

# THÈSES D'ORSAY

YONGQUAN HU

**Autour du programme de Langlands local  $p$ -adique et modulo  $p$**

*Thèses d'Orsay*, 2009

[http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11\\_2009\\_\\_0775\\_\\_P0\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_2009__0775__P0_0)

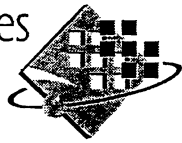
L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016  
et diffusée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

Faculté des  
sciences  
d'Orsay



UNIVERSITÉ  
PARIS-SUD 11

N° d'ordre : 9547

UNIVERSITÉ PARIS-SUD  
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY



## THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

Yongquan HU

Autour du programme de Langlands local  
 $p$ -adique et modulo  $p$

Soutenue le 1er Octobre 2009 devant la Commission d'examen :

|      |                       |                      |
|------|-----------------------|----------------------|
| M.   | Christophe BREUIL     | (Directeur de thèse) |
| M.   | Laurent CLOZEL        |                      |
| M.   | Vytautas PAŠKŪNAS     | (Rapporteur)         |
| M.   | Vincent SÉCHERRE      | (Rapporteur)         |
| M.   | Jacques TILOUINE      |                      |
| Mme. | Marie-France VIGNÉRAS | (Présidente)         |



## Autour du programme de Langlands local $p$ -adique et modulo $p$

**Résumé.** Soient  $p$  un nombre premier et  $F$  un corps local complet pour une valuation discrète de corps résiduel fini de caractéristique  $p$ . Cette thèse s'inscrit dans le cadre du programme de Langlands local  $p$ -adique et modulo  $p$ , qui a été initié par Breuil. Elle consiste en trois chapitres. Nous supposons  $F$  de caractéristique 0 au premier chapitre et  $F$  de caractéristique 0 non ramifié au troisième. Au premier chapitre, nous montrons une partie d'une conjecture de Breuil et Schneider sur l'existence de réseaux stables dans des représentations localement algébriques de  $\mathrm{GL}_n(F)$ . Au deuxième chapitre, à une représentation lisse irréductible de  $\mathrm{GL}_2(F)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  avec caractère central, nous associons canoniquement un diagramme qui détermine la classe d'isomorphisme de la représentation de départ. Au troisième chapitre, nous appliquons la construction du second chapitre aux représentations considérées par Breuil and Paskunas pour construire de nouvelles représentations supersingulières de  $\mathrm{GL}_2(F)$ .

**Mots clefs :** norme invariante, représentation localement algébrique, représentation supersingulière, diagramme canonique, poids de Serre.

## On $p$ -adic and modulo $p$ local Langlands program

**Abstract.** Let  $p$  be a prime and  $F$  be a complete discrete valuation field with a finite residual field of characteristic  $p$ . This thesis follows the  $p$ -adic and modulo  $p$  local Langlands program which has been proposed by Breuil. It consists of three chapters. Suppose moreover that  $F$  is of characteristic 0 in the first chapter and  $F$  unramified in the third. In the first chapter, we prove a part of a conjecture of Breuil and Schneider on the existence of stable lattices inside certain locally algebraic representations of  $\mathrm{GL}_n(F)$ . In the second chapter, to an irreducible smooth representation of  $\mathrm{GL}_2(F)$  over  $\overline{\mathbb{F}}_p$  with a central character, we canonically associate a diagram which determines the isomorphism class of the original representation. In the third chapter, we use the construction of the second chapter to construct new supersingular representations of  $\mathrm{GL}_2(F)$  in the cases considered by Breuil and Paskunas.

**Keywords:** invariant norm, locally algebraic representation, supersingular representation, canonical diagram, Serre weight.

**2000 Mathematical Subject Classification:** 11F85, 22E50.



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Christophe Breuil, pour ce qu'il m'a appris durant ces quatre dernières années. Il m'a guidé dans un domaine mathématique si intéressant et il a consacré beaucoup de temps à discuter avec moi et à lire mes textes, jusqu'à corriger des fautes de français. Je lui témoigne ici ma gratitude profonde pour sa gentillesse, sa patience, sa disponibilité, et ses encouragements permanents.

Je remercie sincèrement Paškūnas et Vincent Sécherre d'avoir accepté la tâche de rapporter cette thèse et également pour leur participation au Jury de soutenance. Ils ont contribué par leurs nombreuses remarques et suggestions à améliorer la qualité de ce mémoire.

Je remercie profondément Laurent Clozel, Jacques Tilouine et Marie-France Vignéras, qui m'ont fait l'honneur d'accepter de participer au Jury de soutenance.

Mon tuteur, Guy Henniart, m'a beaucoup aidé à la vie quotidienne, et je l'en remercie chaleureusement. Lui, ainsi que Ariane Mézard, Rachel Ollivier, Benjamin Schraen, ont organisé une série de groupes de travail excellents à l'ENS et à l'IHES autour de «GL<sub>2</sub>», qui ont joué un rôle très important dans mon apprentissage des mathématiques pendant ces quatre dernières années. Je voudrais leur exprimer ma reconnaissance.

Je remercie vivement Ramla Abdellatif, Florian Herzig et Weizhe Zheng. Ils ont lu avec soin une première version de ce travail et m'ont fait parvenir de longues listes de commentaires.

Cette thèse a été effectuée au sein du département de mathématiques d'Orsay qui m'a fourni de merveilleuses conditions de travail. J'en remercie tous les membres.

J'ai pu faire mes études en France grâce à une coopération entre l'Université Paris-Sud et l'Université de Tsinghua. Je voudrais exprimer ici ma gratitude à tous ceux qui y ont participé. Je pense en particulier à Pierre Colmez, Jean-Marc Fontaine, David Harari, Luc Illusie et Michel Raynaud, ainsi qu'à leurs homologues chinois Keqin Feng, Yi Ouyang, Zhi-Ying Wen et Zhiyong Zheng.

Un grand merci à mes copains matheux du pays, qui ont créé autour de moi une ambiance amicale : Huayi Chen, Ke Chen, Miaofen Chen, Zongbin Chen, Yong Hu, Zhi Jiang, Xiangyu Liang, Yongqi Liang, Chengyuan Lu, Li Ma, Xiaonan Ma, Peng Shan, Shun Tang, Yichao Tian, Jilong Tong, Haoran Wang, Shanwen Wang, Han Wu, Weizhe Zheng, Guodong Zhou.

Ma reconnaissance toute particulière s'adresse à toute ma famille, surtout mes parents, pour leur compréhension et leur soutien constant. Pour conclure, je remercie mon épouse pour son accompagnement et son soutien sans lesquels cette thèse n'aurait pas pu aboutir.



# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction</b>  | <b>1</b>  |
| Bibliographie . . . . .  | 7         |
| <b>I Normes invariantes et existence de filtrations admissibles</b>                              | <b>9</b>  |
| 1 Introduction . . . . .   | 9         |
| 2 Rappels et compléments sur la conjecture . . . . .   | 12        |
| 3 Énoncé du théorème principal . . . . .   | 18        |
| 4 Preuve de (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) . . . . .   | 22        |
| 5 Preuve de (iii) $\Rightarrow$ (ii) . . . . .   | 25        |
| Bibliographie . . . . .  | 42        |
| <b>II Diagrammes canoniques et représentations modulo <math>p</math> de <math>GL_2(F)</math></b> | <b>45</b> |
| 1 Introduction . . . . .   | 45        |
| 2 Rappels et compléments . . . . .   | 48        |
| 3 Le diagramme canonique . . . . .   | 54        |
| 4 La condition de finitude . . . . .   | 67        |
| 5 Application : le cas $F = \mathbb{Q}_p$ . . . . .  | 70        |
| <b>III Sur quelques représentations supersingulières de <math>GL_2(\mathbb{Q}_{p^f})</math></b>  | <b>77</b> |
| 1 Introduction . . . . .   | 77        |
| 2 Combinatoire de $K$ -représentations . . . . .   | 79        |
| 3 Combinatoire des diagrammes de Diamond génériques . . . . .                                    | 88        |
| 4 Construction de représentations supersingulières . . . . .                                     | 95        |
| Bibliographie . . . . .  | 110       |





# Introduction

Soit  $p$  un nombre premier. Cette thèse s'inscrit dans le cadre du programme de Langlands local  $p$ -adique et modulo  $p$ , qui a été initié par Breuil dans une série de travaux ([Br1], [Br2], [Br3]). Ce programme est en voie d'achèvement pour  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  par les travaux de Colmez ([Co]). Soit  $F$  un corps local complet pour une valuation discrète de corps résiduel fini de caractéristique  $p$ . Cette thèse concerne les groupes  $\mathrm{GL}_n(F)$  (au premier chapitre, où  $F$  est supposé de caractéristique 0) et  $\mathrm{GL}_2(F)$  (aux deuxième et troisième chapitres). Le premier chapitre est consacré à la question de l'existence de réseaux stables sur des représentations localement algébriques de  $\mathrm{GL}_n(F)$ , et les deux derniers concernent la théorie des représentations modulo  $p$  de  $\mathrm{GL}_2(F)$ .

Les résultats principaux sont les suivants. Au premier chapitre, nous montrons une partie d'une conjecture de Breuil et Schneider (sur l'existence de réseaux stables). Au second chapitre, à une représentation lisse irréductible de  $\mathrm{GL}_2(F)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  avec caractère central, nous associons canoniquement un diagramme (voir [BP]) qui détermine la classe d'isomorphisme de la représentation de départ. Au troisième chapitre, nous appliquons la construction du second chapitre aux représentations considérées dans [BP] pour construire de nouvelles représentations supersingulières de  $\mathrm{GL}_2(F)$  (pour  $F$  de caractéristique 0 non ramifié).

**Remarque 0.1.** Pour simplifier les notations, les résultats énoncés ici sont un peu différents de leurs versions correspondantes dans le texte.

## Normes invariantes et existence de filtrations admissibles

Une "correspondance de Langlands" est une bijection naturelle entre représentations galoisiennes (de dimension  $n$ ) et représentations de  $\mathrm{GL}_n$ . La correspondance de Langlands locale  $\ell$ -adique ( $\ell \neq p$ ) a été démontrée par Harris et Taylor ([HT]) et peu après par Henniart ([He]). En particulier, avec les travaux de Vignéras ([Vi1]), elle établit, si  $F$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , une correspondance entre les ensembles de classes d'isomorphismes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{représentations admissibles} \\ \text{irréductibles entières} \\ \text{de } \mathrm{GL}_n(F) \text{ sur } \overline{\mathbb{Q}}_\ell \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{représentations } \ell\text{-adiques} \\ \text{de dimension } n \text{ de } \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \\ \text{Frobenius-semi-simples} \end{array} \right\}.$$

Comme déjà mentionné, les travaux de Breuil ont suggéré l'existence d'un analogue si l'on remplace  $\ell$  par  $p$ . Rappelons ci-dessous sa stratégie.

Supposons donc  $F$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ . Soient  $V$  une représentation  $p$ -adique potentiellement semi-stable de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$  sur un  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $F'$  une extension finie galoisienne de  $F$  telle que  $V$  devienne semi-stable en tant que représentation de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F')$ . D'après le théorème de Colmez-Fontaine, la donnée de  $V$  est équivalente à la donnée d'un  $(\varphi, N, \text{Gal}(F'/F))$ -module filtré  $D_{\text{pst}}(V)$  qui est (faiblement) admissible. La représentation  $V$  a des poids de Hodge-Tate  $\{i_{j,\sigma}, 1 \leq j \leq n, \sigma : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}\}$ . On suppose que, pour tout plongement  $\sigma$ , les  $i_{j,\sigma}$  sont des entiers distincts que l'on ordonne de façon croissante avec  $j$ .

On peut associer à  $V$  deux représentations de  $\text{GL}_n(F)$  sur des  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ -espaces vectoriels :

(a) la représentation algébrique  $\text{Alg}(V)$  de plus haut poids

$$i_{1,\sigma} \leq i_{2,\sigma} - 1 \leq \dots \leq i_{n,\sigma} - n + 1;$$

(b) la représentation lisse admissible  $\text{Lisse}(V)$  correspondant, via la correspondance locale classique, à la Frobenius-semi-simplifiée de la représentation de Weil-Deligne associée à  $V$  par Fontaine ([Fo]).

**Exemple 0.2.** Supposons  $F = \mathbb{Q}_p$ ,  $n = 2$  et  $V$  semi-stable non cristalline de poids de Hodge-Tate  $(0, k - 1)$  avec  $k \geq 2$ . En fixant une racine carrée  $p^{1/2}$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ , le  $(\varphi, N)$ -module filtré  $D = D_{\text{pst}}(V)$  associé à  $V$  est isomorphe à  $\overline{\mathbb{Q}_p}e_1 \oplus \overline{\mathbb{Q}_p}e_2$  avec :

$$\begin{cases} N(e_1) = e_2 \\ N(e_2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(e_1) = p^{k/2}\lambda e_1 \\ \varphi(e_2) = p^{k/2-1}\lambda e_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Fil}^i D = D & \text{si } i \leq 0 \\ \text{Fil}^i D = \overline{\mathbb{Q}_p}(e_1 + \mathcal{L}e_2) & \text{si } 1 \leq i \leq k - 1 \\ \text{Fil}^i D = 0 & \text{si } i \geq k \end{cases}$$

où  $\lambda \in \overline{\mathbb{Z}_p}^\times$  et  $\mathcal{L} \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ . On a alors que

$$\text{Alg}(V) = \text{Sym}^{k-2} \overline{\mathbb{Q}_p}^2 \otimes |\det|^{k/2-1} \quad \text{et} \quad \text{Lisse}(V) = \text{St} \otimes (\mu_{\lambda^{-1}} \circ \det)$$

où  $\text{St}$  est la représentation de Steinberg usuelle de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  et  $\mu_{\lambda^{-1}}$  est le caractère de  $\overline{\mathbb{Q}_p}^\times$  donné par  $x \mapsto \lambda^{-\text{val}_p(x)}$ .

Un point important est que le couple  $(\text{Alg}(V), \text{Lisse}(V))$  ne détermine pas la classe d'isomorphisme de la représentation galoisienne  $V$  : on a oublié la filtration de Hodge (i.e. l'invariant  $\mathcal{L}$  dans l'exemple 0.2). L'idée de Breuil est d'essayer d'associer à  $V$  une représentation continue de  $\text{GL}_n(F)$  sur un *espace de Banach* qui est suffisamment grosse pour "contenir" (au moins) la filtration de Hodge et dont le sous-espace des vecteurs *localement algébriques* est isomorphe à  $\text{Alg}(V) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \text{Lisse}(V)$ .

**Remarque 0.3.** Par conséquent, la représentation  $\text{Alg}(V) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \text{Lisse}(V)$  devrait admettre une norme induite qui est invariante sous l'action de  $\text{GL}_n(F)$ . Or, si la représentation  $\text{Lisse}(V)$  est de dimension 1, alors  $\text{Alg}(V) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \text{Lisse}(V)$  n'admet presque jamais de  $\overline{\mathbb{Z}_p}$ -réseau. Ce fait force à modifier la correspondance de Langlands locale dans certains cas (cf. §4, [BS]).

Réciproquement, si l'on se donne :

- (a') une représentation algébrique  $\rho$  de  $\mathrm{GL}_n(F)$  sur  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  et
- (b') une représentation lisse admissible  $\pi$  de  $\mathrm{GL}_n(F)$  sur  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  associée à une représentation de Weil-Deligne via la correspondance locale *modifiée* (cf. remarque 0.3),

on peut se demander quand le couple  $(\rho, \pi)$  provient d'une représentation galoisienne. Une réponse est suggérée par :

**Conjecture 0.4.** ([BS]) Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\rho \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \pi$  admet une norme invariante ;
- (ii) il existe une représentation potentiellement semi-stable  $V$  de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$  telle que :

$$\mathrm{Alg}(V) \cong \rho \quad \text{et} \quad \mathrm{Lisse}'(V) \cong \pi$$

où  $\mathrm{Lisse}'(V)$  désigne la représentation associée à  $V$  via la correspondance locale *modifiée*.

Notre résultat principal du premier chapitre est de démontrer l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) de cette conjecture. La démonstration consiste en deux étapes. La première étape est une généralisation du lemme 2.1 de [Em1], le but étant de fournir un ensemble *fini* d'inégalités impliquées par (i) en utilisant le foncteur "module de Jacquet" d'Emerton ([Em2]). La deuxième étape est de définir le  $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(F'/F))$ -module  $D_{\mathrm{pst}}(V)$  cherché dans (ii) et de montrer que les inégalités fournies dans la première étape assurent l'existence d'une filtration (faiblement) *admissible* avec les poids de Hodge-Tate demandés. Signalons que ce n'est pas trivial puisqu'il existe en général un nombre *infini* de sous-objets de  $D_{\mathrm{pst}}(V)$ .

## Diagrammes canoniques et représentations modulo $p$ de $\mathrm{GL}_2(F)$

Rappelons que  $F$  est un corps local de corps résiduel fini de caractéristique  $p$ . Nous nous intéressons aux représentations lisses irréductibles de  $\mathrm{GL}_2(F)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  avec caractère central. L'étude de telles représentations a été initiée par Barthel et Livné ([BL1], [BL2]). Comme dans le cas complexe, leur première étape est d'étudier les représentations induites à partir d'un caractère lisse de  $B(F)$  – le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. On a un critère analogue au cas complexe sur l'irréductibilité de ce type de représentations. Par définition, une représentation lisse irréductible de  $\mathrm{GL}_2(F)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  (avec caractère central) est dite *supersingulière* si elle n'est pas un sous-quotient d'une telle induction.

Notons  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers de  $F$ ,  $\varpi$  une uniformisante de  $\mathcal{O}$  et  $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^f} \cong \mathcal{O}/\varpi$  le corps résiduel. Notons également

$$G = \mathrm{GL}_2(F), \quad K = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}),$$

$I \subset K$  le sous-groupe d'Iwahori,  $I_1$  le pro- $p$ -Sylow-groupe de  $I$  et  $Z$  le centre de  $G$ .

Pour construire des représentations supersingulières, il faut commencer par utiliser l'induction compacte de  $KZ$  à  $G$ . Plus précisément, soit  $(\sigma, V^\sigma)$  une représentation lisse irréductible de  $K$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  que l'on étend à  $KZ$  en envoyant  $\varpi$  sur l'identité. On note  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel des fonctions  $f : G \rightarrow V^\sigma$  à support compact modulo  $Z$  telles que  $f(kg) = \sigma(k)f(g)$  ( $g \in G, k \in KZ$ ) muni de l'action à gauche de  $G$  par translation à droite. Pour  $g \in G$  et  $v \in V^\sigma$ , on note  $[g, v]$  l'élément de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  défini comme suit :

$$\begin{aligned} [g, v](g') &= \sigma(g'g)v & \text{si } g' \in KZg^{-1} \\ [g, v](g') &= 0 & \text{si } g' \notin KZg^{-1}. \end{aligned}$$

D'après Barthel-Livné, on a :

**Théorème 0.5.** (i)  $\text{End}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma) = \overline{\mathbb{F}}_p[T]$  pour un certain opérateur de Hecke  $T$ .

(ii) Toute représentation lisse irréductible  $\pi$  de  $G$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  (avec caractère central) est un quotient de

$$[\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / (T - \lambda)] \otimes (\chi \circ \det)$$

pour  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ ,  $\sigma$  une représentation irréductible de  $K$  et  $\chi : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  un caractère lisse ; de plus,  $\pi$  est supersingulière si et seulement si  $\lambda = 0$ .

Pour les représentations supersingulières, on connaît très peu sauf dans le cas  $F = \mathbb{Q}_p$  :

**Théorème 0.6.** ([Br1]) Pour toute  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentation irréductible  $\sigma$  de  $K$  et tout caractère lisse  $\chi : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ , la  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ -représentation

$$[\text{c-Ind}_{\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma / T] \otimes (\chi \circ \det)$$

est irréductible. Par conséquent, ces représentations fournissent toutes les représentations supersingulières de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ .

Le point clef de la preuve est le calcul des invariants de  $\text{c-Ind}_{\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma / T$  sous  $I_1 \subset \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ . Breuil montre aussi qu'il existe des entrelacements entre ces représentations supersingulières. De manière explicite (et équivalente par [Vi2]), si  $\pi$  et  $\pi'$  sont deux représentations supersingulières de  $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ , alors

$$(0.0.1) \quad \pi \cong \pi' \iff \pi^{I_1} \cong \pi'^{I_1} \text{ en tant que } \mathcal{H}(G, I_1)\text{-modules}$$

où  $\mathcal{H}(G, I_1) := \text{End}_G(\text{c-Ind}_{I_1}^G \mathbb{1})$  est l'algèbre de Hecke relativement à  $I_1$  et  $\mathbb{1}$ . Mais, lorsque  $F \neq \mathbb{Q}_p$ , des exemples (voir le troisième chapitre) et le résultat d'Ollivier ([Ol]) suggèrent que la généralisation naïve de (0.0.1) est fautive, c'est-à-dire que l'espace vectoriel des  $I_1$ -invariants d'une représentation supersingulière de  $G$  ne suffit pas à déterminer la classe d'isomorphisme de la représentation lorsque  $F \neq \mathbb{Q}_p$ .

Paskunas ([Pa]) a donné la description suivante de la  $I$ -représentation  $\pi^{I_1}$  si  $\pi = \text{c-Ind}_{\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma / T$  (où  $\sigma$  est une représentation irréductible de  $K$ ). Posons

$$I^+(\sigma) = \left[ \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p - \{0\} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma \right], \quad I^-(\sigma) = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}, I^+(\sigma) \right]$$

qui sont des sous-espaces vectoriels de  $\text{c-Ind}_{\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \sigma$  stables sous l'action de  $I$ . Si l'on note  $I^+(\sigma, \pi)$  (resp.  $I^-(\sigma, \pi)$ ) l'image de  $I^+(\sigma)$  (resp.  $I^-(\sigma)$ ) dans  $\pi$ , alors on a

$$\pi^{I_1} = I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi).$$

Ce résultat est le point de départ des résultats du second chapitre.

On rappelle la définition suivante : un *diagramme* est un triplet  $(D_0, D_1, r)$  où  $D_0$  est une représentation lisse de  $KZ$ ,  $D_1$  est une représentation lisse de  $N := IZ\Pi$  (où  $\Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix} \in G$ ) et  $r : D_1 \rightarrow D_0$  est un morphisme  $IZ$ -équivariant.

Soient  $\pi$  une représentation lisse irréductible de  $G$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  avec caractère central et  $\sigma$  une sous- $K$ -représentation irréductible de  $\pi$ . Supposons d'abord que  $\varpi \in Z$  agisse trivialement sur  $\pi$ . Alors il existe une surjection  $G$ -équivariante  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \pi$ . Comme dans le cas  $F = \mathbb{Q}_p$ , on pose :

$$I^+(\sigma) := \left[ \begin{pmatrix} \mathcal{O} - \{0\} & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma \right], \quad I^-(\sigma) := \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}, I^+(\sigma) \right]$$

et on note  $I^+(\sigma, \pi)$  (resp.  $I^-(\sigma, \pi)$ ) l'image de  $I^+(\sigma)$  (resp.  $I^-(\sigma)$ ) dans  $\pi$ . Par des arguments élémentaires, on démontre que l'espace  $I^+(\sigma, \pi)$  (resp.  $I^-(\sigma, \pi)$ ) ne dépend ni du choix de  $\sigma$  ni du choix de la surjection  $G$ -équivariante, et on peut donc le noter  $I^+(\pi)$  (resp.  $I^-(\pi)$ ). Posons

$$D_1(\pi) = I^+(\pi) \cap I^-(\pi), \quad D_0(\pi) = \langle K \cdot D_1(\pi) \rangle \subset \pi,$$

on obtient ainsi un diagramme, appelé le *diagramme canonique* associé à  $\pi$  :

$$D(\pi) := (D_0(\pi), D_1(\pi), \text{can})$$

où  $\text{can}$  désigne l'inclusion naturelle  $D_1(\pi) \subseteq D_0(\pi)$ . En général, on écrit  $\pi = \tilde{\pi} \otimes \chi \circ \det$  de telle sorte que  $\varpi$  agisse trivialement sur  $\tilde{\pi}$ , et on pose

$$D(\pi) := (D_0(\tilde{\pi}) \otimes \chi \circ \det, D_1(\tilde{\pi}) \otimes \chi \circ \det, \text{can}).$$

Notre résultat principal du second chapitre est le suivant :

**Théorème 0.7.** *Soient  $\pi$  et  $\pi'$  deux représentations lisses irréductibles de  $G$  avec caractère central, alors  $\pi \cong \pi'$  si et seulement si  $D(\pi) \cong D(\pi')$  en tant que diagrammes.*

Indiquons brièvement la démonstration, qui consiste à construire un isomorphisme  $G$ -équivariant  $\varphi : \pi \xrightarrow{\sim} \pi'$  à partir d'un isomorphisme de diagrammes  $D(\pi) \xrightarrow{\sim} D(\pi')$ . L'isomorphisme  $\varphi$  étant nécessairement unique, il s'agit de montrer l'existence. Pour cela, nous donnons une caractérisation de l'intersection  $D_1(\pi) = I^+(\pi) \cap I^-(\pi)$  sous la forme : pour toute égalité dans  $\pi$  de la forme (où  $[\lambda]$  désigne le représentant multiplicatif de  $\lambda \in \mathbb{F}_q$  dans  $\mathcal{O}$ )

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_\lambda + \Pi(w) = 0$$

avec  $w, w_\lambda \in I^+(\pi)$ , on a  $w, w_\lambda \in D_1(\pi)$ . De manière équivalente, toutes les relations non triviales dans  $\pi$  sont contenues dans le diagramme  $D(\pi)$ . Le théorème s'en déduit facilement.

Décrivons le plan du second chapitre : en §2, on donne des préliminaires sur la décomposition de matrices dans  $G$  et sur le foncteur  $\text{Ind}_I^K$ . En §3, on définit la notion "diagramme canonique" et on démontre le théorème principal 0.7. En §4, on fournit des propriétés sur le diagramme canonique. En §5, on applique la théorie des sections précédentes au cas  $F = \mathbb{Q}_p$  pour retrouver des résultats connus.

## Sur quelques représentations supersingulières de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_{p^f})$

Soit  $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  une représentation continue irréductible et impaire. Serre a conjecturé ([Se]), il y a déjà 20 ans, que  $\rho$  est *modulaire* au sens que  $\rho$  provient d'une forme modulaire parabolique primitive. Cette conjecture a été récemment démontrée par Khare et Wintenberger ([KW1], [KW2]).

Dans [BDJ], la conjecture de Serre a été généralisée en remplaçant  $\mathbb{Q}$  par un corps totalement réel qui est non ramifié en  $p$ . Pour notre propos, la conjecture de Buzzard-Diamond-Jarvis peut se formuler grossièrement comme suit (cf. conjecture 4.7, [BDJ]). On conserve les notations du chapitre précédent et on suppose que  $F = \mathbb{Q}_{p^f}$  est l'unique extension non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  de degré  $f \geq 1$ . Soit  $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  une représentation continue. On peut lui associer un ensemble de *poids*, i.e. de représentations irréductibles de  $K$ , noté  $\mathcal{D}(\rho)$ . On appelle *poids de Diamond* les poids de  $\mathcal{D}(\rho)$ , et la conjecture *loc. cit.* dit que ce sont exactement les poids apparaissant dans le  $K$ -socle d'une certaine représentation lisse admissible  $\pi_\rho$  de  $G$  associée à  $\rho$  construite sur la cohomologie.

Des résultats partiels sur la conjecture de Buzzard-Diamond-Jarvis ont été obtenus par Gee ([Ge]). De plus, il est espéré (cf. remarque 4.8, [BDJ]) que chaque poids de Diamond apparaît dans  $\pi_\rho$  avec multiplicité 1 si  $\rho$  est générique (définition 11.7, [BP]). On peut donc se demander si l'on peut construire abstraitement des représentations lisses admissibles de  $G$  vérifiant la condition

$$\text{soc}_K(\pi) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}(\rho)} \sigma,$$

où  $\text{soc}_K(\pi)$  est la plus grande sous- $K$ -représentation semi-simple de  $\pi|_K$ . C'est ce qui est fait dans [BP].

Rappelons la construction de Breuil-Paskunas. Supposons donc que la représentation  $\rho$  soit générique et telle que  $p \in Z$  agisse trivialement sur  $\det(\rho)$ . On peut lui associer une famille de diagrammes  $D(\rho, r) = (D_0(\rho), D_1(\rho), r)$  comme suit (en faisant agir  $p \in Z$  trivialement) :

- (i)  $D_0(\rho)$  est la plus grande représentation de  $\text{GL}_2(\mathcal{O}/p)$  telle que  $\text{soc}_K D_0(\rho, r) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}(\rho)} \sigma$  et telle que chaque  $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$  n'apparaît qu'une fois dans  $D_0$

- (ii)  $D_1(\rho)$  est l'unique représentation de  $N$  sur  $D_0(\rho)^{I_1}$  qui étend l'action de  $I$
- (iii)  $r : D_1(\rho) \hookrightarrow D_0(\rho)$  est une injection  $I$ -équivariante arbitraire.

Il existe alors (au moins) une représentation lisse admissible  $\pi(\rho, r)$  de  $G$  telle que

- (a)  $\text{soc}_K \pi(\rho, r) = \text{soc}_K D_0(\rho)$
- (b)  $(\pi^{K_1}, \pi^{I_1}, \text{can})$  contient  $D(\rho, r)$  où  $\text{can}$  désigne l'inclusion  $\pi^{I_1} \hookrightarrow \pi^{K_1}$
- (c)  $\pi$  est engendrée par  $D_1(\rho)$  en tant que  $G$ -représentation.

On dira que  $\pi(\rho, r)$  est une représentation de  $G$  associée à  $D(\rho, r)$ . La construction n'est pas du tout canonique : on a besoin de faire beaucoup de choix. Le but principal du chapitre III est de construire plusieurs représentations non isomorphes associées à un même diagramme  $D(\rho, r)$ .

L'idée de la construction est grossièrement la suivante. On fixe une représentation  $\pi = \pi(\rho, r)$  comme précédemment et une injection  $KZ$ -équivariante de  $\pi$  dans  $\text{Inj}_K \text{soc}_K \pi$  – une enveloppe injective de  $\text{soc}_K \pi$  (dans la catégorie des représentations lisses de  $K$ ) que l'on voit comme représentation de  $KZ$  en envoyant  $p$  sur l'identité. Soit  $S$  l'ensemble des représentations lisses admissibles  $\Omega$  de  $G$  telles que  $\Omega|_{KZ} = \text{Inj}_K \text{soc}_K \pi$  et telles que l'on ait une injection de diagrammes

$$D(\rho, r) \hookrightarrow (\Omega|_{KZ}, \Omega|_N, \text{can}).$$

D'après [BP],  $S$  n'est pas vide. On dit qu'une sous- $I$ -représentation  $M$  de  $\pi$  est *spéciale* si elle vérifie la condition suivante :

(S) pour tout  $\Omega \in S$  et toute injection  $G$ -équivariante  $\psi : \pi \hookrightarrow \Omega$ , on a  $\psi|_M = c \cdot \text{Id}$  avec  $c \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ , où  $\text{Id}$  désigne l'injection fixée de  $\pi$  dans  $\text{Inj}_K \text{soc}_K \pi$ .

On définit une représentation  $\pi' = \pi'(\rho, r)$  associée à  $D(\rho, r)$  à partir de  $\pi$  et encore à l'intérieur de  $\text{Inj}_K \text{soc}_K \pi$  vérifiant les conditions suivantes :

- (a) l'action de  $KZ$  sur  $\pi'$  est la restriction de celle de  $\text{Inj}_K \text{soc}_K \pi$  ;
- (b) il existe une sous- $I$ -représentation spéciale  $M$  de  $\pi \cap \pi'$  telle que

$$\langle K \cdot \Pi(M) \rangle \not\cong \langle K \cdot \Pi'(M) \rangle$$

où  $\Pi'$  désigne l'action de  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$  sur  $\pi'$ .

Cela assure que  $\pi \not\cong \pi'$ .

## Bibliographie

- [BL1] L. Barthel & R. Livné, *Modular representations of  $GL_2$  of a local field : unramified case*, J. of Number Theory 55 (1995), 1-27.
- [BL2] L. Barthel & R. Livné, *Irreducible modular representations of  $GL_2$  of a local field*, Duke Math. J. 75 (1994), 261-292.
- [Br1] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$*  : I, Compositio Math. 138 (2003), 165-188.



- [Br2] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  : II*, J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003), 1-36.
- [Br3] C. Breuil, *Invariant  $\mathcal{L}$  et série spéciale  $p$ -adique*, Ann. Sci. E. N. S. 37 (2004), 559-610.
- [BP] C. Breuil & V. Paskunas, *Towards a modulo  $p$  Langlands correspondence for  $GL_2$* , prépublication, 2007.
- [BS] C. Breuil & P. Schneider, *First steps towards  $p$ -adic Langlands functoriality*, J. Reine Angew. Math. 610 (2007), 149-180.
- [BDJ] K. Buzzard, F. Diamond & F. Jarvis, *On Serre's conjecture for mod  $\ell$  Galois representations over totally real fields*, prépublication, version 2008.
- [Co] P. Colmez, *Représentations de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et  $(\varphi, \Gamma)$ -modules*, prépublication, 2008.
- [CF] P. Colmez, & J.-M. Fontaine, *Construction des représentations  $p$ -adiques semi-stables*, Invent. Math. 140 (2000), 1-43.
- [Em1] M. Emerton,  *$p$ -adic  $L$ -functions and unitary completions of representations of  $p$ -adic reductive groups*, Duke Math. J. 130 (2005), 353-392.
- [Em2] M. Emerton, *Jacquet modules of locally analytic representations of  $p$ -adic reductive groups I. Construction and first properties*, Ann. Sci. E. N. S. 39 (2006), no. 5, 775-839.
- [Fo] J.-M. Fontaine, *Représentations  $l$ -adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 321-347.
- [Ge] T. Gee, *On the weights of mod  $p$  Hilbert modular forms*, prépublication, 2005.
- [HT] M. Harris & R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Math. Studies 151, Princeton Univ. Press, 2001.
- [He] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour  $GL(n)$  sur un corps  $p$ -adique*, Invent. Math. 139 (2000), 439-455.
- [KW1] C. Khare & J.-P. Wintenberger, *Serre's modularity conjecture (I)*, prépublication, 2006.
- [KW2] C. Khare & J.-P. Wintenberger, *Serre's modularity conjecture (II)*, prépublication, 2006.
- [Ol] R. Ollivier, *Le foncteur des invariants sous l'action du pro- $p$ -Iwahori de  $GL_2(F)$* , prépublication, 2006.
- [Pa] V. Paskunas, *Extensions for supersingular representations of  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , prépublication, 2007.
- [Se] J.-P. Serre, *Sur les représentations modulaires de degré 2 de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$* , Duke Math. J. 54 (1987), 179-230.
- [Vi1] M.-F. Vignéras, *Correspondance de Langlands semi-simple pour  $GL_n(F)$  modulo  $\ell \neq p$* , Invent. Math. 144 (2001), 177-223.
- [Vi2] M.-F. Vignéras, *Représentations modulo  $p$  of the  $p$ -adic group  $GL_2(F)$* , Compositio Math. 140 (2004), 333-358.

## Partie I

# Normes invariantes et existence de filtrations admissibles

### 1 Introduction

L'objet de ce chapitre est une conjecture proposée dans [BS]. Pour l'énoncer, on fixe d'abord quelques notations. Soit  $p$  un nombre premier. On fixe deux extensions finies  $L$  et  $K$  de  $\mathbb{Q}_p$  contenues dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  telles que  $[L : \mathbb{Q}_p] = |\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L, K)|$ , où  $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L, K)$  désigne l'ensemble des plongements  $\mathbb{Q}_p$ -linéaires de  $L$  dans  $K$ , et aussi une extension finie galoisienne  $L'$  de  $L$  telle que  $[L'_0 : \mathbb{Q}_p] = |\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L'_0, K)|$  où  $L'_0$  désigne le sous-corps non-ramifié maximal de  $L'$ . On note  $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$  (resp.  $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/L')$ ) le groupe de Weil de  $L$  (resp.  $L'$ ).

On considère les deux catégories suivantes (cf. §2.2) :

- (i)  $\mathrm{WD}_{L'/L}$  : la catégorie des  $K$ -représentations  $(r, N, V)$  de dimension finie du groupe de Weil-Deligne de  $L$  telles que la restriction de  $r$  à  $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/L')$  est non ramifiée;
- (ii)  $\mathrm{MOD}_{L'/L}$  : la catégorie des  $(\varphi, N)$ -modules étales  $D$  sur  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$  munis d'une action de  $\mathrm{Gal}(L'/L)$  vérifiant quelques conditions usuelles.

On sait qu'il existe deux foncteurs (non canoniques)

$$\mathrm{WD} : \mathrm{MOD}_{L'/L} \rightarrow \mathrm{WD}_{L'/L}, \quad \mathrm{MOD} : \mathrm{WD}_{L'/L} \rightarrow \mathrm{MOD}_{L'/L}$$

qui sont inverses l'un de l'autre (cf. §2.2).

Rappelons que (cf. [Fo1]) pour un objet  $(\varphi, N, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$  de  $\mathrm{MOD}_{L'/L}$  on peut définir un entier  $t_N(D)$  et, si de plus on se donne d'une filtration décroissante exhaustive séparée sur  $D_{L'} = L' \otimes_{L'_0} D$  qui est stable sous l'action de  $\mathrm{Gal}(L'/L)$ , on a un autre entier  $t_H(D_{L'})$ . Par définition cette filtration est dite *admissible* si  $t_H(D_{L'}) = t_N(D)$  et si  $t_H(D'_{L'}) \leq t_N(D')$  pour tout sous-objet  $D'$  de  $D$  où  $D'_{L'}$  est muni de la filtration induite. Pour tout plongement  $\sigma : L \hookrightarrow K$ , on pose

$$D_{L', \sigma} = D_{L'} \otimes_{L' \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} (L' \otimes_{L, \sigma} K).$$

On a alors un isomorphisme naturel  $D_{L'} \simeq \prod_{\sigma: L \hookrightarrow K} D_{L', \sigma}$ .

Si  $(r, N, V) \in \text{WD}_{L'/L}$ , on note  $(r, N, V)^{\text{ss}} \in \text{WD}_{L'/L}$  sa  $F$ -semi-simplification (cf. §8.5, [De]).

On fixe un entier  $d \geq 1$  et :

- (i) un objet  $(r, N, V)$  de  $\text{WD}_{L'/L}$  de dimension  $d + 1$  tel que  $r$  est semi-simple ;
- (ii) pour tout  $\sigma : L \hookrightarrow K$ , un ensemble de  $d + 1$  entiers  $i_{1, \sigma} < \dots < i_{d+1, \sigma}$ .

Posons  $a_{j, \sigma} = -i_{d+2-j, \sigma} - (j - 1)$  pour tout  $\sigma : L \hookrightarrow K$  et  $j \in \{1, \dots, d + 1\}$ . D'une part, à  $(r, N, V)$  on associe une représentation lisse sur  $K$  de  $\text{GL}_{d+1}(L)$  par la correspondance de Langlands locale *modifiée* (cf. §3.2), notée  $\pi$ . D'autre part, à  $\{a_{j, \sigma}\}_{j, \sigma}$  on associe une représentation  $\mathbb{Q}_p$ -rationnelle sur  $K$  de  $\text{GL}_{d+1}(L)$ , notée  $\rho$ .

**Conjecture 1.1.** ([BS]) Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\rho \otimes_K \pi$  admet une norme invariante ;
- (ii) Il existe un objet  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  dans  $\text{MOD}_{L'/L}$  tel que :

$$\text{WD}(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)^{\text{ss}} = (r, N, V),$$

et une filtration admissible  $(\text{Fil}^i D_{L', \sigma})_{i, \sigma}$  stable par  $\text{Gal}(L'/L)$  sur  $D_{L'}$  telle que pour tout  $\sigma : L \hookrightarrow K$  :

$$\text{Fil}^i D_{L', \sigma} / \text{Fil}^{i+1} D_{L', \sigma} \neq 0 \iff i \in \{i_{1, \sigma}, \dots, i_{d+1, \sigma}\}.$$

On renvoie le lecteur au §1, [BS], pour l'introduction de la conjecture. Certains résultats concernant cette conjecture sont connus :

- si  $(r, N, V)$  est absolument irréductible (en particulier  $N = 0$ ), la conjecture est vraie (cf. théorème 5.2, [BS],) ;
- si  $(r, N, V)$  est absolument indécomposable, alors la condition (ii) est vraie si et seulement si le caractère central de  $\rho \otimes_K \pi$  est unitaire ; en particulier, (i) entraîne (ii) (cf. proposition 5.3, [BS]) ;
- si  $(r, N, V)$  est tel que  $N = 0$  et tel que  $r$  est non ramifiée et scindée sur  $K$ , alors (i) entraîne (ii) (cf. théorème 5.6, [BS]) ;
- si  $d = 1$ ,  $L = L' = \mathbb{Q}_p$ , et  $r$  n'est pas scalaire, la conjecture est vraie ([BB], [Co]).

Dans ce chapitre, nous montrons le théorème suivant :

**Théorème 1.2.** *Supposons  $K$  galoisien sur  $\mathbb{Q}_p$  et suffisamment gros tel que l'on ait la décomposition*

$$(r, N, V) = \bigoplus_{i=1}^s (r_i, N_i, V_i)$$

avec les  $(r_i, N_i, V_i)$  absolument indécomposables de dimension  $d_i$ . On considère les quatre conditions suivantes :

- (i)  $\rho \otimes_K \pi$  admet une norme invariante.

(ii) Il existe un objet  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  dans  $\text{MOD}_{L'/L}$  tel que :

$$WD(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)^{\text{ss}} = (r, N, V),$$

et une filtration admissible  $(\text{Fil}^i D_{L',\sigma})_{i,\sigma}$  stable par  $\text{Gal}(L'/L) \times \text{Gal}(K/\mathbb{Q}_p)$  sur  $D_{L'}$  telle que

$$\text{Fil}^i D_{L',\sigma} / \text{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \neq 0 \iff i \in \{i_{1,\sigma}, \dots, i_{d+1,\sigma}\}.$$

(iii) Posons  $(\varphi_i, N_i, \text{Gal}(L'/L), D_i) = \text{MOD}(r_i, N_i, V_i)$ . Pour un ordre convenable des  $D_i$  (voir §2.4), les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$[K : L] \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} \leq t_N(D_1),$$

⋮

$$[K : L] \sum_{j=1}^{d_1+\dots+d_{s-1}} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} \leq \sum_{i=1}^{s-1} t_N(D_i),$$

$$[K : L] \sum_{j=1}^{d+1} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} = \sum_{i=1}^s t_N(D_i) = t_N(D).$$

(iv) Le caractère central de  $\rho \otimes_K \pi$  est unitaire et la condition d'Emerton est satisfaite (voir §3.1).

Alors, on a l'implication et les équivalences :

$$(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv).$$

**Remarque 1.3.** L'existence de l'ordre dans (iii) et l'équivalence entre (ii) et (iii) donnent une réponse de la remarque 5.7, [BS].

Comme conséquence, on obtient (cf. corollaire 3.10) :

**Corollaire 1.4.** Avec les notations dans la conjecture 1.1, on a l'implication

$$(i) \Rightarrow (ii).$$

Introduisons maintenant les notations principales de ce chapitre.

Soit  $p$  un nombre premier. On fixe une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  de  $\mathbb{Q}_p$ , et aussi deux extensions finies  $L$  et  $K$  de  $\mathbb{Q}_p$  contenues dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  telles que  $[L : \mathbb{Q}_p] = |\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L, K)|$ . On note  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$  le groupe de Galois de  $L$  et  $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$  son groupe de Weil (qui est dense dans  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ ), et  $\text{rec} : W(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} L^\times$  l'isomorphisme de réciprocity de telle sorte que les Frobenius arithmétiques s'envoient sur les inverses des uniformisantes. Posons  $\mathcal{O}_L$  l'anneau des entiers de  $L$ ,  $k_L$  le corps résiduel de  $L$  et  $q = p^f = |k_L|$ . On note  $L_0 = \text{Frac}(W(\mathbb{F}_q))$  le plus grand sous-corps non ramifié de  $L$  et  $\varphi_0$  le Frobenius

sur  $L_0$ . On note  $\text{val}_p$  la valuation  $p$ -adique sur  $\overline{\mathbb{Q}}_p$  normalisée par  $\text{val}_p(p) = 1$  et on pose  $|x|_p = p^{-\text{val}_p(x)}$  si  $x \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ ; de même on pose  $\text{val}_L(x) = e \cdot \text{val}_p(x)$  et  $|x|_L = q^{-\text{val}_L(x)}$ , où  $e := [L : \mathbb{Q}_p]/f$  est l'indice de ramification de  $L$  sur  $\mathbb{Q}_p$ .

Fixons  $L'$  une extension finie galoisienne de  $L$ . On définit  $L'_0, k_{L'}, f', \varphi'_0, \text{val}_{L'}$  comme ci-dessus. Supposons  $[L'_0 : \mathbb{Q}_p] = |\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L'_0, K)|$ .

Si  $\mathbb{G}$  est un groupe réductif défini sur  $\mathbb{Q}_p$  et si  $G = \mathbb{G}(L)$  est le groupe des  $L$ -points rationnels de  $\mathbb{G}$ , on note  $\text{Rep}G$  la catégorie des  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ -représentations lisses de  $G$ . Si  $P$  est un sous-groupe parabolique de  $G$  avec  $M$  son quotient de Levi et  $N$  son radical unipotent, on définit les foncteurs suivants :

$$\text{ind}_P^G, \text{Ind}_P^G : \text{Rep}M \rightarrow \text{Rep}G,$$

$$r_P^G : \text{Rep}G \rightarrow \text{Rep}M.$$

(a) Soit  $(\sigma, W) \in \text{Rep}M$ , notons  $\text{ind}_P^G \sigma$  l'espace vectoriel des fonctions  $f : G \rightarrow W$  telles que

- $f(nmg) = \sigma(m)f(g)$ , si  $n \in N, m \in M$  et  $g \in G$ ,
- $f$  est invariante à droite par un sous-groupe ouvert de  $G$ .

Le groupe  $G$  opère par translation à droite et on obtient ainsi une représentation lisse de  $G$ . On pose  $\text{Ind}_P^G \sigma = \text{ind}_P^G(\sigma \delta_P^{1/2})$ , où  $\delta_P$  est le caractère module de  $P$ , c'est-à-dire, le caractère de  $M \cong P/N$  donné par :  $\delta_P(m) = [mN_0m^{-1} : N_0]$  pour un sous-groupe ouvert compact arbitraire  $N_0$  de  $N$ .

(b) Soit  $(\pi, V) \in \text{Rep}G$ , on note  $V_N$  le quotient de  $V$  par le sous-espace  $V(N)$  engendré par les éléments  $\pi(n)x - x$  ( $n \in N, x \in V$ ). On définit  $(r_P^G \pi, V_N) \in \text{Rep}M$  par

$$r_P^G(m)(v + V(N)) = \delta_P^{-1/2}(m)(\pi(m)v + V(N)), \quad m \in M, v \in V.$$

## 2 Rappels et compléments sur la conjecture

Dans ce paragraphe, on rappelle des constructions et la conjecture dans §4, [BS].

### 2.1 Quelques définitions

Rappelons que dans §4 [BS] sont définies deux catégories  $\text{WD}_{L'/L}$  et  $\text{MOD}_{L'/L}$  :

(i)  $\text{WD}_{L'/L}$  : la catégorie des  $K$ -représentations  $(r, N, V)$  du groupe de Weil-Deligne de  $L$  (§8, [De]) sur un  $K$ -espace vectoriel  $V$  de dimension finie telles que la restriction de  $r$  à  $W(\overline{\mathbb{Q}}_p/L')$  est non ramifiée;

(ii)  $\text{MOD}_{L'/L}$  (ou  $\text{MOD}_{L'/L, K}$  s'il y a risque de confusion sur  $K$ ) : la catégorie des quadruples  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  constitués par :

- un  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -module  $D$  libre de rang fini;
- un Frobenius  $\varphi : D \rightarrow D$ , c'est-à-dire une bijection  $\varphi$  telle que  $\varphi((l \otimes k) \cdot d) = (\varphi'_0(l) \otimes k) \cdot \varphi(d)$ , pour  $l \in L'_0, k \in K, d \in D$ ;
- un endomorphisme  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -linéaire  $N : D \rightarrow D$  vérifiant  $N\varphi = p\varphi N$ ;

– une action de  $\text{Gal}(L'/L)$  sur  $D$  commutant avec celles de  $\varphi$  et  $N$ , telle que  $g((l \otimes k) \cdot d) = (g(l) \otimes k) \cdot g(d)$ , pour  $g \in \text{Gal}(L'/L)$ ,  $l \in L'_0$ ,  $k \in K$ ,  $d \in D$  ;  
 les morphismes dans  $\text{MOD}_{L'/L}$  sont les homomorphismes  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -linéaires conservant les actions de  $\varphi$ ,  $N$  et  $\text{Gal}(L'/L)$ .

On a deux foncteurs ([BS] ou [Fo2])

$$\text{WD} : \text{MOD}_{L'/L} \rightarrow \text{WD}_{L'/L}$$

et

$$\text{MOD} : \text{WD}_{L'/L} \rightarrow \text{MOD}_{L'/L}$$

qui sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre. On rappelle la construction dans la suite.

*Construction de WD.* Soit  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  un objet de  $\text{MOD}_{L'/L}$ . D'abord, l'isomorphisme  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K \cong \prod_{\sigma'_0: L'_0 \hookrightarrow K} K$  induit un isomorphisme

$$(2.1.1) \quad D \cong \prod_{\sigma'_0: L'_0 \hookrightarrow K} D_{\sigma'_0}$$

avec  $D_{\sigma'_0} = (0, \dots, 0, 1_{\sigma'_0}, 0, \dots, 0)D$ . Choisissons un plongement  $\sigma'_0 : L'_0 \hookrightarrow K$  et posons  $V = D_{\sigma'_0}$ . Alors  $N$  induit un endomorphisme  $K$ -linéaire nilpotent sur  $V$  que l'on note encore  $N$ . Si  $w \in W(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$ , on définit  $r(w) = \bar{w} \circ \varphi^{-\alpha(w)}$  où  $\bar{w}$  désigne l'image de  $w$  dans  $\text{Gal}(L'/L)$  et  $\alpha(w) \in f\mathbb{Z}$  est l'unique entier tel que l'action induite de  $w$  sur  $\overline{\mathbb{F}_p}$  soit la  $\alpha(w)$ -puissance du Frobenius arithmétique  $x \mapsto x^p$ . On vérifie que  $r(w) : D \rightarrow D$  est  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -linéaire, et donc il induit un morphisme  $K$ -linéaire  $r(w) : V \rightarrow V$ . Ceci définit un objet de  $\text{WD}_{L'/L}$  que l'on note  $\text{WD}((\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D))$ . Remarquons que la représentation  $(r, N, V)$  est indépendante du choix de  $\sigma'_0$  mais à isomorphisme non canonique près (cf. lemme 2.2.1.2, [BM]).

