

THÈSES D'ORSAY

GIULIA FURIOLI

**Applications de l'analyse harmonique réelle à l'étude des équations
de Navier-Stokes et de Schrödinger non linéaire**

Thèses d'Orsay, 1999

http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1999__0547__P0_0

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

ORSAY

N° D'ORDRE: 5983

UNIVERSITÉ DE PARIS SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE présentée

pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS XI ORSAY

par

GIULIA FURIOLI

SUJET: Applications de l'analyse harmonique réelle à
l'étude des équations de Navier–Stokes et de
Schrödinger non linéaire

Soutenue le 13 décembre 1999 devant la Commission d'examen :

M. Jean–Yves CHEMIN

M. Guy DAVID

M. Pierre Gilles LEMARIÉ–RIEUSSET

M. Yves MEYER

M. Fred B. WEISSLER

Rapporteur

Président

Directeur de recherche

Rapporteur

Examineur

Remerciements

Je tiens avant tout à exprimer ma gratitude à Pierre Gilles Lemarié–Rieusset ; sa façon extraordinaire de faire des mathématiques et son enthousiasme communicatif resteront pour moi un modèle de référence. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a toujours accordée, sa disponibilité et son soutien.

Yves Meyer m'a fait un grand honneur en acceptant de faire un rapport sur cette thèse. Je le remercie pour ses remarques, qui ont contribué à une meilleure exposition des résultats, ainsi que pour l'intérêt constant qu'il a porté à ce travail tout au long de ces années.

Jean–Yves Chemin a accepté avec une très grande disponibilité la lourde tâche de rapporteur, malgré le court délai ; je lui en suis très reconnaissante.

Les travaux de Fred B. Weissler, repris et développés par Tosio Kato, sont à l'origine d'une grande partie de cette thèse, ainsi que ceux, plus récents, avec Thierry Cazenave. Je le remercie sincèrement d'avoir souhaité faire partie de ce jury.

Guy David m'a accueillie à Orsay dès mon arrivée en France en DEA ; mon choix de thèse a été aussi le fruit de ses conseils. Je lui sais gré de participer aujourd'hui à ce jury.

Si j'ai décidé de poursuivre mes études en France, c'est d'abord grâce à mon directeur de Tesi di Laurea, Leo De Michele, qui m'a fait découvrir les travaux d'Yves Meyer. Qu'il trouve ici l'expression de mes plus sincères remerciements.

Elide Terraneo a été pour moi un point de repère pendant ces années en France ; je n'arrive pas à compter les discussions, mathématiques et non, dont notre collaboration a été parsemée ! Merci, vraiment.

Les nombreuses conversations que j'ai eues en plusieurs occasions avec Marco Cannone, Djalil Kateb, Ramzi May, Fabrice Planchon, Francis Ribaud, Abdellah Youssfi, Ezzedine Zahrouni et Ali Zhioua ont été toujours pour moi très enrichissantes ; merci aussi pour tous les encouragements qu'ils m'ont transmis.

L'ambiance amicale et détendue du Laboratoire d'Analyse et Probabilité de l'Université d'Évry a bien-sûr contribué à rendre plus agréable le travail quotidien.

Un grand merci en particulier à Loïc Grenié, qui a \LaTeX ifié le fichier \TeX du chapitre 1 en temps record ! Merci aussi pour toute son aide informatique, sans laquelle je n'aurais jamais pu réaliser un manuscrit « présentable ».

Je remercie de tout mon coeur tous mes amis pour le soutien constant et inconditionnel qu'ils m'ont toujours témoigné. Ils m'ont toujours fait sentir leur affection, même en cas d'éloignement.

Un ultimo ringraziamento va alla mia famiglia. Mi è difficile esprimere a parole quanta parte abbiano avuto nella realizzazione di questo lavoro ; preferisco semplicemente dedicarlo a loro.

Abstract: In the first part of this thesis we deal with the problems of existence, uniqueness and regularity of weak solutions of the three dimensional, incompressible Navier–Stokes system in the whole space; in the second part, we study the existence of selfsimilar solutions of a class of nonlinear Schrödinger equations.

The most important results in chapter 1 are an equivalence theorem for the differential and integral formulations of the Navier–Stokes system in quite a large functional context and a uniqueness result for the continuous in time solutions (the so-called mild solutions) valued in the Lebesgue, Sobolev, Besov and Morrey–Campanato critical spaces. We prove in particular the uniqueness of mild solutions in $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$. In chapter 2, we deal with the problem of the existence of mild solutions under T. Kato’s regularity assumption which ensures that such a solution is a classical one at every positive time. We prove a result of persistence of the regularity of the Koch and Tataru solutions in the space of derivatives of the BMO space if the datum verifies some of differentiability properties. The existence time of such solutions only depends on the very weak Koch and Tataru norm of the datum; this norm is strictly linked with oscillation properties of functions. In chapter 3 we still consider the persistence of an extra property of the datum, namely the localisation and oscillation of its Laplacian. The unique solution in the critical Lebesgue space keeps verifying this at least at the beginning of its evolution.

In chapter 4, we study a class of nonlinear Schrödinger equations, with polynomial nonlinearity of order between 1 and 2. Through an independent analysis of the linear and nonlinear terms, we prove the existence of selfsimilar solutions in some invariant functional spaces built over Sobolev’s spaces. We also study the asymptotical behaviour at infinity for solutions belonging to the same functional frame.

Keywords: Navier–Stokes equations, Littlewood–Paley analysis, Besov spaces, Morrey–Campanato spaces, Lorentz spaces, Hardy spaces, singular integrals, Muckenhoupt weights, Schrödinger equations.

MSC classification: 35Q30, 35K55, 42B20, 42B25, 42B30, 46E35, 46E30, 35J10, 35Q55

Table des matières

Introduction	3
1 Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces limites	9
1.1 Introduction	9
1.2 Décomposition de Littlewood–Paley	13
1.3 Solutions faibles des équations de Navier–Stokes	17
1.4 Existence de solutions « mild »	23
1.5 Unicité dans les espaces limites « réguliers »	33
1.5.1 Un cas élémentaire: le théorème de Le Jan et Sznitman	33
1.5.2 Espaces limites réguliers	35
1.6 Unicité dans l'espace L^3	38
1.6.1 Unicité des solutions « mild » globales avec donnée initiale petite en norme L^3	38
1.6.2 Le cas des données initiales petites en norme $\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}$	41
1.6.3 Unicité des solutions « mild » locales	43
1.7 Unicité dans les espaces limites	46
1.8 Remarques finales	51
1.8.1 Sur l'existence des solutions « mild »	51
1.8.2 L'espace de Lorentz $L^{3,\infty}$ et l'unicité L^3	51
1.8.3 Encore une démonstration de l'unicité L^3	52
1.8.4 Le cas des ouverts à bord	54
Compléments au chapitre 1	55
2 Le théorème d'existence de Kato	57
2.1 Introduction	57
2.2 Le cadre fonctionnel général	59
2.2.1 Exemples	62
2.3 Le cas des espaces réguliers	72
2.4 Le cas des espaces singuliers	76

2.4.1	Remarques sur le cas de L^q ($]0, T[, L^p$)	87
2.5	Une approche alternative	88
2.5.1	L'espace BMO	89
2.5.2	Le théorème de H. Koch et D. Tataru	91
2.5.3	Un théorème de régularité	93
2.5.4	Le cas de $B_E^{0,q}$	96
3	Molécules de l'espace de Hardy et Navier–Stokes	103
3.1	Introduction	103
3.1.1	Quelques rappels	103
3.1.2	Une remarque sur le théorème d'existence dans $\Delta\mathcal{H}^1$	105
3.2	Existence dans l'espace des molécules	108
3.2.1	Propriétés générales de X_δ	109
3.2.2	Localisation des éléments de X_δ	111
3.2.3	Poids de Muckenhoupt « locaux »	115
3.2.4	Opérateurs de convolution sur L_δ^2	119
3.2.5	Tendance et fluctuation dans X_δ	121
4	De Navier–Stokes à Schrödinger non linéaire	127
4.1	Présentation du problème	127
4.1.1	Généralités sur le groupe de Schrödinger	128
4.1.2	Le cadre fonctionnel et la méthode utilisée	129
4.2	Le théorème de F. Ribaud et A. Youssfi et son amélioration	130
4.2.1	Démonstration du théorème de F. Ribaud et A. Youssfi	130
4.2.2	L'idée centrale et le problème de compatibilité	133
4.2.3	Démonstration du théorème 4.3	134
4.3	Remarques sur l'espace de résolution	140
4.3.1	Équivalence entre les problèmes intégral et différentiel	140
4.3.2	Comportement asymptotique des solutions	142
A	Preuve du théorème 2.20	149

Introduction

Le thème central de cette thèse est l'application de quelques outils de l'analyse harmonique réelle à l'étude des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires. La plus grande partie de ce travail (les trois premiers chapitres) est consacrée aux équations de Navier–Stokes tridimensionnelles dans l'espace \mathbb{R}^3 tout entier :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p \end{cases} \quad (\text{NS})$$

dont les inconnues sont le vecteur vitesse $\vec{u}(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et la pression $p(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Dans le quatrième chapitre, nous essayons enfin d'étendre les méthodes d'analyse propres à Navier–Stokes à une classe d'équations de Schrödinger non linéaires :

$$i\partial_t u + \Delta u = \gamma |u|^\alpha u \quad (\text{SNL})$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $u(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Les résultats du chapitre 1 ont été obtenus en collaboration avec P. G. Lemarié–Rieusset et E. Terraneo et ceux du chapitre 3 avec E. Terraneo. Nous signalons également que ces deux chapitres sont en commun avec la thèse d'E. Terraneo [Ter99a].

On pourrait ainsi résumer le contenu des trois premiers chapitres :

- premier chapitre : unicité des solutions ;
- deuxième chapitre : existence des solutions ;
- troisième chapitre : régularité et localisation des solutions issues d'une classe particulière de données initiales.

Le point de départ de l'étude est la notion même de solution. Dès qu'on sort du cadre classique, où toutes les dérivations sont à considérer au sens fort, il y a plus d'une façon de définir une solution faible et les mots « faible » et « mild » utilisés dans la littérature en sont une preuve. De plus, il est usuel d'associer à un problème de Cauchy différentiel une formulation intégrale et de transposer le problème initial sur celle-ci. Le système de

Navier–Stokes devient alors (après avoir appliqué formellement l’opérateur \mathbb{P} de projection sur les champs des vecteurs à divergence nulle) :

$$\vec{u}(t) = e^{t\Delta}\vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}(s)ds.$$

Là encore, l’équivalence entre les deux approches n’est pas toujours évidente.

Dans la partie initiale du chapitre 1, nous précisons la notion de solution *faible* que nous avons adoptée tout au long de cette thèse et nous démontrons que dans le cadre fonctionnel où nous avons travaillé les approches différentielle et intégrale sont tout à fait équivalentes. Les résultats exposés au premier chapitre remontent à la période 1996-1998 ; le cadre où nous avons démontré l’équivalence avait été choisi de façon à inclure un bon nombre de solutions connues jusqu’à cette époque et notamment toutes celles qui pouvaient être rapprochées de notre analyse. Un résultat tout récent de H. Koch et D. Tataru [KT99], sortant du cadre choisi, a remis en question la pertinence du choix que nous avons fait. Nous citons en annexe au premier chapitre une extension du résultat d’équivalence obtenue par P. G. Lemarié–Rieusset [Lem] qui permet d’inclure les solutions de Koch et Tataru. Une fois le cadre précisé, nous nous sommes concentrés sur l’étude des solutions *milds*, c’est-à-dire des solutions faibles qui sont de plus continues en temps à valeurs dans un espace de Banach E de distributions ($\vec{u}(t) \in C([0, T], E)$). Il y a deux questions naturelles qui se posent : si on considère une donnée initiale $\vec{u}_0 \in E$, existe-t-il une solution $\vec{u}(t)$ dans $C([0, T], E)$ et, le cas échéant, est-elle unique ? Il y a une différence remarquable dans l’esprit par lequel on aborde ces deux questions, due à la présence de la non-linéarité. Même en ré-écrivant $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ comme $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$, ce qui ne change rien sur les fonctions régulières grâce à la condition de divergence nulle, il n’est pas toujours possible de faire un produit de distributions. Lorsqu’on se demande s’il existe une fonction $\vec{u}(t) \in C([0, T], E)$ qui vérifie les équations de Navier–Stokes, on a le droit de rechercher une solution plus régulière, de façon à pouvoir donner un sens au terme $\vec{u} \otimes \vec{u}$ même si a priori le produit n’est pas défini sur E . Par contre, lorsqu’on se pose la question de l’unicité dans $C([0, T], E)$, on est obligé à se restreindre aux espaces E où le produit est bien défini. La condition discriminante sera $E \hookrightarrow L^2_{\text{loc}}$ et nous appellerons *singuliers* et *réguliers* les espaces correspondant aux deux situations.

Notre analyse adopte le point de vue de T. Kato, depuis ses articles avec H. Fujita [KF62], [FK64] et se situe dans la suite des travaux plus récents de M. Cannone [Can95], F. Planchon [Pla96], Y. Meyer [Mey96]. Elle s’étend à plusieurs familles d’espaces fonctionnels : Lebesgue, Lorentz, Sobolev, Morrey–Campanato et, plus généralement, Triebel–Lizorkin et Besov.

Le comportement de chaque famille d’espaces ci-dessus par rapport aux problèmes d’existence et d’unicité de solutions milds suit fondamentalement un schéma commun, que nous allons décrire, par souci de simplicité, sur les espaces de Lebesgue. La distinction entre

espaces réguliers et singuliers est faite évidemment par l'espace L^2 . Il y a cependant un autre espace discriminant : l'espace L^3 , dont la norme est homogène de degré -1 . L'importance de cette homogénéité vient d'une propriété d'invariance des équations de Navier–Stokes. En effet, on peut facilement vérifier que si $\vec{u}(t, x)$ est une solution de donnée initiale $\vec{u}_0(x)$, alors pour tout $\lambda > 0$ la fonction $\vec{u}_\lambda(t, x) = \lambda \vec{u}(\lambda^2 t, \lambda x)$ l'est aussi et sa donnée initiale n'est rien d'autre que $\lambda \vec{u}_0(\lambda x)$. Dans la gamme des espaces de Lebesgue, le seul espace pour lequel $\|\vec{u}_0\| = \|\lambda \vec{u}_0(\lambda \cdot)\|$ pour tout $\lambda > 0$ est l'espace L^3 ; c'est par exemple seulement dans ce cadre qu'il a un sens d'envisager un théorème d'existence de solutions globales (définies en tout temps) sous une hypothèse de petitesse de la donnée initiale. Lorsque on considère la formulation intégrale des équations de Navier–Stokes, qui se présente sous la forme

$$\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t),$$

il est tout à fait naturel d'avoir recours à un schéma de point fixe et il est essentiel de démontrer de bonnes estimations de continuité de l'opérateur bilinéaire B sur l'espace $C([0, T], E)$. Or, il est très simple de démontrer que $B(\vec{u}, \vec{v})$ est bicontinu sur les espaces $C([0, T], L^p)$ pour $p > 3$, ce qui permet d'en déduire l'existence et l'unicité de solutions milds locales en temps dans ce cadre. Dans le cas de l'espace L^3 , cette bicontinuité de B n'est plus vraie [Oru98] mais, en imposant des conditions supplémentaires à l'espace où on recherche une solution, on arrive quand-même à faire converger l'algorithme de point fixe [Kat84] et à démontrer l'existence d'une solution locale en temps pour une donnée quelconque et globale pour une donnée petite. Le prix à payer pour cette plus grande régularité de la solution trouvée est, jusqu'à ce point, le manque d'unicité dans le cadre plus général $C([0, T], L^3)$. En dessous de l'exposant critique $p = 3$, la formulation intégrale ne donne plus aucune information car l'algorithme de point fixe échoue. Dans le cas particulier des espaces de Lebesgue, on a par ailleurs à disposition le théorème de J. Leray [Ler34] d'existence de solutions faibles dans $L^\infty(]0, +\infty[, L^2) \cap L^2(]0, +\infty[, \dot{H}^1)$, basé sur des estimations d'énergie ; on peut par exemple traiter les cas réguliers $2 \leq p < 3$ en mélangeant les deux méthodes ([Cal93], [Lem98b]).

Le rôle joué par L^3 dans les espaces de Lebesgue est le même que celui des espaces de Lorentz $L^{3,q}$ pour $1 \leq q \leq +\infty$, de Sobolev $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$, $\dot{H}_p^{\frac{3}{p}-1}$ pour $1 \leq p \leq +\infty$, de Morrey–Campanato $\dot{M}_{p,3}$ pour $1 < p \leq 3$, de Besov $\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,q}$ pour $1 \leq p \leq +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$, de Triebel–Lizorkin $\dot{F}_p^{\frac{3}{p}-1,q}$ pour $1 < p < +\infty$ et $1 \leq q \leq +\infty$; il s'agit des espaces *critiques*, dont la norme est homogène de degré -1 . Remarquons au passage qu'il ne s'agit pas toujours d'espaces réguliers : il suffit de considérer les espaces $\dot{M}_{p,3}$ pour $1 < p < 2$ ou bien $\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,q}$ pour $p \geq 3$. C'est à ces espaces qu'est consacré le premier chapitre, et notamment à ceux parmi eux qui sont réguliers ; nous avons montré l'unicité globale des solutions dans $C([0, T], E)$, qu'elles soient locales ou globales en temps. L'idée fondamentale consiste à traiter de façon « indépendante » les termes linéaire $e^{t\Delta} \vec{u}_0$ (la *tendance*) et non-linéaire

$B(\vec{u}, \vec{u})$ (la *fluctuation*). En effet, lorsque on considère deux solutions \vec{u} et \vec{v} issues de la même donnée initiale, leur écart ne prend en compte que l'écart entre les fluctuations respectives :

$$\vec{u} - \vec{v} = B(\vec{u}, \vec{u}) - B(\vec{v}, \vec{v}) = B(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v}).$$

Pour démontrer que $\vec{u} - \vec{v}$ est nul, il n'est donc pas fondamental de rester dans le cadre fonctionnel de \vec{u} et de \vec{v} (par exemple $C([0, T], L^3)$), mais il suffit que cela soit vrai au sens des distributions, ce qui permet d'étudier les fluctuations dans des espaces interdits à la partie linéaire et par conséquent à la solution elle-même. Notre démonstration de l'unicité comprend tous les espaces contenus dans les espaces de Morrey–Campanato $\dot{M}_{p,3}$ où $p > 2$. Nous citons en annexe au premier chapitre un nouveau résultat d'unicité obtenu par R. May [May] dans un espace non homogène qui contient tous les espaces $\dot{M}_{p,3}$ pour $p > 2$ et qui est contenu dans $M_{2,3}$. En revanche, on n'a pas encore de théorème d'unicité dans ce dernier espace, qui est le plus grand espace critique régulier.

La condition supplémentaire que Kato avait imposée à la solution dans $C([0, T], L^3)$ est $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty)$. Grâce à un théorème de J. Serrin [Ser62], cela entraîne que cette solution est classique en dehors de $t = 0$. Dans le deuxième chapitre nous allons montrer que cette même condition permet de démontrer un théorème d'existence de solutions au moins localement en temps (et donc de régularité des solutions lorsqu'on dispose d'un théorème d'unicité) pour pratiquement tous les espaces, critiques ou sur-critiques, homogènes et non homogènes, que nous avons analysés dans le premier chapitre. C'est ici que nous pouvons considérer aussi le cas d'espaces singuliers (toujours critiques et sur-critiques) ; la condition de Kato devient alors essentielle pour la définition même du produit $\vec{u} \otimes \vec{u}$. Nous avons étudié ensuite le résultat de Koch et Tataru, qui donne l'existence d'une solution dans un espace singulier ($F_\infty^{-1,2}$) qui contient en effet tous les espaces analysés. Nous avons alors démontré que si on impose à la donnée initiale une plus grande régularité, la solution de Koch et de Tataru préserve cette même régularité et ce pendant tout son temps de vie. Il s'ensuit que dès qu'on dispose d'un théorème d'unicité dans l'espace plus régulier, le temps minimal de vie de la solution ne dépend que de sa norme dans l'espace plus grand $F_\infty^{-1,2}$, qui est en effet un espace de dérivées. Ceci se situe d'une certaine façon dans la suite des résultats de M. Cannone et F. Planchon [Can95], [Pla96] qui mettaient en évidence la relation entre le caractère oscillant d'une donnée initiale, estimé en termes de norme dans un espace de Besov, et le temps de vie de la solution correspondante.

Venons-en au troisième chapitre, où il est encore question de persistance de régularité d'une solution dont la donnée initiale vérifie des propriétés supplémentaires. Nous nous sommes placés dans le cadre L^3 ; plus précisément nous avons imposé au laplacien de notre donnée initiale \vec{u}_0 d'être une molécule de l'espace de Hardy \mathcal{H}^1 , à savoir bien localisé dans l'espace des variables et d'intégrale nulle. Nous avons mis en évidence l'interprétation de cet espace en termes de poids locaux de Muckenhoupt et, par conséquent, il nous a paru

envisageable de démontrer un bon comportement de l'opérateur de Calderón–Zygmund apparaissant dans le terme intégral sur l'espace en question. Le résultat de bicontinuité que nous avons prouvé vient d'une décomposition du noyau de l'opérateur en une partie proprement supportée au voisinage de la diagonale et en un opérateur de convolution supporté en dehors de l'origine dont on connaît la décroissance à l'infini. Il nous semble intéressant de remarquer le rôle joué ici par les propriétés d'annulation vérifiées par le terme non-linéaire (présence d'un opérateur de dérivation, divergence nulle) qui caractérisent les équations de Navier–Stokes mais dont l'exploitation n'est généralement pas encore tout à fait satisfaisante. Nous avons alors obtenu que la solution reste une molécule et ceci au moins au début de son évolution. Il nous a été aussi signalé qu'il existe une relation entre l'espace des molécules que nous avons ici analysé et l'*algèbre des bosses*, c'est-à-dire l'espace de Besov $\dot{B}_1^{3,1}$ [Mey].

Dans le quatrième et dernier chapitre de cette thèse nous abandonnons le système de Navier–Stokes pour nous pencher vers la classe d'équations de Schrödinger non linéaires (SNL). Il y a une différence fondamentale entre ces deux types d'équations paraboliques : le semigroupe d'opérateurs (groupe, dans le cas de Schrödinger) qui régit les équations libres associées. Dans le cas de Navier–Stokes il s'agit du semigroupe de la chaleur $e^{t\Delta}$, dont le noyau $(4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ est une fonction à décroissance rapide, tandis que pour les équations (SNL) il s'agit du groupe de Schrödinger $e^{it\Delta}$, dont le noyau $(4\pi it)^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{i|x|^2}{4t}}$ est une fonction bornée et oscillante. Néanmoins, certains résultats que nous avons obtenus pour Navier–Stokes ne sont pas uniquement liés au caractère fortement régularisant du semigroupe de la chaleur ; à la base du théorème d'unicité des solutions dans $C([0, T], L^3)$ il y a notamment une séparation de l'analyse des termes linéaire et bilinéaire qui prend en compte leur comportement différent. Cette même idée nous a conduits à l'amélioration d'un résultat de F. Ribaud et A. Youssfi [RY98] d'existence de solutions autosimilaires pour les équations de Schrödinger (SNL), en étendant la gamme des exposants α permis en dessous de 1. Nous avons également vérifié pour ces équations l'équivalence entre les formulations différentielle et intégrale dans le cadre fonctionnel que nous avons choisi. Il pourrait par ailleurs être intéressant de trouver un cadre général où cette équivalence ait lieu. Nous avons enfin terminé par une comparaison entre le comportement asymptotique à l'infini de deux solutions et celui de leur parties linéaires, avec une attention particulière pour le cas où l'une des deux solutions est autosimilaire ; nous avons pour ce cas-là retrouvé un résultat valable pour les équations de Navier–Stokes [Pla96].

Chapitre 1

Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces fonctionnels limites pour Navier–Stokes

(GIULIA FURIOLI, PIERRE GILLES LEMARIÉ–RIEUSSET ET ELIDE TERRA-NEO, à paraître dans *Revista Matemática Iberoamericana*)

1.1 Introduction

Le but principal de cet article est de démontrer l'unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ des solutions « mild » des équations de Navier–Stokes.

Les équations de Navier–Stokes, dans le cas d'un fluide visqueux, incompressible et homogène remplissant tout l'espace, sont données en l'absence de forces extérieures (et en prenant les constantes de densité et de viscosité égales à 1) par le système :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} p \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\vec{u}(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est le vecteur vitesse et $p(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la pression.

Lorsqu'on étudie les solutions faibles de (1.1) (les dérivations sont alors prises au sens des distributions), on remplace le terme $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ par $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$: lorsque \vec{u} est une fonction régulière, on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ de sorte que la condition de divergence nulle $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ assure l'égalité $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$; si \vec{u} est irrégulière il est souvent plus facile de définir $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ que $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$.

Définition 1.1

Soit $T \in]0, +\infty]$. Une solution faible sur $]0, T[$ des équations de Navier–Stokes est un champ de vecteurs $\vec{u}(t, x) \in \left(L^2_{\text{loc}}(]0, T[\times \mathbb{R}^3) \right)^3$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \exists p \in \mathcal{D}'(]0, T[\times \mathbb{R}^3) \text{ t.q. } \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} - \vec{\nabla} p \end{cases} \quad (1.2)$$

Le théorème que nous allons démontrer est alors le suivant.

Théorème 1.2 (Unicité $L^3(\mathbb{R}^3)$)

Soient $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (L^3)^3)$ et $\vec{v}(t) \in C([0, T'[, (L^3)^3)$ telles que :

- i) \vec{u} est solution faible des équations de Navier–Stokes sur $]0, T[$;
- ii) \vec{v} est solution faible des équations de Navier–Stokes sur $]0, T'[,$
- iii) $\vec{u}|_{t=0} = \vec{v}|_{t=0}$.

Alors $\vec{u} = \vec{v}$ sur $[0, \inf(T, T')[$.

Les solutions « mild » dans L^p pour les équations de Navier–Stokes sont les solutions faibles \vec{u} sur $]0, T[$ qui vérifient de plus $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (L^p)^3)$.

T. Kato [Kat84] a démontré l'existence de telles solutions pour $p \geq 3$ et leur unicité pour $p > 3$. L'idée essentielle est d'exprimer la solution des équations de Navier–Stokes comme la solution d'un problème intégral [Bro64], [Kat65]. Pour cela, la première étape consiste à éliminer la pression p en projetant les équations de Navier–Stokes sur les champs de vecteurs à divergence nulle. Cette technique remonte aux travaux de J. Leray [Ler34] sur les solutions faibles $\vec{u}(t) \in L^\infty([0, T[, (L^2)^3)$ et le projecteur \mathbb{P} est donné par la formule $\mathbb{P}\vec{f} = \vec{f} - \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) = (\text{Id} + \vec{R} \otimes \vec{R}) \vec{f}$ où $\vec{R} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \vec{\nabla}$ est le vecteur des transformations de Riesz $\vec{R} = (R_1, R_2, R_3)$, $\widehat{R_j f} = i \frac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{f}$.

\mathbb{P} n'est pas défini pour une distribution générale et il faut montrer que \mathbb{P} a un sens sur les termes de (1.2). Nous verrons que c'est le cas lorsque \vec{u} est, uniformément en temps, uniformément localement de carré intégrable et nulle à l'infini.

Définition 1.3

L'espace E_2 des fonctions uniformément localement de carré intégrable et nulles à l'infini est l'espace des $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ telles que :

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} \int_{\|y-\mathbf{x}\| < 1} |f(y)|^2 dy = 0$$

normé par :

$$\|f\|_{E_2} = \sup_x \left(\int_{\|y-x\| < 1} |f(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.4 (Formulation intégrale des équations de Navier–Stokes)

Soit $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- i) \vec{u} est solution faible des équations de Navier–Stokes ;
- ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ et $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$;
- iii) $\exists \vec{u}_0 \in \mathcal{S}' \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds$.

La proposition 1.4 se démontre à l'aide de la décomposition de Littlewood–Paley.

En effet, si $\vec{f} \in (E_2)^3$, alors $\vec{g} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \otimes \vec{f}$ appartient à un espace Y_∞ sur lequel les transformations de Riesz opèrent.

Une fois la pression éliminée, on cherche à résoudre :

$$\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$$

où

$$B(\vec{u}, \vec{u})(t) = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds$$

par une méthode de point fixe (méthode de Picard) : on part de $\vec{u}_{(0)} = 0$ et on définit $\vec{u}_{(n+1)}$ par $\vec{u}_{(n+1)} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}_{(n)}, \vec{u}_{(n)})$. Lorsque $\vec{u}_0 \in (L^p)^3$, où $p \geq 3$, le procédé converge dans $C([0, T[, (L^p)^3)$ pour T assez petit (dépendant de \vec{u}_0).

En effet, si $p > 3$ on part de l'estimation :

$$\left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \otimes \vec{g} \right\|_{L^p} \leq C_p \left(\frac{1}{t-s} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2p}} \|\vec{f}\|_{L^p} \|\vec{g}\|_{L^p}$$

pour obtenir :

$$\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^p} \leq C'_p t^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2p}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{L^p} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^p} \quad (1.3)$$

d'où la continuité de l'opérateur bilinéaire B sur $C([0, T[, (L^p)^3)$ et son caractère contractant au voisinage de $e^{t\Delta} \vec{u}_0$ si T est assez petit.

Pour $p = 3$, (1.3) n'est plus valable puisque $\int_0^t \frac{dt}{t-s} = +\infty$. Le procédé de point fixe reste cependant convergent ; comme l'avait remarqué Kato [Kat84] à la suite des travaux de Weissler [Wei81], lorsque $\vec{u}_0 \in (L^3)^3$, $e^{t\Delta} \vec{u}_0$ est non seulement L^3 mais L^∞ pour $t > 0$:

$$\sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} \leq C \|\vec{u}_0\|_{L^3}.$$

On vérifie que cette propriété se transmet aux $\vec{u}_{(n)}$:

$$\begin{aligned} \left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \otimes \vec{g} \right\|_{L^3} &\leq C \|\vec{g}\|_{L^3} \sqrt{s} \|\vec{f}\|_{L^\infty} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} \\ \left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \otimes \vec{g} \right\|_{L^\infty} &\leq C \sqrt{s} \|\vec{f}\|_{L^\infty} \inf \left(\frac{\sqrt{s} \|\vec{g}\|_{L^\infty}}{s\sqrt{t-s}}, \frac{\|\vec{g}\|_{L^3}}{(t-s)\sqrt{s}} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^3} + \sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} \leq C \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^3} + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right).$$

Lorsque $\|\vec{u}_0\|_{L^3}$ est assez petite, on voit que B , qui est bilinéaire continu sur l'ensemble $\left\{ \vec{v}(t) \in C([0, +\infty[, (L^3)^3) : \sqrt{t} \vec{v} \in L^\infty((L^\infty)^3), \vec{v} \in L^\infty((L^3)^3), \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{v}(t)\|_{L^\infty} = 0 \right\}$, est contractant sur un voisinage de $e^{t\Delta} \vec{u}_0$. Pour $\|\vec{u}_0\|_{L^3}$ quelconque, une analyse plus fine de B montre qu'il est contractant sur $[0, T]$ pour T assez petit au voisinage de $e^{t\Delta} \vec{u}_0$. Ainsi le procédé converge et garantit l'unicité des solutions « mild » qui vérifient de plus $\sqrt{t} \vec{u} \in L^\infty((L^\infty)^3)$. Notre théorème montre que l'unicité vaut sans restrictions a priori sur le comportement de la solution.

Les résultats de Kato s'étendent à d'autres espaces fonctionnels que L^p . M. Cannone [Can95] a donné un critère assez général sur un espace E pour que, lorsque $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$, on ait

$$\int_0^t \left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})(s) \right\|_E ds \leq C \omega(t) \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E^2$$

(où $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$), ce qui généralise le cas $p > 3$.

Les *espaces limites* généraliseront le cas $p = 3$ et nos résultats s'y appliqueront facilement.

Définition 1.5

Un *espace fonctionnel limite* E pour les équations de Navier–Stokes est un espace de Banach de fonctions sur \mathbb{R}^3 tel que :

$$S \text{ est dense dans } E \text{ (et l'injection est continue);} \quad (1.4)$$

$$E \text{ s'injecte continûment dans } L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^3); \quad (1.5)$$

$$\forall f \in E, \forall x_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \|f(x - x_0)\|_E = \|f\|_E; \quad (1.6)$$

$$\forall f \in E, \forall \lambda > 0 \quad \|\lambda f(\lambda x)\|_E = \|f\|_E. \quad (1.7)$$

Nous montrerons alors précisément le théorème suivant.

Théorème 1.6 (Solutions « mild » dans un espace limite)

Soit E un espace limite.

A) Si on suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall f, g \in E \cap L^\infty$

$$\|\Delta_0(fg)\|_E \leq C(\|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_E)$$

alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout \vec{u}_0 vérifiant $\|\vec{u}_0\|_E < \delta_0$ il existe $\vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, (E)^3)$, $\vec{u} \in L^\infty(E^3)$, $\sqrt{t} \vec{u} \in L^\infty((L^\infty)^3)$ et $\sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ tel que $\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ sur $]0, +\infty[$. De plus, un tel \vec{u} est unique.

B] Si on suppose qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\forall \varepsilon > 0$ il existe $M(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall f, g \in E \cap L^\infty$

$$\|\Delta_0(fg)\|_E \leq (M(\varepsilon) \|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \varepsilon \|g\|_E \|f\|_{L^\infty}^\alpha \|f\|_E^{1-\alpha}) \quad (1.8)$$

alors pour $\vec{u}_0 \in E^3$ il existe $T > 0$ et $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$ avec $\vec{u} \in L^\infty(E^3)$, $\sqrt{t}\vec{u} \in L^\infty((L^\infty)^3)$ et $\sqrt{t}\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ tels que $\vec{u}(t) = e^{t\Delta}\vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ sur $]0, T[$. De plus un tel \vec{u} est unique.

C] Si on suppose de plus qu'il existe $p > 2$ tel que E s'injecte continûment dans $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^3)$ alors si $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$, $\vec{v}(t) \in C([0, T'[, (E)^3)$, $\vec{u}(t) = e^{t\Delta}\vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ et $\vec{v}(t) = e^{t\Delta}\vec{u}_0 + B(\vec{v}, \vec{v})(t)$ pour un même $\vec{u}_0 \in E^3$, alors $\vec{u} = \vec{v}$ sur $[0, \inf(T, T')[$.

La différence d'approche entre A] et B], qui suivent Kato, et C] est essentiellement la suivante : dans A] et B] on cherche à démontrer que $\|B(\vec{u}, \vec{u})\|_E$ est finie, et plus précisément que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j B(\vec{u}, \vec{u})\|_E < +\infty$ (ce qui se note $B(\vec{u}, \vec{u}) \in (\dot{B}_E^{0,1})^3$), tandis que dans C] on se contente d'estimations du type $\sup_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j B(\vec{u}, \vec{u})\|_E < +\infty$ (ou encore $B(\vec{u}, \vec{u}) \in (\dot{B}_E^{0,\infty})^3$). L'espace de Besov $\dot{B}_E^{0,\infty}$ se révélera particulièrement adapté aux calculs dans les espaces limites, car il permet de contourner l'obstruction $\int_0^t \frac{ds}{t-s} = +\infty$ (pour calculer $\|\Delta_j B(\vec{u}, \vec{u})\|_E$ on intègre « grosso modo » pour $(t-s)$ compris entre $\frac{1}{4^j}$ et $\frac{2}{4^j}$; or $\int_\alpha^{2\alpha} \frac{ds}{s} = \ln 2 < +\infty$).

Le plan de l'article est alors le suivant:

- I. Décomposition de Littlewood–Paley, espaces de Besov et paraproducts.
- II. Solutions faibles des équations de Navier–Stokes.
- III. Existence des solutions « mild » .
- IV. Unicité des solutions « mild » : les espaces limites réguliers.
- V. Unicité dans l'espace L^3 .
- VI. Unicité dans les espaces limites. Espaces de Morrey–Campanato.
- VII. Remarques finales.

Remarque. Les résultats principaux de cet article sont le théorèmes 1.2, 1.6 et la proposition 1.4; d'autres résultats se trouvent dans les théorèmes 1.20 et 1.23.

1.2 Décomposition de Littlewood–Paley, espaces de Besov et paraproducts

Nous commencerons par rappeler la définition de la décomposition de Littlewood–Paley d'une distribution tempérée.

Pour $m \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, on définit le multiplicateur de Fourier $m(D)$ par $(m(D)f)^\wedge(\xi) = m(\xi)\hat{f}(\xi)$ (où \hat{f} est la transformée de Fourier de f : $\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{-ix \cdot \xi} dx$). C'est évidemment un opérateur continu sur L^2 . Lorsque $m \in C^\infty$ et que toutes ses dérivées sont à

croissance lente, $m(D)$ opère continûment sur \mathcal{S} et sur \mathcal{S}' . Lorsque m est la transformée de Fourier d'une fonction $k \in L^p(\mathbb{R}^3)$ on notera $\|m(D)\|_p = \|k\|_{L^p}$. Le cas $p = 1$ est particulièrement intéressant : si E est un espace de Banach de distributions (E s'injecte continûment dans \mathcal{S}') dont la norme est invariante par translations ($\|f(x - x_0)\|_E = \|f\|_E$), si \mathcal{S} est dense dans E et si $m = \hat{k}$ avec $k \in L^1$, alors $m(D)$ opère continûment sur E c'est-à-dire $\|m(D)f\|_E \leq \|m(D)\|_1 \|f\|_E$.

Pour introduire la décomposition de Littlewood–Paley ([FJW91], [Tri83], [Pee76]) on fixe $\omega \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ telle que $\text{supp } \omega \subset \{\xi \text{ t.q. } \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\}$ et, pour $\xi \neq 0$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega(\frac{\xi}{2^j}) = 1$; on lui associe $\varphi(\xi) = 1 - \sum_{j \geq 0} \omega(\frac{\xi}{2^j})$ et $\Omega(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{4}) - \varphi(2\xi)$ (de sorte que $\omega\Omega = \omega$).

Définition 1.7

On note Δ_j l'opérateur $\omega(\frac{D}{2^j})$ et S_j l'opérateur $\varphi(\frac{D}{2^j})$. La décomposition de Littlewood–Paley de $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ est alors l'identité :

$$f = S_k f + \sum_{j \geq k} \Delta_j f$$

valable pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, $k \in \mathbb{Z}$ (la convergence de la série ayant lieu dans \mathcal{S}').

La décomposition de Littlewood–Paley homogène est l'identité $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f$; elle n'est pas valable pour toute distribution (par exemple, si f est un polynôme $\Delta_j f = 0$ pour tout j).

Aussi, introduisons-nous la définition suivante.

Définition 1.8

$\mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^3) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \text{ t.q. } f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \text{ dans } \mathcal{S}'\}$.

Le lemme suivant est facile à démontrer.

Lemme 1.9

- a) Si $S_0 f \in C_0$ (fonctions continues nulles à l'infini), alors $f \in \mathcal{S}'_0$. En corollaire, si E est un espace de Banach de distributions tempérées dont la norme est invariante par translation, et si $E \cap \mathcal{S}$ est dense dans E , alors $E \subset \mathcal{S}'_0$.
- b) Si E est un espace de Banach de distributions tempérées dont la norme est invariante par translation et positivement homogène de degré $-\alpha$ pour un $\alpha > 0$ (pour $\lambda > 0$, $\|f(\lambda x)\|_E = \lambda^{-\alpha} \|f\|_E$), alors $E \subset \mathcal{S}'_0$.

PREUVE : a) est immédiat : si $\|\cdot\|_E$ est invariante par translation, on a $\|S_0 f\|_{L^\infty} \leq \|\varphi(D)\|_{E'} \|f\|_E$, donc S_0 est continu de E dans L^∞ ; si $E \cap \mathcal{S}$ est dense dans E , S_0 est donc continu de E dans C_0 (car pour $f \in \mathcal{S}$ on a $S_0 f \in \mathcal{S}$).

Maintenant, pour $j \leq -1$, $S_j f = S_j(S_0 f)$ et donc $\|S_j f\|_{L^\infty} \leq \|S_j\|_1 \|\varphi(D)\|_{E'} \|f\|_E = \|S_0\|_1 \|\varphi(D)\|_{E'} \|f\|_E$. Les S_j sont donc équicontinus de E dans L^∞ pour $j \leq -1$; or, pour $f \in \mathcal{S}$ on a $\|S_j f\|_{L^\infty} \leq \|S_j\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} = 2^{3j} \|S_0\|_\infty \|f\|_{L^1}$ et donc $\lim_{j \rightarrow -\infty} \|S_j f\|_{L^\infty} = 0$. Cela prouve que pour $f \in E$, $\lim_{j \rightarrow -\infty} \|S_j f\|_{L^\infty} = 0$ et donc que $E \subset \mathcal{S}'_0$.

b) est encore plus simple : $\|S_j f\|_{L^\infty} = \|S_0[f(\frac{\cdot}{2^j})]\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{E'} \|f\|_E 2^{\alpha j}$ et $\lim_{j \rightarrow -\infty} 2^{\alpha j} = 0$. \blacklozenge

Rappelons maintenant la définition d'un *espace de Besov*.

Si E est un espace de Banach de distributions tempérées, on désignera par $\dot{B}_E^{s,q}$ l'espace des distributions $f \in \mathcal{S}'$ telles que $(2^{js} \|\Delta_j f\|_E)_{j \in \mathbb{Z}} \in l^q(\mathbb{Z})$. A priori, c'est un espace défini modulo les polynômes (car $[\forall j \in \mathbb{Z}, \Delta_j f = 0] \iff f \in \mathbb{C}[X]$). Cependant on peut, pour certaines valeurs de s , injecter $\dot{B}_E^{s,q}$ dans \mathcal{S}'_0 en choisissant le seul représentant de f modulo les polynômes qui appartienne à \mathcal{S}'_0 .

- si $s < 0$ et si f_j vérifie $\text{supp } \hat{f}_j \subset \{\xi \text{ t.q. } \frac{2^j}{2} \leq |\xi| \leq 2 \cdot 2^j\}$ et $(2^{js} \|f_j\|_E)_{j \in \mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$, alors $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$ converge dans \mathcal{S}' : en effet, on a $\sum_{j \leq 0} \|f_j\|_E < +\infty$ tandis que pour tout $g \in \mathcal{S}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ $\sum_{j \geq 0} 2^{kj} \|\Delta_j g\|_{E'} < +\infty$. (Il suffit d'écrire pour un $M \in \mathbb{N}$, $\|g\|_{E'} \leq \sum_{|\alpha| \leq M} \sum_{|\beta| \leq M} \left\| \xi^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial \xi^\beta} \hat{g} \right\|_{L^\infty}$).
- De même, si $s = 0$, $\text{supp } \hat{f}_j \subset \{\xi \text{ t.q. } \frac{2^j}{2} \leq |\xi| \leq 2 \cdot 2^j\}$ et $(\|f_j\|_E)_{j \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$, alors $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$ converge dans E .

Cela permet d'inclure $\dot{B}_E^{s,q}$ et $\dot{B}_E^{0,1}$ dans \mathcal{S}'_0 pour $s < 0$. Le cas de $s \geq 0$ se traite par le lemme suivant.

Lemme 1.10

Soit E un espace de Banach de distributions tempérées dont la norme est invariante par translations et positivement homogène de degré $-\alpha$ pour un $\alpha > 0$ et soient f_j tels que $\text{supp } \hat{f}_j \subset \{\xi \text{ t.q. } \frac{2^j}{2} \leq |\xi| \leq 2 \cdot 2^j\}$ et $(2^{js} \|f_j\|_E)_{j \in \mathbb{Z}} \in l^q(\mathbb{Z})$. Alors si $1 \leq q \leq +\infty$ et $s < \alpha$ ou si $q = 1$ et $s = \alpha$, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$ converge dans \mathcal{S}' .

PREUVE : La convergence de $\sum_{j \geq 0} f_j$ est immédiate. Pour $j \leq 0$, on a que si $s < \alpha$, $(2^{js} \|f_j\|_E)_{j \in \mathbb{Z}^-} \in l^\infty$ entraîne $(2^{j\alpha} \|f_j\|_E)_{j \in \mathbb{Z}^-} \in l^1$ de sorte qu'on n'a qu'à traiter le cas $s = \alpha$, $q = 1$. Or, $\|f_j\|_{L^\infty} = \|S_{j+1} f_j\|_{L^\infty} \leq C \|f_j\|_E 2^{\alpha j}$ pour $j \leq 0$ (preuve du lemme 1.9) et $|\langle f_j, g \rangle| = |\langle f_j, \Omega(\frac{D}{2^j}) g \rangle| \leq \|f_j\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} \|\Omega(D)\|_1$. Le lemme est donc démontré. \blacklozenge

Remarque. On a toujours $\dot{B}_E^{0,1} \subset E$ (en prenant les représentants de $\dot{B}_E^{0,1}$ dans \mathcal{S}'_0) et lorsque E vérifie les hypothèses du lemme 1.10, $E \subset \dot{B}_E^{0,\infty}$. Lorsque la norme de E est seulement supposée invariante par translation, on a E ou E/\mathbb{C} inclus dans $\dot{B}_E^{0,\infty}$ (espace défini modulo les polynômes).

L'utilité des espaces de Besov sur E provient des *inégalités de Bernstein*.

Lemme 1.11

a) Si la norme de E est invariante par translation et si \mathcal{S} est dense dans E , alors on a

pour tout $j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{N}^3 \quad \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} S_j f \right\|_{\mathbb{E}} &\leq \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \circ \varphi \left(\frac{D}{2} \right) \right\|_1 2^{j|\alpha|} \|S_j f\|_{\mathbb{E}} ; \\ \forall s \in \mathbb{R} \quad \left\| (\sqrt{-\Delta})^s \Delta_j f \right\|_{\mathbb{E}} &\leq \left\| (\sqrt{-\Delta})^s \circ \Omega(D) \right\|_1 2^{js} \|\Delta_j f\|_{\mathbb{E}} . \end{aligned}$$

b) Si la norme de \mathbb{E} est homogène de degré $-\alpha$ et celle de \mathbb{F} homogène de degré $-\beta$ et si S_0 est continu de \mathbb{E} dans \mathbb{F} , alors :

$$\|S_j f\|_{\mathbb{F}} \leq \|S_0\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})} 2^{(j+1)(\alpha-\beta)} \|S_j f\|_{\mathbb{E}} .$$

c) En particulier pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$:

$$\|S_j f\|_{L^q} \leq \|\varphi(D)\|_r 2^{(j+1)(\frac{3}{p} - \frac{3}{q})} \|S_j f\|_{L^p} .$$

PREUVE : Ce lemme est immédiat. ♦

Corollaire 1.12

Si la norme de \mathbb{E} est invariante par translation et homogène de degré $-\alpha$ et si S est dense dans \mathbb{E} , alors pour $s, \sigma < \alpha$, $(\sqrt{-\Delta})^{s-\sigma}$ est un isomorphisme de $\dot{B}_{\mathbb{E}}^{s,q}$ sur $\dot{B}_{\mathbb{E}}^{\sigma,q}$.

Nous utiliserons essentiellement les espaces $\dot{B}_{\mathbb{E}}^{0,1}$ et $\dot{B}_{\mathbb{E}}^{0,\infty}$, ainsi que les espaces $\dot{B}_{L^p}^{s,q} = \dot{B}_p^{s,q}$. Dans la section 1.7, nous utiliserons également des espaces de Besov sur les espaces de Morrey–Campanato (de tels espaces de Besov ont déjà été introduits dans le contexte des équations de Navier–Stokes par Kozono et Yamazaki [KY94]).

Les espaces $\dot{B}_p^{s,q}$ sont décrits par exemple dans [Tri83] et [BL76]. Dire que $f \in \dot{B}_p^{s,q}$ revient à dire que $(2^{js} \Delta_j f)_{j \in \mathbb{Z}} \in l^q(L^p)$. Les espaces de Triebel–Lizorkin $\dot{F}_p^{s,q}$ ($p < +\infty$) sont définis par $(2^{js} \Delta_j f)_{j \in \mathbb{Z}} \in L^p(l^q)$. En particulier $\dot{F}_p^{0,2} = L^p$ pour $1 < p < +\infty$ et $\dot{F}_1^{0,2} = \mathcal{H}^1$ où \mathcal{H}^1 est l'espace de Hardy. Un autre cas que nous aurons à considérer est $\dot{F}_2^{s,2} = \dot{H}^s$ où \dot{H}^s est l'espace de Sobolev homogène.

Les inégalités de Bernstein donnent immédiatement $\dot{B}_p^{s,q} \subset \dot{B}_{p'}^{s',q}$ pour $p \leq p'$ et $s' = s + \frac{3}{p'} - \frac{3}{p}$.

Pour finir, nous rappelons le principe du paraproduit de J. M. Bony [Bon81]. Considérons deux espaces \mathbb{E} et \mathbb{F} de normes invariantes par translation et homogènes de degré $-\alpha$ pour \mathbb{E} et $-\beta$ pour \mathbb{F} , avec $\alpha, \beta > 0$. On a donc $\mathbb{E} \subset \dot{B}_{\infty}^{-\alpha,\infty}$ et $\mathbb{F} \subset \dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}$. En général, le produit de deux éléments de \mathbb{E} et de \mathbb{F} n'est pas défini. En écrivant $S_N f S_N g$ (qui est défini puisque pour $f \in \mathbb{E}$ et $g \in \mathbb{F}$ on a $S_N f \in L^\infty$ et $S_N g \in L^\infty$) sous la forme :

$$\begin{aligned} S_N f S_N g &= \sum_{k < N} \sum_{l < N} \Delta_k f \Delta_l g \\ &= \sum_{k < N} \sum_{l < k-3} \Delta_k f \Delta_l g + \sum_{l < N} \sum_{k < l-3} \Delta_k f \Delta_l g + \sum_{k < N} \sum_{l < N, |l-k| < 2} \Delta_k f \Delta_l g, \end{aligned}$$

on voit que les deux premiers termes convergent dans \mathcal{S}' quand $N \rightarrow +\infty$ vers des éléments de $\dot{B}_{\infty}^{-\alpha-\beta, \infty}$:

$$\begin{aligned}\pi(f, g) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f S_{j-2} g \\ \pi(g, f) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j g S_{j-2} f\end{aligned}$$

(car le support de $(\Delta_j f S_{j-2} g)^\wedge$ est contenu dans $\left\{ \xi \text{ t.q. } \frac{2^j}{4} \leq |\xi| \leq \frac{9}{4} 2^j \right\}$) et que l'obstruction à la définition de fg provient de la non convergence éventuelle du troisième terme :

$$R(f, g) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{|k-j| \leq 2} \Delta_j f \Delta_k g.$$

1.3 Solutions faibles des équations de Navier–Stokes

Dans cette section nous présentons la définition de solution faible pour les équations de Navier–Stokes et nous montrons que sous certaines hypothèses une telle solution est aussi solution d'un problème intégral équivalent ([Kat65], [Bro64]).

Ce sera sous cette dernière forme que nous aborderons par la suite l'étude des solutions « mild », qui ne sont qu'un cas particulier de solutions faibles. Rappelons la définition que nous avons donnée des solutions faibles.

Définition 1.1

Soit $T \in]0, +\infty]$. Une solution faible sur $]0, T[$ des équations de Navier–Stokes est un champ de vecteurs $\vec{u}(t, x) \in (L^2_{\text{loc}}(]0, T[\times \mathbb{R}^3))^3$ qui vérifie dans $\mathcal{D}'(]0, T[\times \mathbb{R}^3)$:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \exists p \in \mathcal{D}'(]0, T[\times \mathbb{R}^3) \text{ t.q. } \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} - \vec{\nabla} p \end{cases} \quad (1.2)$$

On envisage d'éliminer le terme $\vec{\nabla} p$ en appliquant l'opérateur de projection $\mathbb{P} = \text{Id} + \vec{R} \otimes \vec{R}$ aux équations de Navier–Stokes ; celui-ci n'étant pas en général défini dans \mathcal{D}' il faut maintenant préciser le cadre fonctionnel dans lequel toutes les opérations seront licites.

Nous considérons le cas de solutions faibles $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$ où pour $1 \leq p \leq +\infty$ on définit E_p par

$$E_p = \left\{ f \in L^p_{\text{loc}} : \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{\|x-y\| \leq 1} |f(y)|^p dy < +\infty \right. \\ \left. \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \int_{\|x-y\| \leq 1} |f(y)|^p dy = 0 \right\}.$$

En réalité il ne s'agit pas là d'une véritable restriction.

Les solutions faibles de Leray ($\vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, (L^2)^3) \cap L^2(]0, T[, (H^1)^3)$) [Ler34], ou « mild » de Kato ($\vec{u}(t) \in C([0, T[, (L^p)^3), p \geq 3$) [Kat84], sont dans $L^2(]0, T'[, (E_2)^3)$ pour tout $T' < T$. De même les solutions autosimilaires de Cannone [Can95] vérifient $\vec{u}(t) \in C_*([0, \infty[, (\dot{B}_q^{s, \infty})^3)$ et $t^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2q}} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, \infty[, (L^q)^3)$ avec $s = \frac{3}{q} - 1$, $3 < q < +\infty$, et donc $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T'[, (L^q)^3) \subset L^2(]0, T'[, (E_2)^3)$ pour tout $T' < \infty$. Enfin les solutions « mild » de Meyer [Mey96] ($\vec{u}(t) \in C_*([0, T[, (L^{3, \infty})^3)$) conviennent également puisque $L^{3, \infty} \hookrightarrow L^2 + L^4 \hookrightarrow E_2$.

En ce qui concerne les espaces étudiés dans la suite de cet article, ce seront des espaces de Banach de fonctions X qui vérifient $X \hookrightarrow L_{\text{loc}}^2$, \mathcal{S} est dense dans X , $\|f(x - x_0)\|_X = \|f(x)\|_X \forall x_0 \in \mathbb{R}^3$, ce qui entraîne immédiatement $X \hookrightarrow E_2$.

Nous allons maintenant démontrer la proposition 1.4 annoncée dans l'introduction.

Proposition 1.4 (Formulation intégrale des équations de Navier–Stokes)

Soit $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- i) \vec{u} est une solution faible des équations de Navier–Stokes ;
- ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ et $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$;
- iii) $\exists \vec{u}_0 \in (\mathcal{S}')^3$ telle que $\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds$.

PREUVE : Nous commençons par vérifier que i) entraîne ii).

Si $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$ est une solution faible des équations de Navier–Stokes, elle vérifie l'égalité (1.2) dans un espace de distributions plus précis que $\mathcal{D}'(]0, T[\times \mathbb{R}^3)$.

On définit en effet l'espace τ des fonctions de test en posant $\varphi \in \tau \iff \varphi \in C^\infty(]0, T[\times \mathbb{R}^3)$ et $\exists K$ compact $K = K(\varphi) \subset \mathbb{R}$ tel que $\text{supp } \varphi(t, x) \subset K \times \mathbb{R}^3$ et $\forall \alpha, \beta$ multi-indices, $\forall n \in \mathbb{N}$ on ait $\sup_{t \in]0, T[} \|x^\alpha \partial_t^n \partial_x^\beta \varphi\|_{L^\infty} < \infty$.

On considère alors τ' le dual de τ , c'est à dire $T \in \tau' \iff \forall K$ compact il existe A_K, B_K, C_K et N_K tels que $\forall \varphi$ à support dans $K \times \mathbb{R}^3$ on ait

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq A_K, |\beta| \leq B_K, n \leq N_K} \sup_t \|x^\alpha \partial_t^n \partial_x^\beta \varphi\|_{L^\infty}.$$

Comme $E_2 \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, il est facile de voir que $L^2(]0, T[, (E_2)^3) \subset (\tau')^3$ et donc aussi $\partial_t \vec{u}, \Delta \vec{u} \in (\tau')^3$. De même, étant donné que toutes les composantes de $\vec{u} \otimes \vec{u}$ sont dans $L^1(]0, T[, (E_1)^3)$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ est dans $(\tau')^3$.

En revenant aux équations de Navier–Stokes, cela entraîne que $\vec{\nabla} p \in (\tau')^3$ et que les équations peuvent être considérées dans τ' et non pas seulement dans \mathcal{D}' .

Il n'est pas encore licite d'appliquer le projecteur \mathbb{P} , mais nous allons contourner le problème en passant aux hautes fréquences. La nullité à l'infini des fonctions dans E_2 permet en effet d'écrire si $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$, $\vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} (\text{Id} - S_k) \vec{u}$ et donc aussi $\partial_t \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} (\text{Id} - S_k) \partial_t \vec{u}$.

Il est maintenant possible de faire agir \mathbb{P} sur $(\text{Id} - S_k)\partial_t \vec{u}$; on obtient $\mathbb{P}(\text{Id} - S_k)\partial_t \vec{u} = (\text{Id} - S_k)\partial_t \vec{u}$ grâce à $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Etant donné \vec{u} une solution dans $L^2(E_2)$, on peut donc écrire :

$$\partial_t \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(\text{Id} - S_k)\partial_t \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} [\mathbb{P}(\text{Id} - S_k)\Delta \vec{u} - \mathbb{P}(\text{Id} - S_k)\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} - \mathbb{P}(\text{Id} - S_k)\vec{\nabla} p].$$

où maintenant tous les termes sont bien définis. On envisage alors de démontrer que $\mathbb{P}(\text{Id} - S_k)\vec{\nabla} p \stackrel{\tau'}{=} 0 \forall k \in \mathbb{Z}$ et qu'on peut passer à la limite pour les autres termes. En utilisant la définition :

$$\mathbb{P}(\text{Id} - S_k)\vec{\nabla} p = (\text{Id} - \vec{\nabla} \frac{1}{\Delta} \vec{\nabla} \cdot) [(\text{Id} - S_k)\vec{\nabla} p],$$

si on prouve que $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot ((\text{Id} - S_k)\vec{\nabla} p)] \stackrel{\tau'}{=} \Delta (\text{Id} - S_k)\vec{\nabla} p$$

on aura résolu le problème. Ayant supposé $p \in \mathcal{D}'$ et non pas dans τ' , on ne peut pas commuter les opérateurs $(\text{Id} - S_k)$ et $\vec{\nabla}$ car le premier est défini seulement sur τ' .

