \in G_{m,E/F}, \forall \hat{x} \in O_{Em},\ g_{m,E/F,K/L}(\hat{\sigma})(\bar{\lambda}^m_{EK}(\hat{x})) = \bar{\lambda}^m_{EK}(\hat{\sigma}(\hat{x})).$$

On note D_L l'algèbre à division centrale sur L de dimension n^2 qui correspond à l'extension K/L et à l'élément $\sigma_K = g_{E/F,K/L}(\sigma_E)$ du groupe de Galois $Gal(K/L)$. On fixe une uniformisante π_{D_L} de D_L avec les propriétés de **1a**.

En reprenant les notations de **1a** on a

$$D_F = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \pi^i_{D_F} E$$

$$O_{D_F} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \pi^i_{D_F} O_E$$

$$P^{mn}_{D_F} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \pi^i_{D_F} P^m_E$$

et

$$O_{D_F}/P^{mn}_{D_F} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \pi^i_{D_F} O_E/P^m_E.$$

On a donc un isomorphisme de groupes additifs $\bar{\lambda}^m_{D_F D_L} : O_{D_F}/P^{mn}_{D_F} \simeq O_{D_L}/P^{mn}_{D_L}$ qui envoie $\sum_{i=0}^{n-1} \pi_{D_F} \hat{\lambda}_i$ sur $\sum_{i=0}^{n-1} \pi_{D_L} \bar{\lambda}^m_{EK}(\hat{\lambda}_i)$ pour tout n-uplet $\{\hat{\lambda}_0; \hat{\lambda}_1 ... \hat{\lambda}_{n-1}\} \in O^n_{mE}$. Montrons que cet isomorphisme est compatible avec la multiplication (raison pour laquelle on a choisi σ_K correspondant à σ_E). En effet, il suffit de vérifier la compatibilité avec la multiplication sur deux éléments du type $\pi^i_{D_F}\hat{x}$ et $\pi^j_{D_F}\hat{x}'$ où $0 \leq i, j \leq n-1$ et $\hat{x}, \hat{x}' \in O_{Em}$. Soit $\hat{\sigma}_E$ l'image de σ_E dans $G_{m,E/F}$. On a

$$\pi^i_{D_F}\hat{x}\pi^j_{D_F}\hat{x}' = \pi^{i+j}_{D_F} g_{m,E/F,K/L}(\hat{\sigma}^j_E)(\hat{x})\hat{x}' \text{ si } i+j<n$$

et

$$\pi^i_{D_F}\hat{x}\pi^j_{D_F}\hat{x}' = \pi^{i+j-n}_{D_F}\hat{\pi}_F g_{m,E/F,K/L}(\hat{\sigma}^j_E)(\hat{x})\hat{x}' \text{ si } i+j \geq n$$

Finalement, en utilisant la relation $(*)$ plus haut on a obtenu le:

Théorème 3.2.4 . *La flèche* $\bar{\lambda}^m_{D_F D_L} : O_{D_F}/P^{mn}_{D_F} \to O_{D_L}/P^{mn}_{D_L}$ *définie plus haut est un isomorphisme d'anneaux.*

3) Bijections formelles

JUSTIFICATION

Prenons le cas le plus simple du groupe linéaire sur deux corps locaux proches F et L. Ce cas a déjà été traité par Lemaire qui a montré comment on peut trouver une bijection entre une certaine famille de sous-ensembles ouverts et compacts de $GL_n(F)$ et une certaine famille de sous-ensembles ouverts et compacts de $GL_n(L)$ et les implications qu'a cette bijection pour les théories des représentations des deux groupes. Supposons maintenant qu'on s'est donné un élément d'un de ces sous-ensembles de $GL_n(F)$ et un élément du sous-ensemble de $GL_n(L)$ correspondant et qu'on veuille comparer leurs polynômes caractéristiques qui sont, certes, à coefficients dans des corps différents, mais proches. C'est un problème très concret si on se représente les deux éléments comme des matrices et on sait comparer les éléments de ces matrices. Seulement, la façon abstraite dont on définit les bijections entre des objets attachés à $GL_n(F)$ et $GL_n(L)$ respectivement ne le permet pas. On va alors définir ici des *bijections formelles* (formelles parce qu'elles ne respectent pas les opérations) qui nous permettront de traiter ce genre de situation concrète.

a) Les corps locaux proches

Soit F un corps local non archimédien. On choisit un système de représentants S_F de O_F/P_F dans O_F.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, L un corps m-proche de F et $(\pi_F; \pi_L; \bar{\lambda}^m_{FL})$ le triplet associé à ces deux corps m-proches comme dans la section 2.1. Pour tout $x \in S_F$ on choisit un représentant $y(x)$ dans O_L de l'image par $\bar{\lambda}^m_{FL}$ (dans O_L/P^m_L) de la classe de x dans O_F/P^m_F. L'ensemble $S_L = \{y(x) : x \in S_F\}$ est un système de représentants de O_L/P^m_L dans O_L. Pour simplifier les calculs, on impose la condition suivante: 0_F et 1_F font partie de S_F, et on a $y(0_F) = 0_L$ et $y(1_F) = 1_L$.

On note λ^m_{FL} la bijection de S_F sur S_L qui envoie x sur $y(x)$. Si on se représente les éléments de F et de L par des séries à l'aide des uniformisantes π_F et π_L et des systèmes de représentants S_F et S_L respectivement, on obtient une bijection de F dans L qui prolonge λ^m_{FL} —et pour laquelle on utilisera donc la même notation— donnée par:

$$\lambda^m_{FL}\left(\sum_{j=j_0}^{\infty} s_j \pi_F^j\right) = \sum_{j=j_0}^{\infty} \lambda^m_{FL}(s_j)\pi_L^j.$$

La bijection λ^m_{FL} induit une bijection (bien définie) de O_F/P^m_F sur O_L/P^m_L et cette bijection n'est autre que l'isomorphisme $\bar{\lambda}^m_{FL}$. On appelle λ^m_{FL} une *bijection formelle.* Notons les propriétés suivantes qui sont immédiates:

PROPRIÉTÉS

1) $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall x \in F$, $\lambda^m_{FL}(\pi^i_F x) = \pi^i_L \lambda^m_{FL}(x)$,
2) $\forall x \in F$, $v_L(\lambda^m_{FL}(x)) = v_F(x)$.

b) Les extensions non ramifiées

Soient F et L comme plus haut, E une extension non ramifiée de F de degré n et K une extension non ramifiée de L de degré n. Les corps E et K étant m-proches par le théorème 3.2.3b) on peut bien entendu définir une bijection formelle entre E et K comme plus haut en oubliant complètement les corps F et L. Mais, pour définir une bijection formelle entre deux algèbres à division sur F et L respectivement, bijection qui ait une certaine propriété utile par la suite, on définit une bijection formelle entre E et K de la façon suivante : au lieu de partir comme dans la section **3a)** avec un système de représentants S_E *quelconque* de O_E/P_E dans O_E, et une application *quelconque* entre S_E et S_K, on fixe un isomorphisme $\lambda^m_{EK} : k_E \simeq k_K$ compatible avec $\bar{\lambda}^m_{FL} : k_F \simeq k_L$ et on impose que

- S_E soit formé de 0 et de toutes les racines du polynôme $P_E = X^{l-1} - 1 \in F[X]$,
- S_K soit formé de 0 et de toutes les racines du polynôme $P_K = X^{l-1} - 1 \in L[X]$,
- la bijection λ^m_{EK} entre S_E et S_K soit donnée par l'application suivante : si y est une racine de P_E, et $\bar{y}$ est l'image de y dans k_E, alors $\lambda^m_{EK}(y) = z$ où z est l'unique racine de P_K qui se trouve au-dessus de $\bar{\lambda}^m_{EK}(\bar{y}) \in k_K$.

C'est à partir de ce choix (qui est, on fait la remarque, compatible avec la condition $y(0_F) = 0_L$ et $y(1_F) = 1_L$) qu'on étend l'application λ^m_{EK} en une bijection $\lambda^m_{EK} : E \simeq K$ comme dans la section **3a)**.

On obtient ainsi une bijection qui a la propriété d'être compatible avec l'action des éléments du groupe de Galois $Gal(E/F)$. En effet, quel que soit $\sigma \in Gal(E/F)$ on vérifie facilement que, pour tout $x \in E$,

$$(**) \qquad \lambda^m_{EK}(\sigma(x)) = g_{E/F,K/L}(\sigma)(\lambda^m_{EK}(x)).$$

L'application λ^m_{EK} est une bijection formelle entre les corps locaux E et K. Elle induit un isomorphisme $\bar{\lambda}^m_{EK} : O_{mE} \simeq O_{mK}$.

c) Les algèbres à division

Soient F, E, D_F et L, K, D_L comme dans **1b)**. On suppose qu'on a construit une bijection formelle $\lambda^m_{FL} : F \simeq L$ et $\lambda^m_{EK} : E \simeq K$ comme plus haut. On construit une bijection formelle entre D_F et D_L de la façon (naturelle) suivante : on pose

$$\lambda^m_{D_F D_L}(\sum_{i=0}^{n-1} \pi^i_{D_F}\alpha_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi^i_{D_L}\lambda^m_{EK}(\alpha_i) \text{ pour tout } n\text{-uplet}\{\alpha_0;\alpha_1 ... \alpha_{n-1}\} \in E^n.$$

La bijection $\lambda^m_{D_F D_L}$ induit une bijection (bien définie) de $O_{D_F}/P^{mn}_{D_F}$ sur $O_{D_L}/P^{mn}_{D_L}$ et cette bijection est l'isomorphisme $\bar{\lambda}^m_{D_F D_L}$.

PROPRIÉTÉS
1) $\forall x \in D_F$, $v_{D_L}(\lambda^m_{FL}(x)) = v_{D_F}(x)$,
2) $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall x \in D_F$, $\lambda^m_{D_F D_L}(\pi^i_{D_F} x) = \pi^i_{D_L} \lambda^m_{D_F D_L}(x)$,
3) $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall x \in D_F$, $\lambda^m_{D_F D_L}(x \pi^i_{D_F}) = \lambda^m_{D_F D_L}(x) \pi^i_{D_L}$.

Les propriétés 1) et 2) sont évidentes, seule la propriété 3) pose un petit problème. Il suffit bien sûr de la montrer pour $x \in E$. On sait que si $x \in E$ alors $x\pi^i_{D_F} = \pi^i_{D_F}\sigma^i_E(x)$. Il suffit donc de démontrer que pour tout $x \in E$ on a $\lambda^m_{EK}(\sigma^i_E(x)) = \sigma^i_K(\lambda^m_{EK}(x))$. Mais c'est la relation (**) (et c'était justement pour avoir cette propriété 3) qu'on a choisi λ^m_{EK} comme dans **2b)**).

d) Les matrices
Si F, D_F et L, D_L sont comme plus haut, la bijection formelle entre F et L s'étend de façon naturelle en une bijection entre F^n et L^n. Si U est un F-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base et V est un L-espace vectoriel de dimension n muni d'une base, une bijection formelle entre F et L s'étend "composante par composante" à une bijection entre U et V. C'est pareil pour des espaces vectoriels à droite ou à gauche sur D_F et D_L. En particulier ça vaut pour les espaces de matrices $M_n(F)$ et $M_n(L)$ et aussi pour $M_r(D_F)$ et $M_r(D_L)$. En général, on notera λ^m_{FL} la bijection formelle donnée entre F et L, et ζ^m_{FL} la bijection induite entre $M_n(F)$ et $M_n(L)$. C'est parce que l'application ζ^m_{FL} jouera par rapport à $\bar{\zeta}^m_{FL}$ (voir chapitre 2) un rôle similaire, quoi que moins parfait, au rôle que joue l'application λ^m_{FL} par rapport à $\bar{\lambda}^m_{FL}$. Pareillement, la bijection formelle entre $M_r(D_F)$ et $M_r(D_L)$ induite par $\lambda^m_{D_F D_L}$ sera notée $\zeta^m_{D_F D_L}$.

4) La construction

Soient F, E, D_F, L, K, D_L comme plus haut et soit $r \in \mathbb{N}^*$. On se propose d'étudier les ressemblances entre les groupes $G'_F = GL_r(D_F)$ et $G'_L = GL_r(D_L)$. On va suivre le chemin indiqué par Kazhdan dans [Ka]. On pose $K_F = GL_r(O_{D_F})$, $K_L = GL_r(O_{D_L})$ et, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, on note K^l_F le noyau de la projection $K_F \to GL_r(O_{D_F}/P^{ln}_{D_F})$ et K^l_L le noyau de la projection $K_L \to GL_r(O_{D_L}/P^{ln}_{D_L})$. Pour tout l, K^l_F est un sous-groupe distingué de K_F. C'est aussi le groupe $Id + M_r(P^{ln}_{D_F})$.

Notation : Si $g = (g_{ij}) \in M_r(D_F)$ alors on note $v_F(g)$ le minimum des valuations en tant qu'éléments de D_F des coefficients g_{ij} de g. De même sur L.

Maintenant, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, si F et L sont l-proches, on construit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\bar{\zeta}^l_{D_F D_L} : H(G'_F; K^l_F) \simeq H(G'_L; K^l_L).$$

Cet isomorphisme sera dépendant du triplet de l-proximité $(\lambda^m_{D_F D_L}; \pi_{D_F}; \pi_{D_L})$ déduit du triplet de l-proximité fixé pour F et L comme on l'a expliqué plus haut, dans **1b)**.

Posons

$$\mathcal{A}_F = \{A = (a_{ij})_{i,j} \in GL_r(D_F) : a_{ij} = \delta_{ij}\pi^{a_i}_{D_F},\ a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_r\}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kroneker.

Lemme 3.2.5 . *On a*

$$G'_F = \coprod_{A \in \mathcal{A}} K_F A K_F.$$

Démonstration. Voir [Sa], page 43.

Soit $l \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{A}_F$. Comme K^l_F est un sous-groupe de K_F, il existe un sous-ensemble X de $K_F \times K_F$ tel que

$$K_F A K_F = \coprod_{(B;C) \in X} K^l_F B A C^{-1} K^l_F.$$

Posons

$$\mathbf{T}_{F,l} = GL_r(O_{D_F}/P^{ln}_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F}/P^{ln}_{D_F}).$$

Si $(B;C) \in K_F \times K_F$, alors $K^l_F B A C^{-1} K^l_F$ ne dépend que de la classe $(\hat{B};\hat{C})$ de $(B;C)$ dans $\mathbf{T}_{F,l}$. On peut donc définir sans ambiguité $K^l_F \hat{B} A \hat{C}^{-1} K^l_F$ pour tout $(\hat{B};\hat{C}) \in \mathbf{T}_{F,l}$. Notons maintenant $\mathbf{H}_{F,l,A}$ l'ensemble des couples $(\hat{B};\hat{C}) \in \mathbf{T}_{F,l}$ tels qu'il existe un représentant B de $\hat{B}$ dans $GL_r(O_{D_F})$ et un représentant C de $\hat{C}$ dans $GL_r(O_{D_F})$ tel qu'on ait $BA = AC$. En écrivant cette relation $BAC^{-1} = A$ on vérifie que $\mathbf{H}_{F,l,A}$ est un sous-groupe de $\mathbf{T}_{F,l}$. Posons enfin

$$\tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A} = \mathbf{T}_{F,l}/\mathbf{H}_{F,l,A}.$$

Lemme 3.2.6 . *a) Pour tout $(\hat{B};\hat{C}) \in \mathbf{T}_{F,l}$, l'ensemble $K^l_F \hat{B} A \hat{C}^{-1} K^l_F$ ne dépend que de la classe $(\tilde{B};\tilde{C})$ de $(\hat{B};\hat{C})$ dans $\tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}$; on le note $K^l_F \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^l_F$.*

b) On a

$$K_F A K_F = \coprod_{(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}} K^l_F \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^l_F.$$

Démonstration. a) Soient $(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}$ et $(\hat{B};\hat{C}) \in \mathbf{T}_{F,l}$, $(\hat{B}';\hat{C}') \in \mathbf{T}_{F,l}$ deux représentants de $(\tilde{B};\tilde{C})$. Il existe donc $(\hat{U};\hat{V}) \in \mathbf{H}_{F,l,A}$ tel que $\hat{B}' = \hat{B}\hat{U}$ et $\hat{C}' = \hat{C}\hat{V}$. Soit $(B;C)$ un représentant de $(\hat{B};\hat{C})$ dans $GL_r(O_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F})$ et U et V des représentants de $\hat{U}$ et de $\hat{V}$ dans $GL_r(O_{D_F})$ qui vérifient $UA = AV$. On a donc $K^l_F\hat{B}'A\hat{C}'^{-1}K^l_F = K^l_F\hat{B}\hat{U}A\hat{V}^{-1}\hat{C}^{-1}K^l_F = K^l_FBUAV^{-1}C^{-1}K^l_F = K^l_FBAC^{-1}K^l_F = K^l_F\hat{B}A\hat{C}^{-1}K^l_F$.

b) On a $K_FAK_F = \bigcup_{(B;C)\in GL_r(O_{D_F})\times GL_r(O_{D_F})} K^l_FBAC^{-1}K^l_F$ et pour tout $(B;C) \in GL_r(O_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F})$ on a $K^l_FBAC^{-1}K^l_F = K^l_F\tilde{B}A\tilde{C}^{-1}K^l_F$. Donc, $K_FAK_F = \bigcup_{(\tilde{B};\tilde{C})\in\tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}} K^l_F\tilde{B}A\tilde{C}^{-1}K^l_F$. Il suffit de montrer que la réunion est bien disjointe. Soient $(\tilde{B};\tilde{C})$ et $(\tilde{B}';\tilde{C}')$ deux éléments de $\tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}$. Alors $K^l_F\tilde{B}A\tilde{C}^{-1}K^l_F$ et $K^l_F\tilde{B}'A\tilde{C}'^{-1}K^l_F$ sont ou disjointes ou égales. Supposons que

$$K^l_F\tilde{B}A\tilde{C}^{-1}K^l_F = K^l_F\tilde{B}'A\tilde{C}'^{-1}K^l_F.$$

Comme K^l_F est distingué dans K_F on a

$$K^l_F\tilde{B}A\tilde{C}^{-1}K^l_F = \tilde{B}K^l_FAK^l_F\tilde{C}^{-1}$$

et

$$K^l_F\tilde{B}'A\tilde{C}'^{-1}K^l_F = \tilde{B}'K^l_FAK^l_F\tilde{C}'^{-1}.$$

En posant $\tilde{X} = \tilde{B}'^{-1}\tilde{B}$ et $\tilde{Y} = \tilde{C}'^{-1}\tilde{C}$ et en réutilisant le fait que K^l_F est distingué dans K_F, on obtient

$$K^l_F\tilde{X}A\tilde{Y}^{-1}K^l_F = K^l_FAK^l_F.$$

Il suffit donc de montrer que dans ce cas on a forcément $\tilde{X} = \tilde{Y} = \tilde{1}$. C'est pareil que de montrer que, si $(\hat{X};\hat{Y})$ est dans $\mathbf{T}_{F,l}$ et vérifie $K^l_F\hat{X}A\hat{Y}^{-1}K^l_F = K^l_FAK^l_F$, alors $(\hat{X};\hat{Y})$ a un représentant $(X;Y)$ dans $GL_r(O_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F})$ tel que $XA = AY$. Montrons que cette assertion est vraie : $K^l_F\hat{X}A\hat{Y}^{-1}K^l_F = K^l_FAK^l_F$ implique qu'il existe un représentant $(X';Y')$ de $(\hat{X};\hat{Y})$ dans $GL_r(O_{D_F})\times GL_r(O_{D_F})$ et deux éléments k_1 et k_2 de K^l_F tels qu'on ait $X'AY'^{-1} = k_1Ak_2$. Mais alors il suffit de prendre $X = k_1^{-1}X'$ et $Y = k_2Y'$, car l'appartenance de k_1 et k_2 à $K^l_F = Id + M_r(P^{ln}_{D_F})$ nous garantit $\hat{X} = \hat{X}'$ et $\hat{Y} = \hat{Y}'$ et avec ce choix on a bien $XA = AY$.

Maintenant on va traiter des corps F et L à la fois. Les objets définis plus haut sur F se définissent de même sur L et c'est l'indice F ou L qui indique à tout moment de quel corps il s'agit. Les résultats plus haut sont évidemment valables aussi sur L.

On se rappelle l'isomorphisme $\bar{\lambda}^l_{D_FD_L} : O_{D_F}/P^{ln}_{D_F} \simeq O_{D_F}/P^{ln}_{D_F}$. Il induit un isomorphisme $\bar{\zeta}^l_{D_FD_L} : \mathbf{T}_{F,l} \simeq \mathbf{T}_{L,l}$.

On se rappelle également la bijection formelle $\zeta^l_{D_FD_L} : M_r(D_F) \simeq M_r(D_L)$. Elle induit une bijection $\zeta^l_{D_FD_L} : \mathcal{A}_F \simeq \mathcal{A}_L$.

Lemme 3.2.7 . *Pour tout $A \in \mathcal{A}_F$, l'isomorphisme $\bar{\zeta}^l_{D_FD_L} : \mathbf{T}_{F,l} \simeq \mathbf{T}_{L,l}$ induit un isomorphisme $\bar{\zeta}^l_{D_FD_L} : \mathbf{H}_{F,l,A} \simeq \mathbf{H}_{L,l,\zeta^l_{D_FD_L}(A)}$ et par conséquent une bijection $\bar{\zeta}^l_{D_FD_L} : \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A} \simeq \tilde{\mathbf{T}}_{L,l,\zeta^l_{D_FD_L}(A)}$.*

Démonstration. Supposons qu'A est la matrice $diag(\pi^{a_1}_{D_F}, \pi^{a_2}_{D_F} ... \pi^{a_r}_{D_F})$.
Soit $(\hat{B}; \hat{C}) \in \mathbf{H}_{F,l,A}$. Il existe donc un représentant $(B; C)$ de $(\hat{B}; \hat{C})$ dans $GL_r(O_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F})$ tel que

$$(*) \qquad BA = AC$$

Écrivons $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$. La relation $(*)$ se traduit par :

$$\forall i, j, \; b_{ij}\pi^{a_j}_{D_F} = \pi^{a_i}_{D_F} c_{ij}$$

Par les propriétés 2) et 3) de la bijection formelle $\bar{\zeta}^l_{D_FD_L}$ on a alors :

$$\forall i, j, \; \zeta^l_{D_FD_L}(b_{ij})\pi^{a_j}_{D_L} = \pi^{a_i}_{D_L}\zeta^l_{D_FD_L}(c_{ij})$$

et cette relation implique $\zeta^l_{D_FD_L}(B)\zeta^l_{D_FD_L}(A) = \zeta^l_{D_FD_L}(A)\zeta^l_{D_FD_L}(C)$ et par conséquent $\left(\bar{\zeta}^l_{D_FD_L}(\hat{B}); \bar{\zeta}^l_{D_FD_L}(\hat{C})\right) \in \mathbf{H}_{L,l,\zeta^l_{D_FD_L}(A)}$. Donc $\bar{\zeta}^l_{D_FD_L}(\mathbf{H}_{F,l,A}) \subset \mathbf{H}_{L,l,\zeta^l_{D_FD_L}(A)}$.
Comme les rôles de F et L sont symétriques il est évident que ce résultat est suffisant pour en déduire que $\bar{\zeta}^l_{D_FD_L} : \mathbf{H}_{F,l,A} \to \mathbf{H}_{L,l,\zeta^l_{D_FD_L}(A)}$ est un isomorphisme, par exemple parce qu'on peut lui construire une application réciproque en partant de $(\bar{\zeta}^l_{D_FD_L})^{-1} : \mathbf{T}_{L,l} \simeq \mathbf{T}_{F,l}$.

D'après les lemmes 3.2.6 et 3.2.7, si pour tout ensemble W on note $\mathbf{1}_W$ la fonction caractéristique de W, alors l'ensemble :

$$\{\mathbf{1}_{K^l_F\tilde{B}A\tilde{C}^{-1}K^l_F} : A \in \mathcal{A}_F, (\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}\}$$

est une base de l'espace vectoriel $H(G'_F; K^l_F)$. Soit

$$\bar{\zeta}^l_{D_FD_L} : H(G'_F; K^l_F) \to H(G'_L; K^l_L)$$

l'application linéaire déterminée par

$$\bar{\zeta}^l_{D_FD_L}(\mathbf{1}_{K^l_F\tilde{B}A\tilde{C}^{-1}K^l_F}) = \mathbf{1}_{K^l_L\left(\bar{\zeta}^l_{D_FD_L}(\tilde{B})\right)\left(\zeta^l_{D_FD_L}(A)\right)\left(\bar{\zeta}^l_{D_FD_L}(\tilde{C})\right)^{-1}K^l_L}.$$

Théorème 3.2.8 . *L'application $\bar{\zeta}^l_{D_FD_L}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Démonstration. C'est évident par les lemmes 3.2.6 et 3.2.7.

Remarque 1. Soit l un entier strictement positif. La surjection canonique

$$O_{D_F}/P_{D_F}^{(l+1)n} \to O_{D_F}/P_{D_F}^{ln}$$

induit une surjection canonique:

$$\mathbf{T}_{F,l+1} \to \mathbf{T}_{F,l}$$

dont la restriction induit une surjection

$$\mathbf{H}_{F,l+1,A} \to \mathbf{H}_{F,l,A}.$$

Finalement, on obtient une surjection canonique

$$\tilde{\mathbf{T}}_{F,l+1,A} \to \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}.$$

Supposons que F et L sont $(l+1)$-proches. De la même façon, on a une surjection canonique

$$\tilde{\mathbf{T}}_{L,l+1,\zeta_{D_F D_L}^{l+1}(A)} \to \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,\zeta_{D_F D_L}^{l+1}(A)}.$$

Il est très facile à vérifier que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathbf{T}}_{L,l+1,\zeta_{D_F D_L}^{l+1}(A)} \arrow[r] & \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,\zeta_{D_F D_L}^{l+1}(A)} \\
\tilde{\mathbf{T}}_{F,l+1,A} \arrow[u, "\bar{\zeta}_{D_F D_L}^{l+1}"] \arrow[r] & \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A} \arrow[u, "\bar{\zeta}_{D_F D_L}^{l}"']
\end{tikzcd}$$

où on aura tenu compte du fait que $\zeta_{D_F D_L}^{l+1}(A) = \zeta_{D_F D_L}^{l}(A)$ (par les définitions mêmes) est commutative. Cela implique que l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\bar{\zeta}_{D_F D_L}^{l} : H(G'_F; K_F^l) \simeq H(G'_L; K_L^l)$$

est induit par la restriction de l'isomorphisme

$$\bar{\zeta}_{D_F D_L}^{l+1} : H(G'_F; K_F^{l+1}) \simeq H(G'_L; K_L^{l+1}).$$

Remarque 2. Si W_F est un ensemble ouvert et compact de G'_F invariant par K_F^l et L est un corps l-proche de F, la construction de l'isomorphisme $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^{l}$ implique que l'image de la fonction caractéristique de W_F est la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert compact W_L de G'_L qui est invariant par K_L^l. Le calcul de volumes qu'on fait dans la démonstration du lemme 3.2.11 plus bas montre qu'on a alors:

$$vol(W_F) = vol(W_L).$$

Théorème 3.2.9 . *Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Il existe un entier m tel que, si les corps F et L sont m-proches, alors l'isomorphisme d'espaces vectoriels $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L} : H(G'_F; K^l_F) \simeq H(G'_L; K^l_L)$ est un isomorphisme d'algèbres.*

Démonstration. On utilise la démarche de Kazhdan en précisant certains détails :

Lemme 3.2.10 . *Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{A}_F$ et soit*

$$G'_F(\mathcal{C}) = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} K_F A K_F.$$

(a) Il existe $m > l$ qui dépend de $\mathcal{C}$ tel qu'on ait, pour tout $g \in G'_F(\mathcal{C})$, $gK^m_F g^{-1} \subset K^l_F$.

(b) Supposons que L est m-proche de F. Alors pour tout $f_1,\ f_2 \in H(G'_F; K^l_F)$ à support dans $G'_F(\mathcal{C})$ on a

$$\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(f_1 * f_2) = \bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(f_1) * \bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(f_2).$$

Démonstration. (a) Il faut trouver un m tel qu'on ait $K^m_F \subset \bigcap_{g \in G'_F(\mathcal{C})} g^{-1} K^l_F g$. Il suffit de prendre

$$m \geq l + \sup{}_{g \in G'_F(\mathcal{C})} v_F(g^{-1}) + \sup{}_{g \in G'_F(\mathcal{C})} v_F(g) = l + \max{}_{A \in \mathcal{C}} v_F(A^{-1}) + \max{}_{A \in \mathcal{C}} v_F(A).$$

(b) Il suffit de montrer ce résultat pour $f_1 = \mathbf{1}_{K^l_F g K^l_F}$ et $f_2 = \mathbf{1}_{K^l_F g' K^l_F}$, avec $g, g' \in G'_F(\mathcal{C})$. En revenant à la définition du produit de convolution on trouve :

$$\mathbf{1}_{K^l_F g K^l_F} * \mathbf{1}_{K^l_F g' K^l_F}(x) = vol\big(K^l_F g K^l_F \cap K^l_F g' K^l_F x\big).$$

Par le point (a), cette intersection est bi-invariante par K^m_F et on a :

$$\mathbf{1}_{K^l_F g K^l_F} * \mathbf{1}_{K^l_F g' K^l_F} =$$

$$= \sum_{A \in \mathcal{A}_F} \sum_{(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{\mathrm{T}}_{F,l,A}} vol\big(K^l_F g K^l_F \cap K^l_F g' K^l_F \tilde{B} A \tilde{C}\big) \mathbf{1}_{K^m_F \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^m_F}.$$

Les corps F et L étant m-proches, $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}$ est bien définie. D'après la formule plus haut qui vaut aussi bien sur L que sur F, et la remarque 2 sur les volumes,

$\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f_1 * f_2) = \bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f_1) * \bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f_2)$. Le résultat de (b) est alors une conséquence du fait que, si $m \geq l$, alors $\zeta^l_{D_F D_L}$ est induite par la restriction de $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}$ (remarque 1 plus haut).

Pour tout $g \in G'_F$ on pose $h(g) = (vol(K^l_F))^{-1} 1_{K^l_F g K^l_F}$. On a le:

Lemme 3.2.11 . *(a) Pour tout $A, A' \in \mathcal{A}_F$ on a $h(A) * h(A') = h(AA')$.*

(b) Pour tout $B, C \in GL_r(O_{D_F}) \times GL_r(O_{D_F})$ on a $h(B) * h(A) * h(C) = h(BAC)$.

Démonstration. (a) Par la proposition 2.2, chapitre 3 de [Ho], il suffit de démontrer qu'on a

$$vol(K^l_F A K^l_F) vol(K^l_F A' K^l_F) = vol(K^l_F) vol(K^l_F A A' K^l_F).$$

Montrons que, si $A = diag(\pi^{a_1}_{D_F}; \pi^{a_2}_{D_F} ... \pi^{a_r}_{D_F})$ alors

$$vol(K^l_F A K^l_F) = q^{d \sum_{i<j} a_j - a_i} vol(K^l_F).$$

Ça impliquera le résultat voulu. On a

$$vol(K^l_F A K^l_F) = card\big(K^l_F / (A K^l_F A^{-1} \cap K^l_F)\big) vol(A K^l_F)$$

$$= card\big(K^l_F / (A K^l_F A^{-1} \cap K^l_F)\big) vol(K^l_F).$$

Il suffit donc de montrer que $card\big(K^l_F / (A K^l_F A^{-1} \cap K^l_F)\big) = q^{d \sum_{i<j} a_j - a_i}$. En fait, on peut montrer que

$$card\big(K^l_F / (A K^l_F A^{-1} \cap K^l_F)\big) = card\big(M_r(P^l_{D_F}) / (A M_r(P^l_{D_F}) A^{-1} \cap M_r(P^l_{D_F})\big)$$

en copiant la démonstration du lemme 1.3.3 de [Le1], page 10, où on aura remplacé les groupes B^l_F par les groupes K^l_F. Maintenant, $A M_r(P^l_{D_F}) A^{-1} \cap M_r(P^l_{D_F})$ est formé des matrices $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq r} \in M_r(P^l_{D_F})$ qui vérifient $v_{D_F}(\pi^{a_i}_D x_{ij} \pi^{-a_j}_D) \geq l$ pour tout $i < j$ (et aussi pour tout $i \geq j$ mais, cette condition est automatiquement vérifiée puisque $X \in M_r(P^l_{D_F})$). Donc les seules conditions sur X sont : $X \in M_r(P^l_{D_F})$ et pour tout $i < j$, $v_{D_F}(x_{ij}) \geq l + a_j - a_i$. Le cardinal du groupe $M_r(P^l_{D_F}) / (A M_r(P^l_{D_F}) A^{-1} \cap M_r(P^l_{D_F})$ est donc effectivement $q^{d \sum_{i<j} a_j - a_i}$ et le point (a) est prouvé.

(b) Par la même proposition de [Ho], il suffit de montrer qu'on a :

$$vol(K^l_F B K^l_F) vol(K^l_F A C K^l_F) = vol(K^l_F) vol(K^l_F B A C K^l_F)$$

et

$$vol(K^l_F A K^l_F) vol(K^l_F C K^l_F) = vol(K^l_F) vol(K^l_F A C K^l_F).$$

C'est une trivialité parce que K_F^l est distingué dans K_F (donc on peut "sortir" B et C) et les volumes sont pris par rapport à une mesure de Haar à droite et à gauche (donc finalement on peut effacer B et C partout où elles apparaissent).

Lemme 3.2.12 . *Pour tout entier* i, $0 \leq i \leq r$, *on pose* $A_i = diag(\pi_{D_F}^{a_1}; \pi_{D_F}^{a_2} ... \pi_{D_F}^{a_r})$ *où pour* $1 \leq j \leq i$, $a_j = 0$ *et pour* $i+1 \leq j \leq r$, $a_j = 1$. *On pose aussi* $A_{-1} = diag(\pi_{D_F}^{-1}; \pi_{D_F}^{-1} ... \pi_{D_F}^{-1})$. *Soit* s_F *un système de représentants de* $GL_r(O_{D_F}/P_{D_F}^{ln})$ *dans* $GL_r(O_{D_F})$. *Alors* $\{h(x) : x \in s_F \cup \{A_{-1}; A_0; A_1 ... A_r\}\}$ *est une famille génératrice de* $H(G'_F; K_F^l)$ *comme* $\mathbb{C}$*-algèbre.*

Démonstration. On a déjà vu que $\{h(BAC) : A \in \mathcal{A}_F, B \in S_F, C \in S_F\}$ était une famille génératrice de $H(G'_F; K_F^l)$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Si $A \in \mathcal{A}_F$, $A = diag(\pi_{D_F}^{a_1}; \pi_{D_F}^{a_2} ... \pi_{D_F}^{a_r})$ alors, si $a_1 \geq 0$, A s'écrit $A = A_0^{a_1} \Pi_{1 \leq i \leq r-1} A_i^{a_{i+1}-a_i} A_r$, et si $a_1 < 0$, A s'écrit $A = A_{-1}^{-a_1} \Pi_{1 \leq i \leq r-1} A_i^{a_{i+1}-a_i}$. Le Lemme 2 implique alors le Lemme 3.

Lemme 3.2.13 . *L'algèbre* $H(G'_F; K_F^l)$ *est de présentation finie.*

Démonstration. Le corollaire 3.4. de [Be] nous dit que $H(G'_F; K_F^l)$ est un module de type fini sur $\mathcal{Z}(G'_F; K_F^l)$ qui est le centre de la catégorie abélienne $Alg(G'_F; K_F^l)$ des représentations algébriques de G'_F admettant un vecteur fixé par K_F^l. Il existe donc un $\mathcal{Z}(G'_F; K_F^l)$-module libre M de rang fini p et un sous-module N de M tel que $H(G'_F; K_F^l) \simeq M/N$ en tant que $\mathcal{Z}(G'_F; K_F^l)$-modules. Soit $\{Y_1, Y_2, ... Y_p\}$ une base de M sur $\mathcal{Z}(G'_F; K_F^l)$. On sait que l'algèbre $\mathcal{Z}(G'_F; K_F^l)$ est à son tour du type $\mathbb{C}[X_1; X_2 ... X_n]/I$ où I est un idéal donné par un nombre fini de relations $R_1, R_2 ... R_u$ entre les X_i. Elle est en particulier noethérienne et donc le module N est de type fini. Le $\mathcal{Z}(G'_F; K_F^l)$-module M/N est donc le module engendré par la famille $\{Y_1, Y_2 ... Y_p\}$ avec un nombre fini de relations $R'_1, R'_2 ... R'_v$ linéaires entre les Y_i. En écrivant encore pour tout $i, j \in \{1, 2 ... p\}$ le produit $Y_i Y_j$ sur la base $\{Y_1, Y_2 ... Y_p\}$ de M on obtient encore une famille finie (de cardinal au plus p^2) de relations $\{R''_1, R''_2 ... R''_w\}$. Alors $H(G'_F; K_F^l)$ est isomorphe à l'algèbre non commutative engendrée sur $\mathbb{C}$ par les $n+p$ variables $X_1, X_2 ... X_n, Y_1, Y_2 ... Y_p$, avec les relations $R_1, R_2 ... R_u, R'_1, R'_2 ... R'_v, R''_1, R''_2, ... R''_w$ et les $n(n-1)/2$ relations qui traduisent le fait que les variables $X_1, X_2 ... X_n$ commutent entre elles. Le lemme est démontré.