*Construction de MOD.* Soit  $(r, N, V)$  un objet de  $\text{WD}_{L'/L}$ . En choisissant un plongement  $\sigma'_0 : L'_0 \hookrightarrow K$ , on pose

$$D = \bigoplus_{n=0}^{f'-1} V_{\sigma'_0 \circ \varphi'^{-n}},$$

où  $V_{\sigma'_0 \circ \varphi'^{-n}} = V$  est muni de l'action de  $L'_0$  via  $\sigma'_0 \circ \varphi'^{-n}$ , ce qui fait de  $D$  un  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -module libre. On définit les opérateurs  $\varphi$ ,  $N$  sur  $D$  par :

$$\begin{cases} \varphi|_V = r(\omega) : V_{\sigma'_0 \circ \varphi'^{1-f'}} \rightarrow V_{\sigma'_0} \\ \varphi|_{V_{\sigma'_0 \circ \varphi'^{-n}}} = \text{Id} : V_{\sigma'_0 \circ \varphi'^{-n}} \rightarrow V_{\sigma'_0 \circ \varphi'^{-n-1}} \quad \text{si } 0 \leq n \leq f' - 2 \end{cases}$$

où  $\omega$  est n'importe quel Frobenius géométrique dans  $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/L')$ , et

$$\begin{cases} N|_{V_{\sigma'_0}} = N|_V : V_{\sigma'_0} \rightarrow V_{\sigma'_0} \\ N|_{V_{\sigma'_0 \circ \varphi'^{-n}}} = p^n \varphi'^n \circ N|_V \circ \varphi'^{-n} : V_{\sigma'_0 \circ \varphi'^{-n}} \rightarrow V_{\sigma'_0 \circ \varphi'^{-n}} \quad \text{si } 1 \leq n \leq f' - 1. \end{cases}$$

Finalemment, pour  $g \in \text{Gal}(L'/L)$ , soit  $w \in W(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$  un relèvement de  $g$ , on définit l'action de  $g$  sur  $V_{\sigma'_0 \circ \varphi'_0{}^{-n}}$  par

$$g = r(w) \circ \varphi^{\alpha(w)} : V_{\sigma'_0 \circ \varphi'_0{}^{-n}} \rightarrow V_{\sigma'_0 \circ \varphi'_0{}^{-n-\alpha(w)}},$$

où, si  $n + \alpha(w) > f' - 1$  ou  $n + \alpha(w) < 0$ , on regarde  $V_{\sigma'_0 \circ \varphi'_0{}^{-n-\alpha(w)}}$  comme  $V_{\sigma'_0 \circ \varphi'_0{}^{-k}}$  avec  $k$  l'unique entier tel que

$$0 \leq k \leq f' - 1 \quad \text{et} \quad n + \alpha(w) \equiv k \pmod{f'}.$$

On vérifie que  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  ainsi défini est un objet de  $\text{MOD}_{L'/L}$  que l'on note  $\text{MOD}((r, N, V))$ .

**Remarque 2.1.** Soit  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  un objet de  $\text{MOD}_{L'/L}$  qui est absolument irréductible (donc  $N = 0$ ). Comme  $\varphi^{f'}$  est  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -linéaire et commute avec  $\text{Gal}(L'/L)$  et  $\varphi$ , on voit que  $\varphi^{f'}$  est scalaire à valeur dans  $K^\times$ .

Maintenant, soit  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  un objet de  $\text{MOD}_{L'/L}$ . On définit

$$t_N(D) = \frac{1}{[L : L_0]f'} \text{val}_L(\det_{L'_0}(\varphi^{f'}|_D)).$$

Posons  $D_{L'} = D \otimes_{L'_0} L'$  et pour  $\sigma : L \hookrightarrow K$ ,

$$D_{L',\sigma} = D_{L'} \otimes_{L' \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} (L' \otimes_{L,\sigma} K),$$

de sorte que l'on a l'isomorphisme  $D_{L'} \simeq \prod_{\sigma: L \hookrightarrow K} D_{L',\sigma}$ . Donc la donnée d'une filtration décroissante exhaustive séparée sur  $D_{L'}$  par des sous- $L' \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -modules  $(\text{Fil}^i D_{L'})_{i \in \mathbb{Z}}$  (pas forcément libres) stables sous l'action de  $\text{Gal}(L'/L)$  est équivalente à la donnée, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et tout  $\sigma : L \hookrightarrow K$ , d'un sous- $L' \otimes_{L,\sigma} K$ -module  $\text{Fil}^i D_{L',\sigma}$  de  $D_{L',\sigma}$  qui est stable par  $\text{Gal}(L'/L)$  (donc nécessairement libre) et qui vérifie  $\text{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \subset \text{Fil}^i D_{L',\sigma}$  pour tout  $i$  et tout  $\sigma$ , et  $\cup_{i \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^i D_{L',\sigma} = D_{L',\sigma}$ ,  $\cap_{i \in \mathbb{Z}} \text{Fil}^i D_{L',\sigma} = 0$  pour tout  $\sigma$ . Soit  $(\text{Fil}^i D_{L',\sigma})_{i \in \mathbb{Z}, \sigma: L \hookrightarrow K}$  une telle filtration. On définit

$$t_H(D_{L'}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\sigma: L \hookrightarrow K} \text{idim}_{L'}(\text{Fil}^i D_{L',\sigma} / \text{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma}).$$

La filtration est dite *admissible* si  $t_H(D_{L'}) = t_N(D)$  et si pour tout sous- $L'_0$ -espace vectoriel  $D'$  de  $D$  stable par  $\varphi$  et  $N$ , on a  $t_H(D'_{L'}) \leq t_N(D')$ , où  $D'_{L'}$  est muni de la filtration induite par  $D_{L'}$ . Par la proposition 3.1.1.5 de [BM] et la proposition 4.4.9 de [Fo1], pour que la filtration soit admissible, il suffit de vérifier l'égalité  $t_H(D_{L'}) = t_N(D)$  et l'inégalité  $t_H(D'_{L'}) \leq t_N(D')$  pour les sous- $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -modules  $D'$  qui sont stables par  $\varphi$ ,  $N$  et  $\text{Gal}(L'/L)$  (nécessairement libres), c'est-à-dire pour les *sous-objets* de  $D$  dans  $\text{MOD}_{L'/L}$ .

Si  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $G_n = \mathrm{GL}_n(L)$  et  $G = G_{d+1}$  où  $d \geq 1$  est un entier fixé. Une *partition* de l'entier  $n$  est une suite  $\alpha = (n_1, \dots, n_r)$  d'entiers positifs tels que  $n = n_1 + \dots + n_r$ . Étant donnée une telle partition, on note  $P_\alpha$  le sous-groupe de  $G_n$  formé par les matrices triangulaires supérieures par blocs, i.e.

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} G_{n_1} & * & \cdots & * \\ 0 & G_{n_2} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{n_r} \end{pmatrix}.$$

On note  $M_\alpha = M_{P_\alpha}$  son quotient de Levi et  $N_\alpha = N_{P_\alpha}$  son radical unipotent. Le groupe  $P_\alpha$  est appelé sous-groupe *parabolique standard* de  $G_n$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux partitions de  $n$ , on dit que  $\beta$  est une *sous-partition* de  $\alpha$  si  $M_\beta \subseteq M_\alpha$  (notation :  $\beta \leq \alpha$ ).

On fixe un choix de  $q^{1/2}$  dans  $\overline{\mathbb{Q}_p}$ . À une représentation  $(r, N, V)$  de dimension  $d+1$  telle que  $r$  est semi-simple, la correspondance de Langlands locale permet d'associer une représentation irréductible lisse admissible  $\pi^{\mathrm{unit}}$  de  $G$  sur  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  normalisée de telle sorte que son caractère central soit  $\det(r, N, V) \circ \mathrm{rec}^{-1}$ . Notons que la définition dépend du choix de  $q^{1/2}$ . Dans [BS], cette correspondance est modifiée comme suit :

- si  $\pi^{\mathrm{unit}}$  est générique (cf. §2.3, [Ku]), alors  $\pi^{\mathrm{unit}} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}} |\det|_L^{-d/2}$  admet un unique modèle sur  $K$  qui ne dépend pas du choix de  $q^{1/2}$ ; on le note  $\pi$ ;
- si  $\pi^{\mathrm{unit}}$  n'est pas générique, elle s'écrit comme l'unique quotient d'une induction parabolique

$$\mathrm{Ind}_{P_\alpha}^G L(b_1, \tau_1) \otimes \cdots \otimes L(b_s, \tau_s),$$

où  $\alpha = (b_1 n_1, \dots, b_s n_s)$  est une partition de  $d+1$ , les  $\tau_i$  sont des représentations irréductibles cuspidales de  $\mathrm{GL}_{n_i}(L)$  et les  $L(b_i, \tau_i)$  sont des Steinberg généralisés, c'est-à-dire,  $L(b_i, \tau_i)$  est l'unique quotient irréductible de

$$\mathrm{Ind}_{P_{\alpha_i}}^{G_{b_i n_i}} \tau_i \otimes \tau_i | \det|_L \otimes \cdots \otimes \tau_i | \det|_L^{b_i - 1}$$

avec  $\alpha_i$  la partition  $(n_i, \dots, n_i)$  de  $b_i n_i$  (cf. §3.1, [Cl]). On a le résultat suivant :

**Lemme 2.2.** (lemme 4.2, [BS]) *La représentation*

$$(\mathrm{Ind}_{P_\alpha}^G L(b_1, \tau_1) \otimes \cdots \otimes L(b_s, \tau_s)) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}} |\det|_L^{-d/2}$$

*admet un unique modèle sur  $K$  qui ne dépend pas du choix de  $q^{1/2}$ . On le note  $\pi$ .*

Si l'on suppose que  $K$  est gros au sens où tous les  $L(b_i, \tau_i)$  sont fixés par  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)$ , alors on peut définir  $\pi$  de manière plus directe (dans les deux cas, cf. théorème 2.3.1, [Ku]). En fait, si l'on pose

$$\mathcal{L}(b_i, \tau_i) = L(b_i, \tau_i) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}} |\det|_L^{(1-b_i n_i)/2},$$



alors  $\mathcal{L}(b_i, \tau_i)$  ne dépend pas du choix de  $q^{1/2}$  et est fixé par  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)$ . D'après la proposition 3.2 de [Cl], elle admet un modèle unique défini sur  $K$  que l'on note  $\pi_i$ . Comme la représentation originale s'écrit sous la forme

$$\text{ind}_{P_\alpha}^G \mathcal{L}(b_1, \tau_1) \otimes \mathcal{L}(b_2, \tau_2) | \det |_{\overline{L}}^{-b_1 n_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(b_s, \tau_s) | \det |_{\overline{L}}^{-\sum_{j=1}^{s-1} b_j n_j},$$

on obtient ainsi le modèle  $\pi$  en posant

$$\pi = \text{ind}_{P_\alpha}^G \pi_1 \otimes \pi_2 | \det |_{\overline{L}}^{-b_1 n_1} \otimes \cdots \otimes \pi_s | \det |_{\overline{L}}^{-\sum_{j=1}^{s-1} b_j n_j}.$$

## 2.2 La conjecture

Conservons les notations précédentes. On fixe :

- (i) un objet  $(r, N, V)$  de  $\text{WD}_{L'/L}$  de dimension  $d+1$  où  $r$  est semi-simple ;
- (ii) pour tout  $\sigma : L \hookrightarrow K$ , un ensemble de  $d+1$  entiers  $i_{1,\sigma} < \cdots < i_{d+1,\sigma}$ .

À  $(r, N, V)$  dans (i) on associe la représentation lisse  $\pi$  comme au §3.2. Pour des  $i_{j,\sigma}$  dans (ii), on pose

$$a_{j,\sigma} = -i_{d+2-j,\sigma} - (j-1)$$

et on note  $\rho$  l'unique représentation  $\mathbb{Q}_p$ -rationnelle de  $G$  dont le plus haut poids est  $\psi : \text{diag}(x_1, \dots, x_{d+1}) \mapsto \prod_{j=1}^{d+1} \prod_{\sigma: L \hookrightarrow K} x_j^{a_{j,\sigma}}$  vis-à-vis du sous-groupe des matrices triangulaires inférieures (cf. §2, [BS]).

Si  $(r, N, V) \in \text{WD}_{L'/L}$ , on note  $(r, N, V)^{\text{ss}} \in \text{WD}_{L'/L}$  sa  $F$ -semi-simplification (§8.5, [De]).

La conjecture ci-dessous est proposée dans [BS] (conjecture 4.3) :

**Conjecture 2.3.** Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\rho \otimes_K \pi$  admet une norme invariante, i.e. une norme  $p$ -adique  $\| \cdot \|$  telle que  $\|gv\| = \|v\|$  pour  $g \in G$  et  $v \in \rho \otimes_K \pi$  ;
- (ii) il existe un objet  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  dans  $\text{MOD}_{L'/L}$  tel que

$$\text{WD}(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)^{\text{ss}} = (r, N, V),$$

et il existe une filtration admissible  $(\text{Fil}^i D_{L',\sigma})_{i,\sigma}$  stable par  $\text{Gal}(L'/L)$  sur  $D_{L'}$  telle que

$$\text{Fil}^i D_{L',\sigma} / \text{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \neq 0 \iff i \in \{i_{1,\sigma}, \dots, i_{d+1,\sigma}\}.$$

**Proposition 2.4.** Avec les notations de la conjecture 2.3, la condition (ii) ne dépend pas du choix de  $L'$ . Plus précisément, si  $L''$  est une autre extension finie galoisienne de  $L$  telle que

$$[L'' : \mathbb{Q}_p] = |\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(L'', K)| \quad \text{et} \quad (r, N, V) \in \text{WD}_{L''/L},$$

alors la condition (ii) est vraie pour  $L'$  si et seulement si elle est vraie pour  $L''$ .

*Démonstration.* Évidemment, on peut supposer  $L' \subset L''$ .

(a) Soit  $(\varphi', N', \text{Gal}(L'/L), D')$  un objet de  $\text{MOD}_{L'/L}$ . On pose

$$D'' = L''_0 \otimes_{L'_0} D',$$

et on définit de manière évidente  $\varphi'', N''$  et l'action de  $\text{Gal}(L''/L)$  sur  $D''$ . Alors on vérifie facilement que  $(\varphi'', N'', \text{Gal}(L''/L), D'')$  est un objet de  $\text{MOD}_{L''/L}$ . De plus, si

$$\text{WD}(\varphi', N', \text{Gal}(L'/L), D')^{\text{ss}} = (r, N, V)$$

et s'il existe une filtration  $(\text{Fil}^i D'_{L', \sigma})_{i, \sigma}$  sur  $D'_{L'}$  comme dans (ii), on munit  $D''$  de la filtration induite :  $\text{Fil}^i D''_{L'', \sigma} = L'' \otimes_{L'} \text{Fil}^i D'_{L', \sigma}$ . On vérifie que cette filtration est stable par  $\text{Gal}(L''/L)$  et est admissible (en fait on a  $t_N(D') = t_N(D'')$  et  $t_H(D'_{L'}) = t_H(D''_{L''})$ ). Choisissons un plongement  $\sigma'_0 : L'_0 \hookrightarrow K$  et un plongement  $\sigma''_0 : L''_0 \hookrightarrow K$  tels que  $\sigma''_0$  prolonge  $\sigma'_0$ . Alors l'application  $x \otimes k \mapsto (1 \otimes x) \otimes k$  induit un isomorphisme entre  $D'_{\sigma'_0}$  et  $D''_{\sigma''_0}$  (cf. (2.1.1)) qui commute à  $r$  et à  $N$ . On a donc  $\text{WD}(D') \simeq \text{WD}(D'')$ .

(b) Soit  $(\varphi'', N'', \text{Gal}(L''/L), D'')$  un objet de  $\text{MOD}_{L''/L}$  et  $(\text{Fil}^i D''_{L'', \sigma})_{i, \sigma}$  une filtration sur  $D''_{L''}$  comme dans (ii). Posons  $D' = D''^{\text{Gal}(L''/L')}$  que l'on munit des structures induites : action de  $\text{Gal}(L'/L)$ , opérateurs  $\varphi'$  et  $N'$ , et filtration sur  $D_{L'}$ . On vérifie que  $(\varphi', N', \text{Gal}(L'/L), D')$  satisfait à (ii) et on a  $L''_0 \otimes_{L'_0} D''^{\text{Gal}(L''/L')} = D''$  par Hilbert 90.  $\square$

**Proposition 2.5.** *Soit  $K'$  une extension finie galoisienne de  $K$  contenue dans  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ . Alors*

- (1) *la condition (i) est vraie pour  $K$  si et seulement si (i) est vraie pour  $K'$  ;*
- (2) *la condition (ii) est vraie pour  $K$  si et seulement si (ii) est vraie pour  $K'$  et si la filtration peut être choisie de telle sorte qu'elle soit stable sous l'action de  $\text{Gal}(K'/K)$ .*

*Démonstration.* (1) est immédiat.

(2) La condition est évidemment nécessaire. Soit  $(\varphi', N', \text{Gal}(L'/L), D')$  un objet de  $\text{MOD}_{L'/L, K'}$  vérifiant (ii) où  $D'$  est un  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K'$ -module. Posons  $D = D'^{\text{Gal}(K'/K)}$  qui est un  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -module. Comme  $\varphi', N'$  et  $\text{Gal}(L'/L)$  commutent avec  $\text{Gal}(K'/K)$ , on obtient un objet induit  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  de  $\text{MOD}_{L'/L, K}$ . De plus, comme la filtration sur  $D'_{L'}$  est stable par  $\text{Gal}(K'/K)$ , elle induit une filtration sur  $D_{L'}$  qui est bien admissible. Comme

$$\text{WD}(D)^{\text{ss}} \otimes_K K' \simeq \text{WD}(D \otimes_K K')^{\text{ss}} = (r, N, V) \otimes_K K'$$

en tant qu'objets de  $\text{WD}_{L'/L, K'}$ , on a l'isomorphisme  $\text{WD}(D)^{\text{ss}} \cong (r, N, V)$  en tant qu'objets de  $\text{WD}_{L'/L, K}$  par Hilbert 90.  $\square$

**Remarque 2.6.** On verra plus tard que (cf. §5.3, §5.4) si (ii) est vraie pour  $K'$ , alors on peut toujours choisir une autre filtration admissible qui est stable par  $\text{Gal}(K'/K)$ . On en déduit que (ii) est vraie pour  $K'$  si et seulement si elle est vraie pour  $K$ .

### 3 Énoncé du théorème principal

Dans ce paragraphe, après quelques préparations, on énonce notre théorème principal.

#### 3.1 La condition d'Emerton

On rappelle un lemme d'Emerton dans cette section. On renvoie le lecteur à [Em1] ou [Em3] pour la définition d'une représentation localement analytique.

Soit  $P$  un sous-groupe parabolique de  $G$  avec  $N$  son radical unipotent et  $M$  son quotient de Levi. D'après [Em3], on sait définir un foncteur "module de Jacquet"  $J_P$ , de la catégorie des représentations localement analytiques de  $G$  dans la catégorie des représentations localement analytiques de  $M$ , ayant la propriété suivante :

**Proposition 3.1.** *Soient  $\rho$  une  $K$ -représentation algébrique irréductible de  $G$  et  $\pi$  une  $K$ -représentation admissible lisse de  $G$ . Alors il existe un isomorphisme canonique de  $M$ -représentations*

$$J_P(\rho \otimes_K \pi) \xrightarrow{\sim} \rho^N \otimes_K (r_P^G \pi) \delta_P^{1/2},$$

où  $\rho^N$  désigne l'espace vectoriel des  $N$ -invariants de  $\rho$  vu comme représentation de  $M$ .

*Démonstration.* Voir la proposition 4.3.6, [Em3]. □

On note  $Z(M)$  le centre de  $M$  ; si  $N_0$  est un sous-groupe ouvert compact de  $N$ , on pose

$$Z(M)^+ = \{z \in Z(M) \mid zN_0z^{-1} \subset N_0\}.$$

**Lemme 3.2.** (Emerton) *Conservons les notations ci-dessus. Soient  $V$  une  $K$ -représentation localement analytique de  $G$  et  $\chi : Z(M) \rightarrow K^\times$  un caractère localement analytique de  $Z(M)$ . On considère les deux conditions :*

- (1)  $V$  admet une norme invariante ;
- (2) si  $\text{Hom}_{Z(M)}(\chi, J_P(V)) \neq 0$ , alors

$$|\chi(z) \delta_P^{-1}(z)|_p \leq 1, \quad \forall z \in Z(M)^+.$$

Alors (1) entraîne (2).

*Démonstration.* Voir le lemme 1.6 de [Em2] ou le lemme 4.4.2 de [Em3]. □

**Définition 3.3.** On dit que  $V$  satisfait à la *condition d'Emerton* si pour tout  $P$ ,  $N_0$  et  $\chi$  comme ci-dessus la condition (2) du lemme 3.2 est vérifiée.

**Remarque 3.4.** Comme tout sous-groupe parabolique de  $G$  est conjugué à un parabolique standard, on peut supposer que  $P$  est standard dans la définition 3.3. Aussi on peut supposer  $N_0 = N \cap M_{d+1}(\mathcal{O}_L)$ , où  $M_{d+1}(\mathcal{O}_L)$  est l'anneau des matrices carrées  $(d+1) \times (d+1)$  à coefficients dans  $\mathcal{O}_L$ .

### 3.2 L'ordre des $(r_i, N_i, V_i)$

Rappelons que l'on a fixé un objet  $(r, N, V)$  de  $\text{WD}_{L'/L}$  de dimension  $d + 1$  où  $r$  est semi-simple. Supposons  $K$  suffisamment gros pour pouvoir écrire

$$(3.2.1) \quad (r, N, V) = \bigoplus_{i=1}^s (r_i, N_i, V_i)$$

avec les  $(r_i, N_i, V_i)$  absolument indécomposables de dimension  $d_i$ . Posons pour  $1 \leq i \leq s$

$$(\varphi_i, N_i, \text{Gal}(L'/L), D_i) = \text{MOD}((r_i, N_i, V_i))$$

qui est absolument indécomposable dans  $\text{MOD}_{L'/L}$ . Posons  $D_{i,0} = \text{Ker}(N_i : D_i \rightarrow D_i)$  et  $\varphi_{i,0} = \varphi_i|_{D_{i,0}}$ , donc  $D_i$  s'écrit sous la forme (notons que  $(r_i, N_i, V_i)$  correspond à  $L(b_i, \tau_i)$ , cf. §2)

$$D_i = D_{i,0} \oplus D_{i,0}(1) \oplus \cdots \oplus D_{i,0}(b_i - 1),$$

où  $D_{i,0}(n) = D_{i,0}$  avec  $\varphi_i|_{D_{i,0}(n)} = p^n \varphi_{i,0}$ ,  $N_i|_{D_{i,0}} = 0$  et  $N_i$  envoie  $D_{i,0}(n)$  dans  $D_{i,0}(n-1)$  par l'identité pour  $n > 0$ . On dit que  $D_i$  et  $D_j$  sont de même type si

$$\text{Hom}_{\varphi, \text{Gal}(L'/L)}(D_i, D_j) \neq 0$$

où  $\text{Hom}_{\varphi, \text{Gal}(L'/L)}(D_i, D_j)$  désigne le groupe des homomorphismes  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -linéaires de  $D_i$  dans  $D_j$  conservant les actions de  $\varphi$  et de  $\text{Gal}(L'/L)$ . Remarquons que si  $D_i$  et  $D_j$  sont de même type, alors il existe un entier  $l \in \mathbb{Z}$  tel que  $D_{j,0} \simeq D_{i,0}(l)$  comme  $(\varphi, \text{Gal}(L'/L))$ -modules.

On choisit un ordre sur les  $\{(r_i, N_i, V_i), 1 \leq i \leq s\}$  de telle sorte que (toujours possible) :

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} \{1, \dots, s\} &= H_1 \sqcup H_2 \sqcup \cdots \sqcup H_v \\ &= \{1, \dots, s_1\} \sqcup \{s_1 + 1, \dots, s_2\} \sqcup \cdots \sqcup \{s_{v-1} + 1, \dots, s\} \end{aligned}$$

avec  $v \geq 1$  un entier, vérifiant les conditions suivantes :

- $k_1, k_2 \in H_i$  si et seulement s'il existe  $j_1, \dots, j_m$  tels que  $D_{k_1}$  et  $D_{j_1}, D_{j_i}$  et  $D_{j_{i+1}}$  ( $1 \leq i \leq m-1$ ),  $D_{j_m}$  et  $D_{k_2}$  sont de même type ;
- pour  $i$  fixé, si  $k_1, k_2 \in H_i$ ,  $k_1 \neq k_2$  et  $D_{k_1,0}(l) \simeq D_{k_2,0}$  avec  $l > 0$ , alors  $k_1 < k_2$  ;
- si  $D_{k_1,0} \simeq D_{k_2,0}$ , et  $b_{k_1} < b_{k_2}$ , alors  $k_1 < k_2$  ;
- posons  $M_i = \bigoplus_{k \in H_i} D_k$  et  $M_j = \bigoplus_{k \in H_j} D_k$  si  $i \neq j$ , alors  $i < j$  dès que  $t_N(M_i)/\text{rg}_{L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} M_i < t_N(M_j)/\text{rg}_{L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} M_j$ .

**Proposition 3.5.** *Choisissons un ordre sur les  $(r_i, N_i, V_i)$  comme précédemment et soient  $L(b_i, \tau_i)$  les représentations définies dans §2.2. Alors la condition "ne précède pas" est vérifiée (définition 1.2.4, [Ku]).*

*Démonstration.* Supposons l'énoncé faux, et prenons  $i < j$  tels que  $L(b_i, \tau_i)$  précède  $L(b_j, \tau_j)$ . Alors  $\tau_i(l) = \tau_i | \det |^l_L \simeq \tau_j$  pour un entier  $l > 0$  tel que  $l + b_j > b_i$ . L'énoncé s'en déduit par la correspondance

$$L(b_i, \tau_i) \leftrightarrow (r_i, N_i, V_i) \leftrightarrow D_i.$$

Plus précisément, par

$$\tau_i | \det |^l_L \leftrightarrow D_{i,0}(b_i - 1 - l), \quad \tau_j \leftrightarrow D_{j,0}(b_j - 1),$$

on obtient

$$D_{i,0} \simeq D_{j,0}((l + b_j - b_i)),$$

ce qui contredit  $i < j$  puisqu'on a  $l + b_j - b_i > 0$ . □

### 3.3 Théorème principal

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

**Théorème 3.6.** *Supposons  $K$  galoisien sur  $\mathbb{Q}_p$  et suffisamment gros tel que l'on ait la décomposition*

$$(r, N, V) = \bigoplus_{i=1}^s (r_i, N_i, V_i)$$

avec les  $(r_i, N_i, V_i)$  absolument indécomposables de dimension  $d_i$ . On considère les quatre conditions suivantes :

- (i)  $\rho \otimes_K \pi$  admet une norme invariante.
- (ii) Il existe un objet  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  dans  $\text{MOD}_{L'/L}$  tel que :

$$WD(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)^{\text{ss}} = (r, N, V),$$

et il existe une filtration admissible  $(\text{Fil}^i D_{L',\sigma})_{i,\sigma}$  stable par  $\text{Gal}(L'/L) \times \text{Gal}(K/\mathbb{Q}_p)$  sur  $D_{L'}$  telle que

$$\text{Fil}^i D_{L',\sigma} / \text{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \neq 0 \iff i \in \{i_{1,\sigma}, \dots, i_{d+1,\sigma}\}.$$

- (iii) Avec l'ordre des  $D_i$  comme au §2.4, les inégalités suivantes sont vérifiées

$$[K : L] \sum_{j=1}^{d_1} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} \leq t_N(D_1),$$

⋮

$$[K : L] \sum_{j=1}^{d_1+\dots+d_{s-1}} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} \leq \sum_{i=1}^{s-1} t_N(D_i),$$

$$[K : L] \sum_{j=1}^{d+1} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} = \sum_{i=1}^s t_N(D_i) = t_N(D).$$

(iv) Le caractère central de  $\rho \otimes_K \pi$  est unitaire et  $V$  satisfait à la condition d'Emerton. Alors, on a les implications et les équivalences :

$$(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv).$$

**Remarque 3.7.** (1) L'implication “(ii)  $\Rightarrow$  (iii)” découle de la définition d'admissibilité.

(2) L'implication “(i)  $\Rightarrow$  (iv)” est une conséquence du lemme 3.2 et de la proposition 5.1 de [BS].

**Remarque 3.8.** Si l'on pose  $b = b_1 + \dots + b_s$ ,

$$D'_1 = D_{1,0}, \dots, D'_{b_1} = D_{1,0}(b_1 - 1), \dots, D'_b = D_{s,0}(b_s - 1),$$

et  $d'_i = \text{rg}_{L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} D'_i$ , alors pour toute permutation  $\nu \in S_b$ , on a

$$\begin{aligned} [K : L] \sum_{j=1}^{d'_{\nu(1)}} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} &\leq t_N(D'_{\nu(1)}), \\ &\vdots \\ [K : L] \sum_{j=1}^{d'_{\nu(1)} + \dots + d'_{\nu(b-1)}} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} &\leq \sum_{i=1}^{b-1} t_N(D'_{\nu(i)}), \\ [K : L] \sum_{j=1}^{d+1} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} &= \sum_{i=1}^b t_N(D'_{\nu(i)}) = t_N(D). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Ceci résulte de l'ordre des  $(r_i, N_i, V_i)$  (cf. §2.4). Plus précisément, la condition (iii) du théorème 3.6 dit que le polygone passant l'origine et les points  $(\sum_{i=1}^k d_i, \sum_{i=1}^k t_N(D_i))_{1 \leq k \leq s}$  est au-dessus de celui passant l'origine et les points  $(\sum_{i=1}^k d_i, [K : L] \sum_{j=1}^{d_1 + \dots + d_k} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma})_{1 \leq k \leq s}$ , et l'ordre des  $D_i$  que l'on a choisi implique que cela reste vrai pour les autres ordres des  $D_i$ . Enfin, en utilisant le corollaire 5.25 (plus loin) à plusieurs reprises, l'énoncé s'en déduit.  $\square$

**Remarque 3.9.** D'après le théorème 3.6, la conjecture 2.3 se “réduit” à l'implication “(iv)  $\Rightarrow$  (i)” (en supposant  $K$  suffisamment gros). On a un résultat analogue dans le cas complexe (cf. théorème 4.4.6, [Ca]).

**Corollaire 3.10.** Avec les notations de la conjecture 2.3, on a l'implication

$$(i) \Rightarrow (ii).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 3.6 et de la proposition 2.5.  $\square$

## 4 Preuve de (iii) $\Leftrightarrow$ (iv)

Dans ce paragraphe, on prouve l'équivalence (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) du théorème 3.6 (sous l'hypothèse que  $K$  est suffisamment gros). Conservons les notations précédentes :  $G = \mathrm{GL}_{d+1}(L)$ ,  $d_i = b_i n_i$ ,  $\alpha = (d_1, \dots, d_s)$ ,  $\tau_i$  est une représentation cuspidale irréductible de  $G_{n_i}$ ,  $L(b_i, \tau_i)$  est le Steinberg généralisé,  $P = P_\alpha$  est le sous-groupe parabolique standard correspondant à la partition  $\alpha$  avec  $N_\alpha$  son radical unipotent et  $M_\alpha$  son quotient de Levi,  $\pi$  est l'unique modèle sur  $K$  de la représentation

$$\mathrm{Ind}_{P_\alpha}^G L(b_1, \tau_1) \otimes \cdots \otimes L(b_s, \tau_s) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} |\det|_L^{-d/2},$$

$\rho$  est la représentation rationnelle de  $G$  associée aux entiers  $\{a_{j,\sigma}\}_{j,\sigma}$  et  $\psi$  son plus haut poids. On note  $\tau = L(b_1, \tau_1) \otimes \cdots \otimes L(b_s, \tau_s)$  et on fixe  $Q = P_\beta$  un parabolique standard de  $G$  où  $\beta = (m_1, \dots, m_r)$  est une partition de  $d+1$ .

### 4.1 Le foncteur $r_Q^G \circ \mathrm{Ind}_P^G$

Dans cette section, on trouve une condition équivalente pour qu'un caractère  $\chi$  de  $Z(M_\beta)$  soit tel que

$$\mathrm{Hom}_{Z(M_\beta)}(\chi, r_Q^G \circ \mathrm{Ind}_P^G(\tau)) \neq 0.$$

Commençons par le lemme suivant :

**Lemme 4.1.** *Soient  $l = km$  et  $\tau'$  une représentation cuspidale irréductible de  $G_m$ . Si  $\gamma = (l_1, \dots, l_n)$  est une partition de  $l$ , alors  $r_{P_\gamma}^{G_l}(L(k, \tau')) \neq 0$  si et seulement si  $m|l_i$  pour tout  $i$ . Si cette dernière condition est satisfaite, alors  $r_{P_\gamma}^{G_l}(L(k, \tau'))$  est irréductible et est égal à*

$$L(p_n, \tau' | \det|_L^{p_1 + \cdots + p_{n-1}}) \otimes \cdots \otimes L(p_1, \tau'),$$

où  $p_i = l_i/m$ . Son caractère central est égal à la restriction de

$$(\chi(\tau') | \det|_L^{p_1 + \cdots + p_{n-1}} \otimes \cdots \otimes \chi(\tau') | \det|_L^{k-1}) \otimes \cdots \otimes (\chi(\tau') \otimes \cdots \otimes \chi(\tau') | \det|_L^{p_1-1})$$

à  $Z(M_\gamma)$ , où  $\chi(\tau')$  désigne le caractère central de  $\tau'$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence des propositions 1.5 et 9.5 de [Ze].  $\square$

Maintenant posons  $\gamma = (\underbrace{n_1, \dots, n_1}_{b_1 \text{ fois}}, \underbrace{n_2, \dots, n_2}_{b_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{n_s, \dots, n_s}_{b_s \text{ fois}})$  la partition de  $d+1$ ,

et

$$\chi_\gamma = (\chi(\tau_1) \otimes \cdots \otimes \chi(\tau_1) | \det|_L^{b_1-1}) \otimes \cdots \otimes (\chi(\tau_s) \otimes \cdots \otimes \chi(\tau_s) | \det|_L^{b_s-1}).$$

Alors  $\chi_\gamma$  est un caractère lisse de  $Z(M_\gamma)$  dont la restriction à  $Z(M_\alpha)$  est le caractère central de  $\tau$ . Posons  $W \simeq S_{d+1}$  le groupe de Weyl de  $G$ ,  $P_0 = P_{(1, \dots, 1)}$  et

$$W^{\alpha, \beta} = \{w \in W | w(M_\alpha \cap P_0)w^{-1} \subset P_0, w^{-1}(M_\beta \cap P_0)w \subset P_0\}.$$

Si  $w \in W^{\alpha, \beta}$  et si l'on pose  $\alpha' = \alpha \cap w^{-1}\beta w$  (cf. §1.2, [Ze]), alors  $\alpha' \leq \alpha$ . Si de plus  $\gamma \leq \alpha'$ , i.e.  $M_\gamma \subseteq M_{\alpha'}$ , on a  $Z(M_{\alpha'}) \subseteq Z(M_\gamma)$ , via lequel on peut voir  $\chi_\gamma$  comme un caractère de  $Z(M_{\alpha'})$ . De même on voit  $\chi_\gamma^{w^{-1}}$  comme un caractère de  $Z(M_{\beta'})$ , où  $\beta' := w\alpha w^{-1} \cap \beta$  et  $\chi_\gamma^{w^{-1}}(z) := \chi_\gamma(w^{-1}zw)$  pour  $z \in Z(M_\gamma)$ .

**Proposition 4.2.** (1) Si  $P = Q$  (donc  $\alpha = \beta$ ), on a  $\text{Hom}_{Z(M_\alpha)}(\chi_\gamma, r_P^G \circ \text{Ind}_P^G(\tau)) \neq 0$ .

(2)  $\text{Hom}_{Z(M_\beta)}(\chi, r_Q^G \circ \text{Ind}_P^G(\tau)) \neq 0$  si et seulement s'il existe une permutation  $w \in W^{\alpha, \beta}$  telle que

$$\gamma \leq \alpha \cap w^{-1}\beta w \quad \text{et} \quad \chi = \chi_\gamma^{w^{-1}}|_{Z(M_\beta)}.$$

*Démonstration.* (1) est un cas spécial de (2) en posant  $w = 1$ , et (2) se déduit du lemme 4.1 ci-dessus, et du théorème 1.2 et de la proposition 1.6 de [Ze].  $\square$

Vu la définition de  $\rho$ , on considère aussi les sous-groupes paraboliques inférieurs. Posons

$$w_0 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in \text{GL}_{d+1}(L),$$

et  $Q^* = w_0 Q w_0^{-1}$ ,  $N_\beta^* = w_0 N_\beta w_0^{-1}$ ,  $M_\beta^* = w_0 M_\beta w_0^{-1}$ . D'après la proposition 4.2, on obtient

**Corollaire 4.3.** (1) Si  $P = Q$ , on a  $\text{Hom}_{Z(M_\alpha^*)}(\chi_\gamma^{w_0} \psi \delta_{P^*}^{1/2} | \det|_L^{-d/2}, J_{P^*}(\rho \otimes \pi)) \neq 0$ .

(2)  $\text{Hom}_{Z(M_\beta^*)}(\chi, J_{Q^*}(\rho \otimes \pi)) \neq 0$  si et seulement s'il existe  $w \in W^{\alpha, \beta}$  tel que

$$\gamma \leq \alpha \cap w^{-1}\beta w \quad \text{et} \quad \chi = (\chi_\gamma^{w^{-1}w_0} \psi \delta_{Q^*}^{1/2} | \det|_L^{-d/2})|_{Z(M_\beta^*)}.$$

*Démonstration.* Ce corollaire se déduit de la proposition 4.2 et des faits suivants :

– d'après la proposition 3.1,

$$J_{Q^*}(\rho \otimes \pi) \simeq \rho^{N_\beta^*} \otimes (r_{Q^*}^G \pi) \delta_{Q^*}^{1/2} = \rho^{N_\beta^*} \otimes (r_{Q^*}^G \circ \text{Ind}_P^G \tau) | \det|_L^{-d/2} \delta_{Q^*}^{1/2};$$

–  $\rho^{N_\beta^*}$  est une représentation algébrique irréductible de  $M_\beta^*$  dont le caractère central est la restriction de  $\psi$  à  $Z(M_\beta^*)$ ;

– si  $\sigma \in \text{Rep}G$ , alors  $\text{Hom}_{Z(M_\beta)}(\chi, r_Q^G(\sigma)) \neq 0$  si et seulement si  $\text{Hom}_{Z(M_\beta^*)}(\chi^{w_0}, r_{Q^*}^G(\sigma)) \neq 0$ .

$\square$

## 4.2 La preuve

*Démonstration de (iii)  $\Rightarrow$  (iv) :* D'abord par la proposition 5.1 de [BS], le caractère central de  $\rho \otimes_K \pi$  est unitaire.



Posons  $N_0^* = N_\beta^* \cap M_{d+1}(\mathcal{O}_L) \subset N_\beta^*$ ,  $Z(M_\beta^*)^+ = \{z \in Z(M_\beta^*) \mid zN_0^*z^{-1} \subset N_0^*\}$ . Soit  $w \in W^{\alpha,\beta}$  tel que  $\gamma \leq \alpha \cap w^{-1}\beta w$ . D'après le corollaire 4.3 et la remarque 3.4, il suffit de prouver :

$$(4.2.1) \quad \text{val}_p(\chi_\gamma^{w^{-1}w_0\psi\delta_{Q^*}^{-1/2}} \mid \det|_L^{-d/2}(z)) \geq 0, \quad \forall z \in Z(M_\beta^*)^+.$$

On récrit  $\chi_\gamma^{w^{-1}}|_{Z(M_\beta)}$  sous la forme

$$\chi'_1 \otimes \cdots \otimes \chi'_r$$

avec  $\chi'_i : Z(G_{m_i}) \rightarrow K^\times$ . Soit  $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r$ , on pose (rappelons que  $\beta = (m_1, \dots, m_r)$ )

$$z = z(t_1, \dots, t_r) = \text{diag}(p^{t_1} \mathbb{1}_{m_r}, \dots, p^{t_r} \mathbb{1}_{m_1}),$$

où  $\mathbb{1}_{m_i}$  désigne la matrice identité d'ordre  $m_i$ . Alors  $z \in Z(M_\beta^*)^+$  et on voit qu'il suffit de vérifier (4.2.1) pour  $z \in Z(M_\beta^*)^+$  de cette forme.

On calcule  $\text{val}_p(\chi_\gamma^{w^{-1}w_0}(z))$ ,  $\text{val}_p(\psi(z))$ ,  $\text{val}_p(\delta_{Q^*}^{-1/2}(z))$  et  $|\det|_L^{-d/2}$  respectivement.

(a) Évidemment on a

$$\text{val}_p(\chi_\gamma^{w^{-1}w_0}(z)) = \sum_{i=1}^r t_{r+1-i} (\text{val}_p(\chi'_i(p\mathbb{1}_{m_i})))$$

et

$$\text{val}_p(|\det(z)|_L^{-d/2}) = \frac{d}{2} [L : \mathbb{Q}_p] \sum_{i=1}^r m_i t_{r+1-i}.$$

(b) Par définition de  $\rho$ , on a

$$\begin{aligned} \text{val}_p(\psi(z)) &= t_1 \left( \sum_{j=1}^{m_r} \sum_{\sigma} a_{j,\sigma} \right) + \cdots + t_r \left( \sum_{j=m_r+\cdots+m_2+1}^{d+1} \sum_{\sigma} a_{j,\sigma} \right) \\ &= -t_1 \sum_{j=1}^{m_r} \sum_{\sigma} i_{d+2-j,\sigma} - \cdots - t_r \sum_{j=m_r+\cdots+m_2+1}^{d+1} \sum_{\sigma} i_{d+2-j,\sigma} \\ &\quad - [L : \mathbb{Q}_p] t_1 \frac{m_r(m_r-1)}{2} - \cdots - [L : \mathbb{Q}_p] t_r \frac{m_1(2 \sum_{j>1} m_j + m_1 - 1)}{2} \\ &= - \sum_{i=1}^r (t_{r+1-i} \sum_{j=m_1+\cdots+m_{i-1}+1}^{m_1+\cdots+m_i} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}) \\ &\quad - \frac{1}{2} [L : \mathbb{Q}_p] \left( \sum_{i=1}^r t_{r+1-i} m_i (2 \sum_{j>i} m_j + m_i - 1) \right). \end{aligned}$$

(c) Par [Vi], chapitre I.2.7, exemple (c), on a

$$\begin{aligned} \text{val}_p(\delta_{Q^*}^{-1/2}(z)) &= \frac{1}{2} \text{val}_p(\delta_{Q^*}^{-1}(w_0 z w_0^{-1})) \\ &= -\frac{1}{2} [L : \mathbb{Q}_p] \sum_{i=1}^r \left( \sum_{j<i} m_j - \sum_{j>i} m_j \right) m_i t_{r+1-i}. \end{aligned}$$

Un calcul rapide implique que

$$\begin{aligned} & \text{val}_p(\chi_\gamma^{w^{-1}w_0\psi\delta_{Q^*}^{-1/2}} | \det \bar{L}^{-d/2}(z)) \\ &= \sum_{i=1}^r t_{r+1-i} \text{val}_p(\chi'_i(p\mathbb{1}_{m_i})) - \sum_{i=1}^r (t_{r+1-i} \sum_{j=m_1+\dots+m_{i-1}+1}^{m_1+\dots+m_i} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}). \end{aligned}$$

On déduit du fait  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$  que la condition (4.2.1) est équivalente aux inégalités

$$\sum_{i=1}^k \text{val}_p(\chi'_i(p\mathbb{1}_{m_i})) \geq \sum_{i=1}^k \sum_{j=m_1+\dots+m_{i-1}+1}^{m_1+\dots+m_i} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}$$

pout tout  $1 \leq k \leq r$ . Mais par la correspondance de Langlands locale (non modifiée), le caractère central de  $L(b_i, \tau_i)$  est  $\det(r_i, N_i, V_i) \circ \text{rec}^{-1}$ , on a donc pour tout  $1 \leq i \leq r$  (cf. proposition 5.1, [BS])

$$\text{val}_p(\chi(\tau_i) | \det \bar{L}^j(p\mathbb{1}_{m_i})) = \frac{1}{[K:L]} t_N(D_{i,0}(b_i - 1 - j)), \quad j = 0, \dots, b_i - 1;$$

le caractère  $\chi'_i$  étant un produit de tels caractères, la remarque 3.8 permet de conclure.  $\square$

*Démonstration de (iv) ⇒ (iii) :* Cette direction est immédiate à partir du calcul ci-dessus.  $\square$

**Remarque 4.4.** Cette preuve est une généralisation du lemme 2.1, [Em2].

## 5 Preuve de (iii) ⇒ (ii)

Dans ce paragraphe, nous montrons l'implication (iii) ⇒ (ii). Posons

$$(\varphi_i, N_i, \text{Gal}(L'/L), D_i) = \text{MOD}(r_i, N_i, V_i).$$

*Convention :* comme les  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -modules  $D'$  que l'on va traiter dans la suite sont tous objets de  $\text{MOD}_{L'/L}$  libres de rang égal à  $\dim_K(\text{WD}(D'))$ , on écrit

$$\dim D' := \text{rg}_{L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K} D'.$$

### 5.1 Construction de $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$

Dans cette section, on construit un objet spécial  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  de  $\text{MOD}_{L'/L}$  tel que

$$\text{WD}(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)^{\text{ss}} = (r, N, V).$$

Regardons d'abord quelques exemples.

**Exemple 5.1.** Pour simplifier, on suppose  $L' = L = \mathbb{Q}_p$  (donc  $\text{Gal}(L'/L) = \{1\}$ ). Définissons  $(\varphi_0, N_0, D_0) \in \text{MOD}_{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p}$  par :

$$D_0 = Ke, \quad \varphi_0(e) = e, \quad N_0(e) = 0.$$

(1) (a) Soit  $D = D_1 \oplus D_2 = D_0 \oplus (D_0 \oplus D_0(1))$ , c'est-à-dire,

$$D = K^3 = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3$$

avec

$$\varphi(e_1) = e_1, \quad \varphi(e_2) = e_2, \quad \varphi(e_3) = pe_3$$

et

$$N(e_1) = 0, \quad N(e_2) = 0, \quad N(e_3) = e_2.$$

Alors il existe un triplet  $(i_1, i_2, i_3)$  tel que

$$i_1 < i_2 < i_3, \quad i_1 + i_2 + i_3 = t_N(D) = 1,$$

et tel qu'il n'existe aucune filtration admissible dont les poids de Hodge-Tate (i.e. les entiers  $i$  tels que  $\text{Fil}^{-i}D/\text{Fil}^{-i+1}D \neq 0$  avec multiplicité) soient  $\{-i_1, -i_2, -i_3\}$ . En fait, on peut choisir un triplet  $(i_1, i_2, i_3)$  tel que

$$i_1 < i_2 < i_3, \quad i_1 + i_2 + i_3 = t_N(D) = 1, \quad \text{et } i_2 > 0.$$

Soit  $(\text{Fil}^i D)_{i \in \mathbb{Z}}$  une filtration quelconque dont les poids de Hodge-Tate sont  $\{-i_1, -i_2, -i_3\}$ . Alors  $\dim \text{Fil}^{i_2} D = 2$  et si l'on pose  $D' = \text{Fil}^{i_2} D \cap (Ke_1 \oplus Ke_2)$  qui est un sous-objet de  $D$ , on a

$$\begin{cases} t_H(D') = i_2 + i_3 > 0 = t_N(D') & \text{si } \text{Fil}^{i_2} D = Ke_1 + Ke_2 \\ t_H(D') \geq i_2 > 0 = t_N(D') & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, la filtration  $(\text{Fil}^i D)_{i \in \mathbb{Z}}$  n'est pas admissible, ce qui montre notre énoncé.

La situation sera améliorée si l'on modifie  $\varphi$  par

$$\varphi^*(e_1) = e_1 + e_2, \quad \varphi^*(e_2) = e_2, \quad \varphi^*(e_3) = pe_3.$$

On vérifie que  $p\varphi^*N = N\varphi^*$ , et tout sous-objet non trivial de  $D$  est de l'une des formes :

$$Ke_2; \quad Ke_i \oplus Ke_j, \quad (i, j) = (1, 2) \text{ ou } (2, 3).$$

On peut construire une filtration telle que

$$t_H(Ke_i) = i_1, \quad t_H(Ke_i \oplus Ke_j) = i_1 + i_2$$

pour  $i \neq j$  (cf. lemme 5.9 ci-après), et la condition  $i_1 < i_2 < i_3$  entraîne que cette filtration est admissible.

(b) Le même énoncé et la même preuve pour  $D = (D_0 \oplus D_0(1)) \oplus D_0(1)$ .

(2) Soit  $D = D_1 \oplus D_2 = (D_0 \oplus D_0(1)) \oplus (D_0(1) \oplus D_0(2))$ , c'est-à-dire,

$$D = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4,$$

$$\varphi(e_1) = e_1, \quad \varphi(e_2) = pe_2, \quad \varphi(e_3) = pe_3, \quad \varphi(e_4) = p^2e_4,$$

$$N(e_1) = 0, \quad N(e_2) = e_1, \quad N(e_3) = 0, \quad N(e_4) = e_3.$$

On peut énumérer tous les sous-objets non triviaux de  $D$  :

$$Ke_i, \quad i = 1, 3; \quad Ke_i \oplus Ke_j, \quad (i, j) = (1, 2), (1, 3), (3, 4);$$

$$Ke_i \oplus Ke_j \oplus Ke_k, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), (1, 3, 4);$$

$$Ke_1 \oplus Kv, \quad \text{avec } v = e_2 + ae_3, \quad a \in K^\times.$$

Soient  $\{i_j\}_{1 \leq j \leq 4}$  des entiers tels que

$$\sum_{j=1}^4 i_j = 4, \quad i_1 < i_2 < i_3 < i_4.$$

On peut construire une filtration  $(\text{Fil}^i D)_{i \in \mathbb{Z}}$  sur  $D$  telle que (cf. lemme 5.9)

$$\text{Fil}^i D / \text{Fil}^{i+1} D \neq 0 \Leftrightarrow i \in \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$$

et telle que

$$t_H(Ke_i) = i_1, \quad t_H(Ke_i \oplus Ke_j) = i_1 + i_2, \quad t_H(Ke_i \oplus Ke_j \oplus Ke_k) = i_1 + i_2 + i_3,$$

pour tous  $i, j, k$  distincts. En particulier, si  $D' = Ke_1 \oplus Kv$  avec  $v = e_2 + ae_3$ ,  $a \in K^\times$ , on a  $t_H(D') \leq i_1 + i_3$ . L'hypothèse sur  $\{i_j\}_{1 \leq j \leq 4}$  implique  $i_1 + i_3 \leq 1$  et on en déduit la admissibilité de la filtration.