En testant sur une fonction $\vec{\varphi} \in \tau^3$ on est ramené à vérifier que $\langle \vec{\nabla} p, (\text{Id} - S_k)(\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}) - \Delta \vec{\varphi}) \rangle = 0$. Cela est impliqué immédiatement par la propriété exprimée par le lemme suivant.

Lemme 1.13

Soit $p \in \mathcal{D}'$ telle que $\vec{\nabla} p \in (\tau')^3$ et soit $\vec{\psi} \in \tau^3$ telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} = 0$. Alors $\langle \vec{\nabla} p, \vec{\psi} \rangle = 0$.

PREUVE : Supposons avoir montré que $\forall \vec{\psi} \in \tau^3$ t.q. $\vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} = 0$ il existe $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \tau^3$ telle que :

$$\vec{\psi} = \vec{\nabla} \wedge \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_2 \\ \partial_3 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_3 \\ \partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

On aura alors conclu car il est toujours possible d'approximer $\vec{\varphi} \in \tau^3$ par $\vec{\phi} \in \mathcal{D}^3$ et donc $\vec{\psi}$ par $\vec{\nabla} \wedge \vec{\phi}$. Or, puisque $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\phi}) = 0$ on a :

$$\langle \vec{\nabla} p, \vec{\nabla} \wedge \vec{\phi} \rangle = \langle p, \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{\phi}) \rangle = 0.$$

La construction de $\vec{\varphi}$ découle essentiellement de la propriété classique suivante : si $f \in \mathcal{S}$, il existe $g \in \mathcal{S}$ tel que $\partial_1 g = f$ si et seulement si $\int f(t, x_2, x_3) dt = 0$.

On commence alors par écrire $\vec{\psi} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ où

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\int \psi_2(t, x_2, x_3) dt \right) \omega(x_1) \\ \left(\int \psi_3(t, x_2, x_3) dt \right) \omega(x_1) \end{pmatrix}$$

où $\int \omega(x)dx = 1$, et $\vec{\beta} = \vec{\psi} - \vec{\alpha}$.

On a $\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} = 0$ et donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{\beta} = 0$ et le problème revient à chercher $\vec{\gamma} = (0, \gamma_2, \gamma_3)$ et $\vec{\delta} = (\delta_1, 0, 0)$ telles que $\vec{\beta} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\gamma}$ et $\vec{\alpha} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\delta}$.

Du moment que $\int \beta_2(t, x_2, x_3)dt = \int \beta_3(t, x_2, x_3)dt = 0$ il existe γ_2 et γ_3 dans \mathcal{S} telles que $\beta_2 = -\partial_1 \gamma_3$ et $\beta_3 = -\partial_1 \gamma_2$.

De $\vec{\nabla} \cdot \vec{\beta} = 0$ on tire alors $\vec{\beta} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\gamma}$.

Pour $\vec{\alpha}$, il est facile de voir que $\int \alpha_3(x_1, t, x_3)dt = 0$ ce qui entraîne que $\alpha_3 = -\partial_2 \delta_1$ et grâce à $\vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} = 0$ on a $\vec{\alpha} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\delta}$. \blacklozenge

Revenant aux équations de Navier–Stokes, nous avons obtenu :

$$\partial_t \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} (\mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \Delta \vec{u} - \mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}).$$

Pour le premier terme du deuxième membre on tire de $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ que $\mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \Delta \vec{u} = (\text{Id} - S_k) \Delta \vec{u}$ et on peut passer à la limite obtenant $\lim_{k \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \Delta \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \Delta \vec{u}$.

Pour ce qui concerne le deuxième terme, on serait tenté de permuter le projecteur avec la limite, mais \mathbb{P} n'étant pas défini sur τ' on ne le peut pas. Une analyse plus fine du terme $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ nous amène à la définition d'un nouvel espace Y_∞ tel que $\lim_{k \rightarrow -\infty} (\text{Id} - S_k) f \stackrel{\tau'}{=} f$ si $f \in Y_\infty$ et que $\mathbb{P} : Y_\infty^3 \rightarrow Y_\infty^3$ soit continu.

Soit alors

$$Y_\infty = \{ f \in \mathcal{S}'_0 : \|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq 2^j C \text{ si } j < 0, \|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq 2^{4j} C \text{ si } j \geq 0 \}$$

normé par $\|f\|_{Y_\infty} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-j} \inf(1, 2^{-3j}) \|\Delta_j f\|_{L^\infty}$.

Il est facile de voir que si $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$ alors $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} \in L^1(]0, T[, (Y_\infty)^3)$.

Par ailleurs si $f \in Y_\infty^3$ alors $\mathbb{P}f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P} \Delta_j f$ et $\|\mathbb{P} \Delta_j f\|_{L^\infty} \leq 2^j C$ si $j \leq 0$ et $\|\mathbb{P} \Delta_j f\|_{L^\infty} \leq 2^{3j} C$ si $j > 0$, donc $\mathbb{P}f \in Y_\infty^3$ et $\mathbb{P} : Y_\infty^3 \rightarrow Y_\infty^3$ est continu. Cela nous permet ainsi de conclure que $\lim_{k \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(\text{Id} - S_k) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \lim_{k \rightarrow -\infty} (\text{Id} - S_k) \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ et donc

$$\partial_t \vec{u} \stackrel{\tau'}{=} \Delta \vec{u} - \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}. \quad (1.9)$$

Passons à ii) entraîne iii). Dans l'équation (1.9) on a vu que $\mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} \in L^1(]0, T[, (Y_\infty)^3)$ mais on montre aussi facilement que $\Delta \vec{u} \in L^1(]0, T', (Y_\infty)^3)$ pour $T' \leq T$ et donc $\partial_t \vec{u}$ aussi. On peut alors écrire :

$$\vec{u}(t) = \int_0^t \partial_s \vec{u}(s) ds + \vec{w} \quad \vec{w} \in (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3))^3.$$

On peut passer à la limite dans \mathcal{S}' au deuxième membre et donc $\vec{u}(t) \rightarrow \vec{w}$ pour $t \rightarrow 0$ dans \mathcal{S}' ce qui donne un sens à la donnée initiale $\vec{u}_0 = \vec{w}$. De plus \vec{u}_0 est encore à divergence nulle.

Considérons alors l'expression

$$\forall t \leq T \quad \vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds.$$

où l'intégrale converge dans Y_∞^3 (de sorte que $\vec{v}(t) - e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in L^\infty(]0, T[, (Y_\infty)^3)$).

Supposons avoir montré l'égalité :

$$\partial_t \vec{v} \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \Delta \vec{v} - \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}. \quad (1.10)$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \partial_t(\vec{u} - \vec{v}) = \Delta(\vec{u} - \vec{v}) \\ \vec{u}(0, x) = \vec{v}(0, x) = \vec{u}_0(x) \end{cases}$$

Alors sur $]0, t[\times \mathbb{R}^3$:

$$\partial_s (e^{(t-s)\Delta}(\vec{u}(s) - \vec{v}(s))) \stackrel{\tau'}{=} 0$$

d'où

$$e^{(t-s)\Delta}(\vec{u}(s) - \vec{v}(s)) = C = 0 \quad \text{dans } \tau' (]0, t[\times \mathbb{R}^3).$$

On n'a pas le droit d'inverser en général l'opérateur $e^{(t-s)\Delta}$, mais on peut le faire sur les basses fréquences et on écrit donc :

$$S_k e^{(t-s)\Delta}(\vec{u}(s) - \vec{v}(s)) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

pour obtenir

$$S_k(\vec{u}(s) - \vec{v}(s)) = 0$$

et enfin

$$\vec{u}(s) = \vec{v}(s).$$

Il ne nous reste qu'à prouver (1.10). On sait que $\partial_t e^{t\Delta} \vec{u}_0 \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \Delta e^{t\Delta} \vec{u}_0$. Il faut montrer que :

$$\partial_t \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds = \Delta \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds + \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(t).$$

Par une chaîne d'égalités par définition ou bien par des propriétés immédiates on obtient $\forall \vec{\varphi} \in (\mathcal{D}(]0, T[\times \mathbb{R}^3))^3$, $\forall \vec{w}(t) \in L^1(]0, T[, (Y_\infty)^3)$:

$$\begin{aligned} & \langle \partial_t \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, x) ds, \vec{\varphi}(t, x) \rangle \\ &= - \langle \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, x) ds, \partial_t \vec{\varphi}(t, x) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^T \left\langle \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, \cdot) ds, \partial_t \vec{\varphi}(t, \cdot) \right\rangle dt \\
&= - \int_0^T \int_0^t \langle e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, \cdot) ds, \partial_t \vec{\varphi}(t, \cdot) \rangle dt \\
&= - \int_0^T \int_0^t \langle \vec{w}(s), e^{(t-s)\Delta} \partial_t \vec{\varphi}(t) \rangle ds dt \\
&= \int_0^T \int_0^t \langle \vec{w}(s), -\partial_t [e^{(t-s)\Delta} \vec{\varphi}(t)] + \Delta e^{(t-s)\Delta} \vec{\varphi}(t) \rangle ds dt \\
&= \int_0^T \int_0^t -\partial_t \langle \vec{w}(s), e^{(t-s)\Delta} \vec{\varphi}(t) \rangle ds dt + \int_0^T \int_0^t \langle \Delta e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s), \vec{\varphi}(t) \rangle ds dt \\
&= \int_0^T \int_s^T -\partial_t \langle \vec{w}(s), e^{(t-s)\Delta} \vec{\varphi}(t) \rangle dt ds + \int_0^T \left\langle \int_0^t \Delta e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, \cdot) ds, \vec{\varphi}(t, \cdot) \right\rangle dt \\
&= \int_0^T \langle \vec{w}(s, \cdot), \vec{\varphi}(s, \cdot) \rangle ds + \left\langle \Delta \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, x) ds, \vec{\varphi}(t, x) \right\rangle \\
&= \langle \vec{w}(t, x), \vec{\varphi}(t, x) \rangle + \left\langle \Delta \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \vec{w}(s, x) ds, \vec{\varphi}(t, x) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Passons enfin à iii) entraîne i). Si $\vec{u}(t) \in L^2(]0, T[, (E_2)^3)$ est telle que $\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds$ avec $\vec{u}_0 \in (\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3))^3$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, alors on vient de montrer que

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \end{cases}$$

Il faut maintenant reconstruire le terme de pression. En écrivant $\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} + (\text{Id} - \mathbb{P}) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ on doit pouvoir identifier $(\text{Id} - \mathbb{P}) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ à $\vec{\nabla} p$.

Pour pouvoir « intégrer », il est nécessaire d'utiliser encore une fois un découpage fréquentiel. En appelant

$$p_j = \frac{\vec{\nabla}}{\Delta} \cdot \Delta_j (\text{Id} - \mathbb{P}) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$$

il est évident que $\sum_j \vec{\nabla} p_j$ converge vers $(\text{Id} - \mathbb{P}) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$. Si $\sum_j p_j$ convergerait dans $\mathcal{D}'(]0, T[\times \mathbb{R}^3)$ on aurait terminé.

On a $\forall t \in]0, T[$:

$$\|p_j(t)\|_{L^\infty} \leq \|\Delta_j(\vec{u} \otimes \vec{u})(t)\|_{L^\infty} \leq \begin{cases} C & j \leq 0 \\ C2^{3j} & j > 0 \end{cases}$$

donc $\sum_{j>0} p_j$ converge bien dans τ' . Pour $j \leq 0$ on n'a pas cette convergence, mais il suffit

de « renormaliser » en rajoutant des constantes. Étant donné que

$$\begin{aligned} |p_j(x, t) - p_j(0, t)| &\leq \|x\| \left\| \vec{\nabla} p_j(t) \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \|x\| 2^j \left\| \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(t) \right\|_{Y_\infty} \end{aligned}$$

où $\left\| \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(t) \right\|_{Y_\infty} \in L^1(]0, T[)$, $\sum_{j \leq 0} [p_j(x) - p_j(0)]$ converge dans τ' et on peut ainsi définir

$$p = \sum_{j > 0} p_j + \sum_{j \leq 0} [p_j - p_j(0)]$$

de sorte qu'on ait $\vec{\nabla} p = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \vec{\nabla} p_j = (\text{Id} - \mathbb{P}) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ et on conclut. \blacklozenge

Remarque. Notre démonstration prouve qu'une solution $\vec{u} \in L^2([0, T[, (\mathbb{E}_2)^3)$ des équations de Navier–Stokes appartient à $C([0, T[, (\mathbb{B}_\infty^{-4, \infty})^3)$.

1.4 Existence de solutions « mild »

Dans cette section, nous montrerons les points A et B du théorème 1.6 sur l'existence de solutions « mild » dans les espaces limites. Il s'agit d'une généralisation assez directe du théorème de Kato sur l'existence de solutions « mild » dans L^3 .

On considère un espace de Banach E de distributions qui vérifie :

$$\mathcal{S} \text{ est dense dans } E; \tag{1.4}$$

$$E \text{ s'injecte continûment dans } L_{\text{loc}}^2; \tag{1.5}$$

$$\|\cdot\|_E \text{ est invariante par translation.} \tag{1.6}$$

(E s'injecte alors continûment dans l'espace E_2 défini dans l'introduction).

Pour prouver l'existence de solutions « mild » dans E des équations de Navier–Stokes (c'est-à-dire pour $\vec{u}_0 \in E^3$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, de solutions faibles $\vec{u}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$ des équations de Navier–Stokes sur $]0, T[$ vérifiant $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$), le *formalisme de Kato* [Kat84] consiste à rechercher un point fixe de la transformation intégrale

$$\vec{u}(t) \mapsto e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds.$$

On part donc de $\vec{u}_{(0)} = \vec{0}$ et on pose $\vec{u}_{(n+1)} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}_{(n)}, \vec{u}_{(n)})$ où $B(\vec{u}, \vec{v})(t) = - \int_0^t \mathbb{P} e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) ds$. Si $B(\cdot, \cdot)$ est bicontinu sur $C([0, T[, (E)^3)$ et si

$$\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_E \leq \eta(t) \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E \tag{1.11}$$

avec $\lim_{t \rightarrow 0} \eta(t) = 0$, il suffit de choisir T de sorte que $\sup_{0 < s \leq T} \eta(t) < \frac{1}{4\|\vec{u}_0\|_E}$ pour voir que $\vec{u} \mapsto e^{t\Delta}\vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})$ est contractante sur

$$\Delta = \{\vec{u}(t) \in C([0, T[, (E)^3) \text{ t.q. } \sup_{0 \leq t \leq T} \|\vec{u}(t)\|_E \leq 2\|\vec{u}_0\|_E\}$$

et envoie Δ dans lui-même. Cela entraîne l'existence (et l'unicité) de \vec{u} sur $[0, T]$.

Théorème (Kato–Cannone)

- i) [Kato] Pour $p \in]3, +\infty[$, L^p vérifie (1.11) avec $\eta(t) = C_p t^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2p}}$. Il y a donc existence et unicité locales des solutions « mild » dans L^p .
- ii) [Cannone] Plus en général, si E vérifie (1.4), (1.5), (1.6) et $\|\Delta_j(uv)\|_E \leq \eta_j \|u\|_E \|v\|_E$ avec $\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-|j|} \eta_j < +\infty$, alors en prenant $\eta(t) = C \{(\sum_{2^j \sqrt{t} \leq 1} 2^j \eta_j)t + \sum_{2^j \sqrt{t} > 1} 2^{-j} \eta_j\}$, E vérifie (1.11). Il y a donc dans ce cas existence et unicité locales des solutions « mild » dans E .

PREUVE : ([Kat84], [Can95]).

- i) Il suffit de remarquer que $\|\mathbb{P}e^{\Delta}\vec{\nabla}\|_{\frac{p}{p-1}} < +\infty$ (puisque

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}e^{\Delta}\vec{\nabla}\|_{\frac{p}{p-1}} &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\omega\left(\frac{D}{2^j}\right)\|_{\frac{p}{p-1}} \|\mathbb{P}\Omega\left(\frac{D}{2^j}\right)e^{\Delta}\vec{\nabla}\|_1 \\ &\leq \sum_{j \leq 0} \|\omega(D)\|_{\frac{p}{p-1}} 2^{\frac{3j}{p}} \|\mathbb{P}\Omega(D)\vec{\nabla}\|_1 2^j \|e^{\Delta}\|_1 \\ &\quad + \sum_{j > 0} \|\omega(D)\|_{\frac{p}{p-1}} 2^{\frac{3j}{p}} \|\mathbb{P}\Omega(D)\frac{1}{\Delta}\|_1 2^{-2j} \|\Delta e^{\Delta}\vec{\nabla}\|_1 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^p} &\leq \int_0^t \|\mathbb{P}e^{\Delta}\vec{\nabla}\|_{\frac{p}{p-1}} (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2p}} \|\vec{u}(s)\|_{L^p} \|\vec{v}(s)\|_{L^p} ds \\ &\leq C t^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2p}} \|\mathbb{P}e^{\Delta}\vec{\nabla}\|_{\frac{p}{p-1}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{L^p} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^p}. \end{aligned}$$

- ii) Ce point est tout aussi immédiat. En effet, on a

$$\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_E \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \eta_j \int_0^t \|\mathbb{P}e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\Omega\left(\frac{D}{2^j}\right)\|_1 ds \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E.$$

et

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}e^{(t-s)\Delta}\vec{\nabla}\Omega\left(\frac{D}{2^j}\right)\|_1 &\leq \\ &\begin{cases} 2^j \|\mathbb{P}\vec{\nabla}\Omega(D)\|_1 \|e^{\Delta}\|_1 & 2^j \sqrt{t} \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{t-s}} \min \left\{ \|e^{\Delta}\vec{\nabla}\|_1 \|\mathbb{P}\Omega(D)\|_1, \frac{1}{4^j(t-s)} \|\Delta e^{\Delta}\vec{\nabla}\|_1 \|\mathbb{P}\frac{1}{\Delta}\Omega(D)\|_1 \right\} & 1 < 2^j \sqrt{t}. \end{cases} \end{aligned}$$

◆

Dans le cas de L^3 , l'inégalité (1.11) devient fausse (en fait, B n'est même pas continu sur $C([0, T[, (L^3)^3]$ [Oru98]), mais l'algorithme du point fixe converge encore. En effet, $\vec{u}_{(1)} = e^{t\Delta}\vec{u}_0$ vérifie $\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{u}_{(1)}\|_{L^\infty} < +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}_{(1)}\|_{L^\infty} = 0$, et ces propriétés restent vérifiées par $\vec{u}_{(n)}$: si $G = \{\vec{u}(t) \in C([0, T[, (L^3)^3) \text{ t.q. } \sup_{t \in]0, T[} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} < +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0\}$ et si G est normé par $\sup_{t \in]0, T[} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} + \sup_{t \in]0, T[} \|\vec{u}(t)\|_{L^3}$, alors $B(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire et continu sur G :

$$\begin{aligned} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^3} &\leq \int_0^t \|\mathbb{P}e^{\Delta} \vec{\nabla}\|_1 \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|\vec{u}(s)\|_{L^3} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sqrt{s} \frac{ds}{\sqrt{s}} \\ &\leq C \|\vec{u}\|_G \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \\ \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} &\leq \int_0^t \|\mathbb{P}e^{\Delta} \vec{\nabla}\|_{\frac{6}{5}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{(\sqrt{t-s})^{\frac{1}{2}}} s^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}(s)\|_{L^6} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sqrt{s} \frac{ds}{s^{\frac{3}{4}}} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \sup_{0 < s < t} s^{\frac{1}{4}} \|\vec{u}(s)\|_{L^6} \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{C'}{\sqrt{t}} \|\vec{v}\|_G \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

d'où le théorème de Kato [Kat84].

Théorème (Kato)

Si $\vec{u}_0 \in (L^3)^3$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, il existe $T(\vec{u}_0) > 0$ (avec $T = +\infty$ si $\|\vec{u}_0\|_{L^3}$ est assez petite) tel que il existe une et une seule solution faible \vec{u} des équations de Navier–Stokes sur $]0, T[$ qui vérifie $\vec{u} \in C([0, T[, (L^3)^3)$, $\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} < +\infty$, $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$ et $\vec{u}(0, \cdot) = \vec{u}_0$.

Nous allons maintenant généraliser le théorème de Kato au cas des espaces limites. Rappelons qu'un *espace limite* est pour nous un espace de Banach E tel que $\mathcal{S} \hookrightarrow E \hookrightarrow L^2_{\text{loc}}$, \mathcal{S} est dense dans E , $\|\cdot\|_E$ est invariante par translation et homogène de degré -1 par dilatation.

Les exemples que nous considérerons seront principalement :

- ★ L^3 ;
- ★ les espaces de Besov $\dot{B}_p^{s,q}$ ($1 \leq p < 3$, $1 \leq q < +\infty$, $s = \frac{3}{p} - 1$) et de Triebel–Lizorkin $\dot{F}_p^{s,q}$ ($1 < p < 3$, $1 \leq q < +\infty$, $s = \frac{3}{p} - 1$) ;
- ★ l'espace $\dot{F}_1^{2,2} = \{u \in \mathcal{S}'_0 \text{ t.q. } \Delta u \in \mathcal{H}^1\}$ où \mathcal{H}^1 est l'espace de Hardy ;
- ★ pour $2 \leq p \leq 3$ l'adhérence de \mathcal{S} dans l'espace de Morrey–Campanato $\dot{M}_{p,3}$ défini par : $f \in \dot{M}_{p,3} \iff f \in L^p_{\text{loc}}$, $\sup_{R > 0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} R^{1-\frac{3}{p}} \left(\int_{|y-x_0| < R} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$.

Existence d'une solution globale pour une donnée initiale de norme petite (Théorème 1.6 A))

Rappelons qu'il s'agit de démontrer l'existence de $\delta_0(E) > 0$ tel que si E est un espace limite qui vérifie de plus

$$\|\Delta_0(fg)\|_E \leq C (\|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_E) \quad (1.12)$$

alors pour tout $\vec{u}_0 \in E^3$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $\|\vec{u}_0\|_E < \delta_0$, il existe une (unique) solution $\vec{u} \in C([0, +\infty[, (E)^3)$ telle que $\sup_{t>0} \|\vec{u}(t)\|_E < +\infty$, $\sup_{t>0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} < +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$.

Remarquons que (1.12) est immédiat pour $E = L^3$ ou $\dot{M}_{p,3}$ (puisque dans ce cas $\|fg\|_E \leq \|f\|_E \|g\|_{L^\infty}$) et facile pour $E = \dot{F}_p^{s,q}$ ou $\dot{B}_p^{s,q}$, $p < 3$, $s = \frac{3}{p} - 1$: on utilise le paraproduit de Bony $fg = \pi(f, g) + \pi(g, f) + R(f, g)$ et on a

$$\begin{aligned} \|\Delta_0 \pi(f, g)\|_E &\approx \|\Delta_0 \pi(f, g)\|_{L^p} \leq C \|g\|_{L^\infty} (\|\Delta_{-1} f\|_{L^p} + \|\Delta_0 f\|_{L^p} + \|\Delta_1 f\|_{L^p}) \\ &\leq C' \|g\|_{L^\infty} \|f\|_E \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\Delta_0 R(f, g)\|_E &\approx \|\Delta_0 R(f, g)\|_{L^p} \leq \sum_{j \geq -2} \sum_{|l-j| \leq 2} \|\Delta_0(\Delta_j f)(\Delta_l g)\|_{L^p} \\ &\leq C \|g\|_{L^\infty} \sum_{j \geq -2} 2^{j(1-\frac{3}{p})} \|f\|_E = C' \|f\|_E \|g\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

La démonstration de l'existence de \vec{u} est quasi immédiate. On introduit

$$E_\infty = \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, (E)^3) \text{ t.q. } \sup_{t>0} (\|\vec{u}(t)\|_E + \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty}) < +\infty, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0. \end{array} \right\}$$

On vérifie d'abord que $e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in E_\infty$. En effet, $\|e^{\Delta} f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_E$ est immédiat puisque $E \hookrightarrow \mathcal{S}'$ et $\|f(x - x_0)\|_E = \|f\|_E$, d'où $\|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|f\|_E$ par homogénéité. Les inégalités $\|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_E \leq \|e^{\Delta}\|_1 \|\vec{u}_0\|_E$ et $\|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \|\vec{u}_0\|_E$ sont donc immédiates ; $\lim_{t \rightarrow 0} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} = 0$ vient alors de ce que \mathcal{S} est dense dans E . On vérifie ensuite que

$$\left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_E \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} (\|\vec{u}(s)\|_E \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \|\vec{v}(s)\|_E \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty}).$$

Il suffit de prouver que $\|\Delta_j(\vec{u} \otimes \vec{v})\|_E \leq C(\|\vec{u}\|_E \|\vec{v}\|_{L^\infty} + \|\vec{v}\|_E \|\vec{u}\|_{L^\infty})$, puis que

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \Omega \left(\frac{D}{2^j} \right)\|_1 \\ &\leq \sum_{2^j \sqrt{t-s} \leq 1} 2^j \|\mathbb{P} \vec{\nabla} \Omega(D)\|_1 + \sum_{2^j \sqrt{t-s} > 1} \frac{1}{2^j(t-s)} \|\mathbb{P} \frac{1}{-\Delta} \vec{\nabla} \Omega(D)\|_1 \|\Delta e^{\Delta}\|_1 \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}}. \end{aligned}$$

(ce qui donne $\left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{\dot{B}_{\mathbb{E}}^{0,1}} \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} (\|\vec{u}\|_{\mathbb{E}} \|\vec{v}\|_{L^\infty} + \|\vec{v}\|_{\mathbb{E}} \|\vec{u}\|_{L^\infty})$).

On a en particulier :

$$\left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{t-s}} \|\vec{u}\|_{L^\infty} \|\vec{v}\|_{L^\infty}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{L^\infty} &\leq \frac{C}{\sqrt{t-s}} \left\| e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{\mathbb{E}} \|\vec{u}\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{C}{t-s} (\|\vec{u}\|_{\mathbb{E}} \|\vec{v}\|_{L^\infty} + \|\vec{v}\|_{\mathbb{E}} \|\vec{u}\|_{L^\infty}) \end{aligned}$$

d'où

$$\left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{3}{4}}} \sqrt{\|\vec{u}\|_{L^\infty} \|\vec{v}\|_{L^\infty}} \sqrt{\|\vec{u}\|_{\mathbb{E}} \|\vec{v}\|_{L^\infty} + \|\vec{u}\|_{L^\infty} \|\vec{v}\|_{\mathbb{E}}}.$$

Comme $\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}} = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}\sqrt{1-\sigma}} d\sigma < +\infty$ et $\int_0^t \frac{ds}{s^{\frac{1}{4}}(t-s)^{\frac{3}{4}}} = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{\frac{1}{4}}(1-\sigma)^{\frac{3}{4}}} < +\infty$ on voit que $B(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire continu de $\mathbb{E}_\infty \times \mathbb{E}_\infty$ dans \mathbb{E}_∞ .

On considère alors $F(\vec{u})(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ et on va montrer que pour un bon choix de $R > 0$, F est une contraction de la boule $B(0, R) \subset \mathbb{E}_\infty$ dans elle-même. En effet, si μ est la norme de l'opérateur B sur $\mathbb{E}_\infty \times \mathbb{E}_\infty$, on a

$$\|F(\vec{u})\|_{\mathbb{E}_\infty} \leq \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{E}_\infty} + \mu \|\vec{u}\|_{\mathbb{E}_\infty}^2$$

et

$$\begin{aligned} \|F(\vec{u}) - F(\vec{v})\|_{\mathbb{E}_\infty} &= \|B(\vec{u}, \vec{u}) - B(\vec{v}, \vec{v})\|_{\mathbb{E}_\infty} \leq \|B(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u})\|_{\mathbb{E}_\infty} + \|B(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v})\|_{\mathbb{E}_\infty} \\ &\leq \mu \|(\vec{u} - \vec{v})\|_{\mathbb{E}_\infty} (\|\vec{u}\|_{\mathbb{E}_\infty} + \|\vec{v}\|_{\mathbb{E}_\infty}) \end{aligned}$$

et il suffit de choisir R tel que

$$\begin{cases} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{E}_\infty} + \mu R^2 \leq R \\ 2\mu R < 1 \end{cases}$$

La valeur $R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\mu \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{E}_\infty}}}{2\mu}$ remplit les deux conditions et de plus $R < 2 \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{E}_\infty} \leq 2C \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{E}}$. Pour $\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{E}} < \frac{2\mu}{C}$, il existe un unique point fixe $\vec{u} \in B(0, R) \subset \mathbb{E}_\infty$ de l'application F .

Existence locale (Théorème 1.6 B))

Lorsque \vec{u}_0 est trop grand, la condition (1.12) ne suffit plus à assurer la contractivité de l'application F : car $\|B(\vec{u}, \vec{u} - \vec{v})\|_E$ se contrôle par $\sup_{s>0} \|\vec{u}(s)\|_E \sup_{s>0} \sqrt{s} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \sup_{s>0} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{s>0} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_E$ et dans le premier terme $\sup_{s>0} \|\vec{u}(s)\|_E$ ne peut plus être rendu assez petit pour garantir que F soit contractante. On va donc demander à E de vérifier une forme modifiée de (1.12) où le poids de la norme sera atténué :

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in]0, 1[\text{ tel que : } \forall \epsilon > 0 \exists M(\epsilon) > 0 \text{ tels que } \forall f, g \in E \cap L^\infty \\ \|\Delta_0(fg)\|_E \leq M(\epsilon) \|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \epsilon \|g\|_E \|f\|_{L^\infty}^\alpha \|f\|_E^{1-\alpha} \end{aligned} \quad (1.13)$$

A nouveau, (1.13) est vérifiée par les espaces que nous considérons : pour L^3 ou $\dot{M}_{p,3}$ c'est immédiat puisque $\|\Delta_0(fg)\|_E \leq \|f\|_E \|g\|_{L^\infty}$. Pour $E = \dot{F}_p^{s,q}$, $E = \dot{B}_p^{s,q}$, $p < 3$, $s = \frac{3}{p} - 1$, on le vérifie en utilisant à nouveau le paraproduit de Bony : on a $\|\Delta_0(fg)\|_E \approx \|\Delta_0(fg)\|_{L^p}$ et on sait déjà que $\|\Delta_0(\pi(f, g))\|_E \leq C \|f\|_E \|g\|_{L^\infty}$ et $\|\Delta_0(R(f, g))\|_E \leq C \|f\|_E \|g\|_{L^\infty}$ de sorte qu'il ne reste à étudier que $\|\Delta_0(\pi(g, f))\|_{L^p}$. On écrit

$$\Delta_0\pi(g, f) = \Delta_0\pi((S_3g - S_{-3}g), S_Lf) + \Delta_0\pi((S_3g - S_{-3}g), f - S_Lf).$$

On a

$$\begin{aligned} \|\Delta_0\pi((S_3g - S_{-3}g), f - S_Lf)\|_{L^p} &\leq C \|S_3g - S_{-3}g\|_{L^\infty} \|f - S_Lf\|_{L^p} \\ &\leq C' \|g\|_{L^\infty} \|f\|_E 2^{-L(\frac{3}{p}-1)}. \end{aligned}$$

Si on pose $I = \|\Delta_0\pi((S_3g - S_{-3}g), S_Lf)\|_{L^p}$ on remarque que l'on peut majorer I par $\|S_3g - S_{-3}g\|_{L^p} \|S_Lf\|_{L^\infty} \leq C \|g\|_E \|f\|_{L^\infty}$ et, en choisissant $\rho > 3 > p$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p}$, que I se majore également par

$$\begin{aligned} \|S_3g - S_{-3}g\|_{L^q} \|S_Lf\|_{L^\rho} &\leq C \|g\|_E \sum_{j<L} \|\Delta_j f\|_{L^\rho} \\ &\leq C \|g\|_E \sum_{j<L} 2^{j(1-\frac{3}{\rho})} \|f\|_E \\ &\leq C' \|g\|_E \|f\|_E 2^{L(1-\frac{3}{\rho})}. \end{aligned}$$

En faisant la moyenne géométrique de ces deux estimations, on obtient pour $L < 0$:

$$\|\Delta_0\pi(g, f)\|_{L^p} \leq C \|g\|_{L^\infty} \|f\|_E 2^{L(1-\frac{3}{p})} + C' \|g\|_E \|f\|_E^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} 2^{L(\frac{1}{2}-\frac{3}{2\rho})}.$$

On obtient que E vérifie (1.13) en prenant $\alpha = \frac{1}{2}$ et en choisissant, pour $\epsilon > 0$ fixé, L tel que $C' 2^{L(\frac{1}{2}-\frac{3}{2\rho})} < \epsilon$.

Nous pouvons maintenant démontrer le point B du théorème 1.6. On considère à nouveau $F(\vec{u})(t) = e^{t\Delta}\vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ et on va montrer qu'il existe $T > 0$, $\rho > 0$ et $R > 0$ tels que l'application F soit une contraction de l'espace $E_{T,\rho,R}$ défini par

$$E_{T,\rho,R} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}(t) \in C([0, T[, (E)^3) \text{ t.q. } \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \leq \rho \\ \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}(s)\|_E \leq R \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0 \end{array} \right\}$$

qui est un fermé du Banach $E_{T,\infty}$, l'analogue sur $[0, T[$ de E_∞ , normé par $\|\vec{u}\|_{E_{T,\infty}} = \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} + \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}(s)\|_E$.

On commence par vérifier le lemme suivant.

Lemme 1.14

Pour $\vec{u}, \vec{v} \in E_{T,\infty}$ et $\epsilon > 0$ on a :

$$\begin{aligned} & \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_E^{0,1}} + \|B(\vec{v}, \vec{u})(t)\|_{\dot{B}_E^{0,1}} \leq \\ & \leq C \left(\epsilon \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^\alpha \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E \right)^{1-\alpha} \right. \\ & \left. + M(\epsilon) \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

et aussi

$$\begin{aligned} & \sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} + \sqrt{t} \|B(\vec{v}, \vec{u})(t)\|_{L^\infty} \leq \\ & \leq C \left(\epsilon^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty}} \sqrt{\left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^{\alpha+1} \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E \right)^{1-\alpha}} \right. \\ & \left. + M(\epsilon)^{\frac{1}{2}} \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sqrt{\sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty}} \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

(En particulier, si $\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} = 0$, on a bien $\lim_{s \rightarrow 0} \|B(\vec{u}, \vec{v})(s)\|_{L^\infty} = 0$ et $B(\vec{u}, \vec{v}) \in C([0, T[, (\dot{B}_E^{0,1})^3]$.)

PREUVE DU LEMME : les transformations de Riesz opèrent continûment sur $\dot{B}_E^{0,1}$, de sorte qu'on peut se ramener à l'étude de l'opérateur scalaire $A(u, v)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta}(uv)(s) ds$.

On remarque d'abord que α défini par $e^{\Delta} \sqrt{-\Delta} = \alpha(D)$ vérifie $|\alpha(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^4}$: il suffit de remarquer que $(1+|x|^4)\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} (\text{Id} + \Delta_\xi^2)(|\xi| e^{-\xi^2}) e^{i(x,\xi)} d\xi$ et que $\Delta_\xi^2(|\xi| e^{-|\xi|^2}) = C\delta + \beta(\xi)$ où $\beta(\xi)$ est $\mathcal{O}(\frac{1}{|\xi|^2})$ au voisinage de 0 et à décroissance rapide à l'infini, de sorte que

$\beta \in L^1$. Cela entraîne pour $f \in E_1$, $\|\alpha * f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{E_1}$ puisque $\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \sup_{y \in \bar{B}(k,1)} |\alpha(y)| < +\infty$

(où $\bar{B}(x, R)$ est la boule fermée de centre x et de rayon R), et donc $\alpha * f \in C_0$ (par densité de \mathcal{S} dans E_1 et puisque pour $\alpha \in L^1$ on a $\alpha * f \in C_0$ lorsque $f \in \mathcal{S}$). En particulier pour $u, v \in E$ on a $\sqrt{-\Delta}e^\Delta(uv) \in \mathcal{S}'_0$.

Pour montrer l'inégalité (1.14), il suffit d'estimer $I = \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s)\|_{\dot{B}_E^{0,1}} ds$. Pour cela, on écrit $I = \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j ds$ avec $I_j(s) = \|\Delta_j e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s)\|_E$. $I_j(s)$ se contrôle facilement :

$$\begin{aligned} I_j(s) &\leq \inf \left(\|e^{(t-s)\Delta}\|_1 \|\sqrt{-\Delta} \Omega \left(\frac{D}{2^j} \right)\|_1, \|\Delta^2 e^{(t-s)\Delta}\|_1 \|\frac{\sqrt{-\Delta}}{\Delta^2} \Omega \left(\frac{D}{2^j} \right)\|_1 \right) \cdot \|\Delta_j uv(s)\|_E \\ &\leq C \inf \left(2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right) \|\Delta_j uv(s)\|_E \\ &\leq C' \inf \left(2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right) \left(M(\epsilon) \|v(s)\|_E \|u(s)\|_{L^\infty} + \epsilon \|u(s)\|_E \|v(s)\|_{L^\infty}^\alpha \right. \\ &\quad \left. (2^j \|v(s)\|_E)^{1-\alpha} \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} I &\leq C \left(\epsilon \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_E \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|v(s)\|_{L^\infty} \right)^\alpha \left(\sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_E \right)^{1-\alpha} \right. \\ &\quad \left. \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{Z}} \inf \left(2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right) \frac{2^{j(1-\alpha)}}{s^{\frac{\alpha}{2}}} ds \right. \\ &\quad \left. + C M(\epsilon) \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|u(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_E \int_0^t \sum_{j \in \mathbb{Z}} \inf \left(2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right) \frac{ds}{\sqrt{s}} \right) \\ &\leq C \left(\epsilon \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_E \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|v(s)\|_{L^\infty} \right)^\alpha \left(\sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_E \right)^{1-\alpha} \right. \\ &\quad \left. + M(\epsilon) \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|u(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_E \right) \end{aligned}$$

car les deux intégrales se majorent respectivement par

$$\int_0^t \frac{ds}{s^{\frac{\alpha}{2}} (t-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{\frac{\alpha}{2}} (1-\sigma)^{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

et par

$$\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s} \sqrt{t-s}} = \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma} \sqrt{1-\sigma}}.$$

Pour (1.15) on part de l'inégalité (qu'on vient de démontrer) :

$$\begin{aligned} & \left\| e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} \sqrt{-\Delta} (uv)(s) \right\|_{\mathbf{E}} \\ & \leq C \left(\frac{1}{s^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{(t-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} \epsilon \|u(s)\|_{\mathbf{E}} (\sqrt{s} \|v(s)\|_{\mathbf{L}^\infty})^\alpha \|v(s)\|_{\mathbf{E}}^{1-\alpha} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} M(\epsilon) \sqrt{s} \|u(s)\|_{\mathbf{L}^\infty} \|v(s)\|_{\mathbf{E}} \right) \end{aligned}$$

et de $\left\| e^{\frac{t-s}{2}\Delta} w(s) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|w(s)\|_{\mathbf{E}}$ pour en conclure :

$$\begin{aligned} & \left\| e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} (uv)(s) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C \left(\frac{\epsilon}{s^{\frac{\alpha}{2}} (t-s)^{\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}}} \|u(s)\|_{\mathbf{E}} (\sqrt{s} \|v(s)\|_{\mathbf{L}^\infty})^\alpha \|v(s)\|_{\mathbf{E}}^{1-\alpha} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{M(\epsilon)}{\sqrt{s}(t-s)} \sqrt{s} \|u(s)\|_{\mathbf{L}^\infty} \|v(s)\|_{\mathbf{E}} \right); \end{aligned}$$

par ailleurs

$$\left\| e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \frac{1}{s} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \sqrt{s} \|u(s)\|_{\mathbf{L}^\infty} \sqrt{s} \|v(s)\|_{\mathbf{L}^\infty}$$

d'où en moyennant :

$$\begin{aligned} & \left\| e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C \left(\epsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{s^{\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2}}} \frac{1}{(t-s)^{1-\frac{\alpha}{4}}} \sqrt{\|u(s)\|_{\mathbf{E}} \sqrt{s} \|u(s)\|_{\mathbf{L}^\infty} (\sqrt{s} \|v(s)\|_{\mathbf{L}^\infty})^{\alpha+1} \|v(s)\|_{\mathbf{E}}^{1-\alpha}} \right. \\ & \quad \left. + M(\epsilon)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{s^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{4}}} \sqrt{s} \|u(s)\|_{\mathbf{L}^\infty} \sqrt{\|v(s)\|_{\mathbf{E}} \sqrt{s} \|v(s)\|_{\mathbf{L}^\infty}} \right) \end{aligned}$$

et (1.15) est démontrée car les deux intégrales se majorent respectivement par

$$\int_0^t \frac{ds}{s^{\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2}} (t-s)^{1-\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2}} (1-\sigma)^{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

et par

$$\int_0^t \frac{ds}{s^{\frac{3}{4}} (t-s)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sigma^{\frac{3}{4}} (1-\sigma)^{\frac{3}{4}}}.$$

Le lemme est donc démontré. ♦

FIN DE LA DÉMONSTRATION. Il s'agit de trouver T , R et ρ pour que F soit contractante sur $E_{T,R,\rho}$ et laisse $E_{T,R,\rho}$ stable. On écrit $\|F(\vec{u}) - F(\vec{v})\|_{E_{T,\rho,R}} = B(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ et on applique (1.14) et (1.15) pour obtenir, pour $\vec{u}, \vec{v} \in E_{T,\rho,R}$:

$$\|F(\vec{u}) - F(\vec{v})\|_{E_{T,\infty}} \leq C \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_{E_{T,\infty}} \left(\epsilon R + M(\epsilon)\rho + \sqrt{\epsilon}\sqrt{R\rho} + \sqrt{M(\epsilon)\rho} \right)$$

de sorte que on va imposer $\left(\epsilon R + M(\epsilon)\rho + \sqrt{\epsilon}\sqrt{R\rho} + \sqrt{M(\epsilon)\rho} \right) < \frac{1}{C}$; il suffit de prendre

$$\begin{cases} \epsilon < \frac{1}{3CR} \\ \rho < \min \left(\frac{1}{9C^2\epsilon R}, \frac{1}{3C(M(\epsilon) + \sqrt{M(\epsilon)})} \right) \end{cases}.$$

ce qui fixe le choix de ρ en fonction de R .

Il reste à assurer que $E_{T,\rho,R}$ soit stable sous l'action de F . Il suffit d'écrire pour $\vec{u} \in E_{T,\rho,R}$, pour $t < T$:

$$\begin{aligned} \|F(\vec{u})(t)\|_{\mathbb{E}} &\leq \|e^{t\Delta}\vec{u}_0\|_{\mathbb{E}} + \|B(\vec{u}, \vec{u})(t)\|_{\mathbb{E}} \\ &\leq \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{E}} + C\epsilon R\rho^\alpha R^{1-\alpha} + CM(\epsilon)\rho R \end{aligned}$$

et

$$\sqrt{t} \|F(\vec{u})(t)\|_{L^\infty} \leq \sqrt{t} \|e^{t\Delta}\vec{u}_0\|_{L^\infty} + C\sqrt{\epsilon}\sqrt{\rho R}\sqrt{\rho^{1+\alpha}R^{1-\alpha}} + C\sqrt{M(\epsilon)\rho}\sqrt{\rho R}.$$

Si on impose à ρ les conditions supplémentaires

$$\begin{aligned} \rho &\leq \min \left(\frac{1}{4CM(\epsilon)}, \frac{1}{(4R^{1-\alpha}C\epsilon)^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \\ \rho &\leq \min \left(\frac{1}{(16C^2\epsilon R^{2-\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}, \frac{1}{(4CM(\epsilon)^{\frac{1}{2}})^2 R} \right), \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|F(\vec{u})(t)\|_{\mathbb{E}} &\leq \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{E}} + \frac{R}{2} \\ \sqrt{t} \|F(\vec{u})(t)\|_{L^\infty} &\leq \sqrt{t} \|e^{t\Delta}\vec{u}_0\|_{L^\infty} + \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

On prend donc $R = 2\|\vec{u}_0\|_{\mathbb{E}}$, ρ assez petit (en fonction de R), puis on choisit T tel que $\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|e^{t\Delta}\vec{u}_0\|_{L^\infty} \leq \frac{\rho}{2}$ et la démonstration est terminée: $E_{T,\rho,R}$ est stable et F y est contractante. \blacklozenge

1.5 Unicité des solutions « mild » : les espaces limites « réguliers »

Nous nous intéressons dans cette section et dans les suivantes au problème de l'unicité des solutions dans $F = \mathcal{C}([0, T[, E^3)$ pour un espace limite E . Rappelons que l'existence de solutions « mild » a été établie à l'aide d'un théorème de point fixe dans le sous-espace $F_* = \{\vec{u} \in F / \sqrt{t}\vec{u} \in (L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R}^3))^3, \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}\|_\infty = 0\}$. L'unicité dans F_* est donc immédiate et le problème est de s'affranchir de la contrainte $\sqrt{t}\vec{u} \in (L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R}^3))^3$.

1.5.1 Un cas élémentaire : le théorème de Le Jan et Sznitman

Récemment Le Jan et Sznitman ont montré qu'il existait des espaces limites E tels que l'opérateur bilinéaire $(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow B(\vec{u}, \vec{v})$ opérait continûment sur $L^\infty(]0, T[, E^3)$ de sorte que le problème de l'unicité se résolvait directement dans $L^\infty(]0, T[, E^3)$ [JS97].

Théorème 1.15 (Y. Le Jan–A.S. Sznitman)

Soit $\Delta PM = \{u(x) \in \mathcal{S}'_0 \text{ t.q. } \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi)| < \infty\}$.

Alors $B(\vec{u}, \vec{v})(t) = \int_0^t \mathbb{P}e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(s) ds$ est bicontinu de

$L^\infty(]0, \infty[, (\Delta PM)^3) \times L^\infty(]0, \infty[, (\Delta PM)^3)$ dans $L^\infty(]0, \infty[, (\Delta PM)^3)$.

Nous en donnons ici une preuve due à M. Cannone [Can97].

Lemme 1.16

Soient $\vec{f}, \vec{g} \in (\Delta PM)^3$. Alors :

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi| |\mathcal{F}(\vec{f})(\xi) * \mathcal{F}(\vec{g})(\xi)| \leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\mathcal{F}(\vec{f})(\xi)| \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\mathcal{F}(\vec{g})(\xi)|.$$

PREUVE : Il suffit de montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi - \eta|^2 |\eta|^2} d\eta \leq C \frac{1}{|\xi|};$$

c'est immédiat puisque l'intégrande est bien intégrable (au voisinage de 0, de ξ et à l'infini) et que l'intégrale définit bien une fonction radiale homogène de degré -1 de ξ . ♦

PREUVE DU THÉORÈME : on veut évaluer :

$$\sup_{t > 0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 \left| \int_0^t \mathcal{F} \left(\mathbb{P}e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(s) \right) (\xi) ds \right|$$

En passant aux composantes et en majorant, on a :

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} |\xi| |(\hat{u} * \hat{v})(s, \xi)| ds \\ & \leq C \left(\sup_{s>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{u}(s, \xi)| \right) \left(\sup_{s>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{v}(s, \xi)| \right) \sup_{t>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} (1 - e^{-t|\xi|^2}) \\ & = C \left(\sup_{s>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{u}(s, \xi)| \right) \left(\sup_{s>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{v}(s, \xi)| \right). \end{aligned}$$

♦

Le résultat de Le Jan et Sznitman nous a permis alors de résoudre le problème de l'unicité pour $E = \Delta \mathcal{H}^1 = \{u \in \mathcal{S}'_0 / \Delta u \in \mathcal{H}^1\} = \dot{F}_1^{2,2}$, un sous-espace de L^3 que nous étudions comme cas d'école plus simple que L^3 :

Corollaire 1.17

Si $\|\vec{u}_0\|_{\Delta \mathcal{H}^1}$ est assez petite, la solution globale à la Kato est l'unique solution dans l'ensemble $C([0, +\infty[, (\Delta \mathcal{H}^1)^3)$.

PREUVE : On remarque d'abord que $\Delta \mathcal{H}^1$ est un sous-espace de ΔPM . Soit $\vec{v}(t)$ une autre solution dans $C([0, T[, (\Delta \mathcal{H}^1)^3)$ avec même donnée initiale $\vec{u}_0(x) = \vec{v}(0, x)$. Nous donnons à cela la signification suivante :

$$\vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t \mathbb{P}e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v})(s) ds \quad \text{dans } \mathcal{S}'.$$

Soit $t_0 = \sup\{t \geq 0 \text{ t.q. } \vec{u}(s) \equiv \vec{v}(s) \text{ sur } [0, t]\}$ (cet ensemble n'est évidemment pas vide). Supposons $t_0 < T$.

On a, en posant $\vec{u}(t) - \vec{v}(t) = \vec{w}(t)$:

$$\begin{aligned} \|\vec{w}(t)\|_{\Delta \text{PM}} &= \|B(\vec{u}, \vec{u})(t) - B(\vec{v}, \vec{v})(t)\|_{\Delta \text{PM}} \\ &= \|B(\vec{w}, \vec{u})(t) + B(\vec{v}, \vec{w})(t)\|_{\Delta \text{PM}} \\ &\leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\Delta \text{PM}} \left[\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\Delta \text{PM}} + \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{\Delta \text{PM}} \right] \\ &\leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\Delta \text{PM}} \left[2 \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\Delta \mathcal{H}^1} + \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\Delta \mathcal{H}^1} \right]. \end{aligned}$$

$\vec{u}(t)$ étant la solution à la Kato, $\forall t > 0 \|\vec{u}(s)\|_{\Delta \mathcal{H}^1} < \frac{1}{4C}$ pourvu que $\|\vec{u}_0\|_{\Delta \mathcal{H}^1} < \delta < \delta_0(\Delta \mathcal{H}^1)$.

Par ailleurs il existe $t_1 > t_0$ tel que $\sup_{0 < s < t_1} \|\vec{w}(s)\|_{\Delta \mathcal{H}^1} < \frac{1}{4C}$ grâce à la continuité de $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ et à la définition de t_0 .

Donc

$$\sup_{0 < s < t_1} \|\vec{w}(s)\|_{\Delta\text{PM}} \leq \frac{3}{4} \sup_{0 < s < t_1} \|\vec{w}(s)\|_{\Delta\text{PM}},$$

d'où $\vec{w}(s) \equiv 0$ sur $[0, t_1[$ dans ΔPM et donc dans $\Delta\mathcal{H}^1$, ce qui contredit la définition de t_0 . \blacklozenge

Il est intéressant de remarquer, comme l'a fait M. Cannone [Can97], que l'espace ΔPM dans lequel on peut démontrer la bicontinuité de l'opérateur bilinéaire n'est rien d'autre qu'un espace de Besov. En effet

$$\Delta\text{PM} = \dot{B}_{\text{PM}}^{2,\infty} = \left\{ f \in \mathcal{S}'_0 \text{ t.q. } \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2j} \|\Delta_j f\|_{\text{PM}} < +\infty \right\}.$$

C'est cette remarque qui nous a permis d'étendre ce premier résultat d'unicité à d'autres espaces fonctionnels limites simples comme nous allons le voir dans la section suivante.

1.5.2 Espaces limites réguliers

Nous allons caractériser dans ce paragraphe les espaces fonctionnels pour lesquels on peut adapter immédiatement la méthode utilisée pour $\Delta\mathcal{H}^1$.

Définition 1.18

Un espace fonctionnel limite régulier pour les équations « mild » de Navier–Stokes est un espace E limite au sens de la définition 1.5 qui vérifie de plus la propriété suivante

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall f, g \in E \quad \|\Delta_0(fg)\|_E \leq C \sup_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j f\|_E \sup_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j g\|_E \quad (1.16)$$

On remarquera que la propriété (1.16) peut se récrire :

$$\|\Delta_j(fg)\|_E \leq C 2^j \|f\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \|g\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}}.$$

Soit X un espace de Banach ; on notera $C_*([0, T[, X)$ le sous-espace des fonctions $f(t, x)$ de $L^\infty([0, T[, X)$ qui sont continues de $[0, T[$ dans X au sens des distributions.

Lemme 1.19

Soit E un espace limite régulier, $T \in]0, \infty]$ et $\vec{u}(t), \vec{v}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$.

Alors pour tout $t \in]0, T[$ l'intégrale $B(\vec{u}, \vec{v})(t) = - \int_0^t \mathbb{P}e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(s) ds$ converge au sens des distributions vers un élément de $(\dot{B}_E^{0,\infty})^3$.

De plus $B(\vec{u}, \vec{v})(t) \in C_*([0, T[, (\dot{B}_E^{0,\infty})^3)$ et en particulier $\lim_{t \rightarrow 0} B(\vec{u}, \vec{v})(t) = 0$ dans $(\mathcal{S}')^3$ et

$$\forall t \in [0, T[\quad \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}}.$$

PREUVE : Les transformées de Riesz agissant continûment sur $\dot{B}_E^{0,\infty}$, on peut encore une fois démontrer le lemme pour l'opérateur scalaire $A(u, v)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) ds$. On a que $e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) \in E \forall s \in [0, t[$ et aussi, $\int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) ds$ converge dans $E \subseteq \mathcal{S}'_0 \forall \theta \in [0, t[$. On montre maintenant que $\forall \phi \in \mathcal{S}$ il existe $\lim_{\theta \rightarrow t} \langle \int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) ds, \phi \rangle$ et que cette limite est dans \mathcal{S}'_0 . On a :

$$\begin{aligned} & \left\langle \int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) ds, \phi \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j \int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) ds, \phi \right\rangle \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left\langle \Delta_j \int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) ds, \Omega \left(\frac{D}{2^j} \right) \phi \right\rangle \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \left\langle \frac{1}{2^j} \Delta_j \int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) ds, \Omega \left(\frac{D}{2^j} \right) \phi \right\rangle \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \langle f_j(\theta), \Omega \left(\frac{D}{2^j} \right) \phi \rangle \end{aligned}$$

où on a appelé $f_j(\theta) = \frac{1}{2^j} \Delta_j \int_0^\theta e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) ds$.

On a que $f_j(\theta) \in E$ et $f_j(\theta) \rightarrow f_j(t)$ dans E .

De plus, $\|f_j(\theta)\|_{L^\infty} \leq C \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in [0, t]$; en effet :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^j} \int_0^\theta \left\| e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} \Delta_j (uv)(s) \right\|_{L^\infty} ds \\ & \leq \frac{1}{2^j} \int_0^\theta \left\| e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} \Omega \left(\frac{D}{2^j} \right) \right\|_1 2^j \|\Delta_j (uv)(s)\|_E ds \\ & \leq \int_0^\theta \inf \left(2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right) 2^j \|u(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \|v(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} ds \\ & \leq \int_0^\infty \inf \left(1, \frac{1}{\sigma^2} \right) d\sigma \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \\ & \leq C \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}}. \end{aligned}$$

On conclut que $\lim_{\theta \rightarrow t} \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \langle f_j(\theta), \Omega \left(\frac{D}{2^j} \right) \phi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle 2^j f_j(t), \phi \rangle$ grâce au théorème de convergence dominée, et donc dans \mathcal{S}' $\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) ds = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j f_j(t)$.

Enfin on a que $S_0(A(u, v)(t)) = \sum_{j \leq 0} 2^j S_0 f_j(t) \in C_0$ car $\|S_0 f_j(t)\|_{L^\infty} \leq C \forall j \in \mathbb{Z}$ et $S_0 f_j(t) \in C_0$, ce qui entraîne que $A(u, v)(t) \in \mathcal{S}'_0 \forall t \in [0, T[$.

Il faut maintenant prouver que $\sup_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^t \|\Delta_j e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s)\|_E ds < \infty$.

Or, d'après le lemme 1.11 :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\| \Delta_j e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) \right\|_{\mathbf{E}} ds \\ & \leq \int_0^t \inf \left(2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right) \|\Delta_j(uv)\|_{\mathbf{E}} ds \\ & \leq C \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{\dot{B}_{\mathbf{E}}^{0,\infty}} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_{\dot{B}_{\mathbf{E}}^{0,\infty}} \int_0^{4^j t} \frac{1}{1+\sigma^2} d\sigma \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. \blacklozenge

On obtient donc le théorème d'unicité suivant.

Théorème 1.20

Soit \mathbf{E} un espace fonctionnel limite régulier pour les équations de Navier–Stokes. Alors si $\vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, (\mathbf{E})^3)$ est la solution à la Kato avec donnée initiale \vec{u}_0 telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $\|\vec{u}_0\|_{\mathbf{E}} \leq \delta_0(\mathbf{E})$ et si pour un $T \in]0, +\infty]$ $\vec{v}(t) \in C([0, T[, (\mathbf{E})^3)$ et $\vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{v}, \vec{v})(t)$ dans \mathcal{S}' , alors $\vec{v}(t) = \vec{u}(t)$ sur $[0, T[$.

PREUVE : Remarquons tout d'abord que si $\vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t \mathbb{P} e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v})(s) ds$ du lemme précédent il s'ensuit que $\vec{v}(0) = \vec{u}_0$, ce qui justifie qu'il s'agit bien là d'une autre solution avec même donnée initiale.

Il suffit maintenant tout simplement de reprendre mot à mot la preuve de l'unicité dans l'espace $\Delta \mathcal{H}^1$. En substituant $\dot{B}_{\mathbf{E}}^{0,\infty}$ à l'espace ΔPM et \mathbf{E} à $\Delta \mathcal{H}^1$ on obtient l'inégalité suivante :

$$\|\vec{w}(t)\|_{\dot{B}_{\mathbf{E}}^{0,\infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_{\mathbf{E}}^{0,\infty}} \left(2 \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbf{E}} + \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\mathbf{E}} \right).$$

d'où on peut conclure. \blacklozenge

Exemples

Proposition 1.21

Pour $1 \leq p < 3$, $1 \leq q < +\infty$, $s = \frac{3}{p} - 1$, $\dot{B}_p^{s,q}$ et $\dot{F}_p^{s,q}$ sont des espaces fonctionnels limites réguliers, pour les équations de Navier–Stokes. En particulier $\dot{H}^{\frac{1}{2}} = \dot{B}_2^{\frac{1}{2},2}$ est un espace limite régulier.