Fin de la démonstration du théorème 3.2.9. Nous explicitons la démonstration dont le principe est dû à Kazhdan :

Par le lemme 3.2.13, $H(G'_F; K_F^l)$ est de présentation finie ; c'est donc l'algèbre non commutative engendrée sur $\mathbb{C}$ par un nombre fini de générateurs $g_1, g_2 ... g_n$ avec un nombre fini de relations $R_1, R_2 ... R_u$ qu'on va regarder comme des polynômes non commutatifs en n variables qui s'annulent en $(g_1; g_2 ... g_n)$. Par ailleurs, le lemme 3.2.12 nous fournit une famille finie $\{h_1, h_2...h_p\}$ de générateurs de $H(G'_F; K^l_F)$. Soient $G_i (1 \leq i \leq n)$ les polynômes en p variables qui appliqués à $(h_1; h_2...h_p)$ nous donnent $g_1, g_2...g_n$, et $F_i(1 \leq i \leq p)$ les polynômes en n variables qui appliqués à $(g_1; g_2...g_n)$ nous donnent $h_1, h_2...h_p$. Soit s le plus grand nombre parmi les degrés (totaux) des polynômes

$$R'_1 = R_1\big((G_1; G_2...G_n)\big), R'_2 = R_2\big((G_1; G_2...G_n)\big) \ \ldots \ R'_u = R_u\big((G_1; G_2...G_n)\big)$$

et

$$F'_1 = F_1\big((G_1; G_2...G_n)\big), F'_2 = F_2\big((G_1; G_2...G_n)\big) \ \ldots \ F'_p = F_p\big((G_1; G_2...G_n)\big)$$

et un compact $\mathbf{K}$ suffisamment grand dans G'_F pour qu'il contienne tous les produits de s éléments qui se trouvent dans la réunion des supports de tous les h_i. Soit $\mathcal{C} \in \mathcal{A}_F$ de cardinal fini tel que $\mathbf{K} \subset G'_F(\mathcal{C})$ (voir le lemme 3.2.10). Prenons l'entier m associé à $\mathcal{C}$ comme dans le lemme 3.2.10. Notons $h'_1, h'_2...h'_p$ les images de $h_1, h_2...h_p$ par $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$. Définissons un morphisme d'algèbres $t : \mathbb{C}(g_1, g_2...g_p) \to H(G'_L; K^l_F)$ défini par:

$$t(g_i) = G_i\big((h'_1; h'_2...h'_p)\big)$$

Ce morphisme vérifie $t(R_i\big((g_1, g_2...g_n)\big)) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq u$ par le choix de m relativement aux polynômes $R'_1, R'_2...R'_u$ et par le lemme 3.2.10. Il induit donc un morphisme d'algèbres

$$\bar{t} : H(G'_F; K^l_F) \to H(G'_L; K^l_L),$$

car $H(G'_F; K^l_F)$ est la $\mathbb{C}$-algèbre non commutative engendrée par $g_1, g_2...g_n$ avec les relations traduites par l'annulation des polynômes $R_1, R_2...R_u$ en $(g_1; g_2...g_n)$. Or, ce morphisme d'algèbres vérifie

$$(**) \qquad \bar{t}(h_i) = h'_i$$

pour tout $1 \leq i \leq p$ par le choix de m relatif aux polynômes $F'_1, F'_2...F'_p$ et par le lemme 3.2.10. Comme c'est un morphisme d'algèbres, (**) et les lemmes 3.2.11 et 3.2.12 impliquent que pour tout $A \in \mathcal{A}_F$, pour tout $(\tilde{B}; \tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}$ on a

$$\bar{t}(\mathbf{1}_{K^l_F \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^l_F}) = \mathbf{1}_{K^l_L \left(\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(\tilde{B})\right) \left(\zeta^l_{D_F D_L}(A)\right) \left(\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(\tilde{C})\right)^{-1} K^l_L}.$$

Comme c'est un morphisme d'espaces vectoriels qui coïncide avec $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}$ sur une base de $H(G'_F; K^l_F)$, on a $\bar{t} = \bar{\zeta}^m_{D_F D_L}$, donc $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}$ est un isomorphisme d'algèbres.

Théorème 3.2.14 . *a) L'isomorphisme $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$ induit un isomorphisme, noté toujours $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$, de l'ensemble de classes d'équivalence des représentations lisses irréductibles de G'_F de niveau l sur l'ensemble de classes d'équivalence des représentations lisses irréductibles de G'_L de niveau l.*

b) Si π est une représentation de carré intégrable de G'_F de niveau l, alors $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(\pi)$ est une représentation de carré intégrable (de niveau l) de G'_L.

Remarque. On parle abusivement de $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(\pi)$ alors que $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$ n'est définie que pour les classes d'équivalence. C'est ce qui arrivera parfois aussi par la suite, puisque toutes les propriétés des représentations sont en fait des propriétés des classes d'équivalence.

Démonstration. a) Soit π une représentation irréductible de niveau l de G'_F et notons V_π l'espace de la représentation π. Alors $H(G'_F; K^l_F)$ agit sur $V_\pi^{K^l_F}$ par

$$f(v) = \pi(f)v$$

pour tout $f \in H(G'_F; K^l_F)$ et tout $v \in V_\pi^{K^l_F}$. L'espace $V_\pi^{K^l_F}$ est ainsi muni d'une structure de $H(G'_F; K^l_F)$-module. On note $V_{\pi,H}$ le $H(G'_F; K^l_F)$-module $V_\pi^{K^l_F}$ pour le différentier du $\mathbb{C}$-espace $V_\pi^{K^l_F}$ avec lequel il coïncide ensemblistement. On sait que $V_{\pi,H}$ est un $H(G'_F; K^l_F)$-module non nul irréductible et que $\pi \mapsto V_{\pi,H}$ induit une bijection entre l'ensemble de classes d'équivalence de représentations irréductibles de G'_F de niveau l et l'ensemble de classes d'isomorphie de $H(G'_F; K^l_F)$-modules irréductibles. Maintenant, l'isomorphisme $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L} : H(G'_F; K^l_F) \simeq H(G'_L; K^l_L)$ induit un isomorphisme (noté toujours $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$) entre l'ensemble de classes d'isomorphie de $H(G'_F; K^l_F)$-modules irréductibles et l'ensemble de classes d'isomorphie de $H(G'_L; K^l_L)$-modules irréductibles. Donc l'image par $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$ de la classe d'isomorphie de $V_{\pi,H}$ est une classe d'isomorphie de $H(G'_L; K^l_L)$-modules irréductibles et elle correspond à une classe d'équivalence C_L de représentations irréductibles de niveau l de G'_L. Si C_F est la classe d'équivalence de la représentation π, on pose $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}(C_F) = C_L$. On obtient ainsi la bijection voulue. Remarquons que, si $\sigma \in C_L$, il y a trivialement isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels entre $V_\pi^{K^l_F}$ et $V_\sigma^{K^l_L}$, puisque l'isomorphisme $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L} : H(G'_F; K^l_F) \simeq H(G'_L; K^l_L)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres.

b) Supposons maintenant que π est de carré intégrable. Soit σ une représentation (irréductible et de niveau l) se trouvant dans l'image par $\bar{\zeta}^l_{D_F D_L}$ de la classe d'équivalence de π. Comme on l'a dit plus haut, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$f : V_\pi^{K^l_F} \simeq V_\sigma^{K^l_L}.$$

L'isomorphisme f induit un isomorphisme entre les duaux:

$$f' : V_\pi'^{K^l_F} \simeq V_\sigma'^{K^l_L}.$$

Soient $v \in V_\pi^{K^l_F} \backslash \{0\}$ et $v' \in V_\pi'^{K^l_F} \backslash \{0\}$. Considérons le coefficient de π

$$h_\pi : G'_F \to \mathbb{C}$$

défini par

$$g \mapsto v'(\pi(g)(v)).$$

Pour tout $g \in G'_F$, π est constant sur $K^l_F g K^l_F$ égal à $vol(K^l_F g K^l_F)^{-1}\pi(1_{K^l_F g K^l_F})$. La représentation π étant de carré intégrable, $|h_F|^2$ est trivial sur Z et intégrable sur G'_F/Z. Exprimons cette propriété à partir de la décomposition

$$G'_F = \coprod_{A \in \mathcal{A}_F} \coprod_{(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}} K^l_F \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^l_F$$

en étudiant l'action par multiplication de Z là-dessus. Notons $\mathcal{A}^0_F$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_F$ formé de matrices $A = diag(\pi^{a_1}_{D_F}; \pi^{a_2}_{D_F}; ...\pi^{a_r}_{D_F})$ telles que $a_1 \in \{0; 1 ... d-1\}$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{A}^0_F$ notons $\mathcal{A}_F(A)$ l'ensemble des matrices obtenues à partir de A par multiplication avec une puissance de $\pi_F = \pi^d_{D_F}$. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{A}_F$. On a

$$\mathcal{A}_F = \coprod_{A \in \mathcal{A}^0_F} \mathcal{A}_F(A).$$

Montrons que, pour tout $A \in \mathcal{A}^0_F$, l'ensemble $\coprod_{A \in \mathcal{A}_F(A)} \coprod_{(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}} K^l_F \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^l_F$ est stable sous l'action de Z par multiplication et étudions cette action. Identifions Z avec F^*. Alors, si z est un élément de Z, z s'écrit de façon unique $z = \pi^\alpha_F x$ où x est un élément de O^*_F. D'autre part, on a un isomorphisme

$$O^*_F/(1_F + P^l_F) \simeq (O_F/P^l_F)^*.$$

On peut ainsi décomposer l'action de Z sur $\coprod_{A \in \mathcal{A}_F(A)} \coprod_{(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}} K^l_F \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^l_F$ puisque :

- si $z = \pi^\alpha_F$, alors $zK^l_F \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^l_F = K^l_F \tilde{B} A' \tilde{C}^{-1} K^l_F$ où $A' = zA \in \mathcal{A}_F(A)$, et une simple vérification montre qu'on a dans ce cas $\tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A} = \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A'}$
- si $z \in O^*_F$, alors :
  - si $z \in 1_F + P^l_F$, on a $zK^l_F \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^l_F = K^l_F \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^l_F$, tandis que
  - si $z \notin 1_F + P^l_F$, $zK^l_F \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^l_F = K^l_F \tilde{B}' A \tilde{C}'^{-1} K^l_F$, où $(\tilde{B}'; \tilde{C}')$ est un élément de $\tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}$ différent de $(\tilde{B}; \tilde{C})$ et qui ne dépend que de la classe de z modulo $1_F + P^l_F$.

Finalement, dire que $|h_\pi|^2$ est intégrable sur G'_F/Z revient à dire que la somme

$$\sum_{A \in \mathcal{A}^0_F} \Big(\sum_{(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{F,l,A}} \big(card((O_F/P^l_F)^*)\big)^{-1}$$
$$vol(K^l_F \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K^l_F; dg)\big(vol(1_F + P^l_F; dz)\big)^{-1} |h_\pi(\tilde{B} A \tilde{C}^{-1})|^2\Big) \qquad (3.1)$$

est convergente.

Maintenant, $f(v)$ est un élément de $V_\sigma^{K^l_L} \backslash \{0\}$ et $f'(v')$ est un élément de $V'^{K^l_L}_\sigma \backslash \{0\}$, donc l'application

$$h_\sigma : G'_L \to \mathbb{C}$$

définie par

$$g \mapsto f(v')\big(\sigma(g)(f(v))\big)$$

est un coefficient de σ. Pour tout $g \in G'_L$, σ est constant sur $K^l_L g K^l_L$ égal à $vol(K^l_L g K^l_L)^{-1}\sigma(\mathbf{1}_{K^l_L g K^l_L})$. Donc h_σ est de carré intégrable modulo le centre sur G'_L si et seulement si la somme

$$\sum_{A \in \mathcal{A}^0_F} \Big(\sum_{(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{\mathbf{T}}_{L,l,\zeta^l_{D_F D_L}(A)}} \big(card((O_L/P^l_L)^*)\big)^{-1}$$

$$vol(K^l_L \tilde{B} \zeta^l_{D_F D_L}(A) \tilde{C}^{-1} K^l_L; dg)\big(vol(1_L + P^l_L; dz)\big)^{-1} |h_\sigma(\tilde{B}\zeta^l_{D_F D_L}(A)\tilde{C}^{-1})|^2\Big)$$

est convergente, où on a tenu compte du fait que $\zeta^l_{D_F D_L}$ réalise une bijection de $\mathcal{A}^0_F$ sur $\mathcal{A}^0_L$. Mais cette somme correspond terme pour terme à la somme 3.1 puisque

- les volumes des sous-ensembles de G'_F et G'_L qui se correspondent sont égaux pour les mesures fixées sur G'_F et G'_L,

- les volumes des sous-ensembles des centres de G'_F et G'_L qui se correspondent sont égaux pour les mesures fixées sur les centres F^* de G'_F et L^* de G'_L,

- $card((O_F/P^l_F)^*) = card((O_L/P^l_L)^*)$ parce que les anneaux O_F/P^l_F et O_L/P^l_L sont isomorphes,

- par construction de l'isomorphisme f, pour tout $v \in V_\pi^{K^l_F}$, $f(\pi(\mathbf{1}_{K^l_F g K^l_F})(v)) = \sigma(\mathbf{1}_{K^l_L g K^l_L})(f(v))$.

On vient de montrer qu'un coefficient non nul de σ est de carré intégrable. Donc σ est de carré intégrable.

3.3 Correspondance $GL_n(F) \leftrightarrow GL_r(D)$ en caractéristique non nulle

1) Introduction

Soit F un corps local non archimédien *de caractéristique non nulle* et D_F une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On pose $n = dr$ et $G_F = GL_n(F)$ et $G'_F = GL_r(D_F)$. On veut trouver une correspondance entre les représentations essentiellement de carré intégrable de G_F et les représentations essentiellement de carré intégrable de G'_F comme en caractéristique nulle. Le fait essentiel pour lequel la démonstration ne marche pas comme en caractéristique nulle est qu'on n'a pas l'orthogonalité des caractères sur G'_F. Je ne pense pas qu'on puisse l'obtenir directement comme sur G_F, même si on a construit dans la section précédente une situation proche en caractéristique nulle, parce qu'on ne sait pas "relever" les intégrales orbitales, et surout parce qu'on n'a pas l'intégrabilité locale des caractères pour les représentations de G'_F. C'est pourquoi on va étudier plutôt G_F et G'_F en parallèle. Plus précisement on aura à tout instant en tête le carré :

$$\begin{array}{ccc} G_L & \xrightarrow{1} & G'_L \\ {\scriptstyle 2}\uparrow & & {\scriptstyle 2'}\uparrow \\ G_F & \cdots\cdots & G'_F \end{array}$$

où L est un corps proche de F qui est de caractéristique nulle. La flèche 1 est la correspondance (qu'on va noter $\mathbf{C}_L$) déjà établie en caractéristique nulle, les flèches 2 et 2' sont les applications du type $\bar{\zeta}^m_{FL}$ et $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}$, et on voudrait définir une correspondance à la place où on a mis sur le dessein des pointillés. Les petits ennuis viennent du fait que les correspondances horizontales et verticales sont de natures très différentes : pour pouvoir user de 2 et 2' on doit être sûr que les objets qu'on veut transférer sont constants sur des ouverts assez "gros", alors que pour la flèche 1 on ne sait pas en quelle mesure elle conserve la propriété "être constant sur un ouvert assez gros" (que ce soit pour des fonctions, pour leurs intégrales orbitales ou pour les caractères de représentations). L'étude de ce problème est fait dans les préliminaires, et est assez laborieux et calculatoire. L'autre problème est que les correspondances verticales 2 et 2' sont partielles et envoyent certaines représentations des groupes d'en bas sur certaines représentations des groupes d'en haut, et pour obtenir des renseignements sur une autre représentation ou une autre fonction on est obligé de changer de corps L. Pour régler ce problème il faut se placer dans une situation où le niveau de toutes les représentations qui apparaissent est borné uniformément, et c'est ce qu'on va faire.

2) Préliminaires

Dans les sous-sections **1.** à **3.** on s'intéresse seulement à $GL_n(F)$. C'est dans la section **4.** qu'on démontre le seul résultat sur les formes intérieures de $GL_n(F)$ dont nous avons besoin par la suite.

1. Soient F et L deux corps locaux non archimédiens m-proches. On reprend toutes les notations de la section précédente (3.2), notamment λ^m_{EK}. On note v_F et v_L les valuations sur F et L respectivement. Si $a \in F^*$, $b \in L$ et $0 < l \leq m$ on dit que a et b sont *l-proches* si $(b - \lambda^m_{FL}(a)) \in P_L^{(l+v_F(a))}$. On note alors $a \sim_l b$. On remarquera que b est alors non nul, car il a la même valuation que a. On considère que les éléments nuls de F et L sont l-proches pour tout l.

Soient $a \in F^*$ et $b \in L^*$. Si $a = \pi_F^{v_F(a)}a'$ ($a' \in O_F^*$) et $b = \pi_L^{v_L(b)}b'$ ($b' \in O_L^*$), alors $a \sim_l b$ si et seulement si $v_F(a) = v_L(b)$ et l'image par $\bar{\lambda}^m_{FL}$ de la classe de a' dans O_F/P_F^m et la classe de b' dans O_L/P_L^m sont égales modulo P_L^l.

PROPRIÉTÉS

1) Pour tout $x \in F$, x et $\lambda^m_{FL}(x)$ sont m-proches,

2) Pour tout $a \in F$ et $b \in L$ l-proches, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\pi_F^i a$ et $\pi_L^i b$ sont l-proches,

3) Si a_1 et a_2 sont dans F et b_1 et b_2 sont dans L, si $a_1 \sim_l b_1$ et $a_2 \sim_l b_2$, alors $a_1a_2 \sim_l b_1b_2$,

4) Soit A un ensemble fini et pour tout $i \in A$, a_i un élément de F et b_i un élément de L tel que $\sum\limits_A a_i \neq 0$. On pose $l' = l + v_F(\sum\limits_A a_i) - \min\limits_A(v_F(a_i))$. Si $m \geq l'$ et pour tout $i \in A$, $a_i \sim_{l'} b_i$, alors on a : $\sum\limits_A a_i \sim_l \sum\limits_A b_i$.

Les premières trois propriétés sont triviales. Pour démontrer la quatrième on écrit $\lambda^m_{FL}(\sum\limits_A a_i) - \sum\limits_A b_i = \lambda^m_{FL}(\sum\limits_A a_i) - \sum\limits_A \lambda^m_{FL}(a_i) + \sum\limits_A \lambda^m_{FL}(a_i) - \sum\limits_A b_i = \lambda^m_{FL}(\sum\limits_A a_i) - \sum\limits_A \lambda^m_{FL}(a_i) + \sum\limits_A \left(\lambda^m_{FL}(a_i) - b_i\right)$. Or, pour tout i on a $a_i \sim_{l'} b_i$ et donc $\lambda^m_{FL}(a_i) - b_i \in P_F^{l+v_F(\sum\limits_A a_i)}$ d'où $\sum\limits_A \left(\lambda^m_{FL}(a_i) - b_i\right) \in P_F^{l+v_F(\sum\limits_A a_i)}$. Reste à montrer que $\lambda^m_{FL}(\sum\limits_A a_i) - \sum\limits_A \lambda^m_{FL}(a_i) \in P_F^{l+v_F(\sum\limits_A a_i)}$. En écrivant, pour tout i, $a_i = \pi_F^{\min_A v_F(a_i)} a'_i, a'_i \in O_F$, on a $\lambda^m_{FL}(\sum\limits_A a_i) = \pi_L^{\min_A v_F(a_i)} \lambda^m_{FL}(\sum\limits_A a'_i)$ et, pour tout i, $\lambda^m_{FL}(a_i) = \pi_L^{\min_A v_F(a_i)} \lambda^m_{FL}(a'_i)$. Il suffit donc de vérifier que $\sum\limits_A a'_i - \sum\limits_A \lambda^m_{FL}(a'_i) \in P_L^{l'}$. Mais comme les a'_i sont dans O_F et les corps sont m-proches, alors par le fait que $\bar{\lambda}^m_{FL}$ est induit par λ^m_{FL}, $\lambda^m_{FL}(\sum\limits_A a'_i) - \sum\limits_A \lambda^m_{FL}(a'_i) \in P_L^m$; comme $m \geq l'$ le résultat est prouvé.

Sur le F-espace vectoriel F^n on considère la valuation $v_{F^n}((a_1;a_2;...a_n)) = \min_{1\leq i\leq n} v_F(a_i)$. On rappelle que, si F et L sont m-proches on étend l'isomorphisme λ_{FL}^m de façon naturelle, composante par composante, en un isomorphisme de F^n sur L^n. Si $a = (a_1;a_2;...a_n) \in F^n$ et $b = (b_1;b_2;...b_n) \in L^n$ et si $0 < l \leq m$ on dit que a et b sont l-proches si a et b sont nuls tous les deux ou a est non nul et pour tout i on a $b_i - \lambda_{FL}^m(a_i) \in P_L^{l+v_{F^n}(a)}$. Si U est un F-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base et V est un L-espace vectoriel de même dimension n muni d'une base, alors on peut identifier U à F^n et V à L^n et parler d'éléments l-proches de U et V. Cette extension de la définition des éléments proches s'applique en particulier aux espaces de matrices $M_n(F)$ et $M_n(L)$.

2. Si P est un polynôme en n^2 variables commutatives $X_{11}, X_{12}, ...X_{nn}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, si $M = (m_{ij}) \in M_n(F)$ (ou $M_n(L)$), on pose $P(M) = P(m_{ij}) \in F$ (ou L). Énonçons plus bas quatre propositions qui nous seront utiles par la suite:

Proposition 3.3.1 . *Si $M, M' \in M_n(F)$ alors $v_{M_n(F)}(MM') \geq v_{M_n(F)}(M) + v_{M_n(F)}(M')$.*

Proposition 3.3.2 . *Soit $M \in GL_n(F)$. Pour tout $k > 0$ on a:*

$$M + M_n(P_F^{k-v_{M_n(F)}(M^{-1})}) \subset K_F^k M K_F^k \subset M + M_n(P_F^{k+v_{M_n(F)}(M)}).$$

Proposition 3.3.3 . *Si $k > 0$ est fixé, si $M \in GL_n(F)$, en posant $m = k - v_{M_n(F)}(M) - v_{M_n(F)}(M^{-1})$ on a: si F et L sont m-proches, alors $\zeta_{FL}^m(M) \in \bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^k M K_F^k)$.*

Proposition 3.3.4 . *Supposons que F est de caractéristique non nulle p. Soit $P \in \mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, ...X_{nn}]$. Soient $k > 0$ et $M \in M_n(F)$ fixés.*

a) On suppose que tous les coefficients de P se trouvent dans l'ensemble $\{1, 2...p-1\}$ et que $P(M) \neq 0$. On pose $S = \{s$ tel que s est un monôme de $P\}$ et

$$m = k + v_F(P(M)) - \min_{s\in S} v_F(s(M)) - v_{M_n(F)}(M) - v_{M_n(F)}(M^{-1}).$$

Alors, si F et L sont m-proches, pour tout $N \in \bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^m M K_F^m)$ on a $P(M) \sim_k P(N)$.

b) On ne fait aucune supposition sur les coefficients de P, mais on suppose toujours que $P(M) \neq 0$. Écrivons $P = Q + pR$ où $Q, R \in \mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, ...X_{nn}]$ et tous les coefficients de Q se trouvent dans l'ensemble $\{1, 2...p-1\}$. Soit N le degré total de R, $S = \{s$ tel que s est un monôme de $Q\}$ et

$$m = \max\{k + v_F(P(M)) - \min_{s\in S} v_F(s(M)) - v_{M_n(F)}(M) - v_{M_n(F)}(M^{-1});$$

$$k + v_F(P(M)) + \max\{0;\ -Nv_{M_n(F)}(M)\}\}.$$

Alors, si F et L sont m-proches, pour tout $N \in \bar{\zeta}^m_{FL}(K^m_F M K^m_F)$ on a $P(M) \sim_k P(N)$.

c) Supposons que $P(M) = 0$. Alors il existe m tel que, si F et L sont m-proches, pour tout $N \in \bar{\zeta}^m_{FL}(K^m_F M K^m_F)$ on a $v_L(P(N)) \geq k$.

Démonstrations.

PROPOSITION 3.3.1 : Pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $1 \leq j \leq n$ on a

$$v_F(\sum_{k=1}^{n} m_{ik}m'_{kj}) \geq \min_{1\leq k\leq n} v_F(m_{ik}) + \min_{1\leq k\leq n} v_F(m'_{kj})$$

d'où le résultat.

PROPOSITION 3.3.2 : Si $A = M + B$ où $B \in M_n(P_F^{k-v_{M_n(F)}(M^{-1})})$ alors

$$A = M(Id + M^{-1}B) \in MK^k_F$$

par la proposition 1, d'où la première inclusion.

Si $A = (Id + B)M(Id + C)$ avec $B, C \in M_n(P^k_F)$, alors

$$A = M + BMC + BM + MC$$

où BMC, BM et MC se trouvent dans $M_n(P_F^{k+v_{M_n(F)}(M)})$ par la proposition 1, d'où la deuxième inclusion.

PROPOSITION 3.3.3 : Soit $M = BAC$, où $B \in GL_n(O_F)$, $C \in GL_n(O_F)$ et $A \in \mathcal{A}_F$. On a vu qu'alors

$$\bar{\zeta}^m_{FL}(K^k_F M K^k_F) = K^k_L \zeta^m_{FL}(B)\zeta^m_{FL}(A)\zeta^m_{FL}(C)K^k_L.$$

Pour montrer que $\zeta^m_{FL}(M) \in \bar{\zeta}^m_{FL}(K^k_F M K^k_F)$ il suffit, par la proposition 2, de montrer que

$$\zeta^m_{FL}(BAC) - \zeta^m_{FL}(B)\zeta^m_{FL}(A)\zeta^m_{FL}(C) \in M_n(P^u_L)$$

où

$$u = k - v_{M_n(L)}((\zeta^m_{FL}(B)\zeta^m_{FL}(A)\zeta^m_{FL}(C))^{-1}) = k - v_{M_n(F)}(M^{-1}) = m + v_{M_n(F)}(M).$$

On a utilisé pour la deuxième égalité le fait que

- $\zeta^m_{FL}(B) \in GL_n(O_L)$,

- $\zeta_{FL}^m(C) \in GL_n(O_L)$ et
- $v_L(\zeta_{FL}^m(A^{-1})) = v_F(A^{-1}) = v(C^{-1}M^{-1}B^{-1}) = v_F(M^{-1})$. Pour les mêmes raisons, $v_{M_n(F)}(M) = v_{M_n(F)}(A)$ et si on écrit

$$A = diag(\pi_F^{a_1}; \pi_F^{a_2} ... \pi_F^{a_n}),$$

alors $v_{M_n(F)}(A) = a_1$. Donc la relation à montrer est

$$\zeta_{FL}^m(BAC) - \zeta_{FL}^m(B)\zeta_{FL}^m(A)\zeta_{FL}^m(C) \in M_n(P_L^{m+a_1})\ ;$$

ou encore :

$$\zeta_{FL}^m(B\pi_F^{-a_1}AC) - \zeta_{FL}^m(B)\zeta_{FL}^m(\pi_F^{-a_1}A)\zeta_{FL}^m(C) \in M_n(P_L^m),$$

qui est évidente, car $B, C, \pi_F^{-a_1}A \in M_n(O_F)$ et on peut appliquer le fait que l'application $\bar{\zeta}_{FL}^m$ est induite par la restriction de ζ_{FL}^m.

PROPOSITION 3.3.4 : Le partage du premier résultat de ce théorème (hypothèse $P(M) \neq 0$) en point a) et point b) vient du fait que, si F et L sont m-proches la somme à l termes $1 + 1 + ... + 1$ dans les corps F et L respectivement donne des éléments m-proches pour $l < p$ (par la condition posée au 3)a), section 3.3 et la propriété 4 page 94, mais pas pour $l = p$. Le point c) traite du cas $P(M) = 0$ où le résultat est de nature différente.

a) Par la proposition 3.3.3, $\zeta_{FL}^m(M) \in \bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^m M K_F^m)$. Par la proposition 3.3.2, $N - \zeta_{FL}^m(M) \in M_n(P_F^{m - v_{M_n(F)}(M^{-1})})$ et donc N et $\zeta_{FL}^m(M)$ sont $[m - v_{M_n(F)}(M^{-1}) - v_{M_n(F)}(M)]$-proches. Mais

$$m - v_{M_n(F)}(M^{-1}) - v_{M_n(F)}(M) = k + v_F(P(M)) - \min_{v \in S} v_F(s(M)).$$

Donc les coefficients sur la même place des deux matrices respectivement sont $[k + v_F(P(M)) - \min_{v \in S} v_F(s(M))]$-proches. Par la propriété 3, pour chaque $s \in S$, $s(M)$ et $s(N)$ sont $[k + v_F(P(M)) - \min_{v \in S} v_F(s(M))]$-proches. Les coefficients devant ces monômes se trouvent dans l'ensemble $\{1, 2 ... p - 1\}$. Les éléments 1_F et 1_L sont m-proches par la condition imposée dans la définition de l'application λ_{FL}^m. Alors, par la propriété 4, pour tout $l \in \{1, 2 ... p - 1\}$, les sommes à l termes $1 + 1 + ... + 1$ dans F et L respectivement sont m-proches. Ainsi $P(M)$ et $P(N)$ sont des sommes non nulles d'éléments $[k + v_F(P(M)) - \min_{v \in S} v_F(s(M))]$-proches deux à deux. Donc, par la propriété 4, $P(M)$ et $P(N)$ sont k-proches.

b) Par le point a) et le choix de m, $Q(M)$ et $Q(N)$ sont k-proches. Remarquons que la caractéristique de F étant p, $Q(M) = P(M)$. Il suffit de montrer donc que $Q(N) + pR(N)$ et $Q(N)$ sont k-proches. Or, si L est un corps de caractéristique nulle m-proche de F, alors l'image de la somme à p termes $1 + 1 + ... + 1$ dans O_L/P_L^m est la classe de 0, donc la valuation de l'élément $1 + 1 + ... + 1$ (p fois 1) est supérieure à m. Par le choix de m dans l'hypothèse, $pR(N) \in P_L^{k+v_L(Q(N))}$ et donc $Q(N) + pR(N)$ et $Q(N)$ sont k-proches.

c) Considérons le polynôme $Q(X) = P(X) + 1$. On a $Q(M) \neq 0$ et on peut appliquer le point b) à Q. Or, si $Q(M)$ et $Q(N)$ sont k-proches, alors $Q(N) - \zeta_{FL}^m(Q(M)) \in P_L^k$. Mais

$$Q(N) - \zeta_{FL}^m(Q(M)) = (P(N) + 1) - 1 = P(N)$$

d'où le résultat.

3. Soit maintenant F de caractéristique non nulle p. Soient $f \in H(G_F)$ et ω un caractère du centre Z de G_F. Soit $M \in GL_n(F)$ un élément elliptique régulier. On note P_M le polynôme caractéristique de M. Supposons que M est la matrice compagnon de P_M. Soit $K_F^l M K_F^l$, $l = m''(M;1)$ avec la définition de la section 2, chapitre 2. On sait que pour tout corps L de caractéristique nulle l-proche de F, $\bar{\zeta}_{FL}^l(f)$ est bien définie, l'intégrale orbitale de $\bar{\zeta}_{FL}^l(f)$ est constante sur $\bar{\zeta}_{FL}^l(K_F^l M K_F^l)$ égale à $\Phi(f;M)$ (th.2.1.2), et l'intégrale orbitale de $I_{\bar{\zeta}_{FL}^l(\omega)}(\bar{\zeta}_{FL}^l(f))$ est constante sur $\bar{\zeta}_{FL}^l(K_F^l M K_F^l)$ égale à $\Phi(I_\omega(f);M)$ (théorème 2.1.3) :

Proposition 3.3.5 . *Sous ces hypothèses, il existe m et s qui ne dépendent que de M et de l (qui à son tour ne dépend en fait que de M) tels que, si L est un corps local de caractéristique nulle m-proche de F, on ait: pour tout élément g de G_L dont le polynôme caractéristique est s-proche de P_M, on a*

$$\Phi(\bar{\zeta}_{FL}^m(f); g) = \Phi(f; M)$$

et

$$\Phi(I_{\bar{\zeta}_{FL}^m(\omega)}(\bar{\zeta}_{FL}^m(f)); g) = \Phi(I_\omega(f); M).$$

Démonstration. On pose

$$s = l - v_{M_n(F)}(M) - v_{M_n(F)}(M^{-1})$$

et

$$m = s.$$

Par la proposition 3.3.3 et le choix de m, $\zeta_{FL}^m(M) \in \bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^l M K_F^l)$ et donc

$$\bar{\zeta}_{FL}^m(K_F^l M K_F^l) = K_L^l \zeta_{FL}^m(M) K_L^l.$$

D'autre part, si $K_F M K_F = K_F A K_F$, $A \in \mathcal{A}_F$, alors

$$v_{M_n(F)}(M) = v_{M_n(F)}(A)$$

et

$$v_{M_n(F)}(M^{-1}) = v_{M_n(F)}(A^{-1}).$$

Comme on a $\bar{\zeta}^m_{FL}(K^l_F M K^l_F) = K^l_L \zeta^m_{FL}(M) K^l_L$, on en déduit que

$$\zeta^m_{FL}(M) \in K^l_L \zeta^m_{FL}(A) K^l_L$$

et que

$$v_{M_n(L)}(\zeta^m_{FL}(M)) = v_{M_n(L)}(\zeta^m_{FL}(A))$$

et

$$v_{M_n(L)}(\zeta^m_{FL}(M)^{-1}) = v_{M_n(L)}(\zeta^m_{FL}(A)^{-1}).$$

Bref,

$$v_{M_n(F)}(M) = v_{M_n(L)}(\zeta^m_{FL}(M))$$

et

$$v_{M_n(F)}(M^{-1}) = v_{M_n(L)}(\zeta^m_{FL}(M)^{-1}).$$

On peut donc écrire :

$$s = l - v_{M_n(L)}(\zeta^m_{FL}(M)) - v_{M_n(L)}(\zeta^m_{FL}(M)^{-1}).$$

On remarque par ailleurs que $\zeta^m_{FL}(M)$ est la matrice compagnon de $\zeta^m_{FL}(P_M)$. Donc, si P est un polynôme s-proche de P_M, alors P est un polynôme s-proche du polynôme caractéristique $P_{\zeta^m_{FL}(M)}$ de $\zeta^m_{FL}(M)$ aussi. Donc la matrice compagnon $Comp(P)$ de P va être s-proche de $\zeta^m_{FL}(M)$. Par conséquence

$$Comp(P) - \zeta^m_{FL}(M) \in M_n(P_L^{s+v_{M_n(L)}(\zeta^m_{FL}(M))}) = M_n(P_L^{l-v_{M_n(L)}(\zeta^m_{FL}(M)^{-1})}).$$

Par la proposition 3.3.2 on a alors

$$Comp(P) \in K^l_L \zeta^m_{FL}(M) K^l_L = \bar{\zeta}^m_{FL}(K^l_F M K^l_F)$$

et donc

$$\Phi(\bar{\zeta}^m_{FL}(f); Comp(P)) = \Phi(f; M)$$

et

$$\Phi(I_{\bar{\zeta}^m_{FL}(\omega)}(\bar{\zeta}^m_{FL}(f)); Comp(P)) = \Phi(I_\omega(f); M).$$

On conclut par le fait que si $g \in GL_n(F)$ a le même polynôme caractéristique P que $Comp(P)$, alors g et $Comp(P)$ sont conjugués (car P est séparable), et une intégrale orbitale est stable par conjugaison.

La proposition suivante va servir seulement à la section 3, chapitre 4. Elle est une variante de la précédente : ce qu'on a montré pour un élément elliptique régulier et une fonction à support compact ou à support compact modulo centre et à caractère central on montre maintenant pour un élément semisimple régulier quelconque et seulement pour les fonctions à support compact. On utilise cette fois le théorème 3.6 de [Le3].

Proposition 3.3.6 . *Soit $f \in H(G_F)$. Soit $M \in GL_n(F)$ un élément semisimple régulier. On note P_M le polynôme caractéristique de M. Supposons que M est la matrice compagnon de P_M. Soit $K_F^l M K_F^l$ le voisinage de M défini dans le th.3.6 de [Le3] tel que pour tout corps L de caractéristique nulle l-proche de F, $\bar{\zeta}_{FL}^l(f)$ est bien définie, l'intégrale orbitale de $\bar{\zeta}_{FL}^l(f)$ est constante sur $\bar{\zeta}_{FL}^l(K_F^l M K_F^l)$ égale à $\Phi(f; M)$. Il existe alors m et s qui ne dépendent que de M et de l tels que, si L est un corps local de caractéristique nulle m-proche de F, on ait : pour tout élément g de G_L dont le polynôme caractéristique est s-proche de P_M, on a*

$$\Phi(\bar{\zeta}_{FL}^m(f); g) = \Phi(f; M).$$

Démonstration. Marche exactement comme la démonstration de la proposition 3.3.5 plus haut.

Proposition 3.3.7 . *Soit π une représentation de carré intégrable de G_F. Reprénons les hypothèses de la proposition 3.3.5. Il existe alors m et s qui ne dépendent que de M tels que, si L est un corps local de caractéristique nulle m-proche de F, on ait : pour tout élément g de G_L dont le polynôme caractéristique est s-proche de P_M, on a*

$$\chi_{\bar{\zeta}_{FL}^m(\pi)}(g) = \chi_\pi(M).$$

Démonstration. On a montré dans 2.2 (théorème 2.2.3) que G_F avait (comme G_L) la propriété **P**. Soit f_π un pseudocoefficient à support compact modulo le centre de π et soit $h \in H(G)$ tel que, si ω est le caractère central de π, on ait $I_\omega(h) = f_\pi$. On applique la proposition 3.3.5 plus haut à h et on augmente éventuellement le m pour être sûr que f_π est envoyé par l'application $\bar{\zeta}_{FL}^m$ sur le pseudocoefficient de $\bar{\zeta}_{FL}^m(\pi)$ par le lemme 2.2.2. On obtient aussitôt la proposition 3.3.7 par application de la propriété **P** sur G_F et sur G_L.

4. Dans cette sous-section on démontre un résultat sur les formes intérieures de $GL_n(F)$ (la proposition 3.3.11). Soit D_F une algèbre à division centrale de dimension d^2 sur F. Soit E une extension non ramifiée de dimension d sur F incluse dans D_F. On supppose qu'on a fixé une uniformisante π_F de F (et de E aussi), ainsi qu'une uniformisante π_{D_F} de D_F et un générateur σ_E de $Gal(E/F)$

qui correspondent à D_F comme dans la sous-section 3.3.1a) de ce chapitre. Soit r un entier strictement positif et $G'_F = GL_r(D_F)$. On pose $n = rd$. Chaque fois qu'on se donne L un corps local m-proche de F, on considère que le triplet correspondant est choisi de façon à ce que l'uniformisante de F qui y apparaît soit π_F. On reprend alors toutes les notations de la section précédente pour K, D_L et tous les objets qui leur sont associés, avec une seule exception : la dimension de D_F sur F est notée ici d alors que dans la section précédente elle était notée n. On rappelle que la base de voisinages $\{K_F^l\}_{l\in\mathbf{N}}$ de l'identité avec laquelle on a travaillé sur G'_F est associée à la base de voisinages $\{P_{D_F}^{dl}\}_{l\in\mathbf{N}}$ de 0 et non pas à la base de voisinages $\{P_{D_F}^{l}\}_{l\in\mathbf{N}}$.

Proposition 3.3.8 . *Si $M, M' \in M_r(D_F)$ alors $v_{M_r(D_F)}(MM') \geq v_{M_r(D_F)}(M) + v_{M_r(D_F)}(M')$.*

Proposition 3.3.9 . *Soit $M \in GL_r(D_F)$. Pour tout $k > 0$ on a :*

$$M + M_r(P_{D_F}^{d(k-v_{M_r(D_F)}(M^{-1}))}) \subset K_F^k M K_F^k \subset M + M_r(P_{D_F}^{d(k+v_{M_r(D_F)}(M))}).$$

Proposition 3.3.10 . *Si $k > 0$ est fixé, si $M \in GL_r(D_F)$, en posant $m = k - v_{M_r(D_F)}(M) - v_{M_r(D_F)}(M^{-1})$ on a : si F et L sont m-proches, alors $\zeta_{D_F D_L}^m(M) \in \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(K_F^k M K_F^k)$.*

Démonstrations. Les démonstrations des propositions 3.3.1 et 3.3.2 s'appliquent aux propositions 3.3.8 et 3.3.9 sans changement. Pour la proposition 3.3.10 il y a un petit problème car l'uniformisante de D_F ne commute pas avec les éléments de D_F donc il faut vérifier que $\zeta_{D_F D_L}^m(BAC) - \zeta_{D_F D_L}^m(B)\zeta_{D_F D_L}^m(A)\zeta_{D_F D_L}^m(C) \in M_n(P_L^{d(m-a_1)})$ est toujours vrai. On multiplie par $\pi_{D_F}^{-a_1}$ comme dans la démonstration de la proposition 3.3.3 et on écrit :

$$\pi_{D_L}^{-a_1}\zeta_{D_F D_L}^m(BAC) = \zeta_{D_F D_L}^m(\pi_{D_F}^{-a_1}BAC) = \zeta_{D_F D_L}^m\big(\sigma_E^{a_1}(B)(\pi_{D_F}^{-a_1}A)C\big)$$

car on avait défini $\zeta_{D_F D_L}^m$ de sorte qu'elle commute à la multiplication par les uniformisantes (propriété 2).