Notons que l'on peut aussi modifier  $\varphi$  comme en (1) :

$$\varphi^*(e_2) = pe_2 + pe_3, \quad \varphi^*(e_i) = \varphi e_i \text{ pour } i \neq 2.$$

On vérifie que  $p\varphi^*N = N\varphi^*$  et

$$WD(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)^{\text{ss}} = WD(\varphi^*, N, \text{Gal}(L'/L), D)^{\text{ss}},$$

et que la filtration définie ci-dessus est encore admissible.

(3) Soit  $D = D_1 \oplus D_2 = (D_0 \oplus D_0(1) \oplus D_0(2)) \oplus D_0(1)$ . On peut vérifier que si  $\varphi^*$  est un endomorphisme de  $D$  tel que  $p\varphi^*N = N\varphi^*$  et tel que

$$WD(\varphi^*, N, \text{Gal}(L'/L), D)^{\text{ss}} = WD(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)^{\text{ss}},$$

alors  $\varphi^* = \varphi$ .

**Remarque 5.2.** (1) L'exemple dans (1) nous dit que l'on *doit* modifier  $\varphi$  dans certains cas pour qu'il existe une filtration admissible sur  $D$ . (Notons que le triplet  $(i_1, i_2, i_3)$  vérifie la condition (iii) du théorème 3.6.)

(2) L'exemple (2) nous dit qu'il n'est *pas toujours nécessaire* de modifier  $\varphi$ .

(3) L'exemple (3) nous dit qu'il n'est *pas toujours possible* de modifier  $\varphi$ .

**Lemme 5.3.** On fixe un  $i \in \{1, \dots, v\}$  où  $v$  est défini dans (3.2.2), et soit  $k_1 \in H_i$ ,  $k_2 \in H_i$  tels que  $k_1 < k_2$ . On écrit  $D_{k_1}$  et  $D_{k_2}$  de la forme :

$$D_{k_1} = D_0 \oplus D_0(1) \oplus \dots \oplus D_0(b_{k_1} - 1),$$

$$D_{k_2} = D_0(l) \oplus D_0(l+1) \oplus \dots \oplus D_0(l + b_{k_2} - 1),$$

avec  $l \geq 0$  et  $D_0 = \ker(N : D_{k_1} \rightarrow D_{k_1})$  absolument irréductible. Alors

(1) Pour que  $\text{Hom}_{\text{MOD}_{L'/L}}(D_{k_1}, D_{k_2}) \neq 0$  il faut et il suffit que  $l \leq b_{k_1} - 1 \leq l + b_{k_2} - 1$ . S'il en est ainsi,  $\text{Hom}_{\text{MOD}_{L'/L}}(D_{k_1}, D_{k_2})$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension 1.

(2) Supposons  $\text{Hom}_{\text{MOD}_{L'/L}}(D_{k_1}, D_{k_2}) \neq 0$  et soit  $\alpha : D_{k_1} \rightarrow D_{k_2}$  un tel morphisme non nul. On modifie le Frobenius sur  $D_{k_1} \oplus D_{k_2}$  en posant  $\varphi : D_{k_1} \oplus D_{k_2} \rightarrow D_{k_1} \oplus D_{k_2}$ ,

$$\varphi(e_1) = \varphi_{k_1}(e_1) + \varphi_{k_2}(\alpha(e_1)), \quad \varphi(e_2) = \varphi_{k_2}(e_2),$$

où  $e_j \in D_{k_j}$  et  $\varphi_{k_j}$  est le Frobenius sur  $D_{k_j}$  avec  $j \in \{1, 2\}$ . Alors  $p\varphi N = N\varphi$  où  $N = N_{k_1} \oplus N_{k_2} : D_{k_1} \oplus D_{k_2} \rightarrow D_{k_1} \oplus D_{k_2}$ . De plus, on a

$$(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D_{k_1} \oplus D_{k_2}) \in \text{MOD}_{L'/L},$$

et

$$\text{WD}(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D_{k_1} \oplus D_{k_2})^{\text{ss}} = \text{WD}(\varphi_{k_1} \oplus \varphi_{k_2}, N, \text{Gal}(L'/L), D_{k_1} \oplus D_{k_2})^{\text{ss}}.$$

(3) Avec les notations dans (2), tout sous-objet  $D'$  de  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D_{k_1} \oplus D_{k_2})$  est de la forme :

$$(D_0 \oplus \dots \oplus D_0(b'_1)) \oplus (D_0(l) \oplus \dots \oplus D_0(l + b'_2))$$

avec  $-1 \leq b'_1 \leq b_{k_1} - 1$ ,  $-1 \leq b'_2 \leq b_{k_2} - 1$  vérifiant  $b'_1 \leq l + b'_2$ , où  $b'_j = -1$  désigne  $D' \cap D_{k_j} = 0$ .

*Démonstration.* Immédiat. □

Motivé par les exemples 5.1 et le lemme 5.3, on définit l'objet  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  de la manière suivante :

- (a) en tant que  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -module,  $D = \bigoplus_{i=1}^s D_i$ ;
- (b) on pose  $N = \bigoplus_{i=1}^s N_i$  sur  $D$ ;
- (c) on définit l'action de  $\text{Gal}(L'/L)$  sur  $D$  naturellement;
- (d) pour tout  $1 \leq k_1 < k_2 \leq s$  :

– si  $k_1, k_2 \in H_i$  pour un  $i$ , on peut écrire

$$D_{k_1} = D_0 \oplus \cdots \oplus D_0(b_{k_1} - 1), \quad D_{k_2} = D_0(l) \oplus \cdots \oplus D_0(l + b_{k_2} - 1);$$

avec  $l \geq 0$  et  $D_0 = \ker(N : D_{k_1} \rightarrow D_{k_1})$ . Si de plus  $l = 0$  ou  $b_{k_1} = l + b_{k_2}$ , et si  $k_2$  est le plus petit entier de  $H_i$  ayant l'une de ces propriétés, on pose (sur  $D_{k_1} \oplus D_{k_2}$ )

$$\varphi(e_1) = \varphi_{k_1}(e_1) + \varphi_{k_2}(\alpha(e_1)) \text{ si } e_1 \in D_{k_1}, \quad \varphi(e_2) = e_2 \text{ si } e_2 \in D_{k_2}$$

où  $\alpha \neq 0$  est un élément fixé de  $\text{Hom}_{\text{MOD}_{L'/L}}(D_{k_1}, D_{k_2})$ .

– sinon, on pose  $\varphi = \varphi_{k_1} \oplus \varphi_{k_2}$  sur  $D_{k_1} \oplus D_{k_2}$ .

On déduit de la définition et du lemme 5.3 que  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D) \in \text{MOD}_{L'/L}$  et

$$\text{WD}(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)^{\text{ss}} = (r, N, V).$$

## 5.2 Bons sous-objets de $D$

Dans cette section, on étudie la structure de  $D$  qui sera utilisée dans la suite.

Supposons d'abord  $D = D_{H_i}$  pour un  $i \in \{1, \dots, v\}$  de sorte que l'on peut écrire

$$(5.2.1) \quad \begin{aligned} D &= D_1 \oplus \cdots \oplus D_s \\ &= (D_0 \oplus \cdots \oplus D_0(b_1 - 1)) \oplus \cdots \oplus (D_0(l_s) \oplus \cdots \oplus D_0(l_s + b_s - 1)) \end{aligned}$$

avec  $l_s \geq l_{s-1} \geq \cdots \geq 0$  et  $(\varphi|_{D_0}, N|_{D_0} = 0, \text{Gal}(L'/L), D_0)$  absolument irréductible de dimension  $h$ . Remarquons que, d'après la remarque 2.1,  $\varphi_1^{f'}|_{D_0} = a$  est scalaire avec  $a \in K^\times$ . Notons  $\varphi' = \varphi^{f'}$  et  $q' = p^{f'}$  dans la suite pour simplifier les notations.

**Définition 5.4.** (1) Un sous-objet  $D'$  de  $D$  est dit *bon* s'il est de la forme (en tant que sous-espace relatif à la décomposition (5.2.1))

$$\begin{aligned} D' &= D'_1 \oplus \cdots \oplus D'_s \\ &= (D_0 \oplus D_0(1) \oplus \cdots \oplus D_0(b'_1)) \oplus \cdots \oplus (D_0(l_s) \oplus \cdots \oplus D_0(l_s + b'_s)) \end{aligned}$$

avec  $-1 \leq b'_i \leq b_i - 1$ , où  $b'_i = -1$  désigne  $D' \cap D_i = 0$ .

(2) On appelle *drapeau* de  $D$  une suite de sous- $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -modules libres  $\{E_i\}_{1 \leq i \leq m}$  de  $D$  tels que

$$0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_m \subsetneq D.$$

Si  $\sigma : L \hookrightarrow K$  est un plongement, on définit un drapeau de  $D_{L', \sigma}$  de manière analogue.

(3) Un drapeau

$$\Delta : 0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_m \subsetneq D$$

de  $D$  est dit *bon* si tous les  $E_i$  sont bons.

**Remarque 5.5.** (1) L'ensemble des bons sous-objets de  $D$  est de cardinal fini.

(2) Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux bons sous-objets de  $D$ , alors  $E_1 + E_2$ ,  $E_1 \cap E_2$ ,  $\ker(N|_{E_1})$  et  $N(E_1)$  sont bons aussi. De plus, si  $N|_{E_1} = 0$ , alors pour tout  $j$ ,  $\ker((\varphi' - q^j a)|_{E_1})$  et  $(\varphi' - q^j a)(E_1)$  sont bons.

(3) Si  $D$  est absolument indécomposable, ou  $D = D_1 \oplus D_2$  avec

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}_{L'/L}}(D_1, D_2) \neq 0$$

et on définit  $\varphi$  comme dans le lemme 5.3 (2), alors tout sous-objet de  $D$  est bon.

On peut aussi écrire  $D$  sous la forme (comme  $(\varphi, \mathrm{Gal}(L'/L))$ -module)

$$\begin{aligned} D &= D_{=0} \oplus \cdots \oplus D_{=n} \\ &= \left( \bigoplus D_0 \right) \oplus \left( \bigoplus D_0(1) \right) \oplus \cdots \oplus \left( \bigoplus D_0(n) \right), \end{aligned}$$

où  $n = \max_{2 \leq i \leq s} \{b_1 - 1, l_i + b_i - 1\}$ . Alors par définition de  $\varphi$ , on a pour tout  $1 \leq j \leq n$  :

$$D_{=j} = \{v \in D \mid (\varphi' - q^j a)^k v = 0, k \gg 0\}.$$

On pose  $D_{<j} = \bigoplus_{i < j} D_{=i}$  et  $D_{\leq j} = \bigoplus_{i \leq j} D_{=i}$ . Si l'on définit

$$D_{=j,k} = \{v \in D_{=j} \mid (\varphi' - q^j a)^k v = 0\},$$

alors on obtient un drapeau de  $D_{=j}$  :

$$D_{=j,1} \subset D_{=j,2} \subset \cdots .$$

Le lemme suivant découle de la définition de  $\varphi$  sur  $D$  (cf. n°5.1).

**Lemme 5.6.** (1) Pour tout sous-objet  $D'$  de  $D$ , on a  $h \mid \dim D'$ . Si  $D' \neq 0$ , alors  $D_{=0,1} \subset D'$ .

(2) Pour tout  $j$ ,  $\dim \ker N \cap \ker(\varphi' - q^j a) = h$  ou 0.

(3)  $\dim D_{=0,1} = h$ , et  $|\dim D_{=j,1} - \dim D_{=j-1,1}| = h$  ou 0 pour  $1 \leq j \leq n$ .

*Démonstration.* (1) Comme  $D' = \bigoplus_{j=0}^n D' \cap D_{=j}$  en tant que  $(\varphi, \mathrm{Gal}(L'/L))$ -module, on peut supposer  $N = 0$ . Alors par définition,  $(\varphi, \mathrm{Gal}(L'/L), D)$  est une extension successive d'objets absolument irréductibles de type  $(\varphi|_{D_0}, \mathrm{Gal}(L'/L), D_0)$  qui est absolument irréductible. L'énoncé s'en déduit.

(2) Cela résulte de la définition de  $\varphi$  et de (1). Sinon, il existe  $1 \leq k_1 < k_2 \leq s$  tels que  $l_{k_1} = l_{k_2}$ . Soient  $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}_{L'/L}}(D_{k_1}, D_{k_2})$  un morphisme non nul et  $v \in D_{k_1}$  un vecteur tel que  $\alpha(v) \neq 0$  dans (5.2.1). Alors, par définition de  $\varphi$ ,  $\varphi'(v) \neq q^j a \cdot v$ , ce qui contredit l'hypothèse.

(3) Le premier énoncé est une conséquence directe de (2). Pour le deuxième, on considère  $N(D_{=j,1})$ . D'une part, on a  $\dim D_{=j,1} - \dim N(D_{=j,1}) \leq h$  d'après (2) ; d'autre part,  $\dim D_{=j-1,1} - \dim N(D_{=j,1}) \leq h$  d'après la définition de  $\varphi$ . L'énoncé s'en déduit d'après (1).  $\square$

Dans le cas général  $D = \bigoplus_{i=1}^v D_{H_i}$ , on dit qu'un sous-objet  $D'$  est *bon* s'il est une somme directe de bons sous-objets de  $D_{H_i}$ .

### 5.3 Définition de la filtration sur $D_{L'}$

Conservons les notations précédentes. Soient  $\sigma : L \hookrightarrow K$  un plongement et  $\text{Fil}_\sigma = (\text{Fil}^i D_{L',\sigma})_{i \in \mathbb{Z}}$  une filtration sur  $D_{L',\sigma}$  stable par  $\text{Gal}(L'/L)$ . On note  $I(\text{Fil}_\sigma, D)$  l'ensemble des entiers  $i$  tels que

$$\text{Fil}^i D_{L',\sigma} / \text{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \neq 0.$$

**Remarque 5.7.** Si  $D_1 \subset D_2$  sont deux sous-objets de  $D$ , alors  $I(\text{Fil}_\sigma, D_1) \subset I(\text{Fil}_\sigma, D_2)$ .

**Définition 5.8.** Soit  $D'$  un sous-objet de  $D$  et  $\text{Fil}_\sigma$  une filtration sur  $D_{L',\sigma}$  avec  $I(\text{Fil}_\sigma) = \{i_{1,\sigma} < i_{2,\sigma} < \dots < i_{d+1,\sigma}\}$ . On dit que  $\text{Fil}_\sigma$  est *transverse* à  $D'$  si

$$I(\text{Fil}_\sigma, D') = \{i_{1,\sigma}, \dots, i_{\dim D', \sigma}\}.$$

**Lemme 5.9.** Soit  $D'$  un sous-objet de  $D$ , et pour tout  $\sigma : L \hookrightarrow K$  on se donne des entiers  $\{i_{j,\sigma}\}_{1 \leq j \leq d+1}$  tels que  $i_{1,\sigma} < \dots < i_{d+1,\sigma}$ . Alors il existe une filtration  $\text{Fil} = (\text{Fil}_\sigma)_\sigma$  sur  $D$  stable par  $\text{Gal}(L'/L)$  telle que pour tout  $\sigma$ , on a

$$I(\text{Fil}_\sigma, D) = \{i_{1,\sigma}, \dots, i_{d+1,\sigma}\}$$

et que  $\text{Fil}_\sigma$  est transverse à  $D'$ .

De plus, si  $K_1 \subset K$  est un sous-corps de cardinal infini (par exemple  $K_1 = \mathbb{Q}_p$ ), alors on peut prendre  $\text{Fil}_\sigma$  telle qu'elle soit définie sur  $K_1$ .

*Démonstration.* Voir la proposition 3.2 de [BS]. □

**Remarque 5.10.** De plus, si l'on se donne un ensemble fini de sous-objets de  $D$  et des entiers  $\{i_{1,\sigma} < \dots < i_{d+1,\sigma}\}$ , on obtient encore par la preuve du lemme 5.9 qu'il existe une filtration  $\text{Fil}$  telle que l'énoncé du lemme 5.9 soit vrai pour tous ces sous-objets.

On fixe une filtration  $\text{Fil} = (\text{Fil}_\sigma)_\sigma$  sur  $D$  qui est transverse à tous les bons sous-objets (qui forment un ensemble fini). En particulier, pour  $E$  un bon sous-objet, on a (cf. la preuve de la proposition 5.1 de [BS])

$$t_H(E_{L'}) = [K : L] \sum_{j=1}^{\dim E} \sum_{\sigma: L \hookrightarrow K} i_{j,\sigma}.$$

**Corollaire 5.11.** Soient  $\{E_i\}_{0 \leq i \leq m+1}$  des bons sous-objets de  $D$  tels que  $E_0 = 0$ ,  $E_{m+1} = D$  et  $\dim E_i < \dim E_{i+1}$ , et soit  $D'$  un sous-objet de  $D$ . Posons

$$a_i = \dim E_{i+1} - \dim E_i, \quad c_i = \dim(E_{i+1} \cap D') - \dim(E_i \cap D'),$$

et

$$\Omega = \{j \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } 0 \leq l \leq m+1 \text{ tel que } \sum_{i=0}^l a_i - c_l + 1 \leq j \leq \sum_{i=0}^l a_i\}.$$

Alors

$$t_H(D'_{L'}) \leq [K : L] \sum_{j \in \Omega} \sum_{\sigma: L \hookrightarrow K} i_{j,\sigma}.$$

*Démonstration.* Cela découle de la définition 5.8, de la remarque 5.7 et du choix de  $\text{Fil}$ . □



#### 5.4 L'admissibilité : cas spécial

Dans cette section, on va prouver l'implication “(iii)  $\Rightarrow$  (ii)” du théorème 3.6 dans le cas spécial  $D = D_{H_i}$  (pour  $i \in \{1, \dots, v\}$  fixé). Rappelons que l'on a défini un certain objet  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)$  (cf. §4.1) de  $\text{MOD}_{L'/L}$  tel que

$$\text{WD}(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D)^{\text{ss}} = (r, N, V),$$

et que l'on a fixée une filtration  $\text{Fil} = (\text{Fil}^i D_{L',\sigma})_{i,\sigma}$  (cf. §4.3) sur  $D_{L'}$  telle que

$$\text{Fil}^i D_{L',\sigma} / \text{Fil}^{i+1} D_{L',\sigma} \neq 0 \Leftrightarrow i \in \{i_{1,\sigma}, \dots, i_{d+1,\sigma}\}$$

et pour tout *bon* sous-objet  $E$  de  $D$  :

$$t_H(E_{L'}) = [K : L] \sum_{j=1}^{\dim E} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}.$$

Donc il suffit de prouver (supposé (iii) du théorème 3.6) :

**Théorème 5.12.** *La filtration  $\text{Fil}$  sur  $D_{L'}$  est admissible. Autrement dit, si  $D'$  est un sous-objet de  $D$ , alors*

$$t_H(D'_{L'}) \leq t_N(D').$$

On fixe un sous-objet  $D'$  de  $D$  et on commence par établir quelques propriétés de  $D'$ .

**Définition 5.13.** Si  $E, E'$  sont deux bons sous-objets de  $D$  tels que  $\dim E' > \dim E$ , on définit

$$\alpha(E'/E, D') = \frac{\dim E' \cap D' - \dim E \cap D'}{\dim E' - \dim E}.$$

On note  $\alpha(E'/E) = \alpha(E'/E, D')$  s'il n'y a pas de risque de confusion et on l'écrit  $\alpha(E')$  si  $E = 0$ .

**Remarque 5.14.** (1) Le nombre  $\alpha(E'/E)$  peut être négatif.

(2) Soient  $E_1, E_2, E_3$  trois bons sous-objets de  $D$  tels que  $\dim E_1 < \dim E_2 < \dim E_3$ , alors ou bien  $\alpha(E_3/E_2) > \alpha(E_3/E_1) > \alpha(E_2/E_1)$ , ou bien  $\alpha(E_2/E_1) > \alpha(E_3/E_1) > \alpha(E_3/E_2)$ , ou bien  $\alpha(E_2/E_1) = \alpha(E_3/E_1) = \alpha(E_3/E_2)$ .

**Lemme 5.15.** *Soit  $f : D \rightarrow D$  un endomorphisme  $L'_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ -linéaire tel que  $f(D') \subset D'$  pour tout sous-objet  $D'$  de  $D$ . Alors pour tout bon sous-objet  $E$  et tout sous-objet  $D'$ , on a*

$$\alpha(E, D') \leq \max\{\alpha(\ker f, D'), \alpha(\text{Im} f, D')\}.$$

De plus,  $\alpha(E, D') = \max\{\alpha(\ker f, D'), \alpha(\text{Im} f, D')\}$  si et seulement si

$$\alpha(E, D') = \alpha(\ker f, D') = \alpha(\text{Im} f, D').$$

*Démonstration.* On a les suites exactes :

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow E \rightarrow \operatorname{Im} f \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \ker f \cap D' \rightarrow E \cap D' \rightarrow \operatorname{Im} f \cap D',$$

et le lemme s'en déduit facilement par la remarque 5.14 (2).  $\square$

**Théorème 5.16.** *Pour tout sous-objet  $D'$  de  $D$ , il existe un bon drapeau*

$$\Delta = \Delta_{D'} : 0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_m \subsetneq E_{m+1} = D$$

tel que

(a) pour tout  $0 \leq i \leq m$ ,  $N(E_{i+1}) \subseteq E_i$ ;

(b) pour tout  $0 \leq i \leq m$ , il existe  $j, l \geq 0$  et une injection  $E_{i+1}/E_i \rightarrow D_{=j,l+1}/D_{=j,l}$ , c'est-à-dire, il existe  $j, l \geq 0$  tels que  $(\varphi' - q^j a)E_{i+1} \subseteq E_i$  et

$$(\varphi' - q^j a)^l v = 0 \Leftrightarrow v \in E_{i+1} \setminus E_i, \quad \text{si } v \in E_{i+1};$$

(c) pour  $1 \leq i \leq m$ ,  $\alpha(E_i/E_{i-1}) \geq \alpha(E_{i+1}/E_i)$ ; si  $\alpha(E_{i+1}/E_i) = \alpha(E_i/E_{i-1})$ , alors  $\dim E_{i+1}/E_i \geq \dim E_i/E_{i-1}$ ;

(d) Soit  $E$  un bon sous-objet de  $D$  et  $0 \leq i \leq m$  l'unique entier tel que

$$\dim E_i < \dim E \leq \dim E_{i+1},$$

alors  $\alpha(E/E_i) \leq \alpha(E_{i+1}/E_i)$ .

*Démonstration.* On munit  $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$  de l'ordre total suivant :

$$(x_1, y_1) > (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 > x_2) \text{ ou } (x_1 = x_2 \text{ et } y_1 < y_2).$$

On considère l'ensemble des bons sous-objets non nuls de  $D$  et on choisit un d'entre eux, noté  $E_1$ , tel que le couple  $(\alpha(E_1), \dim E_1)$  soit maximal. Puis on considère l'ensemble des bons sous-objets de  $D$  contenant  $E_1$  strictement et on choisit un d'entre eux, noté  $E_2$ , tel que  $(\alpha(E_2/E_1), \dim E_2/E_1)$  soit maximal. Comme cela, on obtient un bon drapeau

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_m \subsetneq E_{m+1} = D.$$

On prouve maintenant que ce drapeau vérifie les conditions (a)-(d) :

(a) Pour  $i \geq 0$ , on définit  $E'_{i+1} = \{v \in E_{i+1} \mid N(v) \in E_i\}$  qui contient  $E_i$ . Le lemme 5.15 implique que

$$\alpha(E_{i+1}/E_i) \leq \max\{\alpha(E'_{i+1}/E_i), \alpha(N(E_i)/E_i)\}.$$

Par choix de  $E_{i+1}$ , on obtient

$$E_{i+1} = N(E_i) \text{ ou } E'_{i+1},$$

or  $N$  est nilpotent sur  $E_{i+1}/E_i$ , donc  $E'_{i+1} = E_{i+1}$ , i.e.  $N(E_{i+1}) \subseteq E_i$ .

(b) Par (a),  $N = 0$  sur  $E_{i+1}/E_i$ , donc  $E_{i+1}/E_i$  se décompose en une somme directe de la forme :

$$E_{i+1}/E_i = (E_{i+1}/E_i)_{=1} \oplus \cdots \oplus (E_{i+1}/E_i)_{=n}$$

où  $(E_{i+1}/E_i)_{=j}$  est le sous-espace de  $E_{i+1}/E_i$  formé par les vecteurs  $v$  tels que  $(\varphi' - q'^j a)^k v = 0$  si  $k \gg 0$ . D'après le lemme 5.15, on a en fait  $E_{i+1}/E_i = (E_{i+1}/E_i)_{=j}$  pour un  $1 \leq j \leq n$ , ce qui fournit l'existence de  $j$ .

Pour définir  $l$ , on pose  $E_i(k) = \ker(\varphi' - q'^j a)^k + E_i$  et on considère la filtration

$$E_i \subseteq E_i(1) \subseteq \cdots \subseteq E_i(k) \subseteq \cdots \subseteq E_{i+1}.$$

Comme  $N = 0$  sur  $E_{i+1}/E_i$  et comme  $\varphi'|_{E_{i+1}/E_i} = q'^j a$  est linéaire, on en déduit une décomposition

$$E_{i+1}/E_i \cong \bigoplus_k M_k$$

avec  $M_k \cong E_i(k+1)/E_i(k)$ , ensuite le choix de  $E_{i+1}$  implique  $E_{i+1} = \pi^{-1}(M_l)$  pour un unique  $l$ , où  $\pi : E_{i+1} \rightarrow E_{i+1}/E_i$  désigne la projection canonique.

(c) La première assertion est automatique de la définition du drapeau et de la remarque 5.14 (2). Pour la deuxième, on suppose  $\alpha(E_{i+1}/E_i) = \alpha(E_i/E_{i-1})$ . Soit  $j$  l'entier défini en (b) (pour  $E_{i+1}/E_i$ ). D'après (a) et (b), on peut considérer les morphismes

$$N, \varphi' - q'^j a : E_{i+1}/E_{i-1} \rightarrow E_i/E_{i-1}.$$

Il y a deux possibilités :

- $N(E_{i+1}/E_{i-1}) \neq 0$  ou  $(\varphi' - q'^j a)(E_{i+1}/E_{i-1}) \neq 0$ . On peut supposer, sans perte de généralité, que l'on est dans le premier cas. Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \ker N \rightarrow E_{i+1}/E_{i-1} \rightarrow \text{Im} N \rightarrow 0.$$

On a alors  $0 \neq \text{Im} N \subset E_i/E_{i-1} \subset \ker N \subset E_{i+1}/E_{i-1}$ . D'une part, le choix de  $E_{i+1}$  implique  $\alpha(\ker N/E_i) \leq \alpha(E_{i+1}/E_i)$  et donc que

$$\alpha(\ker N) \leq \alpha(E_{i+1}/E_{i-1});$$

d'autre part, le choix de  $E_i$  implique

$$\alpha(\text{Im} N) \leq \alpha(E_i/E_{i-1}) = \alpha(E_{i+1}/E_{i-1}).$$

On déduit donc d'après le lemme 5.15 :

$$\text{Im} N = E_i/E_{i-1} = \ker N,$$

i.e.  $N$  induit un isomorphisme  $E_{i+1}/E_i \xrightarrow{\sim} E_i/E_{i-1}$ , ce qui permet de conclure.

–  $N = 0$  et  $\varphi' = q^j a$  sur  $E_{i+1}/E_{i-1}$ . Dans ce cas la suite exacte

$$0 \rightarrow E_i/E_{i-1} \rightarrow E_{i+1}/E_{i-1} \rightarrow E_{i+1}/E_i \rightarrow 0$$

se scinde, et le choix de  $E_{j+1}$  permet de conclure.

(d) Supposons l'énoncé faux et soit  $E$  un tel sous-objet de  $D$  de dimension maximale. Soit  $i$  l'unique entier tel que  $\dim E_i < \dim E \leq \dim E_{i+1}$ . Alors par hypothèse, on a  $i \geq 1$  et  $\alpha(E/E_i) > \alpha(E_{i+1}/E_i)$ .

Évidemment  $E \neq D$ . Soit  $j$  le plus petit entier tel que  $E_{j+1} \not\subseteq E$ , de sorte que  $j \leq i$  et que  $E_j \subseteq L \cap E_{j+1}$ . Posons  $E' = E + E_{j+1}$  de sorte que  $E'$  contient strictement  $E$ . Soit  $i'$  l'unique entier tel que  $\dim E_{i'} < \dim E' \leq \dim E_{i'+1}$  (alors  $i' \geq i$ ). On va montrer que

$$\alpha(E'/E_{i'}) > \alpha(E_{i'+1}/E_{i'})$$

et donc on obtiendra une contradiction avec le choix de  $E$ .

D'après le choix de  $E_{j+1}$ , on a  $\alpha(E_{j+1}/(E \cap E_{j+1})) \geq \alpha(E_{j+1}/E_j)$ , *a fortiori* (par (c))

$$\alpha(E_{j+1}/(E \cap E_{j+1})) \geq \alpha(E_{i+1}/E_i).$$

D'autre part, on a  $\alpha(E'/E) \geq \alpha(E_{j+1}/(E \cap E_{j+1}))$ . Donc  $\alpha(E'/E) \geq \alpha(E_{i+1}/E_i)$ , et puis  $\alpha(E'/E_i) > \alpha(E_{i+1}/E_i)$  puisque  $\alpha(E/E_i) > \alpha(E_{i+1}/E_i)$  par hypothèse; ceci achève la preuve dans le cas  $i' = i$ . On est donc ramené au cas  $i' > i$ . Dans ce cas on a  $\alpha(E'/E_i) > \alpha(E_{i+1}/E_i) \geq \alpha(E_{i'}/E_i)$ , et ceci montre par (c) :

$$\alpha(E'/E_{i'}) > \alpha(E_{i'}/E_i) \geq \alpha(E_{i'}/E_{i'-1}) \geq \alpha(E_{i'+1}/E_{i'}).$$

□

**Remarque 5.17.** (i) Le théorème 5.16 est un analogue de la filtration de Harder-Narasimhan ([NH]), mais n'est pas la même chose : on demande le drapeau de satisfaire aux conditions (a) et (b), qui sont importantes pour la proposition 5.20 ci-dessous.

(ii) La preuve n'utilise pas la définition de  $\varphi$ , donc le théorème 5.16 reste vrai pour tout  $(\varphi, N, \text{Gal}(L'/L), D) \in \text{MOD}_{L'/L}$ .

**Exemple 5.18.** Reprenons les notations de l'exemple 5.1 (3). C'est-à-dire,

$$D = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3 \oplus Ke_4,$$

$$\varphi(e_1) = e_1, \varphi(e_2) = pe_2, \varphi(e_3) = p^2e_3, \varphi(e_4) = pe_4,$$

$$N(e_1) = 0, N(e_2) = e_1, N(e_3) = e_2, N(e_4) = 0.$$

Tous les sous-objets non triviaux de  $D$  sont les suivants :

$$Ke_i, i = 1, 4; Ke_i \oplus Ke_j, (i, j) = (1, 2), (1, 4);$$

$$Ke_i \oplus Ke_j \oplus Ke_k, (i, j, k) = (1, 2, 3), (1, 2, 4);$$

$$D'_v := Ke_1 \oplus Kv, \text{ avec } v = e_2 + ae_4, a \in K^\times.$$

On voit que seul les  $D'_v$  ne sont pas bons, aux lesquels on peut associer le drapeau défini par :

$$0 \subsetneq Ke_1 \subsetneq Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_4 \subsetneq D.$$

On fixe un bon drapeau de  $D$

$$(5.4.1) \quad \Delta = \Delta_{D'} : 0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{m+1} = D$$

comme dans le théorème 5.16.

**Lemme 5.19.** *Il existe des entiers  $k, k' \in \{0, \dots, m+1\}$  tels que*

- (1)  $E_{k'}$  est le plus grand bon sous-objet de  $D$  tel que  $\alpha(E_{k'}) = 1$  ;
- (2)  $E_{k'+k}$  est le plus petit bon sous-objet de  $D$  contenant  $D'$ .

*Démonstration.* (1) Soit  $k' \in \{0, \dots, m+1\}$  le plus grand entier tel que  $\alpha(E_{k'}) = 1$ . On peut supposer  $k' \neq m+1$ , i.e.  $E_{k'} \neq D$ . Si  $E$  est un bon sous-objet de  $D$  tel que  $\alpha(E) = 1$ , on a encore  $\alpha(E_{k'} + E) = 1$ . Or, d'après le choix de  $k'$ ,  $\alpha(E_{k'+1}/E_{k'}) < 1$ . On en déduit  $E_{k'} + E = E_{k'}$  par la condition (d) du théorème 5.16, d'où le résultat.

(2) La preuve est analogue à celle de (1).  $\square$

Le drapeau (5.4.1) s'écrit donc sous la forme

$$0 = E_0 \subseteq E_{k'} =: F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{k'+k} =: F_{k+1} \subseteq D.$$

On pose  $a_0 = \dim F_1$ ,  $a_{k+1} = \dim D - \dim F_{k+1}$ , et pour  $1 \leq i \leq k$

$$a_i = \dim F_{i+1}/F_i, \quad c_i = \dim D' \cap F_{i+1}/D' \cap F_i.$$

Par le lemme 5.19, les entiers  $a_0$  et  $a_{k+1}$  ne dépendent pas du choix du drapeau.

**Proposition 5.20.** *On a*

$$a_0 \geq \max\{c_i\}_{1 \leq i \leq k}, \quad a_{k+1} \geq \max\{a_i - c_i\}_{1 \leq i \leq k}.$$

*Démonstration.* On prouve seulement la première inégalité, la preuve de l'autre étant analogue. Évidemment, on peut supposer  $D'$  non trivial, i.e.  $D' \neq 0$  et  $D' \neq D$  ; de plus, d'après le lemme 5.6 (1), on peut supposer  $h = \dim D_0 = 1$ .

Choisissons  $r \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $c_r = \max_{1 \leq i \leq k} \{c_i\}$ . On sait qu'il existe  $j, l \geq 0$  tels que  $F_{r+1}/F_r \hookrightarrow D_{=j,l+1}/D_{=j,l}$  d'après le théorème 5.16 (b). On a donc

$$\dim D' \cap D_{=j,l+1} - \dim D' \cap D_{=j,l} \geq c_r,$$

puis  $\dim D' \cap D_{=j,1} \geq c_r$  grâce à l'injection

$$(\varphi' - q^{j'} a)^l : D_{=j,l+1}/D_{=j,l} \rightarrow D_{=j,1}.$$

Le cas  $j = 0$  est trivial puisqu'alors  $D_{=0,1} \subset D'$  par définition de  $\varphi$ , d'où  $D_{=0,1} \subset F_1$ . Supposons donc  $j \geq 1$ . D'après le lemme 5.6, on a pour tout  $1 \leq j' \leq j$ ,

$$\dim D' \cap D_{=j'-1,1} \geq \dim D' \cap D_{=j',1} - 1,$$

et pour avoir  $\dim D' \cap D_{=j'-1,1} = \dim D' \cap D_{=j',1} - 1$ , il faut  $\dim D_{=j'-1,1} = \dim D_{=j',1} - 1$ , d'où

$$\dim \ker(N|_{D_{=j',1}}) = 1 \quad \text{et} \quad \ker(N|_{D_{=j',1}}) \subset D'.$$

S'il en est ainsi, alors par définition de  $F_1$  on déduit

$$\ker(N|_{D_{=j',1}}) \subset F_1.$$

D'après le lemme 5.6, on a  $D_{=0,1} \subset D' \cap F_1$  et que  $\dim D_{=0,1} = 1$ , d'où

$$\dim F_1 \geq \dim D_{=j,1} \geq c_r.$$

□

Vu le théorème 5.16 et de la proposition 5.20, on pose la définition suivante :

**Définition 5.21.** Soient  $\alpha = (a_0, \dots, a_{k+1})$  une partition de  $d+1$  et  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, d+1\}$ . Posons

$$I_0 = \{1, 2, \dots, a_0\}, I_1 = \{a_0 + 1, \dots, a_0 + a_1\}, \dots, I_{k+1} = \{a_0 + \dots + a_k + 1, \dots, d+1\},$$

et  $c_i = |\Omega \cap I_i|$  pour  $0 \leq i \leq k+1$ . On dit que la paire  $(\Omega, \alpha)$  est de type *spécial* (relatif à  $\{1, \dots, d+1\}$ ) si les nombres  $\{a_i\}_{0 \leq i \leq k+1}$  et  $\{c_i\}_{0 \leq i \leq k+1}$  vérifient les conditions suivantes :

- (i)  $a_0 = c_0 > 0$ ,  $c_{k+1} = 0$ , et  $a_i \geq c_i > 0$  pour  $1 \leq i \leq k$ ,
- (ii)  $\frac{c_i}{a_i} \geq \frac{c_{i+1}}{a_{i+1}}$  pour tout  $0 \leq i \leq k$ ,
- (iii)  $a_0 \geq \max_{1 \leq i \leq k} \{c_i\}$ ,  $a_{k+1} \geq \max_{1 \leq i \leq k} \{a_i - c_i\}$ .

Les paires de types spéciaux ont la propriété :

**Proposition 5.22.** Soient  $(\Omega, \alpha)$  une paire de type spécial, et  $\{m_j\}_{1 \leq j \leq d+1}$ ,  $\{n_j\}_{1 \leq j \leq d+1}$  des nombres réels tels que :

- (a)  $m_j \leq m_{j+1}$ ,  $n_j \leq n_{j+1}$  pour tout  $1 \leq j \leq d$ ,
- (b)  $m_{j+1} - m_j \geq n_{j+1} - n_j$  pour tout  $1 \leq j \leq d$ ,
- (c)  $\sum_{j=1}^{d+1} m_j \leq \sum_{j=1}^{d+1} n_j$ .

Alors on a  $\sum_{j \in \Omega} m_j \leq \sum_{j \in \Omega} n_j$ .

**Remarque 5.23.** Cette proposition peut être vue comme une généralisation du lemme 5.4, [BS].

La démonstration du théorème 5.12 utilise la proposition 5.22, dont la preuve sera donnée au §5.5.

*Démonstration de 5.12.* Reprenons les notations de la proposition 5.20. On a alors

$\sum_{i=0}^{k+1} a_i = d+1$ . Notons  $\alpha = (a_0, \dots, a_{k+1})$  la partition de  $d+1$ ,

$$I_0 = \{1, \dots, a_0\}, \dots, I_{k+1} = \{a_0 + \dots + a_k + 1, \dots, d+1\},$$

et  $\Omega$  le sous-ensemble de  $\{1, \dots, d+1\}$  tel que

$$\Omega \cap I_i = \left\{ \sum_{j=0}^i a_j - c_i + 1, \sum_{j=0}^i a_j - c_i + 2, \dots, \sum_{j=0}^i a_j \right\}.$$

On sait que, d'après le théorème 5.16 et la proposition 5.20,  $(\Omega, \alpha)$  est de type spécial.

On pose pour  $0 \leq i \leq n$ ,  $s_i = \dim(D' \cap D_{=i})$ ,  $r_i = \#\{j \in \Omega \mid \dim D_{<i} + 1 \leq j \leq \dim D_{\leq i}\}$ , et pour  $1 \leq j \leq d+1$ ,

$$n_j = \begin{cases} t_N(D_0) & 1 \leq j \leq \dim D_{=0} \\ t_N(D_0(1)) & \dim D_{=0} + 1 \leq j \leq \dim D_{\leq 1} \\ \vdots & \vdots \\ t_N(D_0(n)) & \dim D_{<n} + 1 \leq j \leq \dim D_{\leq n} = d+1. \end{cases}$$

On a alors, puisque  $t_N(D_0(i)) = t_N(D_0) + i[K : \mathbb{Q}_p]$  :

$$(5.4.2) \quad t_N(D') = \sum_{i=0}^n s_i t_N(D_0(i)) = \dim D' \cdot t_N(D_0) + [K : \mathbb{Q}_p] \sum_{i=0}^n i s_i,$$

et

$$(5.4.3) \quad \sum_{j \in \Omega} n_j = \sum_{i=0}^n r_i t_N(D_0(i)) = \dim D' \cdot t_N(D_0) + [K : \mathbb{Q}_p] \sum_{i=0}^n i r_i.$$

Étape 1 : on prouve le théorème sous l'hypothèse supplémentaire que  $\sum_{i=0}^l s_i \leq \sum_{i=0}^l r_i$

pour tout  $0 \leq l \leq n$ . L'inégalité  $t_H(D'_L) \leq t_N(D')$  résulte des trois suivantes :

- $t_H(D'_L) \leq [K : L] \sum_{j \in \Omega} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}$ . Ceci est une conséquence du corollaire 5.11.
- $[K : L] \sum_{j \in \Omega} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma} \leq \sum_{j \in \Omega} n_j$ . En posant  $m_j = [K : L] \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}$ , on voit que

$$m_{j+1} - m_j \geq [K : \mathbb{Q}_p] \geq n_{j+1} - n_j$$

puisque  $\dim D_{=i} \neq 0$  pour tout  $0 \leq i \leq n$ . On déduit l'énoncé de la proposition 5.22, car on a

$$\sum_{j=1}^{d+1} m_j = t_H(D_L) = t_N(D) = \sum_{j=1}^{d+1} n_j.$$

- $\sum_{j \in \Omega} n_j \leq t_N(D')$ . Il suffit de prouver que  $\sum_{i=0}^n i(s_i - r_i) \geq 0$  par (5.4.2) et (5.4.3).

Or, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n i(s_i - r_i) &= n \sum_{i=0}^n (s_i - r_i) - \sum_{i=0}^n (n-i)(s_i - r_i) \\ &= n \sum_{i=0}^n (s_i - r_i) - \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{i=0}^l (s_i - r_i), \end{aligned}$$

l'inégalité voulue résulte donc du fait que  $\sum_{i=0}^n s_i = \sum_{i=0}^n r_i = \dim D'$  et de l'hypothèse

$$\sum_{i=0}^l (s_i - r_i) \leq 0.$$

Étape 2 : dans le cas général, le même raisonnement que l'étape 1 montre qu'il suffit de trouver un sous-ensemble  $\Omega'$  de  $\{1, \dots, d+1\}$  tel que :

- $t_H(D'_{L'}) \leq [K : L] \sum_{j \in \Omega'} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}$  ;
- $(\Omega', \alpha)$  est de type spécial et  $|\Omega' \cap I_i| = |\Omega \cap I_i| = c_i$  ;
- pour tout  $0 \leq l \leq n$

$$(5.4.4) \quad \dim(D' \cap D_{\leq l}) \leq \#\{j \in \Omega' \mid j \leq \dim D_{\leq l}\}.$$

Si  $0 \leq l \leq n$ , on note  $i(l)$  l'unique entier tel que  $\dim F_{i(l)} < \dim D_{\leq l} \leq \dim F_{i(l)+1}$ . Soit  $l_1$  le plus petit entier tel que

$$\dim(D' \cap D_{\leq l_1}) > \#\{j \in \Omega \mid j \leq \dim D_{\leq l_1}\}.$$

Si l'on pose

$$x_{l_1} = \dim D' \cap D_{\leq l_1} - \dim D' \cap F_{i(l_1)},$$

alors  $x_{l_1} > 0$  car

$$\dim D' \cap F_{i(l_1)} = \#\{j \in \Omega \mid j \leq \dim F_{i(l_1)}\}.$$

On définit le sous-ensemble  $\Omega'_1$  de  $\{1, \dots, d+1\}$ , en modifiant la définition de  $\Omega$ , par :

$$(5.4.5) \quad \begin{cases} \Omega'_1 \cap I_j &= \Omega \cap I_j & \text{si } j \neq i(l_1) \\ \Omega'_1 \cap I_{i(l_1)} &= \{\dim D_{\leq l_1} - x_{l_1} + 1, \dots, \dim D_{\leq l_1}\} \sqcup \\ & \{\dim F_{i(l_1)+1} - (c_{i(l_1)} - x_{l_1}) + 1, \dots, \dim F_{i(l_1)+1}\}. \end{cases}$$

Notons que  $c_{i(l_1)} - x_{l_1} \geq 0$  d'après l'hypothèse sur  $l_1$  et le théorème 5.16 (d). Si  $\Omega'_1$  vérifie (5.4.4), on pose  $\Omega' = \Omega'_1$  ; sinon, soit  $l_2$  le plus petit entier tel que (5.4.4) soit faux pour  $\Omega'_1$ . Alors  $l_2 > l_1$  et on a deux possibilités :

- Si  $i(l_2) > i(l_1)$ , on pose

$$x_{l_2} = \dim D' \cap D_{\leq l_2} - \dim D' \cap F_{i(l_2)},$$

Comme ci-dessus, on a  $x_{l_2} > 0$  et on définit  $\Omega'_2$  analogue à (5.4.5).

- Si  $i(l_1) = i(l_2)$ , on pose

$$x_{l_2} = \dim D' \cap D_{\leq l_2} - \dim D' \cap D_{\leq l_1}.$$

de sorte que  $0 < x_{l_2} \leq c_{i(l_1)} - x_{l_1}$ . On définit  $\Omega'_2$  en modifiant la définition de  $\Omega'_1$  par

$$\begin{aligned} & \Omega'_2 \cap \{\dim D_{\leq l_1} + 1, \dots, \dim F_{i(l_1)+1}\} \\ &= \{\dim D_{\leq l_2} - x_{l_2} + 1, \dots, \dim D_{\leq l_2}\} \sqcup \\ & \{\dim F_{i(l_1)+1} - (c_{i(l_1)} - x_{l_1} - x_{l_2}) + 1, \dots, \dim F_{i(l_1)+1}\}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un sous-ensemble  $\Omega'$  de  $\{1, \dots, d+1\}$  vérifiant les conditions demandées : les deux dernières résultent de la définition et la première résulte encore du corollaire 5.11 puisque  $D_{\leq i}$  est un bon sous-objet de  $D$ .  $\square$



### 5.5 Preuve de 5.22

Dans cette section, on prouve la proposition 5.22. On commence par un lemme :

**Lemme 5.24.** Soient  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  et  $\{a_i\}_{0 \leq i \leq k+1}$ ,  $\{c_i\}_{0 \leq i \leq k+1}$  des nombres réels vérifiant les conditions (i)-(iii) de la définition 5.21, alors il existe des nombres réels  $\{t_i\}_{1 \leq i \leq k}$  et  $r$  tels que

- (i)'  $\frac{t_1}{a_0} = \frac{t_2}{c_1} = \dots = \frac{t_k}{c_{k-1}} =: r$ ,  
(ii)' pour tout  $1 \leq l \leq k$ ,

$$\sum_{i=1}^l t_i \geq \sum_{i=1}^l (a_i - c_i),$$

- (iii)'  $\sum_{i=1}^k t_i - \sum_{i=1}^k (a_i - c_i) + r c_k \leq a_{k+1}$ .

*Démonstration.* On peut écrire, si les  $t_i$  existent,  $t_i = t_1 c_{i-1} / a_0$  pour  $1 \leq i \leq k$ , de sorte que (ii)' se traduit à

$$t_1 \left(1 + \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{l-1} c_i\right) \geq \sum_{i=1}^l (a_i - c_i),$$

et que (iii)' se traduit à

$$t_1 \left(1 + \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^k c_i\right) \leq a_{k+1} + \sum_{i=1}^k (a_i - c_i).$$

On prend  $t_1 = \max_{1 \leq l \leq k} \left\{ \left(1 + \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{l-1} c_i\right)^{-1} \sum_{i=1}^l (a_i - c_i) \right\}$  et  $t_i = t_1 c_{i-1} / a_0$ , alors (i)' et (ii)' sont satisfaits. Pour voir que les  $t_i$  ainsi définis satisfont à (iii)', il suffit de vérifier que pour  $1 \leq l \leq k$ ,

$$\left(\sum_{i=1}^l (a_i - c_i)\right) \left(1 + \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^k c_i\right) \leq \left(1 + \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{l-1} c_i\right) (a_{k+1} + \sum_{i=1}^k (a_i - c_i)),$$

qui est une conséquence facile des conditions (ii) et (iii).  $\square$

Dans la suite de cet article, si l'on se donne des réels  $\{a_i\}_{0 \leq i \leq k+1}$  et  $\{c_i\}_{0 \leq i \leq k+1}$  comme dans le lemme 5.24, on prendra les  $\{t_i\}_{1 \leq i \leq k}$  et  $r$  comme dans ce lemme tels que  $r$  est le plus petit possible.

*Démonstration de 5.22.* Grâce à la condition (b) :  $m_{j+1} - m_j \geq n_{j+1} - n_j$ , on peut supposer

$$\Omega = \{1 \leq j \leq d+1 \mid \text{il existe } 0 \leq l \leq n \text{ tel que } \sum_{i=0}^l a_i - c_l + 1 \leq j \leq \sum_{i=0}^l a_i\}.$$

Posons  $I = [0, d+1]$ . On prend deux fonctions lisses  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  telles que (toujours existent)

- $f'(x) \geq g'(x) \geq 0$  et  $\int_I f \leq \int_I g$
- pour  $0 \leq j \leq d$ ,  $f(j) = m_{j+1}$  et  $g(j) = n_{j+1}$ .

Le lemme 5.24 nous permet de définir des nombres  $\{t_i\}_{1 \leq i \leq k}$  vérifiant les conditions (i)'-(iii)'. Posons

$$J_i = \begin{cases} [0, a_0[ & \text{si } i = 0 \\ [\sum_{j=0}^i a_j - c_i, \sum_{j=0}^i a_j[ & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ \emptyset & \text{si } i = k + 1, \end{cases}$$

et

$$J'_i = \begin{cases} [0, a_0[ & \text{si } i = 0 \\ [a_0 + \sum_{j=1}^{i-1} (t_j + c_j) + t_i, a_0 + \sum_{j=1}^i (t_j + c_j)[ & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ \emptyset & \text{si } i = k + 1. \end{cases}$$

Alors on a  $|J_i| = |J'_i| = c_i$ ,  $\bigsqcup_{1 \leq i \leq k} J'_i \subset I$  et

$$\sum_{j \in \Omega} (m_j - n_j) \leq \sum_{i=0}^k \int_{J_i} (f - g) \leq \sum_{i=0}^k \int_{J'_i} (f - g) \leq \frac{1}{r+1} \int_I (f - g) \leq 0,$$

où la deuxième inégalité résulte de la condition (ii)', d'où le résultat.  $\square$

**Corollaire 5.25.** Soient  $(\Omega, \alpha)$  une paire de type spécial et des entiers  $\{m_j\}_{1 \leq j \leq d+1}$ ,  $\{n_j\}_{1 \leq j \leq d+1}$  vérifiant les conditions (a) et (b) de la proposition 5.22. Soient de plus  $a \leq b$  des entiers tels que (c') :  $a + \sum_{j=1}^{d+1} m_j \leq b + \sum_{j=1}^{d+1} n_j$ . Alors  $a + \sum_{j \in \Omega} m_j \leq b + \sum_{j \in \Omega} n_j$ .