PREUVE : On utilise le paraproduit de Bony :

$$\begin{aligned} \Delta_0(fg) &= \Delta_0 \left(\sum_{|\ell| \leq 2} \Delta_\ell f S_{\ell-2} g \right) + \Delta_0 \left(\sum_{|\ell| \leq 2} \Delta_\ell g S_{\ell-2} f \right) + \Delta_0 \left(\sum_{\ell \geq -3} \Delta_\ell f \sum_{\epsilon=-2}^2 \Delta_{\ell+\epsilon} g \right) \\ &= \Delta_0 \alpha + \Delta_0 \beta + \Delta_0 \gamma. \end{aligned}$$

On a :

$$\|\Delta_0 \alpha\|_{L^p} \leq \sum_{l=-2}^2 \|\Delta_l f\|_{L^p} \|S_{l-2} g\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}}$$

et $\|\Delta_0 \beta\|_{L^p}$ se contrôle de manière similaire.

Venons au contrôle de $\Delta_0 \gamma$. On pose $q = +\infty$ si $1 \leq p < \frac{3}{2}$, $q = 3$ si $\frac{3}{2} \leq p < 3$. On a alors $p < q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ et $\frac{3}{q} > 1 - s = 2 - \frac{3}{p}$. En posant $r = \frac{pq}{p+q}$ il résulte $1 \leq r \leq p$ et

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_l f \left(\sum_{\epsilon=-2}^2 \Delta_{l+\epsilon} g \right) \right\|_{L^r} &\leq \|\Delta_l f\|_{L^p} \left\| \sum_{\epsilon=-2}^2 \Delta_{l+\epsilon} g \right\|_{L^q} \\ &\leq C 2^{-ls} 2^{-l} 2^{l(\frac{3}{p}-\frac{3}{q})} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} = C 2^{l(1-s-\frac{3}{q})} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\|\Delta_0 \gamma\|_{L^p} \leq \|\Delta_0 \gamma\|_{L^r} \leq C \sum_{j \geq -3} 2^{j(1-s-\frac{3}{q})} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}}.$$

Il faut remarquer que pour $\dot{B}_p^{s,\infty}$ le résultat est vrai quitte à se restreindre à l'adhérence de \mathcal{S} . ♦

Remarque. Le résultat d'unicité du théorème 1.20 vaut aussi sans la condition de petitesse de la donnée initiale. Ce même résultat dans les espaces de Besov, dans les deux cas de donnée petite ou quelconque, a été obtenu de manière indépendante par J. Y. Chemin [Che97].

1.6 Unicité dans l'espace L^3

Nous passons maintenant au résultat principal de cet article : l'unicité L^3 . Nous commençons par le cas des petites normes, comme pour la section précédente, pour lequel la démonstration est simple. Le cas général sera traité ensuite.

1.6.1 Unicité des solutions « mild » globales avec donnée initiale petite en norme L^3

L'existence d'une solution « mild » dans L^3 est classique [Kat84]. Par ailleurs nous l'avons retrouvée dans le théorème 1.6 B]

Si on reprend cependant la preuve de l'unicité dans E limite « régulier », on s'aperçoit que finalement on n'a fait que plonger E dans l'espace plus grand $\dot{B}_E^{0,\infty}$ dans lequel l'opérateur bilinéaire $B(\vec{u}, \vec{v})(t)$ est bicontinu. Dans le cas de L^3 le candidat naturel est le Besov $\dot{B}_3^{0,\infty}$, qui cependant présente deux sortes d'obstructions. D'abord le produit $\vec{u} \otimes \vec{v}$ n'est pas en général bien défini dans \mathcal{S}' , $\dot{B}_3^{0,\infty}$ ne s'injectant pas dans L_{loc}^2 . Ensuite, même

en se restreignant aux éléments de $L^3 \subset \dot{B}_3^{0,\infty}$ on ne peut plus établir la bicontinuité car la majoration $\|\Delta_0(uv)\|_{L^3} \leq C \|u\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} \|v\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}}$ ne vaut plus. Par exemple, soient $u_0 \in L^3$, \hat{u}_0 à support dans la boule de centre 0 et de rayon 1, $u_j(x) = u_0(x)e^{i2^j \langle x, \bar{e}_1 \rangle}$ et $v_j(x) = u_0(x)e^{-i2^j \langle x, \bar{e}_1 \rangle}$; en définissant alors $u_N = \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} u_j$ et $v_N = \sum_{j=1}^N v_j$ on a que u_N et v_N appartiennent à L^3 et $\Delta_j u_N \approx \frac{1}{j} u_j$, $\Delta_j v_N \approx v_j$, mais dans le paraproduit

$$\left\| \Delta_0 \left(\sum_{j \geq -3} \Delta_j u_N \Delta_j v_N \right) \right\|_{L^3} \not\leq C \|u_N\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} \|v_N\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}}$$

car $\|u_N\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} = C \sup_{1 \leq j \leq N} \frac{1}{j}$, $\|v_N\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} = C$ et $\sum_{j=1}^N \frac{1}{j}$ n'est pas dominé par $\sup_{1 \leq j \leq N} \frac{1}{j}$.

Toujours en reprenant la preuve de l'unicité dans E limite régulier, on peut remarquer qu'il a été essentiel d'écrire

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} = B(\vec{w}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{w}),$$

ce qui conduit à la majoration :

$$\|\vec{w}(t)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_E^{0,\infty}} \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E + \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E \right).$$

Cela suggère de préciser l'appartenance fonctionnelle de $\vec{w}(t)$ et d'envisager donc une bicontinuité de l'opérateur $B(\vec{u}, \vec{w})(t)$ qui ne serait plus « symétrique ».

On commence par remarquer que si $\vec{u}, \vec{v} \in C([0, +\infty[, (L^3)^3)$ alors $\vec{w}(t) = B(\vec{u}, \vec{u})(t) - B(\vec{v}, \vec{v})(t) \in \dot{B}_3^{0,\infty} \forall t > 0$, car

$$\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_3^{0,\infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^3}.$$

En effet, il suffit encore une fois d'étudier l'opérateur scalaire $A(u, v)(t)$.

L'estimation sur $\|\mathbb{P}e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \Omega \left(\frac{D}{2^j} \right)\|_1$ obtenue dans la section 1.4 nous amène à

$$\|\Delta_j A(u, v)(t)\|_{L^3} \leq C \int_0^t \inf \left(2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2} \right) \|\Delta_j(uv)(s)\|_{L^3} ds.$$

Par ailleurs $\|\Delta_j(uv)(s)\|_{L^3} \leq C 2^j \|\Delta_j(uv)(s)\|_{L^{\frac{3}{2}}} \leq C \|\omega(D)\|_1 2^j \|u(s)\|_{L^3} \|v(s)\|_{L^3}$ ce qui donne

$$\|\Delta_j A(u, v)(t)\|_{L^3} \leq C \int_0^{4^j t} \frac{1}{1 + \sigma^2} d\sigma \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_{L^3}.$$

On a de plus les résultats suivants.

Lemme 1.22

Il existe $C > 0$ tel que pour tout T dans $]0, +\infty]$, pour tout $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ dans $C([0, T[, (L^3)^3)$

et pour tout \vec{w} dans $C\left([0, T[, \left(\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}\right)^3\right)$ on a pour $0 < t < T$:

$$\begin{aligned} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} &\leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^3} \\ \|B(\vec{v}, \vec{w})(t)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} + \|B(\vec{w}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} &\leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}}. \end{aligned}$$

PREUVE : Toujours concernant l'opérateur scalaire il s'agit de montrer que :

$$\|A(u, v)(t)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_{L^3} \quad (1.17)$$

$$\|A(u, w)(t)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|w(s)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}}. \quad (1.18)$$

La démonstration de (1.17) est immédiate. On a même $A(u, v) \in \dot{B}_3^{1, \infty} \subset \dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}$. En effet, l'estimation $2^j \|\Delta_j(uv)(s)\|_{L^{\frac{3}{2}}} \leq \|\omega(D)\|_1 2^j \|u(s)\|_{L^3} \|v(s)\|_{L^3}$ donne comme dans la remarque précédente :

$$\begin{aligned} 2^j \|\Delta_j A(u, v)(t)\|_{L^{\frac{3}{2}}} &\leq C \int_0^t \inf(2^j, \frac{2^j}{(4^j(t-s))^2}) 2^j \|\Delta_j(uv)(s)\|_{L^{\frac{3}{2}}} ds \\ &\leq \int_0^{4^j t} \frac{1}{1+\sigma^2} d\sigma \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{L^3} \sup_{0 < s < t} \|v(s)\|_{L^3}. \end{aligned}$$

(1.18) se démontre de manière analogue, en remplaçant l'estimation $2^j \|\Delta_j(uv)\|_{L^{\frac{3}{2}}} \leq C 2^j \|u\|_{L^3} \|v\|_{L^3}$ par $2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j(vw)\|_{L^2} \leq C 2^j \|v\|_{L^3} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}}$. Pour établir cette inégalité, on écrit, toujours suivant la technique du paraproduit de Bony :

$$\begin{aligned} \Delta_j(vw) &= \Delta_j \left(\sum_{|l-j| \leq 2} \Delta_l v S_{l-2} w \right) + \Delta_j \left(\sum_{|l-j| \leq 2} \Delta_l w S_{l-2} v \right) \\ &\quad + \Delta_j \left(\sum_{l \geq j-3} \Delta_l v \left(\sum_{\epsilon=-2}^2 \Delta_{l+\epsilon} w \right) \right) \\ &= \Delta_j \alpha_j + \Delta_j \beta_j + \Delta_j \gamma_j. \end{aligned}$$

On contrôle $\|\Delta_j \alpha_j\|_{L^2}$ en remarquant que $\|\Delta_j v\|_{L^3} \leq \|\omega(D)\|_1 \|v\|_{L^3}$ et que

$$\begin{aligned} \|S_{l-2} w\|_{L^6} &\leq \sum_{k \leq l-3} \|\Delta_k w\|_{L^6} \\ &\leq C \sum_{k \leq l-3} 2^k \|\Delta_k w\|_{L^2} \leq C \sum_{k \leq l-3} 2^{\frac{k}{2}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \leq C 2^{\frac{l}{2}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}}. \end{aligned}$$

On contrôle $\|\Delta_j \beta_j\|_{L^2}$ en remarquant que $\|\Delta_l w\|_{L^2} \leq 2^{-\frac{l}{2}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}}$ et que $\|S_{l-2} v\|_{L^\infty} \leq C 2^l \|v\|_{L^3}$. Enfin on contrôle $\|\Delta_j \gamma_j\|_{L^2}$ en remarquant que $\|\Delta_j v\|_{L^3} \leq \|\omega(D)\|_1 \|v\|_{L^3}$ et $\|\Delta_l w\|_{L^2} \leq 2^{-\frac{l}{2}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}}$, d'où

$$\|\Delta_j \gamma_j\|_{L^{\frac{6}{5}}} \leq C \|v\|_{L^3} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}} \sum_{l \geq j} 2^{-\frac{l}{2}} \leq C 2^{-\frac{j}{2}} \|v\|_{L^3} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}},$$

puis que $\|\Delta_j \gamma_j\|_{L^2} \leq C 2^j \|\Delta_j \gamma_j\|_{L^{\frac{6}{5}}}$ en utilisant une inégalité de Bernstein. \blacklozenge

On est donc en mesure de démontrer le théorème d'unicité des solutions « mild » des équations de Navier–Stokes globales en temps avec donnée initiale petite.

Théorème 1.2 (Donnée initiale petite)

Si $\vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, (L^3)^3)$ est la solution à la Kato avec donnée initiale \vec{u}_0 telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $\|\vec{u}_0\|_{L^3} < \delta < \delta_0(L^3)$ et si pour un $T \in]0, +\infty]$ il existe $\vec{v}(t) \in C([0, T[, (L^3)^3)$ vérifiant $\vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{v}, \vec{v})(t)$ dans S' , alors $\vec{u}(t) = \vec{v}(t)$ dans $[0, T[$.

PREUVE : (1.17) nous assure que si \vec{v} est une solution « mild » avec $\vec{v}(t) \in C([0, T[, (L^3)^3)$, alors $\forall t \in]0, T[$ $\vec{v}(t) - e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in (\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty})^3$ et il en va de même pour $\vec{u}(t) - e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in (\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty})^3$, donc pour $\vec{w}(t) = \vec{u}(t) - \vec{v}(t)$. Comme $\vec{w} = B(\vec{w}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{w})$, (1.18) nous donne pour $t \in]0, T[$:

$$\sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}} \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{L^3} + \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{L^3} \right).$$

Cela entraîne d'une façon analogue au cas régulier que $\vec{u}(t) - \vec{v}(t) = 0$ dans $\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty} \subset S'$ et donc dans L^3 où se trouvent les deux solutions. \blacklozenge

1.6.2 Le cas des données initiales petites en norme $\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}$ pour $3 < q < 6$

On sait d'après les travaux de M. Cannone [Can95] qu'on peut obtenir l'existence d'une solution globale dans L^3 même en affaiblissant la condition sur la donnée initiale \vec{u}_0 et notamment en imposant que $\|\vec{u}_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}}$ soit petite, ce qui revient à lui demander une propriété d'oscillation. Le théorème prouvé est le suivant.

Théorème (Cannone)

Soit q fixé dans $3 < q \leq 6$. Il existe une constante absolue $\tilde{\delta} > 0$ telle que pour toute donnée initiale $\vec{u}_0 \in L^3$ avec $\|\vec{u}_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} < \tilde{\delta}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, il existe une unique solution globale

« mild » $\vec{u}(t, x)$ des équations de Navier–Stokes ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, (L^3)^3) \\ t^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2q}} \vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, (L^q)^3) \\ \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2q}} \|\vec{u}(t)\|_{L^q} = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

En outre,

$$\|\vec{u}(t)\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty}} \leq C \|\vec{u}_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty}}. \quad (1.20)$$

On remarque que dans ce cadre on n'obtient aucun contrôle pour la norme $\sup_{t>0} \|u(t)\|_{L^3}$ de la solution. Cependant on peut établir l'unicité de ladite solution quitte à montrer une nouvelle bicontinuité de l'opérateur bilinéaire.

Théorème 1.23

Il existe δ_0 vérifiant $0 < \delta_0 \leq \tilde{\delta}$ tel que si $\|\vec{u}_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty}} < \delta_0$ la solution \vec{u} vérifiant (1.19) pour $q \in]3, 6[$ est l'unique solution dans $C([0, +\infty[, (L^3)^3)$.

Le pivot de la démonstration est le lemme suivant.

Lemme 1.24

Soit $q \in]3, 6[$. Il existe $C > 0$ tel que $\forall T \in]0, \infty]$, $\forall \vec{u}(t) \in C\left([0, T[, \left(\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty}\right)^3\right)$, $\forall \vec{w}(t) \in L^\infty\left([0, T[, \left(\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}\right)^3\right)$ on a, pour tout t tel que $0 < t < T$:

$$\|B(\vec{u}, \vec{w})(t)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} + \|B(\vec{w}, \vec{u})(t)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}}.$$

PREUVE : Il s'agit encore une fois de démontrer, à l'aide du paraproduit :

$$\|\Delta_0(uw)\|_{L^2} \leq C \|u\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \|\Delta_j u\|_{L^q} &\leq 2^{j(1-\frac{3}{q})} \|u\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty}} \text{ et} \\ \|S_j w\|_{L^p} &\leq C 2^{j(1-\frac{3}{p})} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \text{ si } p > 3 \end{aligned}$$

Si p est choisi tel que en plus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ (ce qui est possible grâce à la restriction $q < 6$) on obtient le contrôle de $\left\| \Delta_0 \left(\sum_{j=-2}^2 \Delta_j u S_{j-2} w \right) \right\|_{L^2}$.

On a aussi :

$$\begin{aligned} \|\Delta_j w\|_{L^2} &\leq 2^{-\frac{j}{2}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}} \text{ et} \\ \|S_j u\|_{L^q} &\leq C 2^{j(1-\frac{3}{q})} \|u\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} \end{aligned}$$

d'où par Bernstein le contrôle de $\left\| \Delta_0 \left(\sum_{j=-2}^2 \Delta_j w S_{j-2} u \right) \right\|_{L^2}$ puisque $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{q} < 1$.

Reste le contrôle de $\left\| \Delta_0 \left(\sum_{j \geq -3} \Delta_j u \sum_{\epsilon=-2}^2 \Delta_{j+\epsilon} w \right) \right\|_{L^2}$. On a :

$$\begin{aligned} \|\Delta_j w\|_{L^2} &\leq 2^{-\frac{j}{2}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}} \text{ et} \\ \|\Delta_j u\|_{L^q} &\leq C 2^{j(1-\frac{3}{q})} \|u\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{j \geq -3} \|\Delta_j u\|_{L^q} \|\Delta_{j+\epsilon} w\|_{L^2} \leq C \|u\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}} \quad -2 \leq \epsilon \leq 2$$

car $-\frac{1}{2} - \frac{3}{q} + 1 < 0$ et donc, par Bernstein,

$$\left\| \Delta_0 \left(\sum_{j \geq -3} \Delta_j u \sum_{\epsilon=-2}^2 \Delta_{j+\epsilon} w \right) \right\|_{L^2} \leq \left\| \Delta_0 \left(\sum_{j \geq -3} \Delta_j u \sum_{\epsilon=-2}^2 \Delta_{j+\epsilon} w \right) \right\|_{L^{\frac{2q}{2+q}}}$$

car $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{q} < 1$. ♦

PREUVE DU THÉORÈME : en écrivant à nouveau $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = B(\vec{w}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{w})$ on obtient du lemme précédent $\forall t < T$:

$$\sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}} \left(2 \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} + \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}} \right).$$

On conclut alors grâce à l'estimation (1.20) et à l'inclusion $L^3 \hookrightarrow \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}$ $3 < q < 6$. ♦

1.6.3 Unicité des solutions « mild » locales

L'idée novatrice pour démontrer le résultat d'unicité d'une solution dans L^3 a été celle d'exploiter une bicontinuité non symétrique de l'opérateur intégrale $B(\vec{u}, \vec{v})(t)$. Cette même idée conduit au résultat suivant.

Théorème 1.2

Soient $\vec{u}_0 \in (L^3)^3$ telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, $T \in]0, +\infty]$ et $\vec{u}(t), \vec{v}(t) \in C([0, T[, (L^3)^3)$ t.q. $\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ et $\vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{v}, \vec{v})(t)$ dans S' . Alors $\vec{u}(t) = \vec{v}(t)$ dans $[0, T[$.

Le lemme de continuité est en effet le suivant.

Lemme 1.25

Il existe $C > 0$ tel que $\forall T \in]0, +\infty]$, $\forall \vec{u}$ avec $t^{\frac{1}{8}} \vec{u}(t) \in C([0, T[, (L^4)^3)$ et $\forall \vec{w}(t) \in C([0, T[, (\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty})^3)$ on a $\forall t \in]0, T[$:

$$\|B(\vec{u}, \vec{w})(t)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} + \|B(\vec{w}, \vec{u})(t)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \leq C \sup_{0 < s < T} s^{\frac{1}{8}} \|\vec{u}(s)\|_{L^4} \sup_{0 < s < T} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}}.$$

PREUVE : On considère encore l'opérateur scalaire $A(u, w)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} u w(s) ds$. On veut évaluer :

$$2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j A(u, w)(t)\|_{L^2} \leq \int_0^t \|e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} \Omega \left(\frac{D}{2^j} \right)\|_1 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j(uw)\|_{L^2} ds;$$

on est ramené donc à estimer $\|\Delta_j(uw)\|_{L^2}$.

A l'aide du paraproduit on obtient :

$$\|\Delta_j(uw)\|_{L^2} \leq C 2^{\frac{j}{4}} \|u\|_{L^4} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}}.$$

En effet on a :

$$\begin{aligned} \|S_j u\|_{L^4} &\leq C \|u\|_{L^4} \\ \|\Delta_j w\|_{L^4} &\leq C 2^{\frac{3j}{4}} \|\Delta_j w\|_{L^2} \leq C 2^{\frac{j}{4}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}}, \end{aligned}$$

d'où l'estimation :

$$\left\| \Delta_j \left(\sum_{|k-j| \leq 2} \Delta_k w S_{k-2} u \right) \right\|_{L^2} \leq C 2^{\frac{j}{4}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \|u\|_{L^4}.$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \|\Delta_j u\|_{L^4} &\leq C \|u\|_{L^4} \\ \|S_j w\|_{L^4} &\leq \sum_{k < j} \|\Delta_k w\|_{L^4} \leq \sum_{k < l-2} 2^{\frac{3k}{4}} 2^{-\frac{k}{2}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \leq 2^{\frac{j}{4}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}}, \end{aligned}$$

d'où l'estimation :

$$\left\| \Delta_j \left(\sum_{|k-j| \leq 2} \Delta_k u S_{k-2} w \right) \right\|_{L^2} \leq C 2^{\frac{j}{4}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \|u\|_{L^4}.$$

Enfin on a :

$$\begin{aligned}
& \left\| \Delta_j \left(\sum_{k \geq j-3} \Delta_k w \sum_{\epsilon=-2}^2 \Delta_{k+\epsilon} u \right) \right\|_{L^2} \\
& \leq C 2^{\frac{3j}{4}} \sum_{k \geq j-3} \sum_{\epsilon=-2}^2 \|\Delta_k w \Delta_{k+\epsilon} u\|_{L^{\frac{4}{3}}} \\
& \leq C 2^{\frac{3j}{4}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \|u\|_{L^4} \sum_{k \geq j-3} 2^{-\frac{k}{2}} \\
& \leq C 2^{\frac{j}{4}} \|w\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \|u\|_{L^4}.
\end{aligned}$$

On conclut donc que

$$\begin{aligned}
2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j A(u, w)(t)\|_{L^2} & \leq \int_0^t \inf \left(2^j, \frac{2^j}{((t-s)2^{2j})^2} \right) 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j(uw)(s)\|_{L^2} ds \\
& \leq C \int_0^t \frac{2^{\frac{7j}{4}}}{1 + ((t-s)2^{2j})^2} \frac{1}{s^{\frac{1}{8}}} ds \sup_{0 < s < T} s^{\frac{1}{8}} \|\vec{u}(s)\|_{L^4} \sup_{0 < s < T} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \\
& \leq C \int_0^t \frac{1}{((t-s)2^{2j})^{\frac{7}{8}}} \frac{2^{\frac{7j}{8}}}{s^{\frac{1}{8}}} ds \sup_{0 < s < T} s^{\frac{1}{8}} \|\vec{u}(s)\|_{L^4} \sup_{0 < s < T} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \\
& \leq C \sup_{0 < s < T} s^{\frac{1}{8}} \|\vec{u}(s)\|_{L^4} \sup_{0 < s < T} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}}.
\end{aligned}$$

◆

PREUVE DU THÉORÈME: il suffit de décomposer

$$\begin{aligned}
\vec{w}(t) & = B(\vec{w}, \vec{u})(t) + B(\vec{v}, \vec{w})(t) \\
& = B(\vec{w}, \vec{u} - e^{s\Delta} \vec{u}_0) + B(\vec{v} - e^{s\Delta} \vec{u}_0, \vec{w}) \\
& \quad + B(\vec{w}, e^{s\Delta} \vec{u}_0) + B(e^{s\Delta} \vec{u}_0, \vec{w}).
\end{aligned}$$

Comme $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont dans $C([0, T[, (L^3)^3)$, les deux premiers termes se traitent comme dans le cas global puisque $\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s) - e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{L^3} \rightarrow 0$, $\sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s) - e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{L^3} \rightarrow 0$. Pour les deux derniers, grâce au lemme on a que :

$$\begin{aligned}
& \|B(e^{t\Delta} \vec{u}_0, \vec{w})(t)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} + \|B(\vec{w}, e^{t\Delta} \vec{u}_0)(t)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}} \\
& \leq C \sup_{0 < s < t} s^{\frac{1}{8}} \|e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{L^4} \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}}
\end{aligned}$$

où $\sup_{0 < s < t} s^{\frac{1}{8}} \|e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{L^4} \rightarrow 0$ si $t \rightarrow 0$. Nous avons ainsi obtenu l'unicité locale. Soit alors $t_0 = \sup\{t \text{ t.q. } \vec{u}(s) = \vec{v}(s) \forall s \in [0, t]\}$. Si $t_0 < T$ on a $\vec{u}(t_0) = \vec{v}(t_0)$ par continuité ; si on appelle $\vec{U}(t) = \vec{u}(t + t_0)$ et $\vec{V}(t) = \vec{v}(t + t_0)$, elles restent solutions « mild » avec donnée

initiale $\vec{u}(t_0)$. Donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\vec{U}(t) = \vec{V}(t)$ dans $[0, \epsilon[$, ce qui contredit la définition de t_0 . On a alors $t_0 = T$ et $\vec{u}(t) = \vec{v}(t)$ dans $[0, T[$. \blacklozenge

Remarques.

- 1) Il faut préciser que dans les lemmes de bicontinuité qui ont permis d'obtenir dans L^3 les résultats d'unicité globale et locale, le choix des espaces a été tout à fait arbitraire. En effet l'espace $\dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}$ peut être remplacé par tous les $\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1, \infty}$ avec $q \in]\frac{3}{2}, 3[$ tout comme l'espace des \vec{u} telles que $\sup_{0 < s < T} s^{\frac{1}{8}} \|\vec{u}(s)\|_{L^4} < \infty$ peut être remplacé par celui où $\sup_{0 < s < T} s^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2q}} \|\vec{u}(s)\|_{L^q} < \infty$ avec $q \in]3, 6[$.
- 2) Nous donnons dans la section 1.8 une autre démonstration des mêmes résultats d'unicité en utilisant pour les espaces de Besov la norme équivalente :

$$\sup_{t>0} \|(t\Delta e^{t\Delta})f\|_{\dot{B}_p^{s, \infty}}$$

qui se révèle plus adaptée à la structure du terme bilinéaire (voir aussi [CP97]).

1.7 Unicité dans les espaces limites. Les espaces de Morrey–Campanato

Dans cette dernière partie nous allons présenter une nouvelle formulation des résultats précédents dans un cadre tout à fait général qui comprendra aussi l'adhérence des fonctions dans la classe de Schwartz dans les espaces de Morrey–Campanato homogènes $\dot{M}_{p,3}$. Rappelons-en la définition.

$$\dot{M}_{p,q} = \{f \in M_p \text{ t.q. } \sup_{R>0} \|R^{\frac{3}{q}} f(Rx)\|_{M_p} < \infty\}$$

pour tous p, q tels que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ où $\|f\|_{M_p} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \|f 1_{|x-x_0|<1}\|_{L^p}$. (Pour $p = 1$, on remplace L^1 par l'espace des mesures bornées).

Introduisons maintenant les espaces de Besov sur ces espaces $\dot{M}_{p,q}$ (voir aussi [KY94]).

Définition 1.26

Pour tous $p, q, 1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $s \in \mathbb{R}$

$$\dot{B}_{p,q}^{s, \infty} = \{f \in \mathcal{S}'_0 \text{ t.q. } \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|\Delta_j f\|_{\dot{M}_{p,q}} < +\infty\}.$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes.

$$\text{Pour } p, p' \text{ t.q. } 1 \leq p \leq p', \quad \|f\|_{M_p} \leq \|f\|_{M_{p'}}. \quad (1.21)$$

Pour p, p', q t.q. $1 \leq p \leq p', p \leq q \leq +\infty$ et pour toute f telle que $f \in \dot{M}_{p,q} \cap L^\infty$

$$\|f\|_{\dot{M}_{p',q} \frac{p'}{p}} \leq \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{p}{p'}} \|f\|_{\dot{M}_{p,q}}^{\frac{p}{p'}}. \quad (1.22)$$

$$\|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq C_{p,q} 2^{\frac{3j}{q}} \|\Delta_j f\|_{\dot{M}_{p,q}}. \quad (1.23)$$

$$\dot{B}_{p,q}^{s,\infty} \subset \dot{B}_{p',q'}^{s',\infty} \text{ pour } s, s', p, q, p', q' \text{ t.q. } p' \geq p, q' = q \frac{p'}{p}, s' = s - \frac{3}{q} \left(1 - \frac{p}{p'}\right) \quad (1.24)$$

Pour p, q, p', q' tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \leq 1, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} \leq 1, f \in \dot{M}_{p,q}, g \in \dot{M}_{p',q'}$ alors

$$fg \in \dot{M}_{p'',q''} \text{ où } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{p''}, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{q''}. \quad (1.25)$$

$$\text{Pour } p, q \text{ tels que } 1 \leq p \leq q < +\infty \text{ et } f \in \dot{M}_{p,q} \text{ alors } f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \text{ dans } \mathcal{S}'. \quad (1.26)$$

On aboutit finalement au théorème d'unicité suivant.

Théorème 1.6 C]

Soit E un espace limite. Si E vérifie de plus que, $\forall f \in E, \left\{ \int_{|x|<1} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C \|f\|_E$ pour un $p > 2$, alors si $\vec{u}_0 \in (E)^3$ telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, si $T \in]0, \infty]$, si $\vec{u}(t), \vec{v}(t) \in C([0, T[, (E)^3)$ vérifient dans \mathcal{S}' : $\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t), \vec{v}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{v}, \vec{v})(t)$, alors $\vec{u}(t) = \vec{v}(t) \forall t \in [0, T[$.

Remarques.

1) Si l'espace limite E vérifie que, $\forall f \in E, \left\{ \int_{|x|<1} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C \|f\|_E$ pour $p > 2$, alors

$E \subset \dot{M}_{p,3} \subset \dot{M}_{2,3}$. En effet $E \subset M_p$ car $\forall x_0 \in \mathbb{R}^3, \left\{ \int_{|x-x_0|<1} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C \|f\|_E$ grâce à l'invariance par translation de la norme. Par ailleurs $E \subset \dot{M}_{p,3}$ car

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^3, \forall R > 0 \quad R \left\{ \int_{|x-x_0|<1} |f(Rx)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq RC \|f(Rx)\|_E \leq C \|f\|_E$$

grâce à l'invariance par dilatation.

2) Pour tout p tel que $1 \leq p \leq 3$ on a :

$$\forall \lambda > 0 \quad \|\lambda f(\lambda x)\|_{\dot{M}_{p,3}} = \|f\|_{\dot{M}_{p,3}}.$$

3) Il suffit donc de prouver le théorème 1.6 C] pour E l'adhérence de \mathcal{S} dans $\dot{M}_{p,3}$.

En complète analogie avec le cas L^3 , on peut établir le lemme suivant.

Lemme 1.27

Pour toutes $\vec{u}(t) \in C\left([0, T[, (\dot{M}_{p,3})^3\right)$, $\vec{v}(t)$ telles que $t^{\frac{1}{8}}\vec{v}(t) \in C\left([0, T[, (\dot{M}_{\frac{8}{3},4})^3\right)$, $\vec{w}(t) \in C\left([0, T[, (\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty})^3\right)$, on a $\forall t < T$:

$$\|B(\vec{u}, \vec{u})(t)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \leq C \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\dot{M}_{p,3}} \right)^2 \quad (1.27)$$

$$\|B(\vec{u}, \vec{w})(t)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} + \|B(\vec{w}, \vec{u})(t)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\dot{M}_{p,3}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \quad (1.28)$$

$$\|B(\vec{v}, \vec{w})(t)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} + \|B(\vec{w}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} s^{\frac{1}{8}} \|\vec{v}(s)\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}}. \quad (1.29)$$

PREUVE : On remarque que l'opérateur $B(\vec{u}, \vec{u})$ est bien défini dans $\dot{M}_{2,3} \times \dot{M}_{2,3} \rightarrow \dot{M}_{1,\frac{3}{2}}$ car, sur l'opérateur scalaire, on a :

$$\|A(u, u)(t)\|_{\dot{M}_{1,\frac{3}{2}}} \leq C\sqrt{t} \left(\sup_{0 < s < T} \|\vec{u}(s)\|_{\dot{M}_{2,3}} \right)^2.$$

Pour montrer le point (1.27), on a que :

$$\begin{aligned} & 2^j \|\Delta_j A(u, u)(t)\|_{\dot{M}_{1,\frac{3}{2}}} \\ & \leq \int_0^t 2^j \|e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} \Omega\left(\frac{D}{2^j}\right)\|_1 \|\Delta_j u^2(s)\|_{\dot{M}_{1,\frac{3}{2}}} ds \\ & \leq \left\{ \int_0^t \inf\left(2^{2j}, \frac{2^{2j}}{(2^{2j}(t-s))^2}\right) ds \right\} \left(\sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{\dot{M}_{2,3}} \right)^2 \\ & \leq C \left(\sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{\dot{M}_{2,3}} \right)^2 \end{aligned}$$

et on conclut grâce à l'inclusion (1.24) $\dot{B}_{1,\frac{3}{2}}^{1,\infty} \subset \dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}$. Pour le point (1.28) on a :

$$2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j A(u, w)(t)\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} \leq \int_0^t \inf\left(2^j, \frac{2^j}{(2^j(t-s))^2}\right) 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j(uw)(s)\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} ds.$$

À l'aide du paraproduit on verra que :

$$2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j(uw)\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} \leq C 2^j \|u\|_{\dot{M}_{p,3}} \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \quad (1.30)$$

donc

$$2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j A(u, w)(t)\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|u(s)\|_{\dot{M}_{p,3}} \sup_{0 < s < t} \|w(s)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}}.$$

Pour montrer (1.30) on rappelle que :

$$\begin{aligned} \Delta_j(uw) &= \\ &= \Delta_j \left(\sum_{|l-j| \leq 2} \Delta_l w S_{l-2} u \right) + \Delta_j \left(\sum_{|l-j| \leq 2} \Delta_l u S_{l-2} w \right) + \Delta_j \left(\sum_{l \geq j-3} \Delta_l w \sum_{\epsilon=-2}^2 \Delta_{l+\epsilon} u \right) \\ &= \alpha_j + \beta_j + \gamma_j \end{aligned}$$

Pour α_j on écrit :

$$\begin{aligned} 2^{\frac{j}{2}} \|\alpha_j\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} &\leq C 2^{\frac{j}{2}} \sum_{|l-j| \leq 2} \|\Delta_l w\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} \sum_{k < l-2} \|\Delta_k u\|_{L^\infty} \\ &\leq C \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} 2^{\frac{j}{2}} 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{k \leq j} 2^k \|u\|_{\dot{M}_{2,3}} \\ &\leq C 2^j \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \|u\|_{\dot{M}_{2,3}} \end{aligned}$$

grâce à (1.23).

Pour β_j on a que, grâce à (1.24), $\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty} \subset \dot{B}_{4,6}^{-\frac{1}{2},\infty}$ et donc :

$$\begin{aligned} 2^{\frac{j}{2}} \|\beta_j\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} &\leq C 2^{\frac{j}{2}} \sum_{|l-j| \leq 2} \sum_{k < l-2} \|\Delta_k w\|_{\dot{M}_{4,6}} \|\Delta_l u\|_{\dot{M}_{p,3}} \\ &\leq C 2^{\frac{j}{2}} \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \|u\|_{\dot{M}_{2,3}} \sum_{k \leq j} 2^{\frac{k}{2}} \\ &\leq C 2^j \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \|u\|_{\dot{M}_{2,3}}. \end{aligned}$$

Pour γ_j on a $\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty} \subset \dot{B}_{r,\frac{3}{2}r}^{\frac{2}{r}-1,\infty}$ avec $r = \frac{p}{p-1} < 2$ et $r \geq \frac{4}{3}$, car on peut assumer $p \leq 4$, ce qui donne, grâce à (1.22), (1.23) et (1.25) :

$$\begin{aligned} 2^{\frac{j}{2}} \|\gamma_j\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} &\leq 2^{\frac{j}{2}} \|\gamma_j\|_{\dot{M}_{2(1-\frac{2}{3p}),2}} \\ &\leq C 2^{\frac{j}{2}} \|\gamma_j\|_{\dot{M}_{1,\frac{1}{1-\frac{2}{3p}}}} 2^{3j(1-\frac{2}{3p})} \left(1 - \frac{1}{2(1-\frac{2}{3p})}\right) \\ &\leq C 2^{-j} 2^{3j(1-\frac{2}{3p})} \sum_{k \geq j-5} \|w\|_{\dot{B}_{r,\frac{3}{2}r}^{\frac{2}{r}-1,\infty}} 2^{k(1-\frac{2}{r})} \|u\|_{\dot{M}_{p,3}} \\ &\leq C 2^j \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \|u\|_{\dot{M}_{2,3}}. \end{aligned}$$

car $1 - \frac{2}{r} + 3 - \frac{2}{p} = 2$.

Enfin pour le point (1.29) nous allons montrer à l'aide du paraproduit l'estimation :

$$2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j(vw)\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} \leq C 2^{\frac{3}{4}j} \|v\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}} \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \quad (1.31)$$

qui donne :

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j A(v, w)(t)\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} \\ & \leq C \int_0^t \inf \left(2^j, \frac{2^j}{2^{2j}(t-s)^2} \right) 2^{\frac{j}{2}} \|\Delta_j(vw)(s)\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} ds \\ & \leq C \int_0^t 2^{\frac{7}{4}j} \frac{1}{1 + (2^{2j}(t-s))^2} \frac{1}{s^{\frac{1}{8}}} \|w(s)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} s^{\frac{1}{8}} \|v(s)\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}} ds \\ & \leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{7}{8}}} \frac{1}{s^{\frac{1}{8}}} ds \sup_{0 < s < t} \|w(s)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \sup_{0 < s < t} s^{\frac{1}{8}} \|v(s)\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}}. \end{aligned}$$

Pour montrer (1.31) il suffit de remarquer que, de manière tout à fait analogue au point (1.28), on a :

$$\begin{aligned} 2^{\frac{j}{2}} \|\alpha_j\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} & \leq C \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \sum_{k \leq j} 2^{\frac{3}{4}k} \|\Delta_k v\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}} \\ & \leq C 2^{\frac{3}{4}j} \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \|v\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}} \end{aligned}$$

grâce à (1.23).

Ensuite :

$$\begin{aligned} 2^{\frac{j}{2}} \|\beta_j\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} & \leq 2^{\frac{j}{2}} \sum_{|l-j| \leq 2} \sum_{k < l-2} \|\Delta_k w\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}} \|\Delta_l v\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}} \\ & \leq C 2^{\frac{j}{2}} \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \|v\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}} \sum_{k \leq j} 2^{\frac{k}{4}} \\ & \leq C 2^{\frac{3}{4}j} \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \|v\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}}, \end{aligned}$$

grâce à l'inclusion (1.24) $\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty} \subset \dot{B}_{\frac{8}{3},4}^{-\frac{1}{4},\infty}$ et à (1.25).

Enfin :

$$\begin{aligned} 2^{\frac{j}{2}} \|\gamma_j\|_{\dot{M}_{\frac{4}{3},2}} & \leq 2^{\frac{j}{2}} \|\gamma_j\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}} 2^{\frac{3}{4}j} \\ & \leq C 2^{\frac{5}{4}j} \sum_{k \geq j-5} \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \|v\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}} \\ & \leq C 2^{\frac{3}{4}j} \|w\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \|v\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}}. \end{aligned}$$

◆

PREUVE DU THÉORÈME: la démonstration est tout à fait similaire au cas local L^3 . Il est bon de faire quand-même une précision. Pour montrer l'unicité de la solution, on est amené à écrire la majoration suivante :

$$\|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} = \|\vec{w}(t)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} \leq \sup_{0 < s < t} \|\vec{w}(s)\|_{\dot{B}_{\frac{4}{3},2}^{\frac{1}{2},\infty}} A(t)$$

où

$$A(t) = 2 \sup_{0 < s < t} s^{\frac{1}{8}} \|e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{\dot{M}_{\frac{8}{3},4}} + \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s) - e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{\dot{M}_{p,3}} + \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s) - e^{s\Delta} \vec{u}_0\|_{\dot{M}_{p,3}}.$$

Pour affirmer que $A(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow 0$, il faut souligner que la donnée \vec{u}_0 est bien dans $E \hookrightarrow \dot{M}_{p,3}$ et que le semigroupe de la chaleur agit continûment sur E . ◆

1.8 Remarques finales

1.8.1 Sur l'existence des solutions « mild »

L'unicité des solutions pour un espace limite E a finalement été démontrée dans l'espace plus grand $\dot{M}_{p,3}$. Il pouvait en être de même pour l'existence des solutions « mild ». Nous avons toujours supposé $E \subset L_{\text{loc}}^2$ ce qui, entraîne $E \subset \dot{M}_{2,3}$. On peut donc montrer d'abord l'existence de solution « mild » dans $\dot{M}_{2,3}$ puis un résultat de propagation de la régularité initiale: si la donnée est plus précisément dans E alors la solution reste dans E .

On peut même abandonner l'hypothèse $E \subset L_{\text{loc}}^2$: elle n'intervient que pour la discussion de l'unicité des solutions dans E (car il faut alors que $\vec{u} \otimes \vec{v}$ ait un sens dans E^3). Pour l'existence, grâce aux propriétés de régularisation du noyau de la chaleur, on se ramène à des calculs dans $E \cap L^\infty$ et $\vec{u} \otimes \vec{v}$ a toujours un sens. Le cadre de l'existence de solutions « mild » est donc l'espace de Morrey–Campanato $\dot{M}_{1,3}$ [Kat92] ou l'espace de Besov $\dot{B}_{1,3/r}^{r-1,\infty}$, $0 < r < 1$ [KY94].

1.8.2 L'espace de Lorentz $L^{3,\infty}$ et l'unicité L^3

Nous avons remarqué que dans le cas d'un espace limite régulier, l'unicité dans E découlait immédiatement du fait que l'opérateur bilinéaire scalaire A est continu sur l'espace $L^\infty(\dot{B}_E^{0,\infty})$. Pour L^3 , cette démonstration ne fonctionnait pas, A n'étant pas continu sur $L^\infty(\dot{B}_3^{0,\infty})$. Cependant, Y. Meyer s'est inspiré de notre démarche pour chercher un autre espace limite B qui contienne L^3 et tel que A soit continu sur $L^\infty(B)$. Dans [Mey96], il prouve que $B = L^{3,\infty}$ convient. De plus, cette estimation n'est même pas réellement nouvelle (voir la remarque à ce sujet dans [Lem98a])!

1.8.3 Encore une démonstration de l'unicité L^3

On peut faire une démonstration plus directe (sans le paraproduit) de l'unicité L^3 . Eviter d'utiliser le paraproduit permet de sortir du cadre \mathbb{R}^3 et d'envisager le cas d'un ouvert à bord (cf. le paragraphe suivant).

Par souci de simplicité, nous nous limitons au cas des solutions globales en temps.

Comme on l'a vu, l'unicité dans $C([0, +\infty[, (L^3(\mathbb{R}^3))^3)$ des solutions « mild » de Navier-Stokes se ramène à des estimations de continuité de l'opérateur scalaire :

$$\begin{aligned} A(u, v)(t) &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \sqrt{-\Delta} uv(s) ds \\ &= \int_0^t (t-s)\Delta e^{(t-s)\Delta} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uv(s) \frac{ds}{t-s} \\ &= \int_0^t Q_{t-s} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uv(s) \frac{ds}{t-s} \end{aligned}$$

de $L^\infty(]0, +\infty[, L^3(\mathbb{R}^3)) \times L^\infty(]0, +\infty[, L^3(\mathbb{R}^3))$ dans $L^\infty(]0, +\infty[, \dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}(\mathbb{R}^3))$ et de $L^\infty(]0, +\infty[, L^3(\mathbb{R}^3)) \times L^\infty(]0, +\infty[, \dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}(\mathbb{R}^3))$ dans $L^\infty(]0, +\infty[, \dot{B}_2^{\frac{1}{2}, \infty}(\mathbb{R}^3))$.

Les mêmes résultats restent vrais dans le cas de $L^n(\mathbb{R}^n)$, quitte à choisir opportunément l'espace de Besov. Nous présentons maintenant notre nouvelle preuve en nous plaçant dans \mathbb{R}^n .

Il nous suffira en fait de remarquer que les espaces de Besov peuvent être aussi caractérisés à travers le même noyau de convolution $Q_t = t\Delta e^{t\Delta}$ qui apparaît dans l'intégrale. En effet, dans \mathbb{R}^n on a pour $s < \min(2, \frac{n}{p})$:

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s, \infty}} \simeq \sup_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j f\|_{\dot{B}_p^{s, \infty}} \simeq \sup_{t > 0} \|t\Delta e^{t\Delta} f\|_{\dot{B}_p^{s, \infty}} \simeq \sup_{t > 0} \|(t\Delta)^2 e^{t\Delta} f\|_{\dot{B}_p^{s, \infty}}.$$

Cela nous permet de ramener le problème de la bicontinuité à l'opérateur plus simple $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uv$, grâce au lemme suivant.

Lemme 1.28

Soient $T \in]0, +\infty]$ et $f(t) \in L^\infty(]0, T[, \dot{B}_{\frac{2n}{3}}^{\frac{1}{2}, \infty}(\mathbb{R}^n))$.

Alors il existe $C > 0$ (indépendant de f) tel que :

$$\left\| \int_0^t Q_{t-s} f(s) \frac{ds}{t-s} \right\|_{\dot{B}_{\frac{2n}{3}}^{\frac{1}{2}, \infty}} \leq C \sup_{0 < s < t} \|f(s)\|_{\dot{B}_{\frac{2n}{3}}^{\frac{1}{2}, \infty}}.$$

PREUVE : On évalue

$$\begin{aligned} & \sup_{\theta>0} \left\| Q_\theta \int_0^t Q_{t-s} f(s) \frac{ds}{t-s} \right\|_{\dot{B}^{\frac{1}{2},\infty}_{\frac{2n}{3}}} \\ & \leq \sup_{\theta>0} \int_0^t \frac{(t-s)\theta}{(t-s+\theta)^2} \left\| \tilde{Q}_{\theta+t-s} f(s) \right\|_{\dot{B}^{\frac{1}{2},\infty}_{\frac{2n}{3}}} \frac{ds}{t-s} \end{aligned}$$

où $\tilde{Q}_{\theta+t-s} f(s) = (\theta+t-s)^2 \Delta^2 e^{(\theta+t-s)\Delta} f(s)$.

Grâce à l'équivalence des normes on majore par :

$$\begin{aligned} & \left(\sup_{\theta>0} \int_0^t \frac{\theta}{(t-s+\theta)^2} ds \right) \sup_{0<s<t} \|f(s)\|_{\dot{B}^{\frac{1}{2},\infty}_{\frac{2n}{3}}} \\ & \leq C \sup_{\theta>0} \frac{t}{t+\theta} \sup_{0<s<t} \|f(s)\|_{\dot{B}^{\frac{1}{2},\infty}_{\frac{2n}{3}}} \\ & \leq C \sup_{0<s<t} \|f(s)\|_{\dot{B}^{\frac{1}{2},\infty}_{\frac{2n}{3}}}. \end{aligned}$$

◆

Pour terminer, il ne nous reste qu'à établir les bicontinuités souhaitées pour l'opérateur $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uv$.

Lemme 1.29

Il existe un $C > 0$ tel que $\forall u, v \in L^n(\mathbb{R}^n)$, $\forall w \in \dot{B}^{\frac{1}{2},\infty}_{\frac{2n}{3}}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uv \right\|_{\dot{B}^{\frac{1}{2},\infty}_{\frac{2n}{3}}} \leq C \|u\|_{L^n} \|v\|_{L^n} \quad (1.32)$$

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uw \right\|_{\dot{B}^{\frac{1}{2},\infty}_{\frac{2n}{3}}} \leq C \|u\|_{L^n} \|w\|_{\dot{B}^{\frac{1}{2},\infty}_{\frac{2n}{3}}} \quad (1.33)$$

PREUVE : Pour montrer l'inégalité (1.32) on observe que si $u, v \in L^n(\mathbb{R}^n)$ alors $uv \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ et aussi $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uv \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^{0,\infty}_{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Donc $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uv \in \dot{B}^{1,\infty}_{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \subset \dot{B}^{s,\infty}_q(\mathbb{R}^n)$ pour $\frac{n}{2} \leq q$ et $s = \frac{n}{q} - 1$.

Pour (1.33), on vérifie immédiatement que, pour $\frac{n}{n-1} < p < n$, $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}$ est continu de $L^n(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et de $L^n(\mathbb{R}^n) \times \dot{H}^1_p(\mathbb{R}^n)$ dans $\dot{H}^1_p(\mathbb{R}^n)$, d'où, en interpolant, de $L^n(\mathbb{R}^n) \times [L^p(\mathbb{R}^n), \dot{H}^1_p(\mathbb{R}^n)]_{s,\infty}$ dans $[L^p(\mathbb{R}^n), \dot{H}^1_p(\mathbb{R}^n)]_{s,\infty} = \dot{B}^{s,\infty}_p(\mathbb{R}^n)$ pour $0 < s < 1$ ([BL76]).

En effet, la multiplication par $u \in L^n(\mathbb{R}^n)$ envoie $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ pour $\frac{n}{n+1} \leq p \leq +\infty$ (Hölder) et $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}$ envoie $L^r(\mathbb{R}^n)$ dans $L^t(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{1}{t} = \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$ pour $1 < r < n$ (Sobolev). La continuité de $v \mapsto \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} uv$ et $v \mapsto u \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} v$ sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ est donc immédiate.

◆

1.8.4 Le cas des ouverts à bord

Que se passe-t-il si l'on considère le problème de l'unicité L^n pour des solutions de l'équation de Navier-Stokes sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$? (On cherche des solutions nulles sur le bord $\partial\Omega$).

Si Ω est borné, une donnée L^n est L^2 et l'on pourra utiliser le théorème de Von Wahl [Wah85] pour conclure que les solutions de Leray coïncident avec la solution $C([0, T[, (L^n)^n)$ de sorte que l'unicité est immédiate. Dans l'esprit du théorème de Von Wahl on rappelle aussi le résultat d'unicité dans le tore prouvé par I. Gallagher [Gal97].

Dans le cas d'un domaine extérieur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, N. Depauw [Dep98] a utilisé nos méthodes pour montrer l'unicité dans $L^n(\Omega)$ pour $n > 3$.

• Compléments au chapitre 1

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction à la thèse, deux nouveaux résultats complètent ceux exposés dans le premier chapitre. Nous en reproduisons ici les énoncés, en renvoyant aux documents originaux pour une démonstration.

D'abord, P. G. Lemarié–Rieusset [Lem] a étendu le théorème d'équivalence 1.4 à un cadre plus général, comprenant aussi les solutions de Koch et Tataru dont il sera question dans le chapitre suivant.

Proposition 1.30 (Lemarié–Rieusset)

Soit $\vec{u} \in L^2_{\text{uloc},x} L^2_t ([0, T[\times \mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire $\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \left\{ \int_0^T \int_{|x-x_0| \leq 1} |\vec{u}(t, x)|^2 dx dt \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty$.

On a alors les résultats suivants :

1. le terme $\mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}$ est bien défini dans $\mathcal{D}'([0, T[\times \mathbb{R}^3)$ et il existe $p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} = \vec{\nabla} p$;
2. si \vec{u} vérifie dans \mathcal{D}'

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \end{cases} \quad (1.34)$$

alors elle vérifie aussi :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} - \vec{\nabla} p \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \end{cases} \quad (1.35)$$

Inversement, si de plus \vec{u} vérifie $\lim_{|x_0| \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{|x-x_0| \leq 1} |\vec{u}(t, x)|^2 dx dt = 0$ et si elle est solution de (1.35), alors elle est aussi solution de (1.34) ;

3. si \vec{u} est solution de (1.34), alors il existe $\vec{u}_0 \in \mathcal{S}'$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et que

$$\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds.$$

Ensuite, R. May [May] a étendu la classe d'unicité pour les espaces limites. En effet, il a considéré l'espace des multiplicateurs singuliers X^1 que nous décrirons plus en détail dans le chapitre suivant (voir paragraphe 2.2.1). Il s'agit fondamentalement d'un espace de Banach de fonctions de L^2_{loc} qui envoie par multiplication l'espace de Sobolev H^1 dans l'espace L^2 ; sa norme peut être définie par

$$\|f\|_{X^1} = \sup_{\|\phi\|_{H^1} \leq 1} \|f\phi\|_{L^2}.$$

C'est un espace non séparable, contenant L^∞ , qui contient tous les espaces de Morrey–Campanato $M_{p,3}$ pour $p > 2$ mais qui est contenu dans $M_{2,3}$ (voir les inclusions (2.6), (2.7) et (2.9)). Voici le résultat démontré par May, où on note par X_0^1 l'adhérence de la classe de Schwartz dans X^1 .

Théorème 1.31 (May)

Soient \vec{u} et $\vec{v} \in C([0, T[, X_0^1)$ deux solutions des équations de Navier–Stokes associées à la même donnée initiale \vec{u}_0 . Alors $\vec{u}(t) = \vec{v}(t)$ pour tout $t \in]0, T[$.

Chapitre 2

Le théorème d'existence de Kato

2.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre le théorème de T. Kato [Kat84] d'*existence* de solutions faibles des équations de Navier–Stokes dans un contexte fonctionnel assez général. Rappelons pour commencer le théorème original dans une version un peu simplifiée.

Étant donné une fonction $\vec{u}_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, il s'agit de démontrer l'existence d'une solution des équations de Navier–Stokes dans l'espace des trajectoires continues à valeurs dans L^3 , ayant \vec{u}_0 pour donnée initiale. À la différence des espaces sur-critiques L^p avec $p > 3$, l'opérateur intégral

$$B(\vec{u}, \vec{v})(t) = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) ds$$

n'est pas bicontinu sur l'espace $\mathcal{E} = C([0, T[, L^3)$ pour $0 < T \leq +\infty$ [Oru98], et donc on est dans l'impossibilité d'appliquer un théorème des contractions à la transformation

$$F(\vec{u})(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds$$

dans l'espace \mathcal{E} . À la suite des travaux de F. B. Weissler [Wei81], T. Kato avait alors introduit l'espace « auxiliaire » $\mathcal{E} \cap \{\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty), \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0\}$ en utilisant l'une des nombreuses bonnes propriétés vérifiées par la tendance de la solution $\vec{U}_0(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0$. Dans ce cadre plus contraignant, il avait pu démontrer la bicontinuité de $B(\vec{u}, \vec{v})$ et donc l'existence d'une solution.

À présent, on sait que le choix de T. Kato n'est pas du tout restrictif et ceci grâce au théorème d'unicité des solutions dans $C([0, T], L^3)$ (théorème 1.2) et au théorème de régularité des solutions dans $C([0, T], L^3)$ démontré de façon indépendante par P. G. Lemarié–Rieusset [Lem98b] et R. May [May], qui permettent de conclure que *toute* solution $\vec{u}(t) \in C([0, T], L^3)$ vérifie aussi que $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty)$. Nous soulignons le fait que

dès qu'une solution faible $\vec{u}(t, x)$ des équations de Navier–Stokes est bornée (et la condition $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty)$ garantit cela en dehors de $t = 0$), un théorème de J. Serrin [Ser62] permet de conclure que $\vec{u}(t, x) \in C_{t,x}^\infty$ et donc il s'agit bien là d'une solution classique.

Diverses généralisations du théorème de Kato ont été proposées ([AT99], [Mey96], [Che99]); nous avons ici essayé d'exploiter à fond la condition plus contraignante $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty)$ en montrant qu'elle permet en effet de garantir l'existence d'une solution faible des équations de Navier–Stokes dans $C([0, T], X)$, où X appartient à un cadre fonctionnel assez large. Nous avons examiné la cas où X est un espace, sur-critique ou critique, régulier ou singulier.

Dans le cas des espaces réguliers sur-critiques (le terme bilinéaire $B(\vec{u}, \vec{v})$ est bicontinu sur $C([0, T], X)$, et même sur $C([0, T], \dot{B}_X^{0,1})$ comme on peut le voir dans [Can95]) ou critiques (« limites réguliers » et « limites » suivant les définitions 1.18 et 1.5 du chapitre 1) le théorème démontré (2.20) s'interprète plutôt comme un théorème de régularité des solutions, grâce à l'unicité dans l'espace $C([0, T], X)$. Dans le cas des espaces critiques nous avons en particulier étendu ici le résultat d'existence aux espaces *non homogènes* qui n'étaient pas compris dans le théorème 1.6 et qui n'avaient été considérés que marginalement par d'autres auteurs, dont l'intérêt avait été focalisé sur les espaces homogènes, à norme invariante par rapport à la transformation $f \mapsto f_\lambda = \lambda f(\lambda \cdot)$.

Dans le cas des espaces singuliers (non contenus dans L_{loc}^2), la condition $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty)$ définissant dans \mathcal{S}' le terme $\vec{u} \otimes \vec{u}$, permet elle-même de traiter l'existence de solutions, alors que la question de l'unicité ne peut pas se poser. Le cas que nous avons considéré d'abord est celui d'un espace de Besov généralisé à indice de régularité s négatif (théorème 2.21); la caractérisation à l'aide du semi-groupe de la chaleur permet de traduire immédiatement le fait que la donnée initiale \vec{u}_0 se trouve dans un espace de Besov B en l'appartenance de la tendance $e^{t\Delta} \vec{u}_0$ à un espace du type $L^q(]0, T[, L^p)$ (où L^p peut être remplacé par d'autres espaces fonctionnels). Nous avons alors montré (lemme 2.22) que, sous la condition $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty)$, il est tout à fait équivalent de résoudre les équations de Navier–Stokes dans cet espace « $L^q(]0, T[, L^p)$ » ou bien dans $C([0, T], B)$.

Ensuite, nous proposons une autre formulation du théorème d'existence des solutions de Kato dans le cas d'espaces réguliers (critiques et sur-critiques), comme théorème de persistance de la régularité des solutions de Koch et Tataru (théorème 2.29); ce résultat a été obtenu en collaboration avec P. G. Lemarié–Rieusset. Nous avons obtenu en particulier que le temps de vie de la solution ne dépend que de la norme de la donnée initiale dans l'espace singulier ∇bmo .

Dans la dernière partie du chapitre, nous traitons le cas des espaces de Besov à indice de régularité $s = 0$ par deux voies, l'une constructive (théorème 2.30) suivant une adaptation due à Y. Meyer et M. A. Muschietti du théorème de Kato et l'autre comme théorème de persistance de la régularité (théorème 2.31).