Maintenant

$$\pi_{D_L}^{-a_1}\zeta_{D_F D_L}^m(B)\zeta_{D_F D_L}^m(A)\zeta_{D_F D_L}^m(C) = \sigma_K^{a_1}\big(\zeta_{D_F D_L}^m(B)\big)\pi_{D_L}^{-a_1}\zeta_{D_F D_L}^m(A)\zeta_{D_F D_L}^m(C)$$

$$= \sigma_K^{a_1}\big(\zeta_{D_F D_L}^m(B)\big)\zeta_{D_F D_L}^m(\pi_{D_F}^{-a_1}A)\zeta_{D_F D_L}^m(C).$$

On a aussi

$$\zeta^m_{D_F D_L}(\sigma^{a_1}_E(B)) = \sigma^{a_1}_K(\zeta^m_{D_F D_L}(B))$$

par la relation (**), page 80. Il faut donc montrer que

$$\zeta^m_{D_F D_L}(\sigma^{a_1}_E(B)(\pi^{-a_1}_{D_F}A)C) - \zeta^m_{D_F D_L}(\sigma^{a_1}_E(B))\zeta^m_{D_F D_L}(\pi^{-a_1}_{D_F}A)\zeta^m_{D_F D_L}(C) \in M_r(P^k_{D_F}).$$

On conclut comme dans la démonstration de la proposition 3.3.3, car $\sigma^{a_1}_E(B)$, $\pi^{-a_1}_{D_F}A$ et C sont dans $M_r(O_{D_F})$.

La proposition 3.3.4 n'a pas de sens dans ce contexte car D_F n'est pas commutative. La proposition qui suit parle seulement du polynôme caractéristique des matrices dans G'_F et G'_L.

Proposition 3.3.11 . *Soit $M' \in G'_F$ et $k \in \mathbb{N}$. Il existe alors un m tel que, si F et L sont m-proches, pour tout $g' \in \bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(K^m_{D_F} M' K^m_{D_F})$, les polynômes caractéristiques de M' et g' soient k-proches.*

Démonstration. On rappelle la proposition de la page 295, [Pi] :

Soit A une algèbre centrale simple sur F de dimension n^2. Soit E une extension de dimension n de F. Alors, si on a un morphisme d'algèbres unitaires $\Psi : A \to M_n(E)$, pour tout élément g de A, le polynôme caractéristique de $\Psi(g)$ (qui a priori a des coefficients dans E) a tous ses coefficients dans F et c'est le polynôme caractéristique de g.

Dans notre cas, $A = M_r(D_F)$. Elle agit sur D^r_F. En écrivant $D_F = \bigoplus_{0 \leq i \leq d} \pi^i_{D_F} E$ on a un isomorphisme $D^r_F \simeq E^n$ et par conséquent une action de $M_r(D_F)$ sur E^n. On a obtenu donc un morphisme d'algèbres $\Psi : M_r(D_F) \to M_n(E)$. Le polynôme caractéristique de M' est alors égal au polynôme caractéristique de $\Psi(M')$. On va calculer ce dernier en fonction des coefficients de M'. Supposons que M' s'écrit $M' = (m'_{ij})_{1 \leq i,j \leq r}$ et que $\Psi(M')$ s'écrit $(n_{st})_{1 \leq s,t \leq n}$. Supposons maintenant que pour tout i et j, m'_{ij} s'écrit sur la base $1, \pi_{D_F}, \pi^2_{D_F} ... \pi^{d-1}_{D_F}$ de D_F sur E :

$$m'_{ij} = \sum_{0 \leq k \leq d-1} \pi^k_{D_F} e^k_{ij}, \ e^k_{ij} \in E.$$

Pour tout $0 \leq l \leq d-1$, pour tout tel e^k_{ij} posons $e^{kl}_{ij} = \sigma^l_E(e^k_{ij})$. On peut se fabriquer une matrice $\mathcal{U}(M') = (u_{vw})_{1 \leq v,w \leq n}$ a n lignes et n colonnes et à coefficients dans E en posant pour tout $1 \leq v, w \leq n$: $u_{vw} = e^{kl}_{ij}$ où i, j, k et l sont définis comme suit : l est le quotient de la division euclidienne de v par r, $i-1$ est le reste de la division euclidienne de v par r, k est le quotient de la division euclidienne de w par r et $j-1$ est le reste de la division euclidienne de w par r.

Notation : Si P est un polynôme dans $\mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, ...X_{nn}][t]$, si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice dans $M_n(F)$, si $x \in F$, l'élément $P(a_{11}; a_{12}; ...; a_{nn}; x)$ de F sera noté abrégé $P(A; x)$.

Lemme 3.3.12 . *Pour tout $1 \leq s, t \leq n$ il existe un polynôme indépendant de M', $P_{st} \in \mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, ...X_{nn}][t]$, dont le degré total en les variables $X_{11}, X_{12}, ...X_{nn}$ est 1, tel qu'on ait $n_{st} = P_{st}(\mathcal{U}(M'); \pi_F)$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier cette propriété pour des matrices du type $M^{ke}_{i_0 j_0} = (m'_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ où $m'_{ij} = \delta_{i_0 i}\delta_{j_0 j}\pi^k_{D_F}e$ où i_0, j_0 sont des entiers entre 1 et r, k est un entier entre 1 et d, et $e \in E$, car l'ensemble formé par ces matrices engendre $M_r(D_F)$ sur $\mathbb{Z}$ et les polynômes considérés sont de degré 1 en les n^2 premières variables. Soit $d_1, d_2...d_r$ la base canonique de D^r_F. L'élément $M^{ke}_{i_0 j_0}$ agit sur D^r_F en envoyant d_i sur 0 pour tout $i \neq i_0$ et en envoyant d_{i_0} sur $\pi^k_{D_F}ed_{j_0}$. Si on se représente la matrice $\Psi(M^{ke}_{i_0 j_0})$ par blocs de taille $d \times d$, alors tous ces blocs sont nuls à l'exception de celui qui se trouve dans la position $i_0 j_0$, et ce dernier est égal à $X = (x_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ où les x_{ij} sont donnés par :

- si $1 \leq i \leq k$, alors $x_{ij} = \delta_{i,j-d+k}\pi_F\sigma^{k-d+j-1}(e)$
- si $k + 1 \leq i \leq n$, alors $x_{ij} = \delta_{i,j+k}\sigma^{j-1}(e)$.

Le lemme est vérifié.

Lemme 3.3.13 . *Il existe des polynômes $P_0, P_1...P_{n-1} \in \mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, ...X_{nn}][t]$ tels que pour toute matrice M' dans $M_r(D_F)$, le coefficient de X^i, $1 \leq i \leq n-1$, dans le polynôme caractéristique de M' soit égal à $P_i(\mathcal{U}(M'); \pi_F)$.*

Démonstration. C'est évident par le lemme 3.3.12 plus haut.

Lemme 3.3.14 . *Les points a), b) et c) de la proposition 3.3.4 sont vérifiés si on remplace $\mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, ...X_{nn}]$ par $\mathbb{Z}[X_{11}, X_{12}, ...X_{nn}][t]$, $P(M)$ par $P(M; \pi_F)$ et $P(N)$ par $P(N; \pi_L)$.*

Démonstration. La démonstration marche identiquement en tenant compte que, si F et L sont m-proches, alors π_F et π_L sont m-proches. Une autre façon de démontrer ce lemme est de le voir comme un cas particulier de la proposition 3.3.4 : on applique la proposition 3.3.4 à $(n+1)^2$ variables.

Démontrons maintenant la proposition 3.3.11. On remarque que, si M et M' sont dans $M_r(D_F)$, et si $M - M' \in M_r(P^{dh}_{D_F})$, alors pour tout i, j, si on écrit $m_{ij} = \sum_{0\leq k\leq d-1} \pi^k_{D_F}e^k_{ij}$ et $m'_{ij} = \sum_{0\leq k\leq d-1} \pi^k_{D_F}e'^k_{ij}$, on a pour tout k : $e^k_{ij} - e'^k_{ij} \in$

P_E^h. Par conséquent, pour tout entier k_1 fixé, il existe un entier k_2 tel que, si F et L sont k_2-proches, pour tout $M \in \bar{\zeta}^{k_2}_{D_F D_L}(K^{k_2}_{D_F} M' K^{k_2}_{D_F})$ on ait : $\mathcal{U}(M) \in \bar{\zeta}^{k_2}_{EK}(K^{k_1}_E \mathcal{U}(M') K^{k_1}_E)$ (on a utilisé les propositions 3.3.2, 3.3.9, 3.3.3, 3.3.10 et le fait que si $e, e' \in E$ sont k-proches alors, pour tout $\sigma \in Gal(E/F)$, $\sigma(e)$ et $\sigma(e')$ sont k-proches).

Soit maintenant M' comme dans l'hypothèse de la proposition 3.3.11. On pose $N = \min_{0 \leq i \leq n-1} v_{M_n(E)}(P_i(\mathcal{U}(M')))$ qui a un sens parce qu'au moins $P_0((\mathcal{U}(M')))$ est non nul (car égal à $det(M')$). L'entier N n'est autre que la valuation du polynôme caractéristique de M'' vu comme élément de F^n. En appliquant la proposition 4 b) à la matrice $\mathcal{U}(M') \in M_n(E)$ on trouve qu'il existe un k_0 tel que, si L est k_0-proche de F, pour toute matrice $M'' \in \bar{\zeta}^{k_0}_{EK}(K^{k_0}_{EK} \mathcal{U}(M') K^{k_0}_{EK})$, pour tout i entre 0 et $n-1$ tel que $P_i(\mathcal{U}(M')) \neq 0$, $P_i(\mathcal{U}(M'))$ et $P_i(M'')$ soient k-proches. En appliquant le lemme 3.3.14c) aux polynômes P_i qui vérifient $P_i(\mathcal{U}(M')) = 0$ on trouve qu'il existe un k'_0 tel que, si L est est k'_0-proche de F, pour toute matrice $M'' \in \bar{\zeta}^{k'_0}_{EK}(K^{k'_0}_{EK} \mathcal{U}(M') K^{k_0}_{EK})$ on a $v_{M_n(K)}(P_i(M'')) \geq k + N$. En posant $k_1 = \max\{k_0; k'_0\}$ l'entier $m = k_2$ (voir quelques lignes plus haut pour k_2) vérifie les propriétés requises par la proposition 3.3.11.

3) Correspondance faible

Lemme 3.3.15 . *Avec les notations de l'annexe 1, si π est une représentation de G_F (resp. G'_F), si F et L sont m-proches pour un entier m tel que $\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)$ (resp.$\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\pi)$) ait un sens, on a :*

$$-4n + m(\pi) \leq m(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)) \leq m(\pi) + 4n$$

(resp.

$$-4n + m(\pi) \leq m(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\pi)) \leq m(\pi) + 4n).$$

La démonstration de ce lemme est donnée dans l'annexe 1, partie III.

Théorème 3.3.16 . *Il existe une unique bijection :*

$$\mathbf{C} : E^2(G) \to E^2(G')$$

telle que pour tout $\pi \in E^2(G)$ on ait

$$\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r} \chi_{\mathbf{C}(\pi)}(g') \qquad \forall g \leftrightarrow g' \text{ elliptiques réguliers.}$$

Les représentations π et $\mathbf{C}(\pi)$ ont le même caractère central.
L'application $\mathbf{C}$ commute à la tensorisation avec les caractères.

Démonstration. On procède par contradiction, en transférant à la caractéristique nulle. Soit π une représentation de carré intégrable de G_F et soit ω le caractère central (unitaire) de π.

Proposition 3.3.17 . *Soit π' une représentation de carré intégrable de G'_F de caractère central ω. Supposons qu'il existe $M \in G_F$ et $M' \in G'_F$ elliptiques réguliers tel qu'on ait $M \leftrightarrow M'$ et :*

$$\chi_\pi(M) \neq (-1)^{n-r}\chi_{\pi'}(M').$$

Alors il existe un entier $m \geq 1$ tel que, si L est un corps local de caractéristique nulle m-proche de F et $\mathbf{C}_L$ la correspondance sur L entre $GL_n(L)$ et $GL_r(D_L)$, on ait $\mathbf{C}_L(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)) \neq \bar{\zeta}^m_{FL}(\pi')$.

Démonstration.
Principe: On veut trouver un voisinage V de M, un voisinage V' de M' et un entier m tel qu'on ait :

1) χ_π est constant (égal à $\chi_\pi(M)$) sur V

2) $\chi_{\pi'}$ est constant (égal à $\chi_{\pi'}(M')$) sur V'

3) Pour tout corps L qui est m-proche de F $\bar{\zeta}^m_{FL}(V)$ et $\bar{\zeta}^m_{FL}(V')$ sont bien définis et on a :

a) $\chi_{\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)}$ est constant égal à $\chi_\pi(M)$ sur $\bar{\zeta}^m_{FL}(V)$ et

b) Pour tout élément $g' \in \bar{\zeta}^m_{FL}(V')$ il existe un élément $g \in \bar{\zeta}^m_{FL}(V)$ tel qu'on ait $g \leftrightarrow g'$.

Si on suppose que $\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)$ et $\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi')$ se correspondent par la correspondance en caractéristique nulle, on obtient alors par 3)a) et b) que le caractère $\chi_{\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi')}$ est constant égal à $\chi_\pi(M)$ sur $\bar{\zeta}^m_{FL}(V')$. Mais, par le 2), $\chi_{\pi'}$ est constant sur V' et en utilisant la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{V'}$ de V' qui se relève, on aurait

$$tr\pi'(\mathbf{1}_{V'}) = tr\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi')(\bar{\zeta}^m_{FL}(\mathbf{1}_{V'}))$$

ou encore

$$\chi_{\pi'}(M')vol(V') = \chi_\pi(M)vol(\bar{\zeta}^m_{FL}(V')).$$

C'est une contradiction, car $\bar{\zeta}^m_{FL}$ préserve le volume et $\chi_{\pi'}(M') \neq \chi_\pi(M)$.

On va donc constuire V, V' et m qui vérifient ces conditions. Quite à conjuguer M on peut supposer qu'elle est la matrice compagnon de son polynôme caractéristique. Soit f_π un pseudocoefficient de π. Soient m et s comme dans la proposition 3.3.7. Par cette proposition, le caractère $\chi_{\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)}$ de $\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)$ est constant égal à $\chi_\pi(M)$ sur l'ensemble des éléments de G_L qui ont un polynôme caractéristique s-proche de celui de M. Donc le caractère de $\mathbf{C}_L(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi))$ est constant égal à $(-1)^{n-r}\chi_\pi(M)$ sur l'ensemble des éléments de G'_L qui ont un polynôme caractéristique s-proche de celui de M. Mais le polynôme caractéristique de M est aussi celui de M'. Posons $s = k$ dans la proposition 3.3.11 et notons m' l'entier (qui dans la proposition 3.3.11 est noté m) associé à ce k. En posant $m'' = \max\{m; m'\}$, si L et F sont m''-proches, alors on a $\bar{\zeta}^{m''}_{D_F D_L}(K^{m''}_{D_F} M' K^{m''}_{D_F}) \subset X_{M,s}$ où $X_{M,s}$ est l'ensemble des éléments de G'_L qui ont un polynôme caractéristique s-proche de celui de M. Quite à changer de voisinage (et à augumenter m'') on peut supposer que $\chi_{\pi'}$ était constant sur $K^{m''}_{D_F} M' K^{m''}_{D_F}$ (car M' est semisimple régulier). On pose $V = K^m_F M K^m_F$, $V' = K^{m''}_{D_F} M' K^{m''}_{D_F}$ et alors le triplet $(V; V'; m'')$ vérifie les conditions 1), 2) et 3). On peut donc conclure comme on l'a expliqué quand on a décrit le principe de la démonstration.

Démontrons maintenant le théorème. Définissons d'abord $\mathbf{C}(\pi)$. Supposons qu'il n'existe pas de représentation de carré intégrable $\pi' \in E^2(G')$ de caractère central ω telle que $\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\pi'}(g')$ pour tous $g \leftrightarrow g'$ elliptiques réguliers. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $X^k_{G_F}$ (resp. $X^k_{G'_F}$) l'ensemble de classes d'équivalence de représentations de carré intégrable de G_F (resp. G'_F) de caractère central ω et de niveau inférieur ou égal à k. Ce sont des ensembles finis. Soit $k = m(\pi) + 15n$ (voir l'annexe 1 pour la définition de $m(\pi)$). Pour toute représentation π' dans $X^k_{G'_F}$, on sait qu'il existe $M \in G_F$ et $M' \in G'_F$ elliptiques réguliers tel qu'on ait $M \leftrightarrow M'$ et:

$$\chi_\pi(M) \neq (-1)^{n-r}\chi_{\pi'}(M').$$

Prenons m assez grand pour que le lemme 3.2.14 et le lemme 3.3.15 et la proposition 3.3.17 soient réalisés pour π et pour toute représentation dans $X^k_{G'_F}$ (qui est un ensemble fini). Soit L un corps local m-proche de F. On note $X^k_{G_L}$ (resp. $X^k_{G'_L}$) l'ensemble de classes d'équivalence de représentations de carré intégrable de G_L (resp. G'_L) de caractère central $\bar{\zeta}^m_{FL}(\omega)$ et de niveau inférieur ou égal à k. L'application $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}$ réalise une bijection de $X^k_{G'_F}$ sur $X^k_{G'_L}$, et puisqu'on sait que la proposition 3.3.17 est vraie pour tout $\pi' \in X^k_{G'_F}$, on en déduit que pour tout $\sigma \in X^k_{G'_L}$, $\mathbf{C}_L(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)) \neq \sigma$. Mais on a

$$m(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)) \leq m(\pi) + 4n$$

par le lemme 3.3.15 et donc

$$m(\mathbf{C}_L(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi))) \leq m(\pi) + 8n$$

en combinant avec la proposition 3.1.10.

Par la proposition 3 de l'annexe 1 (partie I), on a

$$niv(\mathbf{C}_L(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi))) \leq \max\{1; m(\mathbf{C}_L(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi))) + 7n\}$$

et on obtient donc

$$niv(\mathbf{C}_L(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi))) \leq \max\{1; m(\pi) + 15n\} = m(\pi) + 15n$$

car $m(\pi)$ est positif on nul, π étant une représentation générique de $GL_n(F)$ ([GP-SS], th.5.1a)). Comme le caractère central de $\mathbf{C}_L(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi))$ est celui de $\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)$ donc $\bar{\zeta}^m_{FL}(\omega) = \bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\omega)$, on a $\mathbf{C}_L(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)) \in X^k_{G'_L}$. Contradiction. Donc, il existe une représentation de carré intégrable $\pi' \in E^2(G'_F)$ de caractère central ω telle que $\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\pi'}(g')$ pour tous $g \leftrightarrow g'$ elliptiques réguliers.

Montrons qu'il existe une unique telle représentation π' modulo équivalence. Supposons par l'absurde qu'une autre représentation de carré intégrable π'' de G'_F vérifie $\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\pi''}(g')$ pour tous $g \leftrightarrow g'$ elliptiques réguliers. Par orthogonalité des caractères sur G_F, aucune autre représentation ρ de carré intégrable de G_F ne peut vérifier $\chi_\rho(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\pi'}(g')$ pour tous $g \leftrightarrow g'$ elliptiques réguliers ou $\chi_\rho(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\pi''}(g')$ pour tous $g \leftrightarrow g'$ elliptiques réguliers. C'est vrai en particulier pour l'ensemble fini $X^k_{G_F}\backslash\{\pi\}$ où $k = \max\{1; m(\pi') + 15n; m(\pi'') + 15n\}$. Prenons m tel que le lemme 3.2.14 et le lemme 3.3.15 et la proposition 3.3.17 soient réalisés pour π', π'' et pour toute représentation dans $X^k_{G_F}$. En appliquant la proposition 3.3.17 on trouve qu'aucune représentation σ dans l'ensemble $X^k_{G_L}\backslash\{\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)\}$ ne correspond ni à $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\pi')$ ni à $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\pi'')$. Mais, par le même calcul que plus haut on obtient

$$niv(\mathbf{C}_L^{-1}(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\pi'))) \leq \max\{1; m(\pi') + 15n\}$$

et

$$niv(\mathbf{C}_L^{-1}(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\pi''))) \leq \max\{1; m(\pi'') + 15n\}.$$

Par conséquent, on a $\mathbf{C}_L^{-1}(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\pi')) \in X^k_{G_L}$ et $\mathbf{C}_L^{-1}(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\pi'')) \in X^k_{G_L}$. On n'a pas le choix: on doit avoir $\mathbf{C}_L^{-1}(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\pi')) = \bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)$ et $\mathbf{C}_L^{-1}(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\pi'')) = \bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)$. Ce n'est pas possible, sauf si $\pi' \simeq \pi''$.

Il existe donc une unique représnetation de carré intégrable π' de G'_L telle que

$$\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\pi'}(g')$$

pour tous $g \leftrightarrow g'$ elliptiques réguliers. On pose $\mathbf{C}(\pi) = \pi'$. On étend $\mathbf{C}$ en tordant par les caractères à toutes les représentations essentiellement de carré intégrable.

L'application $\mathbf{C}$ est injective par orthogonalité des caractères des représentations de carré intégrable de caractère central donné sur G (th.2.2.3).

Montrons que $\mathbf{C}$ est surjective. Si $\pi' \in E^2(G')$ n'est pas dans l'image de $\mathbf{C}$, alors en particulier pour tout $\pi \in E^2(G)$ de même caractère central que π' et de niveau inférieur ou égal à $m(\pi') + 15n$ on a $\mathbf{C}(\pi) \neq \pi'$. On procède comme plus haut par comparaison pour obtenir par la proposition 3.3.17 qu'aucune représentation de G_L de niveau inférieur ou égal à $m(\pi') + 15n$ ne correspond à $\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi')$, alors que, par ailleurs, $\mathbf{C}_L^{-1}(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi'))$ vérifie

$$niv(\mathbf{C}_L^{-1}(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi')) \leq m(\mathbf{C}_L^{-1}(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi'))) + 7n \leq m(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi')) + 11n \leq m(\pi') + 15n.$$

Contradiction qui prouve la surjectivité.

Corollaire 3.3.18 . *La restriction des caractères des représentations de carré intégrable de G' de caractère central ω fixé à l'ensemble des éléments elliptiques réguliers forme un système orthonormal complet pour l'espace de Hilbert $L^2(G'_e;\omega)$.*

Démonstration. On avait obtenu ce résultat pour $GL_n(F)$ (corollaire 2.3.9). Par le théorème de correspondance faible ci-dessus et grâce à l'isomorphisme i entre $L^2(G_e;\omega)$ et $L^2(G'_e;\omega)$ défini à la section 9, chapitre 1, on le transfère sans problème sur G'.

Remarque 1. On a obtenu au passage le résultat suivant : pour tout k il existe un m tel qu'on ait

$$\mathbf{C}_L(\bar{\zeta}^m_{FL}(\pi)) = \bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\mathbf{C}(\pi))$$

pour toute représentation π de G_F telle que $m(\pi) \leq k$.

Remarque 2. On a été obligés de se restreindre aux éléments elliptiques réguliers et démontrer d'abord cette correspondance faible parce qu'on utilise le "relèvement en caractéristique nulle" des intégrales orbitales et il n'y a relation entre ces dernières et les caractères des représentations que sur G_e (on n'a rien pour les autres éléments semisimples réguliers). Mais c'est suffisant pour obtenir le corollaire ci-dessus qui implique en fait une correpondance forte.

4) Correspondance forte

Théorème 3.3.19 . *Il existe une unique bijection :*

$$\mathbf{C} : E^2(G) \to E^2(G')$$

telle que pour tout $\pi \in E^2(G)$ on ait

$$\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\mathbf{C}(\pi)}(g') \qquad \forall g \leftrightarrow g'.$$

π et $\mathbf{C}(\pi)$ ont le même caractère central.

L'application $\mathbf{C}$ commute à la tensorisation avec les caractères.

Proposition 3.3.20 . *Soit π' une représentation cuspidale de G'. Alors, avec les notations de l'annexe 1, on a*

$$-4n \leq m(\pi').$$

Démonstrations. Comme on l'a fait remarquer à la fin de la section 1 de ce chapitre, le seul résultat spécifique à la caractéristique nulle qu'on a utilisé pour y prouver l'analogue du théorème de correspondance forte et de la proposition ci-dessus a été l'orthogonalité des caractères sur G'. Or, on vient juste de la démontrer (corollaire 3.3.18). Nous pouvons (et devons) donc reprendre la démonstration qui fait l'objet de la section 1 et dont tous les arguments sont maintenant valables en caractéristique non nulle. On peut donc reprendre entièrement la démonstration faite en caractéristique nulle (section 1 de ce chapitre).

Chapitre 4

APPLICATIONS

Introduction

Ce chapitre est composé de cinq sections qui sont autant d'applications du théorème de correspondance prouvé au chapitre précédent. Les premières quatre s'enchaînent et la cinquième contient deux résultats globaux. Dans la première on montre, comme le titre l'indique, que sur $GL_r(D)$ l'induite d'une représentation de carré intégrable est irréductible, résultat classique pour le groupe $GL_n(F)$ ([Ja]). On en déduit (deuxième section, première sous-section) qu'il y a un plongement $\mathbf{JL}_r$ du groupe de Grothendieck des représentations admissibles de longeur finie de $GL_r(D)$ dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de longeur finie de $GL_n(F)$ qui vérifie, pour tout π, pour tous $g \leftrightarrow g'$,

$$\chi_\pi(g') = (-1)^{n-r}\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(g).$$

Dans la deuxième sous-section on introduit l'algèbre de Hopf associée aux représentations de tous les groupes $GL_r(D)$ pour r entier positif (à la façon dont Zelevinski l'a fait pour les groupes $GL_n(F)$ pour tous les n entiers positifs) et on montre qu'elle est isomorphe (naturellement) à un quotient de celle de Zelevinski. Une conséquence des résultats de la deuxième section est le transfert de toutes les fonctions à support compact de $GL_r(D)$ sur $GL_n(F)$ qu'on montre dans la troisième section. On y montre aussi qu'il y a transfert en sens inverse et on en déduit le transfert dans les deux sens pour les fonctions à support compact modulo le centre et à caractère central. Comme conséquence du transfert de toutes les représentations et de toutes les fonctions de $GL_r(D)$ sur $GL_n(F)$ on tire l'intégrabilité locale des caractères pour le groupe $GL_r(D)$ (le cas intéressant étant quand la caractéristique de F est non nulle, bien sûr). Dans la cinquième section nous démontrons que si $\mathbb{A}$ est une algèbre centrale simple de dimension finie sur un corps global $\mathbb{F}$ et G' le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{A}$, alors il existe au plus un nombre fini de représentations automorphes cuspidales du groupe des adèles de G' qui ont des composantes locales fixées à toutes les places infinies et à presque toutes les places finies. On en déduit un résultat global qui figure déjà dans [DKV] : si on se donne un ensemble fini de places finies S et à toute place dans S une représentation de carré intégrable du groupe $G'(\mathbb{F}_v)$, il existe au moins une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\pi}$ du groupe des adèles de G' telle qu'à toute place v dans S, la composante locale de $\tilde{\pi}$ est π_v. Les théorèmes qu'on montre aux sections 1 et 3 ont déjà été prouvés en caractéristique nulle dans [DKV].

4.1 Irréductibilité des induites des représentations essentiellement de carré intégrable sur G'

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique quelconque, D une algèbre à division centrale sur F, de dimension finie d^2, r un entier strictement positif et $G' = GL_r(D)$. Le but de cette section est de montrer le théorème 4.1.1 plus bas. Le cas de caractéristique nulle a déjà été prouvé dans [DKV] (théorème B.2.d) et c'est là qu'apparaît l'idée d'utiliser le théorème de Paley-Wiener.

Théorème 4.1.1 . *Soit P un sous-groupe parabolique de G' et soit $P = LU$ une décomposition de Levi de P. Soit π une représentation de carré intégrable de L. Alors $ind_P^{G'}\pi$ est irréductible.*

Démonstration. On montre ce résultat par récurrence sur l'entier strictement positif k tel que $G' = GL_k(D)$ (D est fixée). On utilisera les notations $\Psi(G')$ et $\Psi(G';\pi)$ de la section 7, chapitre 1 et la notation $Grot(G')$ pour le groupe de Grothendieck de G'. Pour $k = 1$ le théorème est évident. Supposons que le théorème est vérifié pour tout $k < r$. Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un sous-groupe parabolique propre P_0 de $G' = GL_r(D)$, une décomposition de Levi $P_0 = L_0U_0$ de P_0 et une représentation de carré intégrable π_0 de L_0 telle que l'induite de P_0 à G' de la représentation π_0 ne soit pas irréductible. On sait qu'on a dans $Grot(G')$:

$$ind_{P_0}^{G'}\pi_0 = \sum_{i=1}^{s} a_i\tau_i$$

où les a_i sont des entiers strictement positifs et les τ_i sont des représentations tempérées de G' non équivalentes, et aucune parmi les τ_i n'est de carré intégrable. Montrons d'abord que $s = 1$.

Supposons par l'absurde que $s \geq 2$. On a alors deux cas :

Premier cas : Il existe un $i \in \{2,3...s\}$ tel que $\tau_i \notin \Psi(G';\tau_1)$. On peut supposer que $i = 2$. Supposons que parmi les τ_i on a $\tau_{i_1} = \tau_1,\ \tau_{i_2},\ \tau_{i_3}\ ...\tau_{i_p} \in \Psi(G';\tau_1)$ et $\tau_{j_1} = \tau_2,\ \tau_{j_2},\ \tau_{j_3}\ ...\tau_{j_q} \in \Psi(G';\tau_2)$. Posons

$$\alpha = (\sum_{u=1}^{q} a_{j_u})/p$$

et

$$\beta = (\sum_{v=1}^{p} a_{i_v})/q.$$

On considère alors la forme linéaire f sur $Grot(G')$ définie sur la base de Langlands par :

1) $f(\rho) = \alpha$ si $\rho \in \Psi(G';\tau_1)$

2) $f(\rho) = -\beta$ si $\rho \in \Psi(G';\tau_2)$

3) $f(\rho) = 0$ si ρ est une représentation de la base de Langlands (sect.6, chap.1) de $Grot(G')$ qui n'est pas dans l'un des deux cas précédents.

Remarque. Les conditions 1) et 2) ont été choisies de façon à ce que 1), 2) et 3) impliquent que $f(\chi \otimes ind_{P_0}^{G'}\pi_0) = 0$ pour tout $\chi \in \Psi(G')$. On a aussi $f(\tau_1) = \alpha \neq 0$.

Deuxième cas : Pour tout $i \in \{2, 3...s\}$ il existe un caractère χ_i non ramifié de G' tel qu'on ait $\tau_i = \chi_i \otimes \tau_1$. Alors, par l'unicité modulo conjugaison de l'induite d'une représentation de carré intégrable qui contient une représentation tempérée donnée on en déduit que les χ_i sont exactement les caractères χ non ramifiés de G' qui vérifient :

$$(res_{P_0}^{G'}\chi) \otimes \pi_0 \simeq \pi_0^w$$

où w est un élément du groupe de Weyl du tore maximal standard de L_0 dans G. En particulier, tous les a_i sont égaux. Aussi, si χ_1 est le caractère trivial de G', $\{\chi_1, \chi_2...\chi_s\}$ est un groupe multiplicatif. Soit alors f_0 une fonction algébrique définie sur la variété $\Psi(G';\tau_1)$ et qui vérifie :

- $f_0(\tau_1) = 1$
- $f_0(\tau_i) = 0$ pour $i \in \{2, 3...s\}$.

Soit ϵ une racine primitive d'ordre s de l'unité. Posons :

$$f_1(\tau) = \sum_{i=1}^{s} \epsilon^{i-1} f_0(\chi_i \otimes \tau) \qquad \forall \tau \in \Psi(G';\tau_1).$$

Définissons cette fois la fonction f sur la base de Langlands de $Grot(G')$ de la façon suivante :

1') $f(\rho) = f_1(\rho)$ si $\rho \in \Psi(G';\tau_1)$

2') $f(\rho) = 0$ si ρ est une représentation de la base de Langlands qui ne se trouve pas dans $\Psi(G';\tau_1)$.

Remarque. Dans ce cas aussi, $f(\chi \otimes ind_{P_0}^{G'}\pi_0) = 0$ pour tout $\chi \in \Psi(G')$, tandis que $f(\tau_1) = 1 \neq 0$.

Nous allons montrer que la fonction f vérifie toujours (qu'on soit dans le premier ou le deuxième cas) les conditions de Paley-Wiener. Montrons d'abord en deux étapes que l'application f s'annule sur toute représentation strictement induite.

Étape 1 : f s'annule sur toute induite d'une représentation essentiellement de carré intégrable d'un sous-groupe de Levi propre. (N'utilise pas l'hypothèse de récurrence.)

Soient P un sous-groupe parabolique propre de G', $P = LU$ une décomposition de Levi de P et σ une représentation essentiellement de carré intégrable de L. Par le lemme 3 de l'Annexe 2 on sait qu'on a deux possibilités :

- si σ est un produit du type $\sigma = \psi \otimes \sigma_u$ où ψ est la restriction à L d'un caractère Ψ de G' et σ_u est de carré intégrable, alors $ind_L^{G'}\sigma = \Psi \otimes ind_L^{G'}\sigma_u$,
- sinon $ind_L^{G'}\sigma$ est une somme de représentations induites strictes de Langlands.

Maintenant, si σ est dans la deuxième situation, $f(ind_P^{G'}\sigma) = 0$ par la construction de f (condition 3 dans le premier cas et 2') dans le deuxième)). Si σ est dans la première situation, alors on a encore une fois deux possibilités :

- ou bien $L = L_0^g$ pour un $g \in G'$ et il existe un caractère θ de L qui est la restriction d'un caractère Θ non ramifié de G' tel que $\sigma_u = \theta \otimes \pi_0^g$; alors, dans $Grot(G')$, on a $ind_L^{G'}\sigma_u = \Theta \otimes ind_{L_0}^{G'}\pi_0$, ce qui implique

$$f(ind_P^{G'}\sigma) = f(\Psi \otimes ind_L^{G'}\sigma_u) = f(\Psi\Theta \otimes ind_{L_0}^{G'}\pi_0) = 0$$

(voir remarques plus haut faites sur la construction de f dans les deux cas),

- ou bien on ne se trouve pas dans cette situation ; alors les séries de composition de $\Theta \otimes ind_{P_0}^{G'}(\pi_0)$ et $ind_P^{G'}\sigma_u$ sont disjointes pour tout $\Theta \in \Psi(G')$. La suite de composition de $ind_P^{G'}\sigma_u$ est donc formée de représentations tempérées, mais ne contient aucun élément de $\cup_{i=1}^{s}\Psi(G';\tau_i)$. Cela implique que la suite de composition de $ind_P^{G'}\sigma = \Psi \otimes ind_P^{G'}\sigma_u$ est formée de représentations essentiellement tempérées mais ne contient aucun élément de $\cup_{i=1}^{s}\Psi(G';\tau_i)$. Donc, encore une fois, $f(ind_P^{G'}\sigma) = 0$ par la condition 3) dans le premier cas et 2') dans le deuxième cas dans la construction de f.

Étape 2 : Les induites strictes de représentations essentiellement de carré intégrable engendrent l'espace des induites dans $Grot(G')$. (Utilise l'hypothèse de récurrence.)

Remarquons que l'hypothèse de récurrence implique que pour tout sous-groupe parabolique propre P de G' qui a une décomposition de Levi $P = LU$, toute représentation tempérée de L est une représentation induite d'une représentation de carré intégrable. Par conséquent, toute représentation essentiellement tempérée de L est une représentation induite d'une représentation essentiellement de carré intégrable.

Soit $P = LU$ un sous-groupe parabolique propre de G'. La remarque plus haut vaut maintenant pour tous les sous-groupes paraboliques de L, propres ou pas cette fois. Mais l'ensemble des induites des représentations essentiellement tempérées de tous les sous-groupes paraboliques (propres ou pas) de L est une famille génératrice de $Grot(L)$ (car elle contient la base de Langlands de L). L'hypothèse de récurrence implique donc que l'ensemble des induites des représentations essentiellement de carré intégrable de tous les sous-groupes paraboliques (propres ou pas) est aussi une famille génératrice de $Grot(L)$. Cela prouve que les induites strictes de représentations essentiellement de carré intégrable engendrent l'espace des induites dans $Grot(G')$.

On a donc montré en deux étapes que f s'annule sur toutes les représentations qui sont des induites strictes. Pour vérifier les conditions de Paley-Wiener sur f il suffit alors de montrer que pour toute représentation irréductible π de G', la restriction de f à $\Psi(G';\pi)$ est algébrique. Pour cela, on écrit π sur la base de Langlands dans $Grot(G')$. Il y a deux types de représentations qui apparaissent dans cette écriture : des représentations essentiellement tempérées de G' et des représentations de Langlands induites strictes. Quand on fait le produit tensoriel d'une représentation de Langlands induite stricte par un caractère, on obtient toujours une induite stricte. Or, on a montré que f s'annule sur toutes les induites strictes. Donc, l'algébricité de f sur $\Psi(G';\pi)$ se réduit à l'algébricité de f sur les variétés $\Psi(G';\tau)$ où τ est une représentation tempérée, qui est évidente par les conditions posées à la construction de f.

Donc f est une fonction trace par application du théorème de Paley-Wiener.

Soit f' une fonction sur G' qui correspond à f par le théorème de Paley-Wiener. On a vu que, pour toute représentation strictement induite σ, on avait $tr\sigma(f') = 0$ ce qui implique que l'intégrale orbitale de f' est nulle sur les éléments semisimples réguliers non elliptiques (proposition 4, Annexe 2). La fonction f' annule de plus les traces de toutes les représentations essentiellement de carré intégrable, mais pas la trace de τ_1. Montrons qu'il y a là une contradiction qui prouve que $s = 1$.