*Démonstration.* En posant  $n'_j := (b - a)/(d + 1) + n_j$ , la proposition 5.22 assure que

$$\sum_{j \in \Omega} m_j \leq \frac{|\Omega|}{d+1} (b - a) + \sum_{j \in \Omega} n_j \leq (b - a) + \sum_{j \in \Omega} n_j$$

puisque  $b - a \geq 0$ .  $\square$

## 5.6 L'admissibilité : cas général

On considère le cas général :  $D = \bigoplus_{i=1}^v D_{H_i}$ . D'abord, la proposition 5.22 se généralise aisément :

**Proposition 5.26.** Soit  $\alpha = (d_1, \dots, d_v)$  une partition de  $d + 1$ , et pour tout  $1 \leq i \leq v$  soient  $\alpha_i$  une partition de  $d_i$  et  $\Omega_i$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, d_i\}$  tels que la paire  $(\Omega_i, \alpha_i)$  est de type spécial. On associe, à chaque paire  $(\Omega_i, \alpha_i)$ , le nombre réel positif  $r_i$  d'après le lemme 5.24, et on suppose  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_v$ . Posons

$$\Omega'_i = \{d_1 + \dots + d_{i-1} + l \mid l \in \Omega_i\}, \quad \Omega = \bigsqcup_i \Omega'_i$$

de sorte que  $\Omega$  est un sous-ensemble de  $\{1, \dots, d+1\}$ . Soient  $\{m_j\}_{1 \leq j \leq d+1}$  et  $\{n_j\}_{1 \leq j \leq d+1}$  des nombres réels vérifiant les conditions (a)-(c) de la proposition 5.22, alors on a  $\sum_{j \in \Omega} m_j \leq \sum_{j \in \Omega} n_j$ .

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle de 5.22 et on laisse les détails au lecteur.  $\square$

Posons maintenant, pour tout  $1 \leq i \leq v$ ,  $d_i = \dim D_{H_i}$  et  $D'_i = D' \cap D_{H_i}$  où  $D'$  est le sous-objet fixé de  $D$ . Comme  $D'_i$  est un sous-objet de  $D_{H_i}$ , on peut lui associer un drapeau  $\Delta_i = \Delta_{D'_i}$  d'après le théorème 5.16, puis un sous-ensemble  $\Omega_i$  de  $\{1, \dots, d_i\}$  et un nombre réel positif  $r_i$  comme dans le lemme 5.24. On peut supposer  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_v$ . Posons

$$\Omega'_i = \{d_1 + \dots + d_{i-1} + l \mid l \in \Omega_i\} \text{ et } \Omega = \bigsqcup_i \Omega'_i.$$

On a alors  $t_H(D') \leq \sum_{j \in \Omega} \sum_{\sigma} i_{j,\sigma}$  d'après le corollaire 5.11. Un argument analogue à la preuve du théorème 5.12, en utilisant la proposition 5.26 ci-dessus, nous permet de conclure dans le cas général.

## Bibliographie

- [BB] L. Berger & C. Breuil, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines* de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ , à paraître dans *Astérisque*.
- [BM] C. Breuil & A. Mézard, *Multiplicités modulaires et représentations de  $GL_2(\mathbb{Z}_p)$  et de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  en  $\ell = p$* , *Duke Math. J.* 115 (2002), 205-310.
- [BS] C. Breuil & P. Schneider, *First steps towards  $p$ -adic Langlands functoriality*, *J. Reine Angew. Math.* 610 (2007), 149-180.
- [Ca] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of  $p$ -adic reductive groups*, prépublication, 1995.
- [Cl] L. Clozel, *Motifs et formes automorphes : applications du principe de functorialité*, *Perspectives in Math.* 10, Academic Press, 1990, 77-159.
- [Co] P. Colmez, *Une correspondance de Langlands locale  $p$ -adique pour les représentations semi-stables de dimension 2*, prépublication, 2006.
- [De] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions  $L$* , *Lecture Notes in Math.* 349, Springer-Verlag, 1973, 501-597.
- [Em1] M. Emerton, *Locally analytic vectors in representations of locally  $p$ -adic analytic groups*, à paraître dans *Memoirs of the AMS*.
- [Em2] M. Emerton,  *$p$ -adic  $L$ -functions and unitary completions of representations of  $p$ -adic reductive groups*, *Duke Math. J.* 130 (2005), no. 2, 353-392.
- [Em3] M. Emerton, *Jacquet modules of locally analytic representations of  $p$ -adic reductive groups I. Construction and first properties*, *Ann. Sci. E. N. S.* 39 (2006), no. 5, 775-839.

- [Fo1] J.-M. Fontaine, *Représentations  $p$ -adiques semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 113-184.
- [Fo2] J.-M. Fontaine, *Représentations  $l$ -adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque 223, Soc. Math. de France, 1994, 321-347.
- [Ku] S. Kudla, *The local Langlands correspondence : the non-Archimedean case*, Proc. Symp. Pure Math. 55, Amer. Math. Soc., 1994, 365-410.
- [NH] G. Harder & M.S. Narasimhan, *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves*, Math. Ann. 212 (1975), 215-248.
- [ST] P. Schneider & J. Teitelbaum, *Banach-Hecke algebras and  $p$ -adic Galois representations*, Docum. Math., The Book Series 4 (J. Coates' Sixtieth Birthday), 2006, 631-684.
- [Vi] M.-F. Vignéras, *Représentations  $l$ -modulaires d'un groupe réductif  $p$ -adique avec  $l \neq p$* , Prog. in Math., vol. 137, Birkhäuser, 1996.
- [Ze] A. Zelevinsky, *Induced representations of reductive  $p$ -adic groups II*, Ann. Sci. E. N. S. 13 (1980), 165-210.



## Partie II

# Diagrammes canoniques et représentations modulo $p$ de $\mathrm{GL}_2(F)$

### 1 Introduction

Soient  $p$  un nombre premier et  $F$  un corps local complet pour une valuation discrète de corps résiduel fini de caractéristique  $p$ . L'étude des représentations lisses irréductibles avec caractère central de  $\mathrm{GL}_2(F)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  a été initiée par Barthel et Livné ([BL1], [BL2]). Ces représentations y sont classées en quatre "catégories" : les *caractères*, les *séries principales*, les *séries spéciales* et les *supersingulières*, et la structure des trois premières est complètement étudiée. Dans [Br1], Breuil a déterminé les supersingulières dans le cas particulier (mais important) où  $F = \mathbb{Q}_p$ , ce qui lui a permis de définir une bijection entre les classes d'isomorphisme de représentations supersingulières de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$  et les classes d'isomorphisme de représentations continues irréductibles de dimension 2 de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ . Mais, lorsque  $F \neq \mathbb{Q}_p$ , au moins lorsque  $F$  est une extension finie non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  de degré  $\geq 2$ , il existe une très grande quantité de représentations lisses admissibles supersingulières ([Pa1], [BP]).

Le but de ce chapitre est d'étudier des propriétés générales des représentations lisses (essentiellement supersingulières) avec caractère central de  $\mathrm{GL}_2(F)$ . Décrivons plus précisément le contenu.

Notons  $\mathcal{O}$  l'anneau des entiers de  $F$ ,  $\varpi$  une uniformisante de  $\mathcal{O}$  (fixée une fois pour toutes),

$$G = \mathrm{GL}_2(F), \quad K = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}),$$

et  $Z$  le centre de  $G$ . Soit  $(\sigma, V^\sigma)$  une représentation lisse irréductible de  $K$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  que l'on étend à  $KZ$  en envoyant  $\varpi$  sur l'identité. On note  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel des fonctions  $f : G \rightarrow V^\sigma$  à support compact modulo  $Z$  telles que  $f(kg) = \sigma(k)f(g)$  ( $k \in KZ, g \in G$ ) muni de l'action à gauche de  $G$  par translation à droite. Pour  $g \in G$  et  $v \in V^\sigma$ , on note  $[g, v]$  l'élément de  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  défini comme suit :

$$\begin{aligned} [g, v](g') &= \sigma(g'g)v && \text{si } g' \in KZg^{-1} \\ [g, v](g') &= 0 && \text{si } g' \notin KZg^{-1}. \end{aligned}$$

On note  $I^+(\sigma)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  engendré par les  $[g, \sigma]$  pour  $g \in P^+ := \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \{0\} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Autrement dit ([Co]),

$$I^+(\sigma) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \left[ \begin{pmatrix} \varpi^n & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma \right].$$

On pose  $I^-(\sigma) := \Pi \cdot I^+(\sigma)$  où  $\Pi := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix} \in G$ , de sorte que  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma = I^+(\sigma) \oplus I^-(\sigma)$ . On vérifie que  $I^+(\sigma)$  (resp.  $I^-(\sigma)$ ) est stable sous l'action de  $I$ , où  $I \subset K$  est le sous-groupe des matrices supérieures modulo  $\varpi$ .

Soient  $\pi$  une représentation lisse irréductible de  $G$  avec caractère central trivial sur  $\varpi \in Z$  et  $\sigma$  une sous- $K$ -représentation irréductible de  $\pi$ . On en déduit une surjection  $G$ -équivariante  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \pi$  par réciprocity de Frobenius. On note  $I^+(\sigma, \pi)$  (resp.  $I^-(\sigma, \pi)$ ) l'image de  $I^+(\sigma)$  (resp.  $I^-(\sigma)$ ) dans  $\pi$ . Par des arguments élémentaires (cf. §3), on démontre que l'espace vectoriel  $I^+(\sigma, \pi)$  (resp.  $I^-(\sigma, \pi)$ ) ne dépend pas du choix de  $\sigma$ , de sorte que l'on peut le noter  $I^+(\pi)$  (resp.  $I^-(\pi)$ ). En posant :

$$D_1(\pi) = I^+(\pi) \cap I^-(\pi), \quad D_0(\pi) = \langle K \cdot D_1(\pi) \rangle \subset \pi,$$

on obtient un diagramme ([Pa1]), appelé *diagramme canonique*, associé à  $\pi$  :

$$D(\pi) := (D_0(\pi), D_1(\pi), \mathrm{can})$$

où  $\mathrm{can}$  est l'inclusion  $D_1(\pi) \subseteq D_0(\pi)$ . Si  $\pi$  est une représentation lisse irréductible de  $G$  avec caractère central arbitraire, on écrit  $\pi = \bar{\pi} \otimes \chi \circ \det$  de telle sorte que  $\varpi$  agisse trivialement sur  $\pi'$ , et on définit leur *diagramme canonique* par :

$$D(\pi) := (D_0(\bar{\pi}) \otimes \chi \circ \det, D_1(\bar{\pi}) \otimes \chi \circ \det, \mathrm{can}).$$

Notre résultat principal de ce chapitre est le suivant.

**Théorème 1.1.** *Soient  $\pi$  et  $\pi'$  deux représentations lisses irréductibles de  $G$  avec caractère central. Alors  $\pi \cong \pi'$  si et seulement si  $D(\pi) \cong D(\pi')$  en tant que diagrammes.*

Dans certains cas, on peut déterminer explicitement le diagramme canonique (notons  $I_1 \subset I$  (resp.  $K_1 \subset K$ ) le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures (resp. égales à l'identité) modulo  $\varpi$ ) :

**Théorème 1.2.** *Soit  $\pi$  une représentation lisse irréductible de  $G$  avec caractère central. Alors on a  $\pi^{I_1} \subseteq D_1(\pi)$ , avec égalité si  $\pi$  est non supersingulière ou si  $F = \mathbb{Q}_p$ . De plus, si  $\pi$  est non supersingulière, alors  $D_0(\pi) = \pi^{K_1}$ .*

Mais malheureusement il ne semble pas facile de calculer  $D(\pi)$  dans le cas supersingulier général, même de déterminer s'il est ou non de dimension finie. Néanmoins, on peut clarifier le lien entre des propriétés de  $D(\pi)$  et des propriétés de  $\pi$ .

**Théorème 1.3.** *Si  $\pi$  est une représentation lisse irréductible de  $G$  avec caractère central, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $D_1(\pi)$  est de dimension finie ;
- (ii) pour une (ou, de manière équivalente, toute) surjection  $G$ -équivariante

$$\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \otimes \chi \circ \det \rightarrow \pi,$$

le noyau  $\mathcal{K}$  est de type fini en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module.

Si une de ces conditions est vérifiée, alors

- (iii)  $\pi$  est admissible ;
- (iv) l'espace vectoriel  $I^+(\pi) \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est de dimension finie.

Introduisons maintenant les principales (autres) notations de ce chapitre.

Notons  $\mathfrak{p} := \varpi\mathcal{O}$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}$  et  $q := p^f$  le cardinal du corps résiduel  $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ . On identifie  $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$  avec  $\mathbb{F}_q$  et on note  $[\lambda]$  le représentant multiplicatif dans  $\mathcal{O}$  pour  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ .

On note  $N$  le normalisateur de  $I$  dans  $G$ . Notons que  $N$  est engendré par  $I$  et  $\Pi$  en tant que sous-groupe de  $G$ . Pour  $n \geq 1$ , on note

$$K_n := \begin{pmatrix} 1 + \mathfrak{p}^n & \mathfrak{p}^n \\ \mathfrak{p}^n & 1 + \mathfrak{p}^n \end{pmatrix}, \quad I_n := \begin{pmatrix} 1 + \mathfrak{p}^n & \mathfrak{p}^{n-1} \\ \mathfrak{p}^n & 1 + \mathfrak{p}^n \end{pmatrix},$$

et  $U^+ = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (resp.  $U^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{O} & 1 \end{pmatrix}$ ) le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures (resp. inférieures) de telle sorte que  $I_1 \cap U^+ = \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (resp.  $I_1 \cap U^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{O} & 1 \end{pmatrix}$ ). On note  $\mathcal{H}$  le sous-groupe des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\mu] \end{pmatrix}$  avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_q$ .

Toutes les représentations considérées dans ce chapitre sont sur des  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espaces vectoriels. Pour celles de  $G$ , on suppose qu'elles admettent un caractère central. On désigne par  $\underline{\mathrm{Rep}}_G$  (resp.  $\underline{\mathrm{Rep}}_K$ ,  $\underline{\mathrm{Rep}}_I$ , etc.) la catégorie des représentations lisses de  $G$  (resp.  $K$ ,  $I$ , etc.) sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  (avec caractère central pour celles de  $G$ ).

On pose  $\alpha : I \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  le caractère envoyant  $\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \in I$  sur  $\overline{ad}^{-1}$  (où  $\overline{x} \in \mathbb{F}_q$  désigne la réduction modulo  $\varpi$  de  $x \in \mathcal{O}_F$ ). Si  $\chi : I \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  est un caractère, on pose  $\chi^s := \chi(\Pi \cdot \Pi)$ .

Si  $\sigma$  est une représentation irréductible de  $K$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ , on note  $\chi_\sigma$  le caractère donnant l'action de  $I$  sur  $\sigma^{I_1}$  (qui est de dimension 1) et on pose  $\sigma^{[s]}$  l'unique représentation irréductible de  $K$  distincte avec  $\sigma$  et telle que  $I$  agisse sur  $(\sigma^{[s]})^{I_1}$  via  $\chi_\sigma^s$ .

Si  $S$  est une représentation lisse d'un groupe profini  $H$  (par exemple  $H = K$  ou  $I$ ), on définit le socle de  $S$ , noté  $\mathrm{soc}_H(S)$ , comme la plus grande sous-représentation semi-simple de  $S$ . De même, on définit le radical de  $S$ , noté  $\mathrm{rad}_H(S)$ , comme la plus petite sous-représentation de  $S$  telle que le quotient  $S/\mathrm{rad}_H(S)$  soit semi-simple. On appelle  $S/\mathrm{rad}_H(S)$  le cosocle de  $S$ , noté  $\mathrm{cosoc}_H(S)$ .

**N.B.** *Les références citées dans ce chapitre se trouvent à la fin du chapitre III.*



## 2 Rappels et compléments

Dans ce paragraphe, on rappelle des résultats de [BL2] et [Br1], et on fournit des préliminaires pour le paragraphe suivant.

### 2.1 L'algèbre de Hecke (n°2.1-2.5, [Br1])

Dans cette section, on rappelle des résultats sur l'induction compacte et sur l'algèbre de Hecke.

Toute représentation irréductible de  $K$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  est triviale sur  $K_1$ , donc est une représentation de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \cong K/K_1$ . Un *poide* (ou *poide de Serre*) est par définition une telle représentation. Tout poide est, à torsion près par les caractères (et à isomorphisme près), de la forme (cf. proposition 1, [BL2])

$$\mathrm{Sym}^{r_0} \overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes (\mathrm{Sym}^{r_1} \overline{\mathbb{F}}_p^2)^{\mathrm{Fr}} \otimes \dots \otimes (\mathrm{Sym}^{r_{f-1}} \overline{\mathbb{F}}_p^2)^{\mathrm{Fr}^{f-1}}$$

où  $r_i$  sont des entiers entre 0 et  $p-1$  et  $\mathrm{Fr} : \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$  est l'automorphisme induit par le Frobenius  $x \mapsto x^p$ .

On fixe  $\sigma$  un poide sur un  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel  $V^\sigma$  que l'on étend à  $KZ$  en envoyant  $\varpi$  sur l'identité. On note  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  le  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -espace vectoriel des fonctions  $f$  de  $G$  dans  $V^\sigma$  à support compact modulo  $Z$  telles que  $f(kg) = \sigma(k) \cdot f(g)$  (pour  $g \in G, k \in KZ$ ) muni de l'action à gauche de  $G : (g \cdot f)(g') = f(g'g)$ . Pour  $g \in G$  et  $v \in V^\sigma$ , on note  $[g, v]$  l'élément de  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  défini comme suit :

$$\begin{aligned} [g, v](g') &= \sigma(g'g)v & \text{si } g' \in KZg^{-1} \\ [g, v](g') &= 0 & \text{si } g' \notin KZg^{-1}. \end{aligned}$$

On a alors  $g[g', v] = [gg', v]$  et  $[gk, v] = [g, \sigma(k)v]$  si  $k \in KZ$ . On définit pour  $n \geq 0$  :

$$R_n^+ := \left[ \begin{pmatrix} \varpi^n & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma \right], \quad R_n^- := \Pi \cdot R_n^+.$$

En particulier,  $R_0^+ = [\mathrm{Id}, \sigma]$  où  $\mathrm{Id} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ . Posons  $R_0 := R_0^+$  et  $R_n := R_n^+ \oplus R_{n-1}^-$  pour  $n \geq 1$ .

Le lemme suivant est élémentaire :

**Lemme 2.1.** (i) Pour tout  $n \geq 0$ ,  $R_n^+$  et  $R_n^-$  sont stables sous l'action de  $IZ$ .

(ii) Pour tout  $n \geq 0$ ,  $R_n$  est stable sous l'action de  $KZ$ . Pour  $n \geq 1$ ,  $R_n$  est engendrée par  $R_{n-1}^-$  (dans  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ ) en tant que  $KZ$ -représentation.

(iii) On a la décomposition  $(\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma)|_{KZ} = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ .

*Démonstration.* Le (i) découle de la preuve du lemme 3.3, [Pa2]. Montrons le (ii). D'après (i) et la décomposition

$$K = I \prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \left( \prod \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} I \right),$$

il suffit de vérifier que  $\begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R_{n-1}^- \subset R_n$  et que  $\begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R_n^+ \subset R_n$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ . Le premier énoncé résulte de l'égalité (où  $a \in \mathcal{O}$ )

$$\begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi^{n-1} & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi^n & [\lambda] + \varpi a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour le deuxième, on utilise

$$\begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi^n [\lambda] & x \\ \varpi^n & a \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \varpi^n & a^{-1}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a^{-1} & 0 \\ \varpi^n & a \end{pmatrix} & \text{si } a \in \mathcal{O}^\times \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi^n & ax^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ \varpi^n [\lambda] & x \end{pmatrix} & \text{si } a \in \varpi\mathcal{O} \end{cases}$$

et que, si  $a \in \varpi\mathcal{O}$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi^n & ax^{-1} \end{pmatrix} = \Pi \cdot \begin{pmatrix} \varpi^{n-1} & a\varpi^{-1}x^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où on a posé  $x = 1 + a[\lambda]$  qui est inversible lorsque  $a \in \varpi\mathcal{O}$ . Enfin, le dernier énoncé du (ii) et le (iii) sont immédiats.  $\square$

L'algèbre de Hecke relativement à  $KZ$  et à  $\sigma$  est par définition l'algèbre

$$\text{End}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma)$$

qui, par réciprocity de Frobenius, s'identifie à l'algèbre de convolution des fonctions  $\varphi : G \rightarrow \text{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V^\sigma)$  à support compact modulo  $Z$  telles que :

$$(2.1.1) \quad \varphi(k_1 g k_2) = \sigma(k_1) \circ \varphi(g) \circ \sigma(k_2)$$

pour  $k_1, k_2 \in KZ$  et  $g \in G$ . Si  $\varphi$  est une telle fonction et  $T$  est l'endomorphisme correspondant de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , alors on a la formule

$$T([g, v]) = \sum_{g' KZ \in G/KZ} [gg', \varphi(g'^{-1})(v)].$$

Soient  $\varphi : G \rightarrow \text{End}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(V^\sigma)$  l'unique fonction à support dans  $KZ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{pmatrix} KZ$  vérifiant (2.1.1) et telle que  $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{pmatrix}\right) = U_{r_1} \otimes \cdots \otimes U_{r_f}$  (voir n°2.7, [Br1] pour cette notation), et  $T$  l'opérateur de Hecke correspondant. D'après la proposition 8, [BL2], l'algèbre  $\text{End}_G(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma)$  est isomorphe à l'algèbre des polynômes  $\overline{\mathbb{F}}_p[T]$ . Si  $n \geq 1$ , on vérifie que  $T(R_n^-) \subseteq R_{n+1}^- \oplus R_{n-1}^-$  et que l'opérateur  $T|_{R_n^-} : R_n^- \rightarrow R_{n+1}^- \oplus R_{n-1}^-$  est la somme d'une injection  $IZ$ -équivariante  $T^+|_{R_n^-} : R_n^- \hookrightarrow R_{n+1}^-$  et d'une surjection  $IZ$ -équivariante  $T^-|_{R_n^-} : R_n^- \twoheadrightarrow R_{n-1}^-$  (voir (6) du n°2.5, [Br1]).

**Lemme 2.2.** Soient  $k \geq 0$  un entier,  $f \in \oplus_{n \geq k} R_n^-$  et  $P(T) \in \overline{\mathbb{F}}_p[T]$  un polynôme de degré  $\geq 1$ . Alors il existe  $f' \in \oplus_{n \geq k+1} R_n^-$ , dépendant de  $f$  et de  $P(T)$ , tel que

$$f + f' \in P(T)(\oplus_{n \geq k+1} R_n^-).$$

*Démonstration.* Comme  $\deg P(T) \geq 1$ , on peut écrire  $P(T) = (T - \lambda)P_1(T)$  avec  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$  et  $P_1(T) \in \overline{\mathbb{F}}_p[T]$  un polynôme vérifiant  $\deg P_1(T) < \deg P(T)$ . Soit  $h \in \bigoplus_{n \geq k+1} R_n^-$  un élément tel que  $T^-(h) = f$ . Si  $\deg P_1(T) = 0$ , alors  $f' := T^+(h) - \lambda h$  satisfait à la condition demandée. Sinon, par récurrence sur le degré de  $P(T)$ , on peut trouver  $h', h'' \in \bigoplus_{n \geq k+2} R_n^-$  tels que  $h + h' = P_1(T)(h'')$ , et donc

$$\begin{aligned} P(T)(h'') &= (T - \lambda)(h + h') \\ &= T^-(h) + T^+(h) - \lambda h + (T - \lambda)(h') \\ &= f + (T^+(h) - \lambda h + (T - \lambda)(h')). \end{aligned}$$

Comme  $h' \in \bigoplus_{n \geq k+2} R_n^-$  et  $h \in \bigoplus_{n \geq k+1} R_n^-$ , le vecteur

$$f' := T^+(h) - \lambda h + (T - \lambda)(h')$$

appartient à  $\bigoplus_{n \geq k+1} R_n^-$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

**Notation :** Si  $\pi$  est un  $G$ -quotient non trivial de  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , on note  $R_n(\sigma, \pi)$  (resp.  $R_n^+(\sigma, \pi)$ ,  $R_n^-(\sigma, \pi)$ ) l'image de  $R_n$  (resp.  $R_n^+$ ,  $R_n^-$ ) dans  $\pi$ .

**Proposition 2.3.** Soient  $\pi$  un  $G$ -quotient non trivial de  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  et  $v_0 \in \sigma$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$ . Notons  $[\mathrm{Id}, v_0]$  l'image de  $[\mathrm{Id}, v_0] \in \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  dans  $\pi$ . Alors

- (i)  $[\mathrm{Id}, v_0] \in \sum_{n \geq 0} R_n^-(\sigma, \pi)$  ;
- (ii)  $R_0(\sigma, \pi) \subset \sum_{n \geq 1} R_n(\sigma, \pi)$ .

*Démonstration.* (i) Par la preuve du lemme 3.2, [Pa3], on voit que la surjection  $G$ -équivariante  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \pi$  se factorise à travers

$$\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T) \rightarrow \pi$$

où  $P(T) \in \overline{\mathbb{F}}_p[T]$  est un polynôme de degré  $\geq 1$  (remarquons que la preuve utilise la proposition 32 [BL2] qui reste vraie pour tout  $G$ -quotient *non trivial* de  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ ). Il suffit donc de vérifier que

$$(2.1.2) \quad [\mathrm{Id}, v_0] \in P(T)(\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma) + (\bigoplus_{n \geq 0} R_n^-).$$

Écrivons  $P(T) = (T - \lambda)P_1(T)$  avec  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$  et  $P_1(T) \in \overline{\mathbb{F}}_p[T]$  un polynôme vérifiant  $\deg P_1(T) < \deg P(T)$ . Posons

$$f = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}, v_0 \right] = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v_0 \right] \in R_0^-,$$

alors un calcul facile montre que (en utilisant (8), n°2.5, [Br1]) :

$$(2.1.3) \quad (T - \lambda)(f) = [\mathrm{Id}, v_0] + h$$

avec  $h \in \bigoplus_{n \geq 0} R_n^-$ . Si  $\deg P_1(T) = 0$ , i.e.  $P(T) = a(T - \lambda)$  avec  $a \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ , alors (2.1.2) est déjà prouvé par (2.1.3). Sinon, d'après le lemme 2.2, il existe  $f' \in \bigoplus_{n \geq 1} R_n^-$  tel que  $f + f' \in P_1(T)(\bigoplus_{n \geq 1} R_n^-)$ , et donc par (2.1.3) :

$$[\text{Id}, v_0] + h + (T - \lambda)(f') \in P(T)(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma).$$

Cela entraîne (2.1.2) et termine la preuve de (i).

(ii) Comme  $R_0(\sigma, \pi) = \sigma$  est engendrée par  $[\text{Id}, v_0]$  en tant que  $K$ -représentation et que  $\sum_{n \geq 1} R_n(\sigma, \pi)$  est une  $K$ -représentation contenant  $\sum_{n \geq 0} R_n^-(\sigma, \pi)$ , (ii) découle de (i).  $\square$

**Remarque 2.4.** Comme  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  est réductible (théorème 25, [BL2]) et non admissible (proposition 14 (2), *loc. cit.*), la proposition 2.3 s'applique en particulier lorsque  $\pi$  est un  $G$ -quotient irréductible ou admissible de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ .

## 2.2 Le foncteur $\text{Ind}_I^K$

Dans cette section, on fournit des propriétés du foncteur  $\text{Ind}_I^K : \underline{\text{Rep}}_I \rightarrow \underline{\text{Rep}}_K$  qui, à une représentation lisse  $M$  de  $I$ , associe la représentation induite  $\text{Ind}_I^K M$  de  $K$ .

Si  $M$  est une représentation lisse de  $I$  et  $W = \text{Ind}_I^K M$  est la  $K$ -représentation induite (définie de la même façon que  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ ), on pose  $\text{pr}_M : W \rightarrow M$  le  $I$ -morphisme naturel induit par  $\text{Id} : W \xrightarrow{\sim} W$  par réciprocity de Frobenius. Plus précisément, si

$$f = a_1[1, v_1] + \sum_{g \in K/I, g \neq 1} a_g[g, v_g] \in \text{Ind}_I^K M$$

avec  $a_g \in \overline{\mathbb{F}}_p$  et  $v_g \in M$  pour tout  $g \in K/I$ , alors  $\text{pr}_M(f) := a_1 v_1$ . Ce morphisme ( $I$ -équivariant) admet une section  $i_M : v \in M \mapsto [1, v] \in W$ . Ceci réalise la décomposition de Mackey pour  $W$  en tant que  $I$ -représentation :

$$W = \text{Ind}_I^K M = M \oplus W^+$$

avec  $W^+$  le noyau de  $\text{pr}_M$ . L'espace sous-jacent à  $W^+$  est l'espace vectoriel engendré par

$$\left\{ \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, v], v \in M, 0 \leq k \leq q-1 \right\}.$$

Le lemme suivant sera utilisé de manière cruciale au §3 (voir le lemme 3.1).

**Lemme 2.5.** *Conservons les notations précédentes. Soit  $Q$  une  $K$ -représentation engendrée par  $M$ . Soient  $W_1$  le noyau du morphisme naturel  $W = \text{Ind}_I^K M \rightarrow Q$ ,  $M_1 \subset M$  l'image de  $W_1$  par  $\text{pr}_M$  et  $Q^+$  l'image de  $W^+$  dans  $Q$ . Alors on a  $M_1 = M \cap Q^+$  et  $W_1 \subseteq \text{Ind}_I^K M_1$ ; de plus,  $M_1$  est la plus petite sous-représentation de  $M$  ayant la dernière propriété.*

*Démonstration.* On a le diagramme commutatif suivant à lignes et à colonnes exactes (par le lemme du serpent)

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & 0 & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & W^+ & \longrightarrow & Q^+ & \longrightarrow 0 \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & Q & \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \text{pr}_M & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/M_1 & \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & 
\end{array}$$

En voyant  $M$  comme sous-espace de  $Q$  via

$$M \xrightarrow{i_M} W \rightarrow Q,$$

on voit que, si  $x \in M$ , alors  $x \in Q^+$  si et seulement si  $x \in M_1$ , d'où le premier énoncé.

Pour les autres, en remplaçant  $M$  par  $M/M_1$  et  $W_1$  par  $W_1/(W_1 \cap \text{Ind}_I^K M_1)$ , on est ramené à montrer l'énoncé suivant : *si  $W_1 \subset \text{Ind}_I^K M$  est une sous- $K$ -représentation, alors  $W_1 = 0$  si et seulement si  $M_1 = 0$ .* Ceci est une conséquence directe de la réciprocity de Frobenius.  $\square$

Si  $(\rho, M)$  est une représentation de  $I$ , on note  $(\Pi(\rho), \Pi(M))$  la représentation de  $I$  définie par

$$(2.2.1) \quad \Pi(\rho)(h) \cdot \Pi(v) := \rho(\Pi^{-1}h\Pi) \cdot v$$

pour  $h \in I$  et  $v \in M$ .

**Remarque 2.6.** Si  $(\rho, M')$  est une représentation de  $N$  et si  $M \subset M'$  est un sous-espace vectoriel stable sous l'action de  $I$ , alors l'espace  $\Pi(M)$  est aussi stable par  $I$  avec l'action (de  $I$ ) définie par (2.2.1).

**Proposition 2.7.** Soient  $M$  une représentation lisse de  $I$  et  $M^{I_1 \cap U^+}$  le sous-espace des  $I_1 \cap U^+$ -invariants. Posons  $W = \text{Ind}_I^K \Pi(M)$  et  $W^+ \subset W$  le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\left\{ F_{k,v} := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)], \quad v \in M, \quad 0 \leq k \leq q-1 \right\}.$$

(i) Pour tout  $v \in M^{I_1 \cap U^+}$ , on a  $F_{0,v} \in (W^+)^{I_1 \cap U^+}$ .

(ii) L'espace vectoriel  $(W^+)^{I_1 \cap U^+}$  est engendré par les vecteurs  $\{F_{0,v}, v \in M^{I_1 \cap U^+}\}$ .

*Démonstration.* (i) Si  $v \in M^{I_1 \cap U^+}$  et si  $x = \sum_{n \geq 0} \varpi^n [\mu_n] \in \mathcal{O}$  avec  $\mu_n \in \mathbb{F}_q$ , alors

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_{0,v} &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)] \\
 &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\mu_0] + [\lambda] + \sum_{n \geq 1} \varpi^n [\mu_n] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)] \\
 &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\mu_0 + \lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi X & 1 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)] \\
 &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\mu_0 + \lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi\left(\begin{pmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v\right)] \\
 &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\mu_0 + \lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)] \\
 &= F_{0,v}
 \end{aligned}$$

avec  $X \in \mathcal{O}$  dépendant de  $x$  et de  $\lambda$ . Cela entraîne que  $F_{0,v} \in W^+$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$ .

(ii) Évidemment, il suffit de montrer (ii) pour des vecteurs propres de  $\mathcal{H}$ . Soit donc  $f \in W^+$  un vecteur propre de  $\mathcal{H}$  fixé par  $I_1 \cap U^+$ . Écrivons  $f$  sous la forme  $f = \sum_{i=0}^{q-1} F_{i,v_i}$  avec  $v_i \in M$  des vecteurs propres de  $\mathcal{H}$  (ce qui est toujours possible). Alors il suffit de montrer que  $v_0 \in M^{I_1 \cap U^+}$  et que  $v_i = 0$  pour tout  $i > 0$ .

Soit d'abord  $i_0 > 0$  un indice fixé tel que  $v_{i_0} \neq 0$ . Comme  $I_1 \cap U^+$  est un pro- $p$ -groupe, la représentation  $\langle (I_1 \cap U^+) \cdot v_{i_0} \rangle$  possède des  $I_1 \cap U^+$ -invariants non nuls, donc il existe un élément  $Q \in \overline{\mathbb{F}_p}[I_1 \cap U^+]$  tel que  $Qv_{i_0} \neq 0$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$ . De plus, en changeant  $i_0$  et  $Q$  éventuellement, on peut supposer que  $Qv_i$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$  pour tout  $i > 0$  (encore avec  $Qv_{i_0} \neq 0$ ). Par la formule suivante (avec  $a \in \mathcal{O}$  et  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ ) :

$$(2.2.2) \quad \begin{pmatrix} 1 & \varpi a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on voit que  $F_{i,Qv_i}$  est fixé par  $\begin{pmatrix} 1 & \varpi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  pour tout  $i > 0$ . Puis, encore d'après (2.2.2), il existe  $Q' \in \overline{\mathbb{F}_p}[I_1 \cap U^+]$  vérifiant

$$(2.2.3) \quad Q'f = \sum_{i=0}^{q-1} Q'F_{i,v_i} = \sum_{i=0}^{q-1} F_{i,Qv_i},$$

donc  $F_{0,Qv_0}$  est aussi fixé par  $\begin{pmatrix} 1 & \varpi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Maintenant, les  $F_{i,Qv_i}$  étant fixés par  $\begin{pmatrix} 1 & \varpi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  pour *tout*  $i \geq 0$ , on peut parler l'action du groupe  $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . D'après la démonstration du lemme 2, [BL2], les représentations de  $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  qu'ils engendrent sont non isomorphes et la représentation résultée est de dimension 1 si et seulement si  $i = 0$ . On en déduit avec l'égalité (2.2.3) que  $F_{i,Qv_i} = 0$  et puis  $Qv_i = 0$  pour tout  $i > 0$ , ce qui est impossible puisque  $Qv_{i_0} \neq 0$ . Cette contradiction montre que  $v_i = 0$  pour tout  $i > 0$  et donc  $f = F_{0,v_0}$ . Enfin, l'équation (2.2.2) permet de conclure que  $v_0$  est fixé par  $I_1 \cap U^+$ .  $\square$

Rappelons que si  $\sigma$  est un poids, on a défini les sous- $I$ -représentations  $R_n^+$  ( $n \geq 0$ ) de  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  (cf. n°2.1).

**Corollaire 2.8.** *On a*

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p}(R_n^+)^{I_1 \cap U^+} = 1$$

pour tout  $n \geq 0$ .

*Démonstration.* Comme l'énoncé est vrai pour  $n = 0$  (lemme 2, [BL2]), par récurrence, il suffit de démontrer que

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p}(R_n^+)^{I_1 \cap U^+} = 1 \implies \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p}(R_{n+1}^+)^{I_1 \cap U^+} = 1$$

qui est une conséquence du lemme 2.7. □

### 3 Le diagramme canonique

Dans ce paragraphe, après des préliminaires au n°3.1, on définit (au n°3.2) le diagramme canonique associé à une représentation lisse irréductible de  $G$  et on démontre que ce diagramme détermine la classe d'isomorphisme de la représentation de départ.

#### 3.1 Préliminaires

Suivant [Co], si  $\sigma$  est un poids, on note  $I^+(\sigma)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  engendré par les  $[g, \sigma]$  pour  $g \in P^+ := \begin{pmatrix} \mathcal{O}^{-\{0\}} & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Autrement dit,

$$I^+(\sigma) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \left[ \begin{pmatrix} \varpi^n & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma \right] = \bigoplus_{n \geq 0} R_n^+.$$

On pose  $I^-(\sigma) := \Pi \cdot I^+(\sigma)$  de sorte que  $I^-(\sigma) = \bigoplus_{n \geq 0} R_n^-$  et que  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma = I^+(\sigma) \oplus I^-(\sigma)$ . Les espaces vectoriels  $I^+(\sigma)$  et  $I^-(\sigma)$  sont stables sous l'action de  $I_Z$ , et  $I^-(\sigma)$  engendre  $\bigoplus_{n \geq 1} R_n$  (dans  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ ) sous l'action de  $K$  (lemme 2.1).

**Notation :** Si  $\chi : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  est un caractère lisse, on définit  $I^+(\pi)$  (resp.  $I^-(\pi)$ ) pour la représentation tordue  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \otimes \chi \circ \det$  par le même espace vectoriel sous-jacent que ci-dessus mais avec l'action tordue de  $I$ .

Dans la suite, on fixe  $\sigma$  un poids,  $\chi : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  un caractère lisse et  $\pi$  un  $G$ -quotient non trivial (pas forcément irréductible ou admissible) de  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \otimes \chi \circ \det$ . On note  $I^+(\sigma, \pi)$  (resp.  $I^-(\sigma, \pi)$ ) l'image de  $I^+(\sigma)$  (resp.  $I^-(\sigma)$ ) dans  $\pi$ .

Il résulte du lemme 2.1 et de la proposition 2.3 (ii) que  $I^-(\sigma, \pi)$  engendre entièrement l'espace vectoriel sous-jacent de  $\pi$  sous l'action de  $K$ , de sorte que l'on obtient par réciprocity de Frobenius une surjection  $K$ -équivariante

$$\mathrm{Ind}_I^K I^-(\sigma, \pi) \twoheadrightarrow \pi.$$

On note  $W(\sigma, \pi)$  son noyau.

D'après le lemme 2.5, appliqué à  $M = I^-(\sigma, \pi)$  et à  $W^+ = \sum_{n \geq 1} R_n^+(\sigma, \pi)$ , on voit que  $W(\sigma, \pi)$  est contenu dans la représentation  $\text{Ind}_I^K(\sum_{n \geq 1} R_n^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi))$ , *a fortiori* dans  $\text{Ind}_I^K(I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi))$ . Autrement dit :

**Lemme 3.1.** *Pour toute égalité dans  $\pi$  de la forme*

$$0 = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_\lambda + \Pi(w)$$

avec  $w, w_\lambda \in I^+(\sigma, \pi)$ , on a  $w, w_\lambda \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ .

*Démonstration.* Par ce qui précède, c'est une conséquence du lemme 2.5.  $\square$

**Remarque 3.2.** On a une variante utile du lemme 3.1 : pour toute égalité dans  $\pi$  de la forme

$$0 = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^i \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_i + \Pi(w)$$

avec  $w, w_i \in I^+(\sigma, \pi)$ , on a  $w, w_i \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ .

**Remarque 3.3.** La raison principale pour laquelle on considère  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  plutôt que  $\sum_{n \geq 1} R_n^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  est que le premier est stable sous l'action de  $\Pi$  (voir la définition 3.16 plus tard). Voir aussi le lemme 3.4 ci-dessous.

Notons  $\mathcal{N}$  le noyau de la surjection naturelle  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \otimes \chi \circ \det \rightarrow \pi$ . Considérons le morphisme composé :

$$\Phi_\sigma = \Phi_{\sigma, \pi} : \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \otimes \chi \circ \det \rightarrow I^-(\sigma) \rightarrow I^-(\sigma, \pi).$$

**Lemme 3.4.** *L'espace  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  est l'image de  $\mathcal{N}$  via  $\Phi_\sigma$ .*

*Démonstration.* Si  $f = f^+ + f^- \in \mathcal{N}$  avec  $f^+ \in I^+(\sigma)$  et  $f^- \in I^-(\sigma)$  et si l'on note  $\overline{f^+}$  (resp.  $\overline{f^-}$ ) l'image de  $f^+$  (resp.  $f^-$ ) dans  $\pi$ , alors par définition,

$$\Phi_\sigma(f) = \overline{f^-} = -\overline{f^+} \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi).$$

Réciproquement, soit  $\overline{f} \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ , et  $f^+$  (resp.  $f^-$ ) un relèvement de  $\overline{f}$  dans  $I^+(\sigma)$  (resp.  $I^-(\sigma)$ ), alors  $f := -f^+ + f^-$  est un élément dans  $\mathcal{N}$  vérifiant  $\Phi_\sigma(f) = \overline{f}$ .  $\square$

À cause des lemmes 3.1 et 3.4, on étudie en détail la  $I$ -représentation  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ .

Par définition, l'espace vectoriel  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  est stable sous l'action de  $\Pi$  (puisque  $\Pi^2 = \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \in Z$  et que  $\pi$  admet un caractère central). Tout  $v \in \pi$  s'écrit sous la forme  $v = v^+ + v^-$  avec  $v^+ \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $v^- \in I^-(\sigma, \pi)$ , et une telle décomposition est *unique* au sens où, si  $v = v_1^+ + v_1^-$  est une autre décomposition, alors on a

$$v^+ - v_1^+ = -v^- + v_1^- \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi).$$



Posons  $I^{+,0}(\sigma, \pi) = I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  et par récurrence,

$$(3.1.1) \quad I^{+,n}(\sigma, \pi) = I^+(\sigma, \pi) \cap \langle K \cdot \Pi(I^{+,n-1}(\sigma, \pi)) \rangle.$$

**Lemme 3.5.** *Pour tout  $n \geq 1$ , on a*

- (i)  $I^{+,n-1}(\sigma, \pi) \subseteq I^{+,n}(\sigma, \pi)$  ;
- (ii)  $\langle K \cdot \Pi(I^{+,n-1}(\sigma, \pi)) \rangle = \Pi(I^{+,n-1}(\sigma, \pi)) + I^{+,n}(\sigma, \pi)$ .

*Démonstration.* (i) Par définition,  $\Pi(I^{+,0}(\sigma, \pi)) = I^{+,0}(\sigma, \pi)$ , donc

$$I^{+,1}(\sigma, \pi) = I^+(\sigma, \pi) \cap \langle K \cdot I^{+,0}(\sigma, \pi) \rangle \supseteq I^{+,0}(\sigma, \pi),$$

ce qui prouve l'énoncé dans le cas  $n = 1$ . Si  $n \geq 2$ , alors par récurrence :

$$\begin{aligned} I^{+,n}(\sigma, \pi) &= I^+(\sigma, \pi) \cap \langle K \cdot \Pi(I^{+,n-1}(\sigma, \pi)) \rangle \\ &\supseteq I^+(\sigma, \pi) \cap \langle K \cdot \Pi(I^{+,n-2}(\sigma, \pi)) \rangle \\ &= I^{+,n-1}(\sigma, \pi). \end{aligned}$$

(ii) L'inclusion  $\supseteq$  découle de la définition (3.1.1) et l'inclusion  $\subseteq$  découle de la décomposition  $K = I \prod \left( \prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} I \right)$  (cf. la démonstration du lemme 2.1 (ii)).  $\square$

À l'aide de  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ , on pose la définition suivante :

**Définition 3.6.** Pour  $v \in \pi$ , on définit le *niveau* de  $v$  (relatif à  $\sigma$ ), noté  $\ell_\sigma(v)$ , comme suit :

- (i) supposons  $v \in I^+(\sigma, \pi)$ , on pose
  - $\ell_\sigma(v) := 0$  si  $v \in I^{+,0}(\sigma, \pi)$  ;
  - $\ell_\sigma(v) := n$  si  $v \in I^{+,n}(\sigma, \pi) \setminus I^{+,n-1}(\sigma, \pi)$  ;
- (ii) supposons  $v \in I^-(\sigma, \pi)$ , on pose  $\ell_\sigma(v) := \ell_\sigma(\Pi(v))$  ;
- (iii) enfin, pour  $v = v^+ + v^- \in \pi$  avec  $v^+ \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $v^- \in I^-(\sigma, \pi)$ , on pose  $\ell_\sigma(v) := \max\{\ell_\sigma(v^+), \ell_\sigma(v^-)\}$ .

**Remarque 3.7.** Comme le groupe  $G$  est engendré par  $K$  et  $\Pi$  et que  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  contient un  $G$ -générateur de  $\pi$  (proposition 2.3 (i)), on a  $\ell_\sigma(v) < +\infty$  pour tout  $v \in \pi$ . Par ailleurs,  $\ell_\sigma(v)$  dans (iii) est bien défini puisque  $\ell_\sigma(v^+)$  et  $\ell_\sigma(v^-)$  ne dépendent que de  $v$ .

Donnons des propriétés concernant  $\ell_\sigma(\cdot)$ .

**Lemme 3.8.** (i) Si  $v_1, v_2 \in \pi$ , alors  $\ell_\sigma(v_1 + v_2) \leq \max\{\ell_\sigma(v_1), \ell_\sigma(v_2)\}$  ; si  $\ell_\sigma(v_1) \neq \ell_\sigma(v_2)$ , alors  $\ell_\sigma(v_1 + v_2) = \max\{\ell_\sigma(v_1), \ell_\sigma(v_2)\}$ .

(ii) Si  $v \in I^+(\sigma, \pi)$  (resp.  $v \in I^-(\sigma, \pi)$ ) est un vecteur tel que  $\ell_\sigma(v) = n \geq 1$  et si l'on pose

$$F_{0,v} := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v,$$

alors  $\ell_\sigma(F_{0,v}) = n + 1$  (resp.  $\ell_\sigma(F_{0,v}) \leq n$ ).

*Démonstration.* (i) C'est une conséquence triviale de la définition 3.6.

(ii) Supposons d'abord  $v \in I^-(\sigma, \pi)$ , alors

$$\Pi(v) \in I^{+,n}(\sigma, \pi) \subseteq \langle K \cdot \Pi(I^{+,n-1}(\sigma, \pi)) \rangle$$

et il en est de même pour  $F_{0,v}$ . Le lemme 3.5 (ii) permet de conclure dans ce cas.

Supposons maintenant  $v \in I^+(\sigma, \pi)$ . Par définition  $\ell_\sigma(F_{0,v}) \leq n+1$ . Si  $\ell_\sigma(F_{0,v}) \leq n$ , alors il existe des  $w_i \in I^{+,n-1}(\sigma, \pi)$  pour  $0 \leq i \leq q-1$  tels que

$$F_{0,v} = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^i \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_i.$$

D'après la remarque 3.2, cela entraîne  $v - w_0 \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ , d'où  $\ell_\sigma(v) \leq n-1$  par (i), ce qui donne une contradiction.  $\square$

**Lemme 3.9.** Soit  $v = v^+ + v^-$  un vecteur dans  $\pi$  avec  $v^+ \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $v^- \in I^-(\sigma, \pi)$ . On a

(i) si  $\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ , alors  $\ell_\sigma(v) = \ell_\sigma(v^-)$ ;

(ii) si  $\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ , alors  $\ell_\sigma(v) = \ell_\sigma(v^+)$ .

De plus, dans les deux cas, on a  $\ell_\sigma(v^+) = \ell_\sigma(v^-)$  si et seulement si  $\ell_\sigma(v) = 0$ .

*Démonstration.* (i) Sinon, on a  $\ell_\sigma(v) = \ell_\sigma(v^+) \geq 1$ . Posons

$$F_{0,v^+} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v^+, \quad F_{0,v^-} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v^-.$$

Alors d'après le lemme 3.8 (ii),  $\ell_\sigma(F_{0,v^+}) = \ell_\sigma(v^+) + 1$  et  $\ell_\sigma(F_{0,v^-}) \leq \max\{\ell_\sigma(v^-), 1\}$ . Comme le niveau de  $F_{0,v^+} + F_{0,v^-}$  est 0 par hypothèse, on a forcément  $\ell_\sigma(v^+) + 1 \leq \ell_\sigma(v^-)$ , ce qui donne une contradiction et aussi montre que la seule possibilité pour avoir  $\ell_\sigma(v^+) = \ell_\sigma(v^-)$  est que  $\ell_\sigma(v^+) = \ell_\sigma(v^-) = 0$ .

(ii) Il suffit d'appliquer (i) à  $v' := \Pi(v) \in \pi$ .  $\square$

Le lemme ci-dessous permet de déterminer explicitement  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  dans certains cas.

**Lemme 3.10.** Soit  $m \geq 0$  un entier.

(i) Si  $f = f^+ + f^- \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  avec  $f^+ \in I^+(\sigma)$  et  $f^- \in \bigoplus_{n \leq m} R_n^- \subset I^-(\sigma)$ , alors (pour  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ )

$$\begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f = f_1^+ + f_1^-$$

avec  $f_1^+ \in I^+(\sigma)$  et  $f_1^- \in \bigoplus_{n \leq m-1} R_n^-$  (où l'on convient que  $f_1^- := 0$  si  $m = 0$ ).

(ii) Si  $f \in \mathcal{N}$  est un vecteur contenu dans  $\bigoplus_{n \leq m} R_n$ , alors  $\Phi_\sigma(gf) \in M$  pour tout  $g \in G$ , où  $M = \sum_{n \leq m} R_n(\sigma, \pi)$  est l'image de  $\bigoplus_{n \leq m} R_n$  dans  $\pi$ .