Avant d'entamer l'analyse, quelques remarques de rédaction. Tout en conservant la notation vectorielle \vec{u} pour une solution des équations de Navier–Stokes, nous écrirons $\vec{u} \in X$ plutôt que $\vec{u} \in X^3$ et nous laisserons sous-entendu l'espace des variables, qui sera toujours \mathbb{R}^3 , sauf mention explicite. De plus, toute constante C apparaissant sans autre précision sera susceptible de varier d'une ligne à l'autre.

2.2 Le cadre fonctionnel général

Introduisons les hypothèses de base sur les espaces considérés. Nous noterons par \mathcal{D} l'espace des fonctions C^∞ à support compact, par \mathcal{S} la classe de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide, par $\overline{\mathcal{S}}^X$ la fermeture dans l'espace X de la classe de Schwartz, par \mathcal{S}' l'espace des distributions tempérées et par \mathcal{S}'_0 l'espace des distributions nulles à l'infini défini dans le paragraphe 1.2 (définition 1.8); par $A \hookrightarrow B$ nous indiquerons enfin que l'injection de A dans B est continue.

Définition 2.1 (espace de Kato)

Soit E un espace de Banach de fonctions tel que :

- a) $\mathcal{S} \hookrightarrow E \hookrightarrow \mathcal{S}'$
- b) $\overline{\mathcal{S}}^E = E$
- c) $\forall x_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \|f(x + x_0)\|_E = \|f(x)\|_E$
- d) $E \hookrightarrow B_\infty^{-1, \infty}$.

Nous appellerons dans la suite espace de Kato tout espace vérifiant les conditions de a) à d).

Pour faire des commentaires sur ces propriétés et notamment sur la dernière $E \hookrightarrow B_\infty^{-1, \infty}$, il convient de rappeler la définition d'espace de Besov. Nous recourons, comme ce sera le cas tout au long de cette thèse, à une décomposition de Littlewood–Paley; on pourra en trouver une introduction, ainsi qu'une description plus détaillée des espaces de Besov homogènes, dans le paragraphe 1.2 du chapitre 1. Des références classiques sur l'argument sont [Tri83], [FJW91], [Pee76] et [BL76]. Nous considérons ici le cas général d'espace de Besov sur un espace de Banach E quelconque.

Définition 2.2

Si E est un espace de Banach dont la norme est invariante par translation, on définit pour $s \in]-\infty, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$ l'espace de Besov $B_E^{s, q}$ de la façon suivante :

$$B_E^{s, q} = \{f \in \mathcal{S}' : S_0 f \in E \text{ et } 2^{js} \|\Delta_j f\|_E \in l^q(\mathbb{N})\}.$$

Pour $s \in]-\infty, +\infty[$, $q \in [1, +\infty]$ on définit l'espace de Besov homogène $\dot{B}_E^{s, q}$ de la façon suivante :

$$\dot{B}_E^{s, q} = \{f \in \mathcal{S}'/\mathcal{C}[X] : 2^{js} \|\Delta_j f\|_E \in l^q(\mathbb{Z})\}.$$

Il s'agit d'espaces de Banach normés respectivement par :

$$\|f\|_{\mathbf{B}_E^{s,q}} = \|S_0 f\|_E + \left\{ \sum_{j \geq 0} (2^{js} \|\Delta_j f\|_E)^q \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\|f\|_{\dot{\mathbf{B}}_E^{s,q}} = \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{js} \|\Delta_j f\|_E)^q \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Dans le cas des espaces homogènes nous avons commis un abus de notation, en écrivant $\|f\|_{\dot{\mathbf{B}}_E^{s,q}}$ même si f est une classe d'équivalence de distributions. Nous rappelons cependant que, si $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f \stackrel{\mathcal{S}'}{=} f$ (ce que nous avons indiqué dans le chapitre 1 par « $f \in \mathcal{S}'_0$ »), on peut injecter l'espace $\dot{\mathbf{B}}_E^{s,q}$ dans \mathcal{S}' en choisissant le représentant de f donné par $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f$.

On peut démontrer les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_E^{s,q} &\subseteq \mathbf{B}_E^{s',q} & s' &\leq s, \\ \mathbf{B}_E^{s,q} &\subseteq \mathbf{B}_E^{s,q'} & q' &\geq q, \end{aligned} \quad (2.1)$$

(l'inclusion (2.1) est aussi valable pour les espaces homogènes correspondants). Nous soulignons aussi les inclusions entre espaces homogènes et non homogènes :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_E^{s,q} &\subseteq \dot{\mathbf{B}}_E^{s,q} & s &> 0 \\ \dot{\mathbf{B}}_E^{s,q} &\subseteq \mathbf{B}_E^{s,q} & s &< 0. \end{aligned}$$

Nous utiliserons également une définition équivalente des espaces de Besov, obtenue à l'aide du semi-groupe de la chaleur $e^{t\Delta}$.

Proposition 2.3 (définition équivalente)

Soient $\alpha \geq 0$, $s < \alpha$, $T > 0$. Alors, il existe $C_T > 0$ tel que :

$$\mathbf{B}_E^{s,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : e^{T\Delta} f \in E \quad \text{et} \quad \left\{ \int_0^T \left(t^{-\frac{s}{2}} \left\| (\sqrt{t})^\alpha (\sqrt{-\Delta})^\alpha e^{t\Delta} f \right\|_E \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq C_T \right\}. \quad (2.2)$$

Pour une démonstration de l'équivalence des normes voir [Lem]. Remarquons que si $s < 0$ on peut choisir $\alpha = 0$ et, dans ce cas, si $f \in \mathbf{B}_E^{s,q} \setminus \dot{\mathbf{B}}_E^{s,q}$, alors $\lim_{T \rightarrow +\infty} C_T = +\infty$. Toujours pour $s < 0$, on peut caractériser les espaces de Besov à l'aide des seuls opérateurs S_j . On a en effet :

$$\mathbf{B}_E^{s,q} = \{ f \in \mathcal{S}' : 2^{js} \|S_j f\|_E \in l^q(\mathbb{N}) \} \quad s < 0.$$

De plus, on peut facilement démontrer que, pour tout $s < 0$ et $T > 0$:

$$B_E^{s,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : t^{-\frac{s}{2}} \|e^{t\Delta} f\|_E \in L^q \left(]0, T[, \frac{dt}{t} \right) \right\}. \quad (2.3)$$

Si $E = L^p$ on écrit plutôt $B_p^{s,q}$, $\dot{B}_p^{s,q}$ et on peut aussi définir les espaces de Triebel–Lizorkin $F_p^{s,q}$, $\dot{F}_p^{s,q}$ comme suit (voir aussi paragraphe 1.2).

Définition 2.4

Pour $s \in]-\infty, +\infty[$, $q \in [1, +\infty[$, $p \in [1, +\infty[$ on définit l'espace de Triebel–Lizorkin $F_p^{s,q}$ de la façon suivante :

$$F_p^{s,q} = \{ f \in \mathcal{S}' : S_0 f \in L^p \text{ et } \| |2^{js}| \Delta_j f(\cdot) \|_{l^q(\mathbb{N})} \in L^p \}.$$

On définit également l'espace de Triebel–Lizorkin homogène par :

$$\dot{F}_p^{s,q} = \{ f \in \mathcal{S}' / \mathbb{C}[X] : \| |2^{js}| \Delta_j f(\cdot) \|_{l^q(\mathbb{Z})} \in L^p \}.$$

Pour $p = +\infty$ la définition de l'espace $F_\infty^{s,q}$ se fait plutôt à l'aide des mesures de Carleson, comme on le verra plus en détail dans le paragraphe 2.5.1.

On a les inclusions suivantes entre espaces de Besov et de Triebel–Lizorkin :

$$\begin{aligned} B_p^{s,q} &\subseteq F_p^{s,q} & q &\leq p \\ F_p^{s,q} &\subseteq B_p^{s,q} & p &\leq q, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour les espaces homogènes correspondants. Finissons par les injections de Sobolev (valables aussi pour les espaces homogènes) :

Proposition 2.5 (injections de Sobolev)

Soient $-\infty < s' \leq s < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$. On a :

$$\begin{aligned} B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) &\subseteq B_{p'}^{s',q}(\mathbb{R}^n) & 1 \leq p, p' \leq +\infty, & s - \frac{n}{p} = s' - \frac{n}{p'} \\ F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) &\subseteq F_{p'}^{s',q}(\mathbb{R}^n) & 1 < p, p' < +\infty, & s - \frac{n}{p} = s' - \frac{n}{p'}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant faire quelques remarques sur les conditions de a) à d) de la définition d'espace de Kato 2.1. Tout d'abord, les conditions b) et c) assurent que $E \hookrightarrow \mathcal{S}'_0$ et donc qu'on peut reconstruire toute fonction $f \in E$ à partir d'une décomposition homogène de Littlewood–Paley (voir lemme 1.9). La condition de densité des fonctions de test dans E n'est pas vraiment indispensable, mais elle nous évitera dans certaines

situations le manque de continuité forte du noyau de la chaleur sur l'espace E considéré et nous permettra d'étendre à l'espace E tout entier les bonnes propriétés vérifiées par les fonctions de test. La condition c) permet d'établir la continuité sur E des opérateurs de convolution dont le noyau est dans L^1 ; à ce propos on a le lemme suivant dont on peut trouver une démonstration dans [Lem].

Lemme 2.6

Soit E est un espace de Banach tel que $\mathcal{S} \hookrightarrow E \hookrightarrow \mathcal{S}'$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \|f(x + x_0)\|_E = \|f\|_E$, $\overline{\mathcal{S}}^E = E$ ou bien $E = F'$ (l'espace dual de F) et $\overline{\mathcal{S}}^F = F$; alors, pour tout $g \in L^1$, on a :

$$\|g * f\|_E \leq \|g\|_{L^1} \|f\|_E.$$

Venons-en à la condition $E \hookrightarrow B_{\infty}^{-1,\infty}$. Grâce à la caractérisation (2.3) on a, pour tout $T > 0$:

$$f \in B_{\infty}^{-1,\infty} \Leftrightarrow \sqrt{t} e^{t\Delta} f \in L^{\infty}([0, T[, L^{\infty}).$$

On peut par ailleurs préciser que, grâce à la densité de \mathcal{S} dans E , on a de plus que $e^{t\Delta} f \in C_0$ (l'espace des fonctions continues, nulles à l'infini) pour tout $t > 0$.

Il est facile de faire le lien avec le théorème d'existence de Kato. Il s'agira en effet, pour une donnée initiale $\vec{u}_0 \in E$ avec $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, de trouver une solution des équations de Navier–Stokes dans un sous-espace de $C([0, T], E)$ vérifiant $\sqrt{t} u(t) \in L^{\infty}([0, T[, L^{\infty})$. Il est donc capital que cette condition soit vraie pour la tendance $e^{t\Delta} \vec{u}_0$, d'où la condition d).

2.2.1 Exemples

Nous présentons ici les espaces concernés par cette approche. Nous traiterons le cas des espaces de Lebesgue, de Lorentz, de Besov et de Triebel–Lizorkin, de Morrey–Campanato et des multiplicateurs singuliers X_r . Nous commençons par un lemme.

Lemme 2.7

Soit E un espace de Banach vérifiant $\mathcal{S} \hookrightarrow E \hookrightarrow \mathcal{S}'$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \|f(x + x_0)\|_E = \|f\|_E$ et tel que $\sup_{0 < \lambda \leq 1} \lambda^r \|f(\lambda x)\|_E \leq C \|f\|_E$ avec $r \in \mathbb{R}$; alors $E \hookrightarrow B_{\infty}^{-r,\infty}$. On a aussi que, si $\sup_{\lambda > 0} \lambda^r \|f(\lambda x)\|_E \leq C \|f\|_E$ avec $r \in \mathbb{R}$, alors $E \hookrightarrow \dot{B}_{\infty}^{-r,\infty}$.

PREUVE : Supposons d'abord $\sup_{0 < \lambda \leq 1} \lambda^r \|f(\lambda x)\|_E \leq C \|f\|_E$ avec $r \in \mathbb{R}$. Par une décomposition de Littlewood–Paley on a, en notant $S_0 f = \phi * f$:

$$\begin{aligned} \|S_0 f\|_{L^{\infty}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \phi(y) f(x - y) dy \right| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \|\phi\|_{E'} \|f(x - \cdot)\|_E \\ &\leq \|\phi\|_{E'} \|f\|_E. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $j \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} 2^{-jr} \|\Delta_j f\|_{L^\infty} &= 2^{-jr} \left\| \Delta_0 f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right)(2^j x) \right\|_{L^\infty} \\ &= 2^{-jr} \left\| \Delta_0 f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right) \right\|_{L^\infty} \leq C 2^{-jr} \left\| f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right) \right\|_{\mathbb{E}} \\ &\leq C \|f\|_{\mathbb{E}}. \end{aligned}$$

La démonstration dans le cas $\sup_{\lambda>0} \lambda^r \|f(\lambda x)\|_{\mathbb{E}} \leq C \|f\|_{\mathbb{E}}$ avec $r \in \mathbb{R}$ est identique. \blacklozenge

En corollaire on obtient donc quels sont les espaces de Lebesgue qui sont espaces « de Kato ».

Corollaire 2.8

Pour tout $p \geq 3$ on a $L^p \subset \dot{B}_\infty^{-\frac{3}{p}, \infty} \subset B_\infty^{-\frac{3}{p}, \infty} \subset B_\infty^{-1, \infty}$. En particulier, $L^3 \subset \dot{B}_\infty^{-1, \infty}$.

Les espaces de Morrey–Campanato

Nous rappelons d'abord les définitions (voir aussi le paragraphe 1.7 du chapitre 1 et [Tay92], [Kat92]).

Définition 2.9

Pour tous p, q tels que $1 < p \leq q \leq +\infty$ on définit l'espace de Morrey–Campanato $M_{p,q}$ de la façon suivante :

$$M_{p,q} = \{f \in L^p_{\text{uloc}} : \|f\|_{M_{p,q}} = \sup_{0 < R \leq 1} R^{\frac{3}{q}} \|f(Rx)\|_{L^p_{\text{uloc}}} < +\infty\},$$

$$\text{où } \|g\|_{L^p_{\text{uloc}}} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \left\{ \int_{|x-x_0| \leq 1} |g(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

On définit également l'espace de Morrey–Campanato homogène $\dot{M}_{p,q}$ de la façon suivante :

$$\dot{M}_{p,q} = \{f \in L^p_{\text{uloc}} : \|f\|_{\dot{M}_{p,q}} = \sup_{R > 0} R^{\frac{3}{q}} \|f(Rx)\|_{L^p_{\text{uloc}}} < +\infty\}.$$

Pour $p = 1$ et $q \geq 1$ on pose

$$M_{1,q} = \{f \in \mathcal{M}_B : \|f\|_{M_{1,q}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 < R \leq 1} R^{\frac{3}{q}-3} \int_{B(x,R)} d|f| < +\infty\}$$

et

$$\dot{M}_{1,q} = \{f \in \mathcal{M}_B : \|f\|_{\dot{M}_{1,q}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sup_{R > 0} R^{\frac{3}{q}-3} \int_{B(x,R)} d|f| < +\infty\},$$

où \mathcal{M}_B est l'espace des mesures de Borel localement bornées et $B(x, R)$ est la boule de \mathbb{R}^3 de centre x et de rayon R .

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \|f(\lambda x)\|_{M_{p,q}} &= \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{q}}} \|f\|_{M_{p,q}} & 0 < \lambda \leq 1 \\ \|f(\lambda x)\|_{\dot{M}_{p,q}} &= \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{q}}} \|f\|_{\dot{M}_{p,q}} & \lambda > 0. \end{aligned}$$

On a donc en corollaire :

Corollaire 2.10

Pour tout $q \geq 3$, pour tout p tel que $1 \leq p \leq q$, on a $M_{p,q} \subset B_{\infty}^{-\frac{3}{q},\infty} \subset B_{\infty}^{-1,\infty}$. De plus, pour tout $p \in [1, 3]$ on a $\dot{M}_{p,3} \subset \dot{B}_{\infty}^{-1,\infty} \subset B_{\infty}^{-1,\infty}$.

Nous soulignons aussi les inclusions évidentes : $\dot{M}_{p,q} \subset M_{p,q}$, $M_{p,q} \subset M_{p',q}$ si $p' < p$ (et aussi $\dot{M}_{p,q} \subset \dot{M}_{p',q}$), $M_{p,q_1} \subset M_{p,q_2}$ si $q_2 < q_1$ et $L^q = \dot{M}_{q,q} \subset \dot{M}_{p,q}$ pour $p \leq q$. Les fonctions de la classe de Schwartz ne sont pas denses dans $M_{p,q}$ et $\dot{M}_{p,q}$. En effet on a, pour tout $\phi \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \lim_{|x_0| \rightarrow +\infty} \sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \left\{ \int_{|x-x_0| \leq R} |\phi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} &= 0 \quad \forall p \leq q \\ \lim_{R \rightarrow 0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \left\{ \int_{|x-x_0| \leq R} |\phi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} &= 0 \quad \forall p \leq q \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \left\{ \int_{|x-x_0| \leq R} |\phi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} &= 0 \quad \forall p < q. \end{aligned}$$

Il est facile de démontrer les inégalités de Hölder suivantes (valables aussi pour les espaces homogènes) :

Proposition 2.11 (inégalités de Hölder)

Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{t} = \frac{1}{w}$, alors

$$M_{p,q} \cdot M_{r,t} \subseteq M_{s,w}.$$

Les espaces de Besov et de Triebel–Lizorkin

Nous en avons déjà donné les définitions. Nous soulignons seulement les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned}
B_p^{s,q} &\subseteq B_\infty^{s-\frac{3}{p},\infty} \subseteq B_\infty^{-1,\infty} & p, q \in [1, +\infty] \text{ et } s \geq \frac{3}{p} - 1 \\
F_p^{s,q} &\subseteq B_\infty^{s-\frac{3}{p},\infty} \subseteq B_\infty^{-1,\infty} & p \in [1, +\infty[, q \in [1, +\infty] \text{ et } s \geq \frac{3}{p} - 1 \\
\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,q} &\subseteq \dot{B}_\infty^{-1,\infty} & p, q \in [1, +\infty] \\
\dot{F}_p^{\frac{3}{p}-1,q} &\subseteq \dot{B}_\infty^{-1,\infty} & p \in [1, +\infty[, q \in [1, +\infty]
\end{aligned}$$

Les espaces de Lorentz

Nous présentons les espaces de Lorentz comme étant les interpolés réels des espaces L^1 et L^∞ . Pour un exposé détaillé sur la théorie de l'interpolation, nous renvoyons à [BL76], [Lem].

Définition 2.12

Pour $p \in]1, +\infty[, q \in [1, +\infty]$ on définit l'espace de Lorentz $L^{p,q}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
L^{p,q} &= [L^1, L^\infty]_{1-\frac{1}{p},q} \\
&= \left\{ f \in L^1 + L^\infty : f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j \quad \text{où } f_j \in L^1 \cap L^\infty \text{ et } \begin{cases} 2^{-j(1-\frac{1}{p})} \|f_j\|_{L^1} \in l^q(\mathbb{Z}) \\ 2^{j\frac{1}{p}} \|f_j\|_{L^\infty} \in l^q(\mathbb{Z}) \end{cases} \right\}.
\end{aligned}$$

C'est un espace de Banach, normé par :

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \inf_{f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j} \max \left(\left\| 2^{-j(1-\frac{1}{p})} \|f_j\|_{L^1} \right\|_{l^q(\mathbb{Z})}, \left\| 2^{j\frac{1}{p}} \|f_j\|_{L^\infty} \right\|_{l^q(\mathbb{Z})} \right).$$

On a donc, de façon équivalente :

$$L^{p,q} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j \quad \text{où } \|f_j\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|f_j\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{p}} \in l^q(\mathbb{Z}) \right\}$$

et, par conséquent,

$$L^{p,q} \subseteq \left\{ f \in \mathcal{S}' : f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j \quad \text{où } \|f_j\|_{L^p} \in l^q(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Cette dernière inclusion montre que $L^{p,p} \subseteq L^p$, pourvu qu'on puisse choisir les f_j à supports disjoints, ce qui est en effet possible, comme on peut voir dans [Lem]. D'autre part, on a aussi l'inclusion inverse $L^p \subseteq L^{p,p}$ [Lem], d'où $L^{p,p} = L^p$.

Les inclusions suivantes sont conséquence directe de la définition :

$$L^{p,1} \subset L^{p,q_1} \subset L^{p,p} \subset L^{p,q_2} \subset L^{p,\infty} \quad 1 \leq q_1 \leq p \leq q_2 \leq \infty$$

et aussi l'homogénéité de la norme :

$$\|f(\lambda x)\|_{L^{p,q}} = \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{p}}} \|f\|_{L^{p,q}}, \quad 1 < p < +\infty, \quad 1 \leq q \leq +\infty, \quad \lambda > 0$$

d'où

$$\forall p \geq 3 \quad L^{p,q} \subset \dot{B}_{\infty}^{-\frac{3}{p},\infty} \subset B_{\infty}^{-1,\infty}.$$

Les espaces de Lorentz sont étroitement liés aux espaces de Lebesgue faibles. Voyons comment.

Définition 2.13

Pour tout $p \in]1, +\infty[$ on définit l'espace de Lebesgue faible $L^{p,*}$ de la façon suivante :

$$L^{p,*} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \forall \lambda > 0 \quad |\{x \in \mathbb{R}^3 : |f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \right\}.$$

où on a indiqué par $|\cdot|$ la mesure de Lebesgue.

On a alors :

Proposition 2.14

Pour tout $p \in]1, +\infty[$ $L^{p,\infty} = L^{p,*}$.

PREUVE : Supposons $f \in L^{p,\infty}$; on a $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$ avec $2^{-\frac{j}{p}} \|f_j\|_{L^1} \leq C$ (où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) et $2^{\frac{j}{p}} \|f_j\|_{L^\infty} \leq C$. Si pour tout $j_0 \in \mathbb{Z}$ on définit $g = \sum_{j \leq j_0} f_j$ et $h = \sum_{j > j_0} f_j$ on obtient $\|g\|_{L^1} \leq C \sum_{j \leq j_0} 2^{\frac{j}{p'}} \leq C 2^{\frac{j_0}{p'}}$ et $\|h\|_{L^\infty} \leq C \sum_{j > j_0} 2^{-\frac{j}{p}} \leq C 2^{-\frac{j_0}{p}}$. Il faut montrer que $|\{x \in \mathbb{R}^3 : |f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p}$ pour tout $\lambda > 0$. Il s'agit simplement de bien couper f en $g + h$ en choisissant j_0 tel que $C 2^{-\frac{j_0}{p}} \simeq \frac{\lambda}{2}$. En effet, si $\|h\|_{L^\infty} \leq \frac{\lambda}{2}$, alors

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^3 : |f(x)| > \lambda\}| &\leq |\{x \in \mathbb{R}^3 : |g(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| \\ &\leq C \frac{\|g\|_{L^1}}{\frac{\lambda}{2}} \leq C \frac{2}{\lambda} 2^{\frac{j_0}{p'}} \leq C 2^{j_0(\frac{1}{p'} + \frac{1}{p})} = C 2^{j_0} \simeq \frac{1}{\lambda^p}. \end{aligned}$$

Inversement, si $f \in L^{p,*}$ il faut décomposer f en $\sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$ avec les propriétés requises. Soit donc :

$$\forall j \in \mathbb{Z} \quad f_j(x) := f(x) \chi_{\{x: 2^{-\frac{j+1}{p}} \leq |f(x)| \leq 2^{-\frac{j}{p}}\}}$$

On a bien $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$ et

$$\begin{aligned} \|f_j\|_{L^\infty} &\leq 2^{-\frac{j}{p}}, \\ \|f_j\|_{L^1} &\leq 2^{-\frac{j}{p}} |\{x \in \mathbb{R}^3 : |f(x)| > 2^{-\frac{j+1}{p}}\}| \\ &\leq C 2^{-\frac{j}{p}} 2^{j+1} = C 2^{\frac{j}{p'}}. \end{aligned}$$

◆

Remarque. Si on définit

$$\|f\|_{L^{p,*}} = \sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in \mathbb{R}^3 : |f(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}},$$

on peut vérifier qu'il s'agit d'une quasi-norme. Néanmoins, on déduit de l'identification $L^{p,*} = L^{p,\infty}$ que l'espace de Lebesgue faible $L^{p,*}$ est tout de même un espace de Banach (voir aussi [BL76], [SW71]).

Nous soulignons aussi l'inclusion des espaces de Lorentz dans les espaces de Morrey–Campanato :

$$\forall p > 1, \forall q \in [1, +\infty], \forall t < p \quad L^{p,q} \subset L^{p,\infty} \subset \dot{M}_{t,p} \subset M_{t,p}. \quad (2.4)$$

Pour démontrer facilement cette inclusion, il est bon de rappeler une définition équivalente des espaces $L^{p,\infty}$ qui s'exprime en termes des moyennes sur les ensembles mesurables.

Proposition 2.15

Pour tout $p \in]1, +\infty[$ on a la caractérisation suivante :

$$L^{p,\infty} = \left\{ f \text{ mesurable} : \forall t < p, \sup_{E \in \mathcal{B}_f} |E|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{t}} \left(\int_E |f(x)|^t dx \right)^{\frac{1}{t}} \leq C < +\infty \right\} \quad (2.5)$$

où on a indiqué par \mathcal{B}_f l'ensemble des boréliens mesurables de mesure finie.

PREUVE : Appelons X l'espace défini en (2.5) et montrons d'abord que $X \subseteq L^{p,\infty}$. Soit $\lambda > 0$ et $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : |f(x)| > \lambda\}$. Alors E est un borélien mesurable et $|E| \leq \int_E \frac{|f(x)|}{\lambda} dx \leq \frac{C}{\lambda} |E|^{1-\frac{1}{p}}$ d'où $|E|^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{\lambda}$ et la démonstration est achevée.

Inversement, soit $f \in L^{p,\infty}$ et soit E un borélien mesurable. La fonction f est mesurable car $f \in L^1 + L^\infty$; de plus, on a :

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)|^t dx &= \int_E \int_0^{|f(x)|} t \lambda^{t-1} d\lambda dx \\ &= \int_0^{+\infty} t \lambda^{t-1} \int_{E \cap \{x: |f(x)| > \lambda\}} dx d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^A t\lambda^{t-1} |E \cap \{x : |f(x)| > \lambda\}| d\lambda + \\
&\quad \int_A^{+\infty} t\lambda^{t-1} |E \cap \{x : |f(x)| > \lambda\}| d\lambda \\
&\leq A^t |E| + \int_A^{+\infty} t\lambda^{t-1} \frac{C}{\lambda^p} d\lambda \\
&\leq A^t |E| + C \frac{t}{p-t} A^{t-p}.
\end{aligned}$$

Si on choisit $A = |E|^{-\frac{1}{p}}$ on aura donc

$$\int_E |f(x)|^t dx \leq C |E|^{1-\frac{t}{p}}.$$

♦

Si on compare maintenant cette nouvelle caractérisation de $L^{p,\infty}$ avec la définition de $\dot{M}_{t,p}$:

$$\dot{M}_{t,p} = \left\{ f \in L^t_{\text{uloc}} : \sup_{R>0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} R^{\frac{3}{p}-\frac{3}{t}} \left(\int_{|x-x_0| \leq R} |f(x)|^t dx \right)^{\frac{1}{t}} \leq C \right\},$$

l'inclusion (2.4) sus-citée apparaît évidente.

Aux espaces de Lorentz s'étendent trois résultats classiques sur les espaces de Lebesgue : les inégalités de Hölder, de Young et les inclusions de Sobolev. Nous en reproduisons ici les énoncés, en renvoyant à [Hun67] pour les démonstrations classiques. On pourra par ailleurs trouver dans [Lem] une démonstration très simple utilisant la présentation des espaces de Lorentz comme interpolation de L^1 et L^∞ .

Proposition 2.16 (inégalités de Hölder)

Si $1 < p_i < +\infty$, $1 \leq q_i \leq +\infty$, $i = 1, 2, 3$, on a :

$$\begin{aligned}
L^{p_1, q_1} \cdot L^{p_2, q_2} &\subseteq L^{p_3, q_3} & \frac{1}{p_3} &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, & \frac{1}{q_3} &= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, \\
L^{p_1, q_1} \cdot L^{p'_1, q'_1} &\subseteq L^1 & \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} &= 1, & \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q'_1} &= 1, \\
L^{p_1, q_1} \cdot L^\infty &\subseteq L^{p_1, q_1}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.17 (inégalités de Young)

Si $1 < p_i < +\infty$, $1 \leq q_i \leq +\infty$, $i = 1, 2, 3$, on a :

$$\begin{aligned}
L^{p_1, q_1} * L^{p_2, q_2} &\subseteq L^{p_3, q_3} & \frac{1}{p_3} + 1 &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, & \frac{1}{q_3} &= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} & \text{et} \\
L^{p_1, q_1} * L^1 &\subseteq L^{p_1, q_1}.
\end{aligned}$$

Nous remarquons également l'inclusion :

$$L^{p,q} * L^{p',q'} \subseteq L^\infty, \quad p \in]1, +\infty[, \quad q \in [1, +\infty], \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

due à la dualité entre $L^{p,q}$ et $L^{p',q'}$ (voir [BL76]).

Proposition 2.18 (injections de Sobolev)

Si $0 < \alpha < 3$, $1 < p < \frac{3}{\alpha}$, on a :

$$\frac{1}{(\sqrt{-\Delta})^\alpha} : L^{p,t} \rightarrow L^{q,t} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{3}, \quad t \in [1, +\infty].$$

On remarquera que cette proposition étend le résultat classique :

$$\frac{1}{(\sqrt{-\Delta})^\alpha} : L^{p,p} \rightarrow L^{q,p} \hookrightarrow L^{q,q},$$

puisque $q > p$.

Comme dernière remarque, nous précisons que les espaces de Lorentz peuvent être définis aussi pour $0 < p \leq 1$, $0 < q \leq 1$, mais dans ce cas il ne s'agit plus d'espaces normés. Néanmoins, les inégalités de Hölder et de Young sont aussi valables, comme on peut voir dans [Hun67].

Les espaces X_r

Nous allons présenter maintenant des espaces de multiplicateurs singuliers sur les espaces de Sobolev, introduits récemment par P. G. Lemarié-Rieusset dans ses travaux [Lem98b] généralisant le théorème d'unicité de J. Serrin [Ser62]; on en a déjà vu une application avec le théorème d'unicité de R. May [May] en complément au chapitre 1.

Nous commençons par donner la définition suivante.

Définition 2.19

Pour tout $r \geq 0$ on définit :

$$\begin{aligned} X^r &= \{f \in L^2_{\text{loc}} : \forall g \in H^r \quad fg \in L^2\} \\ \dot{X}^r &= \{f \in L^2_{\text{loc}} : \forall g \in \dot{H}^r \quad fg \in L^2\}. \end{aligned}$$

Il s'agit d'espaces de Banach normés par :

$$\begin{aligned} \|f\|_{X^r} &= \sup_{\|g\|_{H^r} \leq 1} \|fg\|_{L^2}, \\ \|f\|_{\dot{X}^r} &= \sup_{\|g\|_{\dot{H}^r} \leq 1} \|fg\|_{L^2}. \end{aligned}$$

On a $\forall x_0 \in \mathbb{R}^3$ $\|f(x + x_0)\|_{X^r} = \|f\|_{X^r}$, $\|f(x + x_0)\|_{\dot{X}^r} = \|f\|_{\dot{X}^r}$ et

$$\begin{aligned} \|f(\lambda x)\|_{X^r} &\leq \frac{1}{\lambda^r} \|f\|_{X^r} & 0 < \lambda \leq 1, \\ \|f(\lambda x)\|_{\dot{X}^r} &= \frac{1}{\lambda^r} \|f\|_{\dot{X}^r} & \lambda > 0 \end{aligned}$$

d'où on déduit encore une fois $X^r \subset B_{\infty}^{-r, \infty}$, $\dot{X}^r \subset \dot{B}_{\infty}^{-r, \infty}$. On remarque aussi que $\dot{X}^r \subseteq X^r$.

Étant donné que l'opérateur de multiplication par une fonction réelle est autoadjoint, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \|f\|_{X^r} &= \sup_{\|g\|_{L^2} \leq 1} \|fg\|_{H^{-r}}, \\ \|f\|_{\dot{X}^r} &= \sup_{\|g\|_{L^2} \leq 1} \|fg\|_{\dot{H}^{-r}}. \end{aligned}$$

On peut établir également quelques inclusions fonctionnelles. Commençons par la plus simple, concernant les espaces de Lebesgue.

$$\begin{aligned} L^{\frac{3}{r}} &\subset \dot{X}^r & 0 \leq r < \frac{3}{2}, \\ L^{\frac{3}{t}} &\subset X^r & 0 \leq r < \frac{3}{2}, \quad 0 \leq t \leq r. \end{aligned}$$

Ceci provient tout simplement des injections de Sobolev et des inégalités de Hölder.

Un raffinement des inclusions ci-dessus est valable pour les espaces de Lorentz :

$$\begin{aligned} L^{\frac{3}{r}, \infty} &\subset \dot{X}^r & 0 < r < \frac{3}{2}, \\ L^{\frac{3}{t}, \infty} &\subset X^r & 0 < r < \frac{3}{2}, \quad 0 < t \leq r, \end{aligned}$$

où on a utilisé les inclusions de Sobolev et les inégalités de Hölder étendues.

Venons-en aux espaces de Morrey–Campanato. Montrons d'abord que :

$$X^r \subseteq M_{2, \frac{3}{r}}, \quad \dot{X}^r \subseteq \dot{M}_{2, \frac{3}{r}}, \quad 0 \leq r \leq \frac{3}{2}. \quad (2.6)$$

PREUVE : Nous traitons seulement le cas non homogène, l'autre étant tout à fait analogue.

Soient $f \in X^r$, $0 < R \leq 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $\phi \in \mathcal{D}$, $\phi \equiv 1$ sur $B(\frac{x_0}{R}, 1)$. On a :

$$R^{r-\frac{3}{2}} \left(\int_{|x-x_0| \leq R} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = R^r \left(\int_{|\sigma - \frac{x_0}{R}| \leq 1} |f(R\sigma)|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq R^r \left(\int_{\sigma \in \mathbb{R}^3} |f(R\sigma)\phi(\sigma)|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq R^r \|f(R\sigma)\|_{X^r} \|\phi\|_{H^r} \\
 &\leq \|f(\sigma)\|_{X^r} \|\phi\|_{H^r} \leq C \|f\|_{X^r},
 \end{aligned}$$

d'où l'inclusion souhaitée. ♦

D'autre part,

$$M_{p, \frac{3}{r}} \subset X^r \quad 2 < p < \frac{3}{r}, \quad r < \frac{3}{2}, \quad (2.7)$$

$$\dot{M}_{p, \frac{3}{r}} \subset \dot{X}^r \quad 2 < p < \frac{3}{r}, \quad r < \frac{3}{2}, \quad (2.8)$$

$$M_{\frac{3}{r}, \frac{3}{r}} \subset X^r \quad r < \frac{3}{2}. \quad (2.9)$$

Les inclusions (2.7) et (2.8) sont techniques et nous renvoyons à [Lem98b] pour tous les détails. Pour (2.9), l'espace $M_{\frac{3}{r}, \frac{3}{r}}$ coïncide avec l'espace $L_{\text{uloc}}^{\frac{3}{r}}$ et on peut en donner une démonstration assez élémentaire.

PREUVE : Soit donc $f \in L_{\text{uloc}}^{\frac{3}{r}}$ et $g \in H^r \cap \mathcal{D}$. En notant Q_k le cube $[0, 1]^3 + k$, $k \in \mathbb{Z}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)g(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \int_{Q_k} |f(x)g(x)|^2 dx \\
 &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \left(\int_{Q_k} |f(x)|^{\frac{3}{r}} dx \right)^{\frac{2}{3}r} \left(\int_{Q_k} |g(x)|^\sigma dx \right)^{\frac{2}{\sigma}} \\
 &\quad \text{avec } \frac{1}{2} = \frac{r}{3} + \frac{1}{\sigma} \\
 &\leq \|f\|_{L_{\text{uloc}}^{\frac{3}{r}}}^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \|g\|_{L^\sigma(Q_k)}^2 \\
 &\leq \|f\|_{L_{\text{uloc}}^{\frac{3}{r}}}^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \|g\phi(\cdot - k)\|_{L^\sigma}^2 \\
 &\quad \text{où } \phi \equiv 1 \text{ sur } Q_0, \phi \in \mathcal{D} \\
 &\leq \|f\|_{L_{\text{uloc}}^{\frac{3}{r}}}^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \|g\phi(\cdot - k)\|_{H^r}^2.
 \end{aligned}$$

Or,

$$\|g\phi(\cdot - k)\|_{H^r} = \sum_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha(g\phi(\cdot - k))\|_{L^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|\alpha| \leq r} \sum_{\gamma + \beta = \alpha} \|D^\beta g D^\gamma \phi(\cdot - k)\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq r} \sum_{\gamma + \beta = \alpha} \|D^\beta g\|_{L^2} \|D^\gamma \phi(\cdot - k)\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \|g \phi(\cdot - k)\|_{H^r}^2 \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq r} \sum_{\gamma + \beta = \alpha} \|D^\beta g\|_{L^2}^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \|D^\gamma \phi(\cdot - k)\|_{L^\infty}^2 \\
&\leq C \|g\|_{H^r}^2
\end{aligned}$$

et donc

$$\|fg\|_{L^2} \leq C \|g\|_{H^r} \|f\|_{L_{\text{uloc}}^{\frac{3}{2}}}.$$

◆

2.3 Le cas des espaces réguliers

Nous présentons dans ce paragraphe un théorème d'existence de solutions de Kato dans le cadre général que nous avons introduit, dans le cas particulier où l'espace E possède une certaine régularité. Faisons un préambule pour essayer de rendre moins obscure la condition que nous allons introduire dans le théorème. Si on veut adapter au cas d'un espace E « de Kato » la démonstration que Kato avait faite pour le cas de L^3 , on ne rencontre en général pas de problèmes pour démontrer que la transformation $F(\vec{u}) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds$ est stable sur un fermé borné de l'espace

$$\mathcal{E} = \left\{ \vec{u}(t) \in C([0, T], E) : \begin{array}{l} \sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0 \end{array} \right\}.$$

Par contre la contractivité peut être plus compliquée, car il faut s'assurer qu'il existe une constante $C < 1$ telle que $\|F(\vec{u}) - F(\vec{v})\|_{\mathcal{E}} \leq C \|\vec{u} - \vec{v}\|_{\mathcal{E}}$. Puisque

$$\|F(\vec{u}) - F(\vec{v})\|_{\mathcal{E}} = \|B(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v})\|_{\mathcal{E}},$$

la constante C va être déterminée à partir d'une estimation de bicontinuité de l'opérateur bilinéaire intégral B , de la forme $\|B(\vec{u}, \vec{u} - \vec{v})\|_{\mathcal{E}} \leq C^{te} \|\vec{u}\|_{\mathcal{E}} \|\vec{u} - \vec{v}\|_{\mathcal{E}}$. Prenons le cas de L^3 . Le fait que L^∞ soit un espace de multiplicateurs de L^3 , et que donc $\|fg\|_{L^3} \leq C^{te} \|f\|_{L^3} \|g\|_{L^\infty}$, permet d'avoir une estimation du type

$$\|B(\vec{u}, \vec{u} - \vec{v})(t)\|_{L^3} \leq C^{te} \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_{L^3}$$

(et également pour $\|B(\vec{u} - \vec{v}, \vec{v})(t)\|_{L^3}$). Or, quitte à considérer un petit intervalle de temps, la condition $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$ nous permet de majorer l'estimation ci-dessus en utilisant bien une constante C aussi petite qu'on veut. Si par contre L^∞ n'est pas un espace de multiplicateurs de l'espace E (ce qui est bien le cas pour les espaces réguliers que nous allons considérer ici) on pourrait avoir seulement une condition du genre $\|fg\|_E \leq C^{te} (\|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \|g\|_E \|f\|_{L^\infty})$ qui nous donnerait

$$\|B(\vec{u}, \vec{u} - \vec{v})(t)\|_E \leq C^{te} \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_E + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E \right).$$

Si on traite le cas local, où on ne peut pas imposer la petitesse de la solution dans E puisque la donnée initiale n'est pas contrôlée, on ne peut plus rendre contractante la transformation. C'est pourquoi, on cherche à avoir plutôt une estimation « à poids » du genre

$$\|fg\|_E \leq C^{te} (\|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \|g\|_E^\alpha \|g\|_{L^\infty}^{1-\alpha} \|f\|_{L^\infty}) \quad (2.10)$$

où on a encore une contribution de la norme L^∞ de g dans le deuxième facteur du membre de droite, qui jouera le rôle du terme qu'on peut rendre petit dans l'estimation de $\|B(\vec{u}, \vec{u} - \vec{v})(t)\|_E$. À cause de la non homogénéité de la norme E , il nous a paru plus simple de formuler la condition (2.10) sur les blocs dyadiques ; par ailleurs, nous allons systématiquement démontrer une estimation plus forte sur le terme de fluctuation $B(\vec{u}, \vec{v})$, à savoir $\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_E^{0,1}}$ plutôt que $\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_E$, d'où l'intérêt d'une estimation sur les blocs. Passons maintenant à l'énoncé du théorème.

Théorème 2.20

Soit E un « espace de Kato » tel que, de plus, il existe $\sigma \in [0, 1]$, $\alpha \in]0, 1[$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M(\varepsilon) > 0$ vérifiant :

$$\forall f, g \in E \cap L^\infty \quad \|\Delta_j(fg)\|_E \leq M(\varepsilon) \|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \varepsilon 2^{j\sigma\alpha} \|f\|_E^\alpha \|f\|_{L^\infty}^{1-\alpha} \|g\|_E \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

Alors, pour tout $\vec{u}_0 \in E$ avec $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ il existe $T = T(\vec{u}_0)$ et une unique solution des équations de Navier-Stokes $\vec{u}(t) \in C([0, T], E)$, telle que $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$.

La démonstration, technique, suit les lignes de celle concernant les espaces limites homogènes, qui vérifient donc $\|f(\lambda x)\|_E = \frac{1}{\lambda} \|f\|_E$ (théorème 1.6). C'est pourquoi, nous préférons la mettre en annexe, pour continuer ici avec d'autres commentaires. Tout d'abord, si L^∞ est un espace de multiplicateurs de E , la condition (2.11) est vérifiée de façon banale, car :

$$\|\Delta_j(fg)\|_E \leq C \|fg\|_E \leq C \|f\|_E \|g\|_{L^\infty}.$$

C'est le cas de tous les espaces « modelés » sur L^p , c'est-à-dire L^p pour $p \geq 3$, $M_{p,q}$ et $\dot{M}_{p,q}$ pour $q \geq 3$ et $1 \leq p \leq q$, $L^{p,q}$ pour $p \geq 3$, $1 \leq q \leq +\infty$. C'est également le cas des espaces X^r et \dot{X}^r pour $0 \leq r \leq 1$, car, pour tout $f \in X^r$, pour tout $g \in L^\infty$ on a :

$$\sup_{\|\phi\|_{H^r} \leq 1} \|fg\phi\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^\infty} \sup_{\|\phi\|_{H^r} \leq 1} \|f\phi\|_{L^2}.$$

Le même calcul vaut pour \dot{X}^r .

Il s'agit essentiellement d'espaces qui ne sont pas définis par des conditions de régularité. Par contre, si on considère les espaces de Sobolev, ou bien, plus généralement, les espaces de Besov et de Triebel–Lizorkin, la condition $f, g \in E \cap L^\infty$ contenue dans (2.11) devient nécessaire. Nous allons montrer dans un instant que les espaces de Besov et de Triebel–Lizorkin vérifient bien la condition (2.11) pour certains indices s positifs de régularité.

Vérification sur les espaces de Besov

Dans le paragraphe 1.4 du chapitre 1 (théorème 1.6 B), nous avons montré la condition (2.11) pour les espaces homogènes $\dot{B}_p^{s,q}$, $\dot{F}_p^{s,q}$ avec $s = \frac{3}{p} - 1$, $1 \leq p < 3$. Il nous faudrait maintenant la vérifier pour les espaces non homogènes $B_p^{s,q}$, $F_p^{s,q}$ avec $s \geq \max(0, \frac{3}{p} - 1)$, $s \neq 0$, $1 \leq p \leq +\infty$. Nous ne pourrions ici considérer que le cas $\frac{3}{p} - 1 \leq s < \frac{3}{p}$ pour $1 \leq p < 3$. Nous verrons cependant dans le paragraphe 2.5 qu'on peut inclure aussi les autres cas en utilisant une approche différente. Analysons par simplicité le cas des espaces de Besov. Puisque $B_p^{s,q} = \dot{B}_p^{s,q} \cap L^p$ et $\|f\|_{B_p^{s,q}} \simeq \|\dot{f}\|_{\dot{B}_p^{s,q}} + \|f\|_{L^p}$, on a $\|\Delta_j(fg)\|_{B_p^{s,q}} \simeq \|\Delta_j(fg)\|_{\dot{B}_p^{s,q}} + \|\Delta_j(fg)\|_{L^p}$. Il suffit donc de prouver que la propriété (2.11) est vérifiée pour les deux normes. On a : $\|\Delta_j(fg)\|_{L^p} \leq C \|fg\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{B_p^{s,q}} \|g\|_{L^\infty}$. Il reste donc à prouver la propriété (2.11) pour $\|\Delta_j(fg)\|_{\dot{B}_q^{s,p}}$ pour $\frac{3}{p} - 1 \leq s < \frac{3}{p}$. On peut procéder comme dans le chapitre 1 : grâce à l'homogénéité de la norme, il suffit de considérer $\|\Delta_0(fg)\|_{\dot{B}_q^{s,p}}$. On écrit le paraproduit homogène :

$$\begin{aligned} fg &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Delta_k f S_{k-2} g + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Delta_k g S_{k-2} f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{|k-l| \leq 2} \Delta_k f \Delta_l g \\ &= \pi(f, g) + \pi(g, f) + R(f, g), \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta_0(fg) = \Delta_0 \left(\sum_{k=-2}^2 \Delta_k f S_{k-2} g \right) + \Delta_0 \left(\sum_{k=-2}^2 \Delta_k g S_{k-2} f \right) + \Delta_0 \left(\sum_{k \geq -2} \sum_{|k-l| \leq 2} \Delta_k f \Delta_l g \right).$$

Par ailleurs, $\|\Delta_0(fg)\|_{\dot{B}_q^{s,p}} \simeq \|\Delta_0(fg)\|_{L^p}$; on a donc :

$$\begin{aligned} \|\Delta_0\pi(f, g)\|_{L^p} &= \left\| \Delta_0 \sum_{k=-2}^2 \Delta_k f S_{k-2} g \right\|_{L^p} \\ &\leq C \|f\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \|g\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \|g\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\Delta_0 R(f, g)\|_{L^p} &= \left\| \Delta_0 \sum_{k \geq -2} \sum_{|k-l| \leq 2} \Delta_k f \Delta_l g \right\|_{L^p} \\ &\leq C \sum_{k \geq -2} \|\Delta_k f\|_{L^p} \|g\|_{L^\infty} \\ &\leq C \|g\|_{L^\infty} \sum_{k \geq -2} 2^{-ks} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \\ &\leq C \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}. \end{aligned}$$

Finalement, on estime le terme le plus compliqué. Pour $L < -5$ on a :

$$\begin{aligned} \|\Delta_0\pi(g, f)\|_{L^p} &= \left\| \Delta_0 \sum_{k=-2}^2 \Delta_k g (S_L f + \sum_{n=L}^{k-3} \Delta_n f) \right\|_{L^p} \\ &\leq \sum_{k=-2}^2 \sum_{n=L}^{k-3} \|\Delta_0(\Delta_k g \Delta_n f)\|_{L^p} + \sum_{k=-2}^2 \|\Delta_0(\Delta_k g S_L f)\|_{L^p} \\ &= A + B. \end{aligned}$$

Pour le premier terme on a :

$$\begin{aligned} A &\leq C \|g\|_{L^\infty} \sum_{n=L}^{-1} \|\Delta_n f\|_{L^p} \\ &\leq C \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \sum_{n \geq L} 2^{-ns} \\ &\leq C 2^{-Ls} \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}. \end{aligned}$$

Pour le deuxième on a, pour $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{t}$:

$$\begin{aligned} B &\leq C \sum_{k=-2}^2 \|\Delta_k g\|_{L^q} \|S_L f\|_{L^t} \\ &\leq C \sum_{k=-2}^2 2^{k(\frac{3}{p} - \frac{3}{q} - s)} 2^{ks} \|\Delta_k g\|_{L^p} \left(\sum_{n \leq L-1} \|\Delta_n f\|_{L^t} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \|g\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \sum_{n \leq L-1} 2^{n(\frac{3}{p}-\frac{3}{t}-s)} 2^{ns} \|\Delta_n f\|_{L^p} \\ &\leq C \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} 2^{L(\frac{3}{p}-\frac{3}{t}-s)}, \end{aligned}$$

pourvu que $\frac{3}{p} - \frac{3}{t} - s > 0$. Comme $s = \frac{3}{p} - 1 + \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon < 1$, il suffit de choisir $t > \frac{3}{1-\varepsilon}$ ce qui est en effet possible car $p < 3$. Par ailleurs, on a aussi que $\sum_{k=-2}^2 \|\Delta_0(\Delta_k g S_L f)\|_{L^p} \leq C \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \|f\|_{L^\infty}$ comme pour $\pi(f, g)$. En moyennant, on obtient :

$$\sum_{k=-2}^2 \|\Delta_0(\Delta_k g S_L f)\|_{L^p} \leq C \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \|f\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{L}{2}(\frac{3}{p}-\frac{3}{t}-s)}$$

où $2^{\frac{L}{2}(\frac{3}{p}-\frac{3}{t}-s)}$ peut être rendu aussi petit qu'on veut pour $L \rightarrow -\infty$. Donc, $\forall \varepsilon > 0$ il existe $M(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\|\Delta_0(fg)\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leq M(\varepsilon) \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \|g\|_{L^\infty} + \varepsilon \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}},$$

d'où, par homogénéité :

$$\|\Delta_j(fg)\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leq M(\varepsilon) \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \|g\|_{L^\infty} + \varepsilon 2^{\frac{j}{2}(\frac{3}{p}-s)} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}}$$

et, en majorant $\|\cdot\|_{\dot{B}_p^{s,q}}$ par $\|\cdot\|_{B_p^{s,q}}$, on obtient la majoration souhaitée. Cette démonstration peut être aussi adaptée aux espaces de Triebel–Lizorkin.

Pour ce qui concerne $s > \frac{3}{p}$, les espaces correspondants $F_p^{s,q}$ et $B_p^{s,q}$ sont des algèbres contenues dans L^∞ ; la condition $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty)$ n'est donc pas une véritable restriction et de plus on peut démontrer l'existence d'une solution des équations de Navier–Stokes grâce à la bicontinuité du terme bilinéaire sur l'espace $C([0, T], E)$.

2.4 Le cas des espaces singuliers

L'approche de Kato s'applique aussi à certains espaces « singuliers », pour lesquels le terme $\vec{u} \otimes \vec{u}(s)$ n'est pas défini ; dans ce cas, la condition $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty)$ devient alors essentielle pour lui donner un sens dans \mathcal{S}' . Déjà H. Kozono et M. Yamazaki [KY94], M. Cannone [Can95], F. Planchon [Pla96], Y. Meyer et M. A. Muschietti [Mey96], J. Y. Chemin [Che99], P. Auscher et Ph. Tchamitchian [AT99] ont proposé des adaptations de la méthode à certains espaces singuliers homogènes, notamment aux espaces de Besov à régularité négative et à leur généralisation utilisant les espaces de Morrey–Campanato. Dans la suite des travaux de P.–G. Lemarié–Rieusset [Lem98b], nous allons ici considérer le cas d'un espace de Besov non homogène à indice s de régularité négatif sur un espace de

Banach E admettant L^∞ comme espace de multiplicateurs. Nous allons d'abord résoudre les équations de Navier–Stokes dans l'espace où se trouve la tendance, qui n'a a priori rien à voir avec l'espace des trajectoires continues en temps à valeurs dans l'espace de Besov de départ. Ensuite, nous allons montrer que la solution trouvée est tout de même continue dans le Besov, et que les deux espaces sont tout à fait équivalents. Il nous semble intéressant de remarquer que l'idée de situer la résolution du problème dans l'espace « plus maniable » où se trouve la composante linéaire de la solution (la tendance, pour utiliser le langage de équations de Navier–Stokes), est de plus en plus utilisée et pas seulement pour les équations de Navier–Stokes; nous faisons référence par exemple aux solutions de H. Koch et D. Tataru dans $F_\infty^{-1,2}$ dont il sera question dans la dernière partie de ce chapitre, mais aussi aux solutions de l'équation de Schrödinger que nous allons traiter dans le dernier chapitre de cette thèse.

Voici l'énoncé du théorème.

Théorème 2.21

Soit E un espace « de Kato » qui vérifie, de plus, les propriétés suivantes :

$$E \subset B_\infty^{-r,\infty} \quad 0 < r < 1 \quad (2.12)$$

$$\text{il existe } C > 0 \text{ tel que } \forall f \in E, \forall g \in L^\infty \quad \|fg\|_E \leq C \|f\|_E \|g\|_{L^\infty}. \quad (2.13)$$

Alors :

- a) pour tout $\vec{u}_0 \in \overline{\mathcal{S}}^{B_E^{-1-r,\infty}}$ avec $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ il existe $T = T(\vec{u}_0)$ et une unique solution des équations de Navier–Stokes $\vec{u}(t) \in C\left([0, T], \overline{\mathcal{S}}^{B_E^{-1-r,\infty}}\right)$, telle que $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty)$, $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$ et $t^{\frac{1-r}{2}} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, E)$;
- b) pour tout $q \in]\frac{2}{2-r}, +\infty[$, pour tout $\vec{u}_0 \in B_E^{-(1-r),q}$ avec $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, il existe $T = T(\vec{u}_0)$ et une unique solution des équations de Navier–Stokes $\vec{u}(t) \in C\left([0, T], B_E^{-(1-r),q}\right)$, telle que $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty)$, $t^{\frac{1-r}{2}} \|\vec{u}(t)\|_E \in L^q\left(]0, T[, \frac{dt}{t}\right)$.

Commençons par quelques remarques. Si $E \subset B_\infty^{-r,\infty}$, montrons que $B_E^{-(1-r),q} \subset B_\infty^{-1,\infty}$ pour tout $q \in [1, +\infty]$. En effet :

$$f \in B_E^{-(1-r),q} \Leftrightarrow \begin{cases} S_0 f \in E \\ 2^{-j(1-r)} \|\Delta_j f\|_E \in l^q(\mathbb{N}). \end{cases}$$

Il faut montrer que $S_0 f \in L^\infty$ et que $2^{-j} \|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq C < +\infty$ pour tout $j \geq 0$. Or, si on indique par $\tilde{S}_0 g = \tilde{\phi} * g$ avec $\tilde{\phi} \in \mathcal{S}$ et $\widehat{\tilde{\phi}} \equiv 1$ sur $\text{supp } \hat{\phi}$, on a :

$$\begin{aligned} \|S_0 f\|_{L^\infty} &= \left\| \tilde{S}_0 S_0 f \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \left\| \tilde{\phi} \right\|_{E'} \|S_0 f\|_E < +\infty. \end{aligned}$$

Également, en notant $\tilde{\Delta}_j f = \tilde{\psi} * f$ avec $\tilde{\psi} \in \mathcal{S}$ et $\tilde{\psi} \equiv 1$ sur $\text{supp } \hat{\psi}$, on a :

$$\begin{aligned} 2^{-j} \|\Delta_j f\|_{L^\infty} &= 2^{-j} \left\| \tilde{\Delta}_j \Delta_j f \right\|_{L^\infty} \\ &\leq 2^{-j} 2^{rj} \|\Delta_j f\|_{\mathbb{E}} = 2^{-j(1-r)} \|\Delta_j f\|_{\mathbb{E}} \in l^q(\mathbb{N}) \subset l^\infty(\mathbb{N}). \end{aligned}$$

Si $q < +\infty$, les fonctions de test sont encore denses dans $B_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}$, tandis que si $q = +\infty$ ce n'est pas le cas, d'où la nécessité de se restreindre, dans le cas a) du théorème, à l'adhérence de la classe de Schwartz. Dans les deux cas on est donc dans le cadre d'un espace « de Kato ». La condition (2.13) est vérifiée par tous les espaces étudiés dans les paragraphes précédents qui ne sont pas définis par des conditions de régularité. On précisera cela dans le paragraphe 2.4.1.

Passons à la démonstration du théorème.

PREUVE : Tout d'abord, montrons que, pour une donnée \vec{u}_0 vérifiant les hypothèses du théorème dans les deux cas a) et b), il existe $T > 0$ et une seule solution des équations de Navier–Stokes \vec{u} dans l'espace :

$$W_T = \left\{ \vec{u} \in \mathcal{r}'([0, T] \times \mathbb{R}^3) : \left. \begin{array}{l} \sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0 \\ t^{\frac{1-r}{2}} \|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{E}} \in L^q\left(]0, T[, \frac{dt}{t}\right) \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

normé par

$$\|\vec{u}\|_{W_T} = \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} + \left\| t^{\frac{1-r}{2}} \|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{E}} \right\|_{L^q(]0, T[, \frac{dt}{t})}.$$

Nous montrerons ensuite, à travers le lemme 2.22, que cela entraîne de façon immédiate l'appartenance de \vec{u} à l'espace $C\left([0, T], B_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}\right)$.