(a) F est de caractéristique nulle

Montrons que l'intégrale orbitale de f' s'annule également sur tous les éléments elliptiques réguliers de G'. Soit ω un caractère unitaire de Z. Comme on est en caractéristique nulle, l'intégrale orbitale de $I_\omega(f')$ se trouve dans l'espace $L^2(G'_e;\omega)$ (prop.1.9.1). En appliquant la proposition 1.4.2 on trouve que pour toute représentation de carré intégrable de G' de caractère central ω on a:

$$tr\pi(f) = \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(\bar{t})[\chi_\pi \Phi(I_\omega(f');\cdot)](\bar{t})d\bar{t}.$$

Comme l'intégrale orbitale de $I_\omega(f')$ est nulle sur les éléments semisimples réguliers non elliptiques, la somme porte seulement sur les tores elliptiques et elle peut s'écrire

$$tr(\pi)(I_\omega(f')) =< \chi_\pi; \Phi(I_\omega(f');\cdot) > .$$

Mais $tr\pi(I_\omega(f') = tr\pi(f') = 0$ et donc $\Phi(I_\omega(f');\cdot)$ est orthogonal à χ_π. comme c'est vrai pour tout π de carré intégrable et de caractère central ω on en déduit que $\Phi(I_\omega(f');\cdot)$ est identiquement nulle sur G'_e par le corollaire 2.3.9. Comme c'est vrai pour tout caractère unitaire ω de Z on en déduit que l'intégrale orbitale de f' est nulle sur G'_e, comme on l'a fait dans la preuve de la proposition2, annexe 2. Donc l'intégrale orbitale de f' est finalement nulle sur G'^{sr}. Dans ce cas on peut appliquer la proposition 3 de l'annexe 2 (on est en caractéristique nulle), et en déduire que la trace de toute représentation de G' est nulle sur f'. Mais cela contredit $tr(\tau_1(f')) \neq 0$. En conclusion $s = 1$ et on a $ind_{P_0}^{G'}\pi_0 = a\tau$ où a est un entier strictement positif et τ est une représentation tempérée de G'.

(b) F est de caractéristique positive

On reprend les notations du chapitre 3. On va considérer maintenant un corps local L de caractéristique nulle m-proche de F, tel que $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f')$ annule la trace de toute représentation strictement induite et de toute représentation essentiellement de carré intégrable de G'_L d'une part, et que $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\tau_1)$ soit bien définie d'autre part. Par ce qui précède, L étant de caractéristique nulle, on saura que $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f')$ annule la trace de toute représentation de G'_L. On obtiendra ainsi une contradiction avec l'égalité

$$tr\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\tau_1)(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f')) = tr\tau_1(f').$$

L'idée pour trouver un tel m est d'utiliser la proposition 4.1.2 plus bas. Mais adoptons d'abord quelques notations.

Dans ce qui suit on notera les sous-groupes de Levi avec la lettre M (contrairement à la convention observée jusqu'ici) pour ne pas les confondre avec le corps L. Sur $G'_F = GL_r(D_F)$, la paire parabolique standard sera par convention $(A; P)$ où A est le tore diagonal et P est le groupe des matrices dans G'_F qui sont triangulaires supérieures. On adopte les mêmes conventions sur G'_L. Ainsi, un sous-groupe de Levi standard M de G'_F ou G'_L est formé des matrices diagonales par blocs de taille donnée et on peut associer à M de façon biunivoque une suite ordonnée d'entiers strictement positifs $n_1, n_2 ... n_t$ telle que $\sum_{i=1}^t n_i = r$ où les

n_i représentent les tailles de ces blocs. À un sous-groupe de Levi standard de G'_F correspond donc un unique sous-groupe de Levi standard de G'_L. C'est pareil pour les sous-groupes paraboliques standard. Si M_F est un sous-groupe de Levi standard de G'_F on note M_L le sous-groupe de Levi standard de G_L qui lui correspond, et si P_F est un sous-groupe parabolique standard de G'_F on note P_L le sous-groupe parabolique standard de G'_L qui lui correspond.

Proposition 4.1.2 . *Soient P_F un sous-groupe parabolique standard de G'_F et $P_F = M_F U_F$ la décomposition de Levi standard de P_F. Alors il existe un m tel que, si F et L sont m-proches, alors $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f')$ et $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f'^{P_F})$ sont bien définies et on a*

$$(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f'))^{P_L} = \bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f'^{P_F}).$$

Démonstration. L'analogue de cette proposition dans le cas particulier $G'_F = GL_r(F)$ est montré à la page 1053 de [Le3]. La démonstration est exactement la même dans notre cas.

Soit $\mathcal{P}_F$ l'ensemble de tous les sous-groupes paraboliques standard, propres ou pas, de G_F et soit m un entier suffisamment grand pour que, pour tout corps local L qui est m-proche de F, la proposition 4.1.2 plus haut soit vérifiée pour tout $P_F \in \mathcal{P}_F$ qui a une décomposition de Levi standard $P_F = M_F N_F$ (c'est possible puisque $\mathcal{P}_F$ est un ensemble fini). On a alors :

1) si P_L est un sous-groupe parabolique standard propre de G'_L, si $P_L = M_L U_L$ est une décomposition de Levi standard de P_L, si π est une représentation lisse irréductible de M_L, alors :

- ou bien le niveau de π est supérieur strictement à m et alors

$$tr\pi(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f'^{P_F})) = 0,$$

- ou bien le niveau de π est inférieur ou égal à m et alors, en supposant que σ est la représentation lisse irréductible de M_F qui vérifie $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\sigma) = \pi$ on peut écrire :

$$tr\pi(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f'^{P_F})) = tr\sigma(f'^{P_F}) = tr(ind_{P_F}^{G'_F}\sigma)(f') = 0$$

car f' annule la trace de toute représentation strictement induite sur G'_F.

Dans les deux cas on obtient $tr\pi(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f'^{P_F})) = 0$ ce qui implique, compte tenu de la proposition 4.1.2 plus haut, que

$$tr(ind_{P_L}^{G'_L}\pi)(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f')) = 0.$$

Finalement, on a trouvé que $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f')$ est une fonction qui annule la trace de toute représentation induite stricte de G'_L.

2) si π est une représentation essentiellement de carré intégrable de G_L, alors ou bien son niveau est supérieur à m et donc $tr\pi(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f')) = 0$ ou bien son niveau est inférieur ou ègal à m et alors, en supposant que σ est la représentation lisse irréductible de G'_F qui vérifie $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\sigma) = \pi$ on a que σ est une représentation essentiellement de carré intégrable (prop.3.2.14) et par conséquent

$$tr\pi(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f')) = tr\sigma(f') = 0$$

car f' annule la trace de toute représentation essentiellement de carré intégrable de G'_F. Finalement, on a trouvé que $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f')$ annule la trace de toute représentation essentiellement de carré intégrable de G'_L.

Par les points 1) et 2) ci-dessus et par le raisonnement fait déjà en caractéristique nulle, on en déduit que $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f')$ annule la trace de toutes les représentations de G'_L. D'autre part, comme $tr\tau_1(f') \neq 0$, le niveau de τ_1 est inférieur ou égal à m et donc $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\tau_1)$ est bien défini et

$$tr\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\tau_1)(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f')) = tr\tau_1(f') \neq 0.$$

Contradiction. On trouve donc, comme en caractéristique nulle, que $s = 1$ et on a $ind^{G'}_{P_0}\pi_0 = a\tau$ où a est un entier strictement positif et τ est une représentation tempérée de G'.

Le fait que $a = 1$ se montre exactement de la même façon que les étapes (2) et (3) de la preuve de la proposition 27 de [FK], page 98. Je fais ici la remarque que l'étape (1) de la dite démonstration est incorrecte, puisqu'on y utilise pour des *représentations essentiellement de carré intégrable* le résultat selon lequel les suites de composition de deux induites à partir de *représentations de carré intégrable* sont ou égales ou disjointes. Or, ce résultat est faux pour des représentations essentiellement de carré intégrable par exemple parce que l'induite d'une représentation cuspidale peut très bien contenir une représentation essentiellement de carré intégrable, ainsi que d'autres sous-quotients. Mais cette étape (1) peut être remplacée par la démonstration plus haut (cas de caractéristique nulle), inspirée elle même de [DKV].

4.2 Correspondance de toutes les représentations

4.2.1 Correspondance entre les groupes de Grothendieck

Dans cette sous-section F est un corps local non archimédien, D est une algèbre centrale simple sur F de dimension d^2, r est un entier strictement positif, $n = rd$, $G = GL_n(F)$ et $G' = GL_r(D)$. Sur G comme sur G', la paire parabolique minimale standard sera formée par convention du tore diagonal et du groupe des matrices triangulaires supérieures. Ainsi, à un sous-groupe de Levi standard de G' correspond un unique sous-groupe de Levi standard de G et à un sous-groupe parabolique standard de G' correspond un unique sous-groupe parabolique standard de G. Si L' est un sous-groupe de Levi standard de G' et L est le sous-groupe de Levi standard de G qui lui correspond, L' est un produit de groupes du type $GL_k(D)$ et L est un produit de groupes du type $GL_{dk}(F)$ qui leur correspondent. Il y a donc une correspondance qu'on note toujours $\mathbf{C}$ entre les représentations essentiellement de carré intégrable de L et les représentations essentiellement de carré intégrable de L' induite par la correspondance $\mathbf{C}$ du théorème 3.3.19. Si P est un sous-groupe de Levi standard de G (ou G'), si L est son sous-groupe de Levi standard si π est une représentation de L, si g est un élément de G (ou G'), on adopte les notations P^g pour $g^{-1}Pg$, L^g pour $g^{-1}Lg$ et π^g pour $\pi(g \cdot g^{-1})$.

Proposition 4.2.1 . *Soit $\mathcal{B}_G$ l'ensemble des représentations induites de représentations essentiellement de carré intégrable de tous les sous-groupes paraboliques standard de G. Alors $\mathcal{B}_G$ n'est autre que la base de Langlands de $Grot(G)$. Soit $\mathcal{B}_{G'}$ l'ensemble des représentations induites de représentations essentiellement de carré intégrable de tous les sous-groupes paraboliques standard de G'. Alors $\mathcal{B}_{G'}$ n'est autre que la base de Langlands de $Grot(G')$.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{B}_G$ est une base de $Grot(G)$ ressort de [Z] sans que le fait que c'est exactement la base de Langlands y soit dit explicitement. Ce résultat est en fait une conséquence directe du fait que les induites des représentations de carré intégrable sont irréductibles et la démonstration est la même sur les deux groupes :

- si $(A; P; \tau; \nu)$ est un quadruplet de Langlands pour G (ou G'), alors il existe un couple $(P'; \sigma)$ tel que P' est un sous-groupe parabolique standard de G (ou G') inclus dans P, σ est une représentation de carré intégrable du sous-groupe de Levi standard de P' et τ est une sous-représentation de $ind_{P'}^{P}\sigma$. Par l'irréductibilité des induites des représentations de carré intégrable (théorème 4.1.1), on en déduit que $\tau = ind_{P'}^{P}\sigma$ et par conséquent $\nu \otimes \tau = ind_{P'}^{P}((res_{P'}^{P}\nu) \otimes \sigma)$ d'où

$$ind_P^{G \text{ ou } G'}(\nu \otimes \tau) = ind_{P'}^{G \text{ ou } G'}((res_{P'}^{P}\nu) \otimes \sigma);$$

- si P' est un sous-groupe parabolique standard de G (ou G') et L' son sous-groupe de Levi standard, si χ est un caractère de L' et σ est une représentation de carré intégrable de L', alors il existe un sous-groupe parabolique standard P de G (ou G') contenant P' et maximal pour la propriété qu'il existe un caractère ν de P tel que $res_{P'}^{P}\nu = \chi$. Alors, par irréductibilité des induites des représentations de carré intégrable $ind_{P'}^{P}(\chi \otimes \sigma) = \nu \otimes \tau$ où τ est une représentation tempérée. Si A est le tore maximal standard de P, alors $(A; P; \tau; \nu)$ est conjugué dans G à un quadruplet de Langlands $(A^g; P^g; \tau^g; \nu^g)$ (voir démonstration du lemme 3, annexe 2). On a alors d'une part

$$ind_P^{G \text{ ou } G'}(\nu \otimes \tau) = ind_{P'}^{G \text{ ou } G'}((res_{P'}^{P}\nu) \otimes \sigma)$$

et d'autre part, dans le groupe de Grothendieck,

$$ind_P^{G \text{ ou } G'}(\nu \otimes \tau) = ind_{P^g}^{G \text{ ou } G'}(\nu^g \otimes \tau^g).$$

D'où le résultat.

Soit $\mathbf{JL}_r$ l'application définie sur $\mathcal{B}_{G'}$ à valeurs dans $Grot(G)$ de la façon suivante : soient P' un sous-groupe parabolique standard (propre ou pas) de G', L' le sous-groupe de Levi standard de P' et σ une représentation essentiellement de carré intégrable de L' ; soient P le sous-groupe parabolique standard de G qui correspond à P', L le sous-groupe de Levi standard de P (L correspond à L') et σ la représentation essentiellement de carré intégrable de L qui vérifie $\mathbf{C}(\sigma) = \sigma'$; on pose

$$\mathbf{JL}_r(ind_{P'}^{G'}\sigma') = ind_P^G\sigma.$$

Grâce à la proposition précédente, $\mathbf{JL}_r$ s'étend de façon unique en un morphisme injectif de $\mathbb{Z}$-modules de $Grot(G')$ dans $Grot(G)$.

Théorème 4.2.2 . *a) Le morphisme injectif de $\mathbb{Z}$-modules*

$$\mathbf{JL}_r : Grot(G') \to Grot(G),$$

commute à la tensorisation avec des caractères, et on a

$$\chi_{\pi'}(g') = (-1)^{n-r}\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(g) \qquad \forall\, g \leftrightarrow g'.$$

b) Le morphisme $\mathbf{JL}_r$ réalise une bijection

- entre les représentations de carré intégrable de G' et les représentations de carré intégrable de G, ainsi qu'entre les représentations essentiellement de carré intégrable de G' et les représentations essentiellement de carré intégrable de G (l'application inverse n'est autre que $\mathbf{C}$),

- entre les représentations tempérées de G' et les représentations tempérées de G qui sont des induites de représentations de carré intégrable de sous-groupes

paraboliques de G qui se transfèrent, ainsi qu'entre les représentations essentiellement tempérées de G' et les représentations essentiellement tempérées de G qui sont des induites de représentations essentiellement de carré intégrable de sous-groupes paraboliques de G qui se transfèrent,

- entre les représentations cuspidales de G' et les représentations essentiellement de carré intégrable de G dont la restriction de Jacquet à tout sous-groupe parabolique qui se transfère est nulle.

c) Soit $\mathrm{S}_{G,G'}$ le sous-module de $Grot(G)$ engendré par l'ensemble des représentations induites de représentations essentiellement de carré intégrable de tous les sous-groupes paraboliques qui ne se transfèrent pas. Alors $\mathrm{S}_{G,G'}$ est un supplémentaire de l'image $Im(\mathbf{JL}_r)$ de $\mathbf{JL}_r$ dans $Grot(G)$ et $\mathbf{JL}_r$ induit un isomorphisme

$$Grot(G') \simeq Grot(G)/\mathrm{S}_{G,G'}.$$

Démonstration. a) Pour vérifier qu'on a

$$\chi_{\pi'}(g') = (-1)^{n-r}\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(g) \qquad \forall\, g \leftrightarrow g'$$

pour tout $\pi' \in Grot(G')$ il suffit de le vérifier pour tout $\pi' \in \mathcal{B}_{G'}$. Si π' est une représentation essentiellement de carré intégrable c'est le théorème 3.3.19 car $\mathbf{JL}_r(\pi') = \mathbf{C}^{-1}(\pi')$. Si π' est une induite stricte d'une représentation essentiellement de carré intégrable cela résulte de la définition de $\mathbf{JL}_r(\pi')$ et du théorème 1.3.2.

Pour montrer que $\mathbf{JL}_r$ commute à la tensorisation avec des caractères il suffit de le montrer sur la base $\mathcal{B}_{G'}$. Soit χ un caractère de G'. Si $\pi' = ind_{P'}^{G'}\sigma'$, où P' est un sous-groupe parabolique standard de G' et σ' est une représentation essentiellement de carré intégrable du sous-groupe de Levi standard L' de P', alors on a

$$\chi \otimes \pi' = ind_{P'}^{G'}((res_{P'}^{G'}\chi) \otimes \sigma').$$

Or, $(res_{P'}^{G'}\chi) \otimes \sigma'$ est une représentation essentiellement de carré intégrable de L'. Soient P le sous-groupe parabolique standard de G correspondant à P', L son sous-groupe de Levi standard et σ la représentation essentiellement de carré intégrable de L qui correspond à σ' par la correspondance entre L et L'. On a alors par définition de $\mathbf{JL}_r$:

$$\mathbf{JL}_r(ind_{P'}^{G'}((res_{P'}^{G'}\chi) \otimes \sigma')) = ind_P^G((res_P^G\chi) \otimes \sigma).$$

On en déduit que

$$\mathbf{JL}_r(\chi \otimes \pi') = \mathbf{JL}_r(ind_{P'}^{G'}((res_{P'}^{G'}\chi) \otimes \sigma')) = ind_P^G((res_P^G\chi) \otimes \sigma) =$$

$$\chi \otimes ind_P^G\sigma = \chi \otimes \mathbf{JL}_r(ind_{P'}^{G'}\sigma') = \chi \otimes \mathbf{JL}_r(\pi').$$

b) L'assertion sur les représentations essentiellement de carré intégrable est le théorème 3.3.19 de correspondance. L'assertion sur les représentations de carré intégrable en résulte puisque $\mathbf{C}$ conserve le caractère central et une représentation essentiellement de carré intégrable est de carré intégrable si et seulement si son caractère central est unitaire. Les représentations tempérées de G' sont exactement les induites de représentations de carré intégrable des sous-groupes paraboliques strictes ou pas et l'assertion sur les représentations tempérées est imédiate. Le morphisme $\mathbf{JL}_r$ commute à la tensorisation avec des caractères, donc on peut passer des représentations tempérées aux représentations essentiellement tempérées. La partie concernant les représentations cuspidales est le théorème B.2.b de [DKV]. Elle découle aussi immédiatement de la proposition B, page 70.

c) Le fait que $\mathbf{S}_{G,G'}$ est un sous-module supplémentaire de $Im(\mathbf{JL}_r)$ dans $Grot(G)$ est une conséquence triviale du fait que $\mathcal{B}_G \backslash \mathbf{JL}_r(\mathcal{B}_{G'})$ est par définition une base de $\mathbf{S}_{G,G'}$. Le fait que le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules $Grot(G') \rightarrow Grot(G)/\mathbf{S}_{G,G'}$ obtenu par composition de la projection $Grot(G) \rightarrow Grot(G)/\mathbf{S}_{G,G'}$ avec $\mathbf{JL}_r$ est un isomorphisme s'ensuit, parce que $\mathbf{JL}_r$ est injectif et réalise donc une bijection de $Grot(G')$ sur son image.

Compléments

1) Le morphisme $\mathbf{JL}_r$ n'envoie pas toute représentation cuspidale de G' sur une représentation cuspidale de G. C'est le cas si et seulement si l'ensemble de nombres premiers qui divisent n coïncide avec l'ensemble de nombres premiers qui divisent r (c'est une conséquence du fait que de toute façon l'image d'une représentation cuspidale de G' est une représentation essentiellement de carré intégrable de G, de la description des sous-groupes de Levi standard de G pour lesquels la restriction d'une représentation essentiellement de carré intégrable est non nulle dans [Z], et de la proposition B, page 70).

2) Le morphisme $\mathbf{JL}_r$ n'envoie pas toute représentation irréductible de G' sur une représentation irréductible de G, sauf si $d = 1$ ou $r = 1$. Donons un contre-exemple qui se généralise facilement. Soient $n = 4$, $d = 2$, L' le tore diagonal de $G' = GL_2(D)$ et L le sous-groupe de Levi standard de $G = GL_4(F)$ qui lui correspond. Soit ρ un caractère de F. En utilisant les notations de [Z], considérons la représentation essentiellement de carré intégrable σ de L :

$$\sigma =< [\rho; \nu\rho] >^t \otimes < [\nu\rho; \nu^2\rho] >^t .$$

Le théorème 9.7 de [Z] implique que la représentation induite de σ à G est réductible, puisque les segments $[\rho; \nu\rho]$ et $[\nu\rho; \nu^2\rho]$ sont liés. Soit σ' la représentation essentiellement de carré intégrable de L' qui correspond à σ. Alors le lemme 2.5 de [Ta] implique que la représentation induite de σ' à G' est irréductible parce que $d = 2$ ne divise pas la longeur du segment $[\rho; \nu\rho] \cap [\nu\rho; \nu^2\rho] = [\nu\rho; \nu\rho]$.

On peut donc dire qu'en général, à une représentation irréductible π de G' correspond une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de représentations irréductibles de G. On peut montrer par récurrence que, si π est le quotient de Langlands du quadruplet $(A'; P'; \nu; \tau')$, alors le quotient de Langlands du quadruplet $(A; P; \nu; \tau)$ où A correspond à A', P correspond à P' et τ correspond à τ' figure dans cette combinaison linéaire avec un coefficient égal à $(-1)^{n-r}$ et que tout autre représentation irréductible qui y figure est le quotient de Langlands d'un quadruplet strictement inférieur à $(A; P; \nu; \tau)$ pour l'ordre défini au 2.1, chapitre XI, [BW].

3) Le théorème 4.2.2 implique que, si D et D' sont deux algèbres à division de même dimension sur F, si r est un entier strictement positif, il y a une bijection

$$f : Grot(GL_r(D)) \simeq Grot(GL_r(D'))$$

telle que pour tout $\pi \in Grot(D)$ on ait :

$$\chi_\pi(g) = \chi_{f(\pi)}(g')$$

pour tout $g \in GL_r(D)^{sr}$ et tout $g' \in GL_r(D')^{sr}$ qui ont le même polynôme caractéristique. Une question intéressante serait si cette fois, la correspondance f envoie une représentation irréductible sur une représentation irréductible. Cela n'a pas l'air évident, même si le théorème 4.2.6 de la sous-section suivante implique que la correspondance f commute avec l'induction et la restriction, ainsi qu'à l'involution définie par A.-M. Aubert ([Au]).

4) En définissant le morphisme $\mathbf{JL}_r$ ainsi on a fait le choix (naturel d'un certain point de vue) de privilégier les représentations de carré intégrable. En effet, les propriétés imposées au point a) du théorème ne caractérisent pas le morphisme $\mathbf{JL}_r$, et même les propriétés imposées au points a) et b) ne le caractérisent pas non plus. En regardant "dans l'autre sens" on obtient le résultat suivant plus naturel d'un autre point de vue puisqu'il est assorti d'"unicité" :

Proposition 4.2.3 . *Il existe un unique morphisme de $\mathbb{Z}$-modules*

$$\mathbf{LJ}_r : Grot(G) \to Grot(G')$$

tel que pour tout $\pi' \in Grot(G')$, l'image réciproque de π' par $\mathbf{LJ}_r$ est l'ensemble de tous les $\pi \in Grot(G)$ qui vérifient :

$$\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\pi'}(g') \qquad \forall g \leftrightarrow g'.$$

Le morphisme $\mathbf{LJ}_r$ *est surjectif.*

4.2.2 Correspondance entre les algèbres de Hopf

Dans cette sous-section, F désigne un corps local non archimédien et D une algèbre à division centrale sur F, de dimension d^2.

Soit n un entier strictement positif. Soit G l'un des groupes $GL_n(F)$ ou $GL_n(D)$. Par convention, sur le groupe G la paire parabolique minimale standard sera formée du tore diagonal et du groupe des matrices triangulaires supérieures. On note $W(G)$ le groupe formé par les matrices de permutation dans G qu'on identifie aussi avec le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2\ ...n\}$. Si L est un sous-groupe de Levi standard de G, alors on pose ${}^wL = wLw^{-1}$ et si π est une représentation de L, on note ${}^w\pi$ la représenetation de ${}^wL$ définie par ${}^w\pi(g) = \pi(w^{-1}gw)$. On utilise aussi les notations: L^w pour ${}^{w^{-1}}L$ et π^w pour ${}^{w^{-1}}\pi$. Si L est un sous-groupe de Levi standard de G alors il existe une partition $A_1 \coprod A_2 \coprod ... \coprod A_k$ de l'ensemble $\{1, 2\ ...n\}$ où $A_1 = \{1, 2\ ...n_1\}$, $A_2 = \{n_1 + 1, n_1 + 2\ ...n_2\}$ etc. telle que L soit l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in G$ telles que m_{ij} est nul si $(i; j) \notin \cup_{i=1}^k A_i \times A_i$. On appelle les ensembles ordonnés $A_1, A_2 ... A_k$ les *sections* de L et on pose aussi $|L| = n - k - 1$. Maintenant, si L_1 et L_2 sont deux sous-groupes de Levi standard de G, on note $W(L_1, L_2)$ le sous-groupe de $W(G)$ formé des éléments w qui vérifient:

- $w(k) < w(l)$ si $k < l$ et k et l sont dans la même section de L_1
- $w^{-1}(k) < w^{-1}(l)$ si $k < l$ et k et l sont dans la même section de L_2.

Si $w \in W(L_1; L_2)$, alors ${}^wL_1 \cap L_2$ et $L_1 \cap L_2^w$ sont des sous-groupes de Levi standard de G. Dans ce qui suit, on n'utilise les foncteurs d'induction et de restriction qu'à partir de sous-groupes paraboliques standard de G et qui vont donc être déterminés par leur sous-groupes de Levi standard. On adopte donc les notations de [Au]: si L_1 et L_2 sont deux sous-groupes de Levi standard de G tels que $L_1 \subset L_2$, alors on pose $\mathbf{i}_{L_1}^{L_2} = ind_{P_1}^{P_2}$ et $\mathbf{r}_{L_1}^{L_2} = res_{P_1}^{P_2}$ où P_1 et P_2 sont les sous-groupes paraboliques standard qui ont pour sous-groupes de Levi standard L_1 et L_2 respectivement.

Rappelons ici sous forme d'un lemme le théorème 1.2 de [Z], résultat qui nous sera utile par la suite:

Lemme 4.2.4 . *Soient* L_1 *et* L_2 *deux sous-groupes de Levi standard de* G*. Soit* π *une représentation de* L_1*. On a alors:*

$$\mathbf{r}_{L_2}^G \mathbf{i}_{L_1}^G \pi = \sum_{w \in W(L_1, L_2)} \mathbf{i}_{{}^wL_1 \cap L_2}\big((\mathbf{r}_{L_1 \cap L_2^w} \pi)^w\big).$$

Posons

$$\mathcal{R}(F) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} Grot(GL_n(F))$$

où par convention, pour $n = 0$ on met $GL_n(F) = Grot(GL_n(F) = \mathbb{Z}$. Si L est un sous-groupe de Levi standard de $GL_n(F)$ à k blocs, on considérera $\mathbf{r}_L^G$ comme une application linéaire de $Grot(GL_n(F))$ à valeurs dans $\otimes^k\mathcal{R}(F)$.

A.Zelevinski a muni l'espace vectoriel $\mathcal{R}(F)$ d'une multiplication m et une comultiplication c qui en font une algèbre de Hopf graduée ([Z]). Avec les notations et conventions plus haut, la multiplication et la comultiplication de Zelevinski se définissent de la façon suivante :

- si $\pi_k \in Grot(GL_k(F))$ et $\pi_{k'} \in Grot(GL_{k'}(F))$, alors on identifie $GL_k(F) \times GL_{k'}(F)$ avec le sous-groupe de Levi standard L de $GL_{k+k'}(F)$ de blocs diagonaux de taille k puis k' et on pose

$$m(\pi_k; \pi_{k'}) = \mathbf{i}_L^G(\pi_k \otimes \pi_{k'})$$

et on étend par bilinéarité à une application de $\mathcal{R}(F) \otimes \mathcal{R}(F)$ à valeurs dans $\mathcal{R}(F)$.

- si $\pi \in Grot(GL_n(F))$, on identifie $GL_k(F) \times GL_{k'}(F)$, $k + k' = n$, à un sous-groupe de Levi standard maximal de $GL_n(F)$, $L_{k,k'}$, et on pose

$$c(\pi) = \sum_{k+k'=n} \mathbf{r}_{L_{k,k'}}^{GL_n(F)}\pi \ ;$$

on étend ensuite par linéarité à une application de $\mathcal{R}(F)$ à valeurs dans $\mathcal{R}(F) \otimes \mathcal{R}(F)$.

Exactement de la même façon on peut poser

$$\mathcal{R}(D) = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} Grot(GL_r(D)).$$

Si L est un sous-groupe de Levi standard de $GL_r(D)$ à k blocs, on regarde $\mathbf{r}_L^G$ comme une application linéaire de $Grot(GL_r(D))$ à valeurs dans $\otimes^k\mathcal{R}(D)$. On peut munir l'espace vectoriel $\mathcal{R}(D)$ d'une multiplication m' et une comultiplication c' définies comme plus haut et vérifier comme dans [Z] qu'on obtient ainsi une algèbre de Hopf graduée.

A. Zelevinski a aussi défini une involution de l'algèbre de Hopf $\mathcal{R}(F)$ (prop. 9.12, [Z]) qui s'avère être une inversion au sens de [Bou2] (prop. 9.16, [Z]). Dans [Au], A.-M. Aubert définit une involution du groupe de Grothendieck d'un groupe réductif quelconque. Elle montre également que cette involution envoie une représentation irréductible sur une représentation irréductible au signe près et que cette involution coïncide au signe près avec celle de A. Zelevinski dans le cas du groupe linéaire. Revenons à la notation $G = GL_n(F)$ ou $GL_n(D)$. Sur $Grot(G)$, l'involution de [Au] est définie de la façon suivante : si $\mathcal{L}$ est l'ensemble de sous-groupes de Levi standard de G , si π est un élément de $Grot(G)$, alors

$$i(\pi) = \sum_{L \in \mathcal{L}} (-1)^{|L|} \mathbf{i}_L^G \mathbf{r}_L^G(\pi).$$

À partir de maintenant on note toujours i l'involution induite par i sur $\mathcal{R}(F)$ et i' l'involution induite par i sur $\mathcal{R}(D)$ et on ne parle plus d'involution du groupe de Grothendieck mais d'involution de $\mathcal{R}(F)$ ou $\mathcal{R}(D)$. On vérifie comme dans [Z], prop. 9.16, que i' est une inversion de $\mathcal{R}(D)$ au sens de [Bou2].

Proposition 4.2.5 . *En tant qu'anneau, $\mathcal{R}(F)$ est isomorphe à l'anneau de polynômes en une infinité de variables commutatives $\mathbb{Z}[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi^2(GL_n(F))]$ et, toujours en tant qu'anneau, $\mathcal{R}(D)$ est isomorphe à l'anneau de polynômes en une infinité de variables commutatives $\mathbb{Z}[\bigcup_{r \in \mathbb{N}} \Pi^2(GL_r(D))]$.*

Démonstration. Pour $\mathcal{R}(F)$, cette proposition est une conséquence du corrolaire 7.5, du théorème 9.3, et de la proposition 9.16 de [Z]. Autant pour $\mathcal{R}(F)$ que pour $\mathcal{R}(D)$ c'est une conséquence immédiate de la proposition 4.2.1.

Théorème 4.2.6 . *a) L'ensemble des morphismes injectifs de $\mathbb{Z}$-modules*

$$\mathbf{JL}_r : Grot(GL_r(D)) \to Grot(GL_{rd}(F))$$

pour tout r induit un morphisme injectif d' anneaux

$$\mathbf{JL} : \mathcal{R}(D) \to \mathcal{R}(F).$$

b) L'image de $\mathbf{JL}$ est le sous-anneau de $\mathcal{R}(F)$ engendré par les représentations essentiellement de carré intégrable de tous les $GL_n(F)$ tels que d divise n. L'idéal $\mathbf{I}_{F,D}$ de l'anneau $\mathcal{R}(F)$ engendré par les représentations essentiellement de carré intégrable de tous les $GL_n(F)$ tels que d ne divise pas n est un $\mathbb{Z}$-module supplémentaire de l'image de $\mathbf{JL}$ dans $\mathcal{R}(F)$.

c) La comultiplication et l'involution de $\mathcal{R}(F)$ induisent des opérations bien définies sur l'anneau $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$. L'anneau $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$ hérite ainsi d'une structure d'algèbre de Hopf et d'une inversion. L'application $\mathbf{JL}$ induit un isomorphisme d' algèbres de Hopf

$$\mathbf{JLH} : \mathcal{R}(D) \simeq \mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}.$$

L'isomorphisme $\mathbf{JLH}$ respecte l'inversion au signe près.

Démonstration. a) Pour tout entier positif r, $\mathbf{JL}_r$ induit une bijection de $\Pi^2(GL_r(D))$ sur $\Pi^2(GL_{rd}(F))$. La proposition 4.2.5 implique que cette restriction de $\mathbf{JL}_r$ aux représentations essentiellement de carré intégrable pour tout r induit un unique morphisme d'anneaux $\mathbf{JL}$ de $\mathcal{R}(D)$ dans $\mathcal{R}(F)$, qui de plus est injectif. On doit prouver que pour tout r l'application $\mathbf{JL}$ coïncide avec $\mathbf{JL}_r$ sur $Grot(GL_r(D))$ tout entier. Par la proposition 4.2.1 et par linéarité des deux applications, il suffit de vérifier que pour deux représentations essentiellement de carré intégrable π_1' de $GL_{r_1}(D)$ et π_2' de $GL_{r_2}(D)$, on a

$$m(\mathbf{JL}_{r_1}(\pi_1');\mathbf{JL}_{r_2}(\pi_2')) = \mathbf{JL}_{r_1+r_2}(m'(\pi_1';\pi_2')).$$

Mais cela fait partie de la définition même de $\mathbf{JL}_{r_1+r_2}$.

b) Partant de la définition de $\mathbf{JL}$, le fait que l'image de $\mathbf{JL}$ est le sous-anneau de $\mathcal{R}(F)$ engendré par les représentations essentiellement de carré intégrable de tous les $GL_n(F)$ tels que d divise n est tautologique. En écrivant maintenant

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Pi^2(GL_n(F)) = \Big(\bigcup_{d|n} \Pi^2(GL_n(F))\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{d\nmid n} \Pi^2(GL_n(F))\Big),$$

on a que tout polynôme en les variables $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Pi^2(GL_n(F))$ s'écrit de façon unique comme la somme d'un polynôme en les variables $\bigcup_{d|n} \Pi^2(GL_n(F))$ et un polynôme dont chaque monôme contient au moins une variable se trouvant dans l'ensemble $\bigcup_{d\nmid n} \Pi^2(GL_n(F))$. On en déduit l'égalité de $\mathbb{Z}$-modules:

$$\mathcal{R}(F) = Im(\mathbf{JL}) \oplus \mathbf{I}_{F,D}.$$

c) Par le point b) le morphisme injectif d'anneaux $\mathbf{JL} : \mathcal{R}(D) \to \mathcal{R}(F)$ induit un isomorphisme d'*anneaux* $\mathbf{JLH} : \mathcal{R}(G') \to \mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$. Il suffit de montrer que la comultiplication c et l'involution i de $\mathcal{R}(F)$ "passent au quotient" et que $\mathbf{JLH}$ commute à la comultiplication et à l'involution. Reprenons les notations de la sous-section précédente: $r \in \mathbb{N}^*$, $G' = GL_r(D)$ et $G = GL_{rd}(F)$. On va étudier l'effet du foncteur restriction sur les bases $\mathcal{B}_G$ et $\mathcal{B}_{G'}$. On commence par les représentations essentiellement de carré intégrable.

Dans ce qui suit on suppose que le lecteur est un peu familiarisé avec les articles [BZ] et [Z].

Lemme 4.2.7 . *a) Soit σ une représentation essentiellement de carré intégrable de G qui correspond à un segment $[\rho;\nu^{k-1}\rho]$ de Zelevinski. Soit L un sous-groupe de Levi standard de G. Alors $\mathbf{r}_L^G\sigma$ est la représentation nulle si l'entier n/k ne divise pas la taille de tous les blocs de L et $\mathbf{r}_L^G\sigma$ est une représentation essentiellement de carré intégrable de L si l'entier n/k divise la taille de tous les blocs de L.*

b) Soient σ' une représentation essentiellement de carré intégrable de G' et L' un sous-groupe de Levi standard de G'. Posons $\sigma = \mathbf{JL}_r(\sigma')$. Supposons que la représentation essentiellement de carré intégrable σ de G correspond à un segment $[\rho; \nu^{k-1}\rho]$. Soit L le sous-groupe de Levi standard de G qui correspond à L. Alors $\mathbf{r}_{L'}^{G'}\sigma'$ est la représentation nulle si l'entier n/k ne divise pas la taille de tous les blocs de L et $\mathbf{r}_{L'}^{G'}\sigma'$ est une représentation essentiellement de carré intégrable de L' si l'entier n/k divise la taille de tous les blocs de L. En fait $\mathbf{r}_{L'}^{G'}\sigma'$ et $\mathbf{r}_{L}^{G}\sigma$ se correspondent par $\mathbf{C}$.

Démonstration. Le point a) est la proposition 9.5 de [Z]. Le point b) est alors la conséquence directe de la proposition B, page 70. Ce résultat est montré aussi dans [DKV], théorème B.2.b.

Appliquons maintenant le lemme 4.2.4 à un élément π de $\mathcal{B}_G$. On a $\pi = \mathbf{i}_L^G\sigma$ où σ est une représentation essentiellement de carré intégrable du sous-groupe de Levi standard L_1 de G. Soit L_2 un autre sous-groupe de Levi standard de G. On a alors

$$\mathbf{r}_{L_2}^G\pi = \mathbf{r}_{L_2}^G\mathbf{i}_{L_1}^G\sigma = \sum_{w\in W(L_1,L_2)} \mathbf{i}_{{}^wL_1\cap L_2}\big((\mathbf{r}_{L_1\cap L_2^w}\sigma)^w\big).$$

Le lemme 4.2.7 implique alors que $r_{L_2}^G\pi$ est une somme de représentations de L_2 qui sont des induites de représentations essentiellement de carré intégrable de sous-groupes de Levi standard de L_2 du type ${}^wL_1 \cap L_2$. Notons $W(L_1;L_2)_d$ l'ensemble des éléments $w \in W(L_1;L_2)$ tels que ${}^wL_1 \cap L_2$ se transfère (c. à. d. que d divise le cardinal de toutes ses sections). Écrivons

$$\mathbf{r}_{L_2}^G\pi = \mathbf{r}_{L_2}^G\mathbf{i}_{L_1}^G\sigma = \tag{4.1}$$

$$\sum_{w\in W(L_1,L_2)_d} \mathbf{i}_{{}^wL_1\cap L_2}\big({}^w(\mathbf{r}_{L_1\cap L_2^w}\sigma)\big) + \sum_{w\in W(L_1,L_2)\setminus W(L_1,L_2)_d} \mathbf{i}_{{}^wL_1\cap L_2}\big({}^w(\mathbf{r}_{L_1\cap L_2^w}\sigma)\big)$$

D'abord, si L_1 ou L_2 ne se transfère pas, alors $W(L_1;L_2)_d = \emptyset$ parce qu'un sous-groupe de Levi standard qui ne se transfère pas ne peut pas contenir un sous-groupe de Levi standard qui se transfère.

C'est le cas en particulier si L_1 ne se transfère pas (c'est à dire que $\pi \in \mathcal{B}_G\setminus\mathbf{JL}_r(\mathcal{B}_{G'})$). On trouve donc dans ce cas que $\mathbf{r}_{L_2}^G\pi$ est la somme des induites de représentations essentiellement de carré intégrable de sous-groupes de Levi standard de L_2 qui ne se transfèrent pas. Cela veut dire que, si L_2 a k-blocs, l'image de $\mathbf{r}_{L_2}^G : \mathcal{R}(F) \to \otimes^k\mathcal{R}(F)$ est incluse dans le sous-espace

$$\sum_{i=0}^{k-1} \otimes^i\mathcal{R}(F) \otimes \mathbf{I}_{F,D} \otimes^{k-1-i} \mathcal{R}(F)$$

de $\otimes^k\mathcal{R}(F)$.