*Démonstration.* (i) Comme  $\Pi(f^-) \in \oplus_{n \leq m} R_n^+$ , on peut l'écrire (de manière unique) sous la forme

$$\Pi(f^-) = \sum_{\mu \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\mu] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_\mu + y$$

avec  $x_\mu \in \oplus_{n \leq m-1} R_n^-$  et  $y \in \sigma = R_0^+$ . Alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f &= \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f^+ + \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(f^-) \\ &= \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f^+ + \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 \\ &\quad + \sum_{\mu \in \mathbb{F}_q^\times} \begin{pmatrix} [\lambda] + [\mu^{-1}] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\mu] & 0 \\ 0 & -[\mu^{-1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & [\mu^{-1}] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_\mu \\ &\in \begin{pmatrix} 1 & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 + I^+(\sigma), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

(ii) Remarquons que tout  $g \in G$  s'écrit sous l'une des deux formes :  $g^+k$  ou  $\Pi g^+k$  avec  $k \in KZ$  et  $g^+ \in P^+$  (cf. la démonstration du théorème 3.17 ci-après). L'énoncé découle donc du (i) dans le cas où  $g = g^+k$  puisqu'alors  $kf \in \oplus_{n \leq m} R_n$ . Si  $g = \Pi g^+k$ , d'après (i), on peut écrire  $(g^+k)f = f_1^+ + f_1^-$  avec  $f_1^- \in \oplus_{n \leq m-1} R_n^-$  de telle sorte que

$$\Phi_\sigma(gf) = \Pi(\overline{f_1^+}) = -\Pi(\overline{f_1^-}) \in M$$

où  $\overline{f_1^+}$  (resp.  $\overline{f_1^-}$ ) désigne l'image de  $f_1^+$  (resp.  $f_1^-$ ) dans  $\pi$ . □

**Remarque 3.11.** On a une variante du lemme 3.10 (i) : soit  $v = v^+ + v^- \in \pi$  avec  $v^+ \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $v^- \in I^-(\sigma, \pi)$ . Si  $\ell_\sigma(v^-) \geq 1$ , alors (pour  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ )

$$\begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = w^+ + w^-$$

avec  $w^+ \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $w^- \in I^-(\sigma, \pi)$  vérifiant  $\ell_\sigma(w^-) \leq \ell_\sigma(v^-) - 1$ .

Si  $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_p$ ,  $\sigma$  est un poids et  $\chi : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  est un caractère lisse, on note

$$(3.1.2) \quad V(\chi, \sigma, \lambda) := (\chi \circ \det) \otimes (\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / (T - \lambda)).$$

Si  $f \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , on note  $\bar{f}$  l'image de  $f$  dans  $V(\chi, \sigma, \lambda)$  (avec l'action de  $G$  tordue). Soit  $v_0 \in \sigma$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$ .

**Corollaire 3.12.** Avec les notations précédentes, on a

$$I^+(\sigma, V(\chi, \sigma, \lambda)) \cap I^-(\sigma, V(\chi, \sigma, \lambda)) = \overline{\mathbb{F}}_p[\text{Id}, v_0] \oplus \overline{\mathbb{F}}_p[\Pi, v_0].$$

*Démonstration.* L'inclusion  $\supseteq$  découle de la proposition 2.3 (i).

Pour l'autre inclusion, on utilise le lemme 3.4 qui permet d'identifier  $I^+(\sigma, V(\chi, \sigma, \lambda)) \cap I^-(\sigma, V(\chi, \sigma, \lambda))$  avec l'image de  $(T - \lambda)(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma)$  via  $\Phi_\sigma$ . D'abord, on vérifie que (en appliquant  $\Pi$  à (2.1.3), n° 2.1)

$$\Phi_\sigma((T - \lambda)([\text{Id}, \sigma])) = \overline{\mathbb{F}_p[\Pi, v_0]}.$$

Ensuite, par la démonstration du lemme 3.10 (i), on voit que si  $g^+ \in P^+$  et  $k \in KZ$ , alors :

$$\Phi_\sigma((T - \lambda)([g^+k, v_0])) \in \overline{\mathbb{F}_p[\Pi, v_0]}$$

et

$$\Phi_\sigma((T - \lambda)([\Pi g^+k, v_0])) \in \overline{\mathbb{F}_p[\text{Id}, v_0]}.$$

Ceci permet de conclure puisque tout  $g \in G$  s'écrit sous la forme  $g = g^+k$  ou  $g = \Pi g^+k$  avec  $g^+ \in P^+$  et  $k \in KZ$ .  $\square$

### 3.2 Définition et propriétés

Dans cette section, on définit la notion de *diagramme canonique* et on en fournit des propriétés élémentaires.

**Théorème 3.13.** *Soient  $\pi$  une représentation lisse irréductible non supersingulière de  $G$  et  $\sigma$  un poids apparaissant dans le  $K$ -socle de  $\pi$ . Alors*

$$I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi) = \pi^{I_1}, \quad \langle K \cdot I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi) \rangle = \pi^{K_1}.$$

*En particulier,  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  (resp.  $\langle K \cdot I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi) \rangle$ ) ne dépend pas du choix de  $\sigma$  dans le  $K$ -socle de  $\pi$ .*

*Démonstration.* Par les théorèmes 33 et 34, [BL2],  $\pi$  est un  $G$ -quotient irréductible de  $V(\chi, \sigma, \lambda)$  pour des  $\chi, \sigma$  et  $\lambda \neq 0$  convenables, où  $V(\chi, \sigma, \lambda)$  est la  $G$ -représentation définie par (3.1.2).

Si  $\pi$  est un caractère, les énoncés sont triviaux. Si  $\pi$  est une série principale, i.e.  $\pi \cong V(\chi, \sigma, \lambda)$ , alors le premier énoncé découle du corollaire 3.12 et le deuxième découle du fait que ([BL2])  $\pi \cong \text{c-Ind}_B^G \chi_1 \otimes \chi_2$  pour  $\chi_1$  et  $\chi_2$  deux caractères lisses convenables de  $F^\times$  (où  $B \subset G$  désigne le sous-groupe de Borel) et que

$$(\text{c-Ind}_B^G \chi_1 \otimes \chi_2)^{K_1} \cong \text{c-Ind}_F^K \chi_1 \otimes \chi_2.$$

Il reste à traiter le cas où  $\pi$  est une série spéciale, i.e.  $\pi$  est ([BL2]), à torsion près, le quotient de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / (T - 1)$  par un sous-espace de dimension 1 où  $\sigma$  est un poids de dimension  $q$ . Plus précisément, si  $v_0 \in \sigma$  est un vecteur non nul fixé par  $I_1$  et si l'on pose

$$f := [\text{Id}, v_0] + [\Pi, v_0] \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma,$$

alors  $f \notin (T - 1)(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma)$  et on a une suite exacte de  $G$ -représentations (cf. théorème 30, [BL2])

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \pi \rightarrow 0$$

avec  $\mathcal{N} := (T-1)(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma) + \overline{\mathbb{F}_p} f$ . D'après le lemme 3.10 et le corollaire 3.12, l'espace  $\Phi_\sigma(\mathcal{N}) = \overline{\mathbb{F}_p}[\text{Id}, v_0]$  est de dimension 1. Ceci montre l'énoncé concernant  $I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  parce que  $\pi^{I_1}$  est aussi de dimension 1 ([BL2]). L'autre énoncé est une conséquence du fait que  $\text{soc}_K \pi = \sigma$  est un objet injectif de  $\underline{\text{Rep}}_{K/K_1}$ .  $\square$

Ensuite on considère le cas où  $\pi$  est une représentation supersingulière de  $G$  (voir p290, [BL2]). Soit  $\sigma$  un poids apparaissant dans le  $K$ -socle de  $\pi$ .

**Proposition 3.14.** (i) Si  $w \in \pi$  est un vecteur non nul fixé par  $I_1$  tel que  $\sigma' := \langle K \cdot w \rangle$  est une représentation irréductible, alors  $w \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ .

(ii) On a  $\pi^{I_1} \subseteq I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ .

*Démonstration.* Par définition  $w \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  si et seulement si  $\ell_\sigma(w) = 0$ .

(i) Posons  $w_0 = w$  et pour  $i \geq 0$ ,

$$w_{i+1} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_i.$$

D'après le corollaire 3.3, [Pa3], on a  $w_i \in \pi^{I_1}$  et il existe  $n \geq 1$  tel que  $w_n = 0$ . De plus, on vérifie facilement que (cf. lemme 4.1, [Pa3]), pour  $0 \leq i \leq n-1$ , la  $K$ -représentation  $\langle K \cdot w_i \rangle$  est irréductible. Ceci montre que, si  $\sigma'$  n'est pas de dimension  $q$ , alors (par un calcul rapide)

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w_i = 0$$

pour tout  $0 \leq i \leq n-1$ . Le lemme 3.9 appliqué à  $v = w_{n-1}$  implique donc  $\ell_\sigma(w_{n-1}) = 0$  et le même raisonnement donne  $\ell_\sigma(w_i) = 0$  pour tout  $0 \leq i \leq n-1$ , d'où l'énoncé dans ce cas.

Traitons le cas où  $\sigma'$  est de dimension  $q$ . On a pour  $0 \leq i \leq n-1$ ,

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w_i + w_i = 0.$$

Si on choisit une décomposition  $w_i = w_i^+ + w_i^-$  et si on reprend les notations de la preuve du lemme 3.9, cette égalité se traduit à :

$$(3.2.1) \quad w_i^+ + w_i^- + F_{0, \Pi(w_i^+)} + F_{0, \Pi(w_i^-)} = 0.$$

Prenons  $i = n-1$ . Comme  $w_n = 0$ , le lemme 3.9 (i) entraîne  $\ell_\sigma(w_{n-1}^-) \geq \ell_\sigma(w_{n-1}^+)$ . Si  $\ell_\sigma(w_{n-1}^-) \geq 1$ , on déduit du lemme 3.8 que le niveau de  $F_{0, \Pi(w_{n-1}^-)}$  est strictement plus grand que ceux des autres termes dans (3.2.1), ce qui donne une contradiction, et donc  $\ell_\sigma(w_{n-1}) = \ell_\sigma(w_{n-1}^-) = 0$ . On en déduit  $\ell_\sigma(w_0) = 0$ , ce qui termine la démonstration de (i).

(ii) Soit  $v \in \pi$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$ . Comme dans (i),  $F_{0,v}$  est encore fixé par  $I_1$  et, ou bien  $F_{0,v} = 0$ , ou bien  $F_{0,v} \neq 0$  et  $\langle K \cdot F_{0,v} \rangle \subset \pi$  est une représentation

irréductible de  $K$  (i.e.  $F_{0,v}$  satisfait à la condition dans (i)). Dans les deux cas, on a  $F_{0,v} \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  d'après (i). On a un résultat analogue pour

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v = F_{0, \Pi(v)}.$$

Donc le lemme 3.9 entraîne  $\ell_\sigma(v) = 0$ , i.e.  $v \in I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$ .  $\square$

**Corollaire 3.15.** *Soit  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma' \otimes \chi' \circ \det \rightarrow \pi$  une autre surjection  $G$ -équivariante avec  $\sigma'$  un poids (peut être isomorphe à  $\sigma$ ),  $\chi' : F^\times \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  un caractère lisse. Alors*

$$I^+(\sigma, \pi) = I^+(\sigma', \pi), \quad I^-(\sigma, \pi) = I^-(\sigma', \pi).$$

*Démonstration.* Rappelons que  $P^+ := \begin{pmatrix} \mathcal{O}^{-\{0\}} & \mathcal{O} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $I^+(\sigma, \pi) := \langle P^+ \cdot \sigma \rangle \subset \pi$ . Prenons  $v \in \sigma$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$ . Alors l'espace vectoriel sous-jacent à  $\sigma$  est justement l'espace engendré par

$$\left\{ \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi(v), \lambda \in \mathbb{F}_q \right\}.$$

Cela entraîne  $I^+(\sigma, \pi) = \langle P^+ \cdot \Pi(v) \rangle$  et  $I^-(\sigma, \pi) = \langle \Pi P^+ \cdot \Pi(v) \rangle$ . Autrement dit,  $x \in I^+(\sigma, \pi)$  (resp.  $x \in I^-(\sigma, \pi)$ ) si et seulement s'il existe  $Q_1 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$  (resp.  $Q_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$ ) tel que  $x = Q_1 \Pi \cdot v$  (resp.  $x = \Pi Q_2 \Pi \cdot v$ ). Le corollaire découle donc de la proposition 3.14 (i). Plus précisément, soit  $w \in \sigma'$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$ . Alors la proposition *loc. cit.* implique qu'il existe  $Q_1, Q_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$  tels que

$$w = Q_1 \Pi \cdot v = \Pi Q_2 \Pi \cdot v.$$

Si  $x \in I^+(\sigma', \pi)$  (resp.  $x \in I^-(\sigma', \pi)$ ), alors il existe  $Q'_1 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$  (resp.  $Q'_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$ ) tel que  $x = Q'_1 \Pi \cdot w$  (resp.  $x = \Pi Q'_2 \Pi \cdot w$ ) de sorte que l'on a

$$x = \chi(\varpi) Q'_1 Q_2 \Pi \cdot v \in I^+(\sigma, \pi)$$

(resp.  $x = \chi(\varpi) \Pi Q'_2 Q_2 \Pi \cdot v \in I^-(\sigma, \pi)$ ). On en déduit le résultat en échangeant  $\sigma'$  et  $\sigma$ .  $\square$

Rappelons (cf. [BP] ou [Pa1]) qu'un *diagramme* est par définition un triplet  $(D_0, D_1, \tau)$  où  $D_0$  est une représentation lisse de  $KZ$ ,  $D_1$  est une représentation lisse de  $N$  et  $\tau : D_1 \rightarrow D_0$  est un morphisme  $IZ$ -équivariant. On définit des morphismes entre deux diagrammes de manière évidente et on note  $\mathcal{DIAG}$  la catégorie résultée.

D'après le théorème 3.13 et le corollaire 3.15, l'espace  $I^+(\sigma, \pi)$  (resp.  $I^-(\sigma, \pi)$ ,  $I^{+,n}(\sigma, \pi)$ , le niveau  $\ell_\sigma(\cdot)$ , etc.) ne dépend que de  $\pi$ , on peut donc le noter  $I^+(\pi)$  (resp.  $I^-(\pi)$ ,  $I^{+,n}(\pi)$ ,  $\ell(\cdot)$ , etc.). Posons :

$$D_1(\pi) := I^+(\pi) \cap I^-(\pi)$$

et  $D_0(\pi) := \langle K \cdot D_1(\pi) \rangle \subset \pi$  la sous- $K$ -représentation engendrée par  $D_1(\pi)$ . Remarquons que  $D_1(\pi)$  est stable sous l'action de  $N$  et est le plus grand sous-espace vectoriel de  $D_0(\pi)$  stable sous l'action de  $N$ . On pose la définition suivante :

**Définition 3.16.** Le *diagramme canonique* associé à  $\pi$  est par définition le diagramme

$$D(\pi) := (D_0(\pi), D_1(\pi), \mathrm{can})$$

où  $\mathrm{can}$  désigne l'inclusion naturelle  $D_1(\pi) \hookrightarrow D_0(\pi)$ .

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant qui dit que, en passant de  $\pi$  à son diagramme canonique, on ne perd pas d'information.

**Théorème 3.17.** *Soient  $\pi$  et  $\pi'$  deux représentations lisses irréductibles de  $G$ . Alors  $\pi \cong \pi'$  si et seulement si, en tant que diagrammes,*

$$D(\pi) \cong D(\pi').$$

En fait, on va démontrer un résultat plus général :

**Théorème 3.18.** *Soient  $\pi$  et  $\pi'$  deux représentations lisses de  $G$  avec  $\pi$  irréductible. Alors il existe un isomorphisme (de groupes) naturel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{DLAG}}(D(\pi), \mathcal{K}(\pi')) \cong \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi'),$$

où  $\mathcal{K}(\pi')$  est le diagramme défini par  $(\pi'|_{KZ}, \pi'|_N, \mathrm{can})$ .

*Démonstration.* On définit d'abord un morphisme

$$(3.2.2) \quad \iota : \mathrm{Hom}_{\mathcal{DLAG}}(D(\pi), \mathcal{K}(\pi')) \rightarrow \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi').$$

Soit  $(\varphi_0, \varphi_1) : D(\pi) \rightarrow \mathcal{K}(\pi')$  un morphisme non nul de diagrammes, c'est-à-dire,  $\varphi_0 : D_0(\pi) \rightarrow \pi'|_{KZ}$  est un morphisme  $KZ$ -équivariant et

$$\varphi_1 = \varphi_0|_{D_1(\pi)} : D_1(\pi) \rightarrow \pi'|_N$$

est un morphisme  $N$ -équivariant. On va définir un morphisme  $G$ -équivariant  $\varphi : \pi \rightarrow \pi'$  à partir de  $(\varphi_0, \varphi_1)$  vérifiant

$$\varphi|_{D_0(\pi)} = \varphi_0.$$

Notons que si un tel morphisme existe, il est nécessairement unique puisque  $\pi$  est engendrée par  $D_0(\pi)$  en tant que  $G$ -représentation. Plus précisément, si  $v \in \pi$ , on définit  $\varphi(v)$  comme suit par récurrence sur le niveau de  $v$  :

- (a) si  $\ell(v) = 0$ , alors  $v \in D_1(\pi)$  et on pose  $\varphi(v) = \varphi_1(v)$ ;
- (b) si  $v^+ \in I^+(\pi)$  et  $\ell(v^+) = n \geq 1$ , soit  $w_\lambda \in I^{+,n-1}(\pi)$  (avec  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ ) des éléments tels que

$$v^+ = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(w_\lambda),$$

on pose

$$\varphi(v^+) := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi\varphi(w_\lambda)$$

où  $\varphi(w_\lambda)$  a été défini par récurrence. C'est bien défini car : si

$$v^+ = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(w'_\lambda)$$

pour des autres  $w'_\lambda \in I^{+,n-1}(\pi)$ , alors on a  $w_\lambda - w'_\lambda \in D_1(\pi)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{F}_q$  et donc

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi\varphi(w_\lambda) - \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi\varphi(w'_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi\varphi_1(w_\lambda - w'_\lambda) \\ &= \varphi_0 \left( \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(w_\lambda - w'_\lambda) \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte des faits que  $w_\lambda - w'_\lambda \in D_1(\pi)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{F}_q$  et que  $(\varphi_0, \varphi_1)$  est un morphisme de diagrammes.

(c) si  $v = v^+ + \Pi(\tilde{v}^+)$  avec  $v^+, \tilde{v}^+ \in I^+(\pi)$ , alors on pose

$$\varphi(v) = \varphi(v^+) + \Pi\varphi(\tilde{v}^+).$$

On vérifie que cette définition ne dépend pas de la décomposition en utilisant que

$$I^+(\pi) \cap \Pi(I^+(\pi)) = D_1(\pi)$$

et que  $\varphi_1$  est  $N$ -équivariant.

Il faut vérifier que le morphisme  $\varphi$  ainsi défini est  $G$ -équivariant, i.e. quelle que soit l'égalité  $v = \sum_{i \in S} g_i v_i$  (avec  $g_i \in G$ ,  $v, v_i \in \pi$ , et  $S$  un ensemble fini d'indices) dans  $\pi$ , on doit avoir dans  $\pi'$

$$\varphi(v) = \sum_{i \in S} g_i \varphi(v_i).$$

Comme ce qu'on veut démontrer est vrai sur  $D_0(\pi)$  (cf. (b) et (c) ci-dessus) et comme  $\pi$  est engendrée par  $D_0(\pi)$  en tant que  $G$ -représentation, on peut supposer que tous les  $v_i$  sont dans  $D_0(\pi)$ . Puisqu'il existe des  $h_j \in G$  et des  $w_j \in D_0(\pi)$  tels que

$$v = \sum_j h_j w_j \quad \text{et} \quad \varphi(v) = \sum_j h_j \varphi(w_j),$$

on peut supposer de plus  $v = 0$ .

Remarquons que tout  $g \in G$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$g = g^{(n)} g^{(n-1)} \dots g^{(1)} k$$

avec  $k \in KZ$ ,  $g^{(n)}$  égal à  $\Pi$  ou à l'une des matrices  $g_\lambda := \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , et  $g^{(i)}$  égal à l'un des  $g_\lambda$  si  $1 \leq i < n$ . On appelle  $\ell(g) := n$  la *longueur* de  $g$  et on fait la convention  $\ell(g) := 0$  si  $g \in KZ$ .



Revenons à la preuve. On la fait par récurrence sur l'entier  $m := \max_{i \in S} \{\ell(g_i)\}$ . Le cas  $m = 0$  est trivial puisqu'alors  $g_i \in KZ$ . En général, on pose

$$S_\lambda = \{i \in S, g_i^{(\ell(g_i))} = g_\lambda\}, \quad S_\Pi = \{i \in S, g_i^{(\ell(g_i))} = \Pi\},$$

de telle sorte qu'on ait

$$0 = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} g_\lambda \left( \sum_{i \in S_\lambda} g'_i v_i \right) + \Pi \left( \sum_{i \in S_\Pi} g'_i v_i \right)$$

où on écrit  $g_i = g_i^{(\ell(g_i))} g'_i$ . Comme  $D_0(\pi)$  est une  $K$ -représentation contenue dans  $I^+(\pi)$  (lemme 3.5(ii)) et comme  $g'_i \in P^+K$ , le lemme 3.1 implique

$$\sum_{i \in S_\lambda} g'_i v_i \in D_1(\pi) \quad \text{et} \quad \sum_{i \in S_\Pi} g'_i v_i \in D_1(\pi)$$

pour tout  $\lambda \in \mathbb{F}_q$ . On en déduit avec  $\varphi|_{D_1(\pi)} = \varphi_1$  que :

$$0 = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} g_\lambda \varphi \left( \sum_{i \in S_\lambda} g'_i v_i \right) + \Pi \varphi \left( \sum_{i \in S_\Pi} g'_i v_i \right).$$

Donc l'hypothèse de récurrence permet de conclure que  $\varphi$  est  $G$ -équivariant. Autrement dit,  $\iota : (\varphi_0, \varphi_1) \mapsto \varphi$  donne le morphisme (3.2.2) demandé.

Réciproquement, soit  $\varphi : \pi \rightarrow \pi'$  un morphisme  $G$ -équivariant, on en déduit un morphisme de diagrammes

$$\mathcal{K}(\varphi) : \mathcal{K}(\pi) \rightarrow \mathcal{K}(\pi'),$$

et en le composant avec le morphisme naturel  $D(\pi) \hookrightarrow \mathcal{K}(\pi)$ , on obtient un morphisme de diagrammes  $D(\pi) \rightarrow \mathcal{K}(\pi')$ . Ceci définit un morphisme

$$\kappa : \mathrm{Hom}_G(\pi, \pi') \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{DLAG}}(D(\pi), \mathcal{K}(\pi')).$$

On vérifie que  $\iota \circ \kappa(\varphi) = \varphi$  et  $\kappa \circ \iota((\varphi_0, \varphi_1)) = (\varphi_0, \varphi_1)$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

**Remarque 3.19.** Conservons les notations du théorème 3.18. Par construction, si

$$(\varphi_0, \varphi_1) : D(\pi) \rightarrow \mathcal{K}(\pi')$$

est non nul, alors  $\varphi = \iota((\varphi_0, \varphi_1)) : \pi \rightarrow \pi'$  l'est aussi. L'irréductibilité de  $\pi$  implique que  $\varphi$  est de plus injectif, et donc  $(\varphi_0, \varphi_1) = \kappa(\varphi)$  l'est aussi. Cette propriété peut être vue comme *irréductibilité* de  $D(\pi) : D(\pi)$  n'a pas de sous-diagramme propre non nul  $D' = (D'_0, D'_1, \tau')$  tel que  $D'_1 = D_1 \cap D'_0$ .

**Remarque 3.20.** Soient  $\pi$  une représentation lisse irréductible de  $G$  et  $D(\pi)$  son diagramme canonique associé. Alors on a  $\pi \cong H_0(D(\pi))$ , où  $H_0$  est le foncteur de  $\mathcal{DLAG}$  dans  $\underline{\mathrm{Rep}}_G$  défini dans §9, [BP]. Ceci découle de la propriété que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{DLAG}}(D(\pi), \mathcal{K}(\pi')) \cong \mathrm{Hom}_G(H_0(D(\pi)), \pi')$$

pour toute représentation lisse  $\pi'$  de  $G$ .

Supposons de plus  $\pi$  admissible. D'après le théorème 9.8 de [BP], il existe une injection de diagrammes

$$(\varphi_0, \varphi_1) : D(\pi) \hookrightarrow \mathcal{K}(\Omega)$$

où  $\Omega$  est une représentation lisse de  $G$  telle que  $\Omega|_K \cong \text{Inj}_K \text{soc}_K(\pi)$  est une enveloppe injective de  $\text{soc}_K(\pi)$  dans la catégorie  $\underline{\text{Rep}}_K$ . Posons

$$\pi' := \langle G \cdot \varphi_1(D_1(\pi)) \rangle \subseteq \Omega$$

la sous- $G$ -représentation de  $\Omega$  engendrée par  $\varphi_1(D_1(\pi))$ . Le théorème 3.18 entraîne que  $\pi' \cong \pi$ , donc  $\pi'$  ne dépend ni du choix de  $\Omega$  ni du choix de  $(\varphi_0, \varphi_1)$  à isomorphisme près. De manière équivalente,

*Démonstration du théorème 3.17.* La condition est suffisante d'après le théorème 3.18. Soit donc  $\varphi : \pi \xrightarrow{\sim} \pi'$  un isomorphisme  $G$ -équivariant et  $\sigma \subset \text{soc}_K \pi$  un poids. Alors  $\sigma' := \varphi(\sigma) \subset \pi'$  est un poids apparaissant dans le socle de  $\pi'$ . Par définition de  $D_1(\pi)$ , on a  $\varphi(D_1(\pi)) \subseteq D_1(\pi')$ . Ceci permet de conclure que

$$\kappa(\varphi) : D(\pi) \rightarrow D(\pi')$$

est un isomorphisme de diagrammes (la surjectivité résulte de ce que  $\kappa(\varphi^{-1})$  fournit un inverse de  $\kappa(\varphi)$ ).  $\square$

**Remarque 3.21.** D'après le théorème 3.17, le diagramme canonique détermine à isomorphisme près la représentation de  $G$  de départ. Mais, il ne semble pas évident de le calculer lorsque  $F \neq \mathbb{Q}_p$  et  $\pi$  est supersingulière. Lorsque  $F = \mathbb{Q}_{p^f}$  est non ramifié avec  $f \geq 2$ , on peut démontrer (dans les cas considérés dans [BP]) que  $D_1(\pi)$  est *strictement* plus grand que  $\pi^{I_1}$  (voir chap.III).

**Remarque 3.22.** Le théorème 3.17 permet de retrouver les entrelacements entre les représentations lisses irréductibles de  $G$  fournis dans le corollaire 36, [BL2] et le théorème 1.3, [Br1]. Voir aussi le lemme 8.2, [Pa4].

**Notation :** si  $\pi$  est un  $G$ -quotient non trivial de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , on pose  $D_1(\sigma, \pi) := I^+(\sigma, \pi) \cap I^-(\sigma, \pi)$  et

$$D(\sigma, \pi) := (\langle K \cdot D_1(\sigma, \pi) \rangle, D_1(\sigma, \pi), \text{can})$$

qui est un sous-diagramme de  $\mathcal{K}(\pi)$ . Par abus de notation (en raison de la définition 3.16), on l'appelle aussi le *diagramme canonique* associé à  $\pi$ .

**Proposition 3.23.** Soient  $\pi$  un  $G$ -quotient admissible de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  et  $\pi_1$  une sous-représentation irréductible propre de  $\pi$ . Notons  $\pi_2$  le quotient de  $\pi$  par  $\pi_1$ . Alors la suite exacte

$$0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \pi \rightarrow \pi_2 \rightarrow 0$$

induit (i) une injection  $D_1(\pi_1) \hookrightarrow D_1(\sigma, \pi)$  et  
(ii) une surjection  $D_1(\sigma, \pi) \twoheadrightarrow D_1(\sigma, \pi_2)$ .

*Démonstration.* Fixons  $v \in \sigma \hookrightarrow \pi$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$  et  $\bar{v} \in \pi_2$  l'image de  $v$  dans  $\pi_2$ . Alors  $\bar{v} \neq 0$ , et par la preuve du corollaire 3.15,  $x \in D_1(\sigma, \pi)$  (resp.  $\bar{x} \in D_1(\sigma, \pi_2)$ ) si et seulement s'il existe  $Q_1, Q_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$  tels que  $x = Q_1\Pi \cdot v = \Pi Q_2\Pi \cdot v$  dans  $\pi$  (resp.  $\bar{x} = Q_1\Pi \cdot \bar{v} = \Pi Q_2\Pi \cdot \bar{v}$  dans  $\pi_2$ ).

(i) Par ce qui précède, il suffit de trouver un vecteur non nul  $v_1 \in \pi_1^{I_1}$  tel que  $v_1 \in D_1(\sigma, \pi)$  (puisque  $\langle P^+ \cdot v_1 \rangle$  contient toujours un vecteur vérifiant la condition dans la proposition 3.14 (i) grâce au lemme 4.1 [Pa3]). Si  $\pi_1$  est supersingulière, alors la démonstration de la proposition 3.14 reste valable, d'où l'énoncé. Si  $\pi_1$  est non supersingulière, alors on vérifie qu'il existe  $0 \neq v_1 \in \pi_1^{I_1}$  et  $i \in \{0, \dots, q-1\}$  tels que  $F_{i, v_1} = av_1$  avec  $a \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ , où

$$F_{i, v_1} := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^i \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_1.$$

En fait, si  $\pi$  est un caractère ou une série spéciale, alors  $\pi^{I_1} = \overline{\mathbb{F}}_p v_1$  est de dimension 1 et l'énoncé s'en déduit du lemme 4.1 [Pa3]. Si  $\pi$  est une série principale, on peut prendre  $i = 0$  avec  $v_1 \in \pi^{I_1}$  l'unique vecteur (à constante près) tel que  $\langle K \cdot v_1 \rangle$  est irréductible.

Écrivons  $v_1 = v_1^+ + v_1^-$  avec  $v_1^+ \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $v_1^- \in I^-(\sigma, \pi)$ . Si  $\ell_\sigma(v_1^-) \geq 1$ , la remarque 3.11 entraîne que

$$F_{i, v_1} = w^+ + w^-$$

avec  $w^+ \in I^+(\sigma, \pi)$  et  $w^- \in I^-(\sigma, \pi)$  vérifiant  $\ell_\sigma(w^-) \leq \ell_\sigma(v_1^-) - 1$ . Mais c'est impossible parce que l'on a  $\ell_\sigma(av_1^- - w^-) = 0$  d'après le lemme 3.1. Donc  $\ell_\sigma(v_1^-) = 0$  et  $v_1 \in I^+(\sigma, \pi)$ , et puis  $\ell_\sigma(v_1) = 0$  car sinon on aurait  $\ell_\sigma(F_{i, v_1}) \geq \ell_\sigma(v_1) + 1$  (lemme 3.8 (ii)) ce qui est impossible. (i) est donc prouvé.

(ii) Soit  $\bar{x} \in D_1(\sigma, \pi_2)$ . On a vu qu'il existe  $Q_1, Q_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$  tels que

$$\bar{x} = Q_1\Pi \cdot \bar{v} = \Pi Q_2\Pi \cdot \bar{v}.$$

Posons  $x_1 = Q_1\Pi \cdot v \in \pi$  et  $x_2 = \Pi Q_2\Pi \cdot v \in \pi$ . Par définition, on a  $x_1 - x_2 \in \pi_1$  et on peut donc écrire

$$x_1 - x_2 = Q'_1\Pi \cdot v_1 + \Pi Q'_2\Pi \cdot v_1 \in \pi_1$$

où  $Q'_1, Q'_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$  et  $v_1 \in \pi_1$  est un vecteur non nul fixé par  $I_1$ . Notons  $x'_1 = Q'_1\Pi \cdot v_1 \in \pi_1$  et  $x'_2 = \Pi Q'_2\Pi \cdot v_1 \in \pi_1$ . Par (i),  $v_1 \in D_1(\sigma, \pi)$ , donc il existe  $Q''_1, Q''_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$  tels que

$$x'_1 = Q''_1\Pi \cdot v, \quad x'_2 = \Pi Q''_2\Pi \cdot v.$$

On en déduit que  $x_1 - x'_1$  (resp.  $x_2 + x'_2$ ) est un relèvement de  $\bar{x}$  dans  $I^+(\sigma, \pi)$  (resp.  $I^-(\sigma, \pi)$ ), d'où le résultat.  $\square$

**Corollaire 3.24.** *Si  $\pi$  est un  $G$ -quotient admissible de  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$  tel que  $D_1(\sigma, \pi)$  est de dimension finie, alors  $\pi$  est de longueur finie.*

*Démonstration.* Comme  $\pi$  est admissible, elle admet une sous-représentation irréductible de  $G$ , soit  $\pi_1$ . Notons  $\pi_2$  le quotient de  $\pi$  par  $\pi_1$ , la proposition 3.23 entraîne que

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} D_1(\sigma, \pi) \geq \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} D_1(\pi_1) + \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} D_1(\sigma, \pi_2).$$

Par le théorème 2, [Vi],  $\pi_2$  est aussi admissible, donc une récurrence immédiate sur la dimension de  $D_1(\sigma, \pi)$  permet de conclure.  $\square$

## 4 La condition de finitude

Dans ce paragraphe, on considère une condition de finitude et on en déduit des conséquences.

Si  $\pi$  est une représentation lisse irréductible de  $G$ , on a vu le rôle important joué par  $D_1(\pi) = I^+(\pi) \cap I^-(\pi)$ . Mais il n'est pas du tout clair que  $D_1(\pi)$  soit de dimension finie ou non, ce qui conduit à introduire la condition suivante :

*$D_1(\pi)$  est de dimension finie.*

On dit que  $\pi$  vérifie  $(P_e)$  avec  $e$  un entier (fixé)  $\geq 0$ , si  $D_1(\pi) \subseteq I^+(\pi)^{I_{e+1}}$ .

**Remarque 4.1.** Il est trivial que la condition « $D_1(\pi)$  est de dimension finie» est plus forte que la condition  $(P_e)$  pour un entier suffisamment grand, et elles sont équivalentes si  $\pi$  est admissible.

Réciproquement, si  $D_1(\pi)$  est de dimension finie, alors  $\pi$  est admissible. Cet énoncé se déduit du fait que  $D_1(\pi)$  contient tous les  $I_1$ -invariants de  $\pi$  (cf. le théorème 3.13 et la proposition 3.14) et du résultat suivant (cf. lemme 6.18, [Pal]) : *une représentation lisse de  $G$  est admissible si et seulement si la dimension des  $\mathcal{P}$ -invariants est finie pour un seul pro- $p$ -sous-groupe ouvert  $\mathcal{P}$  de  $G$ .*

Comme conséquence directe, on a

**Corollaire 4.2.** *Si  $\pi$  et  $\pi'$  sont deux représentations supersingulières de  $G$  vérifiant  $(P_e)$ , alors  $\pi \cong \pi'$  si et seulement si, en tant que diagrammes,*

$$(\pi^{K_{e+1}}, \pi^{I_{e+1}}, \text{can}) \cong (\pi'^{K_{e+1}}, \pi'^{I_{e+1}}, \text{can}).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 3.18. En fait, soit

$$(\varphi_0, \varphi_1) : (\pi^{K_{e+1}}, \pi^{I_{e+1}}, \text{can}) \xrightarrow{\sim} (\pi'^{K_{e+1}}, \pi'^{I_{e+1}}, \text{can})$$

un isomorphisme de diagrammes. Comme  $D(\pi) \subseteq (\pi^{K_{e+1}}, \pi^{I_{e+1}}, \text{can})$  par hypothèse, composé avec l'inclusion naturel  $(\pi'^{K_{e+1}}, \pi'^{I_{e+1}}, \text{can}) \subseteq \mathcal{K}(\pi')$ , on obtient un morphisme  $D(\pi) \rightarrow \mathcal{K}(\pi')$  qui induit un  $G$ -morphisme  $\pi \rightarrow \pi'$  d'après le théorème 3.18. C'est un isomorphisme puisque  $(\varphi_0, \varphi_1)^{-1}$  en induit un inverse.  $\square$

Dans la suite, on fixe  $\pi$  un  $G$ -quotient non trivial de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$  pour un poids  $\sigma$ .

**Théorème 4.3.** *Soit  $\mathcal{N}$  le noyau de la surjection  $G$ -équivariante  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \pi$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\mathcal{N}$  est de type fini en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module ;
- (ii)  $D_1(\sigma, \pi)$  est de dimension finie.

*Démonstration.* Pour prouver l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii), soit  $\{f_1, \dots, f_k\}$  des éléments de  $\mathcal{N}$  qui l'engendrent en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module et soit  $m \geq 0$  un entier tel que tout  $f_i$  soit contenu dans  $\oplus_{n \leq m} R_n$ . Soit  $M \subset \pi$  l'image de  $\oplus_{n \leq m} R_n$  dans  $\pi$ . Alors le lemme 3.10 implique que  $D_1(\sigma, \pi)$ , qui n'est autre que l'image de  $\mathcal{N}$  via  $\Phi_\sigma$  (lemme 3.4), est contenu dans  $M$ . On en déduit le résultat puisque  $M$  est bien de dimension finie.

Passons à la démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i). Remarquons d'abord que la surjection  $\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \pi$  se factorise par

$$\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow \pi' := \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma / P(T) \rightarrow \pi$$

pour un polynôme  $P(T) \in \overline{\mathbb{F}}_p[T]$  de degré  $\geq 1$ . D'après la proposition 2.3 (ii), il existe  $u \in \mathbb{N}$  tel que

$$(4.0.3) \quad \oplus_{n \leq u+1} R_n(\sigma, \pi') = \oplus_{1 \leq n \leq u+1} R_n(\sigma, \pi').$$

Puisque  $D_1(\sigma, \pi)$  est supposé de dimension finie, il existe un entier  $m \geq \max\{\deg P(T), u\}$  tel que  $D_1(\sigma, \pi)$  est contenu dans l'image de  $\oplus_{n \leq m} R_n$  dans  $\pi$ . Posons  $\ker = \mathcal{N} \cap (\oplus_{n \leq m+1} R_n)$ . On a alors  $\langle G \cdot \ker \rangle \subseteq \mathcal{N}$ , et pour achever la preuve il suffit de vérifier l'inclusion  $\mathcal{N} \subseteq \langle G \cdot \ker \rangle$ . Par construction,  $P(T)(\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma) \subseteq \langle G \cdot \ker \rangle$  puisque  $P(T)\sigma \subseteq \mathcal{N}$ .

Donc soit  $f$  un élément du noyau  $\mathcal{N}$  et  $k$  un entier tel que  $f \in \oplus_{n \leq k} R_n$ . On va démontrer que  $f \in \langle G \cdot \ker \rangle$  par récurrence sur  $k$ . Trivialement, on peut supposer  $k \geq m+1$  et  $f \in \oplus_{1 \leq n \leq k} R_n$  par (4.0.3). Or l'espace  $\oplus_{1 \leq n \leq k} R_n$  est engendrée, en tant que  $K$ -représentation, par  $\oplus_{0 \leq n \leq k-1} R_n^-$ , on peut donc écrire

$$f = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_\lambda + \Pi(f_\Pi)$$

avec  $f_\lambda, f_\Pi \in \oplus_{0 \leq n \leq k-1} R_n^+$ . Par hypothèse, l'image de  $f_\lambda$  (resp.  $f_\Pi$ ) dans  $\pi$ , notée  $\overline{f_\lambda}$  (resp.  $\overline{f_\Pi}$ ), est contenue dans  $D_1(\sigma, \pi)$ . Choisissons un relèvement de  $\overline{f_\lambda}$  (resp.  $\overline{f_\Pi}$ ) dans  $\oplus_{n \leq m} R_n$ , disons  $f'_\lambda$  (resp.  $f'_\Pi$ ). Alors

$$f_\lambda - f'_\lambda, f_\Pi - f'_\Pi \in \mathcal{N} \cap (\oplus_{n \leq k-1} R_n),$$

et par hypothèse de récurrence, on voit que

$$f_\lambda - f'_\lambda, f_\Pi - f'_\Pi \in \langle G \cdot \ker \rangle.$$

Maintenant si l'on pose

$$f' := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f'_\lambda + \Pi(f'_\Pi),$$

alors par définition  $f' \in \ker$ , et donc  $f \in \langle G \cdot \ker \rangle$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

**Corollaire 4.4.** *Supposons le quotient  $\pi$  irréductible. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *pour un poids  $\sigma$  et une surjection  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \twoheadrightarrow \pi$ , le noyau est de type fini en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module ;*
- (ii) *pour tout poids  $\sigma$  et toute surjection  $G$ -équivariante  $c\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \twoheadrightarrow \pi$ , le noyau est de type fini en tant que  $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$ -module ;*
- (iii)  *$D_1(\pi)$  est de dimension finie.*

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème 4.3 et du corollaire 3.15.  $\square$

Dans le cas où  $\pi$  est admissible, on a le résultat suivant.

**Proposition 4.5.** *Supposons la représentation  $\pi$  admissible.*

- (i) *Si  $v \in I^+(\sigma, \pi)$  est un vecteur fixé par  $I_1 \cap U^+$ , alors  $v \in D_1(\sigma, \pi)$ .*
- (ii) *Si  $D_1(\sigma, \pi)$  est de dimension finie, alors il en est de même pour l'espace des  $I_1 \cap U^+$ -invariants de  $I^+(\sigma, \pi)$ .*

*Démonstration.* (i) Posons  $V^+ = I^+(\sigma, \pi)^{I_1 \cap U^+}$  et pour  $n \geq 1$ ,

$$V_n^+ := \left\{ v \in V^+ \mid v \text{ est fixé par } U^-(\varpi^n) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^n & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comme  $\begin{pmatrix} 1 + \varpi^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (si  $p = 2$ , on le remplace par  $\begin{pmatrix} 1 + \varpi^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ) est inclus dans le groupe engendré par  $U^+$ ,  $U^-(\varpi^n)$  et  $Z$ , on voit que tout  $x \in V_n^+$  est fixé aussi par  $\begin{pmatrix} 1 + \varpi^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et chaque  $V_n^+$  est de dimension finie puisque  $\pi$  est admissible.

Comme  $\pi$  est lisse, il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $v \in V_{n-1}^+$ . Posons

$$F_{0,v} = F_{0,v}^{(1)} := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v.$$

Alors d'après la proposition 2.7 (i),  $F_{0,v} \in V^+$  ; de plus, on a (si  $\mu \in \mathbb{F}_q$ ) :

- par ce qui précède,  $v$  est fixé par  $\begin{pmatrix} 1 + \varpi^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (même si  $p = 2$ ), et donc  $F_{0,v}$  l'est aussi :

$$\begin{pmatrix} 1 + \varpi^n[\mu] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_{0,v} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \varpi^n[\mu] & \varpi^{n-1}[\mu\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = F_{0,v};$$

- $F_{0,v}$  est fixé par  $U^-(\varpi^n)$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^n[\mu] & 1 \end{pmatrix} F_{0,v} = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 + \varpi^n[\mu\lambda] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \varpi^n[\mu\lambda]} & 0 \\ \varpi^{n+1}[\mu] & 1 + \varpi^n[\mu\lambda] \end{pmatrix} v = F_{0,v}.$$

Autrement dit,  $F_{0,v}$  appartient à  $V_n^+$ . De même, pour tout  $m \geq 2$ ,

$$F_{0,v}^{(m)} := \sum_{\lambda_i \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} \varpi & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_{0,v}^{(m-1)} \in V_n^+.$$

Comme  $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} V_n^+ < +\infty$ , on en déduit qu'il existe  $c_m \in \overline{\mathbb{F}}_p$  ( $m \geq 0$ ) tels que

$$c_0 v + \sum_{m \geq 1} c_m F_{0,v}^{(m)} = 0.$$

Le lemme 3.8 implique que c'est impossible si  $\ell_\sigma(v) \geq 1$  puisqu'alors  $\ell_\sigma(F_{0,v}^{(m)}) = \ell_\sigma(v) + m$ . On a donc  $\ell_\sigma(v) = 0$  et le (i) est prouvé.

(ii) C'est une conséquence de (i).  $\square$

**Remarque 4.6.** Ce n'est pas trivial que les  $I_1 \cap U^+$ -invariants de  $I^+(\sigma, \pi)$  soient de dimension finie. En fait, on a le résultat suivant : *soit  $\chi$  un caractère lisse de  $I$ , et  $E = \text{Inj}_I \chi$  l'enveloppe injective de  $\chi$  dans la catégorie  $\underline{\text{Rep}}_I$ , alors  $E^{I_1 \cap U^+}$  est de dimension infinie.*

*Démonstration.* Posons, pour  $n \geq 1$ ,  $K_0(\varpi^n)$  le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 + \varpi a & b \\ \varpi^n c & 1 + \varpi d \end{pmatrix}$$

avec  $a, b, c, d \in \mathcal{O}$ , qui est un pro- $p$ -sous-groupe ouvert de  $I$  contenant  $I_1 \cap U^+$ . Comme  $E|_{K_0(\varpi^n)}$  est encore un objet injectif dans la catégorie  $\underline{\text{Rep}}_{K_0(\varpi^n)}$ , on a

$$E|_{K_0(\varpi^n)} \cong (\text{Inj}_{K_0(\varpi^n)} 1)^{k_n}$$

est une somme directe de  $k_n$  copies de  $\text{Inj}_{K_0(\varpi^n)} 1$  où  $k_n := \dim E^{K_0(\varpi^n)}$ . Ceci implique

$$k_{n+1} = \dim E^{K_0(\varpi^{n+1})} = k_n \cdot \dim (\text{Inj}_{K_0(\varpi^n)} 1)^{K_0(\varpi^{n+1})}.$$

Or  $K_0(\varpi^{n+1})$  est un ( $p$ -)sous-groupe distingué de  $K_0(\varpi^n)$  d'indice  $p^f$ , on a donc

$$(\text{Inj}_{K_0(\varpi^n)} 1)^{K_0(\varpi^{n+1})} \cong \text{Inj}_{K_0(\varpi^n)/K_0(\varpi^{n+1})} 1$$

et par suite  $k_{n+1} = p^f k_n$ . Donc la dimension des  $I_1 \cap U^+$ -invariants de  $E$ , qui est plus grande que  $k_n$  pour tout  $n$ , est infinie.  $\square$

## 5 Application : le cas $F = \mathbb{Q}_p$

Supposons  $F = \mathbb{Q}_p$  avec  $p > 2$ . Dans ce paragraphe, on retrouve des résultats de [Br1] et [BP].

Soient  $\pi$  une représentation supersingulière de  $G$  avec caractère central trivial (pour simplifier les notations). Fixons une surjection  $G$ -équivariante  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \twoheadrightarrow \pi$  (avec  $\sigma \hookrightarrow \pi$  un poids) qui se factorise par ([BL2])

$$\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \twoheadrightarrow \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / T \twoheadrightarrow \pi.$$

Posons  $R_n, R_n^+$ , ainsi que  $R_n(\sigma, \pi), R_n^+(\sigma, \pi)$  comme au n°2.1. On écrit  $R_n(\pi) = R_n(\sigma, \pi)$  et  $R_n^+(\pi) = R_n^+(\sigma, \pi)$  pour simplifier les notations. D'abord, comme conséquence du corollaire 2.8, on a :

**Corollaire 5.1.** *Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\dim R_n^+(\pi)^{I_1 \cap U^+} = 1$ .*

*Démonstration.* Dans ce cas particulier, chaque  $R_n^+(\pi)$  est une  $I_1 \cap U^+$ -représentation unisérielle puisque c'est vrai pour l'enveloppe injective de 1 dans la catégorie  $\underline{\text{Rep}}_{I_1 \cap U^+}$  (cf. proposition 4.6 [Pa2]).  $\square$

On peut de plus déterminer le  $I$ -socle de  $R_n^+(\pi)$  et le  $K$ -socle de  $R_n(\pi)$ . On fixe  $v_\sigma \in \sigma$  un vecteur non nul fixé par  $I_1$  de sorte que  $\mathcal{H}$  agit dessus via  $\chi = \chi_\sigma$ . On pose  $v_{\sigma^{[s]}} = \Pi(v_\sigma) \in \pi$ .

**Proposition 5.2.** *Considérons la suite exacte*

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_n(\pi) \rightarrow \text{Ind}_I^K \Pi(R_{n-1}^+(\pi)) \rightarrow R_n(\pi) \rightarrow 0.$$

*Alors*

(i)  $\mathcal{N}_n(\pi) \neq 0$  et  $\text{pr}_{n-1}(\mathcal{N}_n(\pi)) \subset \Pi(R_{n-1}^+(\pi))$  est de dimension 1 pour tout  $n \geq 1$ , où on pose  $\text{pr}_{n-1} = \text{pr}_{\Pi(R_{n-1}^+(\pi))}$  (cf. n° 2.2).

(ii) Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\text{soc}_I(R_n^+(\pi)) = R_n^+(\pi)^{I_1} = \overline{\mathbb{F}}_p v$  avec

$$v := \begin{cases} v_\sigma & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ v_{\sigma^{[s]}} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}.$$

(iii) Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{N}_n(\pi) \cong \tau^{[s]}$  et  $\text{soc}_K(R_n(\pi)) = \tau$  avec

$$\tau := \begin{cases} \sigma & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \sigma^{[s]} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}.$$

*Démonstration.* Traitons d'abord le cas où  $n = 1$ . On sait que la  $K$ -représentation engendrée par  $v_{\sigma^{[s]}}$  est isomorphe à  $\sigma^{[s]}$  (voir la proposition 4.1.2, [Br1]), i.e. on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \sigma \rightarrow \text{Ind}_I^K \overline{\mathbb{F}}_p v_{\sigma^{[s]}} \rightarrow \sigma^{[s]} \rightarrow 0,$$

donc  $\mathcal{N}_1(\pi)$ , contenant une sous-représentation isomorphe à  $\sigma$ , n'est pas nul. En conséquence  $\text{pr}_0(\mathcal{N}_1(\pi)) = R_0^-(\pi) \cap R_1^+(\pi) \neq 0$  (le lemme 2.5). Par le corollaire 5.1,  $R_0^-(\pi)$  (resp.  $R_1^+(\pi)$ ) est unisérielle telle que ses  $I_1 \cap U^-$ -invariants (resp.  $I_1 \cap U^+$ -invariants) sont de dimension 1. Comme  $p > 2$ , on voit qu'une sous- $I$ -représentation  $V$  de  $R_0^-(\pi)$  est telle que  $\dim V^{I_1 \cap U^+} = 1$  si et seulement si  $V = \text{soc}_I(R_0^-(\pi)) = \overline{\mathbb{F}}_p v_{\sigma^{[s]}}$ . En particulier, on a  $R_0^-(\pi) \cap R_1^+(\pi) = \overline{\mathbb{F}}_p v_{\sigma^{[s]}}$  et ensuite

$$\sigma \subseteq \mathcal{N}_1(\pi) \subseteq \text{Ind}_I^K \overline{\mathbb{F}}_p v_{\sigma^{[s]}}$$

ce qui force  $\mathcal{N}_1(\pi) = \sigma$  puisque  $\Pi(v_\sigma) \notin \mathcal{N}_1(\pi)$ .