Le cas $q = +\infty$

Traitons d'abord le cas a) où $q = +\infty$ et $t^{\frac{1-r}{2}} \|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{E}} \in L^q(]0, T[, \frac{dt}{t}) \Leftrightarrow t^{\frac{1-r}{2}} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, \mathbb{E})$. Les hypothèses faites sur \vec{u}_0 se traduisent directement en l'appartenance de la tendance $e^{t\Delta} \vec{u}_0$ à l'espace W_T , et cela pour tout $T < +\infty$; en particulier, la condition $\lim_{t \rightarrow 0} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} = 0$ vient de la densité des fonctions de test. Passons alors à la

fluctuation. D'abord pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in W_T$, pour tout s tel que $0 < s < t \leq T$ on a :

$$\begin{aligned} \left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{L^\infty} &\leq C_T \frac{1}{(\sqrt{t-s})^r} \left\| e^{\frac{(t-s)}{2}\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{\mathbf{E}} \\ &\quad (\text{grâce à l'inclusion } \mathbf{E} \subset B_\infty^{-r, \infty}) \\ &\leq C_T \frac{1}{(\sqrt{t-s})^r} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|\vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_{\mathbf{E}} \\ &\leq C_T \frac{1}{(\sqrt{t-s})^{r+1}} \frac{1}{s^{1-\frac{r}{2}}} \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} s^{\frac{1-r}{2}} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

Du moment que $\int_0^t \frac{1}{(\sqrt{t-s})^{r+1}} \frac{1}{s^{1-\frac{r}{2}}} ds = \frac{C}{\sqrt{t}}$, on obtient une première estimation pour $\sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty}$, mais nous précisons cette majoration en vue de l'application d'un algorithme de point fixe. On utilise à cette fin l'estimation directe :

$$\begin{aligned} \left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{L^\infty} &\leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|\vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_{L^\infty} \\ &\leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{s} \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

pour obtenir, en moyennant,

$$\begin{aligned} \sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} &\leq C_T \sqrt{t} \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}} \frac{1}{s^{1-\frac{r}{4}}} ds \right) \times \\ &\quad \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} s^{\frac{1-r}{2}} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbf{E}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_T \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} s^{\frac{1-r}{2}} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbf{E}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On obtient aussi $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} = 0$. Quant à la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ on a, pour tout $t \leq T$, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in W_T$:

$$\begin{aligned} t^{\frac{1-r}{2}} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\mathbf{E}} &\leq C t^{\frac{1-r}{2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|\vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_{\mathbf{E}} ds \\ &\leq C t^{\frac{1-r}{2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{s^{\frac{1}{2}+\frac{1-r}{2}}} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} s^{\frac{1-r}{2}} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbf{E}} \\ &\leq C \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} s^{\frac{1-r}{2}} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

On considère maintenant $T_0 > 0$ fixé, $T \leq T_0$ et l'ensemble fermé et borné :

$$W_{T,\rho,R} = \left\{ \vec{u} \in W_T : \begin{cases} \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} \leq \rho \\ \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1-r}{2}} \|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{E}} \leq R \end{cases} \right\},$$

avec $R = 2 \sup_{0 < t < T_0} t^{\frac{1-r}{2}} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{E}} = M_{T_0} \|\vec{u}_0\|_{B_{\mathbb{E}}^{-(1-r),\infty}}$, où M_T est une fonction croissante de T . Nous rappelons en fait que les normes de $B_{\mathbb{E}}^{-(1-r),\infty}$ définies pour tout $T > 0$ par $N_T = \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1-r}{2}} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{E}} + \|e^{T\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{E}}$ sont équivalentes elles, mais la fonction $\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1-r}{2}} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{E}}$ est une fonction croissante de T qui peut exploser pour T tendant vers l'infini. En écrivant $F(\vec{u}) - F(\vec{v}) = B(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ on a obtenu, pour $\vec{u}, \vec{v} \in W_{T,\rho,R}$:

$$\begin{aligned} \|F(\vec{u}) - F(\vec{v})\|_{W_T} &\leq C_{T_0} \|\vec{u} - \vec{v}\|_{W_T} \left(\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} + \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{v}(t)\|_{L^\infty} \right) \\ &\leq 2C_{T_0} \rho \|\vec{u} - \vec{v}\|_{W_T} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1-r}{2}} \|F(\vec{u})(t)\|_{\mathbb{E}} &\leq \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1-r}{2}} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{E}} + C\rho R \leq \frac{R}{2} + C\rho R \\ \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|F(\vec{u})(t)\|_{L^\infty} &\leq \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} + C_T \rho \sqrt{\rho R}. \end{aligned}$$

Si on impose

$$\begin{cases} 2C_{T_0} \rho < 1 \\ C\rho \leq \frac{1}{2} \\ C_T \sqrt{\rho R} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \rho < \inf \left(\frac{1}{2C_{T_0}}, \frac{1}{2C_T} \right) \\ \rho \leq \frac{1}{4C_T^2 R} \end{cases}$$

on obtient que F est stable et contractante sur $W_{T,\rho,R}$, pourvu que T soit tel que $T \leq T_0$ et $\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} \leq \frac{\rho}{2}$, ce qui est possible car $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} = 0$.

Le cas $q < +\infty$

Passons au cas b) où $\frac{2}{2-r} < q < +\infty$. Soit donc $T > 0$ et W_T comme dans (2.14). L'hypothèse faite sur \vec{u}_0 équivaut à l'appartenance de $e^{t\Delta} \vec{u}_0$ à W_T , comme au cas a). Venons-en à la fluctuation. D'abord, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in W_T$, pour tout $0 < s < t \leq T$ on a :

$$\begin{aligned} \left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{L^\infty} &\leq C_T \frac{1}{(\sqrt{t-s})^r} \left\| e^{\frac{t-s}{2}\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{\mathbb{E}} \\ &\leq C_T \frac{1}{(\sqrt{t-s})^r} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|\vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \\ &\leq C_T \frac{1}{(\sqrt{t-s})^{r+1}} \frac{1}{s^{1-\frac{r}{2}-\frac{1}{q}}} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} s^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}. \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{L^\infty} \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{s} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty}$$

d'où, en moyennant,

$$\begin{aligned} & \sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} \\ & \leq C_T \sqrt{t} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}+\frac{r}{4}}} \frac{1}{s^{1-\frac{r}{4}-\frac{1}{2q}}} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \left(\sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} s^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ & = C_T \sqrt{t} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}+\frac{r}{4}}} \frac{1}{s^{1-\frac{r}{4}-\frac{1}{2q}}} f(s) ds \end{aligned}$$

avec $f(s) = \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \left(\sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} s^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \right)^{\frac{1}{2}} \in L^{2q}([0, T[)$.

Par l'inégalité de Hölder on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} & \leq C_T \sqrt{t} \left\{ \int_0^t \left(\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}+\frac{r}{4}}} \frac{1}{s^{1-\frac{r}{4}-\frac{1}{2q}}} \right)^{\frac{2q}{2q-1}} ds \right\}^{\frac{2q-1}{2q}} \|f(s)\|_{L^{2q}([0,t])} \\ & \leq C_T \|f(s)\|_{L^{2q}([0,t])} \\ & \leq C_T \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| s^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \right\|_{L^q([0,t])}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

d'où on obtient aussi $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} = 0$. Remarquons au passage que même si on n'avait pas supposé que $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$, on aurait obtenu ce résultat de limite en zéro grâce au théorème de convergence dominée. C'est pour cela que dans l'énoncé du théorème, la condition $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$ n'apparaît pas, étant toujours automatiquement vérifiée dès qu'on impose les autres hypothèses.

Passons à $\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\mathbb{E}}$. On a, pour tout $t \leq T$:

$$t^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\mathbb{E}} \leq C t^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{s^{1-\frac{r}{2}-\frac{1}{q}}} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} s^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} ds.$$

Si on indique $f(s) = \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} s^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \in L^q([0, T[)$, on obtient :

$$\begin{aligned} t^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\mathbb{E}} & \leq C \int_0^t \frac{(t-s)^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} + s^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}}}{(t-s)^{\frac{1}{2}} s^{1-\frac{r}{2}-\frac{1}{q}}} f(s) ds \\ & \leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{r}{2}+\frac{1}{q}}} \frac{1}{s^{1-\frac{r}{2}+\frac{1}{q}}} f(s) ds \\ & \quad + C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}} f(s) ds \\ & = I + II. \end{aligned}$$

Nous allons estimer ces deux intégrales à l'aide des inégalités de Hölder et de Young étendues aux espaces de Lorentz. Commençons par I . Définissons

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(s) & 0 < s < T \\ 0 & s < 0, s > T. \end{cases}$$

On a alors $\tilde{f} \in L^q(\mathbb{R})$. Si on note $\alpha = 1 - \frac{r}{2} - \frac{1}{q}$ on a $\alpha \in]0, 1[$ et $\frac{1}{|s|^\alpha} \in L^{\frac{1}{\alpha}, \infty}(\mathbb{R})$, d'où $\frac{1}{|s|^\alpha} \tilde{f}(s) \in L^{\sigma, q}(\mathbb{R})$, où $\frac{1}{\sigma} = \alpha + \frac{1}{q}$. Par ailleurs, $\frac{1}{|s|^{1-\alpha}} \in L^{\frac{1}{1-\alpha}, \infty}(\mathbb{R})$ donc $\frac{1}{|s|^{1-\alpha}} * \frac{1}{|s|^\alpha} \tilde{f}(s) \in L^{t, q}(\mathbb{R})$, avec $\frac{1}{t} + 1 = \frac{1}{\sigma} + 1 - \alpha = \frac{1}{q} + 1$. On a alors $|I| \leq \frac{1}{|s|^{1-\alpha}} * \frac{1}{|s|^\alpha} \tilde{f}(s) \in L^q(\mathbb{R})$.

Quant à la deuxième intégrale, par des considérations tout à fait analogues, on démontre que $II \in L^q(\mathbb{R})$, d'où, en particulier :

$$\begin{aligned} \left\| t^{\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q}} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\mathbb{E}} \right\|_{L^q(]0, T])} &\leq C \|f(s)\|_{L^q(]0, T])} \\ &\leq C \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \left\| s^{\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q}} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \right\|_{L^q(]0, T])}. \end{aligned}$$

On peut maintenant conclure de façon analogue au cas $q = +\infty$ en choisissant un ensemble fermé et borné $W_{T, \rho, R} \subset W_T$ et en démontrant que la transformation $F(\vec{u}) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds$ y est contractante.

Un lemme d'équivalence

Pour achever la preuve du théorème en montrant qu'on a bien $\vec{u}(t) \in C([0, T], B_{\mathbb{E}}^{-(1-r), q})$ pour tout $q \in]\frac{2}{2-r}, +\infty]$ (pour $q = +\infty$ on prendra plutôt $\overline{\mathcal{S}}^{B_{\mathbb{E}}^{-(1-r), \infty}}$), nous prouvons le lemme suivant.

Lemme 2.22

Soient $\vec{u}_0 \in \mathcal{S}'$ et \vec{u} une solution faible des équations de Navier–Stokes avec donnée initiale \vec{u}_0 . Soient \mathbb{E} , r , q comme dans le théorème 2.21, $q < +\infty$. Alors, les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

- i) $\forall T' < T \quad t^{\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q}} \vec{u}(t) \in L^q(]0, T'[, \mathbb{E})$, $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T[, L^\infty)$;
- ii) $\vec{u}(t) \in C([0, T[, B_{\mathbb{E}}^{-(1-r), q})$, $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T[, L^\infty)$.

Pour $q = +\infty$ le même résultat reste vrai si on considère $\overline{\mathcal{S}}^{B_{\mathbb{E}}^{-(1-r), \infty}}$ et qu'on ajoute en i) l'hypothèse $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$.

PREUVE : Montrons d'abord i) \Rightarrow ii). Nous analysons seulement le cas $q < +\infty$, l'autre cas se traitant de façon similaire. On a vu au cours de la preuve du théorème 2.21 que le

terme bilinéaire $B(\vec{u}, \vec{v})$ est bicontinu sur l'espace

$$W_{T'} = \left\{ \vec{u} \in \tau'([0, T'] \times \mathbb{R}^3) : \begin{cases} \sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T'[, L^\infty) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0 \\ t^{\frac{1-r}{2}} \|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{E}} \in L^q\left(]0, T'[, \frac{dt}{t}\right) \end{cases} \right\}.$$

Si on suppose donc que \vec{u} est une solution appartenant à $W_{T'}$, on aura que $B(\vec{u}, \vec{u}) \in W_{T'}$ et donc $e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in W_{T'}$, ce qui implique $\vec{u}_0 \in \mathbb{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}$ grâce à la caractérisation des espaces de Besov à indice s négatif à l'aide du noyau de la chaleur (proposition 2.3). Par ailleurs, $\forall t_0 \in]0, T'[$, \vec{u} est encore solution sur $[t_0, T'[$ avec donnée initiale $\vec{u}_{t_0} = \vec{u}(t_0)$:

$$\vec{u}(t) = e^{(t-t_0)\Delta} \vec{u}_{t_0} - \int_{t_0}^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds,$$

ce qui donne, pour la même raison que précédemment, $\vec{u}_{t_0} \in \mathbb{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}$. On a de plus un contrôle uniforme de la norme $\mathbb{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}$ de $\vec{u}(t)$; en effet, pour tout $t_0 \in]0, T'[$, on a :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_{t_0}\|_{\mathbb{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}} &= \left\| (t-t_0)^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \left\| e^{(t-t_0)\Delta} \vec{u}_{t_0} \right\|_{\mathbb{E}} \right\|_{L^q(]t_0, T'[)} \\ &\leq \left\| (t-t_0)^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{E}} \right\|_{L^q(]t_0, T'[)} \\ &\quad + \left\| (t-t_0)^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \left\| \int_{t_0}^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds \right\|_{\mathbb{E}} \right\|_{L^q(]t_0, T'[)} \\ &\leq \left\| t^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{E}} \right\|_{L^q(]0, T'[)} + \left\| t^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|B(\vec{u}, \vec{u})(t)\|_{\mathbb{E}} \right\|_{L^q(]0, T'[)} \\ &\leq \|\vec{u}\|_{W_{T'}} + C \sup_{0 < t < T'} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} \left\| t^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{E}} \right\|_{L^q(]0, T'[)}. \end{aligned}$$

On a donc démontré que $\vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T'[, \mathbb{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q})$.

On examine maintenant la continuité en $t_0 = 0$. On a $\lim_{t \rightarrow 0} e^{t\Delta} \vec{u}_0 = \vec{u}_0$ dans $\mathbb{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}$; il faut ensuite montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} \|B(\vec{u}, \vec{u})(t)\|_{\mathbb{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}} = 0$. Puisque $\dot{\mathbb{B}}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q} \subset \mathbb{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}$, montrons de plus que $\lim_{t \rightarrow 0} \|B(\vec{u}, \vec{u})(t)\|_{\dot{\mathbb{B}}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}} = 0$. Nous utilisons une décomposition dyadique. Pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$\begin{aligned} \|B(\vec{u}, \vec{u})(t)\|_{\dot{\mathbb{B}}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}}^q &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{-j(1-r)} \|\Delta_j B(\vec{u}, \vec{u})(t)\|_{\mathbb{E}})^q \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-jq(1-r)} \left\| \int_0^t \Delta_j e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds \right\|_{\mathbb{E}}^q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-jq(1-r)} \left(\int_0^t \inf \left(2^j, \frac{2^j}{(t-s)^{\frac{\alpha}{2}} 2^{j\alpha}} \right) \|\vec{u} \otimes \vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}} ds \right)^q \\
&\leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jqr} \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{\alpha}{4}} 2^{j\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{s^{1-\frac{r}{2}-\frac{1}{q}}} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} s^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}} ds \right)^q \\
&\leq C \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \right)^q \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jq(r-\frac{\alpha}{2})} \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{\alpha p}{4}}} \frac{1}{s^{(1-\frac{r}{2}-\frac{1}{q})p}} ds \right)^{\frac{q}{p}} \times \\
&\quad \int_0^t s^{(\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}}^q ds,
\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Comme $q > \frac{2}{2-r}$ suivant l'hypothèse du théorème 2.21, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(\frac{r}{2} \pm \frac{\varepsilon}{4})p < 1$; on a alors, en choisissant $\alpha = 2r - \varepsilon$ pour $2^j < \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\alpha = 2r + \varepsilon$ pour $2^j \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$:

$$\begin{aligned}
\|B(\vec{u}, \vec{u})(t)\|_{\dot{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}}^q &\leq C \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \right)^q \left[\sum_{2^j < \frac{1}{\sqrt{t}}} 2^{jq\frac{\varepsilon}{2}} \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{(\frac{r}{2}-\frac{\varepsilon}{4})p}} \frac{1}{s^{1-\frac{r}{2}}} ds \right)^{\frac{q}{p}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{2^j \geq \frac{1}{\sqrt{t}}} 2^{-jq\frac{\varepsilon}{2}} \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{(\frac{r}{2}+\frac{\varepsilon}{4})p}} \frac{1}{s^{1-\frac{r}{2}}} ds \right)^{\frac{q}{p}} \right] \int_0^t s^{(\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}}^q ds \\
&\leq C \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \right)^q \left(\int_0^t s^{(\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}}^q ds \right) \left(\sum_{2^j < \frac{1}{\sqrt{t}}} 2^{jq\frac{\varepsilon}{2}} t^{\frac{\varepsilon q}{4}} + \sum_{2^j \geq \frac{1}{\sqrt{t}}} 2^{-jq\frac{\varepsilon}{2}} t^{-\frac{\varepsilon q}{4}} \right) \\
&\leq C \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \right)^q \int_0^t s^{(\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}}^q ds \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Venons-en à la continuité en $t_0 \neq 0$ et supposons $t > t_0$.

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}(t) - \vec{u}(t_0)\|_{\dot{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}} &= \|B(\vec{u}, \vec{u})(t) - B(\vec{u}, \vec{u})(t_0)\|_{\dot{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}} \\
&\leq \|B(\vec{u}, \vec{u})(t) - B(\vec{u}, \vec{u})(t_0)\|_{\dot{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}} \\
&= \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds - \int_0^{t_0} e^{(t_0-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds \right\|_{\dot{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}} \\
&\leq \left\| \int_0^{t_0} (e^{(t-s)\Delta} - e^{(t_0-s)\Delta}) \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds \right\|_{\dot{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}} \\
&\quad + \left\| \int_{t_0}^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds \right\|_{\dot{B}_{\mathbb{E}}^{-(1-r),q}} \\
&= A + B.
\end{aligned}$$

Estimons A lorsque t tend vers t_0 . On a :

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{t_0} (e^{(t-s)\Delta} - e^{(t_0-s)\Delta}) \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds \right\|_{\dot{B}_E^{-(1-r),q}} &= \\ \left\| (e^{(t-t_0)\Delta} - \text{Id}) \int_0^{t_0} e^{(t_0-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds \right\|_{\dot{B}_E^{-(1-r),q}} \end{aligned}$$

car $B(\vec{u}, \vec{u})(t_0) \in \dot{B}_E^{-(1-r),q}$ et le noyau de la chaleur agit continûment sur $\dot{B}_E^{-(1-r),q}$. De plus, pour tout $g \in \dot{B}_E^{-(1-r),q}$ on a $\lim_{t \rightarrow t_0} (e^{(t-t_0)\Delta} - \text{Id}) g = 0$ dans $\dot{B}_E^{-(1-r),q}$, d'où $\lim_{t \rightarrow t_0} A = 0$.

Quant à B, on a, pour t tendant vers t_0 :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds \right\|_{\dot{B}_E^{-(1-r),q}}^q \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(2^{-j(1-r)} \left\| \Delta_j \int_{t_0}^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds \right\|_E \right)^q \\ &\leq C \left(\sup_{t_0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \right)^q \int_{t_0}^t s^{(\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_E^q ds \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0 \end{aligned}$$

et ceci grâce au calcul fait pour t tendant vers 0. Le cas $t < t_0$ se traitant de façon analogue, on en déduit que $\vec{u}(t) \in C([0, T'], \dot{B}_E^{-(1-r),q})$ pour tout $T' < T$ ce qui achève la preuve.

Montrons maintenant ii) \Rightarrow i). Nous mettons l'accent sur le fait que la classe de solutions qu'on a choisie est une classe d'unicité; en outre, les classes suivantes coïncident toutes :

$$\text{A) } \vec{u}(t) \in C([0, T[, B_E^{-(1-r),q}), \sqrt{t} \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T[, L^\infty), \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0;$$

$$\text{B) } \vec{u}(t) \in C([0, T[, B_E^{-(1-r),q}), \sqrt{t} \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T[, L^\infty);$$

$$\text{C) } \vec{u}(t) \in C([0, T[, B_E^{-(1-r),q}), \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T[, L^\infty)$$

et ceci grâce à un argument de compacité dû à H. Brézis ([Bré94]), qui dit fondamentalement qu'il n'est pas nécessaire d'imposer le comportement de la norme L^∞ à l'origine, dès que la solution est une fonction *continue* du temps à valeurs dans un espace de Banach. On récupère cette information grâce à des estimations *uniformes* en dehors de l'origine et à un théorème d'unicité. Nous adaptons cette remarque à notre cas présent.

Supposons donc $\vec{u}(t) \in C([0, T[, B_E^{-(1-r),q}), \sqrt{t} \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T[, L^\infty)$; nous considérerons encore $q < +\infty$ pour simplifier l'exposé. Soit $\varepsilon \in]0, T[$; comme $\vec{u}(\varepsilon) \in B_E^{-(1-r),q}$, il existe $T^* = T^*(\vec{u}(\varepsilon))$ tel qu'on peut construire sur $[\varepsilon, \varepsilon + T^*]$ une solution « de Kato » (comme dans le théorème précédent)

$$\vec{v}_\varepsilon(t) = e^{(t-\varepsilon)\Delta} \vec{u}(\varepsilon) - \int_\varepsilon^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\varepsilon \otimes \vec{v}_\varepsilon(s) ds,$$

avec $\vec{u}(\varepsilon)$ comme donnée initiale et appartenant à l'espace

$$\mathcal{E}_{\infty, \bar{T}^*} = \left\{ \vec{v}(t) \in C \left(]\varepsilon, \bar{T}^*[, B_E^{-(1-r), q} \right) : \begin{cases} \sqrt{t - \varepsilon} \vec{v}(t) \in L^\infty (]\varepsilon, \bar{T}^*[, L^\infty) \\ (t - \varepsilon)^{\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q}} \vec{v}(t) \in L^q (]\varepsilon, \bar{T}^*[, E) \end{cases} \right\}$$

où $\bar{T}^* = \inf(T, \varepsilon + T^*)$ (la continuité découlant de la première partie de cette preuve). Par ailleurs, \vec{u} est aussi solution avec donnée initiale $\vec{u}(\varepsilon)$ dans $\mathcal{E}_{\infty, \bar{T}^*}$, car en dehors de $t = 0$ elle est bornée ; grâce à l'unicité des solutions dans $\mathcal{E}_{\infty, \bar{T}^*}$, \vec{u} et \vec{v}_ε coïncident sur $]\varepsilon, \bar{T}^*]$. Or, si $\bar{T} \in]0, T[$ et $\varepsilon \in [0, \bar{T}]$, $\vec{u}(\varepsilon)$ décrit un ensemble compact K dans $B_E^{-(1-r), q}$. Le temps de vie $T^* + \varepsilon$ d'une solution \vec{v}_ε « de Kato », avec donnée initiale $\vec{u}(\varepsilon) \in K$ ne dépend donc que de $\|\vec{u}(\varepsilon)\|_{B_E^{-(1-r), q}}$ et donc est uniformément minoré sur K . Soit donc $T(K)$ le temps de vie commun aux solutions \vec{v}_ε si $\varepsilon \in [0, \bar{T}]$. On a aussi :

$$\sup_{\varepsilon \in [0, \bar{T}]} \int_\varepsilon^{\varepsilon + T(K)} s^{(\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_E^q ds < +\infty$$

car cette norme aussi dépend uniquement de $\|\vec{u}(\varepsilon)\|_{B_E^{-(1-r), q}}$ (voir la preuve du théorème). Si on choisit $T^\bullet \leq T(K)$, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{T^\bullet} s^{(\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_E^q ds &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{T^\bullet} s^{(\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_E^q ds \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{\varepsilon + T(K)} s^{(\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_E^q ds < +\infty. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de montrer que cela est vrai pour tout $T^\bullet < T$. Nous utilisons le même argument, comme l'a fait aussi R. May [May] pour démontrer la régularité des solutions des équations de Navier–Stokes dans $C([0, T], L^3)$. Soit donc T_1 le temps maximal tel que pour tout $\tilde{T} < T_1$:

$$\int_0^{\tilde{T}} s^{(\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_E^q ds < +\infty$$

et supposons $T_1 < T$. L'ensemble $H = \{\vec{u}(t)\}_{t \in [0, T_1]}$ est un compact de $B_E^{-(1-r), q}$. Il existe donc $T(H) > 0$ tel que $\forall \tau \in [0, T_1]$ la solution « de Kato » avec donnée initiale $\vec{u}(\tau)$ soit définie sur $[\tau, \tau + T(H)]$. Soit donc $t_0 = \max\left(T_1 - \frac{T(H)}{2}, \frac{T_1}{2}\right) \in]0, T_1[$ et soit \vec{v}_0 la solution « de Kato » avec donnée initiale $\vec{u}(t_0)$. Par ailleurs, \vec{u} est aussi solution avec donnée initiale $\vec{u}(t_0)$ sur $[t_0, T[$ et, par l'unicité dans la classe B), on a que \vec{u} et \vec{v}_0 coïncident sur $[t_0, \min(T, t_0 + T(H))]$. Puisque $T_2 = \min(T, t_0 + T(H)) > T_1$, on a donc que, pour tout

\tilde{T} tel que $T_1 \leq \tilde{T} < T_2$, pour $\varepsilon \in]0, \frac{T_1 - t_0}{2}[$:

$$\int_0^{\tilde{T}} s^{(\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}}^q ds \leq C \left\{ \int_0^{t_0 + \varepsilon} s^{(\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}}^q ds + \int_{t_0 + \varepsilon}^{\tilde{T}} (s - t_0)^{(\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q})q} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}}^q ds \right\} < +\infty,$$

ce qui contredit la maximalité de T_1 . ♦

Corollaire 2.23

Les classes suivantes sont équivalentes :

- a) $\vec{u}(t) \in C([0, T[, B_{\mathbb{E}}^{-(1-r), q})$, $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^{\infty}([0, T[, L^{\infty})$, $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^{\infty}} = 0$;
- b) $\vec{u}(t) \in C([0, T[, B_{\mathbb{E}}^{-(1-r), q})$, $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^{\infty}([0, T[, L^{\infty})$;
- c) $\vec{u}(t) \in C([0, T[, B_{\mathbb{E}}^{-(1-r), q})$, $\vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^{\infty}(]0, T[, L^{\infty})$;
- d) $t^{\frac{1-r}{2} - \frac{1}{q}} \vec{u}(t) \in \bigcap_{\tilde{T} < T} L^q(]0, \tilde{T}[, \mathbb{E})$, $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^{\infty}([0, T[, L^{\infty})$

(pour $q = +\infty$ il faudra considérer la fermeture de l'espace des fonctions de test et ajouter l'hypothèse $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^{\infty}} = 0$ dans d).

De plus, ce sont des classes d'unicité.

2.4.1 Remarques sur le cas de $L^q(]0, T[, L^p)$

Comme on a déjà remarqué, les conditions (2.12) et (2.13) du théorème 2.21 sont vérifiées par les espaces sur-critiques pour lesquels L^{∞} est un espace de multiplicateurs. Considérons en particulier le cas des espaces L^p pour $p > 3$. Si $\mathbb{E} = L^p$, alors $\mathbb{E} \subset B_{\infty}^{-\frac{3}{p}, \infty}$ et donc cela nous amène à analyser par exemple l'espace $B_p^{-(1-\frac{3}{p}), q}$ pour $\frac{2}{2-\frac{3}{p}} < q < +\infty$. Si, en particulier, on prend le cas $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2p}$ (qui est permis car $q = \frac{2p}{p-3} > \frac{2}{2-\frac{3}{p}}$), la solution \vec{u} construite dans le théorème 2.21 appartient à l'espace $L^q(]0, T[, L^p)$. Ce cas avait été déjà traité dans [FJR72], [GM89] et [Pla96]. F. Planchon avait aussi montré que si $3 < p < 9$, la condition supplémentaire $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^{\infty}(]0, T[, L^{\infty})$ n'est même pas nécessaire pour garantir l'unicité de la solution construite, car le terme bilinéaire est bien continu dans $L^q(]0, T[, L^p)$ et, de plus, si $\vec{u}_0 \in L^3 \cap B_p^{-(1-\frac{3}{p}), q}$, cette même solution est aussi

dans $C([0, T[, L^3) \subset C\left([0, T[, B_p^{-\left(1-\frac{3}{p}\right), \frac{2p}{p-3}}\right)$. La classe d'unicité devient donc, dans ce cas :

$$\left\{ \vec{u}(t) \in C\left([0, T[, B_p^{-\left(1-\frac{3}{p}\right), \frac{2p}{p-3}}\right) \cap L_{\text{loc}}^q([0, T[, L^p) \right\},$$

qui coïncide avec les classes présentées dans le corollaire 2.23.

2.5 Une approche alternative à travers le théorème de H. Koch et D. Tataru

Jusqu'à présent nous avons présenté le théorème d'existence de solutions de Kato locales en temps sous deux formes : l'une concernant les espaces réguliers critiques et sur-critiques et l'autre les espaces critiques singuliers (dans ce dernier cas la notion d'espace « critique » en tant qu'espace où on ne peut pas montrer un théorème de point fixe sans hypothèses supplémentaires a priori n'a pas vraiment de sens car déjà le produit $\vec{u} \otimes \vec{u}$ n'est pas bien défini). La démarche a été celle de partir d'une donnée \vec{u}_0 dans un espace X et de construire directement une solution $\vec{u}(t)$ dans $C([0, T[, X)$. La limite de cette approche apparaît évidente dans la condition suivante, contenue dans le théorème 2.20 : il existe $\sigma \in [0, 1]$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que $\forall \varepsilon > 0$ il existe $M(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\forall f, g \in E \cap L^\infty \quad \|\Delta_j(fg)\|_E \leq M(\varepsilon) \|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \varepsilon 2^{j\sigma\alpha} \|f\|_E^\alpha \|f\|_{L^\infty}^{1-\alpha} \|g\|_E \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (2.11)$$

en plus de la condition sur q dans le théorème 2.21 et aux lourdeurs techniques manifestes. La condition (2.11) n'est vérifiée par exemple que par les espaces de Besov et de Triebel avec $\frac{3}{p} - 1 \leq s < \frac{3}{p}$ et $1 \leq p < 3$; pour $s > \frac{3}{p}$ on s'en sort autrement mais la méthode présentée ne peut pas être appliquée et pour $s = \frac{3}{p}$ ou bien $3 \leq p$ et $s \geq 0$ on ne sait plus comment procéder.

On peut envisager un autre point de vue qui consisterait plutôt en un théorème de régularité. Existe-t-il un espace « maximal » M où le théorème d'existence de Kato fonctionne ? Si cela était le cas, on pourrait considérer pour une donnée $\vec{u}_0 \in X \subset M$ la solution de Kato dans l'espace maximal M et chercher à démontrer que les itérées du procédé de point fixe convergent aussi dans l'espace plus régulier X . Ce n'est pas très loin de l'approche par laquelle M. Cannone d'abord [Can95] et F. Planchon ensuite [Pla96] construisaient une solution globale dans L^3 en imposant à la donnée initiale \vec{u}_0 juste une condition de petitesse dans une norme plus faible, notamment dans un espace de Besov avec indice $q = \infty$. Le candidat naturel pour une telle approche reste toujours l'espace de Hölder $C^{-1} = B_\infty^{-1, \infty}$ mais à ce jour il n'a pas été démontré que le problème de Cauchy est bien posé dans cet espace, même en imposant des conditions supplémentaires à la solution. Ce n'est que tout

récemment que H. Koch et D. Tataru [KT99] ont montré un théorème d'existence dans l'espace $\dot{F}_\infty^{-1,2} \subset B_\infty^{-1,\infty}$ (l'espace des dérivées des fonctions de l'espace BMO), qui s'adapte aussi au cas non homogène $F_\infty^{-1,2} = \nabla \text{bmo}$. Malgré son indice $q = 2$, il contient tous les espaces que nous avons considérés jusqu'ici. Il s'agira alors de démontrer un théorème de régularité des solutions de Koch–Tataru pour une donnée plus régulière.

2.5.1 L'espace BMO

Pour un exposé complet sur l'espace BMO et ses propriétés, nous renvoyons au livre de E. Stein [Ste93]. Nous rappelons quand-même les quelques notions qui nous serviront par la suite.

L'espace BMO (*Bounded Mean Oscillation*) est le dual de l'espace de Hardy \mathcal{H}^1 et est défini de la façon suivante :

Définition 2.24

Une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ appartient à BMO s'il existe $A > 0$ tel que :

$$\sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx \leq A < +\infty$$

où $B = B(x_0, R)$ est une boule de \mathbb{R}^3 et $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B |f(x)| dx$.

Si on note $\|f\|_{\text{BMO}} = \inf A$, il s'ensuit que pour toute constante $C \in \mathbb{R}$ on a $\|C\|_{\text{BMO}} = 0$.

Il est évident que $L^\infty \subset \text{BMO}$ mais les deux espaces ne coïncident pas : la fonction $f(x) = \ln|x|$ qui appartient à BMO en est un exemple.

Nous ne rentrons pas dans les détails de cet espace, mais en donnons une caractérisation à l'aide des mesures de Carleson obtenue par C. Feffermann et E. Stein [FS72]. Pour une définition d'une mesure de Carleson voir [Ste93].

Théorème 2.25 (Feffermann–Stein)

On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \text{BMO} &= \left\{ f \in \mathcal{S}' : \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{R > 0} \left(\frac{2}{|B(x_0, R)|} \int_{|x-x_0| \leq R} \int_{s=0}^R |s \vec{\nabla} e^{s^2 \Delta} f(x)|^2 \frac{ds}{s} dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{S}' : |s \vec{\nabla} e^{s^2 \Delta} f(x)|^2 dx \frac{ds}{s} \text{ est une mesure de Carleson} \right\}. \end{aligned}$$

On remarquera qu'il est équivalent d'effectuer le changement de variable $s = \sqrt{t}$ et d'écrire

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{R > 0} \left(\frac{1}{|B(x_0, R)|} \int_{|x-x_0| \leq R} \int_{t=0}^{R^2} |\sqrt{t} \vec{\nabla} e^{t \Delta} f(x)|^2 \frac{dt}{t} dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

où on a retrouvé le scaling habituel du noyau de la chaleur $e^{t\Delta}$.

On peut alors introduire l'espace des distributions qui sont des dérivées des fonctions de BMO. Il se caractérise de la façon suivante (voir [KT99] pour une démonstration).

Définition 2.26

$$\|f\|_{\nabla\text{BMO}} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{R > 0} \left(\frac{1}{|B(x_0, R)|} \int_{|x-x_0| \leq R} \int_{t=0}^{R^2} |e^{t\Delta} f(x)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\nabla\text{BMO} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{\nabla\text{BMO}} < +\infty \right\}.$$

À la différence de l'espace BMO, pour lequel il faut considérer les classes d'équivalence modulo les constantes, ∇BMO est un espace de Banach de distributions et il est intéressant de remarquer que :

$$\|\lambda f(\lambda x)\|_{\nabla\text{BMO}} = \|f\|_{\nabla\text{BMO}} \quad \lambda > 0$$

ce qui implique que $\nabla\text{BMO} \subset \dot{B}_{\infty}^{-1, \infty} \subset B_{\infty}^{-1, \infty}$.

Il est aussi possible de définir les versions non homogènes des espaces BMO et ∇BMO de la façon suivante :

Définition 2.27

$$\|f\|_{\text{bmo}} = \|e^{\Delta} f\|_{L^{\infty}} + \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 < R \leq 1} \left(\frac{1}{|B(x_0, R)|} \int_{|x-x_0| \leq R} \int_{t=0}^{R^2} |\sqrt{t} \vec{\nabla} e^{t\Delta} f(x)|^2 \frac{dt}{t} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{bmo} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{\text{bmo}} < +\infty \right\}$$

$$\|f\|_{\nabla\text{bmo}} = \|e^{\Delta} f\|_{L^{\infty}} + \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 < R \leq 1} \left(\frac{1}{|B(x_0, R)|} \int_{|x-x_0| \leq R} \int_{t=0}^{R^2} |e^{t\Delta} f(x)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\nabla\text{bmo} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{\nabla\text{bmo}} < +\infty \right\}.$$

On peut alors vérifier que $\nabla\text{bmo} \subset B_{\infty}^{-1, \infty}$ (pour plus de détails, voir [Lem]). Dans les définitions de bmo et de ∇bmo on peut également considérer l'extremum supérieur sur les boules de rayon plus petit qu'un certain R_0 fixé, $R_0 \neq 1$, en obtenant des normes équivalentes.

Pour finir, on peut considérer l'adhérence des fonctions de test dans les espaces que nous venons d'introduire, que nous indiquerons, suivant l'usage de la littérature, VMO, ∇VMO , vmo, ∇vmo .

Si on revient au langage habituel des décompositions de Littlewood–Paley et en notant \mathcal{M}_C l'espace des mesures de Carleson, il est possible de démontrer ([FJ90]) que :

$$\text{BMO} = \dot{F}_\infty^{0,2} = \{f \in \mathcal{S}'_0 : \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j f(x)|^2 dx \delta_{2^j}(t) \in \mathcal{M}_C\}$$

$$\text{bmo} = F_\infty^{0,2} = \{f \in \mathcal{S}' : S_0 f \in L^\infty \text{ et } \sum_{j \geq 0} |\Delta_j f(x)|^2 dx \delta_{2^j}(t) \in \mathcal{M}_C\}$$

$$\nabla \text{BMO} = \dot{F}_\infty^{-1,2} = \{f \in \mathcal{S}'_0 : \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-2j} |\Delta_j f(x)|^2 dx \delta_{2^j}(t) \in \mathcal{M}_C\}$$

$$\nabla \text{bmo} = F_\infty^{-1,2} = \{f \in \mathcal{S}' : S_0 f \in L^\infty \text{ et } \sum_{j \geq 0} 2^{-2j} |\Delta_j f(x)|^2 dx \delta_{2^j}(t) \in \mathcal{M}_C\}$$

2.5.2 Le théorème de H. Koch et D. Tataru

Le théorème démontré par H. Koch et D. Tataru est le suivant.

Théorème 2.28 (Koch–Tataru)

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, $\forall T \in]0, +\infty[$, $\forall \vec{u}_0 \in \nabla \text{bmo}$ telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et

$$\|\vec{u}_0\|_{\nabla \text{bmo}} \simeq \|e^{T\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} + \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 < t \leq T} \left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{t}} \int_{s=0}^t |e^{s\Delta} \vec{u}_0(x)|^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon,$$

il existe une unique fonction $\vec{u}(t)$ définie sur $[0, T[\times \mathbb{R}^3$ telle que :

- i) $\vec{u}(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds$,
- ii) $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty]0, T[, L^\infty)$,
- iii) $\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 < t \leq T} \left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{t}} \int_{s=0}^t |\vec{u}(s, x)|^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$.
En particulier $\forall \vec{u}_0 \in \nabla \text{vmo}$ telle que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ il existe $T = T(\vec{u}_0)$ et une unique fonction $\vec{u}(t)$ définie sur $[0, T[\times \mathbb{R}^3$ qui vérifie i), ii) et iii) et de plus :
- iv) $\sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$
- v) $\lim_{T \rightarrow 0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 < t \leq T} \left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{t}} \int_{s=0}^t |\vec{u}(s, x)|^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0$

Remarque. En utilisant l'argument que nous avons exposé dans le lemme d'équivalence 2.22, on peut facilement montrer que la solution de H. Koch et D. Tataru appartient en effet à l'espace $L^\infty]0, T[, \nabla \text{bmo}$ et grâce à la condition $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty]0, T[, L^\infty)$ elle est régulière en dehors de l'origine. On peut par ailleurs montrer [Koc99] qu'elle est en effet dans $C([0, T], \nabla \text{bmo})$ grâce à la propriété de stabilité par rapport aux données initiales qui se démontre toujours à l'aide d'une méthode de point fixe et au fait que si $\phi \in \mathcal{S} \cap \nabla \text{bmo}$, la solution \vec{u} correspondante appartient par exemple à $C([0, T], L^3) \subset C([0, T], \nabla \text{bmo})$.

En vue d'un théorème de régularité des solutions de Koch et Tataru, remarquons maintenant que l'espace ∇bmo contient tous les espaces considérés jusqu'à présent. On a, en effet, $B_{\infty}^{-r,\infty} \subset \nabla\text{bmo}$ pour tout $r \in]0, 1[$, d'où découlent facilement les inclusions des espaces sur-critiques :

- $\forall p > 3 \quad L^p \subset \nabla\text{bmo}$,
- $\forall p > 3, \forall q \in [1, +\infty[\quad L^{p,q} \subset \nabla\text{bmo}$,
- $\forall q > 3, \forall p$ tel que $1 \leq p \leq q \quad M_{p,q} \subset \nabla\text{bmo}$,
- $\forall p \in [1, +\infty[, \forall s > \frac{3}{p} - 1, \forall q \in [1, +\infty[\quad B_p^{s,q} \subset \nabla\text{bmo}$,
- $\forall p \in [1, +\infty[, \forall s > \frac{3}{p} - 1, \forall q \in [1, +\infty[\quad F_p^{s,q} \subset \nabla\text{bmo}$,
- $\forall r \in [0, 1[\quad \dot{X}^r \subset X^r \subset \nabla\text{bmo}$.

Pour ce qui concerne les espaces critiques, on a aussi que $B_p^{\frac{3}{p}-1,\infty} \subset \nabla\text{bmo} \quad \forall p > 3$ (voir [KT99]), d'où :

- $\forall p \in [1, +\infty[, \forall q \in [1, +\infty[\quad B_p^{\frac{3}{p}-1,q} \subset \nabla\text{bmo}$,
- $\forall p \in [1, +\infty[, \forall q \in [1, +\infty[\quad F_p^{\frac{3}{p}-1,q} \subset \nabla\text{bmo}$,
- $\forall p \in [1, +\infty[, \forall q \in [1, +\infty[\quad \dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,q} \subset \nabla\text{bmo}$,
- $\forall p \in [1, +\infty[, \forall q \in [1, +\infty[\quad \dot{F}_p^{\frac{3}{p}-1,q} \subset \nabla\text{bmo}$,
- $\forall p \in [1, 3] \quad \dot{M}_{p,3} \subset M_{p,3} \subset \nabla\text{bmo}$ (voir [Tay92]),
- $L^3 \subset L^{3,\infty} \subset \nabla\text{bmo}$,
- $\dot{X}^1 \subset X^1 \subset \nabla\text{bmo}$ (grâce à l'inclusion $\dot{X}^1 \subset X^1 \subset M_{2,3}$).

L'idée est maintenant la suivante : si $\vec{u}_0 \in E \cap \nabla\text{bmo}$, la solution de Koch et Tataru reste-t-elle dans E ? Comme dans le cas de l'approche directe que nous avons exposée dans les paragraphes 2.3 et 2.4, deux cas se présentent : les espaces réguliers et les espaces singuliers. Nous avons envie de nous affranchir de la condition (2.11), qui n'est pas vérifiée par tous les espaces que nous souhaitons inclure et de la condition $q > \frac{2}{2-r}$ du théorème 2.21 qui apporte une autre restriction inutile. Nous traiterons uniquement le cas des espaces réguliers ; l'autre cas sera décrit en détail dans la thèse de A. Zhioua [Zhi]. La raison d'une condition comme (2.11) vient de la nécessité de rendre contractant l'algorithme itératif des contractions, vu que le seul terme qui peut être rendu petit est $\sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty}$. Si, par contre, on peut situer le procédé de point fixe dans un autre espace (par exemple celui de Koch et Tataru), il suffira d'avoir une condition moins contraignante sur l'espace E considéré.

2.5.3 Un théorème de régularité

Voici donc l'énoncé du théorème.

Théorème 2.29 (Furioli – Lemarié–Rieusset)

Soient $\vec{u}_0 \in \nabla\text{vmo}$ vérifiant $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, $\vec{u}(t)$ la solution des équations de Navier–Stokes de donnée initiale \vec{u}_0 obtenue par un algorithme de point fixe par Koch et Tataru (théorème 2.28) et T_0 le temps maximal tel que $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T_0[, L^\infty)$. Supposons de plus $\vec{u}_0 \in E$ où E est un espace « de Kato » tel qu'il existe $C_E > 0$ vérifiant :

$$\|fg\|_E \leq C_E(\|f\|_E \|g\|_{L^\infty} + \|g\|_E \|f\|_{L^\infty}) \quad \forall f, g \in E \cap L^\infty. \quad (2.15)$$

Alors, $\vec{u}(t) \in C([0, T_0[, E)$.

En outre, si $\vec{u}_0 \in \nabla\text{VMO} \cap E$, il existe $\epsilon > 0$ indépendant de E tel que si $\|\vec{u}_0\|_{\nabla\text{BMO}} \leq \epsilon$ alors $T_0 = +\infty$ et donc $\vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, E)$.

PREUVE : Remarquons tout d'abord que le problème ne se situe qu'au voisinage de $t = 0$. En effet, nous rappelons que la solution de Koch et Tataru est dans $L_{\text{loc}}^\infty([0, T_0[, L^\infty)$; si on arrive donc à montrer qu'il existe $T_1 \leq T_0$ tel que $\vec{u}(t) \in C([0, T_1[, E)$, on pourra alors considérer pour $\tau > 0$ suffisamment petit le problème de donnée initiale $\vec{u}(T_1 - \tau) \in L^\infty \cap E$ et faire appel à la « loi du tout ou rien » (voir par exemple [Can95], page 64) qui dit fondamentalement que tant que la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ n'explose pas, il ne peut pas y avoir explosion de la norme $\|\cdot\|_E$.

Montrons alors qu'il existe T_1 tel que la solution de Koch et Tataru $\vec{u}(t)$ appartient à $C([0, T_1[, E)$. On considère les itérées du procédé de point fixe :

$$\begin{aligned} \vec{u}^0 &= e^{t\Delta} \vec{u}_0 \\ \vec{u}^{n+1} &= e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}^n, \vec{u}^n) \quad n \geq 0; \end{aligned}$$

on sait que ce procédé est contractant dans un fermé borné de l'espace des fonctions $\vec{u}(t)$ vérifiant pour un certain $T < T_0$ ne dépendant que de $\|\vec{u}_0\|_{\nabla\text{bmo}}$:

- i) $\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 < t \leq T} \left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{t}} \int_{s=0}^t |\vec{u}(s, x)|^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$
- ii) $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty([0, T[, L^\infty),$
- iii) $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0,$
- iv) $\lim_{T \rightarrow 0} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{0 < t < T} \left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \int_{|x-x_0| \leq \sqrt{t}} \int_{s=0}^t |\vec{u}(s, x)|^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$

On a donc en particulier $\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{u}^n(t)\|_{L^\infty} < \sigma$ avec σ aussi petit qu'on veut, quitte à considérer $T < T_1 \leq T_0$, et que $\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{u}^n(t) - \vec{u}^{n-1}(t)\|_{L^\infty} < C\eta^n$ avec $C > 0$, $\eta < 1$.

Remarquons d'abord que si $\vec{u}_0 \in E$, alors $e^{t\Delta}\vec{u}_0 \in C([0, +\infty[, E)$ et de plus si E_∞ est l'espace

$$E_\infty = \{\vec{u}(t) \in C([0, T], E) : \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} < +\infty, \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0\},$$

alors l'opérateur $B(\vec{u}, \vec{v}) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) ds$ est bicontinu sur E_∞ et, en particulier :

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_E &\leq C_E \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} (\sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \|\vec{v}(s)\|_E + \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \|\vec{u}(s)\|_E) ds \\ &\leq C_E (\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_E + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E). \end{aligned}$$

Ceci permet aussi de montrer comme d'habitude que $B(\vec{u}, \vec{v})(t) \in C([0, T], E)$, d'où, $\forall n \geq 0$, $\vec{u}^n(t) \in C([0, T], E)$.

Définissons maintenant deux suites numériques M_n et α_n de la façon suivante :

$$\begin{aligned} M_n &= \sup_{0 \leq k \leq n} \sup_{0 < t < T} \|\vec{u}^k(t)\|_E \\ \alpha_n &= \sup_{0 < t < T} \|\vec{u}^n(t) - \vec{u}^{n-1}(t)\|_E. \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$, d'où on pourra conclure que $\vec{u}(t) \in C([0, T], E)$ grâce à la convergence normale. On a donc :

$$\sup_{0 < t < T} \|\vec{u}^{n+1}(t)\|_E \leq M_n + \alpha_{n+1}$$

et

$$\begin{aligned} &\sup_{0 < t < T} \|\vec{u}^{n+1}(t) - \vec{u}^n(t)\|_E \\ &= \sup_{0 < t < T} \|B(\vec{u}^n - \vec{u}^{n-1}, \vec{u}^n)(t) + B(\vec{u}^{n-1}, \vec{u}^n - \vec{u}^{n-1})(t)\|_E \\ &\leq C_E \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}^n(s) - \vec{u}^{n-1}(s)\|_E (\sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}^n(s)\|_{L^\infty} + \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}^{n-1}(s)\|_{L^\infty}) + \\ &\quad C_E \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}^n(s) - \vec{u}^{n-1}(s)\|_{L^\infty} (\sup_{0 < s < T} \|\vec{u}^n(s)\|_E + \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}^{n-1}(s)\|_E) \\ &\leq C_E \alpha_n 2\sigma + C_E C \eta^n 2M_n. \end{aligned}$$

Si on choisit $\rho < 1$ tel que $2C_E\sigma < \rho < 1$ et en posant $A = 2C_EC$, on aura alors :

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} \leq \rho \alpha_n + AM_n \eta^n \\ M_{n+1} \leq M_n + \alpha_{n+1}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Nous voulons démontrer maintenant que $\{M_n\}_n$ est contrôlée et que $\{\alpha_n\}_n$ est bornée par une suite géométrique de raison inférieure à 1. Procédons alors par récurrence sur α_n et M_n . Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \rho, \eta < \gamma < 1$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$:

$$1 \leq \prod_{k=0}^n (1 + \gamma^k) \leq \frac{1 - \frac{\rho}{\gamma}}{\frac{A}{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^n \quad (2.17)$$

(ce qui est admissible car $\prod_{k=0}^n (1 + \gamma^k) \geq 1 \forall n$ et $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + \gamma^k) < +\infty$ tandis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\rho}{\gamma}}{\frac{A}{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{\eta}\right)^n = +\infty$ puisque $\gamma > \rho$ et $\gamma > \eta$). Soit de plus $C_0 = \sup(M_{n_0}, \gamma^{-n_0} \alpha_{n_0})$. Démontrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq n_0 \quad \begin{cases} \alpha_n \leq C_0 \gamma^n \\ M_n \leq C_0 \prod_{k=1}^n (1 + \gamma^k). \end{cases} \quad (2.18)$$

Pour $n = n_0$ c'est vrai par l'hypothèse faite sur C_0 . Supposons (2.18) vrai pour n et montrons-le pour $n + 1$. On a, grâce à (2.16), à l'hypothèse de récurrence et à (2.17) :

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &\leq C_0 \rho \gamma^n + A \eta^n C_0 \prod_{k=1}^n (1 + \gamma^k) \\ &\leq C_0 \gamma^{n+1} \left\{ \frac{\rho}{\gamma} + \frac{A}{\gamma} \left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^n \prod_{k=1}^n (1 + \gamma^k) \right\} \\ &\leq C_0 \gamma^{n+1} \end{aligned}$$

et, en utilisant ce dernier résultat, on a :

$$\begin{aligned} M_{n+1} &\leq C_0 \prod_{k=1}^n (1 + \gamma^k) + C_0 \gamma^{n+1} \\ &\leq C_0 \prod_{k=1}^{n+1} (1 + \gamma^k). \end{aligned}$$

On a donc obtenu $\vec{u}(t) \in C([0, T], E)$ avec $T < T_1 \leq T_0$. ♦

Remarque. Il est aussi possible de démontrer que $T_1 = T_0$ grâce à un argument de bootstrap. Supposons en effet $T_1 < T_0$. Le tout est d'arriver à une absurdité en montrant que si on repose un problème de Cauchy tout proche de T_1 , en $T_1 - \tau$ où $\vec{u}(T_1 - \tau) \in L^\infty \cap E$, on peut contrôler le temps minimal de vie \tilde{T} de la solution correspondante dans $L^\infty \left(]T_1 - \tau, T_1 - \tau + \tilde{T}[, L^\infty\right) \cap C \left([T_1 - \tau, T_1 - \tau + \tilde{T}], E\right)$ (qui coïncidera avec $\vec{u}(t)$ grâce à l'unicité dans $L^\infty \left(]T_1 - \tau, T_1 - \tau + \tilde{T}[, L^\infty\right)$) et ceci indépendamment de la donnée initiale, de façon à dépasser l'instant T_1 . Ceci revient donc à montrer que pour tout $M > 0$ il existe $\bar{T} > 0$ tel que pour tout $\vec{u}_0 \in L^\infty \cap E$ vérifiant $\|\vec{u}_0\|_{L^\infty} \leq M$ il

existe une solution des équations de Navier–Stokes $\vec{v}(t) \in L^\infty (]0, \bar{T}[, L^\infty) \cap C ([0, \bar{T}], E)$ de donnée initiale \vec{u}_0 . Pour ce faire, il suffit de construire $\vec{v}(t)$ comme limite de la suite $\vec{v}^0 = e^{t\Delta}\vec{u}_0$, $\vec{v}^{n+1} = \vec{v}^0 + B(\vec{v}^n, \vec{v}^n)$ $n \geq 0$ dans $L^\infty (]0, \bar{T}[, L^\infty)$ en choisissant \bar{T} tel que $\bar{T} = \frac{K_E}{M^2} \leq \frac{K_E}{\|\vec{u}_0\|_{L^\infty}^2}$ (où K_E est une constante dépendant de l'espace E mais pas de la donnée initiale \vec{u}_0) pour que la suite soit convergente dans la boule

$$\mathcal{B}_{\bar{T}} = \left\{ \sup_{0 < t < \bar{T}} \|\vec{v}(t)\|_{L^\infty} \leq 2 \|\vec{u}_0\|_{L^\infty} \right\}$$

et tel que $\sup_{0 < t < \bar{T}} \sqrt{t} \|e^{t\Delta}\vec{u}_0\|_{L^\infty} < \frac{1}{2C_E}$ et que $\sup_{0 < t < \bar{T}} \sqrt{t} \|\vec{v}^n(t) - \vec{v}^{n-1}(t)\|_{L^\infty} < C\eta^n$ avec $C > 0$, $\eta < 1$, pour pouvoir réappliquer le raisonnement par récurrence que nous avons exposé dans la preuve au voisinage de $t = 0$.

L'intérêt du théorème 2.29 vient du fait que l'hypothèse (2.15) est vérifiée par tous les espaces réguliers considérés jusqu'ici et plus généralement par :

- $B_p^{s,q}$ $s > 0$, $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$,
- $F_p^{s,q}$ $s > 0$, $1 \leq p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$;

(pour une démonstration on peut reprendre l'argument utilisé dans la vérification faite au paragraphe 2.3).

Le même résultat vaut, *mutatis mutandis*, pour les espaces $B_E^{1-r,q}$ considérés dans le paragraphe 2.4. Grâce au lemme d'équivalence 2.22, il s'agira de montrer que $t^{\frac{1-r}{2}-\frac{1}{q}}\vec{u}(t) \in L^q (]0, T[, E)$ (voir [Zhi]).

2.5.4 Le cas de $B_E^{0,q}$

On aura pu remarquer que jusqu'ici nous n'avons pu inclure en aucun cas les espaces de Besov $B_E^{0,q}$. On aurait dû les considérer dans le cadre des espaces « singuliers », mais à cause de l'indice $s = 0$ on ne peut pas en donner une caractérisation simple uniquement à l'aide d'estimations sur le semi-groupe de la chaleur $e^{t\Delta}$, comme c'était le cas pour $s < 0$ (voir propriété (2.3)) et la méthode utilisée dans le théorème 2.21 ne peut pas s'appliquer. Dans ce dernier paragraphe nous allons proposer deux solutions à ce problème, d'abord en adaptant au cas non homogène un théorème de Y. Meyer et M. A. Muschietti [Mey96] et ensuite en formulant une version un peu modifiée du théorème de régularité des solutions de Koch et Tataru, qui s'applique bien au cas de $B_E^{0,q}$. L'idée centrale dans les deux cas est celle de compenser le manque de régularité de l'espace de Besov en imposant une plus grande régularité dans l'espace auxiliaire où on fait converger l'algorithme de point fixe, en plus de la condition habituelle $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty (]0, T[, L^\infty)$. Dans le cas du théorème de Meyer–Muschietti, on peut inclure le cas des espaces critiques, homogènes et non homogènes (par exemple $\dot{B}_3^{0,q}$, $B_3^{0,q}$, $1 \leq q \leq +\infty$) tandis que pour le théorème de persistance de la

régularité nous serons obligés de considérer seulement le cas sur-critique. Dans ce dernier cas, nous avons traité pour des raisons de simplicité seulement le cas $q = +\infty$, même si le cas $q < +\infty$ ne devrait pas comporter de difficultés particulières.

Théorème 2.30 (Meyer–Muschiatti)

Soit E un espace « de Kato » tel qu'il existe $\sigma \in]0, 1]$ et $C_E > 0$ tels que pour tous $f, g \in E$ où g vérifie de plus $g \in L^\infty$ et $\Lambda^\sigma g \in E$ on ait :

$$\|fg\|_E \leq C_E \|f\|_E (\|g\|_{L^\infty} + \|\Lambda^\sigma g\|_E) \quad (2.19)$$

(où Λ^σ est l'opérateur pseudo-différentiel ayant pour symbole $|\xi|^\sigma$). Supposons de plus que pour $\sigma = 1$ les transformations de Riesz agissent sur E . Alors, pour tout $\vec{u}_0 \in E$ tel que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ il existe $T = T(\vec{u}_0) > 0$ et une unique solution des équations de Navier–Stokes $\vec{u}(t) \in C([0, T], E)$ telle que $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, C_0)$, $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$, $\sqrt{t} \Lambda^\sigma \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, E)$, $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\Lambda^\sigma \vec{u}(t)\|_E = 0$.