En particulier, en appliquant la définition de c on trouve que

$$c(\pi) \in \mathcal{R}(F) \otimes \mathbf{I}_{F,D} + \mathbf{I}_{F,D} \otimes \mathcal{R}(F).$$

Puisque π est un élément quelconque de $\mathcal{B}_G \backslash \mathbf{JL}_r(\mathcal{B}_{G'})$ cela implique que la comultiplication "passe au quotient" dans $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$. On note $\bar{c}$ la comultiplication de $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$ induite par c.

En appliquant maintenant la définition de i on trouve que

$$i(\pi) \in \mathbf{I}_{F,D}$$

puisque $i(\pi)$ est une somme d'induites de représentations essentiellement de carré intégrable de sous-groupes de Levi standard de G qui ne se transfèrent pas. Donc l'involution i "passe au quotient" dans $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$. On note $\bar{i}$ l'involution de $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$ induite par i.

Étudions maintenant le cas où L_1 se transfère, c.à.d. $\pi \in \mathbf{JL}(\mathcal{B}_{G'})$. Par la formule 4.1, si π est un élément de $\mathbf{JL}_r(\mathcal{B}_{G'})$, si L_2 a k sections, dans $\otimes^k[\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}]$ on a :

$$(*) \qquad \mathbf{r}^G_{L_2}\pi = \sum_{w \in W(L_1,L_2)_d} \mathbf{i}_{{}^wL_1 \cap L_2}\left({}^w(\mathbf{r}_{L_1 \cap L_2^w}\sigma)\right).$$

Si L_2 ne se transfère pas, on a vu que $W(L_1, L_2)_d$ était vide et donc

$$(***) \qquad \mathbf{r}^G_{L_2}\pi = 0 \text{ dans } \otimes^k [\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}].$$

Si L_2 se transfère, adoptons les notations suivantes :
- soit L'_1 le sous-groupe de Levi standard de G' correspondant à L_1,
- soit L'_2 le sous-groupe de Levi standard de G' correspondant à L_2,
- soit π' l'élément de $Grot(G')$ correpondant à π ; autrement dit, π' est l'induite de L'_1 à G' de σ' où σ' est la représentation essentiellement de carré intégrable de L'_1 qui correspond à σ par la correspondance entre L_1 et L'_1.
On a par le lemme 4.2.4 :

$$(**) \qquad \mathbf{r}^{G'}_{L'_2}\pi' = \sum_{w \in W(L'_1,L'_2)} \mathbf{i}_{{}^wL'_1 \cap L'_2}\left({}^w(\mathbf{r}_{L'_1 \cap L'^w_2}\sigma')\right).$$

Maintenant, il existe une inclusion standard t de $W(L'_1; L'_2)$ dans $W(L_1; L_2)$. Elle est définie de la façon suivante. On regarde les éléments de $W(L'_1; L'_2)$ comme des permutations de l'ensemble $\{1, 2\ ...r\}$ et les éléments de $W(L_1; L_2)$ comme des permutations de l'ensemble $\{1, 2\ ...n\}$ comme on l'a expliqué au debut de cette sous-section. Soit τ' une permutation dans $W(L'_1; L'_2)$. Pour tout élément x

de l'ensemble $\{1, 2..n\}$ il existe un unique couple $(a; b) \in \{1, 2 \dots r\} \times \{0, 1 \dots d\}$ tel qu'on ait

$$x = ad - b.$$

On pose alors

$$\tau(x) = \tau'(a)d - b.$$

On obtient ainsi une permutation τ de l'ensemble $\{1, 2 \dots n\}$ et on pose

$$t(\tau') = \tau.$$

En fait, $t(\tau)$ est la permutation de l'ensemble $\{1, 2 \dots n\}$ qui permute les r sous-ensembles $\{1, 2 \dots d\}$, $\{d+1, d+2 \dots 2d\}$, $\dots\{(r-1)d+1, (r-1)d+2 \dots n\}$ selon la permutation τ' tout en laissant l'ordre inchangé à l'intérieur de chacun de ces sous-ensembles. L'application clairement injective

$$t : W(L_1'; L_2') \to W(L_1; L_2)$$

ainsi définie a la propriété que pour tout $w \in W(L_1'; L_2')$, les sous-groupes de Levi standard ${}^{w}L_1' \cap L_2'$ et ${}^{t(w)}L_1 \cap L_2$ se correspondent (et pareil pour $L_1' \cap L_2'^{w}$ et $L_1 \cap L_2^{t(w)}$). Ainsi, l'image par t de $W(L_1'; L_2')$ est incluse dans $W(L_1; L_2)_d$. Le but du jeu est maintenant de montrer que l'image par t de $W(L_1'; L_2')$ est en fait $W(L_1; L_2)_d$. Cela donnera l'egalité entre les membres droits des formules 4.1 et (**), grâce au lemme 4.2.7 b).

On doit montrer que, si $w \in W(L_1; L_2)_d$ alors la permutation w de l'ensemble $\{1, 2 \dots n\}$ permute les sous-ensembles $\{1, 2 \dots d\}$, $\{d+1, d+2 \dots 2d\}$, $\dots\{(r-1)d+1, (r-1)d+2 \dots n\}$ en laissant l'ordre inchangé à l'intérieur de chacun de ces sous-ensembles.

Posons $w(1) = l$. Supposons que l se trouve dans la s-ième section de L_2. Alors l est le premier élément de cette section parce que, si l' est un élément de cette même section de L_2 qui précède l, on doit avoir $w^{-1}(l') < w^{-1}(l)$ (voir définition de $W(L_1; L_2)$) ce qui est impossible car $w^{-1}(l) = 1$. Donc, $w(1)$ est un entier du type $\alpha d + 1$, $\alpha \in \{0, 1 \dots r\}$ car il est le premier d'une section de L_2 et les cardinaux des sections de L_2 sont tous divisibles par d puisque L_2 se transfère.

Montrons qu'on a $w(2) = \alpha d + 2$, $w(3) = \alpha d + 3 \dots w(d) = (\alpha+1)d$. Montrons d'abord que les entiers $w(1)$, $w(2) \dots w(d)$ se trouvent tous dans la même section de L_2. Soit σ la transposition $(1; i)$ pour un $i \in \{2, 3 \dots d\}$. On note toujours σ la matrice de permutation qui lui correspond. La matrice σ se trouve dans le plus petit sous-groupe de Levi standard de G qui se transfère (celui formé de matrices diagonales par blocs de taille d et qui est contenu par conséquence dans tout sous-groupe de Levi standard de G qui se transfère). Donc $\sigma \in L_1 \cap L_2^w$ puisque ce dernier est un sous-groupe de Levi standard qui se transfère. C'est à dire que $\sigma \in L_2^w$ soit $w\sigma w^{-1} \in L_2$. Cela implique que la permutation $w\sigma w^{-1}$ vérifie : pour tout $x \in \{1, 2 \dots n\}$, $w\sigma w^{-1}(x)$ et x se trouvent dans la même section de L_2. En appliquant cela à $x = w(1)$ on trouve que $w(i)$ et $w(1)$ se trouvent dans la même section de L_2. C'est ce qu'on voulait démontrer.

Maintenant prouvons que $w(2) = \alpha d+2$, $w(3) = \alpha d+3$ ... et $w(d) = (\alpha+1)d$. Si, par exemple, $w(2) \neq \alpha d + 2$, alors on a $w(1) = \alpha d + 1 < \alpha d + 2 < w(2)$. Ces trois entiers étant dans la même section de L_2 (puisque $w(1)$ et $w(2)$ le sont), on a $w^{-1}(w(1)) < w^{-1}(\alpha d + 2) < w^{-1}(w(2))$ (voir encore une fois la définition de $W(L_1; L_2)$) ce qui est impossible car il n'y a aucun entier entre 1 et 2. Ainsi de suite pour $w(3)$ et les autres. On prouve ainsi que w envoie $\{1, 2 \ldots d\}$ sur $\{\alpha d + 1, \alpha d + 2 \ldots (\alpha + 1)d\}$ sans changer l'ordre.

On continue de la façon suivante : on prouve que $w(d+1)$ est un entier du type $\beta d+ 1$. En effet, s'il n'est pas le premier dans la section de L_2 qui le contient, les seuls entiers qui puissent le précéder dans cette section sont $w(1)$, $w(2)$ ... et $w(d)$. Mais ces entiers sont consécutifs donc si un le précède, tous le précèdent et on a alors $w(d+1) = w(d) + 1 = (\alpha+1)d+1$. Après cette remarque la démonstration se déroule comme pour $\{1, 2 \ldots d\}$, jusqu'au résultat final.

On a trouvé donc que t réalise une bijection :

$$t : W(L_1'; L_2') \simeq W(L_1; L_2)_d.$$

Si L_2 a k sections, notons $\mathbf{JLH}^k$ l'isomorphisme d'anneaux

$$\otimes^k \mathcal{R}(D) \simeq \otimes^k[\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}]$$

induit par l'isomorphisme d'anneaux

$$\mathbf{JLH} : \mathcal{R}(D) \simeq \mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}.$$

Alors l'image de $\mathbf{r}^G_{L_2}(\pi)$ dans $\otimes^k[\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}]$ est égale à $\mathbf{JLH}^k(r^{G'}_{L_2'}(\pi'))$. Cela se voit en comparant les formules (*) et (**) : pour tout $w \in W(L_1'; L_2')$,

$$\mathbf{i}_{{}^wL_1'\cap L_2'}\left({}^w(\mathbf{r}_{L_1'\cap L_2'^w}\sigma)\right) \text{ et } \mathbf{i}_{{}^{t(w)}L_1\cap L_2}\left({}^{t(w)}(\mathbf{r}_{L_1\cap L_2^{t(w)}}\sigma')\right)$$

se correspondent par $\mathbf{JLH}^k$ et t est une bijection de $W(L_1'; L_2')$ sur $W(L_1; L_2)_d$. Maintenant revenons aux définitions de la comultiplication et de l'involution. Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble de sous-groupes de Levi standard de G et $\mathcal{L}_{max}$ son sous-ensemble formé de sous-groupes de Levi standard maximaux. De même, notons $\mathcal{L}'$ l'ensemble de sous-groupes de Levi standard de G' et $\mathcal{L}'_{max}$ son sous-ensemble formé de sous-groupes de Levi standard maximaux. Supposons qu'on est dans la situation L_1 se transfère en L_1', $\pi = \mathbf{i}^G_{L_1}\sigma$ où σ est une représentation essentiellement de carré intégrable de L_1, σ' est la représentation essentiellement de carré intégrable de L_1' qui lui correspond et $\pi' = \mathbf{i}^{G'}_{L_1'}\sigma'$.

On a

$$c(\pi) = \sum_{L\in\mathcal{L}_{max}} \mathbf{r}^G_L(\pi) \in \mathcal{R}(F) \otimes \mathcal{R}(F).$$

Cette somme se décompose en deux sommes : une sur les sous-groupes de Levi standard maximaux de G qui se transfèrent et l'autre sur les sous-groupes de Levi standard maximaux de G qui ne se transfèrent pas. L'image (bien définie, on l'a vu) de $c(\pi)$ dans $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D} \otimes \mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$ est la même que l'image de la somme sur les sous-groupes de Levi standard maximaux de G qui se transfèrent par la remarque (***) plus haut. D'autre part on a

$$c'(\pi') = \sum_{L' \in \mathcal{L}'_{max}} \mathbf{r}_{L'}^{G'}(\pi') \in \mathcal{R}(D) \otimes \mathcal{R}(D).$$

Les sous-groupes de Levi standard maximaux de G qui se transfèrent se correspondent biunivoquement avec les sous-groupes de Levi standard maximaux de G'. Si L est un tel sous-groupe de G et L' est le sous-groupe de G' qui lui correspond, alors on a vu que l'image de $\mathbf{r}_L^G \pi$ dans $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D} \otimes \mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$ est égale à $\mathbf{JLH}^2(\mathbf{r}_{L'}^{G'}\pi')$. Donc, finalement, l'image $\bar{c}(\pi)$ de $c(\pi)$ dans $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D} \otimes \mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$ est égale à $\mathbf{JLH}^2(c(\pi'))$.

Maintenant on étudie l'involution. On a dans $\mathcal{R}(F)$

$$i(\pi) = \sum_{L \in \mathcal{L}} (-1)^{|L|} \mathbf{i}_L^G \mathbf{r}_L^G(\pi).$$

Cette somme se décompose en deux sommes : une sur les sous-groupes de Levi standard de G qui se transfèrent et l'autre sur les sous-groupes de Levi standard de G qui ne se transfèrent pas. Toujours par la remarque (***) plus haut, l'image (bien définie, on l'a vu aussi) de $i(\pi)$ dans $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$ est la même que l'image de la somme sur les sous-groupes de Levi standard de G qui se transfèrent.

Par ailleurs, dans $\mathcal{R}(D)$ on a

$$i'(\pi') = \sum_{L' \in \mathcal{L}'} (-1)^{|L'|} \mathbf{i}_{L'}^{G'} \mathbf{r}_{L'}^{G'}(\pi').$$

Les sous-groupes de Levi standard de G qui se transfèrent correspondent biunivoquement aux sous-groupes de Levi standard de G'. Si L est un sous-groupe de Levi standard de G à k sections qui se transfère et L' est le sous-groupe de G' qui lui correspond, alors on a vu que l'image de $\mathbf{r}_L^G \pi$ dans $\otimes^k [\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}]$ est égale à $\mathbf{JLH}^k(\mathbf{r}_{L'}^{G'}\pi')$. Par ailleurs, on a $(-1)^{|L|} = (-1)^{n-r}(-1)^{|L'|}$. Donc $\mathbf{i}_L^G \mathbf{r}_L^G \pi = (-1)^{n-r} \mathbf{JLH}(\mathbf{i}_{L'}^{G'} \mathbf{r}_{L'}^{G'} \pi')$ dans $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$. Finalement, l'image $\bar{i}(\pi)$ de $i(\pi)$ dans $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$ est égale à $\mathbf{JLH}(i(\pi'))$.

On rappelle que les produits de représentations essentiellement de carré intégrable forment une base $\mathcal{B}_D$ de $\mathcal{R}(D)$ comme $\mathbb{Z}$-module, que $\mathbf{JLH} : \mathcal{R}(D) \to \mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$ est un isomorphisme d'anneaux et qu'on vient de prouver que pour tout $\pi' \in \mathcal{B}_D$ on a

$$\mathbf{JLH}(c'(\pi')) = \bar{c}(\mathbf{JLH}(\pi'))$$

et

$$\mathbf{JLH}(i'(\pi')) = (-1)^{n-r} \bar{i}(\mathbf{JLH}(\pi')).$$

Cela montre bien que **JLH** est un isomorphisme d'algèbres de Hopf et qu'il respecte l'involution au signe $(-1)^{n-r}$ près.

4.3 Transfert de toutes les fonctions

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique quelconque et D une algèbre à division centrale sur F de dimension finie d^2. Soit r un entier strictement positif. On pose $G' = GL_r(D)$ et $G = GL_{rd}(F)$. Les paires paraboliques minimales standard fixées sur G et G' seront considérées par convention du type $(A; P)$ où A est le tore diagonal et P est le groupe des matrices triangulaires supérieures. On identifie comme d'habitude les centres des deux groupes et on les note indistinctement Z. On fixe des mesures dg sur G, dg' sur G' et dz sur Z. Sur les tores maximaux de G et G' on fixe des mesures qui se correspondent comme dans la section 9, chapitre 1. Dans cette section on démontre le théorème de transfert suivant :

Théorème 4.3.1 . *1) Soit $f' \in H(G')$. Alors il existe $f \in H(G)$ tel que $f \leftrightarrow f'$.*

2) Soit $f \in H(G)$ telle que l'intégrale orbitale de f s'annule sur $G^{sr}\backslash G_{G'}$. Alors il existe $f \in H(G')$ telle que $f \leftrightarrow f'$.

Démonstration. Le transfert en caractéristique nulle a déjà été prouvé dans [DKV], théorème B.2.c.1, mais je pense que cette démonstration est légèrement incomplète : l'affirmation selon laquelle si les intégrales orbitales sont normalisées correctement $F - F_1$ se prolonge en une fonction localement constante sur G ne peut être vérifiée à mon avis que si on sait qu'on a égalité de *tous* les germes sur G et G' et on ne le sait pas. On reprend plus bas cette démonstration en caractéristique nulle en corrigeant ce passage.

Soient $f' \in H(G')$ et $f \in H(G)$ telles que $tr\pi(f) = 0$ pour tout $\pi \in \mathbf{S}_{G,G'}$; on écrit $f \in PW_G(f')$ ou $f' \in PW_{G'}(f)$ si $tr\pi(f') = tr\mathbf{JL}_r(\pi)(f)$ pour tout $\pi \in E(G')$.

Lemme 4.3.2 . *Pour $f \in H(G)$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'intégrale orbitale de f est nulle sur $G^{sr}\backslash G_{G'}$.

(ii) $tr\pi(f) = 0$ pour tout $\pi \in \mathbf{S}_{G,G'}$.

Démonstration. Un élément g de G^{sr} se trouve dans $G^{sr}\backslash G_{G'}$ si et seulement si son polynôme caractéristique à un facteur irréductible sur F dont le degré n'est pas divisible par d, si et seulement s'il existe un sous-groupe de Levi L de G tel que L ne se transfère pas et $g \in L$.

Montrons que (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que f vérifie (i). Si L est un sous-groupe de Levi standard qui ne se transfère pas, si P est le sous-groupe parabolique standard de G dont un sous-groupe de Levi est ce L, alors d'après la remarque plus haut, par le théorème 1.2.1, l'intégrale orbitale de f^P est identiquement nulle sur L^{sr}. Par la proposition 3 de l'annexe 2 (qui s'applique parce que sur GL_n les caractères sont localement intégrables en toute caractéristique) f^P annule la trace de toute représentation de L. On en déduit en appliquant le théorème 1.3.1 que f annule la trace de toute représnetation induite d'un sous-groupe de Levi standard de G qui ne se transfère pas. C'est vrai en particulier pour les représentations essentiellement de carré intégrable de ces groupes, ce qui prouve que f annule la trace de toute représentation de $\mathbf{S}_{G,G'}$.

Montrons maintenant que (ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que f vérifie (ii). Soit $g \in G^{sr} \backslash G_{G'}$. Soit L un sous-groupe de Levi de G qui contient g et qui ne se transfère pas. Aucun sous-groupe de Levi de L ne se transfère. Alors (ii) implique que f annule la trace de toutes les représentations induites à G des représentations essentiellement de carré intégrable de tous les sous-groupes de Levi de L. Si P est un sous-groupe parabolique de G dont un sous-groupe de Levi est L, f^P annule alors la trace de toutes les représentations induites à L des représentations essentiellement de carré intégrable de tous les sous-groupes de Levi (propres ou pas) de L (en vertu du théorème 1.3.1). Le lemme 4.2.1 implique que f^P annule la trace de toutes les représentations de L. La proposition 2 de l'annexe 2 implique alors que l'intégrale orbitale de f^P est nulle sur L^{sr}. En particulier $\Phi(f^P; g) = 0$ donc, par le théorème 1.2.1, $\Phi(f; g) = 0$. Le lemme est démontré.

Lemme 4.3.3 . *Si $f' \in H(G')$, alors $PW_G(f') \neq \emptyset$ et si $f \in H(G)$ est telle que $tr\pi(f) = 0$ pour tout $\pi \in \mathbf{S}_{G,G'}$, $PW_{G'}(f) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soit $f' \in H(G')$. On définit une forme linéaire

$$h : Grot(G) \to \mathbb{C}$$

en la définissant sur la base $\mathcal{B}_G$ de la façon suivante:

- pour toute représentation $\pi \in \mathbf{JL}_r(\mathcal{B}_{G'})$ on pose $h(\pi) = tr\mathbf{JL}_r^{-1}(\pi)(f')$, et
- pour toute représentation $\pi \in \mathcal{B}_G \backslash \mathbf{JL}_r(\mathcal{B}_{G'})$ on pose $h(\pi) = 0$.

Montrons que cette fonction a les propriétés requises pour appliquer le théorème de Paley-Wiener. Soit P un sous-groupe parabolique standard (propre ou pas) de G et L le sous-groupe de Levi standard de P. Soit π une représentation irréductible de L. Il faut voir si la fonction $h(ind_P^G(\chi \otimes \pi))$ en la variable χ – caractère non ramifié de L – est algébrique. Mais ou bien L ne se transfère pas et alors cette fonction est identiquement nulle, ou bien L se transfère en L' et alors on raisonne comme suit: on écrit

$$\pi = \sum_{i=1}^{k} ind_{P_i}^P(\sigma_i) + \sum_{j=1}^{l} ind_{P_j}^P(\sigma_j)$$

où les σ_i et les σ_j sont des représentations essentiellement de carré intégrable et les P_i, $i \in \{1, 2...k\}$, sont des sous-groupes paraboliques standard de L qui ne se transfèrent pas, tandis que les P_j, $j \in \{1, 2...l\}$, sont des sous-groupes paraboliques standard de L qui se transfèrent en des sous groupes paraboliques standard P'_j de L'. On a alors

$$ind_P^G(\chi \otimes \pi) = \sum_{i=1}^{k} ind_{P_i}^G((res_{P_i}^P \chi) \otimes \sigma_i) + \sum_{j=1}^{l} ind_{P_j}^G((res_{P_j}^P \chi) \otimes \sigma_j).$$

Par définition de l'application h on a donc, si P' est le sous-groupe parabolique standard de G' qui correspond à P

$$h(ind_P^G(\chi \otimes \pi)) = \sum_{j=1}^{l} tr(ind_{P'_j}^{G'}((res_{P'_j}^{P'} \chi) \otimes \mathbf{C}(\sigma_j)))(f')$$

$$\sum_{j=1}^{l} tr(ind_{P'}^{G'}(\chi \otimes ind_{P'_j}^{P'} \mathbf{C}(\sigma_j)))(f').$$

Alors la fonction est algébrique parce que somme de fonctions algébriques. Il existe donc une fonction $f \in H(G)$ associée par le théorème de Paley-Wiener à la fonction h et on a alors $f \in PW_G(f')$.

Soit maintenant $f \in H(G)$ telle que $tr\pi(f) = 0$ pour tout $\pi \in \mathbf{S}_{G,G'}$. Cette fois le fait que $\mathbf{JL}$ commute à l'induction implique directement que

$$h' : Grot(G') \to \mathbb{C}$$

définie par

$$h'(\pi) = tr\mathbf{JL}_r(\pi)(f)$$

a les propriétés de Paley-Wiener; une fonction $f' \in H(G')$ qui lui correspond par le théorème de Paley-Wiener se trouve alors dans $PW_{G'}(f)$.

On remarquera que par la proposition 2 de l'annexe 2, les intégrales orbitales de toutes les fonctions se trouvant dans $PW_G(f')$ sont égales sur G^{sr} et les intégrales orbitales de toutes les fonctions se trouvant dans $PW_{G'}(f)$ sont égales sur G'^{sr}.

Montrons maintenant la proposition suivante qui, avec le lemme 4.3.3, implique le théorème 4.3.1:

Proposition 4.3.4 . *1) Soit $f' \in H(G')$. On a*

$$f \in PW_G(f') \iff f \leftrightarrow (-1)^{n-r} f'.$$

2) Soit $f \in H(G)$ vérifiant les deux conditions équivalentes du lemme 4.3.2. Alors, si $f' \in PW_{G'}(f)$, on a $f \leftrightarrow (-1)^{n-r}f'$.

Démonstration.

1) Montrons que $f \in PW_G(f') \Rightarrow \ f \leftrightarrow (-1)^{n-r}f'$.

(a) F est de caractéristique nulle

On démontre cette proposition par récurrence sur n. On a déjà vu que les intégrales orbitales de f s'annulent sur $G^{sr}\backslash G_{G'}$ (lemme 4.3.2). Montrons maintenant que l'hypothèse de récurrence implique que pour tout $g \in G_{G'}\backslash G_e$, pour tous $g' \leftrightarrow g$, on a $\phi(f;g) = (-1)^{n-r}\phi(f';g')$. En effet, pour un tel g, il existe un sous-groupe de Levi propre L de G tel que g soit un élément de L et L se transfère en un sous-groupe de Levi L' de G'. Soient P un sous-groupe parabolique de G de sous-groupe de Levi L et P' un sous-groupe parabolique de G' de sous-groupe de Levi L'. Pour toute représentation π de L on a

$$tr\pi(f^P) = tr(ind_P^G\pi)(f) = 0$$

si $\pi \in \mathbf{S}_{G,G'}$ et

$$tr\pi(f^P) = tr(ind_{P'}^{G'}\mathbf{JL}^{-1}(\pi))(f) = tr\mathbf{JL}^{-1}(\pi)(f'^{P'})$$

si $\pi \in Im(\mathbf{JL}_r)$. Donc $f^P \in PW_L(f'^{P'})$ et donc $f^P \leftrightarrow (-1)^{n-r}f'^{P'}$ par l'hypothèse de récurrence. Mais alors on a

$$\Phi(f^P;g) = (-1)^{n-r}\Phi(f'^{P'};g')$$

et on obtient finalement

$$\Phi(f;g) = (-1)^{n-r}\Phi(f';g')$$

par le théorème 1.2.1

Il reste le cas des éléments elliptiques réguliers. On reprend les notations de la sections 1 et 8, chapitre 1. Si ω est un caractère unitaire de Z, alors par la proposition 1.9.1 on a

$$\Phi(I_\omega(f);\cdot) \in L^2(G_e;\omega) \text{ et } \Phi(I_\omega(f');\cdot) \in L^2(G'_e;\omega).$$

D'autre part on a, pour tout $\pi' \in \Pi_u^2(G')$ de caractère central ω :

$$tr\pi'(f') = tr(\mathbf{JL}_r\pi')(f)$$

car $f \in PW_G(f')$. On a donc aussi

$$tr\pi'(I_\omega(f')) = tr\mathbf{JL}_r(\pi')(I_\omega(f)).$$

Posons $\pi = \mathbf{JL}_r(\pi')$. Par la proposition 1.4.2 on a

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(t)\chi_\pi(t)\Phi(I_\omega(f);t)dt =$$
$$\sum_{T'\in\mathcal{T}_{G'}} |W(T')|^{-1} \int_{T'^{reg}/Z} D(t')\chi_{\pi'}(t')\Phi(I_\omega(f');t')dt'.$$

Écrivons $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_{eG} \cup (\mathcal{T}_G \backslash \mathcal{T}_{eG})$ et $\mathcal{T}_{G'} = \mathcal{T}_{eG'} \cup (\mathcal{T}_{G'} \backslash \mathcal{T}_{eG'})$ en partageant le système de représentants des classes de conjugaison des tores maximaux en ceux qui sont elliptiques et ceux qui ne le sont pas. Pour tout tore $T \in \mathcal{T}_G \backslash \mathcal{T}_{eG}$ on a deux possibilités :

- ou bien T est un tore elliptique maximal d'un sous-groupe de Levi de G qui ne se transfère pas et alors on a

$$\int_{T^{reg}/Z} \chi_\pi(t)\Phi(I_\omega(f);t)dt = 0$$

parce qu'on a vu que $\Phi(I_\omega(f);t) = 0$ si $t \in G^{sr} \backslash G_{G'}$,

- ou bien T est un tore elliptique maximal d'un sous-groupe de Levi propre de G qui se transfère et alors il existe un tore $T' \in \mathcal{T}_{G'} \backslash \mathcal{T}_{eG'}$ qui lui correspond et on a

$$\int_{T^{reg}/Z} \chi_\pi(t)\Phi(I_\omega(f);t)dt = \int_{T'^{reg}/Z} \chi_{\pi'}(t')\Phi(I_\omega(f');t')dt'$$

car on a vu un peu plus haut que

$$\Phi(I_\omega(f);t) = (-1)^{n-r}\Phi(I_\omega(f');t')$$

pour tout $t \in G_{G'} \backslash G_e$, $t \leftrightarrow t'$, et on sait par ailleurs que

$$\chi_\pi(t) = (-1)^{n-r}\chi_{\pi'}(t')$$

pour tout $t \leftrightarrow t'$ par la correspondance.

Finalement, l'égalité entre les sommes d'intégrales plus haut peut être simplifiée avec toutes les intégrales le long de tores maximaux non elliptiques de G et G'. On obtient après cette simplification :

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_{eG}} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(t)\chi_\pi(t)\Phi(I_\omega(f);t)dt =$$
$$\sum_{T'\in\mathcal{T}_{eG'}} |W(T')|^{-1} \int_{T'^{reg}/Z} D(t')\chi_{\pi'}(t')\Phi(I_\omega(f');t')dt'$$

qui implique :

$$< \chi_{\pi'}; \Phi(I_\omega(f'); \cdot) > = < \chi_\pi; \Phi(I_\omega(f); \cdot) > .$$

On identifie $L^2(G_e;\omega)$ à $L^2(G'_e;\omega)$ via l'isomorphisme i (sect.9, chap.1). Cette identification transforme χ_π en $(-1)^{n-r}\chi_{\pi'}$. Finalement, on a obtenu que les éléments $\Phi(I_\omega(f);\cdot)$ et $(-1)^{n-r}\Phi(I_\omega(f');\cdot)$ de $L^2(G'_e;\omega)$ ont le même produit scalaire avec $\chi_{\pi'}$ pour toute représentation de carré intégrable π' de G' de caractère central ω. L'ensemble des restrictions à G'_e des caractères des représentations de carré intégrable de caractère central ω de G' est un système orthonormal complet pour l'espace $L^2(G'_e;\omega)$. Donc $(\Phi(I_\omega(f);\cdot) - (-1)^{n-r}\Phi(I_\omega(f');\cdot))$ est identiquement nul sur G'_e (on rappelle qu'être localement constante fait partie des conditions pour qu'une fonction sur G'_e soit dans $L^0(G'_e;\omega)$. L'espace $L^2(G'_e;\omega)$ n'est donc pas un espace formé de classes d'équivalence de fonctions qui diffèrent sur un ensemble de mesure nulle, comme pourrait le laisser penser la notation).

Soient maintenant $g \leftrightarrow g'$ elliptiques réguliers. On a

$$\Phi(I_\omega(f);g) = (-1)^{n-r}\Phi(I_\omega(f');g').$$

donc

$$\int_Z \omega(z)\Phi(f;zg) = (-1)^{n-r}\int_Z \omega(z)\Phi(f';zg').$$

Donc la fonction définie sur Z par :

$$h(z) = \Phi(f;zg) - (-1)^{n-r}\Phi(f';zg')$$

vérifie $\int_Z \omega(z)h(z)dz = 0$. Cela est vrai pour tout caractère unitaire ω de Z et on peut conclure comme dans la démonstration de la proposition 2, annexe 2, que h est identiquement nulle et finalement

$$\Phi(f;g) = (-1)^{n-r}\Phi(f';g').$$

(b) F est de caractéristique non nulle

Dans ce cas on ne dispose plus de la proposition 1.9.1 et de l'intégrabilité locale des caractères sur G' et on ne peut plus appliquer la démonstration plus haut. On va montrer le résultat par comparaison avec la caractéristique nulle. Reprenons les notations G_F, G'_F, $\bar{\zeta}^m_{FL}$, $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}$ et les autres du chapitre 3. On notera dans cette partie de la démonstration les sous-groupes de Levi qui apparaissent avec la lettre M pour ne pas les confondre avec le corps L. On reprend les notations M_F et M_L (ou M'_F et M'_L) pour des sous-groupes de Levi standard de G_F et G_L (ou G'_F et G'_L) qui se correspondent comme on l'a expliqué dans la démonstration du théorème 4.1.1, partie (b). **Attention!** Les lemmes 4.3.6 et 4.3.8 plus bas sont des résultats sur F (même si la démonstration utilise d'autres corps, proches de F). C'est pourquoi, dans l'énoncé de ces lemmes, on a omis de mettre l'indice F aux groupes qui apparaissent.

Lemme 4.3.5 . *Si $f' \in H(G_F)$ et $f \in PW_{G_F}(f')$, alors il existe un entier m tel que, si L est un corps m-proche de F, alors $\bar{\zeta}^m_{FL}(f) \leftrightarrow (-1)^{n-r}\bar{\zeta}^m_{D_FD_L}(f')$.*

Démonstration. Comme la proposition 4.3.4 a été montrée en caractéristique nulle, il nous suffit de montrer que, pour m-assez grand,

$$\bar{\zeta}^m_{FL}(f) \in PW_{G_L}(\bar{\zeta}^m_{D_FD_L}(f')).$$

Soient $\mathcal{P}_F$ l'ensemble de sous-groupes paraboliques standard de G_F et $\mathcal{P}'_F$ l'ensemble de sous-groupes paraboliques standard de G'_F. Considérons un entier m suffisamment grand pour qu'on ait à la fois les conditions suivantes :

- pour tout $P_F \in \mathcal{P}_F$ de décomposition de Levi standard $P_F = M_FU_F$, $\bar{\zeta}^m_{FL}(f^{P_F})$ est bien définie et pour tout $P'_F \in \mathcal{P}'_F$ de décomposition de Levi $P'_F = M'_FU'_F$, $\bar{\zeta}^m_{D_FD_L}(f^{P'_F})$ est bien définie,

- pour tout $P_F \in \mathcal{P}_F$ on a $\bar{\zeta}^m_{FL}(f^{P_F}) = \bar{\zeta}^m_{FL}(f)^{P_L}$ et pour tout $P'_F \in \mathcal{P}'_F$ on a $\bar{\zeta}^m_{D_FD_L}(f'^{P'_F}) = \bar{\zeta}^m_{D_FD_L}(f')^{P'_L}$,

- pour deux sous-groupes de Levi standard, M_F de G_F et M'_F de G'_F, qui se correspondent, en notant $\mathbf{C}_F$ la correspondance entre les représentations essentiellement de carré intégrable de M_F et M'_F, et $\mathbf{C}_L$ la correspondance entre les représentations essentiellement de carré intégrable de M_L et M'_L, on a

$$\mathbf{C}_L \circ \bar{\zeta}^m_{FL}(\pi) = \bar{\zeta}^m_{D_FD_L} \circ \mathbf{C}_F(\pi)$$

pour toute représentation essentiellement de carré intégrable π de M_F telle que $tr\pi(f^{P_F}) \neq 0$.

Un tel m existe grâce aux faits suivants :

- les cardinaux de $\mathcal{P}_F$ et $\mathcal{P}_L$ sont finis
- la proposition 4.1.2
- la remarque de la page 108, puisqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel qu'on ait, si π est une représentation essentiellement de carré intégrable, $tr\pi(f^{P_F}) \neq 0 \Rightarrow m(\pi) \leq k$.

Soit M_F un sous-groupe de Levi standard de G_F qui ne correspond à aucun sous-groupe de Levi standard de G'_F. Soit σ une représentation essentiellement de carré intégrable de M_F. On a alors :

$$tr(ind_{P_L}^{G_L}\bar{\zeta}^m_{FL}(\sigma))(\bar{\zeta}^m_{FL}(f)) = tr\bar{\zeta}^m_{FL}(\sigma)(\bar{\zeta}^m_{FL}(f)^{P_L}) =$$

$$tr\bar{\zeta}^m_{FL}(\sigma)(\bar{\zeta}^m_{FL}(f^{P_L})) = tr\sigma(f^{P_F}) = tr(ind_{P_F}^{G_F}\sigma)(f) = 0.$$

Soient maintenant M_F et M'_F deux sous-groupes de Levi standard qui se correspondent, σ est une représentation essentiellement de carré intégrable de M_F et σ' la représentation essentiellement de carré intégrable de M'_F qui lui correspond. Soient P_F et P'_F les sous-groupes paraboliques standard de G_F et G'_F associés à M_F et M'_F. On a la suite d'égalités suivante, où pour avoir celle du milieu, "passage de G_F à G'_F", on a utilise que $f \in PW_{G_F}(f')$:

$$tr(ind_{P_L}^{G_L}\bar{\zeta}_{FL}^m(\sigma))(\zeta_{FL}^m(f)) = tr\bar{\zeta}_{FL}^m(\sigma)(\zeta_{FL}^m(f)^{P_L}) =$$

$$tr\bar{\zeta}_{FL}^m(\sigma)(\bar{\zeta}_{FL}^m(f^{P_L})) = tr\sigma(f^{P_F}) = tr(ind_{P_F}^{G_F}\sigma)(f) =$$

$$tr(ind_{P'_F}^{G'_F}\sigma')(f') = tr\sigma'(f'^{P_F}) = tr\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m(\sigma')(\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m(f'^{P_F})) =$$

$$tr\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m(\sigma')(\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m(f')^{P_L}) = tr(ind_{P'_L}^{G'_L}\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m(\sigma'))(\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m(f')).$$

On a trouvé donc

$$tr(ind_{P_L}^{G_L}\bar{\zeta}_{FL}^m(\sigma))(\bar{\zeta}_{FL}^m(f)) = 0$$

si P_L ne se transfère pas et

$$tr(ind_{P_L}^{G_L}\bar{\zeta}_{FL}^m(\sigma))(\bar{\zeta}_{FL}^m(f)) = tr(ind_{P'_L}^{G'_L}\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m(\sigma'))(\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m(F'))$$

si P_L se transfère en P'_L et σ' correspond à σ (car P_L se transfère si et seulement si P_F se transfère). Cela prouve qu'on a bien $\bar{\zeta}_{FL}^m(f) \in PW_{G_L}(\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m(f'))$ et par conséquent, L étant de caractéristique nulle, $f \leftrightarrow (-1)^{n-r}f'$.

À ce moment, si on savait "relever localement" les intégrales orbitales sur G' en caractéristique nulle comme on savait le faire pour G (voir 2.1.2), la démonstration de la proposition 4.3.4 serait facile par l'absurde. Mais on ne le sait pas. Voilà quelle est l'idée pour s'en sortir quand-même : soit $f' \in H(G')$; soit $g' \in G'^{sr}$; *on ne sait pas "relever localement" les intégrales orbitales sur G' en caractéristique nulle* veut dire qu'on ne sait pas trouver un voisinage $V(g')$ de g' et un entier m tel que l'intégrale orbitale de f' soit constante sur $V(g')$ égale à $\Phi(f';g')$ et pour tout corps L m-proche de F, $\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m(V(g'))$ soit bien définie et l'intégrale orbitale de $\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m(f')$ soit constante sur $\bar{\zeta}_{D_FD_L}^m(V(g'))$ et égale à $\Phi(f';g')$. Mais, si jamais on a $\Phi(f';g') = 0$, et cela *parce que le support de f' ne rencontre pas l'orbite de g' dans G'_F*, alors on peut montrer plus facilement que pour un m assez grand, cette situation topologique se relève. Bien sûr, un tel résultat n'est pas suffisant mais, comme tout ce qui concerne les fonctions à support dans les éléments semisimples réguliers s'est toujours avéré facile à prouver, on peut "casser" notre intégrale orbitale au voisinage de g' en deux : une intégrale orbitale qui est celle d'une fonction à support dans les éléments semisimples réguliers et une intégrale orbitale nulle en g', qui est celle d'une fonction dont le support ne rencontre pas l'orbite de g'. Mettons maintenant en forme ces considérations.

Si G est un groupe et A est une partie de G, on note $Ad_G(A)$ l'ensemble formé de conjugués dans G des éléments de A. Si X est un espace topologique et f est une fonction sur X, on note $S(f)$ le support de f.