On va démontrer que  $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} R_1(\pi)^{I_1} = 1$ , ce qui impliquera

$$R_1(\pi)^{I_1} = \overline{\mathbb{F}}_p v_{\sigma^{[s]}} = R_0^-(\pi)^{I_1}$$

et que  $\text{soc}_K R_1(\pi)$  est irréductible isomorphe à  $\sigma^{[s]}$  puisqu'on a vu que  $\sigma^{[s]} \subset \text{soc}_K R_1(\pi)$ . Pour cela, soit  $x \in R_1(\pi)$  un élément non nul fixé par  $I_1$ . Supposons de plus que



$x$  soit un vecteur propre de  $\mathcal{H}$ . Comme  $R_1(\pi) = \Pi(R_0^+(\pi)) + R_1^+(\pi)$ , on peut écrire  $x = \Pi(x_1) + x_2 \in R_1(\pi)$  avec  $x_1 \in R_0^+(\pi)$ ,  $x_2 \in R_1^+(\pi)$  des vecteurs propres de  $\mathcal{H}$  du même caractère que  $x$ . Si  $x_1 = 0$  ou  $x_2 = 0$ , alors on a trivialement  $\overline{\mathbb{F}}_p x = \text{soc}_I(R_1^+(\pi))$ . Supposons donc  $x_1 \neq 0$  et  $x_2 \neq 0$ . Puisque  $\langle I \cdot \Pi(x_1) \rangle \subset R_0^-(\pi)$  et  $\langle I \cdot x_2 \rangle \subset R_1^+(\pi)$  sont unisérielles et les cosocles de leurs radicaux sont non isomorphes (car  $p > 2$ ), on en déduit que

$$\text{rad}_I(\langle I \cdot \Pi(x_1) \rangle) \subsetneq \langle I \cdot x \rangle, \quad \text{rad}_I(\langle I \cdot x_2 \rangle) \subsetneq \langle I \cdot x \rangle.$$

Donc  $\langle I \cdot x \rangle$  est de codimension 1 dans  $\langle I \cdot \Pi(x_1) \rangle \oplus \langle I \cdot x_2 \rangle$ . Puisque  $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \langle I \cdot x \rangle = 1$ , on a forcément que  $\Pi(x_1)$  et  $x_2$  sont fixés par  $I_1$ , d'où  $\overline{\mathbb{F}}_p \Pi(x_1) = \overline{\mathbb{F}}_p x_2 = \text{soc}_I(R_0^-(\pi))$  et  $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} R_1(\pi)^{I_1} = 1$  comme énoncé.

Le cas général se prouve de la même façon par une récurrence évidente.  $\square$

**Remarque 5.3.** (i) Rappelons que dans [Br1], Breuil a démontré, en utilisant le même calcul, que les  $I_1$ -invariants de  $\text{c-Ind}_{KZ\sigma}^G/T$  formaient un espace vectoriel de dimension 2, et il en a déduit que la représentation  $\text{c-Ind}_{KZ\sigma}^G/T$  était irréductible.

(ii) Soit  $\pi$  est une représentation supersingulière de  $G$ , on a vu que (cf. proposition 5.2) les  $I_1$ -invariants de  $\pi$  sont de dimension 2. La proposition 3.14 fournit une autre preuve rapide de ce fait. Pour cela, on montre d'abord que : si  $M$  est une  $I_1 \cap U^+$ -représentation de dimension finie vérifiant  $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} M^{I_1 \cap U^+} = 1$ , alors

$$(5.0.4) \quad \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} H^1(I_1 \cap U^+, M) = 1.$$

L'énoncé est vrai lorsque  $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} M = 1$  puisqu'alors  $M$  est la représentation triviale de  $I_1 \cap U^+$  et on a donc

$$H^1(I_1 \cap U^+, M) \cong \text{Hom}(I_1 \cap U^+, \overline{\mathbb{F}}_p) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}_p, \overline{\mathbb{F}}_p)$$

est de dimension 1. Supposons  $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} M \geq 2$ . Soient  $M_1 \subsetneq M$  une sous-représentation non triviale et  $M_2$  le quotient de  $M$  par  $M_1$ . Par hypothèse, on a encore

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} M_1^{I_1 \cap U^+} = \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} M_2^{I_1 \cap U^+} = 1.$$

Comme (voir par exemple §4.3, [Se4])

$$H^2(I_1 \cap U^+, R_{k-1}^+(\pi) \cap R_k^+(\pi)) = 0,$$

on obtient une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow M_1^{I_1 \cap U^+} \rightarrow M^{I_1 \cap U^+} \rightarrow M_2^{I_1 \cap U^+} \\ \rightarrow H^1(I_1 \cap U^+, M_1) \rightarrow H^1(I_1 \cap U^+, M) \rightarrow H^1(I_1 \cap U^+, M_2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et donc une récurrence sur la dimension de  $M$  permet de conclure.

Revenons à la preuve du fait que  $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \pi^{I_1} = 2$ . Comme (prop. 3.14 (ii))

$$\overline{\mathbb{F}}_p v_\sigma \oplus \overline{\mathbb{F}}_p v_{\sigma^{[s]}} \subseteq \pi^{I_1} \subseteq I^+(\pi) = \sum_{n \geq 0} R_n^+(\pi),$$

il suffit de montrer que  $\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} (\sum_{n \leq k} R_n^+(\pi))^{I_1} \leq 2$  pour tout  $k \geq 0$ . Par définition de  $T$ , on vérifie que  $T$  induit une inclusion  $R_n^+(\pi) \hookrightarrow R_{n+2}^+(\pi)$  pour tout  $n \geq 0$ , de sorte que l'on a

$$\sum_{n \leq k} R_n^+(\pi) = R_{k-1}^+(\pi) + R_k^+(\pi)$$

pour tout  $k \geq 1$ . D'après le corollaire 5.1, les  $I_1 \cap U^+$ -invariants de  $R_{k-1}^+(\pi)$  (resp.  $R_k^+(\pi)$ ) sont de dimension 1. Considérons la suite exacte suivante de  $I_1 \cap U^+$ -représentations

$$0 \rightarrow R_{k-1}^+(\pi) \cap R_k^+(\pi) \rightarrow R_{k-1}^+(\pi) \oplus R_k^+(\pi) \rightarrow R_{k-1}^+(\pi) + R_k^+(\pi) \rightarrow 0.$$

L'énoncé (5.0.4) appliqué à  $M = R_{k-1}^+(\pi) \cap R_k^+(\pi)$  entraîne que les  $I_1 \cap U^+$ -invariants, en particulier les  $I_1$ -invariants, de  $R_{k-1}^+(\pi) + R_k^+(\pi)$  sont de dimension  $\leq 2$ . Ceci étant vrai pour tout  $k \geq 1$ , le résultat s'en déduit.

**Théorème 5.4.** *Soient  $\pi$  une représentation supersingulière de  $G$  avec caractère central trivial et  $\sigma$  un poids apparaissant dans le  $K$ -socle de  $\pi$ . Alors*

$$D(\pi) \cong (\sigma \oplus \sigma^{[s]}, \chi_\sigma \oplus \chi_\sigma^s, \text{can}),$$

où le terme de droite est vu comme un diagramme de manière évidente (et unique).

*Démonstration.* Dans [Pa1],  $I^+(\sigma, \pi)$  est noté  $M$  et il est démontré qu'il existe une suite exacte de  $I$ -représentations (théorème 5.3, *loc. cit.*)

$$(5.0.5) \quad 0 \rightarrow \pi^{I_1} \rightarrow M \oplus \Pi.M \rightarrow \pi \rightarrow 0.$$

Signalons que la preuve de la proposition 5.2 donne aussi une preuve pour la suite (5.0.5).  $\square$

**Corollaire 5.5.** *Pour tout  $G$ -quotient non trivial  $\pi$  de  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ , on a  $D_1(\sigma, \pi) = \pi^{I_1}$ .*

*Démonstration.* D'après la classification de Barthel-Livné [BL2] et de Breuil [Br1], le quotient  $\pi$  est nécessairement de la forme  $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / f(T)$  avec  $f(T) \in \overline{\mathbb{F}}_p[T]$  un polynôme de degré  $\geq 1$ . De plus,  $\pi$  est isomorphe à la somme directe :

$$\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / (T - \lambda_1)^{n_1} \oplus \cdots \oplus \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma / (T - \lambda_k)^{n_k}$$

si  $f(T)$  se décompose sous la forme

$$f(T) = \prod_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{n_i}$$

avec  $\lambda_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$  et  $n_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . On est donc ramené au cas  $k = 1$ , i.e.  $\pi = \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma / (T - \lambda)^n$  avec  $n \geq 1$ . Le cas  $n = 1$  étant traité (cf. les théorèmes 3.13 et 5.4), on suppose que  $n \geq 2$ .

En posant  $\pi_1 = (T - \lambda)^{n-1} \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma / (T - \lambda)^n$  et  $\pi_2 = \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma / (T - \lambda)^{n-1}$ , on obtient une suite exacte de  $G$ -représentations (avec  $\pi$  irréductible) :

$$0 \rightarrow \pi_1 \rightarrow \pi \rightarrow \pi_2 \rightarrow 0.$$

On va montrer que le complexe induite (par la proposition 3.23) :

$$0 \rightarrow D_1(\pi_1) \rightarrow D_1(\sigma, \pi) \rightarrow D_1(\sigma, \pi_2) \rightarrow 0$$

est en fait *exact*. Grâce à la même proposition, il reste à vérifier l'exactitude du milieu, i.e. :

$$(5.0.6) \quad D_1(\sigma, \pi) \cap \pi_1 = D_1(\pi_1).$$

Rappelons (cf. lemme 3.4) que l'on a défini le morphisme composé :

$$\Phi_\sigma : \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \rightarrow I^-(\sigma) \xrightarrow{\text{mod } (T-\lambda)^n} I^-(\sigma, \pi)$$

de sorte que

$$D_1(\sigma, \pi) = \Phi_\sigma((T - \lambda)^n \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma).$$

Soit  $\bar{x} = \Phi_\sigma(x)$  un vecteur non nul avec  $x \in (T - \lambda)^n \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ . On écrit  $x = x^+ + x^-$  avec  $x^+ \in I^+(\sigma)$  et  $x^- \in I^-(\sigma)$ . Alors la condition  $\bar{x} \in \pi_1$  est équivalente à ce que :

$$x^+, x^- \in (T - \lambda)^{n-1} \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma - (T - \lambda)^n \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma.$$

De manière équivalente, on a

$$(5.0.7) \quad x^+ = (T - \lambda)^{n-1} y^+, \quad x^- = (T - \lambda)^{n-1} y^-$$

avec  $y^+, y^- \in \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma - (T - \lambda) \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma$ .

Soient  $v \in \sigma^{I_1}$  un vecteur non nul et  $\bar{v}$  l'image de  $[\mathrm{Id}, v]$  dans  $\pi$ . Posons  $w = (T - \lambda)^{n-1} v$ . Alors  $\bar{w}$ , l'image de  $w$  dans  $\pi_1$ , est non nul et que  $\bar{x} \in D_1(\pi_1)$  si et seulement s'il existe  $Q_1, Q_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$  tels que :

$$(5.0.8) \quad \bar{x} = Q_1 \cdot \bar{w} = \Pi Q_2 \cdot \bar{w}.$$

Or, la condition (5.0.7) avec la formule (4) du n°2.5 [Br1] implique que  $y^+ \in I^+(\sigma)$  et  $y^- \in I^-(\sigma)$ , donc (5.0.8) est satisfaite pour les éléments  $Q_1, Q_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p[P^+]$  définis par :

$$y^+ = Q_1 \cdot v, \quad y^- = \Pi Q_2 \cdot v.$$

Ceci montre notre énoncé (5.0.6).

Le corollaire s'en déduit alors facilement : par ce qui précède et par la proposition 4.5 (i) (en notant que  $\pi$  est admissible), on a un diagramme commutatif à lignes exactes (par récurrence sur  $n$ ) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \pi_1^{I_1} & \longrightarrow & \pi^{I_1} & \longrightarrow & \pi_2^{I_1} \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & D_1(\pi_1) & \longrightarrow & D_1(\sigma, \pi) & \longrightarrow & D_1(\sigma, \pi_2) \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

d'où le corollaire et, de plus, la surjectivité du morphisme  $\pi^{I_1} \rightarrow \pi_2^{I_1}$ .  $\square$

**Remarque 5.6.** Soit  $\pi$  une représentation supersingulière de  $G$  avec caractère central trivial, et  $\sigma$  un poids apparaissant dans  $\pi$ . On sait que  $\pi^{K_1} \supseteq \sigma \oplus \sigma^{[s]}$  (proposition 5.2), donc on peut considérer le morphisme naturel

$$\mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma \oplus \mathrm{c}\text{-Ind}_{KZ}^G \sigma^{[s]} \rightarrow \pi$$

et son noyau  $\mathcal{N}$ . En utilisant le théorème 5.4 on peut vérifier (de manière analogue à la démonstration du théorème 4.3), si l'on pose ker le noyau de

$$\sigma \oplus \sigma^{[s]} \oplus \mathrm{Ind}_I^K \Pi(\sigma) \oplus \mathrm{Ind}_I^K \Pi(\sigma^{[s]}) \rightarrow \pi,$$

alors  $\mathcal{N}$  est engendrée par ker en tant que  $G$ -représentation. On vérifie facilement que ker est engendré par les relations " $R_0$ " et " $R_1$ " définies exactement comme dans la proposition III 3.12, [Co]. Autrement dit,  $\pi$  admet une *présentation standard* au sens de [Co].

Signalons que si  $v \in \sigma$  et  $v^{[s]} \in \sigma^{[s]}$  sont des vecteurs non nuls fixés par  $I_1$ , alors  $\mathcal{N}$  est aussi engendrée par  $\Pi(v) - v^{[s]}$  en tant que  $G$ -représentation.



## Partie III

# Sur quelques représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_{p^f})$

### 1 Introduction

On conserve les notations du chapitre précédent (voir page 45). On suppose de plus que  $p > 2$  et que  $F = \mathbb{Q}_{p^f}$  est l'unique extension finie non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  de degré  $f \geq 1$ , et on choisit  $\varpi = p$  comme l'uniformisante fixée de  $F$ . On note  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$  le groupe de Galois absolu de  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  sur  $F$ .

Soit  $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F) \rightarrow GL_2(\overline{\mathbb{F}_p})$  une représentation continue générique (voir définition 3.2) telle que les Frobenius géométriques agissent trivialement sur  $\det(\rho)$ . D'après [BDJ], on peut lui associer un ensemble de poids (i.e. de représentations irréductibles de  $K$  sur  $\overline{\mathbb{F}_p}$ ) noté  $\mathcal{D}(\rho)$ . On appelle *poids de Diamond* les poids de  $\mathcal{D}(\rho)$ . D'après [BP], il existe une représentation  $D_0(\rho)$  de  $GL_2(\mathbb{F}_q) \cong K/K_1$  (où  $q := p^f$ ) vérifiant les conditions suivantes :

- (a)  $\text{soc}_K D_0(\rho) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}(\rho)} \sigma$
- (b) chaque poids  $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$  apparaît dans  $D_0(\rho)$  avec multiplicité 1
- (c)  $D_0(\rho)$  est maximal sous les conditions (a) et (b).

De plus, on peut munir les  $I_1$ -invariants  $D_1(\rho) := D_0(\rho)^{I_1}$  d'une action de  $N$  et, en choisissant une injection  $I$ -équivariante  $r : D_1(\rho) \hookrightarrow D_0(\rho)$  et en faisant agir  $p \in Z$  trivialement, on obtient un diagramme

$$D(\rho, r) := (D_0(\rho), D_1(\rho), r).$$

Par [BP], il existe (au moins) une représentation lisse admissible  $\pi(\rho, r)$  de  $G$  telle que

- $\text{soc}_K \pi(\rho, r) = \text{soc}_K D_0(\rho)$
- $(\pi^{K_1}, \pi^{I_1}, \text{can})$  contient  $D(\rho, r)$
- $\pi$  est engendrée par  $D_1(\rho)$  en tant que  $G$ -représentation.

Si de plus la représentation  $\rho$  est irréductible, alors  $\pi(\rho, r)$  l'est aussi et est supersingulière (cf. [BP]). On dira que  $\pi(\rho, r)$  est une représentation de  $G$  associée à  $D(\rho, r)$ .

Fixons un diagramme  $D(\rho, r)$  et une représentation  $\pi(\rho, r)$  de  $G$  qui lui est associée comme ci-dessus. On s'intéresse aux questions suivantes :

(Q1) La représentation  $\pi(\rho, r)$  est-elle uniquement déterminée par le diagramme  $D(\rho, r)$ ? Autrement dit, si  $\pi'(\rho, r)$  est une autre représentation de  $G$  associée à  $D(\rho, r)$ , est-ce que l'on a

$$\pi(\rho, r) \cong \pi'(\rho, r)?$$

(Q2) Est-ce que l'on a un isomorphisme de diagrammes :

$$(\pi(\rho, r)^{K_1}, \pi(\rho, r)^{I_1}, \text{can}) \cong (D_0(\rho), D_1(\rho), r)?$$

(Q3) Si  $\rho$  est réductible et scindée, on sait que le diagramme  $D(\rho, r)$  se décompose en une somme directe de sous-diagrammes (§15, [BP])

$$D(\rho, r) = \bigoplus_{\ell=0}^f D(\rho, r_\ell) = \bigoplus_{\ell=0}^f (D_{0,\ell}(\rho), D_{1,\ell}(\rho), r_\ell).$$

La représentation  $\pi(\rho, r)$  est-elle aussi une somme directe de sous-représentations  $\{\pi_\ell, 0 \leq \ell \leq f\}$  vérifiant (au moins) la condition  $\text{soc}_K(\pi_\ell) = \text{soc}_K D_{0,\ell}(\rho)$ ?

Si  $f = 1$ , alors les réponses pour (Q1)-(Q3) sont positives, ce qui a été démontré dans [BP]. Malheureusement, lorsque  $f \geq 2$ , les réponses pour (Q1)-(Q3) sont toutes négatives : il y a beaucoup plus de paramètres que ceux déterminés par  $r$ . Plus précisément, on va démontrer le résultat suivant (cf. théorèmes 4.15, 4.16, 4.24) :

**Théorème 1.1.** *On conserve les notations précédentes.*

(i) *Supposons  $f \geq 2$ . Il existe (au moins) deux représentations non isomorphes de  $G$  associées au même diagramme  $D(\rho, r)$ .*

(ii) *Supposons  $f = 2$  et  $\rho$  irréductible. Il existe une représentation supersingulière  $\pi(\rho, r)$  (associée à  $D(\rho, r)$ ) avec  $D_0(\rho) \subsetneq \pi(\rho, r)^{K_1}$ .*

(iii) *Supposons  $f = 2m$  avec  $m \geq 2$  et  $\rho$  réductible scindée. Il existe une représentation  $\pi(\rho, r)$  (associée à  $D(\rho, r)$ ) qui n'est pas semi-simple.*

Introduisons maintenant quelques notations supplémentaires de ce chapitre (je renvoie le lecteur à la page 47 pour les autres).

On note  $I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$  le sous-groupe d'inertie de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$  et on normalise l'injection du corps de classe local  $\iota : F^\times \hookrightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)^{\text{ab}}$  de telle sorte que les uniformisantes s'envoient sur les Frobenius géométriques. Grâce à  $\iota$ , on identifie les caractères lisses de  $F^\times$  (resp. de  $\mathcal{O}_F^\times$ ) dans  $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$  et les caractères lisses de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$  (resp. de  $I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ ) dans  $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ . Pour  $d \geq 1$ , on note  $w_d : I(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_{p^d}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  le caractère envoyant  $g$  sur  $\frac{g(p^d - \sqrt[p]{p})}{p^d - \sqrt[p]{p}} \in \mathbb{F}_{p^d}^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ .

Si  $\sigma$  et  $\tau$  sont deux poids, on dit que  $(\sigma, \tau)$  est un couple de poids de type  $(-1, j)$  (resp.  $(+1, j)$ ) si  $\text{Ext}_{GL_2(\mathbb{F}_q)}^1(\tau, \sigma) \neq 0$  et si l'on est dans le cas (a) (resp. (b)) du corollaire 5.6 (i), [BP]. Remarquons que ceci implique implicitement  $f \geq 2$ .

Si  $S$  est une représentation lisse d'un groupe profini  $H$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ , on a défini au chapitre II le socle et le radical de  $S$ , noté respectivement  $\text{soc}(S)$  et  $\text{rad}(S)$ . Par récurrence (en posant  $\text{soc}^1(S) = \text{soc}(S)$ ), on note  $\text{soc}^{i+1}(S)$  l'unique sous-représentation de  $S$  contenant  $\text{soc}^i(S)$  telle que  $\text{soc}^{i+1}(S)/\text{soc}^i(S)$  soit le socle de  $S/\text{soc}^i(S)$ . On définit également  $\text{rad}^{i+1}(S)$  comme le radical de  $\text{rad}^i(S)$ . On pose  $S_i := \text{soc}^{i+1}S/\text{soc}^iS$  et on écrit la filtration par le socle de  $S$  sous la forme

$$S_0 \text{ --- } S_1 \text{ --- } \dots \text{ --- } S_n \dots$$

## 2 Combinatoire de $K$ -représentations

Dans ce paragraphe, on étudie la structure de certaines  $K$ -représentations et on généralise le lemme 18.4 de [BP].

### 2.1 Rappels et compléments

Rappelons (chap.II n°2.1) que tout poids est, à isomorphisme près, de la forme

$$(\text{Sym}^{r_0}\overline{\mathbb{F}}_p^2 \otimes (\text{Sym}^{r_1}\overline{\mathbb{F}}_p^2)^{\text{Fr}} \otimes \dots \otimes (\text{Sym}^{r_{f-1}}\overline{\mathbb{F}}_p^2)^{\text{Fr}^{f-1}}) \otimes \eta$$

où les  $r_i$  sont des entiers entre 0 et  $p-1$ ,  $\eta$  est un caractère lisse de  $\mathcal{O}_F^\times$  dans  $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$  et  $\text{Fr} : \text{GL}_2(\mathbb{F}_q) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$  est le Frobenius donné par  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^p & b^p \\ c^p & d^p \end{pmatrix}$ . On notera cette représentation  $(r_0, \dots, r_{f-1}) \otimes \eta$ .

Soit  $\sigma = (r_0, \dots, r_{f-1}) \otimes \eta$  un poids. Alors  $\sigma^{I_1}$  est de dimension 1 et  $\mathcal{H}$  agit dessus via le caractère  $\chi = \chi_\sigma$  défini par

$$\chi : \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto a^r \eta(ad)$$

où  $r := \sum_{i=0}^{f-1} p^i r_i$ . Par réciprocity de Frobenius, le morphisme  $\chi \hookrightarrow \sigma|_I$  correspond à une surjection  $K$ -équivariante  $\text{Ind}_I^K \chi \rightarrow \sigma$ . La structure précise de  $\text{Ind}_I^K \chi$  (resp.  $\text{Ind}_I^K \chi^s$ ) a été étudiée dans [Je]. On rappelle le résultat en suivant la formulation donnée dans [BP].

Soient  $(x_0, \dots, x_{f-1})$   $f$  variables. On définit  $\mathcal{P}(x_0, \dots, x_{f-1})$  comme l'ensemble des  $f$ -uplets  $\lambda := (\lambda_0(x_0), \dots, \lambda_{f-1}(x_{f-1}))$  où  $\lambda_i(x_i) \in \mathbb{Z} \pm x_i$  est défini comme suit. Si  $f = 1$ ,  $\lambda_0(x_0) \in \{x_0, p-1-x_0\}$ . Si  $f > 1$ , alors :

- (i)  $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i - 1, p-2-x_i, p-1-x_i\}$  pour  $i \in \{0, \dots, f-1\}$
- (ii) si  $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i - 1\}$ , alors  $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{x_{i+1}, p-2-x_{i+1}\}$
- (iii) si  $\lambda_i(x_i) \in \{p-2-x_i, p-1-x_i\}$ , alors  $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{p-1-x_{i+1}, x_{i+1}-1\}$



avec les conventions  $x_f := x_0$  et  $\lambda_f(x_f) := \lambda_0(x_0)$ .

Pour  $\lambda \in \mathcal{P}(x_0, \dots, x_{f-1})$ , on définit

$$e(\lambda) := \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^{f-1} p^i (x_i - \lambda_i(x_i)) \right) \quad \text{si } \lambda_{f-1}(x_{f-1}) \in \{x_{f-1}, x_{f-1} - 1\}$$

$$e(\lambda) := \frac{1}{2} (p^f - 1 + \sum_{i=0}^{f-1} p^i (x_i - \lambda_i(x_i))) \quad \text{sinon.}$$

Le résultat de [Je] se reformule alors ainsi :

**Lemme 2.1.** *Les sous-quotients irréductibles de  $\mathrm{Ind}_I^K \chi$  ou  $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$  sont exactement les poids :*

$$(\lambda_0(r_0), \dots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det^{e(\lambda)(r_0, \dots, r_{f-1})} \eta$$

pour  $\lambda \in \mathcal{P}(x_0, \dots, x_{f-1})$  en oubliant les poids tels qu'il existe  $i$  satisfaisant  $\lambda_i(r_i) < 0$ .

*Démonstration.* Voir le lemme 2.2, [BP]. □

Par le lemme 2.1, on sait donc que  $\mathrm{Ind}_I^K \chi$  et  $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$  sont de multiplicité 1 et que ces deux représentations ont les mêmes sous-quotients irréductibles. Si  $\chi = \chi^s$ , alors (lemme 2.3, [BP])

$$\mathrm{Ind}_I^K \chi = \mathrm{Ind}_I^K \chi^s = \sigma \oplus \sigma^{[s]}.$$

Supposons  $\chi \neq \chi^s$  et soit  $\tau$  un poids apparaissant dans  $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$ . Alors il existe une unique sous-représentation de  $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$ , notée  $I(\sigma, \tau)$ , dont le cosocle est  $\tau$  (et le socle est  $\sigma$ ). Pour  $\lambda \in \mathcal{P}(x_0, \dots, x_{f-1})$ , on définit

$$(2.1.1) \quad J(\lambda) := \{i \in \{0, \dots, f-1\} \mid \lambda_i(x_i) \in \{p-2-x_i, p-1-x_i\}\}.$$

On peut déterminer la structure de  $I(\sigma, \tau)$  à l'aide de  $J(\lambda)$  :

**Lemme 2.2.** *Supposons  $\chi \neq \chi^s$ . Les sous-quotients irréductibles de  $I(\sigma, \tau)$  sont les poids  $\tau' \in \mathrm{JH}(\mathrm{Ind}_I^K \chi^s)$  tels que  $J(\tau') \subset J(\tau)$ .*

*Démonstration.* Voir le théorème 2.4 (iii) de [BP]. □

Si  $\chi$  est un caractère lisse de  $I$  et  $j$  est un entier entre 0 et  $f-1$ , on note  $E_j(\chi)$  l'extension non triviale de dimension 2

$$0 \rightarrow \chi \rightarrow E_j(\chi) \rightarrow \chi \alpha^{-p^j} \rightarrow 0$$

où l'action de  $I$  est donnée, dans une base convenable  $\{v, w\}$ , par : si  $\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \in I$ ,

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} v = \chi \left( \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \right) v \\ \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} w = \chi \alpha^{-p^j} \left( \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} \right) ((\overline{b/d})^{p^j} v + w). \end{cases}$$

Rappelons (§2.2, chap.II) que si  $M$  est une représentation de  $I$ , on note  $\Pi(M)$  la représentation de  $I$  définie par

$$h \cdot \Pi(v) := \Pi^{-1} h \Pi \cdot v, \quad h \in I.$$

Posons  $W := \text{Ind}_I^K \Pi(E_j(\chi))$ , et définissons-y les vecteurs suivants (pour  $0 \leq k \leq q-1$ )

$$(2.1.3) \quad f_k = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)], \quad F_k = \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(w)],$$

où l'on convient que  $0^0 := 1$  et  $0^{q-1} := 0$ .

On a alors les formules suivantes :

**Lemme 2.3.** (i) Pour tout  $0 \leq k \leq q-1$ ,  $F_k$  (resp.  $f_k$ ) est un vecteur propre de  $\mathcal{H}$  de caractère  $\chi \alpha^{-k-p^j}$  (resp.  $\chi \alpha^{-k}$ ).

(ii) Pour tout  $0 \leq k \leq q-1$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_k = F_k + f_k.$$

(iii) On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} F_k = \begin{cases} F_k - f_{k+2p^j} & \text{si } k + 2p^j \leq q-1 \\ F_k - f_{k+2p^j-(q-1)} & \text{si } k + 2p^j \geq q. \end{cases}$$

(iv) On a

$$\begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F_k = \begin{cases} F_k + f_{k+p^j} & \text{si } k + p^j \leq q-1 \\ F_k + f_{k+p^j-(q-1)} & \text{si } k + p^j \geq q. \end{cases}$$

*Démonstration.* (i) découle du lemme 2.5, [BP].

(ii) provient de l'égalité

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) On a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} F &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+p[\lambda] & p \\ -p[\lambda^2] & 1-p[\lambda] \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ([1, \Pi(w)] - \lambda^{2p^j} [1, \Pi(v)]) \\ &= F_k - \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{k+2p^j} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(v)]. \end{aligned}$$

(iv) On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F &= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] \\
&= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda](1+p) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] \\
&= \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^k \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p[\lambda] & 1 \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] \\
&= F_k + \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{k+p^j} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, \Pi(w)].
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.4.** Soit  $\omega$  un sous-quotient irréductible de  $\text{Ind}_I^K \Pi(\chi\alpha^{-p^j})$ . Alors il existe une unique sous- $K$ -représentation de  $W$ , notée  $W_\omega$ , telle que :

- (i) le cosocle de  $W_\omega$  est isomorphe à  $\omega$  ;
- (ii) modulo  $\text{Ind}_I^K \Pi(\chi)$ , l'image de  $W_\omega$  est isomorphe à  $U(\omega)$ , définie comme étant l'unique sous-représentation de  $\text{Ind}_I^K \Pi(\chi\alpha^{-p^j})$  de cosocle  $\omega$ .

**Remarque 2.5.** Lorsque  $W$  est de multiplicité 1, le corollaire précédent est trivial. Cependant, ce n'est pas toujours le cas : par exemple, si  $f = 2$ ,  $\chi = (1, 0)$  et  $j = 1$ , le poids  $(p-2, p-1) \otimes \det$  apparaît dans  $W$  comme sous-quotient avec multiplicité 2.

*Démonstration.* Soit  $\theta \in \mathcal{P}(x_0, \dots, x_{f-1})$  le  $f$ -uplet correspondant à  $\omega$ , i.e. si l'on écrit  $\chi\alpha^{-p^j} = (r'_0, \dots, r'_{f-1}) \otimes \eta'$  (avec  $r'_i := 0$  pour tout  $i$  si  $\chi\alpha^{-p^j} = (\chi\alpha^{-p^j})^s$ ), alors  $\theta$  est l'unique  $f$ -uplet tel que

$$\omega = (\theta_0(r'_0), \dots, \theta_{f-1}(r'_{f-1})) \otimes \eta' \det^{e(\theta)(r'_0, \dots, r'_{f-1})}.$$

Considérons le vecteur  $F \in W$  défini par

$$(2.1.4) \quad F = F_{\sum_{j \in J(\theta)} p^i(p-1-\theta_i(r_i))} + \epsilon \eta'(-1)[1, \Pi(w)]$$

avec  $\epsilon := 1$  si  $\chi\alpha^{-p^j} = (\chi\alpha^{-p^j})^s$  et si  $\omega$  est de dimension 1, et  $\epsilon := 0$  sinon. Soit  $W_F = \langle K \cdot F \rangle$  la  $K$ -représentation engendrée par  $F$ . On va démontrer que  $W_F$  satisfait aux conditions demandées. D'après les lemmes 2.6 et 2.7 de [BP],  $W_F$  satisfait à la condition (ii).

Si  $W'$  est une sous- $K$ -représentation de  $W$  vérifiant (ii), alors  $W'$  contient un vecteur  $F'$  qui s'écrit sous la forme

$$F' = F + af$$

avec  $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$  et  $f \in \text{Ind}_I^K \Pi(\chi)$  un vecteur propre de  $\mathcal{H}$  sur lequel  $\mathcal{H}$  agit via le même caractère que  $F$ , i.e. via  $\chi_\omega$ . Si  $\chi_\omega \notin \{\chi, \chi^s\}$ , alors un tel  $f$  est unique (à constante près) et le lemme 2.3 (iv) montre que

$$\begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} F' - F' \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times f$$

(en utilisant le fait que

$$\begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [1, \Pi(w)] - [1, \Pi(w)] = 0$$

si  $\epsilon = 1$ ). On a donc  $f \in W'$  et ensuite  $W_F \subset W'$ . Dans le cas où  $\chi_\omega = \chi$ , le vecteur  $f$  s'écrit sous la forme

$$f = b_0 f_0 + b_1 f_{q-1} \in \overline{\mathbb{F}}_p f_0 \oplus \overline{\mathbb{F}}_p f_{q-1}$$

et le lemme 2.3 (iv) implique  $f_{q-1} \in W'$ ; or  $F_{q-1}$  engendre  $f_0$  dans  $\text{Ind}_F^K \Pi(\chi)$ , on a encore  $f \in W'$ , et puis que  $W_F \subset W'$ . Un argument analogue permet de traiter le cas où  $\chi_\omega = \chi^s$ .

Remarquons que l'ensemble des sous-représentations de  $W$  vérifiant (i) et (ii) est non vide. Soit  $W'$  une telle représentation. Alors  $W_F \subset W'$  par ce qui précède, d'où  $W' = W_F$  car on a des isomorphismes  $\overline{W'} \cong \overline{W_F} \cong U(\omega)$  modulo  $W' \cap \text{Ind}_F^K \Pi(\chi)$  et  $W' \cap \text{Ind}_F^K \Pi(\chi)$  est inclus dans  $\text{rad}(W')$ .  $\square$

## 2.2 La structure de $W_\omega$

Conservons les notations de la section précédente. Dans [BP], la structure de la représentation  $W_\omega$  (définie au corollaire 2.4) pour tout sous-quotient irréductible «spécial»  $\omega$  de  $\text{Ind}_F^K \Pi(\chi \alpha^{-p^j})$  a été déterminée (cf. définition 17.2 et lemme 18.4, *loc.cit.*). Nous allons généraliser ce résultat. Commençons par un lemme facile.

**Lemme 2.6.** *Écrivons  $\chi \alpha^{-p^j}$  sous la forme  $(r'_0, \dots, r'_{f-1}) \otimes \eta'$  pour des  $r'_i$  et  $\eta'$  convenables (uniquement déterminés en demandant que, si  $\chi \alpha^{-p^j} = (\chi \alpha^{-p^j})^s$ , alors  $r'_i := 0$  pour tout  $0 \leq i \leq f-1$ ).*

(i) *Si  $r_j \geq 2$ , alors  $r'_j = r_j - 2$  et  $r'_i = r_i$  pour tout  $i \neq j$ .*

(ii) *Si  $r_j = 1$ , alors  $r'_j \in \{p-2, p-1\}$ . De plus,  $r'_j = p-2$  si et seulement si  $r_i = 0$  pour tout  $i \neq j$ , auquel cas on a  $\chi \alpha^{-p^j} = \chi^s$ ; si  $r'_j = p-1$ , soit  $j'$  le premier indice suivant  $j$  tel que  $r_{j'} \geq 1$ , alors  $(r'_j, \dots, r'_{j'}) = (p-1, p-1, \dots, p-1, r_{j'} - 1)$ .*

(iii) *Si  $r_j = 0$ , alors  $r'_j \in \{p-2, p-3\}$ . De plus,  $r'_j = p-3$  si et seulement si  $r_i = 0$  pour tout  $i \neq j$ , i.e.  $\chi = (0, \dots, 0) \otimes \eta$ ; si  $r'_j = p-2$ , soit  $j'$  le premier indice suivant  $j$  tel que  $r_{j'} \geq 1$ , alors  $(r'_j, \dots, r'_{j'}) = (p-2, p-1, \dots, p-1, r_{j'} - 1)$ .*

*Démonstration.* Élémentaire.  $\square$

Si  $\lambda \in \mathcal{P}(x_0, \dots, x_{f-1})$ , on note  $\tau(\lambda)$  le sous-quotient irréductible correspondant de  $\text{Ind}_F^K \chi^s$  par le lemme 2.1 :

$$\tau(\lambda) := (\lambda_0(r_0), \dots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det^{e(\lambda)(r_0, \dots, r_{f-1})} \eta.$$

Dans le lemme 2.7 ci-dessous, on fait les conventions suivantes :

(a) si  $\chi \neq \chi^s$ ,  $\chi \alpha^{-p^j} \neq (\chi \alpha^{-p^j})^s$ , et si  $\omega$  est un sous-quotient irréductible de  $\text{Ind}_F^K \Pi(\chi) = \text{Ind}_F^K \chi^s$  ou de  $\text{Ind}_F^K \Pi(\chi \alpha^{-p^j}) = \text{Ind}_F^K (\chi \alpha^{-p^j})^s$  correspondant à  $\theta \in \mathcal{P}(x_0, \dots, x_{f-1})$ , on définit  $J(\omega) := J(\theta)$  comme dans (2.1.1) ;

(b) si  $\chi = \chi^s$ , on a

$$\mathrm{Ind}_F^K \Pi(\chi) = ((0, \dots, 0) \otimes \eta) \oplus ((p-1, \dots, p-1) \otimes \eta),$$

on pose alors  $J((p-1, \dots, p-1) \otimes \eta) = \emptyset$  et  $J((0, \dots, 0) \otimes \eta) = \{0, \dots, f-1\}$ ;

(c) si  $\chi \alpha^{-p^j} = (\chi \alpha^{-p^j})^s$ , on a

$$\mathrm{Ind}_F^K \Pi(\chi \alpha^{-p^j}) = ((0, \dots, 0) \otimes \det^{p^j} \eta) \oplus ((p-1, \dots, p-1) \otimes \det^{p^j} \eta),$$

on pose alors  $J((0, \dots, 0) \otimes \det^{p^j} \eta) = \emptyset$  et  $J((p-1, \dots, p-1) \otimes \det^{p^j} \eta) = \{0, \dots, f-1\}$ .

**Lemme 2.7.** *Supposons  $f \geq 2$ . Soient  $\omega$  un sous-quotient irréductible de  $\mathrm{Ind}_F^K \Pi(\chi \alpha^{-p^j})$  et  $\theta \in \mathcal{P}(x_0, \dots, x_{f-1})$  le  $f$ -uplet associé. On écrit  $\chi \alpha^{-p^j}$  sous la forme  $(r'_0, \dots, r'_{f-1}) \otimes \eta'$  comme dans le lemme 2.6.*

(i) Si  $r_j \geq 2$ , alors  $U(\tau(\lambda)) \subset W_\omega$  si et seulement si  $J(\lambda) \subseteq J(\theta) \cup \{j-1\}$ .

(ii) Si  $r_j \leq 1$ , posons

$$J' := \{i \in \{0, \dots, f-1\} \mid r'_i = p-1, r_i = 0\}.$$

Alors  $U(\tau(\lambda)) \subset W_\omega$  si et seulement si  $J(\lambda) \subseteq J(\theta) \cup J' \cup \{j, j-1\}$ .

*Démonstration.* (i) Démontrons d'abord la direction  $\Leftarrow$ . Commençons par considérer le cas où  $\chi \neq \chi^s$  et  $\chi \alpha^{-p^j} \neq (\chi \alpha^{-p^j})^s$ . Soit  $\lambda \in \mathcal{P}(x_0, \dots, x_{f-1})$  un  $f$ -uplet tel que  $J(\lambda) \subseteq J(\theta) \cup \{j-1\}$ . Alors, par le lemme 2.7 de [BP], la représentation  $U(\tau(\lambda))$  est engendrée par le vecteur

$$f_{\sum_{i \in J(\lambda)} p^i (p-1-\lambda_i(r_i))}.$$

Il suffit donc de vérifier que ce vecteur appartient à  $W_\omega = W_F$ , où  $F$  est le vecteur défini par (2.1.4). Ceci est une conséquence du calcul prouvant le lemme 18.4 de [BP], car le vecteur " $F$ " défini dans cette preuve, qu'on note  $F'$  ici, engendre  $f_{\sum_{i \in J(\lambda)} p^i (p-1-\lambda_i(r_i))}$  et est contenu dans  $W_F$ . En fait, dans le cas  $-1$  (pour cette notation, voir le lemme 18.4, *loc. cit.*),  $F' = F$ , et dans le cas  $+1$ ,  $F \neq F'$  mais  $F$  engendre  $F'$  sous l'action de  $K$  (en fait on a  $W_F = W_{F'}$ ).

Dans le cas où  $\chi \alpha^{-p^j} = (\chi \alpha^{-p^j})^s$ , on a  $r_j = 2$  et  $r_i = 0$  pour tout  $i \neq j$ , donc

$$\mathrm{Ind}_F^K \Pi(\chi \alpha^{-p^j}) = \sigma' \oplus \sigma'^{[s]}$$

avec  $\sigma' = (0, \dots, 0) \otimes \det^{p^j} \eta$ , et  $\mathrm{Ind}_F^K \Pi(\chi)$  est une  $K$ -représentation unisérielle dont la filtration par le socle est de la forme (cf. lemme 2.2)

$$\sigma_0 := \sigma \quad \text{---} \quad \sigma_1 \quad \text{---} \quad \dots \quad \text{---} \quad \sigma_{f-1} \quad \text{---} \quad \sigma_f := \sigma^{[s]}$$

où  $(\sigma, \sigma_1)$  est un couple de poids de type  $(-1, j)$  et  $(\sigma_i, \sigma_{i+1})$  de type  $(+1, j-i)$  pour  $1 \leq i \leq f-1$ . Plus explicitement, on a, pour  $1 \leq i \leq f-1$  et à torsion près,

$$\sigma_i = (\dots, 0, (p-2)_{j-i}, p-1, \dots, p-1, 1_j, 0, \dots)$$

où  $p - 2$  est à la place  $j - i$  et 1 à la place  $j$ . Comme  $\text{Ext}_K^1(\sigma', \sigma_i) = 0$  pour  $i \geq 2$  (corollaire 5.5, [BP]), on voit que  $W_F$  ne contient pas  $I(\sigma, \sigma_2)$  si  $\omega = \sigma'$ , et un calcul analogue à celui du lemme 18.4 [BP] implique que  $W_{\sigma'}$  contient  $I(\sigma, \sigma_1)$ . D'autre part, par réciprocity de Frobenius,  $\sigma^{[s]}$  n'apparaît pas dans le cosocle de  $W$ , ce qui montre que  $W_{\sigma^{[s]}}$  admet  $\sigma^{[s]}$  comme un sous-quotient, donc que  $W_{\sigma^{[s]}}$  contient entièrement  $\text{Ind}_J^K \Pi(\chi)$ . Comme  $J(\sigma_i) = \{j - 1, \dots, j - i\}$  pour  $1 \leq i \leq f - 1$  et, par la convention (c) faite plus haut,  $J(\sigma') = \emptyset$  et  $J(\sigma^{[s]}) = \{0, \dots, f - 1\}$ , on obtient l'assertion dans ce cas.

Enfin le cas où  $\chi = \chi^s$ , i.e. où  $\chi = (0, \dots, 0) \otimes \eta$  découle du cas précédent par dualité.

Passons à la démonstration de  $\implies$  : si  $J(\lambda) \not\subseteq J(\theta) \cup \{j - 1\}$ , alors  $\tau(\lambda)$  n'apparaît pas dans  $W_\omega$ . Puisque  $W_\omega$  a pour cosocle  $\omega$ , et que  $J(\omega') \subseteq J(\omega)$  pour tout sous-quotient irréductible  $\omega'$  de  $U(\omega)$ , on voit qu'il suffit de vérifier  $\text{Ext}_K^1(\omega, \tau(\lambda)) = 0$  dès que  $J(\lambda) \not\subseteq J(\theta) \cup \{j - 1\}$  (en remplaçant éventuellement  $\omega$  par un sous-quotient  $\omega'$  de  $U(\omega)$ ). Avec cette hypothèse, soit  $k \neq j - 1$  tel que  $k \notin J(\theta)$  et  $k \in J(\lambda)$ . On a, par définition :

$$\omega = (\theta_0(r_0), \dots, \theta_j(r_j - 2), \dots, \theta_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det^{e(\theta)(r_0, \dots, r_j - 2, \dots, r_{f-1}) + p^j} \eta$$

et

$$\tau(\lambda) = (\lambda_0(r_0), \dots, \lambda_j(r_j), \dots, \lambda_{f-1}(r_{f-1})) \otimes \det^{e(\lambda)(r_0, \dots, r_{f-1})} \eta.$$

Comme  $\theta_j(x_j - 2) \notin \{\lambda_j(x_j), p - 2 - \lambda_j(x_j)\}$  et comme  $k \neq j - 1$  et  $\theta_k(x_k) \neq \lambda_k(x_k)$  (par hypothèse), un argument analogue à la preuve du lemme 12.8 [BP] montre que  $\omega$  et  $\tau(\lambda)$  ne satisfont pas au corollaire 5.5 [BP], d'où le résultat.

(ii) Supposons maintenant  $r_j \leq 1$ . Si  $i \in J'$ , alors  $\theta_i(p - 1) \geq p - 2$  si  $i \notin J(\theta)$ , et  $\theta_i(p - 1) = 0$  sinon. Dans tous les cas, le lemme 2.7 [BP] assure que  $W_\omega = W_F$  contient le vecteur

$$F^{\sum_{i \in J(\theta) \setminus (J' \cup \{j\})} p^i(p-1-\theta_i(r'_i)) + \sum_{i \in J'} p^i(p-2) + p^j(p-3+r_j)}.$$

Mais celui-ci engendre

$$f^{\sum_{i \in J(\theta) \setminus (J' \cup \{j-1, j\})} p^i(p-1-\theta_i(r'_i)) + \sum_{i \in J'} p^i(p-2) + p^j(p-3+r_j) + p^{j-1}(p-1)}$$

(en utilisant le calcul dans la preuve du lemme 18.4, [BP]), qui engendre de plus  $\tau(\lambda)$  dans  $\text{Ind}_J^K \Pi(\chi)$  lorsque  $\lambda \in \mathcal{P}(x_0, \dots, x_{f-1})$  est tel que  $J(\lambda) \subset J(\theta) \cup \{j - 1, j\} \cup J'$  (car on a  $r_i = 0$  si  $i \in J'$  et  $p - 1 - \lambda_j(r_j) \leq p - 3 + r_j$  (car  $p \geq 3$ ) lorsque  $\{j - 1, j\} \subset J(\lambda)$ ).

Pour l'autre direction, on peut procéder comme dans (i).  $\square$

Le cas  $f = 1$  est plus direct et a été traité dans [Br1],[Br2] :

**Lemme 2.8.** *Supposons  $f = 1$ . Si  $\omega$  est un sous-quotient irréductible de  $\text{Ind}_J^K \chi^s \alpha$ , alors  $\text{Ind}_J^K \chi^s \subseteq W_\omega$ .*

*Démonstration.* Le même argument que celui du lemme 2.7 traite le cas où  $\chi \neq \chi^s$  et  $\chi \alpha^{-1} \neq (\chi \alpha^{-1})^s$ , i.e.  $r_0 \notin \{0, 2\}$ . Si  $r_0 = 2$ , l'énoncé se déduit du lemme 11.8 de [Br2], qui traite en fait le cas où  $r_0 \geq 2$ . Enfin, le cas où  $r_0 = 0$  découle par dualité du cas où  $r_0 = 2$ .  $\square$

### 2.3 Généralisation

**Lemme 2.9.** Soient  $\chi$  un caractère lisse de  $I$  dans  $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$  et  $j$  un entier entre 0 et  $f - 1$ .

(i) Si  $s$  est un entier entre 0 et  $p - 1$ , alors il existe une unique représentation de  $I$ , notée  $E_j(\chi, s)$ , qui est triviale sur  $I_1$ , unisérielle de dimension  $s + 1$  et telle que  $(E_j(\chi, s))_i \cong \chi\alpha^{-ip^j}$  pour  $0 \leq i \leq s$ .

(ii) Le poids  $\sigma = (r_0, \dots, r_{f-1}) \otimes \eta$  contient pour tout  $0 \leq j \leq f - 1$  une sous- $I$ -représentation isomorphe à  $E_j(\chi_\sigma, r_j)$ .

*Démonstration.* L'unicité de la représentation  $E_j(\chi, s)$  dans (i) est évidente car, si  $\chi_1, \chi_2$  sont deux caractères lisses de  $I$ , alors

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathrm{Ext}_{I/I_1}^1(\chi', \chi) \leq 1$$

et  $\mathrm{Ext}_{I/I_1}^1(\chi', \chi) \neq 0$  si et seulement si  $\chi' = \chi\alpha^{-1}$ .

Pour l'existence dans (i), il suffit de prendre la sous- $I$ -représentation de  $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$  engendrée par les vecteurs (cf. lemme 2.7, [BP])

$$\left\{ \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{kp^j} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [1, v], 0 \leq k \leq s \right\}$$

où  $v$  est un vecteur tel que  $\overline{\mathbb{F}}_p v \cong \chi^s$  en tant que  $I$ -représentation. (ii) s'en déduit aussi facilement.  $\square$

Supposons  $f \geq 2$  jusqu'à la fin de cette section. Si  $\chi, \chi'$  sont deux caractères lisses de  $I$  dans  $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$  tels que  $\chi\alpha^{-(s+1)p^{j-1}} = \chi'\alpha^{-p^j}$ , on note  $E_{j-1}(\chi, \chi', s + 1)$ , l'unique représentation de  $I$  qui rend exacte la suite suivante

$$0 \rightarrow E_{j-1}(\chi, \chi', s + 1) \rightarrow E_{j-1}(\chi, s + 1) \oplus E_j(\chi') \xrightarrow{f} \chi\alpha^{-(s+1)p^{j-1}} \rightarrow 0$$

avec  $f = f_1 - f_2$ , où  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) est la projection de  $E_{j-1}(\chi, s + 1)$  (resp.  $E_j(\chi')$ ) sur  $\chi\alpha^{-(s+1)p^{j-1}}$ . On vérifie que  $E_j(\chi, \chi', s + 1)$  est de dimension  $s + 3$  et est de multiplicité 1 si  $s \neq p - 1$ . [Convention : on écrit parfois  $E_j(\chi, \chi') = E_j(\chi, \chi', s + 1)$  si l'on ne veut pas préciser  $s$ .]