Nous remarquons tout de suite que la condition (2.19), vérifiée banalement par tous les espaces admettant L^∞ comme espace de multiplicateurs, est aussi satisfaite par les espaces $B_F^{0,q}$ avec $F = L^p$ avec $3 \leq p < +\infty$, $F = L^{p,t}$ pour $3 \leq p < +\infty$, $1 \leq t \leq +\infty$, $F = \dot{M}_{p,q}$ pour $3 \leq q < +\infty$, $p \leq q$ (nous renvoyons à [Kat92] ou à [Tay92] pour une démonstration du fait que les transformations de Riesz agissent sur $\dot{M}_{p,3}$). En effet, considérons $\sigma \in]0, 1]$ tel que $F \subset \dot{B}_{\infty}^{-\sigma, \infty}$, ce qui est bien possible pour tous les espaces ci-dessus. En écrivant le paraproduit non homogène

$$fg = S_0 f S_0 g$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{k \geq 0} \Delta_k f S_{k-2} g + \sum_{k \geq 0} \Delta_k g S_{k-2} f + \sum_{k \geq 0} \sum_{l=-2}^2 \Delta_k f \Delta_{k+l} g \\ &+ \Delta_{-2} f \Delta_0 g + \Delta_{-1} f \Delta_1 g + \Delta_{-1} f \Delta_0 g, \end{aligned}$$

on peut démontrer que si $f \in B_F^{0,q}$ et $g \in L^\infty \cap B_F^{\sigma,q}$, alors $fg \in B_F^{0,q}$. On utilisera à cette fin la propriété

$$\|S_j f\|_{L^\infty} \leq \|S_0\|_{F'} \|f\|_F 2^{j\sigma} \quad j \in \mathbb{Z}$$

(où F' est l'espace dual de l'espace F) et les inégalités de Hölder valables pour les trois familles d'espaces considérés.

PREUVE : La démonstration du théorème est assez directe. La tendance $e^{t\Delta} \vec{u}_0$ appartient à l'espace

$$\mathcal{E}_T = \left\{ \vec{u}(t) \in C([0, T], E) : \begin{array}{l} \sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, C_0), \\ \sqrt{t} \Lambda^\sigma \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, E), \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\Lambda^\sigma \vec{u}(t)\|_E = 0 \end{array} \right\}$$

et ce grâce à l'inclusion $E \hookrightarrow B_\infty^{-1,\infty}$, au fait que $(\sqrt{t})^\sigma \Lambda^\sigma e^{t\Delta} \vec{u}_0 = \eta_t * \vec{u}_0$ avec $\|\eta_t\|_{L^1} = C^{te}$, à la densité de la classe de Schwartz et au fait que $\sigma \in]0, 1]$. Quant à la fluctuation, en utilisant la condition (2.19) on obtient l'estimation

$$\left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_E \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} \|\vec{u}(s)\|_E (\sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \sqrt{s} \|\Lambda^\sigma \vec{v}(s)\|_E),$$

d'où

$$\begin{aligned} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_E &\leq C \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\Lambda^\sigma \vec{v}(s)\|_E \right) \\ \sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} &\leq C \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \right) \times \\ &\quad \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\Lambda^\sigma \vec{v}(s)\|_E \right). \end{aligned}$$

Estimons alors $\|\Lambda^\sigma B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_E$ et considérons d'abord le cas $0 < \sigma < 1$. Nous allons montrer qu'on a en effet $(\sqrt{t})^\sigma \|\Lambda^\sigma B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_E^{0,1}} < +\infty$. On a :

$$\begin{aligned} \|\Lambda^\sigma B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_E^{0,1}} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j \Lambda^\sigma B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_E \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j\sigma} \left\| \tilde{\Delta}_j \Lambda^\sigma B(\vec{u}, \vec{v})(t) \right\|_E \quad (\text{où } \widehat{\tilde{\Delta}_0 f}(\xi) = \psi(\xi) |\xi|^\sigma \hat{f}(\xi)) \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j\sigma} \int_0^t \left\| \frac{\tilde{\Delta}_j}{\Lambda^\alpha} \Lambda^\alpha e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_E ds \quad \alpha < 3 \\ &\leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j\sigma} \int_0^t \inf \left(2^j, \frac{1}{\sqrt{t-s}^{(\alpha+1)} 2^{j\alpha}} \right) \|\vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_E ds \\ &\leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j\sigma} \int_0^t \frac{2^{j(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2})}}{(t-s)^{\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{4}} \sqrt{s}} \|\vec{u}(s)\|_E (\sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \sqrt{s} \|\Lambda^\sigma \vec{v}(s)\|_E) ds \\ &\leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{j(\sigma+\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2})} \frac{1}{t^{\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{4}}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\Lambda^\sigma \vec{v}(s)\|_E \right) \\ &\leq C \frac{1}{(\sqrt{t})^\sigma} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\Lambda^\sigma \vec{v}(s)\|_E \right), \end{aligned}$$

d'où pour tout $t < T$:

$$\begin{aligned} \sqrt{t} \|\Lambda^\sigma B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_E &\leq \sqrt{t} \|\Lambda^\sigma B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_E^{0,1}} \\ &\leq T^{\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\Lambda^\sigma \vec{v}(s)\|_E \right). \end{aligned}$$

Pour $\sigma = 1$ on remarque que $E \cap C_0 \cap \{f : \Lambda f \in E\}$ est une algèbre et donc

$$\begin{aligned} \left\| \Lambda e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_E &\leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|\Lambda(\vec{u} \otimes \vec{v})(s)\|_E \\ &\leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{s} \left[\sqrt{s} \|\Lambda \vec{u}(s)\|_E (\sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \sqrt{s} \|\Lambda \vec{v}(s)\|_E) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{s} \|\Lambda \vec{v}(s)\|_E (\sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} + \sqrt{s} \|\Lambda \vec{u}(s)\|_E) \right]; \end{aligned}$$

par ailleurs

$$\begin{aligned} \left\| \Lambda e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_E &\leq C \frac{1}{t-s} \|\vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_E \\ &\leq C \frac{1}{t-s} \frac{1}{\sqrt{s}} \|\vec{u}(s)\|_E (\sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \sqrt{s} \|\Lambda \vec{v}(s)\|_E) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_E &\leq C \left(\sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_E + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\Lambda \vec{u}(s)\|_E + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \right) \times \\ &\quad \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\Lambda \vec{v}(s)\|_E \right). \end{aligned}$$

On peut alors démontrer que la transformation $F(\vec{u}) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})$ est une contraction sur un fermé borné de l'espace \mathcal{E}_T . \blacklozenge

Venons-en à l'autre approche. Ici, nous allons plutôt travailler dans l'espace où évolue la tendance, de façon similaire au cas des espaces singuliers (théorème 2.21) ; nous obtiendrons la continuité dans l'espace de Besov en exploitant une plus grande régularité du terme de fluctuation par rapport à la tendance.

Théorème 2.31

Soient $\vec{u}_0 \in \nabla \text{vmo}$ vérifiant $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, $\vec{u}(t)$ la solution des équations de Navier–Stokes de donnée initiale \vec{u}_0 obtenue par un algorithme de point fixe par Koch et Tataru (théorème 2.28) et T_0 le temps maximal tel que $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T_0[, L^\infty)$. Supposons de plus $\vec{u}_0 \in \overline{\mathcal{S}}_F^{\text{B}_F^{0,\infty}}$ où F est un espace « de Kato » tel que $F \subset \text{B}_\infty^{-\sigma, \infty}$ avec $\sigma \in]0, 1[$ et tel qu'il existe $C_F > 0$ tel que pour tous $f, g \in L^\infty$ vérifiant de plus $\Lambda^\sigma f \in F$, $\Lambda^\sigma g \in F$ on ait :

$$\|\Lambda^\sigma(fg)\|_F \leq C_F (\|f\|_{L^\infty} \|\Lambda^\sigma g\|_F + \|g\|_{L^\infty} \|\Lambda^\sigma f\|_F). \quad (2.20)$$

Alors $\vec{u}(t) \in C([0, T_0[, \text{B}_F^{0,\infty})$ et est telle que $(\sqrt{t})^\sigma \Lambda^\sigma \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T_0[, F)$.

PREUVE : Puisque $\sigma < 1$, on a $\overline{\mathcal{S}}_F^{\text{B}_F^{0,\infty}} \subset \text{B}_\infty^{-\sigma, \infty} \subset \nabla \text{bmo}$. Prouvons alors que la solution $\vec{u}(t)$ de Koch et Tataru vérifie aussi $(\sqrt{t})^\sigma \Lambda^\sigma \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T_0[, F)$. En effet, montrons

que cela, uni à la propriété $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T_0[, L^\infty)$, entraîne directement $B(\vec{u}, \vec{v})(t) \in C([0, T_0[, \dot{B}_F^{0,1}) \subseteq C([0, T_0[, B_F^{0,\infty})$. Il suffit d'écrire, pour tout $\alpha \in]0, 3[$:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_F &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^t \left\| \frac{\Delta_j}{\Lambda^{\sigma+\alpha}} e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \Lambda^\alpha \vec{\nabla} \cdot \Lambda^\sigma (\vec{u} \otimes \vec{v})(s) \right\|_F ds \\ &\quad (\text{l'opérateur } \Lambda^\sigma \text{ étant défini composante par composante}) \\ &\leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^t \inf \left(2^{j(1-\sigma)}, \frac{1}{(\sqrt{t-s})^{\alpha+1} 2^{j(\alpha+\sigma)}} \right) \frac{1}{(\sqrt{s})^{1+\sigma}} [\sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} (\sqrt{s})^\sigma \|\Lambda^\sigma \vec{v}(s)\|_F + \\ &\quad \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} (\sqrt{s})^\sigma \|\Lambda^\sigma \vec{u}(s)\|_F] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{\frac{j}{2}(1-\alpha-2\sigma)} \frac{1}{t^{\frac{\alpha}{4} + \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{4}}} \left[\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} (\sqrt{s})^\sigma \|\Lambda^\sigma \vec{v}(s)\|_F + \right. \\ &\quad \left. \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} (\sqrt{s})^\sigma \|\Lambda^\sigma \vec{u}(s)\|_F \right] \\ &\leq C \left[\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} (\sqrt{s})^\sigma \|\Lambda^\sigma \vec{v}(s)\|_F + \right. \\ &\quad \left. \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} (\sqrt{s})^\sigma \|\Lambda^\sigma \vec{u}(s)\|_F \right]. \end{aligned}$$

Puisque $e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in C([0, +\infty[, \overline{\mathcal{S}}_F^{B_F^{0,\infty}})$, on aura conclu. Comme d'habitude, la tendance appartient à l'espace

$$\mathcal{F}_{T_0} = \left\{ \vec{u} \in \tau'([0, T_0[\times \mathbb{R}^3) : \begin{array}{l} \sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty([0, T_0[, L^\infty), \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0, \\ (\sqrt{t})^\sigma \Lambda^\sigma \vec{u}(t) \in L^\infty([0, T_0[, F) \end{array} \right\},$$

et ceci grâce au fait que $\vec{u}_0 \in \overline{\mathcal{S}}_F^{B_F^{0,\infty}} \subset B_\infty^{-1,\infty}$ et à la définition de $B_F^{0,\infty}$. Par des estimations tout à fait analogues à la précédente, on démontre aussi que $B(\vec{u}, \vec{v})$ est bicontinu sur \mathcal{F}_{T_0} , en obtenant pour tout $t < T_0$:

$$\begin{aligned} (\sqrt{t})^\sigma \|\Lambda^\sigma B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_F &\leq C_F \left[\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} (\sqrt{s})^\sigma \|\Lambda^\sigma \vec{v}(s)\|_F + \right. \\ &\quad \left. \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} (\sqrt{s})^\sigma \|\Lambda^\sigma \vec{u}(s)\|_F \right]. \end{aligned}$$

On peut donc terminer comme dans la preuve du théorème 2.29 par une démonstration par récurrence en $t = 0$ et un argument de bootstrap. \blacklozenge

En dernière remarque, on peut souligner que la propriété (2.20) est vérifiée par les L^p avec $p \in]3, +\infty[$, les $L^{p,t}$ avec $p \in]3, +\infty[$, $t \in [1, +\infty]$ et les $\dot{M}_{p,q}$ avec $q \in]3, +\infty[$, $p \leq q$. Il suffit à cette fin d'utiliser la caractérisation des espaces de Sobolev (étendue aussi aux espaces de Lorentz et de Morrey–Campanato) via une décomposition de Littlewood–Paley. Ceci permet de retrouver le résultat concernant $B_p^{0,\infty}$, $B_{L^{p,t}}^{0,\infty}$, $B_{\dot{M}_{p,q}}^{0,\infty}$.

Chapitre 3

Molécules de l'espace de Hardy et équations de Navier–Stokes

(GIULIA FURIOLI ET ELIDE TERRANEO)

3.1 Introduction

D'après le résultat du chapitre 1, pour tout $\vec{u}_0 \in L^3$ il existe $T > 0$ et une seule solution $\vec{u}(t) \in C([0, T], L^3)$ des équations de Navier–Stokes (1.2) ayant \vec{u}_0 pour donnée initiale; de plus elle appartient à tout espace L^p pour $p > 3$ à tout instant $t > 0$. Nous nous intéressons maintenant au problème suivant : si la donnée initiale \vec{u}_0 satisfait des propriétés supplémentaires, cela reste-t-il vrai aussi pour la solution \vec{u} au moins pendant un petit intervalle de temps? Dans le chapitre 1 nous avons déjà établi que si $\Delta \vec{u}_0$ appartient à l'espace de Hardy \mathcal{H}^1 , c'est le cas aussi pour la solution. Nous commençons alors par démontrer à nouveau ce même résultat d'une façon qui mette en évidence les propriétés d'annulation du noyau de convolution $e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\nabla$; ensuite, nous considérerons le cas particulier de ce résultat où le laplacien de la donnée initiale est une *molécule* de l'espace de Hardy et donc bien localisé dans l'espace des variables. Nous montrerons alors que la solution vérifie la même propriété, à savoir que son terme de diffusion reste bien localisé.

3.1.1 Quelques rappels

Commençons par quelques définitions concernant l'espace de Hardy \mathcal{H}^1 . Le lecteur trouvera un exposé exhaustif sur ce sujet dans le livre de E. Stein [Ste93]

Définition 3.1 (\mathcal{H}^1 -atome)

Une fonction a est un \mathcal{H}^1 -atome associé à la boule B si :

a) a est supportée dans la boule B ,

b) $|a(x)| \leq \frac{1}{|B|}$ presque partout,

c) $\int a(x)dx = 0$.

Définition 3.2 (espace de Hardy)

L'espace de Hardy \mathcal{H}^1 est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{H}^1 = \{f \in L^1 : f \stackrel{L^1}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \lambda_j a_j \text{ où } \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\lambda_j| < +\infty \text{ et } a_j \text{ est un atome pour tout } j \in \mathbb{Z}\}.$$

C'est un espace de Banach normé par $\|f\|_{\mathcal{H}^1} = \inf_{f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \lambda_j a_j} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\lambda_j|$.

D'après cette dernière définition et grâce à la propriété c) des atomes, il est évident que pour tout $f \in \mathcal{H}^1$ on a $\int f(x)dx = 0$.

Nous nous servons également de la définition équivalente suivante (voir [Ste93]) où nous avons indiqué par R_j la j -ème transformée de Riesz.

Proposition 3.3 (définition équivalente de \mathcal{H}^1)

On a l'égalité suivante :

$$\mathcal{H}^1 = \{f \in L^1 : R_j f \in L^1 \quad \forall j = 1, 2, 3\}$$

En vue de l'utilisation que nous en ferons par la suite, nous donnons aussi une définition d'opérateur de Calderón-Zygmund (voir aussi [Ste93], [Ste70]).

Définition 3.4 (opérateur de Calderón-Zygmund)

Soit $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et, pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, soit $T(f) = K * f$. L'opérateur T est dit de Calderón-Zygmund si les propriétés suivantes sont vérifiées :

i) $\hat{K} \in L^\infty$ (et donc $T : L^2 \rightarrow L^2$),

ii) il existe $k(x) \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ telle que $\forall x \neq 0$:

$$\begin{aligned} |k(x)| &\leq \frac{C}{|x|^n} \\ |\vec{\nabla} k(x)| &\leq \frac{C}{|x|^{n+1}} \end{aligned}$$

iii) $\forall f \in C_c^\infty$ tel que $0 \notin \text{supp } f$ on a $\langle K, f \rangle = \int f(x)k(x)dx$.

On démontre (voir [Ste70]) que si T est un opérateur de Calderón-Zygmund, alors :

$$\begin{aligned} T : L^p &\rightarrow L^p \quad \text{pour } 1 < p < \infty, \\ T : \mathcal{H}^1 &\rightarrow \mathcal{H}^1, \\ T : \text{BMO} &\rightarrow \text{BMO}, \end{aligned}$$

où BMO est l'espace dual de \mathcal{H}^1 (voir paragraphe 2.5.1).

3.1.2 Une remarque sur le théorème d'existence dans $\Delta\mathcal{H}^1$

Soit

$$\Delta\mathcal{H}^1 = \{u \in \mathcal{S}'_0 : \Delta u \in \mathcal{H}^1\}. \quad (3.1)$$

Nous pouvons identifier cet espace à l'aide d'une décomposition de Littlewood–Paley comme étant $\dot{F}_1^{2,2}$. Les injections de Sobolev montrent alors que $\Delta\mathcal{H}^1 \subset L^3$ et il s'agit d'un espace limite au sens de la définition 1.5 du chapitre 1. De plus, on peut mettre l'accent sur le fait que si $\vec{u} \in \Delta\mathcal{H}^1$, alors $\Delta\vec{u}$ et $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ appartiennent au même espace \mathcal{H}^1 . Cela est une simple application du théorème *div-curl* de R. Coifman, P.-. Lions, Y. Meyer et S. Semmes [CLMS93], en soulignant que $\left[(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\right]_j = \vec{u} \cdot (\vec{\nabla}u_j)$, pour tout $j = 1, 2, 3$.

Théorème 3.5 (div-curl)

Soient $\vec{u} \in L^p$, $\vec{v} \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < +\infty$. Supposons que $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{v} = \vec{\nabla}V$; alors $\vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathcal{H}^1$.

L'énoncé que nous allons réexaminer est le suivant.

Théorème 3.6

Il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall \vec{u}_0 \in \Delta\mathcal{H}^1$ avec $\|\vec{u}_0\|_{\Delta\mathcal{H}^1} < \delta$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, il existe une unique solution $\vec{u}(t)$ des équations de Navier–Stokes (1.2) telle que $\vec{u}(t) \in C([0, +\infty[, \Delta\mathcal{H}^1)$, $\sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, +\infty[, L^\infty)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$.

Ce résultat est contenu dans le théorème 1.6 A] du chapitre 1. Si on en regarde la démonstration, on s'aperçoit que la seule propriété du noyau de l'opérateur $e^{\Delta\mathbb{P}\vec{\nabla}}$ que nous avons utilisée est son appartenance à L^1 . Nous allons maintenant pousser plus à fond l'analyse en démontrant que ledit noyau appartient plus précisément à \mathcal{H}^1 .

Proposition 3.7

Toute composante θ_{jkm} ($j, k, m \in \{1, 2, 3\}$) de l'opérateur $e^{\Delta\mathbb{P}\vec{\nabla}}$ vérifie $\theta_{jkm} \in L^1$ et $R_i\theta_{jkm} \in L^1$ pour $i = 1, 2, 3$ d'où $\theta_{jkm} \in \mathcal{H}^1$.

Cela est une simple conséquence du lemme suivant.

Lemme 3.8

Si $\hat{f}(\xi) = \frac{\xi_{i_1}\xi_{i_2}\dots\xi_{i_N}}{|\xi|^{N-1}} e^{-|\xi|^2}$ pour tout $N > 1$, $i_j \in \{1, 2, 3\}$, alors $(1 + |x|^4)f(x) \in L^\infty$.

PREUVE : Il est immédiat que $f \in C_0$ car $\hat{f} \in L^1$. Il faut donc estimer la décroissance à l'infini. Puisque f est dans \mathcal{S}'_0 on a $f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f(x)$ donc :

$$x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}\Delta_j f(x) \quad i_j \in \{1, 2, 3\}.$$

On remarque que

$$\Delta_j f(x) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ |\xi|^2 e^{-|\xi|^2} \right\} * \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_N}}{|\xi|^{N+1}} \omega\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right\} = \alpha(x) * \beta(2^j x) 2^{2j}$$

et aussi

$$\Delta_j f(x) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-|\xi|^2} \right\} * \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_N}}{|\xi|^{N-1}} \omega\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right\} = \gamma(x) * \delta(2^j x) 2^{4j}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{S}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \Delta_j f(x) &= \sum_l \alpha_l(x) * 2^{\varepsilon_l j} \beta_l(2^j x) \\ &= \sum_l \gamma_l(x) * 2^{\sigma_l j} \delta_l(2^j x) \end{aligned}$$

où $-2 \leq \varepsilon_l \leq 2$, $0 \leq \sigma_l \leq 4$, l varie dans une famille finie d'indices et $\alpha_l, \beta_l, \gamma_l, \delta_l \in \mathcal{S}$ s'obtiennent à partir de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. En utilisant la première égalité pour les j positifs on a :

$$\sum_{j \geq 0} \sum_l \|\alpha_l * 2^{\varepsilon_l j} \beta_l(2^j \cdot)\|_{L^\infty} \leq \sum_{j \geq 0} \|\alpha_l\|_{L^\infty} \|\beta_l\|_{L^1} 2^{(\varepsilon_l - 3)j} < C.$$

À l'aide de la deuxième égalité on obtient, pour $j < 0$ et $1 \leq \sigma_l \leq 4$:

$$\sum_{j < 0} \sum_{l: 1 \leq \sigma_l \leq 4} \|\gamma_l * 2^{\sigma_l j} \delta_l(2^j \cdot)\|_{L^\infty} \leq \sum_{j < 0} \sum_{l: 1 \leq \sigma_l \leq 4} \|\gamma_l\|_{L^1} \|\delta_l(2^j \cdot)\|_{L^\infty} 2^{\sigma_l j} \leq C.$$

Pour $j < 0$ et en notant \tilde{l} tel que $\sigma_{\tilde{l}} = 0$ on a :

$$\left\| \sum_{j < 0} |\gamma_{\tilde{l}} * \delta_{\tilde{l}}(2^j \cdot)| \right\|_{L^\infty} \leq \|\gamma_{\tilde{l}}\|_{L^1} \left\| \sum_{j < 0} |\delta_{\tilde{l}}(2^j \cdot)| \right\|_{L^\infty}$$

et, comme $\delta_{\tilde{l}}(0) = 0$ et $\delta_{\tilde{l}} \in \mathcal{S}$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^3$:

$$\sum_{j < 0} |\delta_{\tilde{l}}(2^j x)| \leq C \left(\sum_{2^j < \frac{1}{|x|}} |2^j x| + \sum_{2^j \geq \frac{1}{|x|}} \frac{1}{|2^j x|^4} \right) \leq C.$$

◆

Au cours de la démonstration du théorème de point fixe dans

$$\mathcal{E}_\infty = \left\{ \tilde{u}(t) \in C([0, \infty[, \Delta \mathcal{H}^1) : \begin{array}{l} \sqrt{t} \tilde{u}(t) \in L^\infty(]0, +\infty[, L^\infty) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\tilde{u}(t)\|_{L^\infty} = 0 \end{array} \right\},$$

on peut alors estimer la norme $L^\infty ([0, +\infty[, \Delta\mathcal{H}^1)$ du terme bilinéaire de façon différente par rapport au chapitre 1. En effet on a :

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(s) ds \right\|_{\Delta\mathcal{H}^1} \\
& \leq \int_0^t \left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) \right\|_{\mathcal{H}^1} ds \\
& \leq C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left\| e^{\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \right\|_{\mathcal{H}^1} \left\| \Delta\vec{u}(s) \otimes \vec{v}(s) + \vec{u}(s) \otimes \Delta\vec{v}(s) + 2\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s) \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{L^1} ds \\
& \leq C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left(\|\Delta\vec{u}(s)\|_{L^1} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \|\Delta\vec{v}(s)\|_{L^1} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} + \right. \\
& \quad \left. \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s)\|_{L^2} \|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}(s)\|_{L^2} \right) ds.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Pour estimer les termes $\|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s)\|_{L^2}$, $\|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}(s)\|_{L^2}$ on a recours au lemme suivant, que nous allons démontrer dans un instant.

Lemme 3.9

Si $u \in \mathcal{S}'_0$, $\Delta u \in L^1$ et $u \in L^\infty$, alors :

$$\|\vec{\nabla} u\|_{L^2} \leq C (\|\Delta u\|_{L^1} \|u\|_{L^\infty})^{\frac{1}{2}}.$$

On termine donc par :

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(s) ds \right\|_{\Delta\mathcal{H}^1} \\
& \leq C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left(\|\Delta\vec{u}(s)\|_{\mathcal{H}^1} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \|\Delta\vec{v}(s)\|_{\mathcal{H}^1} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \right. \\
& \quad \left. + \|\Delta\vec{u}(s)\|_{\mathcal{H}^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \|\Delta\vec{v}(s)\|_{\mathcal{H}^1}^{\frac{1}{2}} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \right) ds \\
& \leq C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\|\Delta\vec{u}(s)\|_{\mathcal{H}^1} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} + \|\Delta\vec{v}(s)\|_{\mathcal{H}^1} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \right) ds.
\end{aligned}$$

On peut alors compléter l'estimation du terme bilinéaire comme d'habitude. ♦

PREUVE DU LEMME 3.9 : Si $u \in \mathcal{S}$, grâce au théorème de Stokes on a :

$$\|\vec{\nabla} u\|_{L^2} \leq C (\|\Delta u\|_{L^1} \|u\|_{L^\infty})^{1/2}.$$

Par ailleurs, si u vérifie les hypothèses du lemme, alors $u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j u$ dans \mathcal{S}' et

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n \Delta_j u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

où $u_n = S_{n+1}u - S_{-n}u$.

Donc $u_n \in C^\infty$, $u_n \in C_0$ et

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^\infty} &\leq C \|u\|_{L^\infty} \\ \|\Delta u_n\|_{L^1} &\leq C \|\Delta u\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, il suffira de montrer que $\forall v \in C^\infty \cap C_0$ telle que $\Delta v \in L^1$ on a :

$$\left\| \vec{\nabla} v \right\|_{L^2} \leq C (\|\Delta v\|_{L^1} \|v\|_{L^\infty})^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

où C ne dépendra pas de v . En particulier, on aura :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\| \vec{\nabla} u_n \right\|_{L^2} &\leq C (\|\Delta u_n\|_{L^1} \|u_n\|_{L^\infty})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C (\|\Delta u\|_{L^1} \|u\|_{L^\infty})^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et donc $\|\nabla u\|_{L^2} \leq C (\|\Delta u\|_{L^1} \|u\|_{L^\infty})^{\frac{1}{2}}$ grâce à la convergence dans \mathcal{S}' .

Pour montrer (3.3) on considère $v_n(x) = v(x)\psi(\frac{x}{n})$ où $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi \equiv 1$ sur la boule $B(0, 1)$, $\psi \equiv 0$ en dehors de la boule $B(0, 2)$. Comme $v_n \in \mathcal{S}$, elle vérifie le lemme pour tout n . De plus, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{L^\infty} = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta v_n - \Delta v\|_{L^1} \leq \left\| \left(\psi\left(\frac{x}{n}\right) - 1 \right) \Delta v \right\|_{L^1} + \left\| v \Delta \psi\left(\frac{x}{n}\right) \frac{1}{n^2} \right\|_{L^1} + \left\| \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \frac{1}{n} \right\|_{L^1} = 0.$$

Donc $\limsup_n \left\| \vec{\nabla} v_n \right\|_{L^2} \leq C (\|\Delta v\|_{L^1} \|v\|_{L^\infty})^{\frac{1}{2}}$ et enfin

$$\left\| \vec{\nabla} v \right\|_{L^2} \leq C (\|\Delta v\|_{L^1} \|v\|_{L^\infty})^{\frac{1}{2}}$$

et cela grâce à la convergence dans \mathcal{S}' . ♦

Remarque. Dans l'estimation (3.2), nous avons utilisé seulement l'inégalité $\left\| \vec{\nabla} u \right\|_{L^2} \leq C \|\Delta u\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}$, qui découle du lemme précédent, mais qui fait aussi partie des « inégalités de Sobolev précisées » prouvées par F. Oru [Oru98].

3.2 Existence dans l'espace des molécules

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction à ce chapitre, nous allons considérer maintenant une donnée initiale \vec{u}_0 dont le laplacien est de plus localisé en espace. Soit alors $\delta \in]\frac{3}{2}, \frac{9}{2}[$, $\delta \neq \frac{5}{2}$, $\delta \neq \frac{7}{2}$ et soit :

$$X_\delta = \left\{ u \in \mathcal{S}' : \left. \begin{array}{l} u \text{ est nulle à l'infini,} \\ \Delta u \in L^2((1 + |x|^{2\delta})dx), \\ \int \Delta u(x) dx = 0 \\ \int x_i \Delta u(x) dx = 0 \\ \int x_i x_j \Delta u(x) dx = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } \frac{3}{2} < \delta < \frac{9}{2} \\ \text{pour } \frac{5}{2} < \delta < \frac{9}{2}, \quad i = 1, 2, 3 \\ \text{pour } \frac{7}{2} < \delta < \frac{9}{2}, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{array} \right\}.$$

C'est un espace de Banach normé par $\|u\|_{X_\delta} = \|\Delta u\|_{L^2((1+|x|^{2\delta})dx)}$; par ailleurs, nous allons voir dans le paragraphe suivant qu'il s'agit bien d'un sous-espace de $\Delta\mathcal{H}^1$. Voici alors l'énoncé du théorème que nous allons démontrer.

Théorème 3.10

Soit $\vec{u}_0 \in X_\delta$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$. La solution $\vec{u}(t)$ des équations de Navier–Stokes dans $C([0, T[, L^3)$ vérifiant $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ appartient aussi à $C([0, T'], X_\delta)$, $T' < T$.

3.2.1 Propriétés générales de X_δ

Tout d'abord introduisons les notations :

$$\begin{aligned} L_\delta^2 &= L^2((1+|x|^{2\delta})dx), \\ \|u\|_{L_\delta^2} &= \|u\|_{L^2((1+|x|^{2\delta})dx)}, \\ \|u\|_{L_{\delta-\frac{1}{2}}^\infty} &= \left\| (1+|x|^{\delta-\frac{1}{2}})u(x) \right\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

La définition de l'espace X_δ est bien posée ; en effet, il est facile de voir que si $\Delta u \in L_\delta^2$, alors $\Delta u \in L^1$ pour $\delta > \frac{3}{2}$, $x_i \Delta u \in L^1$ pour $i = 1, 2, 3$ et $\delta > \frac{5}{2}$, $x_i x_j \Delta u \in L^1$ pour $i, j = 1, 2, 3$ et $\delta > \frac{7}{2}$. Par ailleurs, $X_\delta \subset \Delta\mathcal{H}^1$ et, plus précisément, si $u \in X_\delta$ alors Δu est une molécule (non normalisée) de l'espace de Hardy, dont on rappelle la définition (voir aussi [Ste93], [CW77]).

Définition 3.11 (ε -molécule)

Soit $\varepsilon > 0$. Une fonction $M(x)$ est une ε -molécule de \mathcal{H}^1 centrée en $x = 0$ si :

$$\begin{aligned} i) & \left(\int_{\mathbb{R}^3} |M(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} |M(x)|^2 |x|^{3+\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \leq 1 \\ ii) & \int_{\mathbb{R}^3} M(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Dans notre cas, le produit i) est majoré par une constante dépendant de u . De plus, on peut montrer que toute ε -molécule est en effet une fonction de \mathcal{H}^1 [CW77].

Nous allons enfin prouver une propriété de décroissance à l'infini des fonctions de X_δ .

Proposition 3.12

Pour toute $u \in X_\delta$ on a $(1+|x|^{\delta-\frac{1}{2}})u(x) \in L^\infty$.

PREUVE : Nous allons considérer seulement le cas $\frac{3}{2} < \delta < \frac{5}{2}$, les autres cas se traitent de façon analogue. Il est facile de voir que $u \in L^\infty$; en effet, grâce à la nullité à l'infini on peut écrire :

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy$$

et donc, par l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{1+|y|^{2\delta}} \frac{1}{|x-y|^2} dy \right)^{\frac{1}{2}} \|\Delta u\|_{L^2_\delta} \\ &\leq C \|\Delta u\|_{L^2_\delta}. \end{aligned}$$

Soit alors $|x| \geq K$. Nous avons :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy \\ &= \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}, |x-y| \leq \frac{|x|}{2}} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy + \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}, |x-y| > \frac{|x|}{2}} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy + \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy. \end{aligned}$$

Pour le premier terme on a :

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}, |x-y| \leq \frac{|x|}{2}} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} \frac{(1+|y|^{2\delta})^{\frac{1}{2}}}{(1+|y|^{2\delta})^{\frac{1}{2}}} dy \right| \\ &\leq C \|\Delta u\|_{L^2_\delta} \left(\int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}, |x-y| \leq \frac{|x|}{2}} \frac{1}{|x-y|^2} \frac{1}{(1+|y|^{2\delta})} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \frac{\|\Delta u\|_{L^2_\delta}}{|x|^\delta} \left(\int_{|x-y| \leq \frac{|x|}{2}} \frac{1}{|x-y|^2} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\Delta u\|_{L^2_\delta} |x|^{\frac{1}{2}-\delta}. \end{aligned}$$

Pour le deuxième, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}, |x-y| > \frac{|x|}{2}} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} \frac{(1+|y|^{2\delta})^{\frac{1}{2}}}{(1+|y|^{2\delta})^{\frac{1}{2}}} dy \right| \\ &\leq C \frac{\|\Delta u\|_{L^2_\delta}}{|x|} \left(\int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \frac{dy}{|y|^{2\delta}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\Delta u\|_{L^2_\delta} |x|^{\frac{1}{2}-\delta}. \end{aligned}$$

Venons-en à la troisième intégrale, où nous allons utiliser la propriété $\int_{\mathbb{R}^3} \Delta u(x) dx = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy \right| \\ &= \left| \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} \Delta u(y) \left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x|} \right) dy - \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \frac{\Delta u(y)}{|x|} dy \right| \\ &\leq C \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} |\Delta u(y)| \frac{|y|}{|x|^2} dy + \frac{1}{|x|} \int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} |\Delta u(y)| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{|x|^2} \|\Delta u\|_{L_\delta^2} \left(\int_{|y| < \frac{|x|}{2}} \frac{|y|^2}{1 + |y|^{2\delta}} dy \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|x|} \|\Delta u\|_{L_\delta^2} \left(\int_{|y| \geq \frac{|x|}{2}} \frac{1}{1 + |y|^{2\delta}} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C}{|x|^2} \|\Delta u\|_{L_\delta^2} |x|^{\frac{5}{2}-\delta} + \frac{C}{|x|} \|\Delta u\|_{L_\delta^2} |x|^{\frac{3}{2}-\delta} \\
&\leq C \|\Delta u\|_{L_\delta^2} |x|^{\frac{1}{2}-\delta}.
\end{aligned}$$

◆

Remarques. 1) On peut montrer aussi que si $\Delta u \in L_\delta^2$ et u est nulle à l'infini, alors $u \in C_0$. Pour ce faire, on part de l'égalité

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta u(y)}{|x-y|} dy$$

et, en définissant

$$u_{\varepsilon,R}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta u(y) \chi_{B(0,R)} * \frac{1}{\varepsilon^3} \phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)}{|x-y|} dy$$

avec $\phi \in \mathcal{D}$ et $\text{supp } \phi \subset B(0,1)$, on a $u_{\varepsilon,R}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $u_{\varepsilon,R} \rightarrow u$ uniformément sur \mathbb{R}^3 .

2) Sous les seules hypothèses $u \in L_{\delta-\frac{1}{2}}^\infty$ et $\Delta u \in L_\delta^2$ on a $\int_{\mathbb{R}^3} \Delta u(x) dx = 0$ pour tout $\delta > \frac{3}{2}$. En effet, soit $\psi \in \mathcal{D}$ telle que $\text{supp } \psi \subset B(0,1)$ et $\psi \equiv 1$ sur $B(0, \frac{1}{2})$. Comme $\Delta u \in L^1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u(x) dx \right| &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \Delta u(x) \psi\left(\frac{x}{R}\right) dx \right| \\
&\leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)| |\Delta(\psi\left(\frac{x}{R}\right))| dx \\
&\leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R^2} \int_{\frac{R}{2} \leq |x| \leq R} |u(x)| dx \\
&\leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R^2} \frac{1}{R^{\delta-\frac{1}{2}}} R^3 = 0.
\end{aligned}$$

3.2.2 Localisation des éléments de X_δ

La proposition précédente 3.12 établit que $X_\delta \subset L^3$; aussi, le problème de Cauchy avec donnée initiale $\vec{u}_0 \in X_\delta$ a une unique solution dans $C([0, T[, L^3)$ (théorème 1.2). Notre problème est alors de démontrer que cette même solution appartient à $C([0, T[, X_\delta)$ toujours par un algorithme de point fixe. À cette fin nous avons besoin de trois sortes de résultats : d'abord, nous allons préciser à quels espaces appartiennent u^2 , $\vec{\nabla} u$ et $u \vec{\nabla} u$ si $u \in X_\delta$; ensuite, nous allons analyser plus à fond le poids $w(x) = 1 + |x|^{2\delta}$ en relation avec les classes de Muckenhoupt et enfin nous allons étudier la continuité sur X_δ des opérateurs apparaissant dans le terme bilinéaire dans l'équation intégrale.

Lemme 3.13

Soit $u \in X_\delta$. Alors :

- i) $\vec{\nabla}u \in \left(L^4 \left((1 + |x|^{2\delta}) dx \right) \right)^3 \quad \delta > \frac{3}{2};$
- ii) $u\vec{\nabla}u \in \left(L^2 \left((1 + |x|^{2\delta}) dx \right) \right)^3 \quad \delta > \frac{11}{6};$
- iii) $u^2 \in L^2 \left((1 + |x|^{2\delta}) dx \right) \quad \delta > \frac{5}{2}.$

PREUVE : i) Nous devons estimer :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \left| \vec{\nabla}u(x) \right|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx \\ & \leq \int_{|x| \leq 1} \left| \vec{\nabla}u(x) \right|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx + \sum_{j \geq 0} \int_{2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}} \left| \vec{\nabla}u(x) \right|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx. \end{aligned}$$

En utilisant un résultat d'interpolation, nous pouvons contrôler le premier terme par :

$$\begin{aligned} C \int_{|x| \leq 1} \left| \vec{\nabla}u(x) \right|^4 dx & \leq C \|\Delta u\|_{L^2}^2 \|u\|_{L^\infty}^2 \\ & \leq C \|\Delta u\|_{L^2_\delta}^2 \|u\|_{L^\infty_{\delta-\frac{1}{2}}}^2 \leq C \|u\|_{X_\delta}^4. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour le deuxième, soit $\omega \in \mathcal{D}$, $\omega(x) \equiv 1$ sur $1 \leq |x| \leq 2$ and $\text{supp } \omega \subset \{\frac{1}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2}\}$. Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \int_{2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}} \left| \vec{\nabla}u(x) \right|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx & = \int_{2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}} \left| \vec{\nabla} \left(u(x) \omega \left(\frac{x}{2^j} \right) \right) \right|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx \\ & \leq C 2^{2j\delta} \int_{2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}} \left| \vec{\nabla} \left(u(x) \omega \left(\frac{x}{2^j} \right) \right) \right|^4 dx \\ & \leq C 2^{2j\delta} \left\| u(x) \omega \left(\frac{x}{2^j} \right) \right\|_{L^\infty}^2 \left\| \Delta \left(u(x) \omega \left(\frac{x}{2^j} \right) \right) \right\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

toujours par interpolation,

$$\begin{aligned} & \leq C 2^{2j\delta} 2^{-(2\delta-1)j} \|u\|_{L^\infty_{\delta-\frac{1}{2}}}^2 \left(\left\| \Delta u(x) \omega \left(\frac{x}{2^j} \right) \right\|_{L^2}^2 + \left\| u(x) \Delta \left(\omega \left(\frac{x}{2^j} \right) \right) \right\|_{L^2}^2 \right) \\ & \quad + \left\| \vec{\nabla}u(x) \cdot \vec{\nabla} \left(\omega \left(\frac{x}{2^j} \right) \right) \right\|_{L^2}^2 \\ & \leq C 2^j \|u\|_{L^\infty_{\delta-\frac{1}{2}}}^2 \left(2^{-2j\delta} \|\Delta u\|_{L^2_\delta}^2 + 2^{-(2\delta-1)j} \|u\|_{L^\infty_{\delta-\frac{1}{2}}}^2 \frac{1}{2^j} \right) \\ & \quad + \int_{\frac{2^j}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2} 2^j} \left| \vec{\nabla}u(x) \right|^2 \left| \vec{\nabla} \left(\omega \left(\frac{x}{2^j} \right) \right) \right|^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C2^{(1-2\delta)j} \|u\|_{X_\delta}^4 + 2^j \|u\|_{L_{\delta-\frac{1}{2}}^\infty}^2 \left(\int_{\frac{2^j}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2}2^j} |\vec{\nabla} u(x)|^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \left(\int_{\frac{2^j}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2}2^j} \left| \vec{\nabla} \left(\omega \left(\frac{x}{2^j} \right) \right) \right|^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C2^{(1-2\delta)j} \|u\|_{X_\delta}^4 + \frac{2^j}{2^{2j\delta}} \|u\|_{L_{\delta-\frac{1}{2}}^\infty}^2 \varepsilon_j \int_{\frac{2^j}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2}2^j} |\vec{\nabla} u(x)|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx \\
&\quad + 2^j \|u\|_{L_{\delta-\frac{1}{2}}^\infty}^2 \frac{1}{\varepsilon_j} \int_{\frac{2^j}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2}2^j} \frac{1}{2^{4j}} \left| \vec{\nabla} \omega \left(\frac{x}{2^j} \right) \right|^4 dx \\
&\leq C2^{(1-2\delta)j} \|u\|_{X_\delta}^4 + \varepsilon_j \|u\|_{L_{\delta-\frac{1}{2}}^\infty}^2 2^{(1-2\delta)j} \int_{\frac{2^j}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2}2^j} |\vec{\nabla} u(x)|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx + \frac{1}{\varepsilon_j} \|u\|_{L_{\delta-\frac{1}{2}}^\infty}^2.
\end{aligned}$$

En posant $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^{(1-2\delta)j} \|u\|_{L_{\delta-\frac{1}{2}}^\infty}^2}$ on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}} |\vec{\nabla} u(x)|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx \\
&\leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) 2^{(1-2\delta)j} \|u\|_{X_\delta}^4 + C\varepsilon \int_{\frac{2^j}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2}2^j} |\vec{\nabla} u(x)|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Par sommation sur tous les termes et en utilisant les deux estimations (3.4) et (3.5) on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} u(x)|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx \\
&\leq C(\varepsilon) \|u\|_{X_\delta}^4 + C'\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} u(x)|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx.
\end{aligned}$$

En choisissant $0 < C'\varepsilon < 1$ on conclut :

$$\left\| \vec{\nabla} u \right\|_{L^4((1+|x|^{2\delta})dx)} \leq C \|u\|_{X_\delta}.$$

ii) On décompose encore :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 |\vec{\nabla} u(x)|^2 (1 + |x|^{2\delta}) dx \\
&= \int_{|x| \leq 1} |u(x)|^2 |\vec{\nabla} u(x)|^2 (1 + |x|^{2\delta}) dx + \sum_{j \geq 0} \int_{2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}} |u(x)|^2 |\vec{\nabla} u(x)|^2 (1 + |x|^{2\delta}) dx.
\end{aligned}$$

Le premier terme est contrôlé par :

$$\begin{aligned} C \int_{|x| \leq 1} |u(x)|^2 |\vec{\nabla} u(x)|^2 dx &\leq C \|u\|_{L^\infty}^2 \left(\int_{|x| \leq 1} |\vec{\nabla} u(x)|^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|u\|_{X_\delta}^2 \|u\|_{X_\delta}^2. \end{aligned}$$

Passons au deuxième. Pour tout $j \geq 0$ on a, grâce à l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} &\int_{2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}} |u(x)|^2 |\vec{\nabla} u(x)|^2 (1 + |x|^{2\delta}) dx \\ &\leq \|u\|_{L_{\delta-\frac{1}{2}}^\infty}^2 2^{j(1-\delta)} 2^{\frac{3}{2}j} \left(\int_{2^j \leq |x| \leq 2^{j+1}} |\vec{\nabla} u(x)|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et, en utilisant l'estimation (3.5) dans i), nous pouvons majorer par :

$$\begin{aligned} &C \|u\|_{X_\delta}^4 2^{j(\frac{5}{2}-\delta)} 2^{j(\frac{1}{2}-\delta)} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|u\|_{X_\delta}^2 2^{j(\frac{5}{2}-\delta)} \left(\int_{\frac{2^j}{2} \leq |x| \leq \frac{5}{2} 2^j} |\vec{\nabla} u(x)|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|u\|_{X_\delta}^4 2^{j(3-2\delta)} \left(1 + \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right) + C \tilde{\varepsilon} \|u\|_{X_\delta}^2 2^{j(\frac{5}{2}-\delta)} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla} u(x)|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ensuite, pour $\tilde{\varepsilon} = 2^{-\frac{2}{3}j}$ on obtient, grâce à l'estimation dans i) :

$$\leq C \|u\|_{X_\delta}^4 2^{j(3-2\delta)} + C \|u\|_{X_\delta}^4 2^{j(\frac{11}{3}-2\delta)} + C \|u\|_{X_\delta}^2 2^{j(\frac{11}{6}-\delta)} \|u\|_{X_\delta}^2.$$

Enfin, en sommant sur les j positifs, on conclut par :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^2 |\nabla u(x)|^2 (1 + |x|^{2\delta}) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|u\|_{X_\delta}^2.$$

iii) La décroissance à l'infini implique, pour $\delta > \frac{5}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^4 (1 + |x|^{2\delta}) dx &\leq \|u\|_{X_\delta}^4 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1 + |x|^{2\delta}}{(1 + |x|^{\delta-\frac{1}{2}})^4} dx \\ &\leq C \|u\|_{X_\delta}^4. \end{aligned}$$

◆

3.2.3 Poids de Muckenhoupt « locaux »

Les deux paragraphes qui suivent sont fortement liés. En vue de l'utilisation d'un schéma de point fixe, nous sommes amenés à enquêter sur la bicontinuité du terme $B(\vec{u}, \vec{v})$ sur $C([0, T], X_\delta) \times C([0, T], X_\delta)$ et, en particulier, à évaluer

$$\int_0^t \left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) \right\|_{L^2_\delta} ds$$

où, nous le rappelons, toute composante de $e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla}$ est un opérateur de Calderón-Zygmund dont la norme L^1 est de l'ordre de $\frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}$. Grâce à la proposition 3.12 et au lemme 3.13, il est clair que, lorsque $\vec{u} \in L^\infty(]0, T[, X_\delta)$, chaque composante de $\Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) = \Delta \vec{u}(s) \otimes \vec{v}(s) + \vec{u}(s) \otimes \Delta \vec{v}(s) + 2 \vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s) \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{v}(s)$ appartient à L^2_δ pour tout $s \in]0, T[$. Comme nous allons le souligner dans un instant, il est bien connu que les opérateurs de Calderón-Zygmund sont continus sur les espaces de Lebesgue à poids si et seulement si le poids appartient à une classe de Muckenhoupt. Malheureusement, ce n'est pas le cas pour nos poids $w(x) = 1 + |x|^{2\delta}$, $\delta > \frac{3}{2}$; néanmoins, ils appartiennent à une classe de Muckenhoupt « locale ». En utilisant cela, ainsi que la décroissance du noyau de convolution, nous allons pouvoir contourner cet obstacle.

Voici la définition d'un poids de Muckenhoupt (voir aussi [Muc72], [Ste93], [Lem94]).

Définition 3.14

Un poids $w(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (une fonction positive, localement intégrable) appartient à la classe de Muckenhoupt A_p ($1 \leq p < +\infty$) s'il existe une constante $K \geq 1$ telle que, pour toute boule B (de volume $|B|$), on ait :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B|} \left(\int_B w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} &\leq K, & p > 1 \\ \frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx &\leq K \operatorname{ess\,inf}_{x \in B} w(x) & p = 1. \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi donner une définition plus faible, qui prenne en compte seulement les boules de petite taille.

Définition 3.15

Un poids $w(x)$ sur \mathbb{R}^3 appartient à la classe de Muckenhoupt locale $A_p(R)$ si, pour tout $R > 0$, il existe une constante $K(R)$ telle que, si B est une boule centrée en x_B de rayon $r(B)$, on ait :

$$\begin{aligned} \sup_{r(B) \leq R} \frac{1}{|B|} \left(\int_B w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} &\leq K(R), & p > 1 \\ \sup_{r(B) \leq R} \frac{1}{|B|} \int_B w(x) dx \sup_{r(B) \leq R} \sup_{x \in B} \frac{1}{w(x)} &\leq K(R) & p = 1. \end{aligned}$$

Remarque. La classe A_p de Muckenhoupt peut être caractérisée également par la continuité des opérateurs de Calderón–Zygmund. On a en effet le théorème suivant (voir [Ste93]).

Théorème 3.16 (Muckenhoupt)

Soit T un opérateur de Calderón–Zygmund et $w \in A_p$, où $1 < p < +\infty$. Alors, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $f \in L^p(w(x)dx)$, on ait :

$$\int_{\mathbb{R}^3} |Tf(x)|^p w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^p w(x)dx.$$

Inversement, soit $d\mu$ une mesure de Borel positive. Alors, si $\int_{\mathbb{R}^3} |Tf|^p d\mu \leq C \int_{\mathbb{R}^3} |f|^p d\mu$ pour tout $f \in L^p(d\mu)$, alors $d\mu$ est absolument continue et $d\mu = w(x)dx$ avec $w \in A_p$.

Les fonctions $w(x) = 1 + |x|^{2\delta}$, $\delta > \frac{3}{2}$, n'appartiennent pas à A_2 mais, en revanche, elles appartiennent à $A_2(R)$ et nous pouvons de plus estimer les constantes $K(R)$ relatives.

Proposition 3.17

Si $\delta > \frac{3}{2}$, alors $w(x) = 1 + |x|^{2\delta} \in A_2(R)$ et $K(R) = C(1 + R^{\delta-\frac{3}{2}})$ pour une certaine constante $C > 0$.

PREUVE : Considérons pour le moment l'extremum supérieur sur les boules de rayon fixé égal à r . Si $|x_B| > 3r$, alors $|x - x_B| \leq r$ implique $\frac{2}{3}|x_B| \leq |x| \leq \frac{4}{3}|x_B|$ et donc :

$$\left(\frac{1}{r^3} \int_{|x-x_B| \leq r} (1 + |x|^{2\delta}) dx \right) \left(\frac{1}{r^3} \int_{|x-x_B| \leq r} \frac{1}{1 + |x|^{2\delta}} dx \right) \leq C \frac{1 + (\frac{4}{3}|x_B|)^{2\delta}}{1 + (\frac{2}{3}|x_B|)^{2\delta}} \leq C.$$

Si $|x_B| \leq 3r$, alors $|x - x_B| \leq r$ implique $|x| \leq 4r$ et on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{r^3} \int_{|x-x_B| \leq r} (1 + |x|^{2\delta}) dx \right) \left(\frac{1}{r^3} \int_{|x-x_B| \leq r} \frac{1}{1 + |x|^{2\delta}} dx \right) \\ & \leq C(1 + 4r^{2\delta}) \min\left(1, \frac{1}{r^3}\right) \\ & \leq C(1 + r^{2\delta-3}) \quad \delta > \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Comme $f(r) = 1 + r^{\delta-\frac{3}{2}}$ est une fonction croissante, il s'ensuit que $K(R) = C(1 + R^{\delta-\frac{3}{2}})$. ♦

Il est essentiel de remarquer que nos poids peuvent être opportunément modifiés afin de devenir des vrais poids de Muckenhoupt, tout en gardant leur définition initiale par exemple sur un cube. La prochaine proposition technique montrera cette construction, déjà utilisée dans [Lem94].

Proposition 3.18

Soit Q un cube de \mathbb{R}^3 . Il existe un poids de Muckenhoupt $w_Q(x) \in A_2$ qui coïncide avec $w(x) = 1 + |x|^{2\delta}$, $\delta > \frac{3}{2}$, sur Q .

PREUVE : Nous allons montrer cette proposition pour les cubes Q_λ de côté 3 centrés en $x_\lambda = (\frac{2n+1}{2}, \frac{2m+1}{2}, \frac{2k+1}{2}) = (x_n, y_n, z_k)$, avec $\lambda = (n, m, k) \in \mathbb{Z}^3$, car c'est dans ce cas que nous allons l'utiliser ultérieurement.

Soit donc Q_λ le cube suivant :

$$Q_\lambda = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x_n - \frac{3}{2} \leq x \leq x_n + \frac{3}{2} \\ y_m - \frac{3}{2} \leq y \leq y_m + \frac{3}{2} \\ z_k - \frac{3}{2} \leq z \leq z_k + \frac{3}{2} \end{cases} \right\}.$$

Nous voulons construire une fonction $w_\lambda \in A_2$ coïncidant avec w sur Q_λ . La définition est simple : on commence par définir w_λ sur le cube \tilde{Q}_λ centré en $(x_n + \frac{3}{2}, y_m + \frac{3}{2}, z_k + \frac{3}{2})$ de côté 6 par symétrisations successives de la fonction w par rapport aux plans yz , xz , xy et ensuite on étend la définition de w_λ à l'espace tout entier par périodicité, à travers le carrelage τ engendré par \tilde{Q}_λ . Il faut maintenant montrer que $w_\lambda(x) \in A_2$; nous prouvons en effet que :

$$\begin{aligned} & \sup_\lambda \sup_B \frac{1}{|B|} \left(\int_B w_\lambda(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B w_\lambda(x)^{-1} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \sup_{r_B \leq \frac{3}{2}} \frac{1}{|B|} \left(\int_B w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B w(x)^{-1} dx \right)^{\frac{1}{2}} = CK \left(\frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

Nous mettons en évidence que cette estimation est uniforme par rapport aux cubes Q_λ choisis. Supposons d'abord que $3|B| \geq |\tilde{Q}_\lambda|$. Il existe alors $q \geq 0$ tel que $(2^3)^q |\tilde{Q}_\lambda| \leq 3|B| < (2^3)^{q+1} |\tilde{Q}_\lambda|$. Soit \tilde{Q}_C le cube circonscrit à la boule B ($|B| < |\tilde{Q}_C| < 3|B|$). Comme le cube \tilde{Q}_C peut être recouvert par $(2^3)^{q+1}$ cubes du carrelage τ , on obtient :

$$\int_B w_\lambda(x) dx \leq \int_{\tilde{Q}_C} w_\lambda(x) dx \leq 2^{3(q+1)} \int_{\tilde{Q}_\lambda} w_\lambda(x) dx = 8 \cdot 2^{3(q+1)} \int_{Q_\lambda} w(x) dx$$

et aussi :

$$\int_B w_\lambda^{-1}(x) dx \leq \int_{\tilde{Q}_C} w_\lambda^{-1}(x) dx \leq 2^{3(q+1)} \int_{\tilde{Q}_\lambda} w_\lambda^{-1}(x) dx = 8 \cdot 2^{3(q+1)} \int_{Q_\lambda} w^{-1}(x) dx.$$

On peut donc conclure :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|B|} \left(\int_B w_\lambda(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B w_\lambda^{-1}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{3}{2^{3q} |\tilde{Q}_\lambda|} 2^{3(q+1)} 8 \left(\int_{Q_\lambda} w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q_\lambda} w^{-1}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \frac{1}{|\tilde{Q}_\lambda|} \left(\int_{Q_\lambda} w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q_\lambda} w^{-1}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C' K\left(\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Dans le cas $3|B| < |\tilde{Q}_\lambda|$, nous devons traiter trois situations différentes. Si B est contenue dans le translaté d'un parmi les huit cubes qui remplissent \tilde{Q}_λ , alors par hypothèse :

$$\frac{1}{|B|} \left(\int_B w_\lambda(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B \frac{1}{w_\lambda(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq K\left(\frac{3}{2}\right).$$

Par ailleurs, si B contient elle-même l'un des cubes précédents, alors :

$$\left(\int_B w_\lambda(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\tilde{Q}_c} w_\lambda(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\tilde{Q}_\lambda} w_\lambda(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\left(\int_B \frac{1}{w_\lambda(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\tilde{Q}_c} \frac{1}{w_\lambda(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\tilde{Q}_\lambda} \frac{1}{w_\lambda(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B|} \left(\int_B w_\lambda(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B \frac{1}{w_\lambda(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{8}{|\tilde{Q}_\lambda|} \left(\int_{Q_\lambda} w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Q_\lambda} \frac{1}{w(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 8C' K\left(\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, si B ne vérifie aucun des cas précédents, il existe au plus huit cubes Q_j tels que $Q_j \cap B \neq \emptyset$ et qui sont les translatés des huit cubes de même taille qui remplissent \tilde{Q}_λ . Soit $S_j = B \cap Q_j$ et supposons S_1 tel que $|S_1| = \max_{j=1, \dots, 8} |S_j|$. Grâce aux symétries de la fonction $w_\lambda(x)$, on a :

$$\left(\int_B w_\lambda(x) dx \right) \leq 8 \int_{S_1} w_\lambda(x) dx.$$

Soient B_{in} , B_c les boules inscrite et circonscrite à S_1 . Puisque $w(x)dx$ est une mesure doublante (voir [Ste93]), il existe $A > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A} \left(\int_{B_c} w(x) dx \right) &\leq \int_{B_{in}} w(x) dx \leq \int_{S_1} w_\lambda(x) dx \\
&\leq \int_{S_1} w(x) dx \leq \left(\int_{B_c} w(x) dx \right) \leq A \left(\int_{B_{in}} w(x) dx \right).
\end{aligned}$$

Le même argument vaut aussi pour $w(x)^{-1}$. Nous pouvons en déduire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|B|} \left(\int_B w_\lambda(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B \frac{1}{w_\lambda(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{8A}{|B_{in}|} \left(\int_{B_{in}} w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{in}} \frac{1}{w(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 8AK \left(\frac{3}{2} \right). \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. ♦

Remarque. La fonction $w(x) = 1 + |x|^3$ est, à son tour, seulement un poids de Muckenhoupt local. De la même façon que dans les propositions 3.17 et 3.18, on peut montrer pour cette fonction w que la constante $K(R)$ apparaissant dans la définition 3.15 est de l'ordre de $1 + \log(1 + R)$ et qu'il est possible d'en définir un'extension à un poids de Muckenhoupt. Cependant, nous ne sommes pas intéressés à ce cas car ni le laplacien d'une fonction $f \in X_{\frac{3}{2}}$ est une molécule, ni $X_{\frac{3}{2}}$ est un sous-espace de L^3 .