Lemme 4.3.6 . *Avec l'hypothèse de la proposition 4.3.4, si $S(f') \subset G'^{sr}$, alors on a bien $f \leftrightarrow (-1)^{n-r} f'$.*

Démonstration. Ça marche exactement comme on l'a prouvé en caractéristique nulle puisque les caractères des représentations de G' sont localement constants sur G'^{sr} et les caractères des représentations de G sont localement intégrables sur G par [Le2].

Lemme 4.3.7 . *Soit $g' \in G'^{sr}_F$. Soit $f' \in H(G'_F)$. Supposons qu'on ait*

$$S(f') \cap Ad_{G'_F}(g') = \emptyset.$$

Alors il existe un voisinage $V(g')$ de g' et un entier m tel qu'on ait, pour tout corps local L m-proche de F :

$$S(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f')) \cap Ad_{G'_L}(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(V(g'))) = \emptyset.$$

Il existe aussi un s tel que, si L est m-proche de F et y est un élément de G'_L dont le polynôme caractéristique est s-proche de celui de g', alors

$$\Phi(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(f'); y) = 0.$$

Démonstration. (Ce n'est pas tout-à-fait trivial parce que $Ad_{G'_L}(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(V(g'))) \neq \bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(Ad_{G'_F}(V(g')))$). Soit s tel que le polynôme caractéristique $P_{g'}$ de g' ne soit s-proche du polynôme caractéristique d'aucun élément de $S(f')$ (un tel s existe parce que $S(f')$ est compact, parce que $S(f') \cap Ad_{G'_F}(g') = \emptyset$ et que l'application polynôme caractéristique est continue).

Appliquons le théorème 3.3.11, à s et g' : il existe un voisinage $V(g')$ de g' et un entier $m_{g'}$ tel que, si L est $m_{g'}$-proche de F, si $x \in \bar{\zeta}^{m_{g'}}_{D_F D_L}(V(g'))$, le polynôme caractéristique de x est s-proche de $P_{g'}$.

Pour tout $t \in S(f')$, appliquons le théorème 3.3.11 à s et à t. On trouve une famille $\{V(t); m_t\}_{t \in S(f')}$ où, pour tout t, $V(t)$ est un voisinage ouvert et compact de t et pour tout corps L m_t-proche de F, si $x \in \bar{\zeta}^{m_t}_{D_F D_L}(V(t))$, le polynôme caractéristique de x est s-proche de celui de t. Les ouverts $V(t)$ couvrent le compact $S(f')$: on va en extraire une famille finie $\{V(t_1), V(t_2) ... V(t_p)\}$ qui recouvre $S(f')$.

On pose maintenant

$$m = \max\{m_{g'}, m_{t_1}, m_{t_2} ... m_{t_p}\}.$$

Alors, si L est un corps local m-proche de F,

- le polynôme caractéristique de tout élément de $\bar{\zeta}^{m}_{D_F D_L}(V(g'))$ est s-proche de $P_{g'}$,

- le polynôme caractéristique de tout élément de $\bar{\zeta}^{m}_{D_F D_L}(S(f')) = S(\bar{\zeta}^{m}_{D_F D_L}(f'))$ est s-proche du polynôme caractéristique d'un élément de $\{t_1, t_2 ... t_p\}$, mais

- aucun des polynômes caractéristiques des t_i, $1 \leq i \leq p$, n'est s-proche de $P_{g'}$.

Cela prouve que $S(\bar{\zeta}^{m}_{D_F D_L}(f')) \cap Ad_{G'_L}(\bar{\zeta}^{m}_{D_F D_L}(V(g'))) = \emptyset$.

Aussi, si y est un élément de de G'_L dont le polynôme caractéristique est s-proche de P_g, alors le polynôme caractéristique de y ne peut être s-proche d'aucun des polynômes caractéristiques des éléments de $\{t_1, t_2 ... t_p\}$. Donc $y \notin Ad_{G'_L}(S(\bar{\zeta}^{m}_{D_F D_L}(f')))$ et

$$\Phi(\bar{\zeta}^{m}_{D_F D_L}(f'); y) = 0.$$

Lemme 4.3.8 . *Avec l'hypothèse $f \in PW_G(f')$, si $g' \in G'^{sr}$ est tel que*

$$Ad_{G'}(g') \cap S(f') = \emptyset$$

alors, si $g \leftrightarrow g'$, on a

$$\Phi(f; g) = (-1)^{n-r} \Phi(f'; g') = 0.$$

Démonstration. Soit P_g le polynôme caractéristique de g, et donc de g'. Quitte à conjuguer g on peut supposer que c'est la matrice compagnon de P_g.

Soient m_1 et s_1 tels que, si L est un corps local m_1-proche de F, pour tout $x \in G_L$ dont le polynôme caractéristique est s_1-proche de P_g on ait :

$$\Phi(\bar{\zeta}^{m_1}_{FL}(f); x) = \Phi(f; g).$$

C'est possible par la proposition 3.3.6.

Soient m_2 et s_2 tels que, si L est un corps local m_2-proche de F, pour tout $x \in G'_L$ dont le polynôme caractéristique est s_2-proche de P_g on ait :

$$\Phi(\bar{\zeta}^{m_2}_{D_F D_L}(f'); x) = \Phi(f'; g') = 0.$$

C'est possible par le lemme 4.3.8 plus haut.

Soit m_3 tel que, si L est un corps local m_3-proche de F, on ait :

$$\bar{\zeta}_{FL}^{m_3}(f) \leftrightarrow (-1)^{n-r}\bar{\zeta}_{D_F D_L}^{m_3}(f').$$

C'est possible par le lemme 4.3.6.

Posons

$$m = max\{m_1; m_2; m_3\}$$

et

$$s = max\{s_1; s_2\}.$$

Soit L un corps local de caractéristique nulle m-proche de F. Soit x un élément semisimple régulier de G_L dont le polynôme caractéristique est s-proche de P_g et qui de plus se transfère en un élément $y \in G'_L$. On a alors :

$$\Phi(f; g) = \Phi(\bar{\zeta}_{FL}^{m}(f); x) = (-1)^{n-r}\Phi(\bar{\zeta}_{D_F D_L}^{m}(f'); y) = (-1)^{n-r}\Phi(f'; g') = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On montre maintenant la proposition 4.3.4 dans le cas de caractéristique non nulle. Soient $g \in G^{sr}$ et $g' \in G'^{sr}$. Supposons par l'absurde que $g \leftrightarrow g'$ mais

$$\Phi(f; g) \neq (-1)^{n-r}\Phi(f'; g').$$

L'élément g' étant semisimple régulier, $Ad_{G'_F}(g')$ est un fermé et donc $Ad_{G'_F}(g') \cap S(f')$ est un compact (inclus dans G'^{sr}). L'ensemble G'^{sr} est un ouvert donc il existe un sous-ensemble compact *et* ouvert X inclus dans G'^{sr} et qui contient $Ad_{G'_F}(g') \cap S(f')$ (prendre un voisinage ouvert et compact dans G'^{sr} de chaque point de $Ad_{G'_F}(g') \cap S(f')$ et en extraire un nombre fini qui couvre $Ad_{G'_F}(g') \cap S(f')$).

On note f'_1 la restriction de f' à X.

On pose $f'_2 = f' - f'_1$. On a clairement $S(f'_2) = S(f') \backslash X$.

Finalement on a obtenu :

$$f' = f'_1 + f'_2$$

où $f'_1 \in H(G'_F)$ est à support dans G'^{sr} et $S(f'_2) \cap Ad_{G'_F}(g') = \emptyset$.

On a en particulier

$$\Phi(f'; g') = \Phi(f'_1; g').$$

Soient maintenant $f_1 \in PW_{G_F}(f'_1)$ et $f_2 \in PW_{G_F}(f'_2)$. Alors, comme on avait $f \in PW_{G_F}(f')$, la fonction $f - f_1 - f_2$ annule la trace de toute représentation de G_F et par la proposition 2 de l'annexe 2, ses intégrales orbitales sont nulles sur $G_F'^{sr}$. En particulier,

$$\Phi(f; g) = \Phi(f_1; g) + \Phi(f_2; g).$$

Par le lemme 4.3.6,

$$\Phi(f_1; g) = (-1)^{n-r}\Phi(f_1'; g')$$

car $S(f_1') \subset G'^{sr}$. Par le lemme 4.3.8,

$$\Phi(f_2; g) = 0$$

car $S(f_2') \cap Ad_{G_F'}(g') = \emptyset$. On a donc

$$\Phi(f; g) = (-1)^{n-r}\Phi(f'; g')$$

ce qui contredit notre supposition.

En conclusion, $f \in PW_G(f') \Rightarrow f \leftrightarrow (-1)^{n-r}f'$.

Montrons maintenant que, réciproquement, $f \leftrightarrow (-1)^{n-r}f' \Rightarrow f \in PW_G(f')$. Supposons que $f \leftrightarrow (-1)^{n-r}f'$. Soit $h \in PW_G(f')$ (il en existe un par le lemme 4.3.3). On vient de voir qu'on a alors $h \leftrightarrow (-1)^{n-r}f'$. On en déduit que les intégrales orbitales de h et de f sont égales sur G^{sr}. Les caractères des représentations de G sont localement intégrables donc par la proposition 3 de l'annexe 2 on obtient que h et f ont la même trace sur toute représentation de G. Comme $h \in PW_G(f')$ on en déduit que $f \in PW_G(f')$.

2) Soit $f' \in PW_{G'}(f)$. Cela implique $f \in PW_G(f')$. Par le point 1) plus haut on a alors:

$$f \leftrightarrow (-1)^{n-r}f'.$$

Théorème 4.3.9 . *Soit ω un caractère de Z.*

1) Soit $f' \in H(G'; \omega)$. Alors il existe $f \in H(G; \omega)$ telle que $f \leftrightarrow f'$.

2) Soit $f \in H(G'; \omega)$ telle que l'intégrale orbitale de f est nulle sur $G^{sr}\backslash G_{G'}$. Alors il existe $f \in H(G; \omega)$ telle que $f \leftrightarrow f'$.

Démonstration. 1) Soit $h' \in H(G')$ telle que $I_\omega(h') = f'$. Alors par le théorème 4.3.1 1) il existe $h \in H(G)$ tel que $h \leftrightarrow h'$. On pose $I_\omega(h) = f$ et on a facilement $f \leftrightarrow f'$ par la proposition 1.1.1.

2) Ce sens est un peu plus difficile. On ne sait pas s'il existe $h \in H(G)$ *dont les intégrales orbitales sont nulles sur* $G^{sr}\backslash G_{G'}$ et telle que $I_\omega(h) = f$, pour pouvoir appliquer le théorème 4.3.1 2). Considérons quand même une fonction $h \in H(G)$ telle que $I_\omega(h) = f$. Soit

$$h' : Grot(G) \to \mathbb{C}$$

définie de la façon suivante :

- sur $\mathbf{S}_{G,G'}$ h est nulle

- pour tout sous-groupe de Levi standard L de G qui se transfère sur G' pour tout $\pi \in \Pi^2(G)$, $h'(ind_L^G\pi) = tr\, ind_L^G\pi(h)$.

On vérifie facilement (puisqu'on est sur GL_n !) que h' est une bonne fonction. Elle est donc une fonction trace par le théorème de Paley-Wiener. Soit $h'' \in H(G)$ la fonction associée. On ne tente pas de montrer que $I_\omega(h'') = f$, mais on se contente de savoir que :

- pour toute représentation π de G de caractère central ω on a :

$$tr\pi(h'') = tr\pi(f)$$

et

- les intégrales orbitales de h'' sont nulles sur $G^{sr} \backslash G_{G'}$. La deuxième condition implique qu'il existe $u \in H(G')$ telle que $h'' \leftrightarrow u$ (th4.3.1 1)). Posons $v = I_\omega(u)$. Montrons qu'on a $f \leftrightarrow v$. En fait v se transfère par le point 1) plus haut : il existe $w \in H(G;\omega)$ telle que $w \leftrightarrow v$. Mais alors les intégrales orbitales de w sont nulles sur $G^{sr} \backslash G_{G'}$ et pour toute représentation π de G de caractère central ω on a :

$$tr\pi(w) = (-1)^{n-r} tr\mathbf{JL}_r(\pi)(v) = (-1)^{n-r} tr\mathbf{JL}_r(\pi)(u) = tr\pi(h'') = tr\pi(f).$$

On conclut par la proposition 1, annexe 2.

4.4 Intégrabilité locale des caractères

Le transfert de toutes les représentations et de toutes les fonctions de G' vers G, transfert compatible avec la trace, nous permet de prouver que l'intégrabilité locale des caractères sur G' est une conséquence de l'intégrabilité locale des caractères sur G (prouvée dans [Le2]). On montre donc le théorème suivant :

Théorème 4.4.1 . *Soit $\pi \in E(G')$ et soit $f' \in H(G')$. Alors la fonction $\chi_\pi f'$ est intégrable sur ${G'}^{sr}$ et on a*

$$tr\pi(f') = \int_{G'^{sr}} \chi_\pi(g')f'(g')dg'.$$

Démonstration. Posons $S(f')^{sr} = S(f') \cap G'^{sr}$. Soit $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts pour $S(f')^{sr}$ qui vérifie :

$$g \in K_n \Rightarrow Ad_{G'}(g) \cap S(f') \subset K_n$$

(prendre une suite exhaustive de compacts pour $S(f')^{sr}$ quelconque, $\{K'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et poser $K_n = Ad_{G'}(K'_n) \cap S(f')^{sr} = Ad_{G'}(K'_n) \cap S(f')$, par exemple). Pour tout n, notons f'_n la restriction de f' à K_n. Soit $f \in PW_G(f')$ et pour tout n, $f_n \in PW_G(f'_n)$.

Montrons d'abord que $\int_{G'^{sr}} |\chi_\pi(g')f'(g')|dg'$ converge. On peut supposer que f' est à valeurs réelles positives. C'est alors le cas de toutes les f'_n. Supposons par l'absurde que $\int_{G'^{sr}} |\chi_\pi(g')f'(g')|dg' = \infty$. En appliquant le théorème B, page 112 de [Ha], on trouve qu'on doit avoir forcément :

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{G'^{sr}} |\chi_\pi(g')f'_n(g')|dg' = \infty.$$

Mais, pour tout n, le support de f'_n est $K_n \subset G'^{sr}$ et on peut appliquer la formule d'intégration de Weyl à la fonction localement constante à support compact $|\chi_\pi f'_n|$. On trouve :

$$(2) \qquad \int_{G'^{sr}} |\chi_\pi(g')f'_n(g')|dg' = \sum_{T'\in\mathcal{T}_{G'}} |W(T')|^{-1} \int_{T'^{reg}} D(t')|\chi_\pi(t')|\Phi(|f'_n|;t')|dt' =$$

$$\sum_{T'\in\mathcal{T}_{G'}} |W(T')|^{-1} \int_{T'^{reg}} D(t')|\chi_\pi(t')|\Phi(f'_n;t')|dt'.$$

D'autre part, par le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 4.3.4, cas de caractéristique nulle, on a

$$(3) \qquad \sum_{T'\in\mathcal{T}_{G'}} |W(T')|^{-1} \int_{T'^{reg}} D(t')|\chi_\pi(t')|\Phi(f'_n;t')dt' =$$
$$\sum_{T\in\mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t)|\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(t)||\Phi(f_n;t)|dt$$

puisque

- $\Phi(f_n;t) = 0$ si $t \in G^{sr}\backslash G_{G'}$ et $|\Phi(f_n;t)| = \Phi(f'_n;t')$ si $t \in G_{G'}$ et $t \leftrightarrow t'$ par la proposition 4.3.4 (il y a une valeur absolue à cause du signe $(-1)^{n-r}$; $\Phi(f'_n;t')$ est toujours positive)

- pour tout $t \leftrightarrow t'$, $|\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(t)| = |\chi_\pi(t')|$ et $D(t) = D(t')$

- l'homéomorphisme fixé entre des tores qui se correspondent respecte la mesure.

Les relations (1), (2) et (3) impliquent alors que

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{T\in\mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t)|\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(g)|\Phi(f_n;g)dg = \infty.$$

Maintenant, pour tout $g \in G^{sr}$, ou bien $g \notin G_{G'}$ et alors on a

$$\Phi(f_n;g) = \Phi(f;g) = 0,$$

ou bien $g \in G_{G'}$ et alors, si $g' \in G'$ est tel que $g \leftrightarrow g'$, on a

$$|\Phi(f_n;g)| = \Phi(f'_n;g') \le \Phi(f';g') = |\Phi(f;g)|.$$

Par conséquent $|\Phi(f_n;g)| \le |\Phi(f;g)|$ pour tout $g \in G^{sr}$, et, comme D est une fonction positive on a :

$$(5) \qquad \sum_{T\in\mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t)|\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(t)||\Phi(f_n;t)|dt \le$$
$$\sum_{T\in\mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t)|\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(t)||\Phi(f;t)|dt.$$

Mais, du fait de l'intégrabilité locale des caractères sur G on a par la formule de Weyl

$$(6) \qquad \sum_{T\in\mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t)|\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(t)||\Phi(f;t)|dt \le$$
$$\sum_{T\in\mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t)|\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(t)|\Phi(|f|;t)dt = \int_{G^{sr}} |\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(g)||f(g)|dg < \infty.$$

Les formules (5) et (6) impliquent l'existence d'un nombre réel qui borne supérieurement $\sum_{T\in\mathcal{T}_G}|W(T)|^{-1}\int_{T^{reg}} D(t)|\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(t)||\Phi(f_n;t)|dt$ pour tout n. C'est en contradiction avec (4) ce qui prouve que $\int_{G'^{sr}}|\chi_\pi(g')f'(g')|dg'$ converge.

Montrons maintenant qu'on a bien

$$tr\pi(f') = \int_{G'^{sr}} \chi_\pi(g')f'(g')dg'.$$

Montrons d'abord qu'on a

$$\text{(7)} \qquad \lim_{n\to\infty} tr\mathbf{JL}_r(\pi)(f_n) = tr\mathbf{JL}_r(\pi)(f).$$

On a

$$tr\mathbf{JL}_r(\pi)(f_n) = \sum_{T\in\mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1}\int_{T^{reg}} D(t)\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(t)\Phi(f_n;t)dt$$

et

$$tr\mathbf{JL}_r(\pi)(f) = \sum_{T\in\mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1}\int_{T^{reg}} D(t)\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(t)\Phi(f;t)dt.$$

Considérons l'espace topologique $X = \coprod_{T\in\mathcal{T}_G} T^{reg}$. Munissons X de la mesure dx suivante: pour chaque tore $T\in\mathcal{T}_G$ on prend sur T^{reg} la mesure de Haar $dx = |W(T)|^{-1}dt$ où dt est la mesure fixée au début sur T. Or, la suite de fonctions $\big(D\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}\Phi(f_n;\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions intégrables sur l'espace X qui tend simplement vers la fonction $D\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}\Phi(f;\cdot)$. La suite de fonctions $\big(|D\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}\Phi(f_n;\cdot)|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions bornée par la fonction $|D\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}\Phi(f;\cdot)|$. La fonction $|D\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}\Phi(f;\cdot)|$ est intégrable sur X (on l'a vu plus haut, $\int_X |D(x)\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}(x)\Phi(f;x)|dx \leq \int_{G^{sr}}|\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi)}f|(g)dg < \infty$). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (th. D, page 110, [Ha]). On trouve bien $\lim_{n\to\infty} tr\mathbf{JL}_r(\pi)(f_n) = tr\mathbf{JL}_r(\pi)(f)$ qui n'est autre que (7).

Pour tout n, $f_n\in PW_G(f'_n)$, donc $tr\mathbf{JL}_r(\pi)(f_n) = tr\pi(f'_n)$.
On a $f\in PW_G(f')$ donc $tr\mathbf{JL}_r(\pi)(f) = tr\pi(f')$.
Donc, en appliquant (7), on trouve

$$\text{(8)} \qquad \lim_{n\to\infty} tr\pi(f'_n) = tr\pi(f').$$

Mais, pour tout n, $S(f'_n)\subset G'^{sr}$ et donc

$$tr\pi(f'_n) = \int_{G'^{sr}} \chi_\pi(g')f'_n(g')dg'$$

et on trouve n combinant avec (8)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{G'^{sr}}\chi_\pi(g')f'_n(g')dg' = tr\pi(f'). \tag{9}$$

Maintenant, la suite de fonctions intégrables $(\chi_\pi f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $\chi_\pi f'$ sur G'^{sr}. Aussi, pour tout n on a $|\chi_\pi f'_n| \leq |\chi_\pi f'|$ sur G'^{sr} et on a montré que cette dernière fonction était intégrable sur G'^{sr}. En appliquant à nouveau le théorème de convergence dominée, on trouve que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{G'^{sr}}\chi_\pi(g')f'_n(g')dg' = \int_{G'^{sr}}\chi_\pi(g')f'(g')dg'. \tag{10}$$

Finalement, les relations (9) et (10) impliquent :

$$tr\pi(f') = \int_{G'^{sr}}\chi_\pi(g')f'(g')dg'.$$

Corollaire 4.4.2 . *Dans les théorèmes de correspondance 3.3.19 et 4.2.2 on peut rajouter : si $\pi \leftrightarrow \pi'$, si $f \leftrightarrow f'$, alors on a :*

$$tr\pi(f) = (-1)^{n-r}tr\pi'(f').$$

Démonstration C'est évident parce que, ayant démontré que sur G' aussi les caractères des représentations sont localement intégrables, on peut appliquer la proposition 1.4.2. Remarquons quand même qu'on n'avait pas besoin de l'intégrabilité locale des caractères pour montrer ce résultat. On pouvait le montrer plus laborieusement de la façon suivante : quand on a montré la correspondance, on a mis dans la formule des traces une fonction pour laquelle on n'a pas imposé que sa composante à la place v_0 soit à support dans les éléments réguliers, mais seulement qu'elle soit une fonction qui se transfère. Ainsi, le résultat auquel on était arrivé peut s'enoncer : si π est une représentation de carré intégrable de G, si $\pi \leftrightarrow \pi'$, si $f \leftrightarrow f'$, alors on a :

$$tr\pi(f) = (-1)^{n-r}tr\pi'(f').$$

On peut étendre successivement

- à toutes les représentations essentiellement de carré intégrable en utilisant, pour une représentation de carré intégrable π, l'algébricité en la variable X de la fonction $trX(f)$ sur la variété $\Psi(G;\pi)$ et la Zariski densité des représentations de carré intégrable dans cette variété

- à toutes les représentations induites des représentations essentiellement de carré intégrable par récurrence sur l'entier r tel que $G' = GL_r(D)$, en utilisant le théorème 1.3.1

- à toutes les représentations en utilisant la proposition 4.2.1.

Corollaire 4.4.3 . *Le groupe G' a la propriété* (**P**) *: si π est une représentation de carré intégrable de G' et f_π est un pseudocoefficient de π, alors pour tout $g \in G'_e$ on a*

$$\chi_\pi(g) = \overline{\Phi(f_\pi; g)}.$$

Démonstration Le corollaire précédent implique qu'une fonction sur G' qui correspond à un pseudocoefficient f_π d'une représentation de carré intégrable π de G est un pseudocoefficient $f_{\pi'}$ de la représentation de carré intégrable π' de G' qui correspond à π. Puisque les intégrales orbitales de f_π et $f_{\pi'}$ se correspondent, que les caractères de π et π' se correspondent et que G a la propriété **P** (prop.4.4.3), on a le résultat.

4.5 Deux résultats globaux

Soient $\mathbb{F}$ un corps global et $\mathbb{A}$ une algèbre centrale simple de dimension finie n^2 sur $\mathbb{F}$. On note G' le groupe des èléments inversibles de $\mathbb{A}$ et $\tilde{G}'$ les adèles de G'. On suppose que G' est scindé aux places infinies.

Théorème 4.5.1 . *a) Soit $\tilde{\omega}$ un caractère du centre de $\tilde{G}'$. Soit S un sous-ensemble fini de l'ensemble des places finies de $\mathbb{F}$. On suppose qu'on s'est donné pour toute place $v \notin S$ une représentation admissible irréductible π_v de G_v de caractère central $o\tilde{m}ega_v$. Alors il existe au plus un nombre fini de représentations automorphes cuspidales de $\tilde{G}$ de caractère central $\tilde{\omega}$ qui ont comme composante locale π_v à toute place $v \notin S$.*

b) Soient S un ensemble fini non vide de places finies de $\mathbb{F}$ et pour tout $v \in S$ soit π'_v une représentation de carré intégrable de G'_v. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\pi}'$ de $\tilde{G}'$ telle qu'à toute place $v \in S$ la composante locale de $\tilde{\pi}'$ soit équivalente à π_v.

Démonstration. a) C'est prouvé dans la partie IV de l'annexe 1.

b) Comme l'ont remarqué [DKV], c'est une conséquence simple de la correspondance avec GL_n, du moins une fois qu'on a le point a) ci-dessus. À toute place $v \in S$ on pose $G_v = GL_n(\mathbb{F}_v)$ et on considère la représentation de carré intégrable π_v de G_v qui correspond à π'_v. Rajoutons deux places finies w et w' où G' est scindé à S et notons $T = S \cup \{w; w'\}$. Fixons une représentation cuspidale π_w de G_w et une représentation quelconque $\pi_{w'}$ de $G_{w'}$. Par le théorème 1.11.8, il existe une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\pi}$ du groupe des adèles de $GL_n(\mathbb{F})$ dont la composante locale à toute place $v \in T$ est π_v. Soit U l'ensemble fini de places où G' est ramifié. Posons $V = T \cup U$. En procédant comme dans la section 1, chapitre 3, (prop.3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7) on peut montrer que, d'une part il existe un ensemble non vide et fini X de représentations automorphes cuspidales de $\tilde{G}'$ dont les composantes locales aux places qui ne sont pas dans V sont les mêmes que celles de $\tilde{\pi}$, et d'autre part, si pour tout $v \in V$ $f_v \in H(G_v)$ et $f'_v \in H(G'_v)$ se correspondent, $f_w = f'_w$ est un coefficient de π_w et $f_{w'} = f'_{w'}$ est à support dans les éléments elliptiques réguliers, on a

$$\prod_{v \in V} tr\tilde{\pi}_v(f_v) = \sum_{\tilde{\pi}' \in X} m(\tilde{\pi}') \prod_{v \in V} tr\tilde{\pi}'_v(f'_v).$$

Comme il y a correspondance – donc tous les caractères distribution de gauche se transfèrent sur les groupes de droite – et nombre fini de représentations à droite, il suffit de fixer une fonction quelconque $f_{w'}$ à support dans les éléments elliptiques réguliers telle que $tr\tilde{\pi}_{w'}(f_{w'}) \neq 0$ pour avoir par l'indépendance linéaire des caractères distribution que X est réduit à un seul élément $\tilde{\pi}'$ (de multiplicité 1) et qu'aux places v qui nous intéressent (dans S), on a forcément $\tilde{\pi}'_v \simeq \pi'_v$.

ANNEXE 1

On a choisi de régrouper dans cette annexe les résultats qui font appel aux fonctions L de Godement et Jacquet et aux calculs des facteurs ϵ par Bushnell et Fröhlich. On montre d'abord quelques résultats généraux qu'on réunit dans une "partie 0". Dans la première partie on démontre un résultat de finitude qui est essentiel pour montrer toutes les correspondances (proposition 3.1.6, page 66) : il s'agit de la finitude du nombre de représentations automorphes cuspidales d'une certaine algèbre centrale simple sur un corps global qui ont des composantes fixées à presque toutes les places. Je remercie Guy Henniart qui m'a expliqué le principe de la démonstration et Paul Broussous qui m'a fait part de son résultat (le théorème 2) non encore publié. Dans la deuxième partie on montre un résultat qui sert dans la démonstration de la correspondance en caractéristique non nulle (prop 3.1.10, page 73) : il s'agit de borner, une fois établie la correspondance en caractéristique nulle, le conducteur d'une représentation de carré intégrable en fonction du conducteur de la représentation qui lui correspond. Dans la troisième partie on prouve le lemme 3.3.15, page 104; c'est un résultat de comparaison entre les conducteurs de deux représentations de deux groupes proches. Dans la quatrième partie on montre le point a) du théorème 4.5.1, page 152.

Comme dans cette annexe on fait parfois allusion aux résultats des chapitres précédents le lecteur peut se démander s'il n'y a pas de cercle vicieux dans le raisonnement. C'est très simple de s'en rendre compte : à part la partie 0 qui n'a pas de liaison avec ce qu'on a démontré jusqu'ici, les parties I, II, III et IV contiennent des démonstrations qui ont une place très précise dans les chapitres prècédents mais qu'on a regroupées ici. Ainsi, la partie I contient une démonstration qui devrait se trouver à la page 66 et on a donc le droit d'y utiliser les résultats montrés dans cette thèse avant la page 66; la partie II contient une démonstration qui devrait se trouver à la page 73 et on a donc le droit d'y utiliser les résultats montrés dans cette thèse avant la page 73 et aussi les résultats prouvés dans la partie I de cette annexe; et ainsi de suite...

PARTIE 0

Soit A une algèbre centrale simple de dimension n^2 sur un corps global $\mathbb{F}$. On note $\mathbb{G}$ le groupe des éléments inversibles de A. Pour toute place v de $\mathbb{F}$ on note G_v le groupe $\mathbb{G}(\mathbb{F}_v)$. On note q_v le cardinal du corps résiduel de G_v. On note $\tilde{G}$ les adèles de $\mathbb{G}$ et $\mathbb{A}(\mathbb{F})$ les adèles de $\mathbb{F}$. On considère $\mathbb{F}$ comme sous-anneau de $\mathbb{A}(\mathbb{F})$ via le plongement canonique.

Quand on parlera de A_v ou G_v sans plus de précisions, ça voudra dire "pour une certaine place v". Pour une place v donnée on assimile A_v à l'algèbre de matrices $M_r(D)$ où r divise n et D est une algèbre centrale simple de dimension $d^2 = (n/r)^2$. Le groupe G_v sera assimilé par conséquent au groupe $GL_r(D)$. La paire parabolique minimale standard de G_v fixée à cette place sera par convention $(A_0; P_0)$ où A_0 est le tore diagonal et P_0 est le groupe des matrices triangulaires supérieures. On ne considérera que des sous-groupes paraboliques standard et des sous-groupes de Levi standard qui s'écriront donc comme un produit diagonal de blocs $B_1 \times B_2 ... \times B_k$ où chaque B_i est isomorphe à un $GL_{r_i}(D)$ et $\sum r_i = r$. Si v est finie, le sous-groupe compact maximal en bonne position sera par convention $K = GL_r(O_D)$ et la base de voisinages de l'élément neutre $\{K_F^l = 1 + M_n(P_D^l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ comme dans le chapitre précédent. Si π est une représentation admissible de G_v, on écrit $\check{\pi}$ pour la représentation contragrédiente de π. Dans toute cette annexe 1, le mot "polynôme" veut dire "polynôme à coefficients complexes".

Soit π une représentation admissible de G_v. Dans [GJ] on attache à π une fonction $L(s; \pi)$ (qu'on ne définit pas ici) de variable complexe s et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Supposons qu'on a fixé un caractère additif unitaire ψ de $\mathbb{F}_v$; on attache à π et ψ une fonction $\epsilon(s; \pi; \psi)$ (qu'on ne définit pas ici; voir [GJ]) de variable complexe s et à valeurs dans $\mathbb{C}$ qu'on appelle *facteur* ϵ. Posons

$$\epsilon'(s; \pi; \psi) = \epsilon(s; \pi; \psi) L(1 - s; \check{\pi}) L(s; \pi)^{-1}.$$

La tradition veut qu'on fasse apparaître la variable s dans l'écriture de ces fonctions même s'il ne s'agit pas d'un s précis. Dans les égalités de fonctions cela voudra dire toujours "pour tout s". Les fonctions L, ϵ et ϵ' ont les propriétés suivantes :

1) (v finie) $L(s; \pi) = 1$ si π est une représentation cuspidale qui n'est pas un caractère (toujours vrai si $r \neq 1$) ou si π est un caractère ramifié de G_v ; $L(s; \pi) = P(q_v^{-s})$ où P est un polynôme de degré 1, si π est un caractère non ramifié de G_v (proposition 5.11, [GJ]).

2) (v finie) Si π est une représentation admissible de G_v et ψ est un caractère additif non trivial de F alors

$$\epsilon(s; \sigma_i; \psi) = a q_v^{(c(\psi) - m(\pi))s}$$

où a est un nombre complexe, $c(\psi) = n \min\{i : P_F^i \subset ker(\psi)\}$ et $m(\pi)$ ne dépend que de π.

3) (v finie) Soit P un sous-groupe parabolique standard de G_v et $P = LU$ une décomposition de Levi standard de P. Écrivons L comme un produit diagonal de blocs $L = B_1 \times B_2 ... \times B_k$. Soient $\sigma_1, \sigma_2 ... \sigma_k$ des représentations lisses irréductibles de $B_1, B_2 ... B_k$ respectivement et ψ un caractère additif non trivial de F. Si on pose $\pi = ind_P^{G_v} \sigma_1 \otimes \sigma_2 ... \otimes \sigma_k$, on a :

$$L(s; \pi) = \prod_{i=1}^{k} L(s; \sigma_i) \qquad L(s; \check{\pi}) = \prod_{i=1}^{k} L(s; \check{\sigma}_i)$$

$$\epsilon(s;\pi;\psi) = \prod_{i=1}^{k} \epsilon(s;\sigma_i;\psi)$$

(proposition 3.5, [GJ]).

4) (v finie) Si π et ψ sont comme plus haut et π' est un sous-quotient irréductible de π, alors

$$L(s;\pi')/L(s;\pi) \text{ et } L(s;\check{\pi}')/L(s;\check{\pi})$$

sont des polynômes de q_v^{-s} et

$$\epsilon'(s;\pi';\psi) = \epsilon'(s;\pi;\psi)$$

(corollaire 3.6, [GJ]).

5) Si $\tilde{\pi}$ est une représentation automorphe cuspidale irréductible de $\tilde{G}$ et ψ est un caractère additif unitaire non trivial de $\mathbb{A}(\mathbb{F})$ et trivial sur $\mathbb{F}$ on a :

$$\prod_v \epsilon(s;\pi_v;\psi_v)$$

converge vers une fonction $\epsilon(s;\tilde{\pi})$ indépendante de ψ ;

$$\prod_v L(s;\pi_v)$$

converge vers une fonction $L(s;\tilde{\pi})$;

$$\prod_v L(s;\check{\pi}_v)$$

converge vers une fonction $L(s;\check{\tilde{\pi}})$;

On a

$$\epsilon(s;\tilde{\pi})L(1-s;\check{\tilde{\pi}})L(s;\tilde{\pi})^{-1} = 1.$$

(théorème 13.8, [GJ]).

Ces propriétés vont être utilisées au long de cette annexe et citées par leur numero.

Proposition 1. *Soit π une représentation lisse irréductible de G_v. Soient P un sous-groupe parabolique standard (propre ou pas) de G_v, L son sous-groupe de Levi standard et σ une représentation cuspidale de L, tels que π soit un sous-quotient de $ind_P^{G_v}\sigma$. Écrivons comme plus haut $L = B_1 \times B_2 ... \times B_k$ et $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2 ... \otimes \sigma_k$. On a :*

a) $L(s;\pi) = P(q_v^{-s})^{-1}$ où P est un polynôme de degré au plus n.

b) si ψ est un caractère non trivial de $\mathbb{F}_v$ alors

$$\epsilon'(s;\pi;\psi) = \prod_{i=1}^{k} \epsilon'(s;\sigma_i;\psi).$$

Démonstration. a) On a bien entendu $k \leq n$. Par la propriété 1) on a $L(s;\sigma_i) = P_i(q_v^{-s})^{-1}$ où P_i est un polynôme de degré au plus 1. Par la propriété 3) on a alors $L(s; ind_P^{G_v}\sigma) = Q(q_v^{-s})^{-1}$ où Q est un polynôme de degré au plus n. Par la propriété 4), $L(s;\pi) = P(q_v^{-s})^{-1}$ où P est un polynôme qui divise Q. D'où le résultat.

b) La propriété 3) implique (par définition de la fonction ϵ') que

$$\epsilon'(s; ind_P^{G_v}\sigma;\psi) = \prod_{i=1}^{k} \epsilon'(s;\sigma_i;\psi).$$

On conclut par la propriété 4).

Lemme 1. *Soient P et Q deux polynômes de degré au plus n. Alors $P(q_v^{-s})/Q(q_v^{s}) = R(q_v^{-s})$ où R est une fraction rationnelle qui est le rapport de deux polynômes de degré au plus $2n$.*

Démonstration. On pose $R(q_v^{-s}) = (q_v^{-degQs}P(q_v^{-s}))/(q_v^{-degQs}Q(q_v^{s}))$, où $degQ$ est le degré de Q.

On énonce maintenant deux résultats – les théorèmes 1 et 2 – l'un dû à Bushnell et l'autre à Broussous. Il faut qu'on explique un peu la nature des objets qui y interviennent.

Soit v une place finie. Nous identifions A_v à une algèbre de matrices $M_r(D)$ comme plus haut. Soient t et t' deux entiers positifs tels que $tt' = r$. Soit $\mathfrak{A}_{t,t'}$ le sous-anneau de A_v formé des matrices par blocs $(A_{ij})_{1\leq i,j\leq t'}$ telles que $A_{ij} \in M_t(O_D)$ si $i \geq j$ et $A_{ij} \in M_t(P_D)$ si $i < j$. On appelle $\mathfrak{A}_{t,t'}$ *ordre principal standard* de A_v. On appelle *ordre principal* de A_v un sous-anneau de A_v qui est conjugué par un élément de G_v avec un ordre principal standard (voir 1.2.15 et 1.5.2, [BF]). Si $\mathfrak{A}_{t,t'}$ est un ordre principal standard de A_v, alors son radical de Jacobson est $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}$ formé des matrices par blocs $(A_{ij})_{1\leq i,j\leq t'}$ où $A_{ij} \in M_t(O_D)$ si $i > j$ et $A_{ij} \in M_t(P_D)$ si $i \leq j$. On définit alors les groupes suivants: $U_0(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^*$ et $U_j(\mathfrak{A}) = 1 + \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}^j$. L'ensemble $\{U_j(\mathfrak{A})\}_{j\in\mathbb{N}}$ est une base de voisinages de l'unité dans G_v. Si on fixe un ordre principal standard $\mathfrak{A}$, si ρ est une représentation d'un sous-groupe de G_v contenant $U_0(\mathfrak{A})$, on pose $f(\rho)_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}^j$ où j est le plus petit entier tel que $U_j(\mathfrak{A}) \subset ker(\rho)$. On appelle $f(\rho)_{\mathfrak{A}}$ le *conducteur* de ρ relatif à $\mathfrak{A}$. Nous ne donnons pas ici la définition d'une représentation non dégénérée au sens de Bushnell-Fröhlich car elle ne joue pratiquement aucun rôle dans la suite. Elle peut être trouvée à la page 228 de [BF].