On a alors le lemme suivant :

**Lemme 2.10.** Soient  $(\sigma, \tau)$  un couple de poids de type  $(+1, j)$  et  $V$  une  $K$ -représentation isomorphe à l'unique extension non triviale

$$0 \rightarrow \sigma \rightarrow V \rightarrow \tau \rightarrow 0.$$

Alors  $V$  contient une unique sous- $I$ -représentation isomorphe à  $E_{j-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau, r_{j-1} + 1)$  où l'on écrit  $\sigma = (r_0, \dots, r_{f-1}) \otimes \eta$ .

*Démonstration.* Puisque  $V$  est un quotient de  $\text{Ind}_I^K \chi_\tau$  et que  $\chi_\tau \neq \chi_\tau^s$ , on voit que  $V$  est de multiplicité 1. Comme

$$\tau \cong (\tau_0, \dots, p-2-\tau_{j-1}, \tau_j+1, \dots, r_{f-1}) \otimes \eta \det^{p^{j-1}(r_{j-1}+1)-p^j},$$

on voit que  $\tau$ , et ensuite  $V$ , contient un vecteur propre de  $\mathcal{H}$  de caractère  $\chi_\tau \alpha^{-p^j}$ . Soit  $v \in V$  un tel vecteur non nul, un calcul facile montre alors que la sous- $I$ -représentation de  $V$  engendrée par  $v$  dans  $V$  est isomorphe à  $E_{j-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau, r_{j-1}+1)$ .  $\square$

Écrivons  $\chi = (r_0, \dots, r_{f-1}) \otimes \eta$  et posons  $\chi' = \chi \alpha^{-(r_{j-1}+1)(p^{j-1})+p^j}$ . Supposons  $r_{j-1} \neq p-1$ . On va déterminer la structure de la représentation induite  $W = \text{Ind}_I^K \Pi(E_{j-1}(\chi, \chi', r_{j-1}+1))$ .

Soit  $v \in E_{j-1}(\chi, \chi', r_{j-1}+1)$  un vecteur propre de  $\mathcal{H}$  de caractère  $\psi$ . Notons  $E_v$  la sous- $I$ -représentation engendrée par  $v$  et  $\text{rad}(E_v)$  son radical. Puisque  $E_{j-1}(\chi, \chi', r_{j-1}+1)$  est de multiplicité 1,  $v$  est unique à constante près, donc  $E_v$  et  $\text{rad}(E_v)$  sont bien définis.

**Lemme 2.11.** *Soit  $\omega$  un sous-quotient irréductible de  $\text{Ind}_I^K \Pi(\psi)$ . Il existe une unique sous- $K$ -représentation de  $W$ , notée  $W_\omega$ , telle que :*

- le cosocle de  $W_\omega$  est isomorphe à  $\omega$  ;
- modulo  $\text{Ind}_I^K \Pi(\text{rad}(E_v))$ , l'image de  $W_\omega$  est isomorphe à  $U(\omega)$ , l'unique sous-représentation de  $\text{Ind}_I^K \Pi(\psi)$  admettant  $\omega$  comme cosocle.

*Démonstration.* Analogue à celle du corollaire 2.4.  $\square$

Pour simplifier, on suppose  $r_j \geq 1$  et  $r_{j-1} \neq p-1$  dans le corollaire suivant.

**Corollaire 2.12.** *Soient  $\omega$  un poids apparaissant dans  $\text{Ind}_I^K \Pi(\chi \alpha^{-(r_{j-1}+1)p^{j-1}})$  et  $\tau$  (resp.  $\tau'$ ) un poids apparaissant dans  $\text{Ind}_I^K \Pi(\chi)$  (resp.  $\text{Ind}_I^K \Pi(\chi')$ ). Alors*

- (i)  $U(\tau) \subseteq W_\omega$  si et seulement si  $J(\tau) \subseteq J(\omega) \cup \{j-2, j-1\}$  ;
- (ii)  $U(\tau') \subseteq W_\omega$  si et seulement si  $J(\tau') \subseteq J(\omega) \cup \{j-1\}$ .

*Démonstration.* L'énoncé pour  $\tau' \in \text{JH}(\text{Ind}_I^K \Pi(\chi'))$  est conséquence directe du lemme 2.7 puisque  $r_j+1 \geq 2$ .

Pour (i), on peut travailler dans  $\text{Ind}_I^K \Pi(E_{j-1}(\chi, r_{j-1}+1))$ , i.e. après modulo  $\text{Ind}_I^K \Pi(\chi')$ . Posons  $i = \lceil (r_{j-1}-1)/2 \rceil$ , de telle sorte que l'on ait une suite exacte

$$0 \rightarrow E_{j-1}(\chi, i) \rightarrow E_{j-1}(\chi, r_{j-1}+1) \rightarrow E_{j-1}(\chi \alpha^{-(i+1)p^{j-1}}, r_{j-1}-i) \rightarrow 0.$$

On vérifie que le cosocle de  $E_{j-1}(\chi, i)$ , isomorphe à  $\chi \alpha^{-ip^{j-1}}$ , s'écrit sous la forme

$$(r'_0, \dots, r'_{j-1}, \dots, r'_{f-1}) \otimes \eta'$$

avec  $r'_{j-1} \leq 1$ . Le lemme 2.7 implique alors que si  $\omega'$  est un sous-quotient irréductible de  $\text{Ind}_I^K \Pi(\chi \alpha^{-(i+1)p^{j-1}})$ ,  $W_{\omega'}$  contient  $U(\tau)$  si et seulement si  $J(\tau) \subseteq J(\omega') \cup \{j-1, j-2\}$ . D'autre part, si  $\overline{W}_\omega$  désigne l'image de  $W_\omega$  dans  $\text{Ind}_I^K \Pi(E_{j-1}(\chi \alpha^{-(i+1)p^{j-1}}, r_{j-1}-i))$ , le



même lemme implique que  $\overline{W_\omega}$  contient  $U(\omega')$  si et seulement si  $J(\omega') \subseteq J(\omega) \cup \{j-2\}$ , car  $\chi\alpha^{-(i+1)p^{j-1}}$  s'écrit sous la forme

$$(r''_0, \dots, r''_{j-1}, \dots, r''_{f-1}) \otimes \eta''$$

avec  $r''_{j-1} \geq 2$  (cf. lemme 2.6). Cela prouve (i) et termine la démonstration.  $\square$

### 3 Combinatoire des diagrammes de Diamond génériques

Dans ce paragraphe, on rappelle la construction des diagrammes de Diamond ([BP]) et on en fournit des propriétés combinatoires.

#### 3.1 Diagrammes de Diamond génériques

Les  $\overline{\mathbb{F}}_p$ -représentations continues de dimension 2 de  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$  sont classifiées à l'aide des caractères fondamentaux de Serre  $\omega_d$  ( $d \geq 1$ ). De manière explicite :

**Proposition 3.1.** *Soit  $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  une représentation continue. Alors  $\rho$  est de l'une des formes suivantes :*

(i)  $\rho$  est réductible et

$$\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)} \cong \begin{pmatrix} \omega_f^{\sum_{i=0}^{f-1} p^i(r_i+1)} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \eta$$

où  $\eta$  est un caractère lisse de  $I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$  qui se prolonge à  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$  et les  $r_i$  sont des entiers entre  $-1$  et  $p-2$  tels que  $(r_0, \dots, r_{f-1}) \neq (p-2, \dots, p-2)$ .

(ii)  $\rho$  est irréductible et

$$\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)} \cong \begin{pmatrix} \omega_{2f}^{\sum_{i=0}^{f-1} p^i(r_i+1)} & 0 \\ 0 & \omega_{2f}^{q \sum_{i=0}^{f-1} p^i(r_i+1)} \end{pmatrix} \otimes \eta$$

où  $\eta$  est un caractère lisse de  $I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$  qui se prolonge à  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$  et les  $r_i$  sont des entiers tels que  $0 \leq r_0 \leq p-1$ ,  $-1 \leq r_i \leq p-2$  pour  $i > 0$  et  $(r_0, \dots, r_{f-1}) \neq (p-2, \dots, p-2)$ .

*Démonstration.* Voir le corollaire 2.9 de [Br2].  $\square$

**Définition 3.2.** Conservons les notations de la proposition 3.1. La représentation  $\rho$  est dite *générique* si  $0 \leq r_i \leq p-3$  et  $(r_0, \dots, r_{f-1}) \notin \{(0, \dots, 0), (p-3, \dots, p-3)\}$  dans le cas réductible, ou si  $1 \leq r_0 \leq p-2$  et  $0 \leq r_i \leq p-3$  pour  $i > 0$  dans le cas irréductible.

À la représentation  $\rho$ , on peut associer un ensemble  $\mathcal{D}(\rho)$  de poids, appelés *poids de Diamond* ([BDJ]). Si  $\rho$  est de plus semi-simple et générique, on peut décrire  $\mathcal{D}(\rho)$  comme suit ([BP]).

Soit  $(x_0, \dots, x_{f-1})$   $f$  variables. On commence par définir deux ensembles  $\mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$  et  $\mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$  de  $f$ -uplets  $\lambda = (\lambda_0(x_0), \dots, \lambda_{f-1}(x_{f-1}))$  où  $\lambda_i(x_i) \in \mathbb{Z} \pm x_i$ . On convient que  $x_f = x_0$  et  $\lambda_f(x_f) = \lambda_0(x_0)$  dans ce qui suit.

- Si  $f = 1$ ,  $\mathcal{RD}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0, p - 3 - x_0\}$  et  $\mathcal{ID}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0, p - 1 - x_0\}$ .
- Si  $f > 1$ ,  $\mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$  est l'ensemble des  $\lambda$  tels que :
  - (i)  $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i + 1, p - 2 - x_i, p - 3 - x_i\}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, f - 1\}$
  - (ii) si  $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i + 1\}$ , alors  $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{x_{i+1}, p - 2 - x_{i+1}\}$
  - (iii) si  $\lambda_i(x_i) \in \{p - 2 - x_i, p - 3 - x_i\}$ , alors  $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{p - 3 - x_{i+1}, x_{i+1} + 1\}$ .

et  $\mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$  est l'ensemble des  $\lambda$  tels que :

- (i)  $\lambda_0(x_0) \in \{x_0, x_0 - 1, p - 2 - x_0, p - 1 - x_0\}$  et  $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i + 1, p - 2 - x_i, p - 3 - x_i\}$  si  $i > 0$
- (ii) si  $i > 0$  et  $\lambda_i(x_i) \in \{x_i, x_i + 1\}$  (resp.  $\lambda_0(x_0) \in \{x_0, x_0 - 1\}$ ), alors  $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{x_{i+1}, p - 2 - x_{i+1}\}$
- (iii) si  $0 < i < f - 1$  et  $\lambda_i(x_i) \in \{p - 2 - x_i, p - 3 - x_i\}$ , alors  $\lambda_{i+1}(x_{i+1}) \in \{p - 3 - x_{i+1}, x_{i+1} + 1\}$
- (iv) si  $\lambda_0(x_0) \in \{p - 1 - x_0, p - 2 - x_0\}$ , alors  $\lambda_1(x_1) \in \{p - 3 - x_1, x_1 + 1\}$
- (v) si  $\lambda_{f-1}(x_{f-1}) \in \{p - 2 - x_{f-1}, p - 3 - x_{f-1}\}$ , alors  $\lambda_0(x_0) \in \{p - 1 - x_0, x_0 - 1\}$ .

Pour  $\lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$  ou  $\lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$ , on pose

$$e(\lambda) := \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^{f-1} p^i (x_i - \lambda_i(x_i)) \right) \quad \text{si } \lambda_{f-1}(x_{f-1}) \in \{x_{f-1}, x_{f-1} + 1\}$$

$$e(\lambda) := \frac{1}{2} (p^f - 1 + \sum_{i=0}^{f-1} p^i (x_i - \lambda_i(x_i))) \quad \text{sinon.}$$

**Lemme 3.3.** *Supposons  $\rho$  semi-simple et générique. Si  $\rho$  vérifie (i) (resp. (ii)) de la proposition 3.1, alors les poids de Diamond associés à  $\rho$  sont exactement les poids*

$$(\lambda_0(\tau_0), \dots, \lambda_{f-1}(x_{f-1})) \otimes \det^{e(\lambda)(\tau_0, \dots, \tau_{f-1})\eta}$$

pour  $\lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$  (resp.  $\lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$ ).

*Démonstration.* Voir les lemmes 11.2 et 11.4, [BP]. □

On peut identifier l'ensemble  $\mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$  (resp.  $\mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$ ) avec l'ensemble des sous-ensembles  $\mathcal{S}$  de  $\{0, \dots, f - 1\}$  comme suit :

- pour  $\lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$ , on pose  $i \in \mathcal{S}$  si et seulement si  $\lambda_i(x_i) \in \{p - 3 - x_i, x_i + 1\}$
- pour  $\lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$ , on pose  $0 \in \mathcal{S}$  si et seulement si  $\lambda_0(x_0) \in \{p - 1 - x_0, x_0 - 1\}$  et, si  $i > 0$  on pose  $i \in \mathcal{S}$  si et seulement si  $\lambda_i(x_i) \in \{p - 3 - x_i, x_i + 1\}$ .

Si  $\lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$  (resp.  $\mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$ ), on note  $S_\lambda$  le sous-ensemble de  $\{0, \dots, f-1\}$  qui lui est associé comme ci-dessus, et on pose :

$$(3.1.1) \quad \ell(\sigma) := |S_\lambda|.$$

**Lemme 3.4.** *Si  $\lambda, \lambda' \in \mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$  (resp.  $\mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$ ) sont tels qu'il existe  $j \in \{0, \dots, f-1\}$  vérifiant :*

$$S_\lambda \cap (\{0, \dots, f-1\} \setminus \{j-1, j\}) = S_{\lambda'} \cap (\{0, \dots, f-1\} \setminus \{j-1, j\}),$$

alors  $\lambda_i(x_i) = \lambda'_i(x_i)$  pour tout  $i \notin \{j-2, j-1, j\}$ .

*Démonstration.* C'est clair à partir de la définition.  $\square$

Supposons que la représentation  $\rho$  soit telle que  $p \in Z$  agit trivialement sur  $\det(\rho)$ . On lui associe une famille de diagrammes  $D = (D_0(\rho), D_1(\rho), r)$  comme suit (§13, [BP]) :

(i)  $D_0(\rho)$  est la plus grande (pour l'inclusion) représentation de  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$  sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  telle que  $\mathrm{soc}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)} D_0(\rho) = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}(\rho)} \sigma$  et telle que chaque  $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$  n'apparaît qu'une seule fois dans  $D_0(\rho)$ ; on la voit comme représentation de  $KZ$  en faisant agir  $p \in Z$  trivialement;

(ii)  $D_1(\rho)$  est l'unique représentation de  $N$  sur  $D_0(\rho)^{I_1}$  qui étend l'action de  $I$  et qui vérifie  $\Pi^2 = \mathrm{Id}$ ;

(iii)  $r : D_1(\rho) \hookrightarrow D_0(\rho)$  est une injection  $IZ$ -équivariante arbitraire.

on obtient ainsi une famille de diagrammes. Remarquons qu'en général, il y a un nombre infini d'injections  $r$  à isomorphisme près.

Nous aurons besoin de la description explicite de  $D_0(\rho)$ .

Soit  $(y_0, \dots, y_{f-1})$   $f$  variables. On définit un ensemble  $\mathcal{I}(y_0, \dots, y_{f-1})$  de  $f$ -uplets  $\lambda := (\lambda_0(y_0), \dots, \lambda_{f-1}(y_{f-1}))$  avec  $\lambda_i(y_i) \in \mathbb{Z} \pm y_i$  comme suit. Si  $f = 1$ ,  $\mathcal{I}(y_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{y_0, p-1-y_0, p-3-y_0\}$ . Si  $f > 1$ , alors :

(i)  $\lambda_i(y_i) \in \{y_i, y_i-1, y_i+1, p-2-y_i, p-3-y_i, p-1-y_i\}$  pour  $i \in \{0, \dots, f-1\}$

(ii) si  $\lambda_i(y_i) \in \{y_i, y_i-1, y_i+1\}$ , alors  $\lambda_{i+1}(y_{i+1}) \in \{y_{i+1}, p-2-y_{i+1}\}$

(iii) si  $\lambda_i(y_i) \in \{p-2-y_i, p-3-y_i, p-1-y_i\}$ , alors  $\lambda_{i+1}(y_{i+1}) \in \{y_{i+1}-1, y_{i+1}+1, p-3-y_{i+1}, p-1-y_{i+1}\}$

avec les conventions  $y_f := y_0$  et  $\lambda_f(y_f) := \lambda_0(y_0)$ .

On définit pour  $\lambda \in \mathcal{I}(x_0, \dots, x_{f-1})$ ,

$$(3.1.2) \quad \mathcal{S}(\lambda) := \{i \in \{0, \dots, f-1\} \mid \lambda_i(x_i) \in \{p-2-x_i - \pm 1, x_i \pm 1\}\}.$$

(Attention : ne pas confondre avec  $S_\lambda$  !)

**Définition 3.5.** Soient  $\lambda, \lambda' \in \mathcal{I}(x_0, \dots, x_{f-1})$ . On dit que  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont *compatibles* si, lorsque  $i \in \mathcal{S}(\lambda) \cap \mathcal{S}(\lambda')$ , le signe du terme  $\pm 1$  dans (3.1.2) est le même pour  $\lambda_i(x_i)$  et  $\lambda'_i(x_i)$ .

Pour  $\lambda \in \mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$  (resp.  $\mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$ ), on définit l'élément  $\mu_\lambda$  de  $\mathcal{I}(y_0, \dots, y_{f-1})$  comme suit :

(i)  $\mu_{\lambda,i}(y_i) := p - 1 - y_i$  si  $\lambda_i(x_i) \in \{p - 3 - x_i, x_i\}$  (resp. si  $i > 0$  ou, si  $i = 0$  et  $\lambda_0(x_0) \in \{p - 2 - x_0, x_0 - 1\}$ )

(ii)  $\mu_{\lambda,i}(y_i) := p - 3 - y_i$  si  $\lambda_i(x_i) \in \{p - 2 - x_i, x_i + 1\}$  (resp. si  $i > 0$  ou, si  $i = 0$  et  $\lambda_0(x_0) \in \{p - 1 - x_0, x_0\}$ ).

**Théorème 3.6.** *On conserve les notations précédentes.*

(i)  $D_0(\rho)$  se décompose en une somme directe :

$$D_0(\rho) \cong \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}(\rho)} D_{0,\sigma}(\rho)$$

avec  $\text{soc}_K D_{0,\sigma}(\rho) \cong \sigma$ .

(ii) Soient  $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$  et  $\lambda$  le  $f$ -uplet correspondant. Alors les sous-quotients irréductibles de  $D_{0,\sigma}(\rho)$  sont exactement les poids (avec la notation  $\mu \circ \lambda := (\mu_i(\lambda_i))_i$ ) :

$$(\mu_0(\lambda_0(r_0)), \dots, \mu_{f-1}(\lambda_{f-1}(r_{f-1}))) \otimes \det^{e(\mu \circ \lambda)(r_0, \dots, r_{f-1})} \eta$$

pour  $\mu \in \mathcal{I}(y_0, \dots, y_{f-1})$  tels que  $\mu$  et  $\mu_\lambda$  sont compatibles (cf. la définition 3.5) en oubliant les poids tels qu'il existe  $i \in \{0, \dots, f-1\}$  vérifiant  $\mu_i(\lambda_i(r_i)) < 0$  ou  $\mu_i(\lambda_i(r_i)) > p - 1$ . En particulier,  $D_0(\rho)$  est de multiplicité 1.

(iii) Supposons  $\rho$  réductible. Alors, en tant que diagramme,  $D(\rho, \tau)$  se décompose en une somme directe de la forme :

$$D(\rho, \tau) = \bigoplus_{\ell=0}^f D_\ell(\rho, \tau) = \bigoplus_{\ell=0}^f (\bigoplus_{\ell(\sigma)=\ell} D_{0,\sigma}(\rho), \bigoplus_{\ell(\sigma)=\ell} D_{1,\sigma}(\rho), \tau)_\ell.$$

*Démonstration.* Voir la proposition 13.4 de [BP] pour (i), le théorème 14.8 *loc.cit.* pour (ii) et le théorème 15.4 (ii) *loc.cit.* pour (iii).  $\square$

**Définition 3.7.** Si  $S$  est une  $K$ -représentation de multiplicité 1 et si  $\tau$  est un sous-quotient irréductible de  $S$ , on dit que  $\tau^{I_1}$  a un relèvement dans  $S^{I_1}$ , ou que  $\tau^{I_1}$  se relève dans  $S^{I_1}$ , si la surjection  $U(\tau) \twoheadrightarrow \tau$  induit une surjection  $U(\tau)^{I_1} \twoheadrightarrow \tau^{I_1}$  où  $U(\tau) \subset S$  est l'unique sous-représentation admettant  $\tau$  comme cosocle.

**Lemme 3.8.** *Conservons les notations du théorème 3.6 (ii). Un sous-quotient irréductible  $\tau$  de  $D_{0,\sigma}(\rho)$  est tel que  $\tau^{I_1}$  se relève dans  $D_{0,\sigma}(\rho)^{I_1}$  si et seulement si*

$$\mu_i(y_i) \in \{p - 2 - y_i, p - 1 - y_i, y_i, y_i + 1\}$$

pour tout  $0 \leq i \leq f - 1$ .

*Démonstration.* Voir le corollaire 14.10, [BP].  $\square$

Soient  $\tau$  un poids apparaissant dans  $D_{0,\sigma}(\rho)$  tel que  $\tau^{I_1}$  se relève dans  $D_{0,\sigma}(\rho)^{I_1}$ , et  $\mu \in \mathcal{I}(y_0, \dots, y_{f-1})$  comme dans le théorème 3.6 (i). Si  $\rho$  est réductible, on définit

$$\mathcal{S}_{\lambda,\tau}^- := \{i \in \mathcal{S}_\lambda \mid \mu_{i-1}(\lambda_{i-1}(x_{i-1})) \in \{x_{i-1}, x_{i-1} + 1, p - 1 - x_{i-1}\}\}$$

$$\mathcal{S}_{\lambda,\tau}^+ := \{i \notin \mathcal{S}_\lambda \mid \mu_{i-1}(\lambda_{i-1}(x_{i-1})) \in \{p - 3 - x_{i-1}, p - 2 - x_{i-1}, x_{i-1}\}\}.$$

Si  $\rho$  est irréductible, on définit  $\mathcal{S}_{\lambda,\tau}^+$  et  $\mathcal{S}_{\lambda,\tau}^-$  comme ci-dessus sauf que  $1 \in \mathcal{S}_{\lambda,\tau}^-$  (resp.  $1 \in \mathcal{S}_{\lambda,\tau}^+$ ) si et seulement si  $1 \in \mathcal{S}_\lambda$  et  $\mu_0(\lambda_0(x_0)) \in \{x_0 - 1, x_0, p - x_0\}$  (resp.  $1 \notin \mathcal{S}_\lambda$  et  $\mu_0(\lambda_0(x_0)) \in \{p - 2 - x_0, p - 1 - x_0, x_0 + 1\}$ ).

Si  $\mathcal{S}$  est un sous-ensemble de  $\{0, \dots, f - 1\}$ , on définit  $\delta_{\mathrm{réd}}(\mathcal{S})$  (resp.  $\delta_{\mathrm{irr}}(\mathcal{S})$ ) comme suit :  $i \in \delta_{\mathrm{réd}}(\mathcal{S})$  si et seulement si  $i + 1 \in \mathcal{S}$  (resp. si  $i > 0$ ,  $i \in \delta_{\mathrm{irr}}(\mathcal{S})$  si et seulement si  $i + 1 \in \mathcal{S}$  et  $0 \in \delta_{\mathrm{irr}}(\mathcal{S})$  si et seulement si  $1 \notin \mathcal{S}$ ).

**Lemme 3.9.** (i) Il existe un unique poids  $\delta(\tau) \in \mathcal{D}(\rho)$  tel que  $\tau^{[s]} \in D_{0,\delta(\tau)}(\rho)$ .

(ii) Le poids  $\delta(\tau)$  correspond à  $\delta_{\mathrm{réd}}((\mathcal{S}_\lambda \setminus \mathcal{S}_{\lambda,\tau}^-) \cup \mathcal{S}_{\lambda,\tau}^+)$  (resp. à  $\delta_{\mathrm{irr}}((\mathcal{S}_\lambda \setminus \mathcal{S}_{\lambda,\tau}^-) \cup \mathcal{S}_{\lambda,\tau}^+)$ ) si  $\rho$  est réductible (resp. irréductible).

*Démonstration.* Par hypothèse, le caractère  $\chi_\tau$  apparaît dans  $D_1(\rho)$ , donc  $\chi_\tau^s$  l'est aussi. La représentation  $\rho$  étant générique, on a  $\chi_\tau \neq \chi_\tau^s$ . On en déduit que  $\tau^{[s]}$  est un sous-quotient de  $D_0(\rho)$ , d'où (i) d'après le théorème 3.6. Pour (ii), voir le lemme 15.2, [BP].  $\square$

### 3.2 Un résultat combinatoire

On conserve les notations précédentes. Dans cette section, on considère deux poids  $\tau_1, \tau_2$  apparaissant dans  $D_{0,\sigma}(\rho)$  tels que :

- $\tau_1^{I_1}, \tau_2^{I_1}$  se relèvent dans  $D_{0,\sigma}(\rho)^{I_1}$
- $(\tau_1, \tau_2)$  est un couple de type  $(+1, j)$

et on compare le lien entre  $\delta(\tau_1)$  et  $\delta(\tau_2)$ , ainsi que celui entre les places de  $\tau_k$  ( $k = 1, 2$ ) dans  $D_{0,\delta(\tau_k)}(\rho)$ . On note  $\mu_k = \mu_{\tau_k} \in \mathcal{I}(y_0, \dots, y_{f-1})$  le  $f$ -uplet associé à  $\tau_k$  comme dans le théorème 3.6 (ii), et  $\theta_k = \mu_{\tau_k^{[s]}}$  celui associé à  $\tau_k^{[s]}$ . Notons également  $\lambda_k = \lambda_{\delta(\tau_k)}$  (resp.  $\mathcal{S}_{\lambda_k}$ ) le  $f$ -uplet (resp. le sous-ensemble de  $\{0, \dots, f - 1\}$ ) correspondant à  $\delta(\tau_k) \in \mathcal{D}(\rho)$ .

Remarquons qu'il n'y a pas de tel couple  $(\tau_1, \tau_2)$  si  $f = 1$ . Supposons donc  $f \geq 2$  dans la suite. On fait la convention que, si  $j - 1 < 0$  (resp.  $j + 1 > f - 1$ , etc.), on l'identifie à l'entier  $j - 1 + f$  (resp.  $j + 1 - f$ , etc.).

On donne la liste de toutes les possibilités pour le couple  $(\tau_1, \tau_2)$  considéré.

**Lemme 3.10.** (i) On a deux possibilités :

- ou bien  $\mu_{\lambda,j}(y_j) = p - 3 - y_j$  et

$$(\mu_{1,j-1}(y_{j-1}), \mu_{1,j}(y_j)) = (y_{j-1}, y_j)$$

$$(\mu_{2,j-1}(y_{j-1}), \mu_{2,j}(y_j)) = (p - 2 - y_{j-1}, y_j + 1);$$

- ou bien  $\mu_{\lambda,j}(y_j) = p - 1 - y_j$  et

$$(\mu_{1,j-1}(y_{j-1}), \mu_{1,j}(y_j)) = (y_{j-1}, p - 2 - y_j)$$

$$(\mu_{2,j-1}(y_{j-1}), \mu_{2,j}(y_j)) = (p - 2 - y_{j-1}, p - 1 - y_j).$$

(ii) On a  $\theta_{1,i}(\lambda_{1,i}(r_i)) = \theta_{2,i}(\lambda_{2,i}(r_i))$  si  $i \notin \{j-1, j\}$ , et

$$\theta_{1,j}(\lambda_{1,j}(r_j)) = \theta_{2,j}(\lambda_{2,j}(r_j)) + 1$$

$$\theta_{1,j-1}(\lambda_{1,j-1}(r_{j-1})) + \theta_{2,j-1}(\lambda_{2,j-1}(r_{j-1})) = p.$$

*Démonstration.* (i) D'après le lemme 3.8, on sait que pour tout  $0 \leq i \leq f-1$ ,

$$\mu_{1,i}(y_i), \mu_{2,i}(y_i) \in \{p-2-y_i, p-1-y_i, y_i, y_i+1\}.$$

Comme  $\mu_{2,j}(y_j) = \mu_{1,j}(y_j) + 1$ , on en déduit que :

$$\mu_{2,j}(y_j) \in \{p-1-y_j, y_j+1\}.$$

Si  $\mu_{\lambda,j}(y_j) = p-3-y_j$ , alors la condition de compatibilité (cf. définition 3.5) entraîne que  $\mu_{2,j}(y_j) = y_j + 1$ , et donc que  $\mu_{1,j}(y_j) = y_j$ . Par définition de  $\mathcal{I}(y_0, \dots, y_{f-1})$  et puisque  $\mu_{1,j-1}(y_{j-1}) = p-2-\mu_{2,j-1}(y_{j-1})$ , on en déduit que  $\mu_{1,j-1}(y_{j-1}) = y_{j-1}$  et  $\mu_{2,j-1}(y_{j-1}) = p-2-y_{j-1}$ .

De même, si  $\mu_{\lambda,j}(y_j) = p-1-y_j$ , alors  $\mu_{2,j}(y_j) = p-1-y_j$ , et les autres énoncés sont immédiats.

(ii) Par définition, on a les égalités suivantes pour tout  $0 \leq i \leq f-1$  :

$$\theta_{1,i}(\lambda_{1,i}(r_i)) + \mu_{1,i}(\lambda_i(r_i)) = p-1$$

$$\theta_{2,i}(\lambda_{2,i}(r_i)) + \mu_{2,i}(\lambda_i(r_i)) = p-1.$$

On conclut donc en remarquant que  $\mu_{1,i}(y_i) = \mu_{2,i}(y_i)$  si  $i \notin \{j-1, j\}$  et que

$$\mu_{1,j}(y_j) = \mu_{2,j}(y_j) - 1, \quad \mu_{1,j-1}(y_{j-1}) = p-2-\mu_{2,j-1}(y_{j-1}).$$

□

**Proposition 3.11.** (i) Si  $i \notin \{j-1, j\}$ , alors  $i \in \mathcal{S}_{\lambda_1}$  si et seulement si  $i \in \mathcal{S}_{\lambda_2}$ ; si  $i \in \{j-1, j\}$ , alors  $i \in \mathcal{S}_{\lambda_1}$  si et seulement si  $i \notin \mathcal{S}_{\lambda_2}$ .

(ii)  $\lambda_{1,i}(x_i) = \lambda_{2,i}(x_i)$  si et seulement si  $i \notin \{j-2, j-1, j\}$ .

(iii) Si  $i \neq j-1$ , alors  $i \in \mathcal{S}(\theta_1)$  si et seulement si  $i \in \mathcal{S}(\theta_2)$ ; si  $i = j-1$ , alors  $i \in \mathcal{S}(\theta_1)$  si et seulement si  $i \notin \mathcal{S}(\theta_2)$ .

*Démonstration.* On prouve la proposition dans le cas réductible, le cas irréductible étant totalement analogue.

(i) Par le lemme 3.10 (i) et la définition de  $\mathcal{S}_{\lambda, \tau_k}^+$  (resp.  $\mathcal{S}_{\lambda, \tau_k}^-$ ), on voit que

$$\mathcal{S}_{\lambda, \tau_1}^+ \cap (\{0, \dots, f-1\} \setminus \{j, j+1\}) = \mathcal{S}_{\lambda, \tau_2}^+ \cap (\{0, \dots, f-1\} \setminus \{j, j+1\})$$

$$\mathcal{S}_{\lambda, \tau_1}^- \cap (\{0, \dots, f-1\} \setminus \{j, j+1\}) = \mathcal{S}_{\lambda, \tau_2}^- \cap (\{0, \dots, f-1\} \setminus \{j, j+1\}).$$

Par suite, si  $i \notin \{j-1, j\}$ , on a  $i \in \mathcal{S}_{\lambda_1}$  si et seulement si  $i \in \mathcal{S}_{\lambda_2}$  d'après le lemme 3.9 (ii).

Considérons d'abord le cas où  $i = j$ . On a deux possibilités :

(a) Si  $j+1 \in \mathcal{S}_\lambda$ , i.e.  $\lambda_{j+1}(x_{j+1}) \in \{p-3-x_{j+1}, x_{j+1}+1\}$ , alors par définition

$$\lambda_j(x_j) \in \{p-2-x_j, p-3-x_j\}.$$

- Si  $\lambda_j(x_j) = p-2-x_j$ , alors  $\mu_{\lambda, j}(y_j) = p-3-y_j$ , et donc, d'après le lemme 3.10 (i), on a  $\mu_{1, j}(y_j) = y_j$  et  $\mu_{2, j}(y_j) = y_j+1$ . On vérifie à partir de la définition que  $j+1 \notin \mathcal{S}_{\lambda, \tau_1}^-$  et  $j+1 \in \mathcal{S}_{\lambda, \tau_2}^-$ , ce qui donne, en rappelant que  $\mathcal{S}_{\lambda_i} = \delta_r((\mathcal{S}_\lambda \setminus \mathcal{S}_{\lambda, \tau_i}^-) \cup \mathcal{S}_{\lambda, \tau_i}^+)$ ,

$$j \in \mathcal{S}_{\lambda_1}, \quad j \notin \mathcal{S}_{\lambda_2}.$$

- Si  $\lambda_j(x_j) = p-3-x_j$ , alors  $\mu_{\lambda, j}(y_j) = p-1-y_j$ , et donc, d'après le lemme 3.10 (i), on a  $\mu_{1, j}(y_j) = p-2-y_j$  et  $\mu_{2, j}(y_j) = p-1-y_j$ . On vérifie alors à partir de la définition que

$$j \notin \mathcal{S}_{\lambda_1}, \quad j \in \mathcal{S}_{\lambda_2}.$$

(b) Si  $j+1 \notin \mathcal{S}_\lambda$ , alors  $\lambda_j(x_j) \in \{x_j, x_{j+1}\}$ . On a encore deux cas à distinguer et les mêmes arguments donnent :

- si  $\lambda_j(x_j) = x_j$ , alors  $\mu_{\lambda, j}(y_j) = p-1-y_j$ , et donc  $j \in \mathcal{S}_{\lambda_1}$ ,  $j \notin \mathcal{S}_{\lambda_2}$  ;

- si  $\lambda_j(x_j) = x_{j+1}$ , alors  $\mu_{\lambda, j}(y_j) = p-3-y_j$ , et donc  $j \notin \mathcal{S}_{\lambda_1}$ ,  $j \in \mathcal{S}_{\lambda_2}$ .

Ceci permet de conclure dans le cas où  $i = j$ , et le même raisonnement (plus facile) donne, lorsque  $i = j-1$  :

$$j-1 \in \mathcal{S}_{\lambda_1} \iff j-1 \notin \mathcal{S}_{\lambda_2}.$$

(ii) Par le (i), on a :

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} \cap (\{0, \dots, f-1\} \setminus \{j-1, j\}) = \mathcal{S}_{\lambda_2} \cap (\{0, \dots, f-1\} \setminus \{j-1, j\}),$$

donc d'après le lemme 3.4, on a  $\lambda_{1, i}(x_i) = \lambda_{2, i}(x_i)$  si  $i \notin \{j-2, j-1, j\}$ . De plus, de (i) on déduit que  $\lambda_{1, i}(x_i) \neq \lambda_{2, i}(x_i)$  si  $i \in \{j-1, j\}$ . Il reste donc à vérifier que  $\lambda_{1, j-2}(x_{j-2}) \neq \lambda_{2, j-2}(x_{j-2})$ , ce qui est une conséquence de la définition et de (i) pour  $j-1$ .

(iii) La conclusion pour  $i \notin \{j-2, j-1, j\}$  est triviale puisque  $\theta_{1, i}(y_i) = \theta_{2, i}(y_i)$ .

On suppose que  $f \geq 3$ , le cas  $f = 2$  étant une conséquence directe du §16, [BP]. On a donc  $j+1 \notin \{j-1, j\}$ , et ensuite d'après (i),  $j+1 \in \mathcal{S}_{\lambda_1}$  si et seulement si  $j+1 \in \mathcal{S}_{\lambda_2}$ . On en déduit, puisque  $\lambda_{1, j}(x_j) \neq \lambda_{2, j}(x_j)$ , que

$$\lambda_{1, j}(x_j) = \lambda_{2, j}(x_j) \pm 1.$$

Ensuite, comme  $\theta_{1,j}(y_j), \theta_{2,j}(y_j) \in \{p-2-y_j, p-1-y_j, y_j, y_j+1\}$ , le fait que  $\theta_{1,j}(\lambda_{1,j}(r_j)) = \theta_{2,j}(\lambda_{2,j}(r_j)) + 1$  (cf. lemme 3.10 (ii)) implique que :

$$\theta_{1,j}(y_j) = \theta_{2,j}(y_j).$$

Ceci permet de conclure dans le cas  $i = j$ . Le cas  $i = j - 2$  s'en déduit puisque  $\theta_{1,j-3}(y_{j-3}) = \theta_{2,j-3}(y_{j-3})$ .

Il reste à vérifier que  $j - 1 \in \mathcal{S}(\theta_1)$  si et seulement si  $j - 1 \notin \mathcal{S}(\theta_2)$ . Ceci est une conséquence de ce que l'on a prouvé et du fait suivant (facile à vérifier) : si  $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{I}(y_0, \dots, y_{f-1})$  sont tels que pour tout  $0 \leq i \leq f - 1$  :

$$\theta_{1,i}(y_i), \theta_{2,i}(y_i) \in \{p-2-y_i, p-1-y_i, y_i, y_i+1\},$$

alors  $\theta_1 = \theta_2$  si et seulement si  $\mathcal{S}(\theta_1) = \mathcal{S}(\theta_2)$ . □

Soit  $\tau$  un poids apparaissant dans  $D_{0,\sigma}(\rho)$ . Par réciprocity de Frobenius, on a une surjection naturelle  $\text{Ind}_F^K \chi_\tau^s \twoheadrightarrow I(\delta(\tau), \tau^{[s]})$ , donc  $\delta(\tau)$  correspond à un élément  $\xi \in \mathcal{P}(y_0, \dots, y_{f-1})$ . Rappelons que

$$J(\xi) = \{i \in \{0, \dots, f-1\} \mid \xi_i(y_i) \in \{p-2-y_i, p-1-y_i\}\}.$$

On vérifie facilement que

$$i \in J(\xi) \iff \theta_i(y_i) \in \{y_i, y_i+1\} \iff i+1 \notin \mathcal{S}(\theta).$$

**Corollaire 3.12.** Avec les notations de la proposition 3.11 et  $\xi_i$  étant l'élément correspondant à  $\delta(\tau_i)$  comme ci-dessus ( $i=1,2$ ), on a :

$$J(\xi_1) \cap (\{0, \dots, f-1\} \setminus \{j-2\}) = J(\xi_2) \cap (\{0, \dots, f-1\} \setminus \{j-2\})$$

et que  $j-2 \in J(\xi_1)$  si et seulement si  $j-2 \notin J(\xi_2)$ .

*Démonstration.* C'est une simple traduction de la proposition 3.11 (iii). □

## 4 Construction de représentations supersingulières

Si  $\rho$  est une représentation continue générique de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$  de dimension 2 sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$  telle que  $p \in Z$  agit trivialement sur  $\det(\rho)$ , on lui a associé une famille de diagrammes  $D(\rho, r)$  (cf. n°3.1). Par le théorème 9.8, [BP], on peut aussi lui associer une famille de représentations lisses admissibles  $\pi(\rho, r)$  de  $G$ . On dira que  $\pi(\rho, r)$  est une représentation de  $G$  associée à  $D(\rho, r)$ , ou encore, associée à  $\rho$ . Lorsque  $f = 1$ , il est connu (§20, [BP]) que la représentation  $\pi(\rho, r)$  est déterminée par  $D(\rho, r)$ , ce qui n'est plus vrai lorsque  $f \geq 2$ . Dans ce paragraphe, on construit de "nouvelles" représentations supersingulières de  $G$  au sens suivant : associées à un diagramme de Diamond  $D(\rho, r)$  fixé, il existe des représentations lisses admissibles de  $G$  non-isomorphes. Autrement dit, il existe plus de paramètres que ceux déterminés par  $r$ .



L'idée de la construction est d'utiliser la "classification" fournie dans le chapitre II. De manière précise, rappelons que l'on a défini le diagramme canonique  $D(\pi) = (D_0(\pi), D_1(\pi), \text{can})$  d'une représentation lisse irréductible  $\pi$  de  $G$  et que l'on a montré que  $\pi$  est déterminée à isomorphisme près par  $D(\pi)$ . Pour construire de nouvelles représentations à partir d'un diagramme  $D(\rho, r)$  fixé, il faut donc d'abord vérifier que le diagramme canonique  $D(\pi(\rho, r))$  est *strictement* plus grand que le diagramme  $D(\rho, r)$  (voir la remarque 4.4). La possibilité de ce fait est suggérée par le lemme suivant.

**Lemme 4.1.** *Si  $\pi(\rho, r)$  est irréductible et si le diagramme  $D(\rho, r)$  n'est pas 0-irréductible au sens dans §9, [BP] (par exemple si  $f = 3$  et  $\rho$  est irréductible), alors  $D_1(\rho) \subsetneq D_1(\pi(\rho, r))$ .*

*Démonstration.* Par construction  $D_1(\rho) \subseteq \pi(\rho, r)^{I_1}$ , on a donc  $D_1(\rho) \subseteq D_1(\pi(\rho, r))$  d'après la proposition 3.14, chap.II. Si l'on a égalité, alors  $D(\pi(\rho, r))$ , qui n'est autre que  $(\langle K \cdot D_1(\rho) \rangle, D_1(\rho), \text{can})$ , possède un quotient non trivial  $\overline{D} = (\overline{D}_0, \overline{D}_1, \overline{\tau})$  avec  $\overline{\tau}$  injectif puisque  $D(\rho, r)$  n'est pas 0-irréductible. Par le théorème 9.8, [BP], il existe alors une représentation lisse admissible  $\Omega$  de  $G$  et une injection de diagrammes  $(\varphi_0, \varphi_1) : \overline{D} \hookrightarrow \mathcal{K}(\Omega)$ . Ceci implique, par le corollaire 3.19 du chap.II, que l'on a :

$$\text{Hom}_G(\pi(\rho, r), \Omega) = \text{Hom}_{\mathcal{DTAG}}(D(\pi(\rho, r)), \mathcal{K}(\Omega)) \neq 0.$$

Or, le morphisme  $\pi(\rho, r) \rightarrow \Omega$  correspondant à  $(\varphi_0, \varphi_1)$  n'est pas injectif, ce qui est impossible puisque  $\pi(\rho, r)$  est irréductible par hypothèse.  $\square$

#### 4.1 Préliminaires

Dans cette section, on donne une construction générale de représentations supersingulières de  $G$ . Elle sera utilisée dans les sections suivantes.

On fixe  $\pi$  une représentation supersingulière de  $G$  telle que  $p \in Z$  agisse trivialement et on note  $\sigma := \text{soc}_K \pi$  le socle de  $\pi$ .

Soit  $\sigma \hookrightarrow \text{Inj}_K \sigma$  une enveloppe injective de  $\sigma$ , que l'on voit comme une représentation de  $KZ$  en envoyant  $p$  sur l'identité. On fixe une injection  $KZ$ -équivariante de  $\pi$  dans  $\text{Inj}_K \sigma$ , prolongeant celle de  $\sigma$  dans  $\text{Inj}_K \sigma$ , de telle sorte qu'on identifie  $\pi$  avec une sous- $KZ$ -représentation  $V_\pi$  de  $\text{Inj}_K \sigma$ . Soit  $S$  l'ensemble des représentations lisses admissibles  $\Omega$  de  $G$ , de  $KZ$ -module sous-jacent  $\text{Inj}_K \sigma$  et telles qu'on ait une injection de diagrammes

$$(\pi^{K_1}, \pi^{I_1}, \text{can}) \hookrightarrow (\Omega|_{KZ}, \Omega|_N, \text{can}).$$

D'après §9, [BP],  $S$  n'est pas vide.

**Définition 4.2.** On dit qu'une sous- $I$ -représentation  $M$  de  $\pi$  est *spéciale* si elle vérifie la propriété suivante :

(S1) *pour tout  $\Omega \in S$  et toute injection  $G$ -équivariante  $\psi : \pi \hookrightarrow \Omega$ , on a  $\psi|_M = c \cdot \text{Id}$  avec  $c \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ , où  $\text{Id}$  désigne l'identification de  $\pi$  avec  $V_\pi \subset \text{Inj}_K \sigma$  que l'on a fixée.*

Voici quelques critères assurant qu'une représentation  $M$  est spéciale :

**Lemme 4.3.** (i) Soient  $M$  une  $I$ -représentation de  $\pi$  et  $\langle K \cdot M \rangle \subset \pi$  la  $K$ -représentation engendrée par  $M$ . Si

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \text{Hom}_K(\langle K \cdot M \rangle, \text{Inj}_K \sigma) = 1,$$

alors  $M$  est spéciale.

(ii) Si  $M_1, M_2$  sont des sous- $I$ -représentations spéciales de  $\pi$  vérifiant  $M_1 \cap M_2 \neq 0$ , alors  $M_1 + M_2$  l'est aussi.

(iii) Soit  $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  une représentation continue semi-simple générique et  $\pi = \pi(\rho, r)$  une représentation lisse admissible de  $G$  associée à  $\rho$ . Si  $\rho$  est irréductible (resp. si  $\rho$  est réductible), et si  $M$  est une  $I$ -représentation de  $\pi$  contenue dans  $D_0(\rho)$  (resp. dans  $D_{0,\ell}(\rho)$  pour  $\ell \in \{0, \dots, f\}$ , cf. théorème 3.6 (iii)), alors  $M$  est spéciale.

*Démonstration.* (i) et (ii) sont triviaux. (iii) est un cas particulier de (i) par la construction (théorème 13.8, [BP]).  $\square$

On renvoie le lecteur au §3.1, chap.II pour la définition de  $I^+(\pi)$  et de  $D_1(\pi)$ . Soit  $M$  une sous- $I$ -représentation spéciale de  $I^+(\pi)$  et soient  $\ker_1$  et  $\ker_2$  les  $K$ -représentations qui rendent les lignes du diagramme suivant exactes :

$$(4.1.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker_1 & \longrightarrow & \text{Ind}_I^K \Pi(M^{I_1}) & \longrightarrow & \pi \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \ker_2 & \longrightarrow & \text{Ind}_I^K \Pi(M) & \longrightarrow & \pi. \end{array}$$

On impose la condition suivante sur  $M$  :

(S2) la  $K$ -représentation  $\ker_2 / \ker_1$  admet (au moins) un sous-quotient irréductible qui est isomorphe à un poids  $\sigma' \in \text{JH}(\sigma)$ .

Soit  $\sigma'$  est un tel poids. Alors il existe une sous- $K$ -représentation  $W \subset \ker_2$  qui vérifie  $W \cap \ker_1 \subsetneq W$  et qui admet un cosocle irréductible isomorphe à  $\sigma'$ . Soit  $M'$  l'image de  $W$  via le morphisme composé (le morphisme  $\text{pr}_{\Pi(M)}$  est défini au n°2.2, chap.II)

$$W \hookrightarrow \text{Ind}_I^K \Pi(M) \xrightarrow{\text{pr}_{\Pi(M)}} \Pi(M) \xrightarrow{\Pi} M,$$

ce qui équivaut à dire que  $M'$  est la plus petite sous- $I$ -représentation de  $M$  telle que  $W \subset \text{Ind}_I^K \Pi(M')$ . Il est clair que  $M'$  est aussi spéciale.

**Remarque 4.4.** On a  $M' \subseteq D_1(\pi)$  : c'est une conséquence du lemme 3.1, chap.II.

Sans perdre de généralité, on peut supposer  $M = M'$ . Comme  $W$  admet un  $K$ -cosocle irréductible, le  $I$ -cosocle de  $M$ ,  $M/\text{rad}(M)$ , est une somme directe de caractères distincts de  $\mathcal{H} \cong I/I_1$  : c'est le cas si  $W = \text{Inj}_{K/K_1} \sigma'$  (par la proposition 4.13, [BP]) et le cas général s'en déduit. Soit  $v \in M$  un vecteur propre non nul de  $\mathcal{H}$  de caractère propre  $\chi$  (pas nécessairement isomorphe à  $\chi_{\sigma'}$ ) tel que  $v \notin \text{rad}(M)$ .

Soient  $\bar{v}$  l'image de  $v$  dans  $M/\mathrm{rad}(M)$ , qui ne dépend pas du choix de  $v$ , et

$$\alpha : M \rightarrow M/\mathrm{rad}(M) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p \bar{v}$$

le quotient naturel. Notons  $\ker \alpha$  le noyau de  $\alpha$ .

**Lemme 4.5.**  $\mathrm{Ind}_I^K \chi^s$  admet  $\sigma'$  comme sous-quotient.

*Démonstration.* Par définition de  $M$ ,  $W' := W \cap \mathrm{Ind}_I^K \Pi(\ker \alpha) \neq W$ . On en déduit une injection de  $W/W'$  dans  $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi)$ , ce qui montre (i) puisque  $\sigma'$  est le cosocle de  $W$  et donc celui de  $W/W'$ .  $\square$

D'après les lemmes 4.5 et 2.1, il existe donc un vecteur non nul  $f \in \mathrm{Inj}_K \sigma' \subset \mathrm{Inj}_K \sigma$  fixé par  $I_1$  et de caractère propre  $\chi^s$ . Puis d'après les lemmes 2.6 et 2.7, [BP], il existe un (unique) entier  $0 \leq i(\sigma') \leq q-1$  et  $\epsilon \in \{0, \pm 1\}$  tels que le vecteur

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{i(\sigma')} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f + \epsilon f$$

est fixé par  $I_1$  de caractère propre  $\chi_{\sigma'}$  et qu'il engendre le socle  $\sigma'$  de  $\mathrm{Inj}_K \sigma'$ . D'autre part, on a :

**Lemme 4.6.** Avec les notations ci-dessus, il existe un vecteur  $h \in \mathrm{Ind}_I^K \Pi(\ker(\alpha))$  tel que le vecteur

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{i(\sigma')} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(v) + \epsilon \Pi(v) + h$$

appartient à  $W \setminus \mathrm{rad}_K(W)$  et tel que son image dans  $W/\mathrm{rad}(W) \cong \sigma'$  est fixée par  $I_1$ .