3.2.4 Opérateurs de convolution sur L_δ^2

Nous avons vu que $w(x)$ n'est pas un poids de Muckenhoupt. Il est quand-même possible démontrer la bicontinuité du terme bilinéaire de l'équation intégrale sur $C([0, T], X_\delta) \times C([0, T], X_\delta)$ en décomposant le noyau de convolution en deux parties, l'une localisée au voisinage de l'origine et l'autre s'annulant ici. Nous allons prouver que ces deux opérateurs sont en effet continus.

Les résultats que nous avons obtenus sont les suivants.

Proposition 3.19

Soit $T_0 f = \int_{\mathbb{R}^3} K_0(x, y) f(y) dy$ un opérateur de Calderón-Zygmund tel que $K_0(x, y) = 0$ si $|x - y| > 1$. Alors $T_0 : L_\delta^2 \rightarrow L_\delta^2$ et il existe $C > 0$ tel que $\|T_0 f\|_{L_\delta^2} \leq C \|f\|_{L_\delta^2}$.

Proposition 3.20

Soit $T_1 f = \int K_1(x - y) f(y) dy$ un opérateur de convolution dont le noyau s'annule au voisinage de l'origine ($K_1(x) = 0$ si $|x| \leq 1$) et vérifie :

- i) $|K_1(x)| \leq \frac{C}{|x|^4} \quad \frac{3}{2} < \delta < \frac{5}{2}$
- ii) $|K_1(x)| \leq \frac{C}{|x|^5} \quad \frac{5}{2} < \delta < \frac{7}{2}$
- iii) $|K_1(x)| \leq \frac{C}{|x|^6} \quad \frac{7}{2} < \delta < \frac{9}{2}$.

Alors $T_1 : L_\delta^2 \rightarrow L_\delta^2$ et il existe $C > 0$ tel que $\|T_1 f\|_{L_\delta^2} \leq C \|f\|_{L_\delta^2}$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.19 : Nous devons estimer

$$\begin{aligned}
 \|T_0 f\|_{L^2_\delta}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_{|x-y|<1} K_0(x, y) f(y) dy \right|^2 w(x) dx \\
 &\leq \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^3} \int_{Q(x_\lambda, 1)} \left| \int_{Q(x_\lambda, 3)} K_0(x, y) f(y) dy \right|^2 w(x) dx \\
 &\leq \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^3} \int_{Q(x_\lambda, 1)} \left| \int_{\mathbb{R}^3} K_0(x, y) f_\lambda(y) dy \right|^2 w_\lambda(x) dx
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $Q(x_\lambda, R)$ est le cube centré en $x_\lambda = (\frac{2n+1}{2}, \frac{2m+1}{2}, \frac{2k+1}{2})$ de côté R , $f_\lambda(y) = f(y)\chi_{Q(x_\lambda, 3)}$ et $w_\lambda(x)$ est l'extension de Muckenhoupt de $w(x)$ construite dans la proposition 3.18 et coïncidant avec $w(x)$ sur $Q(x_\lambda, 3)$. Grâce à la continuité des opérateurs de Calderón-Zygmund sur les espaces à poids de Muckenhoupt, (3.6) peut être contrôlée par :

$$\begin{aligned}
 &C \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |f_\lambda(x)|^2 w_\lambda(x) dx \\
 &= C \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^3} \int_{Q(x_\lambda, 3)} |f(x)|^2 w(x) dx \\
 &\leq C \|f\|_{L^2_\delta}^2.
 \end{aligned}$$

◆

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.20 : Considérons

$$\begin{aligned}
 \|T_1 f\|_{L^2_\delta}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_{|x-y|\geq 1} K_1(x-y) f(y) dy \right|^2 w(x) dx \\
 &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{2^j < |x-y| \leq 2^{j+1}} |K_1(x-y) f(y)| dy \right)^2 w(x) dx.
 \end{aligned}$$

Nous allons estimer chaque terme de la série, dans le cas général $\alpha = 4, 5, 6$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{2^j < |x-y| \leq 2^{j+1}} |K_1(x-y) f(y)| dy \right)^2 w(x) dx \\
 &\leq C \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^3} \int_{Q(x_\lambda, \frac{2^j}{2}, 2^j)} \frac{1}{2^{2\alpha j}} \left(\int_{2^j < |x-y| \leq 2^{j+1}} |f(y)| dy \right)^2 w(x) dx \\
 &\leq C \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^3} \int_{Q(x_\lambda, \frac{2^j}{2}, 2^j)} \frac{1}{2^{2\alpha j}} \left(\int_{Q(x_\lambda, \frac{2^j}{2}, 5 \cdot 2^j)} |f(y)| w(y)^{\frac{1}{2}} w(y)^{-\frac{1}{2}} dy \right)^2 w(x) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^3} \int_{Q(x_\lambda \frac{2^j}{2}, 2^j)} \frac{1}{2^{2\alpha j}} \left(\int_{Q(x_\lambda \frac{2^j}{2}, 52^j)} |f(y)|^2 w(y) dy \right) \left(\int_{Q(x_\lambda \frac{2^j}{2}, 52^j)} w(y)^{-1} dy \right) w(x) dx \\
&\leq C \frac{1}{2^{j(2\alpha-6)}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^3} \left(\int_{Q(x_\lambda \frac{2^j}{2}, 52^j)} |f(y)|^2 w(y) dy \right) \left(\frac{1}{2^{3j}} \int_{Q(x_\lambda \frac{2^j}{2}, 52^j)} w(y) dy \right) \times \\
&\quad \left(\frac{1}{2^{3j}} \int_{Q(x_\lambda \frac{2^j}{2}, 52^j)} \frac{1}{w(y)} dy \right) \\
&\leq C \frac{1}{2^{j(2\alpha-6)}} \|f\|_{L_\delta^2}^2 (1 + 2^{j(2\delta-3)})
\end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant du résultat suivant, contenu dans la proposition 3.17 :

$$\sup_{r_B \leq R} \frac{1}{|B|} \left(\int_B w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B \frac{1}{w(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(1 + R^{\delta-\frac{3}{2}})$$

(les boules peuvent être remplacées par les cubes, la mesure $w(x)dx$ étant doublante). Les hypothèses sur α et δ permettent alors de sommer sur les $j \geq 0$ et donc de conclure. \blacklozenge

3.2.5 Tendances et fluctuation dans X_δ

Nous disposons maintenant de tous les outils dont nous avons besoin pour appliquer le procédé de point fixe dans $C([0, T], X_\delta)$. Dans un souci de clarté, nous allons traiter séparément les termes linéaire et bilinéaire.

Lemme 3.21

Si $\vec{u}_0 \in X_\delta$, alors pour tout $T \in]0, +\infty[$ $e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in C([0, T], X_\delta)$.

PREUVE : Nous montrons d'abord que, pour tout $t \in]0, T[$ on a $\Delta e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in L_\delta^2$. La seule chose que nous devons vérifier est que $\Delta e^{t\Delta} \vec{u}_0 = e^{t\Delta} \Delta \vec{u}_0 \in L^\infty(]0, T[, L^2(|x|^{2\delta} dx))$. Du moment que $|x|^{2\delta} \leq C(|x-y|^{2\delta} + |y|^{2\delta})$, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \Delta \vec{u}_0(y) dy \right|^2 |x|^{2\delta} dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} t^{\frac{\delta}{2}} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \frac{|x-y|^\delta}{t^{\frac{\delta}{2}}} |\Delta \vec{u}_0(y)| dy + \right. \\
&\quad \left. C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} |y|^\delta |\Delta \vec{u}_0(y)| dy \right)^2 dx \\
&\leq C t^\delta \|\tilde{\varphi}_t * |\Delta \vec{u}_0|\|_{L^2}^2 + \left\| e^{t\Delta} (|\cdot|^\delta |\Delta \vec{u}_0|) \right\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

où le contrôle uniforme de la norme L^1 de $\tilde{\varphi}_t(x) = \frac{|x|^\delta e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{\delta}{2}} (4\pi t)^{\frac{3}{2}}}$ donne

$$\|e^{t\Delta} \Delta \vec{u}_0\|_{L^2(|x|^{2\delta} dx)}^2 \leq C(1 + t^\delta) \|\Delta \vec{u}_0\|_{L_\delta^2}^2$$

et donc

$$\|e^{t\Delta} \Delta \vec{u}_0\|_{L_\delta^2} \leq C(1 + t^{\frac{\delta}{2}}) \|\Delta \vec{u}_0\|_{L_\delta^2}.$$

Pour vérifier que $e^{t\Delta} \vec{u}_0$ est nulle à l'infini pour tout t fixé, il suffit de remarquer que le noyau de convolution appartient à la classe de Schwartz \mathcal{S} et que \vec{u}_0 appartient à la fermeture de \mathcal{S} dans L^3 . Pour finir, la propriété d'annulation des moments découle des deux remarques suivantes : $\Delta \vec{u}_0 \in L^1$ si $\delta > \frac{3}{2}$, $x_i \Delta \vec{u}_0 \in L^1$ si $\delta > \frac{5}{2}$ et $x_i x_j \Delta \vec{u}_0 \in L^1$ si $\delta > \frac{7}{2}$, comme nous avons souligné dans le paragraphe 3.2.1 ; de plus, si f et g appartiennent à L^1 avec $\int f dx = 0$, alors $\int f * g dx = 0$. \blacklozenge

Lemme 3.22

L'opérateur bilinéaire

$$B(\vec{u}, \vec{v})(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) ds$$

est bicontinu de $C([0, T], X_\delta) \times C([0, T], X_\delta)$ dans $C([0, T], X_\delta)$ pour tout $T \in]0, +\infty[$.

PREUVE : Montrons d'abord que $\Delta B(\vec{u}, \vec{v})(t) \in C([0, T], L_\delta^2)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, $\text{supp } \varphi \subset B(0, 1)$, $\varphi \not\equiv 0$ et décomposons le noyau K de l'opérateur \mathbb{P} en deux parties :

$$K(x) = \varphi(x)K(x) + (1 - \varphi(x))K(x) = K_0(x) + K_1(x) \quad x \neq 0.$$

La fonction K_0 est donc supportée au voisinage de l'origine et le support de K_1 ne contient par l'origine. Analysons d'abord $\int_0^t K_0 * e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot \Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) ds$. En utilisant la continuité sur L_δ^2 de l'opérateur de convolution $e^{(t-s)\Delta} \sqrt{t-s} \vec{\nabla}$ et le contrôle de

$$\|\Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s)\|_{L_\delta^2} = \left\| \Delta \vec{u}(s) \otimes \vec{v}(s) + \vec{u}(s) \otimes \Delta \vec{v}(s) + 2\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s) \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{L_\delta^2}$$

assuré par la proposition 3.12 et le lemme 3.13, on obtient facilement que, pour tout $s < t$:

$$\begin{aligned} & \left\| e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot \Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) ds \right\|_{L_\delta^2} \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left\| e^{(t-s)\Delta} \sqrt{t-s} \vec{\nabla} \cdot \Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) ds \right\|_{L_\delta^2} \\ & \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left(1 + (t-s)^{\frac{\delta}{2}} \right) \|\Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s)\|_{L_\delta^2} \\ & \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left(1 + (t-s)^{\frac{\delta}{2}} \right) \|\Delta \vec{u}(s)\|_{L_\delta^2} \|\Delta \vec{v}(s)\|_{L_\delta^2}. \end{aligned}$$

Quitte à montrer que K_0 est un noyau de Calderón–Zygmund, la proposition 3.19 nous donnera, pour tout $t < T$, avec $T \in]0, +\infty[$, le contrôle :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t K_0 * e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot \Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) ds \right\|_{L_\delta^2} \\ & \leq C \left(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left(1 + \sqrt{t-s}^\delta\right) ds \right) \sup_{0 < s < T} \|\Delta \vec{u}(s)\|_{L_\delta^2} \sup_{0 < s < T} \|\Delta \vec{v}(s)\|_{L_\delta^2} \quad (3.7) \\ & \leq CT^{\frac{1}{2}} \left(1 + T^{\frac{\delta}{2}}\right) \sup_{0 < s < T} \|\Delta \vec{u}(s)\|_{L_\delta^2} \sup_{0 < s < t} \|\Delta \vec{v}(s)\|_{L_\delta^2}. \end{aligned}$$

Rappelons que \mathbb{P} est un opérateur de Calderón–Zygmund, dont le noyau vérifie les propriétés suivantes :

- i) $\hat{K}(\xi) \in L^\infty$;
- ii) $|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^3} \quad x \neq 0$;
- iii) $|\vec{\nabla} K(x)| \leq \frac{C}{|x|^4} \quad x \neq 0$.

Cela reste vrai aussi pour la fonction $K_0(x) = K(x)\varphi(x)$, à savoir :

- i) $\|\hat{K}_0\|_{L^\infty} = \|\hat{\varphi} * \hat{K}\|_{L^\infty} \leq \|\hat{\varphi}\|_{L^1} \|\hat{K}\|_{L^\infty}$;
- ii) $|K_0(x)| \leq \frac{C}{|x|^3} \quad x \neq 0$;
- iii) $|\vec{\nabla} K_0(x)| \leq |\vec{\nabla} K(x)| |\varphi(x)| + |K(x)| |\vec{\nabla} \varphi(x)| \leq \frac{C}{|x|^4} \quad x \neq 0$

(φ étant à support dans la boule $B(0, 1)$).

Pour ce qui concerne le terme $\int_0^t K_1 * e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot \Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) ds$, nous ne pouvons pas appliquer directement la proposition 3.20, car K_1 décroît trop lentement à l'infini. Cependant, le noyau de l'opérateur $e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot \Delta$ apparaissant dans l'intégrale a au moins trois moments nuls et cela va être crucial. En effet, on a les trois expressions équivalentes :

$$K_1 * e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot \Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) = \begin{cases} \vec{\nabla} K_1 * e^{(t-s)\Delta} \cdot \Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) \\ \Delta K_1 * e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(s) \\ \vec{\nabla} \Delta K_1 * e^{(t-s)\Delta} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(s). \end{cases}$$

Nous allons exploiter la première formulation pour $\frac{3}{2} < \delta < \frac{5}{2}$, la deuxième pour $\frac{5}{2} < \delta < \frac{7}{2}$ et la troisième pour $\frac{7}{2} < \delta < \frac{9}{2}$. Nous avons affaire aux fonctions $\vec{\nabla} K_1$, ΔK_1 et $\vec{\nabla} \Delta K_1$ qui sont supportées en dehors de l'origine et qui ont une décroissance à l'infini respectivement de l'ordre de $\frac{1}{|x|^4}$, $\frac{1}{|x|^5}$ et $\frac{1}{|x|^6}$ (nous rappelons que les composantes de $\hat{K}(\xi)$ sont $\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}$,

$i, j = 1, 2, 3$). Nous pouvons appliquer la proposition 3.20 pour obtenir, après intégration :

$$\begin{aligned}
 & \left\| \int_0^t K_1 e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot \Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) ds \right\|_{L_\delta^2} \\
 & \leq \int_0^t \left\| K_1 e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot \Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) \right\|_{L_\delta^2} ds \\
 & \leq C \int_0^t (1 + (t-s)^{\frac{\delta}{2}}) ds \sup_{0 < s < T} \|\Delta \vec{u}(s)\|_{L_\delta^2} \sup_{0 < s < T} \|\Delta \vec{v}(s)\|_{L_\delta^2} \\
 & \leq C(1 + T^{\frac{\delta}{2}})T \sup_{0 < s < T} \|\Delta \vec{u}(s)\|_{L_\delta^2} \sup_{0 < s < T} \|\Delta \vec{v}(s)\|_{L_\delta^2}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Les deux estimations (3.7) et (3.8) donnent finalement :

$$\|\Delta B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L_\delta^2} \leq C(1 + T^{\frac{\delta}{2}})T^{\frac{1}{2}}(1 + T^{\frac{1}{2}}) \sup_{0 < s < T} \|\Delta \vec{u}(s)\|_{L_\delta^2} \sup_{0 < s < T} \|\Delta \vec{v}(s)\|_{L_\delta^2}$$

ainsi que la continuité en $t = 0$ de $\Delta B(\vec{u}, \vec{v})(t)$ dans L_δ^2 . La continuité en dehors de l'origine se démontre de façon habituelle.

Venons-en à la démonstration de la nullité à l'infini de $B(\vec{u}, \vec{v})(t)$, pour tout $t \in]0, T[$. Puisque l'intégrale converge dans $L^{\frac{3}{2}}$ ($\int_0^t \left\| \mathbb{P}e^{(t-s)\Delta} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{L^{\frac{3}{2}}} ds < +\infty$) et le sous-espace de $L^{\frac{3}{2}}$ des fonctions nulles à l'infini est un fermé de $L^{\frac{3}{2}}$, il nous suffit de remarquer que $e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s)$ appartient à C_0 pour tout $s \in]0, T[$ et cela vient par exemple du fait que $\vec{u} \otimes \vec{v}(s) \in L^3$ et que le noyau de convolution appartient à $L^{\frac{3}{2}}$ (voir lemme 3.8). Un argument similaire nous permet d'établir la propriété d'annulation des moments ; voyons cela en détail. Si on appelle $a(x, s) = \Delta e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(x, s)$, on sait que $\Delta B(\vec{u}, \vec{v})(t) = \int_0^t a(s) ds$ converge dans L_δ^2 . Il suffit alors de montrer que :

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^3} a(x, s) dx = 0 & \delta > \frac{3}{2}, 0 < s < T, \\ \int_{\mathbb{R}^3} x_k a(x, s) dx = 0 & \delta > \frac{5}{2}, 0 < s < T, k = 1, 2, 3, \\ \int_{\mathbb{R}^3} x_i x_k a(x, s) dx = 0 & \delta > \frac{7}{2}, 0 < s < T, i, k = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{3.9}$$

En effet, le sous-espace de L_δ^2 des fonctions satisfaisant (3.9) est fermé dans L_δ^2 . Vérifions alors les propriétés (3.9) pour $a(x, s)$, en notant par Θ le noyau de convolution de l'opérateur $e^{\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot$. Pour $\delta > \frac{3}{2}$, cela découle de l'expression $a(x, s) = \frac{1}{(t-s)^2} \Theta \left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}} \right) * \Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(x, s)$ et, pour chaque composante θ de Θ on a $\theta \in L^1$, $\int \theta(x) dx = 0$ et, de plus, $\Delta(\vec{u} \otimes \vec{v})(s) \in L_\delta^2 \subset L^1$ pour tout $s \in]0, T[$. Pour $\delta > \frac{5}{2}$, nous utilisons par contre l'expression $a(x, s) = \frac{1}{(t-s)^{\frac{5}{2}}} \vec{\nabla} \cdot \Theta \left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}} \right) * \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(x, s)$, où maintenant, en notant

ψ les composantes de $\vec{\nabla} \cdot \Theta$, on a que ψ et $x_k \psi$ appartiennent à L^1 pour tout $k = 1, 2, 3$, $\int \psi(x) dx = 0$, $\int x_k \psi(x) dx = 0$ et, de plus, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(s)$ et $x_k \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v})(s)$ appartiennent à L^1 pour tout $s \in]0, T[$. Finalement, pour $\delta > \frac{7}{2}$, nous écrivons $a(x, s) = \frac{1}{(t-s)^3} \Delta \Theta \left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}} \right) * \vec{u} \otimes \vec{v}(x, s)$ et, cette fois-ci, les composantes φ de $\Delta \Theta$ vérifient que φ , $x_k \varphi$, $x_i x_k \varphi$ appartiennent à L^1 pour tous $i, k = 1, 2, 3$, $\int \varphi(x) dx = 0$, $\int x_i \varphi(x) dx = 0$, $\int x_i x_k \varphi(x) dx = 0$ et, pour finir, $\vec{u} \otimes \vec{v}(s)$, $x_i \vec{u} \otimes \vec{v}(s)$ et $x_i x_k \vec{u} \otimes \vec{v}(s)$ appartiennent à L^1 pour tout $s \in]0, T[$. \blacklozenge

La preuve du théorème est alors directe.

PREUVE DU THÉORÈME 3.10 : Soient $\vec{u}(s), \vec{v}(s) \in C([0, T'], X_\delta)$, où T' sera choisi dans un moment. Nous allons montrer que l'opérateur $F(\vec{u})(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds$ est une contraction sur une boule $B(0, R) \subset C([0, T'], X_\delta)$. Voici les inégalités qu'il nous faut établir :

$$\begin{cases} \sup_{0 < t < T'} \|F(\vec{u})(t)\|_{X_\delta} \leq R \\ \sup_{0 < t < T'} \|F(\vec{u})(t) - F(\vec{v})(t)\|_{X_\delta} \leq C \sup_{0 < t < T'} \|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_{X_\delta} \end{cases}$$

pour toutes fonctions $\vec{u}, \vec{v} \in B(0, R)$ et pour une constante $C < 1$. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T'} \|F(\vec{u})(t)\|_{X_\delta} &\leq \sup_{0 < t < T'} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{X_\delta} + C \sqrt{T'} (1 + \sqrt{T'}) (1 + \sqrt{T'}^\delta) \left(\sup_{0 < t < T'} \|\vec{u}(s)\|_{X_\delta} \right)^2 \\ &\leq \sup_{0 < t < T'} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{X_\delta} + C \sqrt{T'} (1 + \sqrt{T'}) (1 + \sqrt{T'}^\delta) R^2 \end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T'} \|F(\vec{u})(t) - F(\vec{v})(t)\|_{X_\delta} &\leq C \sqrt{T'} (1 + \sqrt{T'}) (1 + \sqrt{T'}^\delta) \sup_{0 < t < T'} \|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_{X_\delta} \times \\ &\quad \left(\sup_{0 < t < T'} \|\vec{u}(t)\|_{X_\delta} + \sup_{0 < t < T'} \|\vec{v}(t)\|_{X_\delta} \right) \\ &\leq 2RC \sqrt{T'} (1 + \sqrt{T'}) (1 + \sqrt{T'}^\delta) \sup_{0 < t < T'} \|\vec{u}(t) - \vec{v}(t)\|_{X_\delta}. \end{aligned}$$

Il faut donc trouver un R et un T' tels que :

$$\begin{cases} \sup_{0 < t < T'} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{X_\delta} + \eta(T') R^2 \leq R \\ 2\eta(T') R < 1, \end{cases} \quad (3.10)$$

où $\eta(T') = C \sqrt{T'} (1 + \sqrt{T'}) (1 + \sqrt{T'}^\delta)$. Comme $\sup_{0 < t < T'} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{X_\delta} \leq C (\sqrt{T'}^\delta + 1) \|\vec{u}_0\|_{X_\delta}$ on peut choisir T' suffisamment petit pour que $\sup_{0 < t < T'} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{X_\delta} \leq \frac{1}{4\eta(T')}$; si de plus

$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\eta(T') \sup_{0 < t < T'} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{X_\delta}}}{2\eta(T')}$, les deux conditions (3.10) sont vérifiées et F est une contraction de $B(0, R) \subset C([0, T'], X_\delta)$.

Chapitre 4

De Navier–Stokes à Schrödinger non linéaire

4.1 Présentation du problème

Comme nous avons pu remarquer dans les chapitres précédents, un phénomène typique des équations de Navier–Stokes est le comportement différent des termes linéaire (*tendance*) et non linéaire (*fluctuation*), déjà remarqué par M. Cannone et F. Planchon [Can95], [Pla96]. Le problème de l'unicité des solutions dans $C([0, T[, L^3(\mathbb{R}^3))$ a été résolu grâce à l'appartenance de la fluctuation à un espace (de Besov) interdit à la tendance. On peut se demander si cette idée de scinder l'étude des deux termes d'une équation non linéaire est typique des équations de Navier–Stokes ou bien peut être utilisée avec profit pour d'autres équations. E. Terraneo [Ter99b] a montré récemment comment cette approche s'adapte parfaitement à l'équation de la chaleur non linéaire. On pourrait croire que le point crucial dans un tel phénomène est l'action très régularisante du semi-groupe de la chaleur $e^{t\Delta}$ qui gouverne ces deux équations. Nous allons voir dans ce chapitre que ce n'est pas le cas en présentant une application de cela à l'étude des solutions autosimilaires pour une classe d'équations de Schrödinger non linéaires.

Nous nous intéressons donc au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \gamma |u|^\alpha u \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $u(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $u_0(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Grâce à l'homogénéité de l'équation, si $u(t, x)$ est une solution, $v(t, x) = \lambda^p u(\lambda^2 t, \lambda x)$ pour tout $\lambda > 0$ et $\operatorname{Re} p = \frac{2}{\alpha}$ l'est aussi.

On appellera *solution autosimilaire* une solution $u(t, x)$ telle que :

$$\forall \lambda > 0 \quad u(t, x) = \lambda^p u(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{avec} \quad \operatorname{Re} p = \frac{2}{\alpha}.$$

Une telle solution est donc de la forme :

$$u(t, x) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} W\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad (4.2)$$

et sa valeur initiale $u_0(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^p}$ où Ω est une distribution homogène de degré 0.

Nous allons présenter dans ce chapitre un résultat d'existence de solutions autosimilaires de (4.1) (théorème 4.3) qui se situe dans la suite des travaux de T. Cazenave et F. B. Weissler [CW90],[CW98a],[CW98b],[CW99], et étend un résultat récent de F. Ribaud et A. Youssfi [RY98]. En suivant une démarche introduite par Y. Giga et T. Miyakawa [GM89] et déjà utilisée par M. Cannone [Can95] pour les équations de Navier–Stokes, on choisit un espace fonctionnel de distributions sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ apte à contenir des fonctions de la forme (4.2) et on démontre un théorème d'existence et d'unicité de solutions de l'équation (4.1). Pourvu que l'espace choisi soit compatible avec des données initiales homogènes, on sera en présence de solutions autosimilaires grâce à l'invariance de l'équation.

4.1.1 Généralités sur le groupe de Schrödinger

On considère le problème intégral associé à (4.1) :

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0 - i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s) ds \quad (4.3)$$

et on se propose de démontrer un théorème de point fixe pour la transformation

$$u(t) \mapsto F(u)(t) = e^{it\Delta} u_0 - i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s) ds.$$

On verra plus loin dans le chapitre que les problèmes intégral et différentiel sont équivalents dans le cadre que nous allons choisir.

Comme pour les équations de Navier–Stokes, distinguons dans $F(u)(t)$ la partie linéaire :

$$U_0(t) = e^{it\Delta} u_0$$

et non linéaire :

$$A(u)(t) = i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s) ds.$$

On a indiqué par $e^{it\Delta}$ le groupe de Schrödinger :

$$e^{it\Delta} \varphi(x) = \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} * \varphi(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}'$$

et donc $U_0(t)$ est la solution de l'équation libre suivante associée au problème non linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u = i\Delta u \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (4.4)$$

On a que $e^{it\Delta} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ est continue et que $\forall u_0 \in \mathcal{S}'$, l'application $t \mapsto e^{it\Delta}u_0$ est continue de \mathbb{R} dans \mathcal{S}' .

Terminons cette section par des estimations classiques sur le noyau de Schrödinger.

Proposition 4.1 (estimations classiques)

Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ on a :

$$\begin{aligned} \forall p \geq 2 \quad & \|e^{it\Delta}f\|_{L^p} \leq \frac{C}{t^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \|f\|_{L^{p'}} \\ \forall p \geq 2, \forall s \in \mathbb{R} \quad & \|e^{it\Delta}f\|_{\dot{H}_p^s} \leq \frac{C}{t^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \|f\|_{\dot{H}_{p'}^s} \end{aligned}$$

PREUVE : On part des estimations évidentes :

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta}f\|_{L^2} &= \|f\|_{L^2} \\ \|e^{it\Delta}f\|_{L^\infty} &\leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

et on obtient l'estimation sur les espaces de Lebesgue par interpolation. L'estimation sur les espaces de Sobolev vient du fait que les opérateurs de dérivation et de Schrödinger commutent. \blacklozenge

4.1.2 Le cadre fonctionnel et la méthode utilisée

Introduisons donc le cadre fonctionnel considéré par F. Ribaud et A. Youssfi dans lequel nous allons travailler. Nous notons encore par $\tau'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions, tempérées en espace, introduit dans le chapitre 1 (théorème 1.4). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ fixés, soit :

$$E_{s,\alpha} = \left\{ f(t,x) \in \tau'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n) : \sup_{t>0} t^\theta \|f(t)\|_{\dot{H}_p^s} < +\infty \right\} \quad (4.5)$$

où $s \geq 0$ et $p = p(s, \alpha)$, $\theta = \theta(s, \alpha)$ sont ainsi définis :

$$p = \frac{n(\alpha + 2)}{\alpha s + n}, \quad \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha} - \frac{n}{p} + s \right).$$

C'est un espace de Banach normé par $\|f\|_{E_{s,\alpha}} = \sup_{t>0} t^\theta \|f(t)\|_{\dot{H}_p^s}$. Le choix de θ est imposé par l'homogénéité (4.2) puisqu'on veut que la norme soit invariante ; par contre, le choix de p en fonction de s et de α sera déterminé par l'exigence de rendre l'opérateur $A(u)$ continu. On a donc toute une gamme d'espaces pour tout indice de non linéarité $(\alpha + 1)$ fixé. Remarquons au passage que la relation entre s et p n'est pas dictée par les injections de Sobolev, donc les espaces \dot{H}_p^s ne sont pas contenus les uns dans les autres.

En vue de l'obtention de solutions autosimilaires deux questions se posent : tout d'abord existe-t-il des données initiales u_0 telles que $U_0(t) = e^{it\Delta}u_0$ se trouve dans l'espace $E_{s,\alpha}$ et qui soient de surcroît homogènes? Et, le cas échéant, peut-on démontrer que la transformation F est une contraction sur une boule fermée de l'espace $E_{s,\alpha}$?

Nous allons voir que la réponse à ces deux questions est affirmative pour α compris dans une certaine plage d'indices dont la borne inférieure α_0 tend vers zéro pour n tendant vers l'infini.

4.2 Le théorème de F. Ribaud et A. Youssfi et son amélioration

Nous sommes en mesure d'énoncer le théorème de F. Ribaud et A. Youssfi qui donne l'existence de solutions et de l'extension que nous en avons donnée. Nous verrons ensuite (voir corollaire 4.11) qu'il existe effectivement de données homogènes qui sont compatibles avec ce cadre fonctionnel.

Théorème 4.2 (Ribaud–Youssfi)

Soit $\alpha > 0$, $\alpha \notin 2\mathbb{N}$. Si $s \geq 0$ vérifie $s_{\min} = \frac{n}{2} - \frac{\alpha+2}{\alpha} < s < \frac{n}{2} - \frac{\alpha+2}{\alpha(\alpha+1)} = s_{\max}$, et de plus :

$$(H) \quad s = 0 \quad \text{ou bien} \quad \alpha \geq 1 \text{ et } s < \alpha$$

alors, dès que $p \geq 2$, on a le résultat suivant :

il existe $M > 0$ tel que pour tout $u_0 \in \mathcal{S}'$ telle que $e^{it\Delta}u_0 \in E_{s,\alpha}$ et $\|e^{it\Delta}u_0\|_{E_{s,\alpha}} \leq M$ il existe une unique solution $u \in E_{s,\alpha}$ de (4.1) telle que $\|u\|_{E_{s,\alpha}} \leq 2M$.

Pour $\alpha \in 2\mathbb{N}$ l'hypothèse (H) n'est pas nécessaire.

Théorème 4.3

Les conclusions du théorème précédent restent valables si (H) est remplacée par :

$$(H') \quad s < \alpha + 1, \quad s \leq \frac{\alpha n}{3\alpha + 2}.$$

4.2.1 Démonstration du théorème de F. Ribaud et A. Youssfi

Nous allons donner les points fondamentaux de la preuve du théorème de F. Ribaud et A. Youssfi en mettant en évidence d'où vient l'hypothèse (H).

PREUVE DU THÉORÈME 4.2 : Tout d'abord on remarque que si $s \geq 0$ et $p = p(s, \alpha)$ comme dans la définition 4.5 de l'espace $E_{s,\alpha}$, alors $\dot{H}_p^s \subset L^q$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{s}{n}$ et $q \geq \alpha + 1$, ce qui donne un sens au terme non linéaire $|u|^\alpha u$. De plus, la condition $p \geq 2$ vient évidemment de la nécessité d'appliquer la proposition 4.1.

Il faut alors montrer que l'opérateur F est contractant sur une boule fermée de $E_{s,\alpha}$, à savoir que si $u, v \in E_{s,\alpha}$ et $\|u\|_{E_{s,\alpha}} \leq K$, $\|v\|_{E_{s,\alpha}} \leq K$ alors :

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{E_{s,\alpha}} &\leq K \\ \|F(u) - F(v)\|_{E_{s,\alpha}} &\leq C \|u - v\|_{E_{s,\alpha}} \quad C < 1. \end{aligned}$$

Puisque $\|F(u)\|_{E_{s,\alpha}} \leq \|U_0\|_{E_{s,\alpha}} + \|A(u)\|_{E_{s,\alpha}}$ et $\|F(u) - F(v)\|_{E_{s,\alpha}} = \|A(u) - A(v)\|_{E_{s,\alpha}}$, concentrons-nous sur le terme non linéaire $A(u)$.

On a :

$$\begin{aligned} \|A(u)(t)\|_{\dot{H}_p^s} &\leq C \int_0^t \|e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s)\|_{\dot{H}_p^s} ds \\ &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \| |u|^\alpha u(s) \|_{\dot{H}_p^{s'}} ds. \end{aligned}$$

Il faut donc estimer le produit $|u|^\alpha u$ comme opérateur de \dot{H}_p^s à $\dot{H}_p^{s'}$. On a à ce propos le lemme suivant, dont on peut trouver une démonstration dans Runst–Sickel [RS96].

Lemme 4.4

Soient $\alpha > 0$, $s > 0$, $1 < p < +\infty$ tels que :

$$s < \min\left(\frac{n}{p}, \alpha + 1\right), \quad \left(\frac{1}{p} - \frac{s}{n}\right) \leq \frac{1}{\alpha + 1}$$

et soit $h = \frac{n}{s + (\alpha + 1)\left(\frac{n}{p} - s\right)}$; alors :

- (i) $\forall f \in \dot{H}_p^s \quad \| |f|^\alpha f \|_{\dot{H}_h^s} \leq C \|f\|_{\dot{H}_p^s}^{\alpha+1}$
- (ii) $\forall f \in \dot{H}_p^s \quad \| |f|^{\alpha+1} \|_{\dot{H}_h^s} \leq C \|f\|_{\dot{H}_p^s}^{\alpha+1}$.

De plus, si α est un entier pair (respectivement impair) alors (i) (respectivement (ii)) vaut sans la restriction $s < \alpha + 1$.

Si, en particulier, $p = p(s, \alpha)$ comme dans (4.5) et $p \geq 2$, alors $h = p'$ et on obtient l'estimation souhaitée :

$$\forall s < \alpha + 1 \quad \| |u|^\alpha u \|_{\dot{H}_p^s} \leq C \|u\|_{\dot{H}_p^s}^{\alpha+1}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \|A(u)(t)\|_{\dot{H}_p^s} &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \|u(s)\|_{\dot{H}_p^s}^{\alpha+1} ds \\ &\leq C \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \frac{1}{s^{\theta(\alpha+1)}} ds \right) \left(\sup_{0 < s < t} s^\theta \|u(s)\|_{\dot{H}_p^s} \right)^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Si maintenant

$$\begin{cases} n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) < 1 \\ \theta(\alpha + 1) < 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

on peut conclure que

$$\forall t > 0 \quad \|A(u)(t)\|_{\dot{H}_p^s} \leq \frac{C}{t^\theta} \|u\|_{E_{s,\alpha}}^{\alpha+1}$$

d'où

$$\|A(u)\|_{E_{s,\alpha}} \leq C \|u\|_{E_{s,\alpha}}^{\alpha+1}.$$

La condition (4.6) se traduit par :

$$s_{\min} < s < s_{\max}$$

où s_{\min} et s_{\max} sont définis dans l'énoncé.

Grâce à cette estimation on peut facilement montrer que l'opérateur F est stable sur une boule fermée de $E_{s,\alpha}$ de rayon $2M$, dès que $\|e^{it\Delta}u_0\|_{E_{s,\alpha}} \leq M$. Jusqu'ici on n'a pas eu besoin d'introduire la condition (H), qui n'est donc pas nécessaire à la stabilité de F , mais seulement (H'). Elle viendra donc de la contractivité de F .

Estimons alors :

$$\|F(u) - F(v)\|_{E_{s,\alpha}} = \|A(u) - A(v)\|_{E_{s,\alpha}}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} |u|^\alpha u(s) - |v|^\alpha v(s) &= C (u(s) - v(s)) \int_0^1 |\sigma[u(s) - v(s)] + v(s)|^\alpha d\sigma \\ &= C (u(s) - v(s)) G(u(s), v(s)), \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} \|A(u) - A(v)\|_{\dot{H}_p^s} &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \|(u(s) - v(s)) G(u(s), v(s))\|_{\dot{H}_p^s} ds \\ &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \|u(s) - v(s)\|_{\dot{H}_p^s} \|G(u(s), v(s))\|_{\dot{H}_r^s} ds \end{aligned}$$

où $s + \frac{n}{p'} = \frac{n}{p} + \frac{n}{r}$ (voir le lemme 2 dans [RY98]).

Il faut maintenant estimer $G(u(s), v(s))$ comme opérateur de $\dot{H}_p^s \times \dot{H}_p^s$ à valeurs dans \dot{H}_r^s . Puisque $G(u(s), v(s)) \approx |u|^\alpha(s) + |v|^\alpha(s)$, cela revient à estimer $|u|^\alpha(s)$ comme opérateur de \dot{H}_p^s à \dot{H}_r^s et on peut faire appel au lemme précédent, mais cette fois-ci l'exposant de non linéarité est α et non pas $\alpha + 1$, d'où les conditions $\alpha > 1$ et $s < \alpha$ apparaissant dans (H). Bien sûr, si on a le droit de considérer $s = 0$, les termes $|u|^\alpha u(s)$ et $|u|^\alpha(s)$ sont parfaitement contrôlés.

Si (H) est vérifiée, on a alors :

$$\|G(u(s), v(s))\|_{\dot{H}_s^\alpha} \leq C \left(\|u(s)\|_{\dot{H}_s^\alpha}^\alpha + \|v(s)\|_{\dot{H}_s^\alpha}^\alpha \right)$$

et on peut conclure par :

$$\|A(u) - A(v)\|_{E_{s,\alpha}} \leq C \|u - v\|_{E_{s,\alpha}} \left(\|u\|_{E_{s,\alpha}}^\alpha + \|v\|_{E_{s,\alpha}}^\alpha \right).$$

F est donc une contraction dès que u et v sont dans une boule de $E_{s,\alpha}$ suffisamment petite. \blacklozenge

Si on considère la compatibilité de la condition (H) avec $s_{\min} < s < s_{\max}$, on s'aperçoit que si $n \geq 7$ et $\frac{4}{n-2} \leq \alpha < 1$ on n'a pas pu démontrer l'existence de solutions dans $E_{s,\alpha}$ et ceci à cause du seul manque de contractivité de l'opérateur F .

4.2.2 L'idée centrale et le problème de compatibilité

Dans le cas non homogène $C([0, +\infty[, H^1)$ T. Cazenave et F. B. Weissler avaient pourtant montré le théorème suivant (voir théorème 1.2 dans [CW90] pour l'énoncé complet).

Théorème 4.5 (Cazenave–Weissler)

Soit $\alpha = \frac{4}{n-2}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, $\forall u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|u_0\|_{\dot{H}^1} \leq \varepsilon$, il existe $u(t)$ solution de (4.3) telle que $u(t) \in C([0, +\infty[, H^1) \cap L^q(]0, +\infty[, H_r^1)$ pour tous les q, r tels que $\frac{2}{q} = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{r})$ avec $2 \leq r < \frac{2n}{n-2}$. Cette solution est unique dans $L^\gamma(]0, +\infty[, H_\rho^1)$ où $\rho = \frac{n(\alpha+2)}{\alpha+n}$ et $\gamma = \frac{4(\alpha+2)}{\alpha(n-2)}$.

La démonstration se fait toujours par une méthode de point fixe, dans l'espace métrique complet :

$$\chi_M = \left\{ u(t) \in L^\gamma(]0, +\infty[, H_\rho^1) : \|u\|_{L^\gamma(]0, +\infty[, \dot{H}_\rho^1)} \leq M \right\}$$

où on a posé $d_\chi(u, v) := \|u - v\|_{L^\gamma(]0, +\infty[, L^\rho)}$. On aura remarqué qu'on ne fait pas intervenir la norme homogène \dot{H}_ρ^1 dans la définition de distance. Ainsi, T. Cazenave et F. B. Weissler prouvent que l'opérateur intégral $F(u)$ est stable et contractant sur χ_M où M est bien choisi.

Le point crucial est le fait que, pour démontrer la contractivité, ils n'ont pas besoin d'estimer $\|A(u) - A(v)\|_{\dot{H}_\rho^1}$ mais seulement $\|A(u) - A(v)\|_{L^\rho}$, ce qui élimine le problème du contrôle du terme non linéaire $|u|^\alpha + |v|^\alpha$ dans un espace de Sobolev régulier.

On est très vite tenté de transposer cette idée à notre espace $E_{s,\alpha}$. On considère alors :

$$F_{s,\alpha} = \left\{ u(t, x) \in \tau'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n) : \sup_{t>0} t^{\theta^*(s,\alpha)} \|u(t)\|_{L^{p(s,\alpha)}} < +\infty \right\} \quad (4.7)$$

où $\theta^*(s, \alpha) = \theta(s, \alpha) - \frac{s}{2}$ (avec $\theta(s, \alpha)$ comme dans (4.5)) est l'exposant déterminé par l'homogénéité requise. Il est important de remarquer que si $\alpha \geq \frac{4}{n-2}$ on a $\theta^*(s, \alpha) \leq 0$ pour tout $s \geq 0$. L'énoncé qu'on envisage démontrer est alors le suivant :

Soient $\alpha > 0$, $s \geq 0$, $s_{\min} < s < s_{\max}$, $s < \alpha + 1$ si $\alpha \notin 2\mathbb{N}$. Alors si $p \geq 2$ on a le résultat suivant :

il existe $M > 0$ tel que, si $e^{it\Delta}u_0 \in E_{s,\alpha} \cap F_{s,\alpha}$ et $\|e^{it\Delta}u_0\|_{E_{s,\alpha}} \leq M$, alors il existe une unique solution $u \in E_{s,\alpha} \cap F_{s,\alpha}$ de (4.1) telle que $\|u\|_{E_{s,\alpha}} \leq 2M$.

Il n'y a aucune difficulté à démontrer un tel énoncé si on procède par une méthode de point fixe dans l'espace $\chi_{s,\alpha} = E_{s,\alpha} \cap F_{s,\alpha}$ qu'on aura muni de la distance $d(u, v) := \|u - v\|_{F_{s,\alpha}}$ et on aura considéré le fermé $\chi_{s,\alpha,M} = \{u \in E_{s,\alpha} \cap F_{s,\alpha} : \|u\|_{E_{s,\alpha}} \leq 2M\}$. Le problème se situe au niveau de la consistance du théorème, car on a malheureusement la proposition suivante.

Proposition 4.6 (Oru, Cazenave–Weissler)

$\forall p \in [1, +\infty]$, $\forall \theta^* < 0$ on a :

$$\chi_{\theta^*} = \left\{ u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \sup_{t>0} t^{\theta^*} \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p} < +\infty \right\} = \{0\}$$

et si $\theta^* = 0$ l'espace χ_0 ne contient aucune fonction homogène de degré $r < 0$.

PREUVE : Ce résultat a été remarqué de façon indépendante par F. Oru [Oru98] et T. Cazenave et F. B. Weissler [CW99]. Pour $\theta^* < 0$ il suffit de remarquer que, pour tout $u_0 \in \chi_{\theta^*}$, $\langle u_0, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$ car $e^{it\Delta}u_0 \xrightarrow{\mathcal{S}'} u_0$ et pour $\theta^* = 0$ que $u_0 \in \chi_0$ implique $u_0 \in L^p$ et donc u_0 ne peut pas être homogène. \blacklozenge

On a donc imposé une condition incompatible au terme linéaire $U_0(t) = e^{it\Delta}u_0$. On peut cependant aller plus loin dans l'analyse et découvrir qu'on n'a pas besoin d'imposer à la solution (et donc au terme linéaire) d'appartenir à $F_{s,\alpha}$, car c'est une propriété automatiquement vérifiée par le terme non linéaire, dès que u appartient à $E_{s,\alpha}$. Nous pouvons donc conclure la démonstration du théorème 4.3 annoncé.

4.2.3 Démonstration du théorème 4.3

Commençons par les lemmes fondamentaux.

Lemme 4.7 (continuité $E_{s,\alpha} \rightarrow F_{s,\alpha}$)

Soient $\alpha > 0$, $\alpha \notin 2\mathbb{N}$, $s \geq 0$, $p \geq 2$, $p = p(s, \alpha)$, $s_{\min} < s < s_{\max}$ comme dans le théorème 4.2 et $s < \alpha + 1$, $s \leq \frac{\alpha n}{3\alpha + 2}$.

Soient $\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha} - \frac{n}{p} + s \right)$, $\theta^ = \theta - \frac{s}{2}$, $E_{s,\alpha}$ et $F_{s,\alpha}$ comme dans (4.5) et (4.7).*

Si $u \in E_{s,\alpha}$ et $A(u)(t) = i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s) ds$, alors on a :

$$A(u) \in F_{s,\alpha} \quad \text{et} \quad \|A(u)\|_{F_{s,\alpha}} \leq C \|u\|_{E_{s,\alpha}}^{\alpha+1}.$$

PREUVE : Nous précisons tout d'abord que les intervalles de validité pour l'indice de régularité s apparaissant dans l'énoncé ne sont pas optimaux. Cependant, ce sera dans ce cadre que le lemme sera appliqué par la suite et donc nous n'avons pas voulu alourdir la rédaction.

Ce lemme se démontre en découpant le noyau de Schrödinger en basses et hautes fréquences. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(\xi) \equiv 1$ si $|\xi| \leq 1$, $\varphi(\xi) \equiv 0$ si $|\xi| \geq 2$. On considère alors l'opérateur $\varphi(\Delta)$ défini par $(\varphi(\Delta)\psi)(\xi) = \varphi(\xi^2)\hat{\psi}(\xi)$, $\forall \psi \in \mathcal{S}$. Alors $\forall s < t$ on a $1 = \varphi((t-s)\Delta) + (1 - \varphi((t-s)\Delta))$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} e^{i(t-s)\Delta} &= \varphi((t-s)\Delta)e^{i(t-s)\Delta} + (1 - \varphi((t-s)\Delta))e^{i(t-s)\Delta} \\ &= \eta_1((t-s)\Delta) + \eta_2((t-s)\Delta). \end{aligned}$$

On appelle

$$A_1(u)(t) = i\gamma \int_0^t \eta_1((t-s)\Delta) |u|^\alpha u(s) ds$$

et

$$A_2(u)(t) = i\gamma \int_0^t \eta_2((t-s)\Delta) |u|^\alpha u(s) ds.$$

Si $u \in \dot{H}_p^s$ alors $|u|^\alpha u \in L^{\frac{q}{\alpha+1}}$ où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{s}{n}$ ($s < \frac{n}{p}$ est assuré par $s < s_{\max}$) et $\varphi(\xi^2)e^{i\xi^2} = \hat{\omega}(\xi)$ avec $\omega \in L^r$ pour $1 \leq r \leq +\infty$, d'où pour $p \geq \frac{q}{\alpha+1}$:

$$\begin{aligned} \|A_1(u)(t)\|_{L^p} &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{\alpha}{p} - (\alpha+1)\frac{s}{n})}} \| |u|^\alpha u(s) \|_{L^{\frac{q}{\alpha+1}}} ds \\ &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{\alpha}{p} - (\alpha+1)\frac{s}{n})}} \frac{1}{s^{\theta(\alpha+1)}} \left(s^\theta \|u(s)\|_{\dot{H}_p^s} \right)^{\alpha+1} ds \\ &\leq C t^{-\theta^*} \left(\sup_{0 < s < t} s^\theta \|u(s)\|_{\dot{H}_p^s} \right)^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

La condition $p \geq \frac{q}{\alpha+1}$ entraîne $s \leq \frac{\alpha n}{3\alpha+2}$, tandis que les conditions $\frac{n}{2}(\frac{\alpha}{p} - (\alpha+1)\frac{s}{n}) < 1$ et $\theta(\alpha+1) < 1$ sont impliquées par $s_{\min} < s < s_{\max}$. Venant à A_2 , si $u(s) \in \dot{H}_p^s$ pour $p = \frac{n(\alpha+2)}{\alpha s + n}$, alors $|u|^\alpha u(s) \in \dot{H}_{p'}^s$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (voir lemme 4.4) et si $p \geq 2$, alors $e^{i(t-s)\Delta} : \dot{H}_{p'}^s \rightarrow \dot{H}_p^s$ avec $\|e^{i(t-s)\Delta} f(s)\|_{\dot{H}_p^s} \leq \frac{C}{(t-s)^{n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}} \|f(s)\|_{\dot{H}_{p'}^s}$.

Or, le fait d'avoir éliminé les basses fréquences permet d'injecter \dot{H}_p^s dans L^p et même dans l'espace de Besov homogène $\dot{B}_p^{0,1} \subset L^p$. En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j(1 - \varphi((t-s)\Delta))f\|_{L^p} &\leq C \sum_{2^j > \frac{1}{2\sqrt{t-s}}} \|\Delta_j f\|_{L^p} \leq C(\sqrt{t-s})^s \|f\|_{\dot{B}_p^{s,\infty}} \\ &\leq C(\sqrt{t-s})^s \|f\|_{\dot{H}_p^s}. \end{aligned}$$

(nous rappelons que $\Delta_j f$ est le j -ème bloc dyadique d'une décomposition de Littlewood-Paley de f et que $\|f\|_{\dot{B}_p^{0,1}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j f\|_{L^p}$).

On a pour conclure :

$$\begin{aligned} \|A_2(u)(t)\|_{\dot{B}_p^{0,1}} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha}{2}} \|e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s)\|_{\dot{H}_p^s} ds \\ &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\frac{\alpha}{2}}} \| |u|^\alpha u(s) \|_{\dot{H}_p^s} ds \\ &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})-\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{s^{\theta(\alpha+1)}} \left(s^\theta \|u(s)\|_{\dot{H}_p^s} \right)^{\alpha+1} ds \\ &\leq C t^{-(\theta-\frac{\alpha}{2})} \left(\sup_{0 < s < t} s^\theta \|u(s)\|_{\dot{H}_p^s} \right)^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

◆

Nous énonçons aussi le résultat suivant, qui n'est qu'une généralisation du lemme précédent au cas où le terme non linéaire n'est pas $|u|^\alpha u$ mais $|u|^\alpha v$ et les fonctions u et v ne sont pas forcément égales. Dans ce cas l'hypothèse (H') ne suffit plus.

Lemme 4.8 (continuité $E_{s,\alpha} \times E_{s,\alpha} \rightarrow F_{s,\alpha}$)

Soient $\alpha > 0$, $\alpha \notin 2\mathbb{N}$, $s \geq 0$, $p \geq 2$, $p = p(s, \alpha)$, $s_{\min} < s < s_{\max}$ comme dans le théorème 4.2 et, de plus, $s = 0$ ou bien $\alpha \geq 1$ et $s < \alpha$, $s \leq \frac{\alpha n}{3\alpha+2}$.

Si $u, v \in E_{s,\alpha}$ et $B(u, v)(t) = i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha v(s) ds$ alors $B(u, v) \in F_{s,\alpha}$ et $\|B(u, v)\|_{F_{s,\alpha}} \leq C \|v\|_{E_{s,\alpha}} \|u\|_{E_{s,\alpha}}^\alpha$. (Si $s = 0$ les espaces $E_{s,\alpha}$ et $F_{s,\alpha}$ coïncident et le résultat est contenu dans le lemme suivant 4.9).

PREUVE : La démonstration suit les mêmes lignes de la précédente, puisque $|u|^\alpha$ est un opérateur continu de \dot{H}_p^s à \dot{H}_r^s où $s + \frac{n}{p'} = \frac{n}{p} + \frac{n}{r}$ (voir lemme 4.4 et démonstration du théorème 4.2). ◆

Lemme 4.9 (continuité $E_{s,\alpha} \rightarrow E_{s,\alpha}$)

Soient $\alpha > 0$, $s \geq 0$, $p \geq 2$, $p = p(s, \alpha)$, $s_{\min} < s < s_{\max}$ comme dans le théorème 4.2, $s < \alpha + 1$ si $\alpha \notin 2\mathbb{N}$; si $u \in E_{s,\alpha}$ alors $A(u) \in E_{s,\alpha}$ et $\|A(u)\|_{E_{s,\alpha}} \leq C \|u\|_{E_{s,\alpha}}^{\alpha+1}$.

PREUVE : Nous avons déjà montré ce lemme au cours de la démonstration du théorème de F. Ribaud et A. Youssfi 4.2 \blacklozenge

Lemme 4.10 (continuité $\mathbf{E}_{s,\alpha} \times \mathbf{F}_{s,\alpha} \rightarrow \mathbf{F}_{s,\alpha}$)

Soient $\alpha > 0$, $s \geq 0$, $p \geq 2$, $p = p(s, \alpha)$, $s_{\min} < s < s_{\max}$ comme dans le théorème 4.2, $s < \alpha + 1$ si $\alpha \notin 2\mathbb{N}$. Si $u \in \mathbf{E}_{s,\alpha}$, $w \in \mathbf{F}_{s,\alpha}$, et $B(u, w)(t) = i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha w(s) ds$ alors $B(u, w) \in \mathbf{F}_{s,\alpha}$ et $\|B(u, w)\|_{\mathbf{F}_{s,\alpha}} \leq C \|w\|_{\mathbf{F}_{s,\alpha}} \|u\|_{\mathbf{E}_{s,\alpha}}^\alpha$.

PREUVE : Pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned} \|B(u, w)(t)\|_{L^p} &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \|w|u|^\alpha(s)\|_{L^{p'}} ds \\ &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \|w(s)\|_{L^p} \|u(s)\|_{L^{r\alpha}}^\alpha ds \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ et, puisque $\dot{H}_p^s \subset L^q$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{s}{n}$, on obtient $r\alpha = q$ d'où :

$$\begin{aligned} \|B(u, w)(t)\|_{L^p} &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \|w(s)\|_{L^p} \|u(s)\|_{\dot{H}_p^s}^\alpha ds \\ &\leq C \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \frac{1}{s^{\theta^*}} \frac{1}{s^{\theta\alpha}} s^{\theta^*} \|w(s)\|_{L^p} \left(s^\theta \|u(s)\|_{\dot{H}_p^s}\right)^\alpha ds \\ &\leq \frac{C}{t^{\theta^*}} \left(\sup_{0 < s < t} s^{\theta^*} \|w(s)\|_{L^p}\right) \left(\sup_{0 < s < t} s^\theta \|u(s)\|_{\dot{H}_p^s}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

\blacklozenge

FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME 4.3: Pour conclure la preuve du théorème il suffit maintenant d'utiliser un algorithme de point fixe dans un espace convenablement choisi. Soit donc :

$$\tilde{\mathbf{E}}_{s,\alpha,M} = \left\{ u \in \mathbf{E}_{s,\alpha} : \|u\|_{\mathbf{E}_{s,\alpha}} \leq 2M, \quad u(t) - e^{it\Delta} u_0 \in \mathbf{F}_{s,\alpha} \right\}.$$

Remarquons encore une fois que nous n'imposons pas à $e^{it\Delta} u_0$ d'appartenir à $\mathbf{F}_{s,\alpha}$. $\tilde{\mathbf{E}}_{s,\alpha,M}$ est un espace métrique complet lorsque on pose :

$$\forall u, v \in \tilde{\mathbf{E}}_{s,\alpha,M} \quad d(u, v) := \|u - v\|_{\mathbf{F}_{s,\alpha}}.$$

On considère alors l'application :

$$F(u)(t) = e^{it\Delta} u_0 - A(u)(t).$$

Grâce aux lemmes 4.7, 4.9 et 4.10, elle est définie de $\tilde{\mathbf{E}}_{s,\alpha,M}$ à $\mathbf{E}_{s,\alpha}$ et il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{\mathbf{E}_{s,\alpha}} &\leq \|e^{it\Delta} u_0\|_{\mathbf{E}_{s,\alpha}} + C \|u\|_{\mathbf{E}_{s,\alpha}}^{\alpha+1}, \\ \|F(u) - e^{it\Delta} u_0\|_{\mathbf{F}_{s,\alpha}} &\leq C \|u\|_{\mathbf{E}_{s,\alpha}}^{\alpha+1}, \\ \|F(u) - F(v)\|_{\mathbf{F}_{s,\alpha}} &\leq C \|u - v\|_{\mathbf{F}_{s,\alpha}} (\|u\|_{\mathbf{E}_{s,\alpha}}^\alpha + \|v\|_{\mathbf{E}_{s,\alpha}}^\alpha). \end{aligned}$$

La transformation F est alors une contraction de $\tilde{E}_{s,\alpha,M}$, pourvu que $M < \frac{1}{(C2^{\alpha+1})^{\frac{1}{\alpha}}}$ (l'estimation de cette constante est la même que celle du théorème 4.2). De plus, grâce au lemme 4.7, toute solution $u \in E_{s,\alpha}$ telle que $\|u\|_{E_{s,\alpha}} \leq 2M$ appartient à $\tilde{E}_{s,\alpha,M}$ d'où l'unicité est garantie sans l'hypothèse supplémentaire $u(t) - e^{it\Delta}u_0 \in F_{s,\alpha}$. \blacklozenge

Corollaire 4.11

Soient $\alpha_0(n)$ (défini pour tout n) la racine positive de l'équation :

$$P(\alpha) = n\alpha^2 + \alpha(n-2) - 4 = 0,$$

$\alpha_1(n)$ (défini pour $n \geq 10$) la plus petite racine de l'équation :

$$Q(\alpha) = 2\alpha^2 - \alpha(n-4) + 4 = 0$$

et $\alpha_2(n)$ (défini pour $n \geq 8$) la plus grande racine de l'équation :

$$R(\alpha) = 2\alpha^2 - \alpha(n-2) + 4 = 0.$$

Alors :

- pour tout $n \leq 8$, il existe des solutions autosimilaires au problème (4.3) pour tout $\alpha > \alpha_0(n)$;
- pour $n = 9$ il existe des solutions autosimilaires au problème (4.3) pour tout $\alpha \in]\alpha_0(n), \frac{4}{n-6}[\cup]\alpha_2(n), +\infty[\cup 2\mathbb{N}$;
- pour $n \geq 10$ il existe des solutions autosimilaires au problème (4.3) pour tout $\alpha \in]\alpha_0(n), \alpha_1(n)[\cup]\alpha_2(n), +\infty[\cup 2\mathbb{N}$.