Dans ce qui suit on fixe à toute place v le caractère additif unitaire ψ_v de $\mathbb{F}_v$ de la façon suivante: si $\mathbb{F}$ est un corps de nombres et $\mathbb{F}_v$ est une extension de $\mathbb{Q}_p$ alors ψ_v est donné par la composition de la trace réduite de $\mathbb{F}_v$ sur $\mathbb{Q}_p$ avec les applications

$$\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

après avoir identifié, par l'application $z \mapsto exp(2i\pi z)$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ avec le groupe multiplicatif des éléments de module 1 dans $\mathbb{C}$. Si F_v est un corps de fonctions $\mathbb{L}((t))$ où $\mathbb{L}$ est une extension finie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors ψ_v est la composition de :

$$\mathbb{L}((t)) \to \mathbb{L}((t))/\mathbb{L}[[t]] \simeq \mathbb{L}[1/t]/\mathbb{L}$$

avec le caractère de $\mathbb{L}[1/t]/\mathbb{L}$ qui envoie $1/t$ sur $e^{2i\pi/p}$. On sait qu'il existe un caractère ψ de $\mathbb{A}(\mathbb{F})$ trivial sur $\mathbb{F}$ dont la composante à chaque place v est ψ_v.

Si $\mathfrak{A}$ est un ordre principal de A_v, on pose

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}} = \{x \in A_v \ : \ \psi_v(tr_{A_v/\mathbb{F}_v}(xy)) = 1 \ \ \forall y \in \mathfrak{A}\}$$

Théorème 1. *Supposons que A_v n'est pas une algèbre à division. Soit π une représentation cuspidale de G_v. Soit $\mathfrak{A}$ un ordre principal standard et $N(\mathfrak{A})$ le normalisateur de $\mathfrak{A}$ dans G_v. Supposons que la restriction de π à $N(\mathfrak{A})$ contient une représentation non dégénérée ρ de $N(\mathfrak{A})$. Alors le facteur ϵ de π est donné par :*

$$\epsilon(\pi; s; \psi_v) = [\mathfrak{A} : \mathfrak{D}_{\mathfrak{A}} f(\rho)_{\mathfrak{A}}]^{(1/2-s)/n} W(\rho)$$

où $W(\rho)$ est une constante complexe.

Démonstration. C'est le théorème 3.3.8 dans [BF] où on a tenu compte du fait que tout ordre principal est conjugué à un ordre principal standard.

Théorème 2. *Soit π une représentation cuspidale de G_v de niveau supérieur ou égal à 2. Supposons que π n'a pas de vecteur fixe sous K_F^1. Alors il existe un ordre principal standard $\mathfrak{A}$ de A_v tel que la restriction de π à $\mathfrak{A}$ contienne une représentation non dégénérée ρ de $N(\mathfrak{A})$.*

Démonstration. C'est un résultat en cours de publication qui m'a été communiqué par P.Broussous.

Définissons le niveau $niv(\pi)$ d'une représentation π de G_v comme le plus petit $i \geq 0$ tel que π ait un vecteur fixe sous K_F^i.

Proposition 2. *Soit π une représentation cuspidale de G_v de niveau supérieur ou égal à 1. Écrivons*

$$\epsilon(s; \pi; \psi_v) = a q_v^{(c(\psi) - m(\pi))s}$$

où a est une constante complexe. On a alors

$$niv(\pi) \leq m(\pi).$$

Démonstration. Si A_v est une algèbre à division, on a $niv(\pi) = m(\pi) - n + 1$ et le résultat est vrai.

Supposons que A_v n'est pas une algèbre à division. Grâce au théorème 2 on peut appliquer le théorème 1 à π. On obtient

$$\epsilon(\pi; s; \psi_v) = [\mathfrak{A} : \mathfrak{D}_{\mathfrak{A}} f(\rho)_{\mathfrak{A}}]^{(1/2-s)/n} W(\rho)$$

ou encore

$$a q_v^{(c(\psi)-m(\pi))s} = [\mathfrak{A} : \mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}]^{(1/2-s)/n} [\mathfrak{A} : f(\rho)_{\mathfrak{A}}]^{(1/2-s)/n} W(\rho).$$

Soit j tel que $f(\rho) = \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}^j$. On a alors, par 1.4.14 et 1.4.1 dans [BF],

$$[\mathfrak{A} : f(\rho)_{\mathfrak{A}}] = q_v^{t' t^2 dj} = q_v^{ntj}.$$

Par 2.1.2.(i) et 2.1.7 [BF] on sait que

$$[\mathfrak{A} : \mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}] = [\mathfrak{A} : \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}^{e-1} \mathfrak{D}_{O_{\mathbb{F}_v}}]$$

où e est un indice de ramification (voir 1.4.6 et 1.4.7 de [BF] pour la définition). Supposons que la différente absolue $\mathfrak{D}_{O_{\mathbb{F}_v}}$ de $\mathbb{F}_v$ soit égale à $P_{\mathbb{F}_v}^{c(\mathbb{F}_v)}$. Un simple calcul montre alors qu'on a

$$[\mathfrak{A} : \mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}] = q_v^{r^2 d^2 c(\mathbb{F}_v) + (e-1)nt}.$$

On trouve donc que

$$-c(\psi) + m(\pi) = (ntj + r^2 d^2 c(\mathbb{F}_v) + (e-1)nt)/n$$

d'où $(rd = n)$

$$tj = m(\pi) - c(\psi) - nc(\mathbb{F}_v) - (e-1)t.$$

Sachant que $-c(\psi) = nc(\mathbb{F}_v)$ car $ker(\psi) = \mathfrak{D}_{O_{\mathbb{F}_v}}^{-1}$, on trouve après simplification

$$j = (m(\pi)/t) - (e-1).$$

Maintenant, on sait que $ker(\rho) \subset K_F^{niv(\pi)}$, donc $f(\rho) \subset M_r(P_D^{d\,niv(\pi)})$ et finalement $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}^j \subset M_r(P_D^{d\,niv(\pi)})$. Comme $M_r(P_D) \subset \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}$ on en déduit facilement que $M_r(P_D^j) \subset \mathfrak{B}_{\mathfrak{A}}^j$ et donc $d\,niv(\pi) \leq j = (m(\pi)/t) - (e-1)$. On a alors en particulier $m(\pi) \geq 0$ et donc grossièrement

$$niv(\pi) \leq m(\pi).$$

PARTIE I

Dans cette partie on montre comment les hypothèses de récurrence $(\mathbf{H_k})$ pour $k \leq r-1$ impliquent la proposition 3.1.6 au rang r (voir page 66). On suppose donc que $(\mathbf{H_k})$ est vérifiée pour $k \leq r-1$. Rappelons ce que cela veut dire et ce qu'on veut démontrer. On a un corps global $\mathbb{F}$ et une algèbre à division $\mathbb{D}$ centrale sur $\mathbb{F}$, de dimension finie n^2. On note $\mathbb{G}$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{D}$. Le groupe $\mathbb{G}$ est ramifié à un nombre fini de places, toutes finies, $V = \{v_0; v_1 \ldots v_m\}$. Aux places $\{v_1; v_2 \ldots v_m\}$, G_{v_i} est le groupe des éléments inversibles d'une algèbre à division, tandis qu'à la place v_0 on a $G_{v_0} \simeq GL_r(D)$ où D est une algèbre à division centrale sur $\mathbb{F}_{v_0}$ de dimension d^2 (et on a $dr = n$). L'hypothèse de récurrence $(\mathbf{H_k})$ est vérifiée pour $k \leq r-1$ implique en particulier que pour tout $k \leq r-1$, si π est une représentation essentiellement de carré intégrable de $GL_k(D)$, alors on a $m(\pi) \geq -2k$. C'est vrai en particulier pour les représentations cuspidales de $GL_k(D)$. La proposition 2 implique alors que, pour une représentation cuspidale *quelconque* π de $GL_k(D)$ on a

$$niv(\pi) \leq m(\pi) + 2k + 1. \tag{4.2}$$

(On a inglobé aussi le cas de niveau inférieur ou égal à 1.) Nous montrons maintenant que cette propriété implique le résultat suivant :

Résultat annoncé à la page 66. *Si $\tilde{\omega}$ est un caractère unitaire du centre de $\tilde{G}$, si pour toute place v où $\mathbb{G}$ est scindé on se donne une représentation irréductible π_v de G_v de caractère central $\tilde{\omega}_v$, il existe au plus un nombre fini de représentations automorphes cuspidales $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}$ de caractère central $\tilde{\omega}$ qui vérifient $\tilde{\pi}_v \simeq \pi_v$ pour toute place v où $\mathbb{G}$ est scindé.*

Démonstration.

Attention! Dans cette démonstration on utilise deux fois (tout à la fin) l'hypothèse qu'aux places $v_1; v_2 \ldots v_m$, G_{v_i} est le groupe des éléments inversibles d'une algèbre à division et non pas le groupe des éléments inversibles d'une algèbre simple quelconque. Jusque là il n'est pas question de ce qui se passe aux places $v_1; v_2 \ldots v_m$. On a marqué ces deux endroits en écrivant en caractère gras (page 162) pour que le lecteur puisse suivre plus tard plus facilement la partie IV, où on montre que le même résultat est vrai sans cette hypothèse.

Proposition 3. *Soit σ une représentation lisse irréductible de G_{v_0}. Écrivons $\epsilon(s;\sigma;\psi_v) = aq_{v0}^{(c(\psi)-m(\sigma))s}$ où a est une constante complexe. Si σ n'est pas une représentation cuspidale de niveau inférieur ou égal à 1, alors on a*

$$niv(\sigma) \leq m(\sigma) + 7n.$$

Démonstration. Si σ est cuspidale (donc de niveau supérieur ou égal à 2 par hypothèse) c'est évident par la proposition 2. Supposons maintenant que σ n'est pas cuspidale. Soient P un sous-groupe parabolique standard de G_{v_0}, L son sous-groupe de Levi standard et π une représentation cuspidale de L, tels que σ soit un sous-quotient de $ind_P^{G_{v_0}}\pi$. Écrivons $L = B_1 \times B_2 ... \times B_l$ et $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2 ... \otimes \pi_l$. Par la proposition 1a) on a

$$\epsilon'(s,\sigma;\psi_v) = \prod_{i=1}^{l} \epsilon'(s,\pi_i;\psi_v).$$

D'après la proposition 1a), la définition de la fonction ϵ' et le lemme 1 il en ressort que

$$\epsilon'(s,\sigma;\psi_v) = \epsilon(s,\sigma;\psi_v)R(q_{v0}^{-s})$$

où R est un quotient de deux polynômes de degré au plus $2n$. En appliquant le même raisonnement sur chaque B_i on arrive à la conclusion que l'égalité $\epsilon'(s,\sigma;\psi_v) = \prod_{i=1}^{l} \epsilon'(s,\pi_i;\psi_v)$ implique

$$\epsilon(s,\sigma;\psi_v) = \prod_{i=1}^{l} \epsilon(s,\pi_i;\psi_v)R'(q_{v0}^{-s})$$

où R' est le quotient de deux polynômes de degré au plus $4n$. Si pour tout π_i on écrit $\epsilon(s,\pi_i;\psi_v) = a(\pi_i)q_{v0}^{(c(\psi)_{B_i}-m(\pi_i))s}$, on obtient alors après simplifications (car $c(\psi)_{G_{v_0}} = \sum_{i=1}^{l} c(\psi)_{B_i}$)

$$aq_{v0}^{-m(\sigma)} = \prod_{i=1}^{l} a(\pi_i)q_{v0}^{-m(\pi_i)}R'(q_{v0}^{-s})$$

où R' est, on le rappelle, le quotient de deux polynômes de degré au plus $4n$. Cela implique

$$m(\sigma) \geq \sum_{i=1}^{l} m(\pi_i) - 4n.$$

Comme les blocs B_i sont de taille $k_i < r$, on peut appliquer la relation 4.2 ; on trouve (tenant compte du fait que $\sum_{i=1}^{l} k_i = r$) :

$$m(\sigma) \geq \sum_{i=1}^{l} niv(\pi_i) - 4n - 2n - l$$

Puisque $l \leq n$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{l} niv(\pi_i) \leq m(\sigma) + 7n$$

Le niveau d'une représentation étant positif, pour chaque i, le niveau de π_i est borné par $m(\sigma) + 7n$. Mais, de la proposition 3.5.2 [Be] et le choix du compact maximal (qui est en bonne position par rapport aux sous-groupes de Levi standard), le niveau de σ est inférieur ou égal au maximum des niveaux des π_i. La proposition 3 est démontrée.

Passons maintenant à la démonstration du résultat principal. Supposons qu'il existe une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\pi}$ de $\tilde{G}$ tel que pour toute place $v \notin V$, $\tilde{\pi}_v$ soit équivalente à π_v. (Cela implique en particulier que, pour presque toute place finie v en dehors de S, la représentation π_v qu'on s'est donnée est non ramifiée.) Fixons cette représentation une fois pour toutes. Maintenant, supposons que $\tilde{\pi}'$ est une autre représentation qui vérifie ces conditions. Alors, en vertu de la propriété 5),

$$\prod_{v \in V} \epsilon'(s; \tilde{\pi}'_v; \psi_v) = \prod_{v \in V} \epsilon'(s; \tilde{\pi}_v; \psi_v)$$

car aux autres places les fonctions ϵ' sont égales, les composantes locales des deux représentations automorphes étant équivalentes. Posons, pour tout $v \in V$,

$$\epsilon(s; \tilde{\pi}_v; \psi_v) = a_v q_v^{(c(\psi_v) - m(\tilde{\pi}_v))s}$$

où a_v est une constante complexe et

$$\epsilon(s; \tilde{\pi}'_v; \psi_v) = a'_v q_v^{(c(\psi_v) - m(\tilde{\pi}'_v))s}$$

où a'_v est une constante complexe. On a déjà vu qu'on avait alors

$$\epsilon'(s; \tilde{\pi}_v; \psi_v) = a_v q_v^{(c(\psi_v) - m(\tilde{\pi}_v))s} R_{\tilde{\pi}_v}(q_v^{-s})$$

où $R_{\tilde{\pi}_v}$ est le quotient de deux polynômes de degré au plus $2n$ et

$$\epsilon'(s; \tilde{\pi}'_v; \psi_v) = a'_v q_v^{(c(\psi_v) - m(\tilde{\pi}'_v))s} R_{\tilde{\pi}'_v}(q_v^{-s})$$

où $R_{\tilde{\pi}'_v}$ est le quotient de deux polynômes de degré au plus $2n$.

On en déduit que

$$\prod_{v \in V} a_v q_v^{(c(\psi_v) - m(\tilde{\pi}_v))s} R_{\tilde{\pi}_v}(q_v^{-s}) = \prod_{v \in V} a'_v q_v^{(c(\psi_v) - m(\tilde{\pi}'_v))s} R_{\tilde{\pi}'_v}(q_v^{-s})$$

donc, après simplification par $\prod_{v\in V} q_v^{c(\psi_v)s}$, que

$$\prod_{v\in V} a_v q_v^{-m(\tilde{\pi}_v)s} R_{\tilde{\pi}_v}(q_v^{-s}) = \prod_{v\in V} a'_v q_v^{-m(\tilde{\pi}'_v)s} R_{\tilde{\pi}'_v}(q_v^{-s})$$

et finalement que

$$\prod_{v\in V} q_v^{-m(\tilde{\pi}'_v)s} = \prod_{v\in V} q_v^{-m(\tilde{\pi}_v)s} T(q_v^{-s})$$

où T est le quotient de deux polynômes de degré au plus $4(m+1)n$. On obtient alors

$$\sum_{v\in V} m(\tilde{\pi}'_v) \leq \sum_{v\in V} m(\tilde{\pi}_v) + 4(m+1)n. \tag{4.3}$$

Posons

$$K_1 = \sum_{v\in V} m(\tilde{\pi}_v) + 4(m+1)n.$$

Aux places $\{v_1; v_2 \ldots v_m\}$ G_v **est une algèbre à division** et on a

$$0 \leq m(\tilde{\pi}'_v).$$

Par conséquent, la relation 4.3 implique que $m(\tilde{\pi}'_{v_0}) \leq K_1$ soit

$$niv(\tilde{\pi}'_{v_0}) \leq \max(K_1 + 7n; 1) \tag{4.4}$$

par la proposition 3.

Soit maintenant X l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de représentations cuspidales de G_{v_0} de caractère central $\tilde{\omega}_{v_0}$ et de niveau inférieur ou égal à 1. L'ensemble X est fini. Posons $K_2 = \min_{\pi\in X} m(\pi)$. En appliquant alors la proposition 3, on trouve que pour toute représentation lisse irréductible π de G_{v_0} de caractère central $\tilde{\omega}_{v_0}$ on a $m(\pi) \geq \min(K_2; -7n)$. En appliquant maintenant l'inégalité 4.3, on trouve que

$$\sum_{v\in V\backslash\{v_0\}} m(\tilde{\pi}'_v) \leq K_1 - \min(K_2; -7n).$$

Comme aux places $\{v_1; v_2 \ldots v_m\}$ G_v **est une algèbre à division** et on a donc pour toute place $v \in V\backslash\{v_0\}$

$$0 \leq niv(\tilde{\pi}'_v) \leq m(\tilde{\pi}'_v),$$

on en déduit que, pour toute place $v \in V\backslash v_0$,

$$niv(\tilde{\pi}'_v) \leq K_1 - \min(K_2; -7n). \tag{4.5}$$

Posons $\tilde{K}_{v_0} = K_{\mathbb{F}_{v_0}}^{\max(K_1+7n;1)}$. Pour toute place $v \in V\backslash\{v_0\}$ posons $\tilde{K}_v = K_{\mathbb{F}_v}^{K_1-\min(K_2;-7n)}$ et pour toute place $v \notin V$ posons $\tilde{K}_v = K_{\mathbb{F}_v}^{niv(\pi_v)}$. Le produit des compacts $\tilde{K}_v$ est un sous-groupe compact $\tilde{K}$ de $\tilde{G}$ (on rappelle que pour presque toute place v on a $niv(\pi_v) = 0$). Des relations 4.4 et 4.5 il résulte que toute représentation automorphe cuspidale irréductible de $\tilde{G}$ dont la composante locale en toute place $v \notin V$ est équivalente à π_v a un vecteur fixe sous $\tilde{K}$. Mais, par le théorème 5.6 de [BJ] il existe seulement un nombre fini de telles représentations (car le caractère central global est fixé) et le résultat est prouvé.

PARTIE II

Reprenons les notations de la démonstration du théorème 3.1.2 (F est ici de caractéristique nulle). Le but de cette partie est de montrer la proposition suivante :

Proposition 4. *Supposons qu'on ait démontré la correspondance* $\mathbf{C}$ *entre* G *et* G' *dans le cas de caractéristique nulle et des représentations essentiellement de carré intégrable (voir 3.1). On a alors pour toute représentation essentiellement de carré intégrable* π *de* G *:*

$$m(\pi) - 4n \leq m(\mathbf{C}(\pi)) \leq m(\pi) + 4n.$$

Démonstration. Il suffit de montrer cette propriété pour les représentations de carré intégrable puisque toute représentation essentiellement de carré intégrable s'écrit comme produit d'un caractère non ramifié et d'une représentation de carré intégrable. Plaçons-nous dans une situation globale identique à celle définie dans la démonstration du théorème 3.1.2. Reprenons-en toutes les notations. Comme on a fait la remarque à la fin de cette démonstration (remarque 1), si π est une représentation de carré intégrable de G, il existe une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\pi}$ de $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ et une représentation automorphe cuspidale $\tilde{\pi}'$ de $\mathbb{D}(\mathbb{A}_\mathbb{F})$ telles qu'aux places où $\mathbb{D}$ est scindée les composantes locales de $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ sont équivalentes, aux places ramifiées différentes de v_0 les composantes locales de $\tilde{\pi}$ sont des représentations de Steinberg et les composantes locales de $\tilde{\pi}'$ sont des représentations triviales, et la composante locale de $\tilde{\pi}$ à la place v_0 est π et la composante locale de $\tilde{\pi}'$ à la place v_0 est $\mathbf{C}(\pi)$. On peut appliquer la propriété 5) des facteurs ϵ' pour les représentations automorphes cuspidales aux représentations $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$. On trouve alors

$$\prod_{v \in V} \epsilon'(s; \tilde{\pi}'_v; \psi_v) = \prod_{v \in V} \epsilon'(s; \tilde{\pi}_v; \psi_v),$$

puisque aux places où $\mathbb{D}$ est scindée les composantes locales de $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ sont équivalentes. Le facteur ϵ' de la représentation de Steinberg de G est calculé dans [GJ] (th.7.11), et il se trouve être égal au facteur ϵ' de la représentation triviale d'une algèbre à division calculé dans [GJ] (prop.4.7). On peut simplifier ce produit aux places dans $S\backslash v_0$ également. On trouve alors

$$\epsilon'(s; \tilde{\pi}'_{v_0}; \psi_{v_0}) = \epsilon'(s; \tilde{\pi}_{v_0}; \psi_{v_0}) \tag{4.6}$$

où $\tilde{\pi}'_{v_0}$ est π et $\tilde{\pi}'_{v_0}$ est $\mathbf{C}(\pi)$. Peut-être une recherche moins grossière nous amènerait à montrer que les facteurs ϵ eux mêmes sont égaux, mais pour ce qui nous intéresse la proposition 1a) et le lemme 1 nous suffisent. Ils impliquent, on l'a déjà vu, que le facteur ϵ' d'une représentation est le produit du facteur ϵ par une fraction rationnelle de q^{-s}, qui est à son tour un rapport de deux polynômes de degré au plus $2n$. On obtient

$$\epsilon(s; \mathbf{C}(\pi); \psi_{v_0}) = \epsilon(s; \pi; \psi_{v_0}) R(q_{v_0}^{-s})$$

où R est une fraction rationnelle qui est quotient de deux polynômes de degré au plus $4n$. Finalement on trouve bien :

$$m(\pi) - 4n \leq m(\mathbf{C}(\pi)) \leq m(\pi) + 4n.$$

PARTIE III

Dans cete partie on reprend les notations du chapitre 3 et on montre le résultat suivant :

Proposition 5. *Si π est une représentation lisse irréductible de G'_F, si L est un corps m-proche de F où m est un entier tel que $\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\pi)$ soit bien défini, alors on a*

$$m(\pi) - 4n \leq m(\bar{\zeta}^m_{D_F D_L}(\pi)) \leq m(\pi) + 4n.$$

Démonstration. Soit l le niveau de π et soit m tel que, si L est un corps m-proche de F, il y ait un isomorphisme d'algèbres entre $H(G'_F; K^l_F)$ et $H(G'_L; K^l_L)$. On a vu alors qu'il y a isomorphisme entre l'ensemble de classes d'équivalence des représentations lisses irréductibles de G'_F de niveau l et l'ensemble de classes d'équivalence des représentations lisses irréductibles de G'_L de niveau l. Montrons que ce m convient pour notre proposition. Soit ψ un caractère additif de F, trivial sur O_F et non trivial sur $\pi_F^{-1}O_F$. Soit f un coefficient non nul de π tel que $f(1) \neq 0$. Le point (1) du théorème 3.3 de [GJ] implique – en prenant le cas particulier $\Phi = \mathbf{1}_{K_F^l}$ où $K_F^l = 1 + M_r(P_{D_F}^{dl})$ – le résultat suivant : il existe s_0 dans $\mathbb{R}$ tel que, si s est un nombre complexe de partie réelle supérieure ou égale à s_0, alors

$$Z(s; f) = \int_{K_F^l} f(g)|N(g)|^s dg$$

converge et

$$Z(s; \check{f}) = q^{-nl} \int_{\pi_F^{-l} M_r(O_{D_F}) \cap GL_r(D_F)} \psi(tr_{M_r(D_F)/F}(g)) f(g^{-1})|N(g)|^s dg$$

converge, où N est la norme réduite. Par ailleurs (remarquons que $Z(s; f)$ est non nulle, de même signe que $f(1)$) les points (2) et (4) du même théorème impliquent que, pour les s pour lesquels il y a convergence,

$$\epsilon(s; \pi; \psi) = (-1)^{r(d-1)} Z(1 - s + (n-1)/2; \check{f}) L(s; \check{\pi})^{-1} L(s; \pi) Z(s + (n-1)/2; f)^{-1}$$

où $\check{\pi}$ désigne la représentation contragradiente de π. En appliquant encore une fois la proposition 1a) et le lemme 1 comme on l'a fait dans la partie précédente, on obtient facilement

$$(*) \qquad \epsilon(s; \pi; \psi) = (-1)^{r(d-1)} Z(1 - s + (n-1)/2; \check{f}) Z(s + (n-1)/2; f)^{-1} R(q^{-s})$$

où R est le rapport de deux polynômes de degré au plus $2n$.

Occupons-nous maintenant du corps L. Le caractère ψ peut être vu comme un caractère additif de F/O_F et induit donc un caractère additif $\bar{\psi}$ de $\pi_F^{-l} O_F / O_F$. À $\bar{\psi}$ correspond – via l'isomorphisme $\pi_F^{-l} O_F / O_F \simeq \pi_L^{-l} O_L / O_L$ – un caractère additif $\bar{\psi}_L$ de $\pi_L^{-l} O_L / O_L$. On considère un caractère additif de L/O_L qui prolonge $\bar{\psi}_L$ et on note enfin ψ_L le caractère additif de L trivial sur O_L qui correspond à ce dernier. On remarque que ψ_L est non trivial sur $\pi_L^{-1} O_L$. Posons $\pi_L = \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\pi)$. On a vu (démonstration de la prop.3.2.14) que f correspond de façon canonique à un coefficient f_L de π_L. Notons N_L la norme réduite sur G'_L. Montrons qu'on a alors :

- pour les s pour lesquels $Z(s; f)$ converge, $Z(s; f) = Z(s; f_L)$ et
- pour les s pour lesquels $Z(s; \check{f})$ converge, $Z(s; \check{f}) = Z(s; \check{f}_L)$.

Cela revient à montrer que

$$\int_{K_L^l} f_L(g)|N_L(g)|^s dg = \int_{K_F^l} f(g)|N(g)|^s dg \tag{4.7}$$

et

$$\int_{\pi_L^{-l} M_r(O_{D_L}) \cap GL_r(D_L)} \psi_L(tr_{M_r(D_L)/L}(g)) f_L(g^{-1})|N_L(g)|^s dg =$$

$$= \int_{\pi_F^{-l} M_r(O_{D_F}) \cap GL_r(D_F)} \psi(tr_{M_r(D_F)/F}(g)) f(g^{-1}) |N(g)|^s dg. \tag{4.8}$$

L'égalité 4.7 est èquivalente à $vol(K_L^l) = vol(K_F^l)$ et est évidente.

Montrons l'égalité 4.8. On a une décomposition

$$\pi_F^{-l} M_r(O_{D_F}) \cap GL_r(D_F) = \coprod_{A \in \mathcal{A}_F^+} \coprod_{(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{T}_{l,A,F}} K_L^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l$$

où $\mathcal{A}_F^+$ est l'ensemble de matrices dans $\mathcal{A}_F$ dans lesquelles toutes les puissances de l'uniformisante π_{D_F} qui apparaissent sont supérieures ou égales à $-ld$ (rappelons que $\pi_{D_F}^d = \pi_F$). On a une décomposition pareille pour $\pi_L^{-l} M_r(O_{D_L}) \cap GL_r(D_L)$ qu'on peut écrire

$$\pi_L^{-l} M_r(O_{D_L}) \cap GL_r(D_L) = \coprod_{A \in \mathcal{A}_F^+} \coprod_{(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{T}_{l,A,F}} K_L^l \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{C}^{-1}) K_L^l$$

tenant compte du fait que $\zeta_{D_F D_L}^m$ réalise une bijection de $\mathcal{A}_F^+$ sur $\mathcal{A}_L^+$ et que pour tout $A \in \mathcal{A}_F^+$, $\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m$ réalise une bijection de $\tilde{T}_{l,A,F}$ sur $\tilde{T}_{l,\zeta_{D_F D_L}^m(A),L}$.

On a vu à la proposition 3.2.14 que par la construction de f_L à partir de f on a: pour tout $A \in \mathcal{A}_F$ pour tout $(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{T}_{l,A,F}$, f est constant sur l'esnemble $K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l$ et f_L est constant sur $K_L^l \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{C}^{-1}) K_F^l$ et les valeurs de f et f_L sont égales. C'est pareil pour les fonctions $|N|$ et $|N_L|$ qui y sont constantes égales à $|N(A)|$. On a aussi

$$vol(K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l) = vol(K_L^l \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{C}^{-1}) K_F^l).$$

Par ailleurs, si on note U la matrice $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(F)$ définie par $u_{ij} = \delta_{i,n-j}$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}_F$ et pour tout $(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{T}_{l,A,F}$, la fonction $f(g^{-1})$ est constante sur l'esnemble

$$K_F^l \tilde{C} A^{-1} \tilde{B}^{-1} K_F^l$$

égale à $f(\tilde{B} A \tilde{C}^{-1})$, et on a

$$K_F^l \tilde{C} A^{-1} \tilde{B}^{-1} K_F^l = K_F^l (\tilde{C} U)(U A^{-1} U)(U \tilde{C}^{-1}) K_F^l$$

où $UA^{-1}U \in \mathcal{A}_F$ et $(\tilde{C}U; U\tilde{B}^{-1}) \in \tilde{T}_{l,UA^{-1}U,F}$. Le même phénomène se produit aussi sur G'_L et toutes les applications des objets sur F vers les objets correspondants sur L commutent à l'action par multiplication de U, qui est une simple permutation de lignes ou colonnes.

Montrons encore que, si $A \in \mathcal{A}_F^+$, si $(\tilde{B};\tilde{C}) \in \tilde{T}_{l,A,F}$, alors

- $\psi \circ tr_{M_r(D_F)/F}$ est constante sur $K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l$,
- $\psi_L \circ tr_{M_r(D_L)/L}$ est constante sur $K_L^l \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{C}^{-1}) K_L^l$, et
- on a

$$\psi \circ tr_{M_r(D_F)/F}(\tilde{B} A \tilde{C}^{-1}) = \psi_L \circ tr_{M_r(D_L)/L}(\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{C}^{-1})).$$

Posons $A = diag(\pi_{D_F}^{a_1}, \pi_{D_F}^{a_2} ... \pi_{D_F}^{a_r})$ où $a_1 \leq a_2 ... \leq a_r$. On rappelle qu'on a $A \in \mathcal{A}_F^+$ et donc $a_1 \geq -ld$. Par conséquent, la différence de deux éléments de l'ensemble $K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l$ est un élément de $M_r(O_{D_F})$, donc la différence de leur traces réduites est un élément de O_F et ψ est trivial sur O_F. Donc $\psi \circ tr_{M_r(D_F)/F}$ est constante sur $K_F^l \tilde{B} A \tilde{C}^{-1} K_F^l$. De la même façon on montre que $\psi_L \circ tr_{M_r(D_L)/L}$ est constante sur $K_L^l \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{C}^{-1}) K_L^l$.

Maintenant, montrer qu'on a

$$\psi \circ tr_{M_r(D_F)/F}(\tilde{B} A \tilde{C}^{-1}) = \psi_L \circ tr_{M_r(D_F)/F}(\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{B}) \zeta_{D_F D_L}^m(A) \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{C}^{-1})),$$

revient à montrer que

$$\psi(\pi_F^{-l} tr_{M_r(D_F)/F}(\tilde{B}(\pi_F^l A) \tilde{C}^{-1}) =$$

$$= \psi_L(\pi_L^{-l} tr_{M_r(D_L)/L}(\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{B})(\pi_L^l \zeta_{D_F D_L}^m(A)) \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{C}^{-1}))$$

et, vu la construction de ψ_L à partir de ψ, il suffit de montrer que l'image (bien définie) de $tr_{M_r(D_F)/F}(\tilde{B}(\pi_F^l A) \tilde{C}^{-1})$ dans O_F/P_F^l et l'image (bien définie) de $tr_{M_r(D_L)/L}(\bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{B})(\pi_L^l \zeta_{D_F D_L}^m(A)) \bar{\zeta}_{D_F D_L}^m(\tilde{C}^{-1}))$ dans O_L/P_L^l se correspondent par l'application $\bar{\lambda}_{FL}^l$ (induite par $\bar{\lambda}_{FL}^m$).

Maintenant, si on choisit des représentatnts B et C^{-1} de $\tilde{B}$ et de $\tilde{C}^{-1}$, puisque $\bar{\lambda}_{D_F D_L}^l$ (induit par $\bar{\lambda}_{FL}^l$) est un isomorphisme d'anneaux de $O_{D_F}/P_{D_F}^{dl}$ sur $O_{D_L}/P_{D_L}^{dl}$, on a $\zeta_{D_F D_L}^m(B \pi_F^l A C^{-1}) - \zeta_{D_F D_L}^m(B) \zeta_{D_F D_L}^m(\pi_F^l A) \zeta_{D_F D_L}^m(C^{-1}) \in M_r(P_{D_L}^{ld})$ et par conséquent l'image dans O_L/P_L^l de $tr_{M_r(D_L)/L}(\zeta_{D_F D_L}^m(B \pi_F^l A C^{-1}))$ est égale à l'image dans O_L/P_L^l de $tr_{M_r(D_L)/L}(\zeta_{D_F D_L}^m(B) \zeta_{D_F D_L}^m(\pi_F^l A) \zeta_{D_F D_L}^m(C^{-1}))$. Il nous suffit donc de montrer que l'image dans O_F/P_F^l de $tr_{M_r(D_F)/F}(B(\pi_F^l A) C^{-1})$ et l'image dans O_L/P_L^l de $tr_{M_r(D_L)/L}(\zeta_{D_F D_L}^m(B \pi_F^l A C^{-1}))$ se correspondent par l'application $\bar{\lambda}_{FL}^l$. Mais la trace réduite d'un élément de $M_r(D_F)$ est la somme des traces réduites des éléments diagonaux de cette matrice et pareil pour D_L, donc, pour avoir (enfin) le résultat voulu il nous suffit le lemme suivant :

Lemme 4.5.2 *Soit $x \in O_{D_F}$. Alors l'image de $tr_{D_F/F}(x)$ dans O_F/P_F^l et l'image de $tr_{D_L/L}(\lambda_{D_F D_L}^m(x))$ dans O_L/P_L^l se corresondent par l'isomorphisme $\bar{\lambda}_{FL}^l$.*

Démonstration. Reprenons les notations de la section 2 chpitre 3, sous-sections 1 et 2. Écrivons

$$x = \sum_{i=0}^{d-1} \pi_{D_F}^i e_i$$

où tous les e_i sont dans E, et même dans O_E puisque $x \in O_{D_F}$. Alors, par définition (chap.3, sect.2, ssect.3),

$$\lambda_{D_F D_L}^m(x) = \sum_{i=0}^{d-1} \pi_{D_F}^i \lambda_{EK}^m(e_i).$$

L'algèbre D_F agit sur E-espace vectoriel D_F de dimension d par multiplication à gauche et la trace réduite de x sur F est la trace de l'endomorphisme qui correspond à x ; on peut la calculer facilement en choisissant dans le E-espace D_F la base $\pi_{D_F}^0, \pi_{D_F}^1, \ldots \pi_{D_F}^{d-1}$. On trouve

$$tr_{D_F/F}(x) = \sum_{i=0}^{d-1} \sigma_F^i(e_0).$$

Pareillement, on a

$$tr_{D_L/L}(\lambda_{D_F D_L}^m(x)) = \sum_{i=0}^{d-1} \sigma_L^i(\lambda_{EK}^m(e_0)) = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_{EK}^m(\sigma_F^i(e_0)).$$

Pour tout $1 \leq i \leq d-1$, l'image de $\sigma_F^i(e_0)$ dans O_E/P_E^l et l'image de $\lambda_{EK}^m(\sigma_F^i(e_0))$ dans O_K/P_K^l se correspondent par l'isomorphisme $\bar{\lambda}_{EK}^m$, et donc l'image de $tr_{D_F/F}(x)$ dans O_E/P_E^l et l'image de $tr_{D_L/L}(\lambda_{D_F D_L}^m(x))$ dans O_K/P_K^l se correspondent aussi par l'isomorphisme $\bar{\lambda}_{EK}^m$. Comme $tr_{D_F/F}(x) \in O_F$ et $tr_{D_L/L}(\lambda_{D_F D_L}^m(x)) \in O_L$ et que $\bar{\lambda}_{EK}^m : O_E/P_E^l \simeq O_K/P_K^l$ induit $\bar{\lambda}_{FL}^m : O_F/P_F^l \simeq O_L/P_L^l$, le lemme est démontré.

On peut donc décomposer les intégrales dans l'égalité 4.8 en des sommes qui se correspondent terme à terme et en déduire que

$$\int_{\pi_L^{-l} M_r(O_{D_L}) \cap GL_r(D_L)} \psi(tr_{M_r(D_L)/L}(g)) f_L(g^{-1}) |N_L(g)|^s dg =$$

$$= \int_{\pi_F^{-l} M_r(O_{D_F}) \cap GL_r(D_F)} \psi_L(tr_{M_r(D_F)/F}(g)) f(g^{-1}) |N(g)|^s dg.$$

On conclut maintenant par la relation (*) :

$$\epsilon(s;\pi;\psi) = (-1)^{r(d-1)} Z(1-s+(n-1)/2;\check{f}) Z(s+(n-1)/2;f)^{-1} R(q^{-s})$$

où R est le rapport de deux polynômes de degré au plus $2n$ et son analogue

$$\epsilon(s;\pi_L;\psi_L) = (-1)^{r(d-1)} Z(1-s+(n-1)/2;\check{f}_L) Z(s+(n-1)/2;f_L)^{-1} R_L(q^{-s})$$

où R_L est le rapport de deux polynômes de degré au plus $2n$, et par le fait que deux polynômes de q^{-s} égaux pour une infinité de q^{-s} distincts sont égaux. Par l'égalité des fonctions Z qu'on vient de montrer et le fait que $c(\psi) = c(\psi_L)$, on obtient

$$m(\pi) - 4n \leq m(\pi_L) \leq m(\pi) + 4n.$$

PARTIE IV

Dans cette partie on montre le théorème 4.5.1.a, ou plutôt on explique comment elle ressort de ce qu'on a déjà vu. Dans la partie I on a prouvé le théorème 4.5.1.a dans le cas particulier d'une algèbre à division globale qui à toute place sauf une est ou scindée ou isomorphe à une algèbre à division. Le seuls ingrédients qui manquait dans cette preuve pour qu'elle marche en général ont été

1) une majoration du niveau d'une représentation cuspidale de niveau 1 (!) en fonction de son conducteur (voir hypothèse restrictive de la prop.3, partie I)

2) une minoration uniforme des conducteurs de toutes les représentations dans le cas du groupe des éléments inversibles d'une algèbre centrale simple sur un corps local. Le lecteur peut s'en convaincre en relisant la démonstration de la partie I où **on a marqué en écrivant en caractère gras** les seuls deux endroits où les algèbres à division interviennent (page 162). Si on a ces deux résultats, la démonstration est pareille en remplaçant, aux places ramifiées, les algèbres à division par des algèbres centrales simples quelconques.

Maintenant, une fois qu'on a montré la correspondance *et les proposition* 3.1.3 et 3.3.20 qui viennent avec, on sait que, si F est un corps local et D une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2, si r est un entier strictement positif et $n = rd$, alors les conducteurs des représentations cuspidales de $GL_r(D)$ sont bornés inférieurement par $-4n$. Cela montre en particulier que la proposition 3 de la partie I est valable pour toutes les représentations irréductibles de $GL_r(D)$, les cuspidales de niveau 1 inclues. Du coup, le niveau d'une représentation étant toujours positif ou nul, les conducteurs de toutes les représentations lisses irréductibles de $GL_r(D)$ sont forcément supérieurs ou égaux à $-7n$. On a ainsi résolu les problèmes 1) et 2) plus haut et on peut appliquer la démonstration de la partie I.