*Démonstration.* Reprenons les notations dans la démonstration du lemme 4.5. D'après les lemmes 2.6 et 2.7, [BP], le vecteur

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{i(\sigma')} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(\bar{v}) + \epsilon \Pi(\bar{v}) \in W/W' \hookrightarrow \mathrm{Inj}_I \chi^s$$

est un vecteur propre de  $\mathcal{H}$  de caractère propre  $\chi_{\sigma'}$  et que son image dans  $W/\mathrm{rad}(W) \cong \sigma'$  est fixée par  $I_1$ . L'énoncé s'en déduit.  $\square$

On fait l'hypothèse suivante sur  $v$  :

(S3)  $v \notin \Sigma(M)$ , avec  $\Sigma(M)$  la sous- $I$ -représentation de  $\Omega$  engendrée par  $\ker \alpha$ ,  $\Pi(\ker \alpha)$ ,  $\Omega^{I_1}$  et  $\Pi(v)$ .

Voici un critère naïve pour avoir (S3) qui sera utilisé au §4.2 :

**Lemme 4.7.** La condition (S3) est satisfaite si  $M$  admet un  $I$ -cosocle irréductible (donc isomorphe à  $\chi$ ) et si  $\chi \neq \chi^s$ .

*Démonstration.* Soit  $\Sigma' \subset \Sigma(M)$  la sous-représentation engendrée par  $\ker \alpha$ ,  $\Pi(\ker \alpha)$ ,  $\Omega^{I^1}$  et  $\text{rad}(\langle I \cdot \Pi(v) \rangle)$ . Alors  $v \notin \Sigma'$  car la longueur de la filtration par le socle de  $\Sigma'$  est strictement plus petite que celle de  $\langle I \cdot v \rangle$ . Ceci permet de conclure, car on a toujours  $\Pi(v) \neq v$ .  $\square$

À partir des données  $(M, \sigma', v, f)$ , i.e. :

- une sous- $I$ -représentation spéciale  $M$  de  $I^+(\pi)$  vérifiant (S2) ;
- un poids  $\sigma'$  comme dans (S2) (associé à  $M$ ) tel que  $M = M'$  ;
- un vecteur propre  $v \in M$  de  $\mathcal{H}$  de caractère  $\chi$  vérifiant (S3) ;
- un vecteur propre non nul  $f$  de  $\mathcal{H}$  de caractère  $\chi^s$ ,

on va construire une famille de représentations lisses admissibles de  $G$  comme suit :

**Étape 1.** D'après le corollaire 9.11 [BP], il existe  $\Omega \in S$  et une injection  $G$ -équivariante  $\pi \hookrightarrow \Omega$ . Soit  $V_\chi$  un sous-espace vectoriel de  $\Omega$  isomorphe à  $\text{Inj}_I \chi$  en tant que  $I$ -représentation et tel que :

$$V_\chi^{I^1} = \overline{\mathbb{F}}_p \Pi(f).$$

Alors l'injection  $\overline{\mathbb{F}}_p v \hookrightarrow \Omega/\Sigma(M)$  induit, par injectivité de  $V_\chi$ , un morphisme  $\Omega/\Sigma(M) \rightarrow V_\chi$  qui envoie l'image  $\bar{v}$  de  $v$  vers  $\Pi(f)$ . En composant avec les morphismes naturels, on obtient un endomorphisme  $I$ -équivariant de  $\Omega$  :

$$\Omega \rightarrow \Omega/\Sigma(M) \rightarrow V_\chi \hookrightarrow \Omega$$

que l'on note  $\phi$ . On note  $\Phi$  l'ensemble de tels  $\phi$ .

**Remarque 4.8.** (i) Comme d'habitude, la définition de  $\phi$  dépend de beaucoup de choix.

(ii) Comme  $\Omega$  est une représentation lisse et comme  $\Omega^{I^1} \subset \ker \phi$ ,  $\phi$  est nilpotent. Par conséquent, pour tout  $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ ,  $1 + a\phi$  est un automorphisme de  $\Omega$  dont l'inverse est  $\sum_{n=0}^{\infty} (-a\phi)^n$ .

**Étape 2 :** On définit, pour  $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ , une (nouvelle) action de la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$  sur  $\Omega$  :

$$(4.1.2) \quad \begin{array}{ccc} \Pi_{\phi,a} : \Omega & \rightarrow & \Omega \\ x & \mapsto & (1 + a\phi)^{-1} \cdot \Pi \cdot (1 + a\phi)(x). \end{array}$$

On vérifie facilement que  $\Pi_{\phi,a}$  est  $I$ -équivariant et que  $(\Pi_{\phi,a})^2 = \text{Id}_\Omega$ .

Comme  $\overline{\mathbb{F}}_p \Pi(v) + \Omega^{I^1} \subset \Sigma(M) \subset \ker \phi$ , on a par définition :

$$\begin{aligned} \Pi_{\phi,a}(v) &= (1 + a\phi)^{-1} \Pi(v + a\Pi(f)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-a\phi)^n (\Pi(v) + a\Pi(f)) \\ &= \Pi(v) + a\Pi(f). \end{aligned}$$

Par le même calcul, on obtient aussi que si  $x \in \Omega$  vérifie à la fois  $x \in \ker(a\phi)$  et  $\Pi(x) \in \ker(a\phi)$ , alors  $\Pi_{\phi,a}(x) = \Pi(x)$ . En particulier,  $\Pi_{\phi,0} = \Pi$ .

**Étape 3 :** Puisque  $\Pi_{\phi,a}$  définit une action de la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$  sur  $\Omega$ , d'après [BP], on obtient une représentation lisse admissible de  $G$  que l'on note  $(\Omega, \Pi_{\phi,a})$ , ou simplement  $\Omega_{\phi,a}$ , telle que

$$\Omega_{\phi,a}|_{KZ} = \Omega|_{KZ} = \mathrm{Inj}_K \sigma.$$

On définit  $\pi_{\phi,a}$  comme la sous- $G$ -représentation de  $\Omega_{\phi,a}$  engendrée par  $M^{I_1}$ .

Démontrons que les représentations  $\pi_{\phi,a}$  définies ci-dessus sont vraiment *nouvelles*. Rappelons que l'on a fixé un poids  $\sigma'$  et un vecteur non nul  $f$  de caractère propre  $\chi^s$ .

**Théorème 4.9.** *Avec les notations précédentes :*

- (i) on a  $\pi \not\cong \pi_{\phi,a}$  si  $a \neq 0$ ;
- (ii) si de plus la représentation  $M + \overline{\mathbb{F}}_p f$  est spéciale, alors  $\pi_{\phi,a} \not\cong \pi_{\phi',a'}$  pour tout  $a \neq a'$  et tout  $\phi, \phi' \in \Phi$ .

*Démonstration.* (i) Supposons qu'il existe un isomorphisme  $G$ -équivariant  $\psi_a : \pi \rightarrow \pi_{\phi,a}$  ( $a \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$ ). Grâce à la condition (S1), on peut supposer  $\psi_a|_M = \mathrm{Id}$ . On a vu qu'il existe un (unique) entier  $0 \leq i(\sigma') \leq q-1$  et  $\epsilon \in \{0, \pm 1\}$  tels que le vecteur

$$F := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{i(\sigma')} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f + \epsilon f \in \mathrm{Inj}_K \sigma',$$

est fixé par  $I_1$  et que  $\langle K \cdot F \rangle \cong \sigma'$ . D'autre part, par le lemme 4.6, il existe des  $x_i, x_\Pi \in \ker(\alpha)$  ( $0 \leq i \leq q-1$ ) tels que dans  $\pi \hookrightarrow \mathrm{Inj}_K \sigma$

$$\sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^i \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(x_i) + \Pi(x_\Pi) + \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{i(\sigma')} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(v) + \epsilon \Pi(v) = 0,$$

et on a donc dans  $\pi_{\phi,a} \hookrightarrow \mathrm{Inj}_K \sigma$  (en utilisant  $\psi_a|_M = \mathrm{Id}$ ) :

$$\sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^i \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi_{\phi,a}(x_i) + \Pi_{\phi,a}(x_\Pi) + \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{i(\sigma')} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi_{\phi,a}(v) + \epsilon \Pi_{\phi,a}(v) = 0.$$

Or, on a les égalités (car  $x_i, x_\Pi, \Pi(x_i), \Pi(x_\Pi) \in \ker(a\phi)$ )

$$\Pi_{\phi,a}(x_i) = \Pi(x_i), \quad \Pi_{\phi,a}(x_\Pi) = \Pi(x_\Pi), \quad \Pi_{\phi,a}(v) = \Pi(v) + af,$$

d'où  $aF = 0$  (dans  $\mathrm{Inj}_K \sigma$ ), ce qui est impossible si  $a \neq 0$ .

(ii) L'argument est analogue à celui pour (i). Plus précisément, par ce qui précède, on a dans  $\pi_{\phi,a}$  (resp.  $\pi_{\phi',a'}$ ) :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^i \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi_{\phi,a}(x_i) + \Pi_{\phi,a}(x_\Pi) \\ & \quad + \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \lambda^{i(\sigma')} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\Pi_{\phi,a}(v) - af) + \epsilon (\Pi_{\phi,a}(v) - af) = 0, \end{aligned}$$

(resp. en remplaçant  $\phi$  par  $\phi'$  et  $a$  par  $a'$ ). Soit  $\psi : \pi_{\phi,a} \xrightarrow{\sim} \pi_{\phi',a'}$  un  $G$ -isomorphisme. On peut supposer  $\psi|_{M+\overline{\mathbb{F}}_p^f} = \text{Id}$  de telle sorte qu'on ait  $(a-a')F = 0$ , qui est impossible si  $a \neq a'$ .  $\square$

**Remarque 4.10.** Soient  $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  une représentation continue semi-simple générique, et  $D(\rho, r)$  un diagramme de Diamond associé. Supposons que ([BP], §19) :

- ou bien  $\rho$  est irréductible et  $\pi = \pi(\rho, r)$  est une représentation lisse admissible associée à  $D(\rho, r)$ ;
- ou bien  $\rho$  est réductible et  $\pi = \pi_\ell(\rho, r)$  pour un  $\ell \in \{1, \dots, f-1\}$ .

Supposons de plus que  $M$  est une sous- $I$ -représentation spéciale de  $\pi$  vérifiant (S2) et  $v \in M$  est un vecteur propre de  $\mathcal{H}$  vérifiant (S3) et, pour  $\phi \in \Phi$  et  $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ , définissons des représentations  $\pi_{\phi,a}$  de  $G$  comme ci-dessus. Alors, en fixant un  $\phi$ , on obtient une famille de représentations supersingulières non isomorphes  $\pi_{\phi,a}$  de  $G$  paramétrées par  $\overline{\mathbb{F}}_p$ .

## 4.2 Les cas $f \geq 3$

Dans cette section, on va construire de nouvelles représentations supersingulières de  $G$  lorsque  $f \geq 3$ .

Supposons donc  $f \geq 3$ . Soit  $\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  une représentation continue générique (déf. 4.2) telle que  $p \in Z$  agit trivialement sur  $\det(\rho)$  et soit  $\mathcal{D}(\rho)$  l'ensemble des poids de Diamond associés. Supposons de plus que

- (a) ou bien  $f = 2m + 1$  avec  $m \geq 1$  et  $\rho$  est irréductible,
- (b) ou bien  $f = 2m + 2$  avec  $m \geq 1$  et  $\rho$  est réductible scindée.

**Lemme 4.11.** *Sous les hypothèses précédentes, il existe un poids  $\sigma \in \mathcal{D}(\rho)$  tel que  $\sigma^{[s]} \in \mathcal{D}(\rho)$  et tel que*

$$\mu_\lambda = (p-3-y_0, \dots, p-3-y_{f-1}),$$

où  $\lambda \in \mathcal{ID}(x_0, \dots, x_{f-1})$  ou  $\mathcal{RD}(x_0, \dots, x_{f-1})$  est le  $f$ -uplet correspondant à  $\sigma$  et où  $\mu_\lambda \in \mathcal{I}(y_0, \dots, y_{f-1})$  est le  $f$ -uplet associé à  $\lambda$  défini au §3.1.

*Démonstration.* Il suffit de prendre  $\sigma$  comme le poids de Diamond correspondant à

- dans le cas (a),

$$\lambda = (p-1-x_0, x_1+1, p-2-x_2, \dots, x_{2m-1}+1, p-2-x_{2m});$$

- dans le cas (b),

$$\lambda = (x_0+1, p-2-x_1, \dots, x_{2m}+1, p-2-x_{2m+1}).$$

L'énoncé concernant  $\mu_\lambda$  est alors direct par définition (cf. §3.1).  $\square$

On fixe un poids  $\sigma$  comme dans le lemme 4.11. D'après le théorème 3.6 (ii), pour tout  $1 \leq j \leq f-1$ , il existe un poids  $\tau_j$  apparaissant dans  $D_{0,\sigma}(\rho)$  tel que  $(\sigma, \tau_j)$  soit un couple de type  $(+1, j)$ . De manière explicite,  $\tau_j$  est le sous-quotient irréductible de  $D_{0,\sigma}(\rho)$  correspondant à

$$(\cdots, y_{j-2}, p-2-y_{j-1}, y_j+1, y_{j+1}, \cdots) \in \mathcal{ID}(y_0, \cdots, y_{f-1}).$$

Pour simplifier les notations, on fixe  $j \in \{0, \cdots, f-1\}$  et on pose  $\tau = \tau_j$ .

Rappelons que  $\delta(\tau)$  désigne l'unique poids de Diamond tel que  $\tau^{[s]}$  soit un sous-quotient irréductible de  $D_{0,\delta(\tau)}(\rho)$ . Puisque  $\delta(\tau)$  est un sous-quotient irréductible de  $\mathrm{Ind}_f^K \chi_\tau^s$ , on peut lui associer un  $f$ -uplet  $\xi \in \mathcal{P}(x_0, \cdots, x_{f-1})$  (cf. n°2.1) tel que, si l'on écrit  $\tau = (s_0, \cdots, s_{f-1}) \otimes \eta$ , alors

$$\delta(\tau) = (\xi_0(s_0), \cdots, \xi_{f-1}(s_{f-1})) \otimes \det^{e(\xi)(s_0, \cdots, s_{f-1})} \eta.$$

**Corollaire 4.12.** *Dans les cas (a) ou (b), on a  $J(\xi) = \{0, \cdots, f-1\} \setminus \{j-2\}$  (où l'on identifie  $j-2$  avec  $j-2+f$  si  $j-2 < 0$ ).*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du corollaire 3.12 en remarquant que  $J(\delta(\sigma)) = J(\sigma^{[s]}) = \{0, \cdots, f-1\}$  et que  $(\sigma, \tau)$  est un couple de type  $(+1, j)$ .  $\square$

D'après le lemme 2.10, la  $K$ -représentation  $I(\sigma, \tau) \subset D_{0,\sigma}(\rho)$  contient une unique sous- $I$ -représentation  $M_\tau$  isomorphe à  $E_{j-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau)$ . On pose  $\chi' := \chi_\tau \alpha^{-p^j}$  et

$$W := \mathrm{Ind}_f^K \Pi(M_\tau) \cong \mathrm{Ind}_f^K \Pi(E_{j-1}(\chi_\sigma, \chi_\tau)).$$

**Corollaire 4.13.** *Soit  $\omega$  un sous-quotient irréductible de  $\mathrm{Ind}_f^K \Pi(\chi')$ , alors la  $K$ -représentation  $W_\omega$  (cf. lemme 2.11) admet  $\sigma^{[s]} = \delta(\sigma)$  et  $\delta(\tau)$  comme sous-représentations si et seulement si*

$$\{0, \cdots, f-1\} \setminus \{j-1, j-2\} \subseteq J(\omega).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence des corollaires 2.12 et 4.12.  $\square$

**Lemme 4.14.** (i) *Il existe un poids de Diamond  $\sigma'$  tel que  $\chi' = \chi_{\sigma'}$ . Si l'on note  $\lambda'$  le  $f$ -uplet correspondant à  $\sigma'$ , alors  $\ell(\lambda') = \ell(\lambda) \pm 1$ .*

(ii) *Soit  $v_\tau \in M_\tau$  un vecteur propre non nul de  $\mathcal{H}$  de caractère  $\chi'$ . Posons*

$$F_{0,v_\tau} := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_\tau \in \pi.$$

*Alors ou bien  $F_{0,v_\tau} = 0$ , ou bien  $\langle K \cdot F_{0,v_\tau} \rangle$  est irréductible, isomorphe à  $\sigma'$ .*

*Démonstration.* (i) Remarquons que si l'on écrit  $\chi' = (s_0, \cdots, s_{f-1}) \otimes \eta'$ , alors  $0 \leq s_j \leq p-3$ . Soit  $\sigma'$  l'unique poids de dimension  $\leq q-2$  tel que  $\chi_{\sigma'} = \chi'$ . On vérifie que  $(\sigma, \sigma')$  est un couple de type  $(-1, j)$  et que  $\sigma'$  n'apparaît pas dans  $D_{0,\sigma}(\rho)$  (cf. théorème 3.6). Ceci montre que  $\sigma' \in \mathcal{D}(\rho)$  par maximalité de  $D_0(\rho)$  (prop. 13.1, [BP]). Le deuxième énoncé est immédiat.

(ii) Supposons  $F_{0,v_\tau} \neq 0$ . Il suffit de démontrer que l'image du morphisme naturel

$$W_{\sigma'} \hookrightarrow \text{Ind}_I^K \Pi(M_\tau) \twoheadrightarrow \langle K \cdot M_\tau \rangle \hookrightarrow \pi$$

est isomorphe à  $\sigma'$ , où  $W_{\sigma'} \subset W$  est défini dans le lemme 2.11 (avec  $\sigma'$  vu comme sous-quotient de  $\text{Ind}_I^K \Pi(\chi')$ ). Si l'on note  $W_1$  le noyau du morphisme

$$\text{Ind}_I^K (\chi_\sigma^s \oplus \chi_\tau^s) \rightarrow \pi,$$

alors le morphisme  $W_{\sigma'} \rightarrow \pi$  se factorise à travers  $W_{\sigma'}/(W_{\sigma'} \cap W_1)$ . On laisse au lecteur le soin de vérifier que  $W_{\sigma'}/W_{\sigma'} \cap W_1$  n'admet pas de poids de Diamond autre que  $\sigma'$  comme sous-quotient et que  $\sigma'$  apparaît dans  $W_{\sigma'}$  avec multiplicité 1. Ceci permet de conclure.  $\square$

Dans le lemme 4.14, il est clair que le poids  $\sigma'$  est uniquement déterminé par  $\sigma$  et  $j$ . Soit  $f_{\sigma'} \in \sigma'$  un vecteur propre non nul de  $\mathcal{H}$  de caractère  $\chi'^s = \chi_{\sigma'}^s$  (unique à constante près). On vérifie directement que  $f_{\sigma'} \notin M_\tau$ . Si l'on pose  $M = M_\tau \oplus \overline{\mathbb{F}}_p f_{\sigma'}$ , alors

- $M \subseteq I^+(\pi)$ , puisque l'on peut vérifier directement que  $M_\tau$  l'est ;
- $M$  vérifie (S2), car  $\sigma'$  apparaît dans le socle de  $\pi$  avec multiplicité 1, donc  $\sigma'$  est un sous-quotient de  $\ker_2 / \ker_1$  dans (4.1.1) ;
- $v_\tau \notin \Sigma(M)$  d'après le lemme 4.7, car  $\Sigma(M) = \Sigma(M_\tau)$  et que  $M_\tau$  admet un cosocle irréductible ;
- $M$  est une représentation spéciale : c'est une conséquence du lemme 4.3 car  $M$  est inclus dans  $I(\sigma, \tau) \oplus \sigma'$ .

Par le théorème 4.9, on obtient donc

**Théorème 4.15.** *Dans le cas (a), il existe une famille de représentations supersingulières de  $G$  associées à  $D(\rho, r)$  qui sont non isomorphes et paramétrées par  $\overline{\mathbb{F}}_p$ .*

Supposons maintenant que l'on est dans le cas (b). Soit  $D(\rho, r)$  un diagramme de Diamond associé à  $\rho$ . D'après le théorème 3.6 (iii), [BP], on a une décomposition de diagrammes

$$D(\rho, r) = \bigoplus_{\ell=0}^f (D_{0,\ell}(\rho), D_{1,\ell}(\rho), r_\ell)$$

où  $D_{i,\ell}(\rho) := \bigoplus_{\ell(\sigma)=\ell} D_{i,\sigma}(\rho)$  pour  $i = 0, 1$ . Par le théorème 19.10 [BP], il existe pour chaque  $\ell \in \{0, \dots, f\}$  une représentation lisse admissible  $\pi_\ell$  de  $G$  telle que

- (a)  $\text{soc}_K \pi_\ell = \bigoplus_{\substack{\sigma'' \in \mathcal{D}(\rho) \\ \ell(\sigma'')=\ell}} \sigma''$  où  $\ell(\sigma)$  est défini par (3.1.1) ;
- (b)  $(D_{0,\ell}(\rho), D_{1,\ell}(\rho), r_\ell) \hookrightarrow (\pi_\ell^{K_1}, \pi_\ell^{I_1}, \text{can})$  ;
- (c)  $\pi_\ell$  est engendrée par  $D_{1,\ell}(\rho)$  en tant que  $G$ -représentation.

Fixons pour chaque  $\ell \in \{0, \dots, f\}$  une représentation  $\pi_\ell$  comme ci-dessus, et posons  $\pi = \bigoplus_{\ell=0}^f \pi_\ell$ . Le théorème suivant va répondre *négativement* à la question (Q3).

**Théorème 4.16.** *Il existe une représentation lisse admissible  $\pi'$  de  $G$  vérifiant les propriétés suivantes :*



- (a')  $\mathrm{soc}_K \pi' = \bigoplus_{\sigma'' \in \mathcal{D}(\rho)} \sigma''$  ;  
 (b')  $(D_0(\rho), D_1(\rho), \tau) \hookrightarrow (\pi^{IK_1}, \pi^{I_1}, \mathrm{can})$  ;  
 (c')  $\pi'$  est engendrée par  $D_1(\rho)$  en tant que  $G$ -représentation ;  
 (d')  $\pi'$  n'est pas semi-simple, en particulier,  $\pi'$  n'est pas une somme directe  $\pi' = \bigoplus_{\ell=0}^f \pi'_\ell$  avec  $\pi'_\ell$  des sous-représentations vérifiant (a)-(c).

**Construction.** On va modifier un peu la construction du n°4.1. D'après le théorème 9.8 de [BP], il existe une représentation lisse admissible  $\Omega$  de  $G$  dont l'espace sous-jacent est une enveloppe injective :

$$\Omega|_K = \bigoplus_{\sigma'' \in \mathcal{D}(\rho)} \mathrm{Inj}_K \sigma'' = \bigoplus_{\ell=0}^f \mathrm{Inj}_K(\mathrm{soc}_K \pi_\ell),$$

et il existe une injection  $G$ -équivariante  $\pi \hookrightarrow \Omega$  qui induit pour tout  $\ell \in \{0, \dots, f\}$  une injection

$$\pi_\ell \hookrightarrow \mathrm{Inj}_K(\mathrm{soc}_K \pi_\ell).$$

Comme  $v_\tau \in \mathrm{Inj}_K \sigma \subset \Omega$ , le lemme 4.7 assure qu'il existe une sous- $I$ -représentation  $E$  de  $\Omega$  contenant

$$\bigoplus_{\ell \neq \ell(\sigma)} \mathrm{Inj}_K(\mathrm{soc}_K \pi_\ell) + \mathrm{rad}(M_\tau) + \Omega^{I_1} + \langle I \cdot \Pi(v_\tau) \rangle,$$

mais ne contient pas  $v_\tau$ . Soit  $V_{\chi'}$  une sous- $I$ -représentation de  $\mathrm{Inj}_K \sigma'$  isomorphe à  $\mathrm{Inj}_I \chi'$  telle que  $V_{\chi'}^{I_1} = \overline{\mathbb{F}}_p \Pi(f_{\sigma'})$ . En choisissant

- d'une part, un endomorphisme  $\phi : \Omega \rightarrow \Omega$  qui se factorise par

$$\Omega \rightarrow \Omega/E \rightarrow V_{\chi'} \rightarrow \Omega,$$

- d'autre part, une constante  $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$  telle que

$$(4.2.1) \quad F_{0, v_\tau} + a \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_{\sigma'} \neq 0$$

( $a$  existe car le terme  $\sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_{\sigma'}$  n'est pas nul dans  $\pi$ )

on obtient donc une action de  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$  sur  $\Omega$ , i.e. on définit  $\Pi_{\phi, a} : \Omega \rightarrow \Omega$  comme dans (4.1.2). On en déduit alors une représentation lisse admissible  $\Omega_{\phi, a}$  de  $G$ . Enfin, on définit  $\pi_{\phi, a}$  comme la sous-représentation de  $\Omega_{\phi, a}$  engendrée par  $D_1(\rho)$ .

Montrons que la représentation  $\pi' := \pi_{\phi, a}$  satisfait les conditions demandées. Par construction,  $\pi'$  satisfait (a'), (b'), (c'). Pour vérifier la condition (d'), notons  $\pi'_{\ell(\sigma)} \subset \pi'$  la sous-représentation engendrée par  $\sigma$ . Par le lemme 4.14 (ii) et par (4.2.1),  $\pi'_{\ell(\sigma)}$  admet  $\sigma'$  dans son socle. On en déduit que  $\pi'$  ne contient pas de sous-représentation qui a le même socle que  $\pi_{\ell(\sigma)}$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

**Remarque 4.17.** L'argument ne marche plus dans le cas (b) pour  $f = 2$  à cause du corollaire 2.12. Pourtant, on peut construire des représentations non isomorphes de  $G$  associées à un diagramme  $D(\rho, r)$  fixé en utilisant l'argument au n°4.3.

### 4.3 Le cas $f = 2$

Supposons maintenant que  $f = 2$  et fixons  $\rho$  une représentation continue (irréductible)  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  telle que

$$\rho|_{I(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)} \cong \begin{pmatrix} \omega_4^{r_0+1+p(r_1+1)} & 0 \\ 0 & \omega_4^{p^2(r_0+1)+p^3(r_1+1)} \end{pmatrix}$$

avec  $1 \leq r_0 \leq p-2$ ,  $0 \leq r_1 \leq p-3$ . Alors l'ensemble des poids de Diamond est donné par :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &:= (r_0, r_1) \\ \sigma_2 &:= (r_0 - 1, p - 2 - r_1) \otimes \det^{p(r_1+1)} \\ \sigma_3 &:= (p - 1 - r_0, p - 3 - r_1) \otimes \det^{r_0+p(r_1+1)} \\ \sigma_4 &:= (p - 2 - r_0, r_1 + 1) \otimes \det^{r_0+p(p-1)}, \end{aligned}$$

et la représentation  $D_0(\rho)$  est (à torsion près)

$$\begin{aligned} D_{0,\sigma_1}(\rho) &:= \sigma_1 \text{ --- } S_1 \text{ --- } (p - 3 - r_0, p - 1 - r_1) \\ &\quad \oplus \\ D_{0,\sigma_2}(\rho) &:= \sigma_2 \text{ --- } S_2 \text{ --- } (p - r_0, r_1 - 1) \\ &\quad \oplus \\ D_{0,\sigma_3}(\rho) &:= \sigma_3 \text{ --- } S_3 \text{ --- } (r_0 - 2, r_1 + 2) \\ &\quad \oplus \\ D_{0,\sigma_4}(\rho) &:= \sigma_4 \text{ --- } S_4 \text{ --- } (r_0 + 1, p - 4 - r_1) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S_1 &:= (p - 2 - r_0, r_1 - 1) \oplus (r_0 + 1, p - 2 - r_1) \\ S_2 &:= (r_0 - 2, r_1) \oplus (p - 1 - r_0, p - 1 - r_1) \\ S_3 &:= (r_0 - 1, p - 4 - r_1) \oplus (p - r_0, r_1 + 1) \\ S_4 &:= (p - 3 - r_0, p - 3 - r_1) \oplus (r_0, r_1 + 3). \end{aligned}$$

On vérifie que  $\delta(\sigma_i) = \sigma_{i+1}$  (avec la convention  $\sigma_5 := \sigma_1$ ), i.e.  $\sigma_i^{[s]}$  apparaît dans  $D_{0,\sigma_{i+1}}(\rho)$  comme sous-quotient.

Notons  $\chi_i := \chi_{\sigma_i}$  et  $\chi_i^s := \chi_{\sigma_i^s}$ , et choisissons une base  $\{e_i, e_i^{[s]}, 1 \leq i \leq 4\}$  de  $D_1(\rho) := D_0(\rho)^{I_1}$ , où  $e_i$  (resp.  $e_i^{[s]}$ ) est un vecteur propre de  $\mathcal{H}$  de caractère  $\chi_i$  (resp.  $\chi_i^s$ ).

Fixons  $D(\rho, r)$  un diagramme associé à  $\rho$  et  $\pi = \pi(\rho, r)$  une représentation supersingulière associée. Comme dans la section précédente, on va démontrer que  $D_1(\pi)$  contient

une sous- $I$ -représentation spéciale vérifiant la condition (S2). L'argument précédemment donné ne marche plus à cause du fait que  $f = 2$  (cf. lemme 2.7) : on a besoin de plus de préliminaires.

### 4.3.1 La représentation $V_1$

Puisque  $D_{0,\sigma_2}(\rho)$  contient une sous- $K$ -représentation isomorphe à l'extension

$$0 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow * \rightarrow \sigma_1^{[s]} \rightarrow 0$$

de type  $(+1, 1)$ , le lemme 2.10 montre qu'il contient une sous- $I$ -représentation  $M_1$  isomorphe à  $E_0(\chi_2, \chi_1^s)$ . Posons

$$W_1 := \mathrm{Ind}_F^K \Pi(M_1) \cong \mathrm{Ind}_F^K \Pi(E_0(\chi_2, \chi_1^s)).$$

Puisque le caractère  $\chi_1^s \alpha^{-p}$  n'est autre que  $\chi_3$  et puisque  $\mathrm{Ind}_F^K \Pi(\chi_3)$  admet un sous-quotient isomorphe à  $\sigma_4$ , la sous-représentation  $W_{1,\sigma_4} \subset W_1$  est bien définie (cf. le lemme 2.11). On note  $V_1$  l'image de  $W_{1,\sigma_4}$  dans  $\pi$ . Le lemme suivant décrit la filtration par le  $K$ -socle de  $V_1$ .

**Lemme 4.18.** (i) On a  $\mathrm{soc}_K V_1 = \sigma_1 \oplus \sigma_3$ .

(ii) La filtration par le socle de  $V_1$  est la suivante (où l'on pose  $\tau_0 := \sigma_3$  et  $\tau_1 := \sigma_2^{[s]}$ ) :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \tau_0 & \text{---} & \tau_1 & \text{---} & \cdots & \text{---} & \tau_{r_0} & \text{---} & \cdots & \text{---} & \tau_1 & \text{---} & \tau_0 & \text{---} & \sigma_4 \\ & & & & & & & & & & & & & & & | \\ & & & & & & & & & & & & & & & \sigma_1. \end{array}$$

De manière explicite,  $(V_1/\sigma_1)_i = \begin{cases} \tau_i & \text{si } i \leq r_0 \\ \tau_{2r_0-i} & \text{si } r_0 + 1 \leq i \leq 2r_0 \\ \sigma_4 & \text{si } i = 2r_0 + 1. \end{cases}$

(iii) On a  $\tau_i \notin \mathcal{D}(\rho)$  pour tout  $i \neq 0$ ; l'extension  $(\sigma_1, \sigma_4)$  est de type  $(+1, 1)$  et  $(\tau_i, \tau_{i+1})$  est de type  $(+1, 0)$  pour tout  $0 \leq i \leq r_0 - 1$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence du corollaire 2.12. □

**Lemme 4.19.** Si  $V_2 \subset \pi$  est une sous- $K$ -représentation avec la même filtration par le  $K$ -socle que  $V_1$ , alors  $\mathrm{rad}_K(V_1) \subset V_1 \cap V_2$  en tant que sous-espaces vectoriels de  $\pi$ .

*Démonstration.* Puisque le socle de  $V_i$  (avec  $i \in \{0, 1\}$ ), qui est isomorphe à  $\sigma_1 \oplus \sigma_3$ , apparaît dans  $\mathrm{soc}_K \pi$  avec multiplicité 1, on voit que

$$\mathrm{soc}_K(V_1) \subset V_1 \cap V_2.$$

Puis, comme  $\tau_i \notin \mathcal{D}(\rho)$  si  $i \neq 0$ , on déduit que, si l'on note  $R \subset V_1$  la sous-représentation

$$\tau_0 \text{ --- } \tau_1 \text{ --- } \cdots \text{ --- } \tau_{r_0} \text{ --- } \cdots \text{ --- } \tau_1,$$

alors

$$(4.3.1) \quad \dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \text{Hom}_K(R, \pi) = 1.$$

On a donc  $R \oplus \sigma_1 \subset V_1 \cap V_2$ .

Considérons la sous-représentation  $R'$  de  $V_1$  :

$$(4.3.2) \quad \tau_0 \text{ --- } \tau_1 \text{ --- } \cdots \text{ --- } \tau_{r_0} \text{ --- } \cdots \text{ --- } \tau_1 \text{ --- } \tau_0.$$

Le même raisonnement montre que

$$\dim_{\overline{\mathbb{F}}_p} \text{Hom}_K(R', \pi) = 2.$$

Soit  $\varphi : R' \rightarrow \pi$  un morphisme  $K$ -équivariant injectif : on a alors  $\tau_0 = \sigma_3 \subset \text{Im}\varphi$ . De plus, si  $\varphi'$  en est un autre, alors il existe  $a \in \overline{\mathbb{F}}_p^\times$  tel que  $\varphi|_R = a\varphi'|_R$  (d'après (4.3.1)), donc  $\varphi - a\varphi'$  induit un morphisme  $\tau_0 \rightarrow \pi$ . Ceci montre que l'image de  $\varphi$  (supposé injectif) ne dépend pas du choix, ce qui permet de conclure.  $\square$

### 4.3.2 La représentation $V_2$

On va construire un autre sous-espace vectoriel  $V_2$  de  $\pi$  qui est  $K$ -stable et qui possède de la même filtration par le socle que  $V_1$ .

**Lemme 4.20.**  $\pi|_K$  contient une sous-représentation isomorphe à

$$\sigma_4 \text{ --- } \sigma_3^{[s]} \text{ --- } \omega := (p-2-r_0, r_1+3) \otimes \det^{r_0+p(p-2)}.$$

*Démonstration.* On vérifie que  $\sigma_3$  contient une sous- $I$ -représentation isomorphe à  $E_0(\chi_3)$  (grâce à l'hypothèse  $r_0 \leq p-2$ ) et que  $\text{Ind}_I^K \Pi(\chi_3 \alpha^{-1})$  admet le poids  $\omega$  comme sous-quotient. Soit  $W_\omega$  la sous- $K$ -représentation de  $\text{Ind}_I^K \Pi(E_0(\chi_3))$  définie dans le corollaire 2.4. Il suffit alors de prendre l'image de  $W_\omega$  dans  $\pi$  (en utilisant le lemme 2.7) pour conclure.  $\square$

On note  $\overline{W}_\omega$  la  $K$ -représentation construite dans le lemme 4.20. Choisissons une base  $\{v, w\}$  comme (2.1.2) pour  $E_0(\chi_3)$  et définissons des vecteurs  $f_k, F_k$  ( $0 \leq k \leq q-1$ ) dans  $\text{Ind}_I^K \Pi(E_0(\chi_3))$  comme (2.1.3). Alors, vu comme sous-quotient de  $\text{Ind}_I^K \Pi(E_0(\chi_3))$ ,  $\overline{W}_\omega$  admet une base induite (lemme 2.7, [BP])

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{f}_{d_0+pd_1}, \quad d_1 \geq p-2-r_1, \text{ ou } d_1 = p-3-r_1 \text{ et } d_0 \geq p-1-r_0 \\ \overline{F}_{d'_0+pd'_1}, \quad d'_0 \leq p-2-r_0 \text{ et } d'_1 \geq p-4-r_1 \end{array} \right\}$$

où  $\overline{f}_k$  (resp.  $\overline{F}_k$ ) désigne l'image de  $f_k$  (resp.  $F_k$ ) dans  $\overline{W}_\omega \subset \pi$ .

Le vecteur  $v_\omega := \overline{F}_{p(p-3-r_1)}$  est un vecteur propre de  $\mathcal{H}$  de caractère  $\chi_\omega \alpha^{-p} = \chi_4$ . Posons  $M_2 \subset \pi$  la  $I$ -représentation engendrée par  $v_\omega$ . Pour définir l'espace  $V_2$ , nous avons besoin de connaître la structure de  $M_2$ . On commence par le résultat suivant :

**Lemme 4.21.** (i)  $M_2$  admet une (unique) sous- $I$ -représentation  $M'_2$  isomorphe à  $E_0(\chi_3^s, r_0)$ .

(ii) La  $K$ -représentation  $\langle K \cdot \Pi(M'_2) \rangle \subset \pi$  engendrée par  $\Pi(M'_2)$  contient une sous- $K$ -représentation  $V'_2$  dont la filtration par le socle est de la forme (4.3.2).

*Démonstration.* (i) La sous-représentation engendrée par  $\bar{f}_{p-1+p(p-3-r_1)}$  est isomorphe à  $E_0(\chi_3^s, r_0)$ .

(ii) Posons  $W'_2 := \mathrm{Ind}_I^K \Pi(M'_2)$ . Puisque

$$\mathrm{cosoc}_I(M'_2) \cong \chi_4 \alpha = (p - r_0, r_1 + 1) \otimes \det^{(r_0-1)+p(p-1)}$$

et que  $\mathrm{Ind}_I^K \Pi(\chi_4 \alpha)$  admet  $\sigma_3 = r_0$  comme sous-quotient, il suffit de prendre pour  $V'_2$  l'image de  $W'_{2, \sigma_3} \subset W'_2$  dans  $\pi$  (lemme 2.7 et corollaire 2.12).  $\square$

On vérifie que  $\bar{f}_{p(p-2-r_1)} = e_4$  et que l'image de  $\bar{f}_{p(p-4-r_1)}$  dans  $\omega$  est fixée par  $I_1$  de caractère propre  $\chi_\omega$  (sous l'action de  $\mathcal{H}$ ). On note  $e_\omega := \bar{f}_{p(p-4-r_1)}$  pour simplifier. Le sous-espace  $M''_2 := \bar{\mathbb{F}}_p e_4 \oplus \bar{\mathbb{F}}_p e_\omega \subset M_2$  est stable par  $I$  et isomorphe à  $\Pi(E_1(\chi_4^s))$ , i.e. à l'extension non triviale

$$0 \rightarrow \chi_4 \rightarrow * \rightarrow \chi_4 \alpha^p \rightarrow 0.$$

**Lemme 4.22.** Si  $Q$  est un  $K$ -quotient de la représentation

$$\mathrm{Ind}_I^K E_1(\chi_4^s) = \mathrm{Ind}_I^K (\bar{\mathbb{F}}_p \Pi(e_4) \oplus \bar{\mathbb{F}}_p \Pi(e_\omega))$$

tel que :

$$(a) \mathrm{soc}_K Q \subseteq \bigoplus_{i=1}^4 \sigma_i;$$

$$(b) Q \text{ contient la } K\text{-représentation } I(\delta(\sigma_4), \sigma_4^{[s]}) = I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]}),$$

alors  $Q \cong I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]})$  (cf. §2.1).

*Démonstration.* Soit  $Q$  un  $K$ -quotient comme dans l'énoncé. Grâce à (b), l'image de  $\mathrm{Ind}_I^K \chi_4^s$  dans  $Q$  est exactement  $I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]})$  par la preuve du lemme 19.6, [BP]. On en déduit que, si l'on note  $\tau$  le noyau du quotient

$$\mathrm{Ind}_I^K \chi_4^s \twoheadrightarrow I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]}),$$

alors la surjection  $\mathrm{Ind}_I^K E_1(\chi_4^s) \twoheadrightarrow Q$  se factorise à travers  $\mathrm{Ind}_I^K E_1(\chi_4^s) \twoheadrightarrow \mathrm{Ind}_I^K E_1(\chi_4^s)/\tau$ . Comme  $E_1(\chi_4^s)$  s'injecte dans  $I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]})|_I$ , on obtient un  $K$ -morphisme  $\mathrm{Ind}_I^K E_1(\chi_4^s) \twoheadrightarrow I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]})$  et donc

$$\mathrm{Ind}_I^K E_1(\chi_4^s)/\tau \cong I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]}) \oplus \mathrm{Ind}_I^K \chi_4^s \alpha^{-p}.$$

Mais, on vérifie facilement que  $\mathrm{Ind}_I^K \chi_4^s \alpha^{-p}$  n'admet aucun poids de Diamond comme sous-quotient, donc la condition (a) force que  $Q = I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]})$ .  $\square$

**Lemme 4.23.** La  $K$ -représentation  $\langle K \cdot \Pi(M_2) \rangle \subset \pi$  contient une sous- $K$ -représentation  $V_2$  qui a la même filtration par le socle que  $V_1$ .

*Démonstration.* Posons

$$X := \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q} \begin{pmatrix} p & [\lambda] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_\omega \in \langle K \cdot \Pi(M_2) \rangle.$$

Alors  $X$  est un vecteur propre de  $\mathcal{H}$  de caractère propre  $\chi_4$ , et  $\langle K \cdot X \rangle$  est une  $K$ -représentation de cosocle  $\sigma_4$ .

Notons  $\overline{M}_2$  le quotient de  $M_2$  par  $M_2' \oplus M_2''$ . On vérifie que  $\overline{M}_2$  est isomorphe à l'extension non-triviale

$$0 \rightarrow \chi_4 \alpha^{-p} \rightarrow * \rightarrow \chi_4 \rightarrow 0$$

dont l'espace sous-jacent coïncide avec l'image de  $\overline{\mathbb{F}}_p v_\omega \oplus \overline{\mathbb{F}}_p \overline{f}_{p(p-1-r_1)}$ . Un calcul facile montre que l'image  $\overline{X}$  de  $X$  dans  $\langle K \cdot \Pi(\overline{M}_2) \rangle$  est fixée par  $I_1$  (en utilisant le fait que le vecteur  $\overline{v}_\omega \in \overline{M}_2$  est fixé par  $\begin{pmatrix} 1+p & \mathcal{O} \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}$ ) et que  $\langle K \cdot \overline{X} \rangle \cong \sigma_4$ . On en déduit une suite exacte de  $K$ -représentations

$$0 \rightarrow \langle K \cdot X \rangle \cap \langle K \cdot \Pi(M_2' \oplus M_2'') \rangle \rightarrow \langle K \cdot X \rangle \rightarrow \sigma_4 \rightarrow 0,$$

et pour raisons de socle, on a

$$\langle K \cdot X \rangle \cap \langle K \cdot \Pi(M_2' \oplus M_2'') \rangle = \langle K \cdot X \rangle \cap \langle K \cdot \Pi(M_2') \rangle \oplus \langle K \cdot X \rangle \cap \langle K \cdot \Pi(M_2'') \rangle.$$

Le corollaire 2.12 implique que  $\langle K \cdot X \rangle \cap \langle K \cdot \Pi(M_2') \rangle$  est isomorphe à la représentation  $R'$  définie par (4.3.2). Comme  $\langle K \cdot \Pi(M_2'') \rangle$  est un quotient de  $\text{Ind}_I^K E_1(\chi_4^s)$  vérifiant (a) et (b) du lemme 4.22, on en déduit que  $\langle K \cdot \Pi(M_2'') \rangle \cong I(\sigma_1, \sigma_4^{[s]})$ , et donc que

$$(4.3.3) \quad \langle K \cdot X \rangle \cap \langle K \cdot \Pi(M_2'') \rangle \subseteq \sigma_1$$

puisque  $\text{Ext}_K^1(\sigma_4, \sigma_4^{[s]}) = 0$ .

Le lemme se déduit de ce qui précède en posant  $V_2 = \langle K \cdot X \rangle$  si (4.3.3) est une égalité et  $V_2 = \langle K \cdot X \rangle \oplus \sigma_1$  sinon.  $\square$

### 4.3.3 Conclusion

Rappelons que l'on a défini deux sous-espaces  $M_1$  et  $M_2$  de  $\pi$ . Posons  $M := M_1 + M_2 + D_1(\rho)$ , alors les définitions des  $M_i$  et le lemme 4.3 impliquent que  $M$  est spéciale. Considérons le diagramme (4.1.1) pour  $M$  : on voit que  $\ker_2 / \ker_1$  contient  $\sigma_3$  comme sous-quotient. Soit  $v_1 \in M_1$  un vecteur propre non nul de  $\mathcal{H}$  de caractère  $\chi_3$ . Alors on vérifie que  $v_1$  satisfait à la condition (S3). D'après le théorème 4.9, on obtient donc une famille de représentations supersingulières  $\pi_a$  ( $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ ) de  $G$  non-isomorphes telles que  $\text{soc}_K \pi_a = \bigoplus_{i=1}^4 \sigma_i$  et

$$(D_0(\rho), D_1(\rho), r) \hookrightarrow (\pi_a^{K_1}, \pi_a^{I_1}, \text{can}).$$

De plus, on a

**Théorème 4.24.** *Il existe une représentation  $\pi = \pi(\rho, r)$  associée à  $D(\rho, r)$  telle que  $\pi^{K_1} \supsetneq D_0(\rho)$ . En fait,  $\pi$  contient l'extension non triviale*

$$0 \rightarrow \sigma_3 \rightarrow * \rightarrow \sigma_4 \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* Soit  $\pi$  une représentation quelconque associée à  $D(\rho, r)$ . Supposons que  $\pi$  ne contient pas  $I(\sigma_3, \sigma_4)$ . On va construire une autre représentation supersingulière de  $G$  vérifiant la condition demandée.

Par la preuve du lemme 4.19, il existe  $F_1 \in V_1$  et  $F_2 \in V_2$  des vecteurs propres de  $\mathcal{H}$  de caractère  $\chi_3$  qui engendrent l'espace sous-jacent de  $R'$ . De plus, on peut supposer  $F_1 - F_2 \in \overline{\mathbb{F}}_p e_3$  dans  $\pi$ .

Soit maintenant  $\pi \hookrightarrow \Omega$  une injection  $G$ -équivariante avec  $\Omega \in S$ . En choisissant

– un endomorphisme de  $\Omega$  qui se factorise par

$$\Omega \rightarrow \Omega/\Sigma(M) \rightarrow \Omega, \quad v_1 \mapsto \Pi(e_3^{[s]})$$

où  $\Sigma(M)$  est défini dans la condition (S3) relatif à  $v_1 \in M_1$

– une constante  $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$  telle que

$$(4.3.4) \quad F_1 - F_2 + a \sum_{\lambda \in \overline{\mathbb{F}}_q} \begin{pmatrix} [\lambda] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Pi(e_3^{[s]}) \neq 0,$$

on obtient une représentation  $(\Omega, \Pi_{\phi, a})$  de  $G$ , puis une sous-représentation supersingulière  $\pi_{\phi, a}$  qui est engendrée par  $D_1(\rho)$ . Par (4.3.4), la sous- $K$ -représentation  $\langle K \cdot \Pi_{\phi, a}(M) \rangle \subset \pi_{\phi, a}$  contient l'extension

$$0 \rightarrow \sigma_3 \rightarrow * \rightarrow \sigma_4 \rightarrow 0.$$

□

## Bibliographie

- [Al] J.L. Alperin, *Local representation theory*, Cambridge studies in advanced mathematics 11, 1986.
- [AJL] H. Andresen & J. Jorhensen & P. Landrock, *The projective indecomposable modules of  $SL(2, p^n)$* , Proc. London Math. Soc. 46 (1983), 38-52.
- [BL1] L. Barthel & R. Livné, *Modular representations of  $GL_2$  of a local field : unramified case*, J. of Number Theory 55 (1995), 1-27.
- [BL2] L. Barthel & R. Livné, *Irreducible modular representations of  $GL_2$  of a local field*, Duke Math. J. 75 (1994), 261-292.
- [Br1] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  : I*, Compositio Math. 138 (2003), 165-188.
- [Br2] C. Breuil, *Representations of Galois and of  $GL_2$  in characteristic  $p$* , Cours à l'Université Columbia, 2007.
- [BP] C. Breuil & V. Paskunas, *Towards a modulo  $p$  Langlands correspondence for  $GL_2$* , prépublication, 2007.

- [BDJ] K. Buzzard, F. Diamond & F. Jarvis, *On Serre's conjecture for mod  $\ell$  Galois representations over totally real fields*, prépublication, 2005.
- [Co] P. Colmez, *Représentations de  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$  et  $(\varphi, \Gamma)$ -modules*, prépublication, 2008.
- [Di] F. Diamond, *A correspondence between representations of local Galois groups and Lie-type groups*, *L-functions and Galois representations*, LMS Lectures Notes 320, Cambridge University Press (2007), 187-206.
- [Je] A.V. Jeyakumar, *Principal indecomposable representations for the group  $SL(2, q)$* , *J. Algebra* 30 (1974), 444-458.
- [Ol] R. Ollivier, *Le foncteur des invariants sous l'action du pro- $p$ -Iwahori de  $GL_2(F)$* , prépublication, 2006.
- [Pa1] V. Paskunas, *Coefficient systems and supersingular representations of  $GL_2(F)$* , *Mém. Soc. Math. de France* 99, 2004.
- [Pa2] V. Paskunas, *Extensions for supersingular representations of  $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , prépublication, 2007.
- [Pa3] V. Paskunas, *On the restriction of representations of  $GL_2(F)$  to a Borel subgroup*, *Compositio Math.* 143 (2007), 1533-1544.
- [Pa4] V. Paskunas, *Admissible unitary completions of locally  $\mathbb{Q}_p$ -rational representations of  $GL_2(F)$* , prépublication, 2008.
- [Se1] J.-P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, *Invent. Math.* 15 (1972), 259-331.
- [Se2] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames,  $SL_2$* , *Astérisque* 46, Soc. Math. de France, 1983.
- [Se3] J.-P. Serre, *Corps locaux*, 3<sup>ième</sup> édition, Hermann, 1968.
- [Se4] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, *Lecture Notes in Mathematics* 5, Springer, 1997.
- [Vi] M.-F. Vignéras, *Admissibilité des représentations  $p$ -adiques et lemme de Nakayama*, Prépublication, 2007.