PREUVE : Il faut d'abord analyser la compatibilité des conditions imposées dans le théorème 4.3, démontrer qu'il existe des données homogènes qui vérifient bien les hypothèses requises et enfin comparer le résultat avec le théorème de Ribaud et Youssfi.

Rappelons que le résultat d'existence de solutions autosimilaires de Ribaud et Youssfi était le suivant (voir [RY98], page 1069) :

- pour tout $n \leq 6$, il existe des solutions autosimilaires au problème (4.3) pour tout $\alpha > \alpha_0(n)$;
- pour $n = 7$, il existe des solutions autosimilaires pour tout $\alpha \in]\alpha_0(n), \frac{4}{n-2}[\cup [1, +\infty[\cup 2\mathbb{N}$;

- pour $n \geq 8$, il existe des solutions autosimilaires pour tout $\alpha \in 2\mathbb{N} \cup]\alpha_0(n), \frac{4}{n-2}[\cup]\alpha_2(n), +\infty[$.

On impose donc que $]s_{\min}, s_{\max}[\cap [0, \alpha + 1[\cap [0, \frac{\alpha n}{3\alpha + 2}] \neq \emptyset$, en traduisant cela par des conditions sur α (que nous considérons toujours positif). Traitons d'abord le cas $n \leq 9$. La condition $s_{\max} > 0$ se traduit alors par $\alpha > \alpha_0(n)$, $s_{\min} < \alpha + 1$ est toujours vérifiée et la condition $s_{\min} < \frac{\alpha n}{3\alpha + 2}$, toujours vérifiée pour $n \leq 6$, donne $0 < \alpha < \frac{4}{n-6}$ pour $n > 6$. En conclusion, pour $n = 7$, l'intervalle $]\alpha_0(n), \frac{4}{n-6}[$ que nous avons ici trouvé recouvre le trou laissé par Ribaud et Youssfi; pour $n = 8$ on a $\frac{4}{n-6} = 2 = \alpha_2(n)$, donc la seule valeur qui devrait être exclue est $\alpha = 2$ qui est pair : ici aussi le trou est comblé. Pour $n = 9$ on a $\frac{4}{n-6} < \alpha_2(n)$, donc on arrive à élargir la plage d'exposants permis mais pas jusqu'à combler le trou.

Venons-en à $n > 9$. En plus de la condition $\alpha > \alpha_0(n)$ venant de $s_{\max} > 0$, la condition $s_{\min} < \alpha + 1$ donne ici $\alpha < \alpha_1(n)$ ou $\alpha > \tilde{\alpha}_1(n)$ (où $\alpha_1(n) < \tilde{\alpha}_1(n)$ sont les deux racines du polynôme Q de l'énoncé) qu'il faut comparer avec $0 < \alpha < \frac{4}{n-6}$. En effet on a $\frac{4}{n-6} < \tilde{\alpha}_1(n)$, d'où on n'améliore pas la plage d'exposants plus grands que 1; par contre on a $\frac{4}{n-2} < \alpha_1(n) < \frac{4}{n-6} \leq 1$ et on gagne l'intervalle $[\frac{4}{n-2}, \alpha_1(n)[$ par rapport à Ribaud et Youssfi.

L'espace de résolution du théorème étant exactement le même que celui utilisé dans [RY98], le résultat d'existence de données homogènes est donc contenu dans les théorèmes 2 et 3 de cet article qui restent valables dans notre cas. Nous en rappelons les énoncés, en renvoyant à [RY98] pour une démonstration.

Théorème 4.12 (Ribaud–Youssfi)

Soit f une distribution homogène d'ordre $-\frac{2}{\alpha}$.

1. Si $e^{t\Delta} f(x) \in E_{s,\alpha}$, alors $\Delta_0 f \in L^p$.
2. Si $\Delta_0 f \in L^{p'}$, alors $e^{t\Delta} f(x) \in E_{s,\alpha}$.

Théorème 4.13 (Ribaud–Youssfi)

Soit α tel que $]s_{\min}, s_{\max}[\cap [0, \alpha + 1[\neq \emptyset$ et soit $\Omega \in C^n(S^{n-1})$ (la sphère de rayon 1 dans

\mathbb{R}^n). Si $f(x) = \frac{\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{\frac{2}{\alpha}}}$ et $U_0(t, x) = e^{t\Delta} f(x)$, alors $\|U_0\|_{E_{s,\alpha}} \leq \|\Omega\|_{C^n}$.

En particulier, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $\|\Omega\|_{C^n} \leq \varepsilon$, alors il existe une unique solution globale autosimilaire de l'équation de Schrödinger 4.3 avec f comme donnée initiale.



4.3 Remarques sur l'espace de résolution

4.3.1 Équivalence entre les problèmes intégral et différentiel

Nous allons voir que, dans le cadre fonctionnel que nous avons choisi, les problèmes différentiel et intégral sont équivalents (voir aussi [Kat87] pour le cadre des espaces de Lebesgue). Par ailleurs, l'équation de Schrödinger étant une équation d'évolution, il est souhaitable qu'à une donnée initiale dans un certain espace corresponde une solution qui appartient au même espace à tout instant. À première vue cela ne semble pas le cas pour les solutions que nous venons de considérer dans les paragraphes précédents. À une donnée u_0 telle que $\sup_{t>0} t^\theta \|e^{it\Delta} u_0\|_{\dot{H}_p^s} < +\infty$, correspond une solution $u(t)$ telle que $\sup_{t>0} t^\theta \|u(t)\|_{\dot{H}_p^s} < +\infty$. Nous allons voir qu'en effet cette solution reste dans l'espace de départ comme il a été aussi remarqué par T. Cazenave et F. B. Weissler pour le cas $s = 0$ [CW99].

Proposition 4.14

Soient $\alpha > 0$, $s \geq 0$, $s \in]s_{\min}, s_{\max}[$ comme dans le théorème 4.2, $s < \alpha + 1$ si $\alpha \notin 2\mathbb{N}$.

Soit $E_{s,\alpha} = \left\{ u(t, x) \in \tau'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n) : \sup_{t>0} t^\theta \|u(t)\|_{\dot{H}_p^s} < +\infty \right\}$ où $p = p(s, \alpha) = \frac{n(\alpha+2)}{\alpha s + n}$ tel

que $p \geq 2$, $\theta = \theta(s, \alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha} - \frac{n}{p} + s \right)$. Soit $u \in E_{s,\alpha}$. Alors :

a) $u(t, x)$ vérifie dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$:

$$\partial_t u = i\Delta u - i\gamma |u|^\alpha u$$

si et seulement si il existe $u_0 \in B_\infty^{-\eta, \infty}(\mathbb{R}^n)$ où $\eta = \max(n, 2 + \frac{n}{\alpha+1})$ telle que

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0 - i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s) ds \quad \text{dans } \tau'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n).$$

En particulier :

i) $u(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} u_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

ii) $u(\cdot, x) :]0, +\infty[\rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est continue et $]0, +\infty[\rightarrow \dot{H}_p^s$ est faiblement continue.

b) Si on définit :

$$Y = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \sup_{\sigma>0} \sigma^\theta \|e^{i\sigma\Delta} f\|_{\dot{H}_p^s} < +\infty \right\}$$

alors $u_0 \in Y$ et $u(t) \in L^\infty(]0, +\infty[, Y)$.

PREUVE : Démontrons d'abord a). Supposons $u \in E_{s,\alpha}$ telle que $\partial_t u = i\Delta u - i\gamma |u|^\alpha u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$. On a que $u(t) \in L_{\text{loc}}^{\alpha+1}([0, +\infty[, L_{\text{u loc}}^{\alpha+1})$ car $\forall t > 0 \quad \|u(t)\|_{\dot{H}_p^s} \leq \frac{C}{t^\theta}$ et $\dot{H}_p^s \subset L^q \subset L_{\text{u loc}}^{\alpha+1}$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{s}{n}$. Il s'ensuit que $|u|^\alpha u(t) \in L_{\text{loc}}^1([0, +\infty[, L_{\text{u loc}}^1) \subset \tau'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$.

Or, si S_0 et Δ_j sont les opérateurs définissant une décomposition de Littlewood–Paley et si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ alors $S_0 f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $j \geq 0$ on a $\|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq C 2^{nj} \|f\|_{L^1_{\text{loc}}}$ car :

$$\begin{aligned} |\Delta_j f(x)| &= \left| \Delta_0 f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right)(2^j x) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \psi(y) f\left(x - \frac{y}{2^j}\right) \right| dy \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{Q_k} |\psi(y)| \left| f\left(x - \frac{y}{2^j}\right) \right| dy \end{aligned}$$

(où on a indiqué Q_k le cube unitaire $k + [0, 1]^n$)

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sup_{y \in Q_k} |\psi(y)| \int_{y-k \in [0, 1]^n} \left| f\left(x - \frac{y}{2^j}\right) \right| dy \\ &\leq C \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{|y-k| \leq 2} \left| f\left(x - \frac{y}{2^j}\right) \right| dy \\ &= C \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{|\sigma - \frac{k}{2^j}| \leq \frac{2}{2^j}} |f(x - \sigma)| 2^{nj} d\xi \\ &\leq C 2^{nj} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \int_{|\sigma - x_0| \leq 2} |f(\sigma)| d\sigma \leq C 2^{nj} \|f\|_{L^1_{\text{loc}}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Donc $|u|^\alpha u \in L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[, B_\infty^{-n, \infty})$. Par ailleurs si $g \in L^{\alpha+1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ alors $S_0 \Delta g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\|\Delta_j \Delta g\|_{L^\infty} \leq C 2^{j(2 + \frac{n}{\alpha+1})} \|g\|_{L^{\alpha+1}_{\text{loc}}}$ pour tout $j \geq 0$, car $|\Delta_j \Delta g| = 2^{2j} |\tilde{\Delta}_j g|$ où $\tilde{\Delta}_0 g(\xi) = \psi(\xi) \xi^2 \hat{g}(\xi)$ d'où on peut conclure. On obtient $\Delta u \in L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[, B_\infty^{-(2 + \frac{n}{\alpha+1}), \infty})$ et on en déduit que $i\Delta u - i\gamma |u|^\alpha u \in L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[, B_\infty^{-\eta, \infty})$ avec $\eta = \max(n, 2 + \frac{n}{\alpha+1})$ d'où $v(t) = \int_0^t \partial_s u(s) ds \in C([0, +\infty[, B_\infty^{-\eta, \infty})$ et $u(t) = u_0 + v(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} u(t) \stackrel{S'}{=} u_0 \in B_\infty^{-\eta, \infty}$. On a aussi montré que l'application $t \mapsto u(t, \cdot)$ est continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La continuité faible dans \dot{H}_p^s suit alors grâce au théorème de Banach–Steinhaus.

Considérons maintenant $v(t) = e^{it\Delta} u_0 - i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s) ds$. On a :

$$A(u)(t) = i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s) ds \in L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[, \dot{H}_p^s) \cap C([0, +\infty[, \dot{H}^{s'})$$

avec $s' = s - n(\frac{1}{p'} - \frac{1}{2}) < s$ grâce au lemme 4.9 et à l'estimation suivante, due aux injections de Sobolev :

$$\begin{aligned} \|A(u)(t)\|_{\dot{H}^{s'}} &\leq C \int_0^t \|e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s)\|_{\dot{H}^{s'}} ds \\ &= C \int_0^t \| |u|^\alpha u(s) \|_{\dot{H}^{s'}} ds \leq C \int_0^t \| |u|^\alpha u(s) \|_{\dot{H}_p^s} ds \\ &\leq C \int_0^t \frac{1}{s^{\theta(\alpha+1)}} (s^\theta \|u(s)\|_{\dot{H}_p^s})^{\alpha+1} ds \leq C t^{1-\theta(\alpha+1)} \|u\|_{E_{s,\alpha}}^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $\partial_t v = i\Delta v - i\gamma|u|^\alpha u$ dans $\tau'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$. On a alors $\partial_t(u - v) = i\Delta(u - v)$ d'où $\partial_t(e^{it\Delta}(u - v)) = 0$ dans τ' et donc $e^{it\Delta}(u - v) = C^{te} = 0$ car $u(0) = v(0) = u_0$ ce qui permet de conclure que $u(t) = v(t)$ car l'opérateur $e^{it\Delta}$ est inversible.

Venons à la démonstration de b). Il suffit de remarquer que

$$A(u)(t) = i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s) ds$$

est continu sur $E_{s,\alpha}$ comme on a vu dans le lemme 4.9 et que pour tout $t_0 \geq 0$ $u(t)$ est solution de l'équation 4.3 avec donnée initiale $u(t_0)$, à savoir que dans τ' on a :

$$\forall t > t_0 \quad u(t) = e^{i(t-t_0)\Delta} u(t_0) - i\gamma \int_{t_0}^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s) ds. \quad (4.9)$$

C'est exactement le même raisonnement que nous avons utilisé pour les équations de Navier-Stokes dans le lemme 2.22 et dans la remarque à la fin du théorème 2.29 . Si on suppose $u \in E_{s,\alpha}$, alors $A(u) \in E_{s,\alpha}$, d'où $e^{it\Delta} u_0 \in E_{s,\alpha}$, autrement dit $u_0 \in Y$. Par ailleurs, grâce à (4.9) on a, pour tout $t > t_0$,

$$\begin{aligned} \|u(t_0)\|_Y &= \sup_{t > t_0} (t - t_0)^\theta \|e^{i(t-t_0)\Delta} u(t_0)\|_{\dot{H}_p^s} \\ &\leq \sup_{t > t_0} (t - t_0)^\theta \|u(t)\|_{\dot{H}_p^s} + C \sup_{t > t_0} (t - t_0)^\theta \left\| \int_{t_0}^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s) ds \right\|_{\dot{H}_p^s} \\ &\leq \sup_{t > 0} t^\theta \|u(t)\|_{\dot{H}_p^s} + C \sup_{t > 0} t^\theta \int_{t_0}^t \|e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s)\|_{\dot{H}_p^s} ds \\ &\leq \sup_{t > 0} t^\theta \|u(t)\|_{\dot{H}_p^s} + C \left(\sup_{t > 0} t^\theta \|u(t)\|_{\dot{H}_p^s} \right)^{\alpha+1} \end{aligned}$$

d'où $u(t) \in L^\infty(]0, +\infty[, Y)$. ♦

Remarque. L'espace Y qu'on a considéré n'est pas, jusqu'à présent, interprétable en termes d'espaces connus, comme ce serait par contre le cas si le groupe de Schrödinger était remplacé par le semi-groupe de la chaleur. Tout récemment F. Planchon [Pla99] a montré un théorème d'existence de solutions bornées en temps à valeurs dans un espace de Besov $\dot{B}_p^{s,\infty}$ lorsque la donnée initiale se trouve elle-même dans $\dot{B}_p^{s,\infty}$; puisque ces espaces de Besov contiennent des fonctions homogènes, il en déduit l'existence de solutions autosimilaires.

4.3.2 Comportement asymptotique des solutions

Nous terminons par un résultat sur le comportement asymptotique des solutions dans $E_{s,\alpha}$. Il est à rapprocher avec les résultats analogues de F. Planchon [Pla96] pour les équations de Navier-Stokes.

Nous indiquons encore une fois $A(u)(t) = i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s) ds$.

Proposition 4.15

Soient $\alpha > 0$, $s \geq 0$, $s \in]s_{\min}, s_{\max}[$ et :

(H) $s = 0$ ou bien $\alpha \geq 1$ et $s < \alpha$ si $\alpha \notin 2\mathbb{N}$

Soient $E_{s,\alpha}$, $p = p(s,\alpha)$, $\theta = \theta(s,\alpha)$ et $\theta^* = \theta^*(s,\alpha)$ comme dans (4.5) et (4.7) et soit $p \geq 2$.

Soient u et v deux solutions de (4.1) dans $E_{s,\alpha}$ de données initiales u_0 et v_0 .

i) Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \|u(t) - v(t)\|_{\dot{H}_p^s} = 0$, alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \|e^{it\Delta} u_0 - e^{it\Delta} v_0\|_{\dot{H}_p^s} = 0$$

et si $s \leq \frac{\alpha n}{3\alpha+2}$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\theta^*} \|A(u)(t) - A(v)(t)\|_{L^p} = 0$$

ii) Si de plus $\|u(t)\|_{E_{s,\alpha}} \leq \frac{M}{4}$ et $\|v(t)\|_{E_{s,\alpha}} \leq \frac{M}{4}$ où M est la constante apparaissant dans le théorème 4.2, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \|e^{it\Delta} u_0 - e^{it\Delta} v_0\|_{\dot{H}_p^s} = 0$ implique :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \|u(t) - v(t)\|_{\dot{H}_p^s} = 0$$

(et donc, si $s \leq \frac{\alpha n}{3\alpha+2}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\theta^*} \|A(u)(t) - A(v)(t)\|_{L^p} = 0$).

PREUVE : Grâce à la proposition précédente 4.14, on a bien :

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{it\Delta} u_0 - i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s) ds \\ v(t) &= e^{it\Delta} v_0 - i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |v|^\alpha v(s) ds. \end{aligned}$$

Montrons d'abord i). On a :

$$e^{it\Delta} u_0 - e^{it\Delta} v_0 = u(t) - v(t) + i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^\alpha u(s) - |v|^\alpha v(s)) ds$$

d'où

$$t^\theta \|e^{it\Delta} u_0 - e^{it\Delta} v_0\|_{\dot{H}_p^s} \leq t^\theta \|u(t) - v(t)\|_{\dot{H}_p^s} + Ct^\theta \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^\alpha u(s) - |v|^\alpha v(s)) ds \right\|_{\dot{H}_p^s}.$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^\alpha u(s) - |v|^\alpha v(s)) ds \right\|_{\dot{H}_p^s} = 0.$$

Comme on a vu dans la preuve du théorème de F. Ribaud et A. Youssfi 4.2 on a, grâce à la propriété (H), l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & t^\theta \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^\alpha u(s) - |v|^\alpha v(s)) ds \right\|_{\dot{H}_p^s} \\ & \leq C t^\theta \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \|(u(s) - v(s)) G(u(s), v(s))\|_{\dot{H}_p^s} ds, \end{aligned}$$

où $G(f, g) = \int_0^1 |\sigma(f - g) + g|^\alpha d\sigma$,

$$\begin{aligned} & \leq C t^\theta \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \|u(s) - v(s)\|_{\dot{H}_p^s} \left(\|u(s)\|_{\dot{H}_p^s}^\alpha + \|v(s)\|_{\dot{H}_p^s}^\alpha \right) ds \\ & \leq C t^\theta \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \frac{1}{s^{\theta(\alpha+1)}} \left(s^\theta \|u(s) - v(s)\|_{\dot{H}_p^s} \right) \left(s^{\theta\alpha} \|u(s)\|_{\dot{H}_p^s}^\alpha + s^{\theta\alpha} \|v(s)\|_{\dot{H}_p^s}^\alpha \right) ds \\ & \leq C t^\theta \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \frac{1}{s^{\theta(\alpha+1)}} s^\theta \|u(s) - v(s)\|_{\dot{H}_p^s} ds \right) \left(\|u\|_{E_{s,\alpha}}^\alpha + \|v\|_{E_{s,\alpha}}^\alpha \right). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soient $A = \max(\|u\|_{E_{s,\alpha}}, \|v\|_{E_{s,\alpha}})$ et $B = C \int_0^1 \frac{1}{(1-\xi)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \frac{1}{\xi^{\theta(\alpha+1)}} d\xi$. Puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \|u(t) - v(t)\|_{\dot{H}_p^s} = 0$, il existe $T_0(\varepsilon)$ tel que

$$\forall t \geq T_0(\varepsilon), \quad t^\theta \|u(t) - v(t)\|_{\dot{H}_p^s} \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{A^\alpha B}.$$

Considérons donc, pour tout $t \geq T_0(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} & C t^\theta \int_0^{T_0(\varepsilon)} \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \frac{1}{s^{\theta(\alpha+1)}} s^\theta \|u(s) - v(s)\|_{\dot{H}_p^s} ds + \\ & \quad C t^\theta \int_{T_0(\varepsilon)}^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \frac{1}{s^{\theta(\alpha+1)}} s^\theta \|u(s) - v(s)\|_{\dot{H}_p^s} ds \\ & \quad = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} I_1 & \leq C \frac{t^\theta}{(t - T_0(\varepsilon))^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \cdot \frac{T_0(\varepsilon)^{1-\theta(\alpha+1)}}{1 - \theta(\alpha+1)} \cdot \sup_{s>0} s^\theta \|u(s) - v(s)\|_{\dot{H}_p^s} \\ & \leq C_1(\varepsilon) \frac{t^\theta}{(t - T_0(\varepsilon))^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \cdot 2A. \end{aligned}$$

Or, $\frac{t^\theta}{(t - T_0(\varepsilon))^{n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ car $\theta < n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$ (il suffit de remarquer que $\theta(\alpha + 1) < 1$ d'où $\alpha(n - 2s) + \alpha(n - 2 - 2s) - 4 > 0$). Donc, il existe $T_1(\varepsilon)$ tel que $\forall t \geq T_1(\varepsilon)$:

$$\frac{t^\theta}{(t - T_0(\varepsilon))^{n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2AC_1(\varepsilon)} \cdot \frac{1}{2A^\alpha}$$

d'où $I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2A^\alpha}$.

Passons à I_2 . On a :

$$\begin{aligned} & Ct^\theta \int_{T_0(\varepsilon)}^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}} \frac{1}{s^{\theta(\alpha+1)}} s^\theta \|u(s) - v(s)\|_{\dot{H}_p^s} ds \\ & \leq Ct^\theta \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}} \frac{1}{s^{\theta(\alpha+1)}} ds \right) \left(\sup_{T_0(\varepsilon) < s < t} s^\theta \|u(s) - v(s)\|_{\dot{H}_p^s} \right) \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2A^\alpha}. \end{aligned}$$

On obtient pour finir :

$$t^\theta \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (|u|^\alpha u(s) - |v|^\alpha v(s)) ds \right\|_{\dot{H}_p^s} \leq \varepsilon \quad \forall t \geq \max(T_0(\varepsilon), T_1(\varepsilon)).$$

Pour montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\theta^*} \|A(u)(t) - A(v)(t)\|_{L^p} = 0$ on procède de la même façon grâce à l'estimation suivante, contenue dans le lemme 4.8 :

$$\begin{aligned} t^{\theta^*} \|A(u)(t) - A(v)(t)\|_{L^p} & \leq Ct^{\theta^*} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{\alpha}{p} - (\alpha+1)\frac{s}{n})}} \|(u(s) - v(s))G(u(s), v(s))\|_{L^{\frac{q}{\alpha+1}}} ds \\ & \leq Ct^{\theta^*} \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{\alpha}{p} - (\alpha+1)\frac{s}{n})}} \frac{1}{s^{\theta(\alpha+1)}} s^\theta \|u(s) - v(s)\|_{\dot{H}_p^s} ds \right) \times \\ & \quad \left(\|u(s)\|_{E_{s,\alpha}}^\alpha + \|v(s)\|_{E_{s,\alpha}}^\alpha \right). \end{aligned}$$

Venons-en à ii). Soit

$$E_{s,\alpha,M}^* = \left\{ w \in E_{s,\alpha} : \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \|w(t)\|_{\dot{H}_p^s} = 0 \right. \\ \left. \|w\|_{E_{s,\alpha}} \leq 2M \right\}$$

où M est la constante apparaissant dans le théorème de F. Ribaud et A. Youssfi 4.2. Nous allons montrer que si $\|u\|_{E_{s,\alpha}} \leq \frac{M}{4}$ et $\|v\|_{E_{s,\alpha}} \leq \frac{M}{4}$ alors l'équation intégrale de $w(t)$:

$$w(t) = e^{it\Delta} u_0 - e^{it\Delta} v_0 - i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} w(s)G(u(s), v(s)) ds \quad (4.10)$$

admet une solution dans $E_{s,\alpha,M}^*$ alors qu'une solution de (4.10) est unique dans $E_{s,\alpha,M} = \{w \in E_{s,\alpha} : \|w\|_{E_{s,\alpha}} \leq 2M\}$. Puisque $w(t) = u(t) - v(t)$ est solution de (4.10) et appartient à $E_{s,\alpha,M}$, alors $w(t)$ appartiendra à $E_{s,\alpha,M}^*$. Soit alors :

$$F(w)(t) = e^{it\Delta}u_0 - e^{it\Delta}v_0 - i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}w(s)G(u(s), v(s))ds.$$

Montrons d'abord que $e^{it\Delta}u_0 - e^{it\Delta}v_0 \in E_{s,\alpha,M}^*$. Par hypothèse $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \|e^{it\Delta}u_0 - e^{it\Delta}v_0\|_{\dot{H}_p^s} = 0$; de plus

$$e^{it\Delta}u_0 = u(t) + i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u|^\alpha u(s)ds$$

d'où

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{E_{s,\alpha}} \leq \|u\|_{E_{s,\alpha}} + C \|u\|_{E_{s,\alpha}}^{\alpha+1} \leq \frac{M}{4} + C \left(\frac{M}{4}\right)^{\alpha+1} \leq \frac{M}{2}$$

(comme dans les théorèmes 4.2 et 4.3). Les mêmes estimations étant vérifiées par $e^{it\Delta}v_0$ on obtient $\|e^{it\Delta}u_0 - e^{it\Delta}v_0\|_{E_{s,\alpha}} \leq M$. Grâce à l'hypothèse (H) il est immédiat de montrer que $F : E_{s,\alpha,M} \rightarrow E_{s,\alpha,M}$ et que c'est une contraction. Quant à la limite pour t tendant vers $+\infty$, on peut reprendre le même argument que dans i). \blacklozenge

Si en particulier $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \left\| u(t) - \frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) \right\|_{\dot{H}_p^s} = 0$ il n'est pas nécessaire d'imposer que $v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ soit une solution de (4.1), comme il avait été remarqué par F. Planchon pour les solutions des équations de Navier-Stokes. On a en effet le résultat suivant.

Proposition 4.16

Dans les hypothèses de la proposition 4.15, soient $u(t, x) \in E_{s,\alpha}$ et $v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ avec $V(x) \in \dot{H}_p^s$. Supposons que $u(t, x)$ soit une solution de (4.1) avec donnée initiale u_0 et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \left\| u(t) - \frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) \right\|_{\dot{H}_p^s} = 0$.

Alors il existe $v_0 \in \mathcal{S}'$ homogène de degré $-\frac{2}{\alpha}$ telle que :

- a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \|e^{it\Delta}u_0 - e^{it\Delta}v_0\|_{\dot{H}_p^s} = 0$,
- b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u_0(\sqrt{t}x) = v_0(x)$ dans \mathcal{S}' et
- c) $\frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ soit solution autosimilaire de (4.1) avec donnée initiale v_0 .

La démonstration que nous en donnons est une adaptation fidèle de celle proposée par F. Planchon dans le cas des équations de Navier-Stokes. Nous la reproduisons ici dans un souci de complétude.

PREUVE : Soient donc $u(t, x) \in E_{s, \alpha}$ une solution et $v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ avec $V(x) \in \dot{H}_p^s$.

La propriété $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \left\| u(t) - \frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) \right\|_{\dot{H}_p^s} = 0$ se traduit également par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t, \sqrt{t} \cdot) - V(\cdot) \right\|_{\dot{H}_p^s} = 0. \quad (4.11)$$

Puisque

$$u(t, x) = e^{it\Delta} u_0(x) - i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s, x) ds$$

on a aussi :

$$\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t, \sqrt{t} x) = \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} (e^{it\Delta} u_0) (\sqrt{t} x) - i\gamma \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s, \sqrt{t} x) ds$$

mais

$$\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} |u|^\alpha u(s, x) ds = \frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} \int_0^1 e^{i(1-\lambda)\Delta} |\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t\lambda, \sqrt{t} \cdot)|^\alpha \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t\lambda, \sqrt{t} \cdot) \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) d\lambda$$

d'où

$$\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t, \sqrt{t} x) = \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} (e^{it\Delta} u_0) (\sqrt{t} x) - i\gamma \int_0^1 e^{i(1-\lambda)\Delta} |\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t\lambda, \sqrt{t} x)|^\alpha \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t\lambda, \sqrt{t} x) d\lambda.$$

On peut écrire également que si $v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ alors :

$$A(v)(t, x) = i\gamma \frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} \int_0^1 e^{i(1-\lambda)\Delta} |V|^\alpha V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) d\lambda.$$

Considérons alors :

$$\begin{aligned} & \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} A(u)(t, \sqrt{t} x) - \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} A(v)(t, \sqrt{t} x) \\ &= i\gamma \int_0^1 e^{i(1-\lambda)\Delta} \left[|\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t\lambda, \sqrt{t} x)|^\alpha \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t\lambda, \sqrt{t} x) - |V(x)|^\alpha V(x) \right] d\lambda \\ &= Ci\gamma \int_0^1 e^{i(1-\lambda)\Delta} \left[\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t\lambda, \sqrt{t} x) - V(x) \right] G(u_t, V) d\lambda \end{aligned}$$

où on a noté $u_t = \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t\lambda, \sqrt{t} x)$ et $G(f, g) = \int_0^1 |\sigma(f - g) + g|^\alpha d\sigma$. On a :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^1 e^{i(1-\lambda)\Delta} \left[\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t\lambda, \sqrt{t} x) - V(x) \right] G(u_t, V) d\lambda \right\|_{\dot{H}_p^s} \\ & \leq C \int_0^1 \frac{1}{(1-\lambda)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \left\| \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t\lambda, \sqrt{t} x) - V(x) \right\|_{\dot{H}_p^s} \|G(u_t, V)\|_{\dot{H}_p^s} d\lambda, \end{aligned}$$

où $s + \frac{n}{p'} = \frac{n}{p} + \frac{n}{r}$ (voir le lemme 2 de produit dans [RY98])

$$\begin{aligned} &\leq C \left(\int_0^1 \frac{1}{(1-\lambda)^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}} \left\| \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t\lambda, \sqrt{t} x) - V(x) \right\|_{\dot{H}_p^s} d\lambda \right) \left(\sup_{t>0} t^\theta \|u(t)\|_{\dot{H}_p^s}^\alpha + \|V\|_{\dot{H}_p^s}^\alpha \right) \\ &= \mathcal{O}(1) \quad t \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

par convergence dominée. On a donc dans \dot{H}_p^s :

$$\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u(t, \sqrt{t} x) = \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} (e^{it\Delta} u_0) (\sqrt{t} x) - i\gamma \int_0^1 e^{i(1-\lambda)\Delta} |V(x)|^\alpha V(x) d\lambda + \mathcal{O}(1) \quad t \rightarrow +\infty. \quad (4.12)$$

Grâce à l'hypothèse (4.11), il existe $V_1(x)$ telle que, en passant à la limite pour t tendant vers l'infini :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} (e^{it\Delta} u_0) (\sqrt{t} x) = V_1(x) \quad \text{dans } \dot{H}_p^s \quad (4.13)$$

d'où, après transformation de Fourier,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}-n} e^{-4i|\xi|^2} \widehat{u}_0\left(\frac{\xi}{\sqrt{t}}\right) = \widehat{V}_1(\xi) \quad \text{dans } \mathcal{S}'$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} u_0(\sqrt{t} x) = e^{-i\Delta} V_1(x) := v_0(x) \quad \text{dans } \mathcal{S}'.$$

De plus, v_0 est une distribution homogène de degré $-\frac{2}{\alpha}$. La convergence (4.13) peut donc se réécrire :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}} (e^{it\Delta} u_0) (\sqrt{t} x) - e^{i\Delta} v_0(x) \right\|_{\dot{H}_p^s} = 0$$

ou encore

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta \|e^{it\Delta} u_0 - e^{i\Delta} v_0\|_{\dot{H}_p^s} = 0.$$

Si on passe à la limite dans (4.12) on obtient alors :

$$V(x) = e^{i\Delta} v_0 - i\gamma \int_0^1 e^{i(1-\lambda)\Delta} |V(x)|^\alpha V(x) d\lambda$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = e^{it\Delta} v_0 - i\gamma \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} \left| \frac{1}{\sqrt{s}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) \right|^\alpha \frac{1}{\sqrt{s}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) ds.$$

On peut en conclure que $v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ est une solution autosimilaire de (4.1) et que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t}^{\frac{2}{\alpha}}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = v_0(x) \quad \text{dans } \mathcal{S}'.$$

◆

Annexe A

Preuve du théorème 2.20

Suivant l'approche habituelle du théorème de Kato, nous voulons démontrer un théorème de point fixe pour l'opérateur

$$F(\vec{u})(t) = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u}(s) ds$$

sur un ensemble fermé et borné de l'espace de Banach suivant :

$$\mathcal{E}_T = \left\{ \vec{u} \in \tau'([0, T] \times \mathbb{R}^3) : \begin{array}{l} \vec{u}(t) \in C([0, T], E), \\ \sqrt{t} \vec{u}(t) \in L^\infty(]0, T[, L^\infty), \\ \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \end{array} \right\}$$

normé par $\|\vec{u}\|_{\mathcal{E}_T} = \sup_{0 < t < T} \|\vec{u}(t)\|_E + \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty}$ (nous rappelons que τ' est l'espace des distributions, tempérées en espace, introduit dans la proposition 1.4 du chapitre 1).

Grâce à l'hypothèse $E \hookrightarrow B_\infty^{-1, \infty}$ et à la densité des fonctions de test on a, pour tout $T > 0$, $\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} \leq C \|\vec{u}_0\|_E$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} = 0$. Par ailleurs, $e^{t\Delta} \vec{u}_0 \in C([0, +\infty[, E)$ de façon évidente. Pour démontrer la contractivité de l'opérateur F sur un fermé bien choisi de \mathcal{E}_T , on procède de la même manière que dans le chapitre 1 où nous avons traité le cas des espaces limites homogènes, à savoir $\|f(\lambda x)\|_E = \frac{1}{\lambda} \|f\|_E$ (théorème 1.6). Il s'agit donc d'estimer $\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty}$ et $\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_E^{0,1}}$. La seule différence consiste en l'utilisation de l'hypothèse $E \hookrightarrow B_\infty^{-1, \infty}$ pour l'estimation de $\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty}$. Commençons par estimer $\|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_{\dot{B}_E^{0,1}}$, ce qui nous servira tant pour $\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_E$ que pour $\sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty}$. On a, pour tout $s < t$:

$$\|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_{\dot{B}_E^{0,1}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s)\|_E$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\tilde{\Delta}_j e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla}\|_{L^1} \|\Delta_j(\vec{u} \otimes \vec{v})(s)\|_{\mathbb{E}} \\
&\quad (\text{où } \tilde{\Delta}_j \Delta_j = \Delta_j) \\
&\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \inf(\|e^{(t-s)\Delta}\|_{L^1} \|\tilde{\Delta}_j \mathbb{P}\vec{\nabla}\|_{L^1}, \|e^{(t-s)\Delta}(\sqrt{-\Delta})^\lambda\|_{L^1} \|\frac{\tilde{\Delta}_j}{(\sqrt{-\Delta})^\lambda} \mathbb{P}\vec{\nabla}\|_{L^1}) \times \\
&\quad (M(\varepsilon) \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} + \varepsilon 2^{j\sigma\alpha} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}^\alpha \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty}^{1-\alpha} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}}) \quad \forall \lambda > 0 \\
&\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \inf\left(2^j, \frac{2^{j(1-\lambda)}}{(\sqrt{t-s})^\lambda}\right) M(\varepsilon) \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \\
&\quad + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \inf\left(2^j, \frac{2^{j(1-\lambda)}}{(\sqrt{t-s})^\lambda}\right) \varepsilon 2^{j\sigma\alpha} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}^\alpha \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty}^{1-\alpha} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}} \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Alors, en choisissant $\lambda > 1$, I vaut :

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{2^j < \frac{1}{\sqrt{t-s}}} 2^j + \sum_{2^j \geq \frac{1}{\sqrt{t-s}}} \frac{2^{j(1-\lambda)}}{(\sqrt{t-s})^\lambda} \right) M(\varepsilon) \frac{1}{\sqrt{s}} \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \\
&= C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} M(\varepsilon) \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}, \tag{A.1}
\end{aligned}$$

et II est égal à :

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{2^j < \frac{1}{\sqrt{t-s}}} 2^{j(1+\sigma\alpha)} + \sum_{2^j > \frac{1}{\sqrt{t-s}}} \frac{2^{j(1-\lambda+\sigma\alpha)}}{(\sqrt{t-s})^\lambda} \right) \frac{\varepsilon}{(\sqrt{s})^{1-\alpha}} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}^\alpha \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^{1-\alpha} \times \\
&\quad \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}} \\
&\leq \frac{1}{(\sqrt{t-s})^{1+\sigma\alpha}} \frac{1}{(\sqrt{s})^{1-\alpha}} \varepsilon \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}^\alpha \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^{1-\alpha} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}}. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

On estime donc, pour tout $t \leq T$:

$$\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\mathbb{E}} \leq \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\dot{B}_{\mathbb{E}}^{0,1}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq CM(\varepsilon) \left(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} ds \right) \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \\
&\quad + C\varepsilon \left(\int_0^t \frac{1}{(\sqrt{t-s})^{1+\sigma\alpha}} \frac{1}{(\sqrt{s})^{1-\alpha}} ds \right) \times \\
&\quad \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}^\alpha \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^{1-\alpha} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}} \\
&\leq CM(\varepsilon) \sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} + \\
&\quad C\varepsilon t^{\frac{\alpha}{2}(1-\sigma)} \sup_{0 < s < t} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}^\alpha \left(\sup_{0 < s < t} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^{1-\alpha} \sup_{0 < s < t} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}},
\end{aligned}$$

d'où on déduit :

$$\begin{aligned}
\sup_{0 < t < T} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{\mathbb{E}} &\leq CM(\varepsilon) \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < T} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \\
&\quad + C\varepsilon T^{\frac{\alpha}{2}(1-\sigma)} \sup_{0 < s < T} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}^\alpha \left(\sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^{1-\alpha} \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $\mathbb{E} \subset B_\infty^{-1,\infty}$ on a, pour tout $t \leq T$ et pour tout $s < t$:

$$\left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{L^\infty} \leq C_T \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left\| e^{\frac{t-s}{2}\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{\mathbb{E}},$$

avec $C_T \rightarrow +\infty$ pour $T \rightarrow +\infty$, comme on a vu dans la définition 2.2 et, d'après (A.1) et (A.2), on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{t-s}} \left\| e^{\frac{t-s}{2}\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{\mathbb{E}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{t-s}} \left\| e^{\frac{t-s}{2}\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{\dot{B}_{\mathbb{E}}^{0,1}} \\
&\leq C_T \frac{1}{t-s} \frac{1}{\sqrt{s}} M(\varepsilon) \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < T} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \\
&\quad + C_T \frac{1}{(t-s)^{1+\frac{\sigma\alpha}{2}}} \frac{1}{s^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}} \varepsilon \sup_{0 < s < T} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}^\alpha \left(\sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^{1-\alpha} \\
&\quad \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}},
\end{aligned}$$

mais aussi :

$$\left\| e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{v}(s) \right\|_{L^\infty} \leq C \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{s} \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty}$$

d'où, en moyennant :

$$\begin{aligned}
\|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} &\leq C_T M(\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{s^{\frac{3}{4}}} ds \right) \times \\
&\quad \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \left(\sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < T} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C_T \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{4} + \frac{\sigma\alpha}{4}}} \frac{1}{s^{\frac{3}{4} - \frac{\alpha}{4}}} ds \right) \times \\
&\quad \left(\left(\sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^{2-\alpha} \sup_{0 < s < T} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}^\alpha \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_T M(\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \left(\sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < T} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C_T \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} t^{\frac{\alpha}{4}(1-\sigma)} \left(\left(\sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^{2-\alpha} \times \right. \\
&\quad \left. \sup_{0 < s < T} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}^\alpha \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\begin{aligned}
&\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|B(\vec{u}, \vec{v})(t)\|_{L^\infty} \\
&\leq C_T M(\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \left(\sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < T} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C_T \varepsilon^{\frac{1}{2}} T^{\frac{\alpha}{4}(1-\sigma)} \left(\left(\sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{v}(s)\|_{L^\infty} \right)^{2-\alpha} \sup_{0 < s < T} \|\vec{v}(s)\|_{\mathbb{E}}^\alpha \times \right. \\
&\quad \left. \sup_{0 < s < T} \sqrt{s} \|\vec{u}(s)\|_{L^\infty} \sup_{0 < s < T} \|\vec{u}(s)\|_{\mathbb{E}} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Il nous reste à trouver un ensemble fermé et borné dans \mathcal{E}_T (on aura choisi T convenablement) où F soit une contraction. Soit donc :

$$\mathcal{E}_{T,\rho,R} = \left\{ \vec{u} \in \mathcal{E}_T : \left\{ \begin{array}{l} \sup_{0 < t < T} \|\vec{u}(t)\|_{\mathbb{E}} \leq R \\ \sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} \leq \rho \end{array} \right. \right\},$$

où $R = 2 \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{E}}$, fixé. Assumons pour l'instant $T \leq T_0$, avec T_0 fixé. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{E}_{T,\rho,R}$;

on écrit : $F(\vec{u}) - F(\vec{v}) = B(\vec{u} - \vec{v}, \vec{u}) + B(\vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$ d'où

$$\begin{aligned} \|F(\vec{u}) - F(\vec{v})\|_{\mathcal{E}_T} &\leq C_{T_0} \left(M(\varepsilon)\rho + \varepsilon T_0^{\frac{\alpha}{2}(1-\sigma)} R \right. \\ &\quad \left. + M(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\rho + \varepsilon^{\frac{1}{2}} T_0^{\frac{\alpha}{4}(1-\sigma)} \sqrt{R\rho} \right) \|\vec{u} - \vec{v}\|_{\mathcal{E}_T} \end{aligned}$$

(malgré le manque de symétrie de l'opérateur bilinéaire $B(\vec{u}, \vec{v})$, on peut montrer facilement que les estimations prouvées pour $B(\vec{u}, \vec{v})$ sont valables aussi pour $B(\vec{v}, \vec{u})$). On doit donc imposer

$$(M(\varepsilon) + M(\varepsilon)^{\frac{1}{2}})\rho + \varepsilon T_0^{\frac{\alpha}{2}(1-\sigma)} R + \varepsilon^{\frac{1}{2}} T_0^{\frac{\alpha}{4}(1-\sigma)} \sqrt{R\rho} < \frac{1}{C_{T_0}}.$$

Il suffit de choisir :

$$\begin{cases} \varepsilon < \frac{1}{3C_{T_0} T_0^{\frac{\alpha}{2}(1-\sigma)} R} \\ \rho < \min \left(\frac{1}{3C_{T_0} (M(\varepsilon) + M(\varepsilon)^{\frac{1}{2}})}, \frac{1}{9C_{T_0}^2 \varepsilon T_0^{\frac{\alpha}{2}(1-\sigma)} R} \right) \end{cases}$$

ce qui fixe ρ en fonction de R et de T_0 .

Il reste à assurer la stabilité de $\mathcal{E}_{T,\rho,R}$ sous l'action de F . On écrit, pour $\vec{u} \in \mathcal{E}_{T,\rho,R}$ et pour tout t tel que $t \leq T \leq T_0$:

$$\begin{aligned} \|F(\vec{u})(t)\|_{\mathbb{E}} &\leq \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{E}} + \|B(\vec{u}, \vec{u})(t)\|_{\mathbb{E}} \\ &\leq \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{E}} + CM(\varepsilon)\rho R + C\varepsilon T_0^{\frac{\alpha}{2}(1-\sigma)} \rho^{1-\alpha} R^{\alpha+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sqrt{t} \|F(\vec{u})(t)\|_{\mathbb{L}^\infty} &\leq \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{L}^\infty} + C_{T_0} M(\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \rho \sqrt{\rho R} + C_{T_0} \varepsilon^{\frac{1}{2}} T_0^{\frac{\alpha}{4}(1-\sigma)} \sqrt{\rho R} \sqrt{\rho^{2-\alpha} R^\alpha} \\ &\leq \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{L}^\infty} + C_{T_0} M(\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{3}{2}} \sqrt{R} + C_{T_0} \varepsilon^{\frac{1}{2}} T_0^{\frac{\alpha}{4}(1-\sigma)} R^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}} \rho^{\frac{3}{2} - \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Si on impose à ρ les conditions supplémentaires :

$$\begin{cases} \rho \leq \min \left(\frac{1}{4CM(\varepsilon)}, \frac{1}{(4C\varepsilon T_0^{\frac{\alpha}{2}(1-\sigma)} R^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \right) \\ \rho \leq \min \left(\frac{1}{(4C_{T_0} M(\varepsilon)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}})^2}, \frac{1}{(16C_{T_0}^2 \varepsilon T_0^{\frac{\alpha}{2}(1-\sigma)} R^{1+\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}} \right), \end{cases}$$

on obtient, pour tout $t \leq T \leq T_0$:

$$\begin{aligned} \|F(\vec{u})(t)\|_{\mathbb{E}} &\leq \|\vec{u}_0\|_{\mathbb{E}} + \frac{R}{2} \leq R \\ \sqrt{t} \|F(\vec{u})(t)\|_{\mathbb{L}^\infty} &\leq \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathbb{L}^\infty} + \frac{\rho}{2}. \end{aligned}$$

Si on choisit $T \leq T_0$ tel que $\sup_{0 < t < T} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{L^\infty} \leq \frac{\rho}{2}$ on a démontré que F est stable et contractante sur $\mathcal{E}_{T,\rho,R}$. ♦

Nous soulignons le fait que si on considère T_0 tendant vers l'infini, le temps de vie T qu'on peut choisir devient de plus en plus petit (car ρ lui-même devient de plus en plus petit puisque $C_{T_0} \rightarrow +\infty$). De plus, la restriction de l'unicité à l'ensemble fermé $\mathcal{E}_{T,\rho,R} \subset \mathcal{E}_T$ peut être éliminée grâce à la condition $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|\vec{u}(t)\|_{L^\infty} = 0$ comme dans [FK64],[KF62] et [Can95].

Bibliographie

- [AT99] P. AUSCHER et Ph. TCHAMITCHIAN. « Espaces critiques pour le système des équations de Navier–Stokes incompressibles ». Preprint, CNRS UPRES-A 6119, 16, 1999.
- [BL76] J. BERGH et J. LÖFSTRÖM. *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, 1976.
- [Bon81] J. M. BONY. « Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires ». *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 14(4):209–246, 1981.
- [Bré94] H. BRÉZIS. « Remarks on the preceding paper “Global solutions of two-dimensional Navier–Stokes and Euler equations” ». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 128:359–360, 1994.
- [Bro64] F. E. BROWDER. « Nonlinear equations of evolution ». *Ann. of Math.*, 80:485–523, 1964.
- [Cal93] C. CALDERÓN. « Initial values of Navier–Stokes equations ». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 117:761–766, 1993.
- [Can95] M. CANNONE. *Ondelettes, paraproducts et Navier–Stokes*. Diderot Éditeur, 1995.
- [Can97] M. CANNONE. « Fluides en cascade ». Groupe de travail « Ondelettes et Navier–Stokes », Université d’Évry-Val d’Essonne, 1996–1997.
- [Che97] J. Y. CHEMIN. « Sur l’unicité pour l’équation de Navier–Stokes tridimensionnelle ». Dans *Séminaire X-EDP*. Centre de Mathématiques, École Polytechnique, 1996–1997.
- [Che99] J. Y. CHEMIN. « Théorèmes d’unicité pour le système de Navier–Stokes tridimensionnel ». *Journal d’Analyse Mathématique*, 77:27–50, 1999.
- [CKN82] L. CAFFARELLI, R. KOHN, et L. NIRENBERG. « Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations ». *Comm. Pure Appl. Math.*, 35:771–831, 1982.
- [CLMS93] R. R. COIFMAN, P.-L. LIONS, Y. MEYER, et S. SEMMES. « Compensated compactness and Hardy spaces ». *J. Math. Pures et Appl.*, 72(3):247–286, 1993.

- [CP97] M. CANNONE et F. PLANCHON. « The regularity of the bilinear term for solutions to the incompressible Navier–Stokes equations ». Preprint, 1997.
- [CW77] R. R. COIFMAN et G. WEISS. « Extension of the Hardy spaces and their use in analysis ». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83:569–645, 1977.
- [CW90] T. CAZENAVE et F. B. WEISSLER. « The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s ». *Nonlinear Anal. T.M.A.*, 14:807–836, 1990.
- [CW98a] T. CAZENAVE et F. B. WEISSLER. « Asymptotically self-similar global solutions of the nonlinear Schrödinger and heat equations ». *Math. Zeit.*, 228:83–120, 1998.
- [CW98b] T. CAZENAVE et F. B. WEISSLER. « More self-similar solutions of the nonlinear Schrödinger equation ». *No D.E.A.*, 5:355–365, 1998.
- [CW99] T. CAZENAVE et F. B. WEISSLER. « Scattering theory and self-similar solutions for the nonlinear Schrödinger equation ». Preprint, *LAGA, Université Paris XIII*, 99-12, 1999.
- [Dep98] N. DEPAUW. « Solutions peu régulières des équations d’Euler et de Navier–Stokes sur un domaine à bord ». Thèse, Université Paris XIII, 1998.
- [FJ90] M. FRAZIER et B. JAWERTH. « A discrete transform and decompositions of distribution spaces ». *J. Funct. Anal.*, 93:34–170, 1990.
- [FJR72] E. B. FABES, B. F. JONES, et N. M. RIVIÈRE. « The Initial Value Problem for the Navier–Stokes Equations with Data in L^p ». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 45:222–240, 1972.
- [FJW91] M. FRAZIER, B. JAWERTH, et G. WEISS. *Littlewood–Paley theory and the study of function spaces*, volume 79 de *Monograph in the CBM–AMS, Regional Conference Series in Mathematics*. AMS, 1991.
- [FK64] H. FUJITA et T. KATO. « On the Navier–Stokes initial value problem, I ». *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16:269–315, 1964.
- [FLT] G. FURIOLI, P. G. LEMARIÉ–RIEUSSET, et E. TERRANEO. « Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d’autres espaces fonctionnels limites pour Navier–Stokes ». *Rev. Mat. Iberoamericana*, à paraître.
- [FS72] C. FEFFERMAN et E. M. STEIN. « H^p spaces of several variables ». *Acta Math.*, 129:137–193, 1972.
- [Gal97] I. GALLAGHER. « The Tridimensional Navier–Stokes Equations with almost Bidimensional Data: Stability, Uniqueness and Life Span ». *IMRN*, 18, 1997.
- [GM89] Y. GIGA et T. MIYAKAWA. « Navier–Stokes flow in \mathbb{R}^3 with measures as initial vorticity and Morrey spaces ». *Comm. Part. Diff. Equat.*, 14(5):577–618, 1989.
- [Hun67] R. HUNT. « On $L(p, q)$ spaces ». *L’Enseign. Math.*, 12:249–276, 1967.

- [JS97] Y. Le JAN et A. S. SZNITMAN. « Stochastic cascades and 3-dimensional Navier–Stokes equations ». *C. R. Acad. Sci. Paris*, 324(I):823–826, 1997.
- [Kat65] T. KATO. « Non linear evolution equations in Banach spaces ». volume 17, pages 50–67. AMS, 1965.
- [Kat84] T. KATO. « Strong L^p solutions of the Navier–Stokes equations in \mathbb{R}^m with applications to weak solutions ». *Math. Zeit.*, 187:471–480, 1984.
- [Kat87] T. KATO. « On nonlinear Schrödinger equations ». *Ann. Inst. H. Poincaré Physique Théorique*, 46:113–129, 1987.
- [Kat92] T. KATO. « Strong solutions of the Navier–Stokes equations in Morrey spaces ». *Bol. Soc. Brasil. Math.*, 22:127–155, 1992.
- [KF62] T. KATO et H. FUJITA. « On the nonstationary Navier–Stokes systems ». *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 32:243–260, 1962.
- [Koc99] H. KOCH. « On the well posedness of the Navier–Stokes equations in C^{-1} : a sharpened version of a result by Kato ». Séminaire d’EDP, Université d’Orsay, 1999.
- [KT99] H. KOCH et D. TATARU. « Well-posedness for the Navier–Stokes equations ». Preprint, 1999.
- [KY94] H. KOZONO et M. YAMAZAKI. « Semilinear heat equations and the Navier–Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data ». *Comm. Part. Diff. Equat.*, 19:959–1014, 1994.
- [Lem] P. G. LEMARIÉ–RIEUSSET. « Recent developments in the Navier–Stokes problem ». Livre en cours de rédaction.
- [Lem94] P. G. LEMARIÉ–RIEUSSET. « Ondelettes et poids de Muckenhoupt ». *Studia Math.*, 108(2):127–147, 1994.
- [Lem98a] P. G. LEMARIÉ–RIEUSSET. « Some remarks on the Navier–Stokes equation in \mathbb{R}^3 ». *Journal Math. Phys.*, 39:4108–4118, 1998.
- [Lem98b] P. G. LEMARIÉ–RIEUSSET. « Weak infinite-energy solutions for the Navier–Stokes equations in \mathbb{R}^3 ». Preprint, *Université d’Évry-Val d’Essonne*, 1998.
- [Ler34] J. LERAY. « Sur le mouvement d’un liquide visqueux remplissant l’espace ». *Acta Math.*, 63:193–248, 1934.
- [May] R. MAY. Thèse de doctorat. Université d’Évry-Val d’Essonne, en préparation.
- [Mey] Y. MEYER. Communication personnelle.
- [Mey96] Y. MEYER. *Wavelets, paraproducts and Navier–Stokes equations*. Current developments in mathematics. International Press, Cambridge, MA 02238-2872, 1996.
- [Mon99] S. MONNIAUX. « Uniqueness of mild solutions of the Navier–Stokes equation and maximal L^p regularity ». *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328(I):663–668, 1999.

- [Muc72] B. MUCKENHOUPT. « Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function ». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165:207–226, 1972.
- [O’N63] R. O’NEIL. « Convolution operators and $L(p, q)$ spaces ». *Duke Math. J.*, 30:129–142, 1963.
- [Oru98] F. ORU. « *Rôle des oscillations dans quelques problèmes d’analyse non linéaire* ». Thèse, École Normale Supérieure de Cachan, 1998.
- [Ose24] C. W. OSEEN. *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1924.
- [Pee76] J. PEETRE. *New thoughts on Besov spaces*. Duke Univ. Math. Series. Duke University, 1976.
- [Pla96] F. PLANCHON. « *Solutions globales et comportement asymptotique pour les équations de Navier–Stokes* ». Thèse, École Polytechnique, 1996.
- [Pla99] F. PLANCHON. « Solutions auto-similaires et espaces de données initiales pour l’équation de Schrödinger ». *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328(I):1157–1162, 1999.
- [Rib96] F. RIBAUD. « *Analyse de Littlewood–Paley pour la résolution d’équations paraboliques semilinéaires* ». Thèse, Université Paris XI, 1996.
- [RS96] T. RUNST et W. SICKEL. *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators and Nonlinear Partial Differential Equations*. De Gruyter series in nonlinear analysis and applications. De Gruyter, 1996.
- [RY98] F. RIBAUD et A. YOUSSEFI. « Regular and self-similar solutions of the nonlinear Schrödinger equations ». *J. Math. Pures Appl.*, 77:1065–1079, 1998.
- [Ser62] J. SERRIN. « On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations ». *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 9:187–195, 1962.
- [Ste70] E. M. STEIN. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1970.
- [Ste93] E. M. STEIN. *Harmonic analysis. Real-variable methods orthogonality and oscillatory integrals*, volume 43 de *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, 1993.
- [SW71] E. M. STEIN et G. WEISS. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1971.
- [Tay92] M. TAYLOR. « Analysis on Morrey spaces and applications to Navier–Stokes equation ». *Comm. Part. Diff. Equat.*, 17:1407–1456, 1992.
- [Ter99a] E. TERRANEO. « *Applications de certains espaces de l’analyse harmonique réelle aux équations de Navier–Stokes et de la chaleur non linéaire* ». Thèse, Université d’Évry-Val d’Essonne, 1999.
- [Ter99b] E. TERRANEO. « Sur la non-unicité des solutions faibles de l’équation de la chaleur non linéaire avec non-linéarité u^3 ». *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328(I):759–762, 1999.

- [Tri83] H. TRIEBEL. *Theory of function spaces*, volume 78 de *Monographs in Mathematics*. Birkhauser Verlag, 1983.
- [Wah85] W. Von WAHL. *The equations of Navier–Stokes and abstract parabolic equations*. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1985.
- [Wei81] F. B. WEISSLER. « The Navier–Stokes initial value problem in L^p ». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 74:219–230, 1981.
- [Zhi] A. ZHIOUA. Thèse de doctorat. Université d'Évry-Val d'Essonne, en préparation.