ANNEXE 2

Le long de cette annexe F est un corps local non archimédien. Le corps F sera considéré de caractéristique quelconque sauf mention du contraire. On considère un groupe réductif connexe G sur F. On note Z le centre de G. Soit ω un caractère de Z. On reprend les notations $H(G)$, $H(G;\omega)$ et F_ω de la section 1, chap.1. On note $E(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations lisses irréductibles de G et $E(G;\omega)$ le sous-ensemble de $E(G)$ formé des classes d'équivalence de représentations de caractère central ω. On note $E^2(G)$ le sous-ensemble de $E(G)$ formé des classes d'équivalence de représentations essentiellement de carré intégrable et on pose $E^2(G;\omega) = E^2(G) \cap E(G;\omega)$. On note $E^t(G)$ le sous-ensemble de $E(G)$ formé des classes d'équivalence de représentations essentiellement tempérées et on pose $E^t(G;\omega) = E^t(G) \cap E(G;\omega)$. On note $\Psi(G)$ l'ensemble des caractères non ramifiés de G muni de sa structure de variété complexe. Pour tout $\pi \in E(G)$ on note $\Psi(G;\pi)$ l'ensemble $\{\chi \otimes \pi \ : \ \chi \in \Psi(G)\}$ muni de la structure de variété complexe induite par celle de $\Psi(G)$. Si L est un sous-groupe de Levi de G on adopte ces mêmes notations pour L.

Soit $Grot(G)$ le groupe de Grothendieck de G sur $\mathbb{C}$ (vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel). On note $Grot_{ind}(G)$ le sous-espace de $Grot(G)$ engendré par les images des représentations de G qui sont induites à partir des sous-groupes paraboliques propres de G.

On note G^{sr} l'ensemble des éléments semisimples réguliers de G et G_e l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de G. Si L est un sous-groupe de Levi de G on adopte ces mêmes notations pour L.

Si A est une partie de G, alors $Ad_G(A)$ désigne l'ensemble des éléments de G qui sont conjugués dans G à un élément de A et $Z_G(A)$ désigne le sous-groupe de G formé des éléments qui commutent à tous les éléments de A. Si f est une fonction *quelconque* sur G, alors on note $S(f)$ l'ensemble 9non fermé a priori) des éléments sur lesquels f est non nulle.

On fixe une mesure de Haar dg sur G, une mesure de Haar dz sur Z et des mesures de Haar sur les tores maximaux de G, avec la condition que, si deux tels tores sont conjugués dans G, alors les mesures qu'on a fixées se correspondent via cette conjugaison (c'est indépendant du choix). Pour le théorème 2 seulement, on considérera que pour tout tore maximal elliptique T de G, la mesure de Haar dt fixée au début a été choisie de manière à ce que $vol(T/Z; dt/dz) = 1$.

Proposition 1. *(F de caractéristique quelconque) Soit ω un caractère unitaire de Z. Si $f \in H(G;\omega)$ est telle que pour tout $\pi \in E(G;\omega)$ on ait $tr\pi(f) = 0$, alors on a*

$$\Phi(f;g) = 0 \qquad \forall g \in G^{sr}.$$

Démonstration. Il y a une démonstration par la formule simple des traces dans [DKV], la variante 2) au théorème A.2.a.

Proposition 2. *(F de caractéristique quelconque) Si $f \in H(G)$ est telle que pour tout $\pi \in E(G)$ on a $tr\pi(f) = 0$ alors on a*

$$\Phi(f;g) = 0 \qquad \forall g \in G^{sr}.$$

Démonstration. C'est le théorème A.2.a de [DKV]. On donne ici la démonstration.

Pour tout caractère unitaire ω de Z on applique la proposition 1 à la fonction $F_\omega(f) \in H(G;\omega)$. On obtient ainsi que, pour tout caractère unitaire ω de Z,

$$\Phi(F_\omega(f);g) = 0 \qquad \forall g \in G^{sr}.$$

Soit maintenant $g_0 \in G^{sr}$. Par la proposition 1.1, chap.1, la relation précédente implique : pour tout caractère unitaire ω de Z,

$$\int_Z \omega(z)\Phi(f;zg_0)dz = 0.$$

Considérons la fonction

$$h : Z \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \Phi(f;zg_0).$$

Lemme 1. $h \in H(Z)$.

Démonstration. La fonction h est localement constante parce qu'une intégrale orbitale est localement constante sur G^{sr} et que l'intersection de Z avec un sous-ensemble ouvert et compact de G est un sous-ensemble ouvert et compact de Z. Puisque h est localement constante, $S(h)$ est en particulier fermé. Montrons que $S(h)$ est inclus dans un espace compact :

Posons $K = S(f)$. Soit

$$P : G \to F[X]$$

l'application polynôme caractéristique. C'est une application continue et donc $P(K)$ est compact. On a $S(h) \subset Z \cap g_0 Ad_G(K)$. On définit une application :

$$f : Z \cap g_0 Ad_G(K) \to P(K)$$

par $f(g_0\alpha) = P(\alpha)$ pour tout $\alpha \in Ad_G(K) \cap g_0^{-1}Z$. Soit $A = \{g_0 x g_0^{-1} x^{-1} \ : \ x \in G\}$ et posons $B = A \cap Z$. Le groupe G étant réductif, B est un ensemble fini (lemme 19.5, [Hu]). L'ensemble B est un sous groupe de Z qui agit par multiplication sur l'espace $Z \cap g_0 Ad_G(K)$. L'application f est invariante sous l'action de B. En effet, si $z \in Z \cap g_0 Ad_G(K)$ s'écrit $z = g_0\alpha$ avec $\alpha \in Ad_G(K)$, si $z' \in Z \cap g_0 Ad_G(K)$ s'écrit $z' = zy$ avec $y \in B$, alors y s'écrit $y = g_0 x g_0^{-1} x^{-1}$ avec $x \in G$ et on a

$$z' = (g_0\alpha)(g_0 x g_0^{-1} x^{-1}) = (g_0 x g_0^{-1})(g_0\alpha)x^{-1}$$

et finalement $z' = g_0 x \alpha x^{-1}$. Or, $P(x\alpha x^{-1}) = P(\alpha)$.

Notons T l'espace topologique quotient de $Z \cap g_0 Ad_G(K)$ par rapport à l'action de B. L'application f induit donc une application continue (B est fini) :

$$\bar{f} : T \to P(K).$$

Par ailleurs, $\bar{f}$ injective. En effet, si $f(g_0\alpha) = f(g_0\beta)$ et $\alpha, \beta \in g_0^{-1}Z$, alors, α et β sont semisimples réguliers (car g_0 l'est) et, ayant le même polynôme caractéristique, ils sont conjugués : $\alpha = x\beta x^{-1}$, $x \in G$. Mais alors on a :

$$g_0\alpha = g_0 x \beta x^{-1} = (g_0 x g_0^{-1})(g_0\beta)x^{-1} = (g_0 x g_0^{-1} x^{-1}) g_0\beta$$

puisque $g_0\beta \in Z$. Donc z' s'obtient de z par multiplication avec un élément de B. Donc l'application $\bar{f}$ est continue injective.

L'image de $\bar{f}$ est l'image de f donc elle est fermée (car la restriction de l'application polynôme caractéristique à Zg_0 est fermée). L'ensemble $P(K)$ est compact, donc l'image de f est compacte. Donc T est compact. On en déduit que $g_0 Ad_G(K) \cap Z$ est compact car B était fini. Finalement le fermé $S(h)$ est inclus dans le compact $Z \cap g_0 Ad_G(S(f))$ donc il est compact.

Donc $h \in H(Z)$ et vérifie

$$\int_Z \omega(z) h(z) dz = 0$$

pour tout caractère unitaire ω de Z. Par le théorème 4.4. chapitre 2 [Boul], $h(z)$ est identiquement nulle. Donc, en particulier

$$\Phi(f; g_0) = h(1) = 0.$$

Proposition 3. *Supposons que la caractéristique de F est nulle. Soit $f \in H(G)$ telle que $\Phi(f; g) = 0$ pour tout $g \in G^{sr}$. Alors, pour tout $\pi \in E(G)$ on a :*

$$tr\pi(f) = 0.$$

Soient ω un caractère de Z et $f \in H(G; \omega)$ telle que $\Phi(f; g) = 0$ pour tout $g \in G^{sr}$. Alors, pour tout $\pi \in E(G)$ on a :

$$tr\pi(f) = 0.$$

On peut remplacer la condition sur la caractéristique de F par la condition que les caractères des représentations de G soient localement intégrables ou que le support de f soit inclus dans G^{sr}.

Démonstration. Si l'une des trois conditions plus haut est vérifiée, alors on peut appliquer la proposition 1.4.2. Le résultat s'ensuit sans problème.

Proposition 4. *(F de caractéristique quelconque) Soit $f \in H(G)$ telle que pour tout $\pi \in Grot_{ind}(G)$ on ait $tr\pi(f) = 0$. Alors on a*

$$\Phi(f;g) = 0 \qquad \forall g \in G^{sr} \backslash G_e.$$

Soient ω un caratère de Z et $f \in H(G : \omega)$ telle que pour tout $\pi \in Grot_{ind}(G)$ de caractère central ω on ait $tr\pi(f) = 0$. Alors on a

$$\Phi(f;g) = 0 \qquad \forall g \in G^{sr} \backslash G_e.$$

Démonstration. Traitons d'abord le cas de f à support compact. Soit P un sous-groupe parabolique propre de G. Soit $P = LU$ une décomposition de Levi de P. Pour tout $\sigma \in E(L)$ on a :

$$tr\sigma(f^P) = tr(ind_P^G(\sigma))(f) = 0$$

et en appliquant la proposition 2 à f^P on trouve que

$$\Phi(f^P;g) = 0 \qquad \forall g \in L^{sr}.$$

Maintenant, pour tout élément $g \in G^{sr} \backslash G_e$ il existe un sous-groupe de Levi propre L de G tel qu'on ait $g \in L^{sr}$. On conclut par le théorème 1.2.1.

Soit maintenant $f \in H(G;\omega)$. Soit $h \in H(G)$ telle que $I_\omega(h) = f$. Soient P un sous-groupe parabolique propre de G, $P = LU$ une décomposition de Levi de P et g un élément semisimple régulier de L. Soient Z_L le centre de L, ω' un caractère central de Z_L tel que la restriction de ω' à Z soit égale à ω et $\sigma \in E(L)$ de caractère central ω'. On a alors :

$$tr\sigma(I_{\omega'}(h^P)) = tr\sigma(h^P) = tr\, ind_P^G\sigma(h) = tr\, ind_P^G\sigma(f) = 0$$

parce que la représentation $ind_P^G\sigma$ est de caractère central ω. On en déduit que pour tout caractère ω' de Z_L dont la restriction à Z est égale à ω on a $tr\sigma(I_{\omega'}(h^P)) = 0$ pour toute représentation admissible σ de L de caractère central ω'. Donc, par la proposition 1, l'intégrale orbitale de $I_{\omega'}(h^P)$ est nulle sur L pour tout tel ω'. Donc, pour tout tel ω' on a :

$$\int_{Z_L} \omega'(z_L)\Phi(h^P; z_L g)dz_L = 0$$

soit

$$\int_{Z_L/Z}\int_Z \omega'(\bar{z}_L z)\Phi(h^P;\bar{z}_L zg)dzd\bar{z}_L = 0$$

ou encore

$$\int_{Z_L/Z}\omega'(\bar{z}_L)\int_Z \omega(z)\Phi(h^P;\bar{z}_L zg)dzd\bar{z}_L = 0.$$

On en déduit comme à la fin de la démonstration de la proposition 2 que la fonction

$$\int_Z \omega(z)\Phi(h^P;\bar{z}_L zg)dz$$

en la variable $\bar{z}_L$ est identiquement nulle. On applique ce résultat pour $\bar{z}_L = \bar{1}$ et on trouve que

$$\int_Z \omega(z)\Phi(h^P;zg)dz = 0.$$

Mais, par le théorème 1.2.1 on a que

$$\int_Z \omega(z)\Phi(h^P;zg)dz = \int_Z \omega(z)\Phi(h;zg)dz$$

et comme par ailleurs

$$\int_Z \omega(z)\Phi(h;zg)dz = \Phi(f;g)$$

on trouve $\Phi(f;g) = 0$.

Proposition 5. *Supposons que la caractéristique de F est nulle. Soit $f \in (G)$ telle que pour tout $g \in G^{sr}\backslash G_e$, $\Phi(f;g) = 0$. Alors, pour tout $\pi \in Grot_{ind}(G)$ on a :*

$$tr\pi(f) = 0.$$

Soient ω un caractère de Z et $f \in (G;\omega)$ telle que pour tout $g \in G^{sr}\backslash G_e$, $\Phi(f;g) = 0$. Alors, pour tout $\pi \in Grot_{ind}(G)$ de caractère central ω on a :

$$tr\pi(f) = 0.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que, si P est un sous-groupe parabolique propre de G, si $P = LU$ est une décomposition de Levi de P et si $\sigma \in E(L)$ alors on a

$$tr(ind_P^G\sigma)(f) = 0.$$

Dans les deux cas, $f \in H(G)$ ou $f \in H(G;\omega)$, on applique la proposition 1.4.2 à la représentation $ind_P^G\sigma$ et á la fonction f pour obtenir $tr(ind_P^G\sigma)(f)$ sous la forme d'une somme d'intégrales. Sur les éléments réguliers des tores non elliptiques, c'est l'intégrale orbitale de f qui est nulle. Sur les éléments réguliersles des tores elliptiques, c'est le caractère de $ind_P^G\sigma$ qui est nul, par le théorème 1.3.2. On trouve donc $tr(ind_P^G\sigma)(f) = 0$.

Théorème 1. *Soit $\pi \in E^2(G)$. On dit que $f_\pi \in H(G)$ est un pseudocoefficient à support compact de π si $tr\sigma(f_\pi) = 1$ pour toute représentation $\sigma \in \Psi(G;\pi)$ et $tr\tau(f_\pi) = 0$ pour toute représentation $\tau \in E^t(G)\backslash\Psi(G;\pi)$.*

a) Un tel f_π existe.

b) On a $tr\rho(f_\pi) = 0$ pour tout $\rho \in Grot_{ind}(G)$.

c) L'intégrale orbitale sur G^{sr} d'un pseudocoefficient à support compact de π ne dépend que de π. Elle est nulle sur $G^{sr}\backslash G_e$.

Démonstration. a) On montre d'abord trois lemmes. Fixons une paire parabolique minimale de G, $(A_0; P_0)$ et une décomposition de Levi $P_0 = L_0U_0$. Si H est un sous-groupe de G on note $X(H)$ l'ensemble des caractères rationnels de H. Soit A un tore standard de G. On note $W(A;G)$ le groupe de Weyl de A dans G. On pose $\mathfrak{a}(A)^* = X(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{R}$. Le commutant $Z_G(A)$ de A dans G est un sous-groupe de Levi standard de G qu'on notera $L(A)$. On sait que la restriction induit un isomorphisme

$$r_A : X(L(A)) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{R} \simeq X(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{R}$$

Sur $\mathfrak{a}(A_0)^*$ on fixe un produit scalaire $<\,;\,>$ invariant par l'action de $W(A_0;G)$. Notons $\Phi(A_0;G)$ l'ensemble des racines de A_0 dans G. On sait que $\Phi(A_0;G)$ est un système de racines abstrait dans $\mathfrak{a}(A_0)^*$. On sait également que, si Ω est un sous-ensemble de $\Phi(A_0;G)$, alors

$$A_\Omega = \bigcap_{\alpha\in\Phi(A_0;G)\backslash\Omega} ker(\alpha)$$

est un tore standard de G, que tous les tores standard sont obtenus ainsi, que le système de racines de A_Ω dans G est Ω et que la restriction induit une bijection :

$$b_A : \Omega^{ort} \simeq \mathfrak{a}(A_\Omega)^*$$

où Ω^{ort} est le sous-espace de $\mathfrak{a}(A_0)^*$ orthogonal à l'ensemble Ω.

Lemme 2. *Soit $(A;P)$ une paire parabolique standard pour G, et soit θ un caractère réel de $L(A)$. Soit Ω une partie de $\Phi(A_0;G)$ telle qu'on ait $A = A_\Omega$. Supposons qu'on a*

$$< r_A(\theta); \alpha >= 0 \qquad \forall\alpha \in \Phi(A_0;G)\backslash\Omega.$$

Alors il existe un caractère réel Θ de G tel que θ soit la restriction de Θ à $L(A)$.

Démonstration. Soit Z_0 le tore maximal déployé standard du centre Z de

G. Alors $(Z_0; G)$ est une paire parabolique standard (qui correspond au sous-ensemble $\Omega = \Phi(A_0; G)$ de $\Phi(A_0; G)$).

On a $Z_0 \subset A$. Soit θ_{Z_0} le caractère de Z_0 induit par la restriction de $r_A(\theta)$. Alors $r_{Z_0}^{-1}(\theta_{Z_0})$ est un caractère réel de G. Posons $\Theta = r_{Z_0}^{-1}(\theta_{Z_0})$.

Montrons que la restriction de Θ à L n'est autre que θ. Soit Θ_L la restriction de Θ à L. Puisque r_A est un isomorphisme, il nous suffit de montrer que les restrictions de θ et Θ_L à A coïncident. Il suffit donc de montrer que $b_A^{-1}(r_A(\theta)) = b_{Z_0}^{-1}(\theta_{Z_0})$. Mais $b_{Z_0}^{-1}(\theta_{Z_0})$ est l'unique caractère de A_0 orthogonal à tous les éléments de $\Phi(A_0; G)$ dont la restriction à Z_0 est θ_{Z_0}. Or $b_A^{-1}(r_A(\theta))$ est un caractère de A_0

- dont la restriction à Z_0 est aussi θ_{Z_0}, puisque sa restriction à A est $r_A(\theta)$

- qui est orthogonal à tous les éléments de Ω parce que se trouvant dans le domaine de définition de b_A, et

- qui est orthogonal aussi à tous les éléments de $\Phi(A_0; G)\backslash\Omega$ parce que θ l'est par hypothèse.

D'où il en ressort que, effectivement,$b_A^{-1}(r_A(\theta)) = b_{Z_0}^{-1}(\theta_{Z_0})$.

Rappelons que, par définition, une représentation τ est essentiellement tempérée si elle s'obtient d'une représentation tempérée par torsion avec un caractère. On sait par ailleurs qu'une représentation essentiellement tempérée est tempérée si et seulement si son caractère central est unitaire. Comme tout caractère s'écrit comme produit d'un caractère unitaire et un caractère réel, une représentation essentiellement tempérée s'écrit toujours comme produit tensoriel d'une représentation tempérée par un caractère réel.

Lemme 3. Soit $(A; P)$ une paire parabolique standard de G et $P = LU$ une décomposition de Levi standard de P. Soit $\tau \in E^t(L)$. Écrivons $\tau = \theta \otimes \tau_0$ où θ est un caractère réel de L et $\tau_0 \in E_u^t(L)$. Alors l'image de $ind_P^G\tau$ dans $Grot(G)$ est :

- une somme de représentations essentiellement tempérées de G s'il existe un caractère Θ de G tel que $res_L^G\Theta = \theta$ et

- une somme de représentations de Langlands strictement induites sinon.

Démonstration. S'il existe un caractère Θ de G dont la restriction à L est θ, alors on a

$$ind_P^G\tau = \Theta \otimes ind_P^G\tau_0$$

et τ_0 étant une représentation tempérée, $ind_P^G\tau_0$ est une somme de représentations tempérées de G, donc $ind_P^G\tau$ est une somme de représentations essentiellement tempérées de G.

Avec les notations plus haut, notons Ω le sous-ensemble des racines simples de $\Phi(A_0; G)$ tel que $A = A_\Omega$. Soit Δ le sous-ensemble de $\Phi(A_0; G)\backslash\Omega$ formé de racines orthogonales à θ. S'il n'existe pas de caractère Θ de G dont la restriction à L est

θ, alors par le lemme 2 plus haut, on a $\Omega \cup \Delta \subsetneq \Phi(A_0; G)$ et donc $L(A_{\Omega\cup\Delta})$ est un sous-groupe de Levi propre de G. En appliquant le lemme 2 au groupe $L(A_{\Omega\cup\Delta})$ et à son sous-groupe de Levi standard $L = L(A_\Omega)$ (qui était notre sous-groupe de Levi standard initial), on trouve qu'il existe un caractère Θ de $L(A_{\Omega\cup\Delta})$ dont la restriction à L est θ. Cela prouve que

$$ind_L^{L(A_{\Omega\cup\Delta})}\tau = \Theta \otimes ind_L^{L(A_{\Omega\cup\Delta})}\tau_0$$

et donc $ind_L^{L(A_{\Omega\cup\Delta})}\tau$ est une somme de représentations essentiellement tempérées de $L(A_{\Omega\cup\Delta})$. On remarque que chaque représentation essentiellement tempérée t qui apparaît dans cette somme s'écrit $t = \Theta \otimes t_0$ où t_0 est une représentation tempérée. D'autre part, il n'existe aucun élément ϕ de $\Phi(A_0; G)\backslash(\Omega \cup \Delta)$ tel que $< \Theta; \phi >= 0$ parce que Δ a été choisi comme le sous-ensemble de $\Phi(A_0; G)\backslash\Omega$ orthogonal à θ. Mais alors, on peut choisir un sous-groupe parabolique (non standard éventuellement) de G de sous-groupe de Levi $L(A_{\Omega\cup\Delta})$ par rapport auquel Θ est un caractère strictement positif (il suffit de changer le signe des racines ϕ dans $\Phi(A_0; G)\backslash(\Omega \cup \Delta)$ pour lesquelles $< \Theta; \phi >< 0$). Par rapport à ce sous-groupe de Levi, toutes les représentations t plus haut sont standard, et on conclut en tenant compte du fait que, dans $Grot(G)$, l'induction à partir d'un sous-groupe de Levi est indépendante du choix du parabolique.

Démontrons maintenant le théorème 1 a). Soit $h : Grot(G) \to \mathbb{C}$ l'application linéaire définie par :

- $h(\sigma) = 1$ si $\sigma \in \Psi(G; \pi)$ et
- $h(\sigma) = 0$ si σ est une représentation de la base de Langlands de $Grot(G)$ qui ne se trouve pas dans $\Psi(G; \pi)$.

Montrons que la fonction h est une bonne fonction :

Soit $\rho \in E(G)$. Alors ρ s'écrit dans $Grot(G)$

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i$$

où les π_i sont dans la base de Langlands de G. Donc h est constante sur $\Psi(G; \rho)$, égale à α, où α est la somme des a_i tels que $\pi_i \in \Psi(G; \pi)$.

Montrons que, par ailleurs, h s'annule sur $Grot_{ind}(G)$. Soit P un sous-groupe parabolique standard propre de G, L son sous-groupe de Levi standard et $\rho \in E(L)$. Alors on a $h(ind_P^G \rho) = 0$. En effet, écrivons dans $Grot(L)$

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i$$

où les π_i sont dans la base de Langlands de L. Pour chaque π_i il existe un sous-groupe parabolique standard P_i de P et une représentation essentiellement tempérée τ_i du sous-groupe de Levi standard L_i de P_i telle que $\pi_i = ind_{P_i}^L \tau_i$. Donc

$ind_P^G\pi_i = ind_{P_i}^G\tau_i$. Mais, P_i est un sous-groupe parabolique propre de G, donc par le lemme 3, $ind_{P_i}^G\tau_i$ est ou une somme de représentations essentiellement tempérées de G – mais on sait alors qu'aucune n'est essentiellement de carré intégrable – ou une somme de représentations de Langlands strictement induites. Dans les deux cas, $ind_{P_i}^G\tau_i$ est une somme d'éléments de la base de Langlands de G dont aucun ne se trouve dans $\Psi(G;\pi)$ et on a donc $h(ind_{P_i}^G\tau_i) = 0$. Finalement on a obtenu que $h(ind_P^G\rho) = 0$, soit h s'annule sur les induites.

On applique le théorème de Paley-Wiener à h: h est une bonne fonction, donc c'est une fonction trace. Il existe $f_\pi \in H(G)$ tel que pour tout $\sigma \in E(G)$ on ait $tr\sigma(f_\pi) = h(\sigma)$. Alors f_π est un pseudocoefficient à support compact de π.

b) La fonction f_π construite au point a) vérifie cette propriété. Il suffit de montrer que, si f'_π est un autre pseudocoefficient à support compact de π, alors $f_\pi - f'_\pi$ annule la trace de tout élément de $E(G)$.

Puisque f_π et f'_π sont des pseudocoefficients à support compact de π, $f_\pi - f'_\pi$ annule la trace de toute représentation essentiellement tempérée de G. Montrons que, si $o \in H(G)$ vérifie $tr\tau(o) = 0$ pour tout $\tau \in E^t(G)$, alors $tr\sigma(o) = 0$ pour tout $\sigma \in E(G)$. Il suffit de montrer que $tr\sigma(o) = 0$ pour tout élément σ de la base de Langlands de G.

Soit $\sigma = ind_P^G\tau$ où P est un sous-groupe parabolique standard de G, L est son sous-groupe de Levi standard et $\tau \in E^t(L)$ qui s'écrit $\tau = \theta \otimes \tau_0$ où θ est un caractère unitaire de L et $\tau_0 \in E_u^t(L)$. Alors pour tout $\chi \in \Psi(L)$ *unitaire*, $ind_P^G(\chi \otimes \tau_0)$ est une somme de représentations tempérées de G et on a de ce fait $tr(ind_P^G(\chi\otimes\tau_0))(o) = 0$. Mais l'ensemble formé de caractères dans $\Psi(L)$ unitaires est Zariski dense dans $\Psi(L)$, et comme la fonction $\chi \mapsto tr(ind_P^G(\chi \otimes \tau_0))(o)$ est algébrique sur $\Psi(L)$, on en déduit que $tr(ind_P^G(\chi\otimes\tau_0))(o)$ est identiquement nulle sur $\Psi(L)$. En particulier, $tr(ind_P^G(\theta \otimes \tau_0))(o) = 0$, soit $tr\sigma(o) = 0$.

c) Soient f_π et f'_π deux pseudocoefficients de π. On veut montrer que l'intégrale orbitale de $f_\pi - f'_\pi$ est nulle sur G^{sr}. Par la proposition 2, il suffit de montrer que $f_\pi - f'_\pi$ annule la trace de tout élément de $E(G)$. On l'a montré au point b). En passant par la proposition 4, le point b) implique aussi que l'intégrale orbitale de f_π est nulle sur $G^{sr}\backslash G_e$.

Théorème 2. *Soit $\pi \in E^2(G)$. Soit ω le caractère central de π. On dit que $f_\pi \in H(G;\omega)$ est un pseudocoefficient à support compact modulo centre de π si $tr\pi(f_\pi) = 1$ et $tr\tau(f_\pi) = 0$ pour toute représentation $\tau \in E^t(G;\omega)\backslash\{\pi\}$.*

a) Un tel f_π existe.

b) Pour tout sous-groupe parabolique P de G, si L est le sous-groupe de Levi de P, si $\rho \in E(L)$ est telle que la restriction du caractère central de ρ à Z est ω, on a $tr(ind_P^G\rho)(f_\pi) = 0$.

c) L'intégrale orbitale sur G^{sr} d'un pseudocoefficient à support compact modulo *centre de π ne dépend que de π. Elle est nulle sur $G^{sr}\backslash G_e$.*

d) Si sur tout tore maximal elliptique de G la mesure dt qu'on a fixée vérifie $vol(T/Z; dt/dz) = 1$, si f_π est un pseudocoefficient à support compact modulo centre de π, si le corps F est de caractéristique nulle, alors on a

$$\Phi(f_\pi; g) = \overline{\chi_\pi(g)} \qquad \forall g \in G_e.$$

Démonstration. a) Soit A l'ensemble fini des caractères non ramifiés χ de G tels que le caractère central de $\chi \otimes \pi$ soit ω (c'est l'ensemble de caractères non ramifiés χ de G dont la restriction à Z est triviale). Soit P une fonction algébrique définie sur $\Psi(G;\pi)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $P(\pi) = 1$ et $P(\chi \otimes \pi) = 0$ si $\chi \in A\backslash\{1\}$. Soit $h : Grot(G) \to \mathbb{C}$ l'application linéaire définie par :

- $h(\sigma) = P(\sigma)$ si $\sigma \in \Psi(G;\pi)$ et
- $h(\sigma) = 0$ si σ est une représentation de la base de Langlands de $Grot(G)$ qui ne se trouve pas dans $\Psi(G;\pi)$.

Exactement de la même façon que dans la démonstration du théorème 1 a) on vérifie que h est une bonne fonction. On applique le théorème de Paley-Wiener : soit $f \in H(G)$ telle que pour tout $\sigma \in E(G)$ on ait $tr\sigma(f) = h(\sigma)$. Posons $f_\pi = F_\omega(f) \in H(G;\omega)$. La fonction f_π ainsi définie vérifie clairement les conditions voulues, puisque pour tout $\sigma \in E(G;\omega)$ on a $tr\sigma(f_\pi) = tr\sigma(f)$.

b) Le pseudocoefficient à support compact modulo centre f_π de π construit au point a) vérifie cette propriété puisque pour tout $\sigma \in E(G;\omega)$ on a $tr\sigma(f_\pi) = tr\sigma(f)$ et que f annule la trace de toute induite. Il suffit donc de montrer que, si f_π et f'_π sont deux pseudocoefficients à support compact modulo centre de π, alors $tr\sigma(f_\pi - f'_\pi) = 0$ pour tout $\sigma \in E(G;\omega)$. Comme dans la démonstration du point b) du théorème 1, on considère $\sigma \in E(G;\omega)$ et on la décompose sur la base de Langlands

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i \pi_i.$$

Pour chaque π_i il existe un sous-groupe parabolique standard P_i de G et une représentation essentiellement tempérée τ_i du sous-groupe de Levi standard L_i de P_i telle que $\pi = ind_{P_i}^G \tau_i$. On remarque que pour tout i, la restriction du caractère central de τ_i à Z est ω. Comme dans la démonstration du point b) du théorème 1, on montre que $tr(ind_{P_i}^G \tau_i)(f_\pi - f'_\pi) = 0$ en utilisant le fait que les caractères dans $\Psi(L_i)$ *unitaires* et dont la restriction à Z est ω forment un ensemble Zariski dense dans la sous-variété de $\Psi(L_i)$ formée de caractères dans $\Psi(L_i)$ dont la restriction à Z est ω.

c) On a montré que deux pseudocoefficients à support compact modulo centre de π ont la même trace sur les éléments de $E(G;\omega)$. Par la proposition 1, ils ont la même intégrale orbitale sur G^{sr}. Pour montrer que l'intégrale orbitale d'un pseudocoefficient à support compact modulo centre de π s'annule sur $G^{sr}\backslash G_e$ il suffit donc de le montrer pour un pseudocoefficient à support compact modulo centre particulier. On le vérifie pour le f_π construit au point a). On avait $f_\pi = F_\omega(f)$, où f était un certain élément de $H(G)$ dont on sait qu'il annule la trace de tout élément de $Grot_{ind}(G)$ (voir démonstration du point a) du théorème 1). Donc, l'intégrale orbitale de f est nulle sur $G^{sr}\backslash G_e$, par la proposition 2. Alors la proposition 1.1 d) chap.1 implique que l'intégrale orbitale de $F_\omega(f) = f_\pi$ s'annule sur $G^{sr}\backslash G_e$.

d) Voir [Cl2].

Remarque sur le point d) du théorème 2. C'est sûrement vrai sans condition sur la caractéristique de F. On a montré dans cette thèse que ça marche si G est une forme intérieure de $GL_n(F)$ où F est un corps de caractéristique non nulle.

Bibliographie

[AC] J.Arthur, L.Clozel, *Simple Algebras, Base Change, and the Advanced Theory of the Trace Formula*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press 120, (1989).

[Au] A.-M. Aubert, Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longeur finie d'un groupe réductif p-adique, *Transactions A.M.S.*, Vol.347, No.6, 1995.

[BDK] J.Bernstein, P.Deligne, D.Kazhdan, Trace Paley-Wiener Theorem for reductive p-adic groups, *J. Analyse Math.* 47 (1986), 180-192.

[Be] J.Bernstein, Le "centre" de Bernstein, rédigé par Deligne, *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris 1984.

[BF] C.J.Bushnell, A.Fröhlich, Non-abelian congruence sums and p-adic simple algebras, *Proc.London Math.Soc.*, Serie(3)50, 1985, 207-264.

[BJ] A.Borel, H.Jacquet, Automorphic Forms and Automorphic Representations, *Proc. of symp. in pure math* vol.XXXIII, Part 1, 189-202.

[Bou1] Bourbaki, *Théories spectrales, Chap.1-2*, Hermann, Paris.

[Bou2] Bourbaki, *Algèbre, Chap.1-3*, Hermann, Paris.

[Br] P.Broussous, Minimal Strata for GL(m;D), prépublication King's College London, 1997.

[BW] A.Borel, N.Wallach, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups and Representations of Reductive Groups*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, (1980).

[BZ] J.Bernstein, A.Zelevinski, Induced representations of reductive p-adic groups I, *Ann. Sci. ENS* 4e série, 10 (1977), 441-472.

[Ca1] W.Casselman, Characters and Jacquet modules, *Math. Ann.* 230, (1977), 101-105.

[Ca2] W.Casselman, Introduction to the theory of admissible representations of reductive p-adic groups, preprint.

[Cl1] L.Clozel, Théorème d'Atiyah-Bott pour les variétés p-adiques et caractères des groupes réductifs, *Mémoires de la S.M.F.* no. 15, Nouvelle série, 1984, 39-64.

[Cl2] L.Clozel, Invariant harmonic analysis on the Schwarz space of a reductive p-adic group, *Proc.Bowdoin Conf.1989, Progress in Math. Vol.101*, Birkhäuser, Boston, 1991, 101-102.

[De] P.Deligne, Les corps locaux de caractéristique p, limites de corps locaux de caractéristique 0, *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris 1984.

[vD] G. van Dijk, Computation of Certain Induced Characters of p-adic Groups, *Math. Ann.* 199, 1972, 229-240.

[DKV] P.Deligne, D.Kazhdan, M.-F.Vignéras, Représentations des algèbres centrales simples p-adiques, *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris 1984.

[Fla1] D.Flath, Decomposition of representations into tensor products, *Proc. of symp. in pure math* vol.XXXIII, Part 1, 179-185.

[Fla2] D.Flath, A comparison of the automorphic representations of $GL(3)$ and its twisted forms, *Pacific J. of Math.* 97 (1981), 373-402.

[Fl1] Y.Flicker, Rigidity of automorphic forms, *J. Analyse Math.* 49 (1987), 135-202.

[Fl2] Y.Flicker, Transfer of Orbital Integrals and division algebras, *J.Ramanujan Math.Soc.* 5 (1990), 107-122.

[FK] Y.Flicker, D.Kazhdan, Metaplectic correspondence, *Publ. Math. IHES* 64 (1987), 53-110.

[GGP-S] I.M.Gel'fand, M.I.Graev,I.I.Pyateski-Shapiro, *Representation Theory and Automorphic Functions*, W.B.Sounders Company, 1969.

[GJ] R.Godement, H.Jacquet, *Zeta functions of simple algebras*, SLN 260 (1972).

[Ha] P.R.Halmos, *Mesure Theory*, University Series in Higher Mathematics, VAN NOSTRAND.

[H-CvD] Harish-Chandra,G. van Dijk, *Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups, L.N.M.*, Springer-Verlag, 1970.

[H-C1] Harish-Chandra, Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups, *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics* 48 (1978), 281-347.

[H-C2] Harish-Chandra, A submersion principle and its applications, *Proc.Indian Acad.Sc.* 90 (1981), 95-102.

[He1] G.Henniart, La conjecture de Langlands locale pour $GL(3)$, *Mém. de la S.M.F. (nouvelle série)* 11/12, 1984.

[He2] G.Henniart, On the Langlands conjecture for $GL(n)$: the cyclic case, *Annals of Math.* 123 (1986), 145-203.

[Ho] R.Howe, Harish-Chandra homomorphism for p-adic groups, *Regional Conferences Series in Math.*, 59(1985), Amer.Math.Soc, Providence, R.I.

[Hu] J.E.Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Grad.Texts in Math. 21, Springer-Verlag.

[Ja] H.Jacquet, Représentations des groupes linéaires p-adiques, *Theory of Group Representations and Fourier Analysis* (Proceedings of a conference at Montecatini, 1970) C.I.M.E.. Editioni Cremonese, Rome 1971.

[JL] H.Jacquet, R.P.Langlands, *Automorphic forms on GL(2)*, Lecture Notes 114, Springer 1970.

[JP-SS] H.Jacquet, I.I.Pyateski-Shapiro, J.Shalika, Conducteur des représentations du groupe linéaire, *Math.Ann.* 256, 1981, 199-214.

[Ka1] D.Kazhdan, Cuspidal geometry of p-adic groups, *J. Analyse Math.* 47 (1986), 1-36.

[Ka2] D.Kazhdan, Representations of groups over close local fields, *J. Analyse Math.* 47 (1986), 175-179.

[La] G.Laumon, *Cohomology with compact support of Drinfeld modular varieties.*

[Le1] B.Lemaire, thèse, Univ. Paris Sud, 1994.

[Le2] B.Lemaire, Intégrabilité locale des caractères-distributions de $GL_N(F)$ où F est un corps local non-archimédien de caractéristique quelconque, *Compos. Math.* 100 (1996), 41-75.

[Le3] B.Lemaire, Intégrales orbitales sur $GL(N)$ et corps locaux proches, *Ann.Inst. Fourier* 46 (1996), 1027-1056.

[P-S] I.I.Pyateski-Shapiro, Multiplicity one theorems, *Proc. of symp. in pure math* vol.XXXIII, Part 1, 209-213.

[Pi] R.S.Pierce, *Associative algebras*, Grad. Texts in Math. 88.

[Ro1] J.Rogawski, An application of the building to orbital integrals, *Comp.Math.* 42, 1981, 417-423.

[Ro2] J.Rogawski, Representations of $GL(n)$ and division algebras over a p-adic field, *Duke Math. J.* 50 (1983), 161-201.

[Sh] J.A.Shalika, The Multiplicity one Theorem for $GL(n)$, *Ann. of Math.* (2) 100, 1974.

[Sa] I.Satake, Theory of Spherical Functions on Reductive Algebraic Grpups over p-adic Fields, *Publ.Math.I.H.E.S.*18, (1963), 1-69.

[Si] A.Silberger *Introduction to Harmonic Analysis on Reductive p-adic Groups*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press 23, (1973).

[Ta] M.Tadic, Induced representations of $GL(n; A)$ for a p-adic division algebra A, *J. Reine angew. Math.* 405 (1990),48-77.

[Ti] J.Tits, Reductive Groups Over Local Fields, *Proc. of symp. in pure math* vol.XXXIII, Part 1, 29-69.

[Vi] M.-F.Vignéras, Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p-adique, *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo*, Sec. IA 29 (1981), 945-962.

[We] A.Weyl, *Basic Number Theory*, Classics in Math., Springer-Verlag 1973.

[Ze] A.Zelevinski, Induced representations of reductive p-adic groups II, *Ann. Sci. ENS* 13 (1980), 165-210.