BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 119-127

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__119_1>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 1er JUILLET 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. D. André expose une démonstration nouvelle du théorème suivant, donné autrefois par lui : *Parmi les permutations de n nombres distincts, n étant égal ou supérieur à quatre, le nombre de celles qui présentent un nombre pair de séquences est égal au nombre de celles qui en présentent un nombre impair.*

M. Laisant : *Généralisation d'une transformation qui intervient dans un problème récemment proposé.*

M. d'Ocagne présente quelques observations sur le même sujet.

M. Beghin : *Sur une question d'Arithmétique à laquelle donne lieu l'étude des points isolés d'une fonction à espaces lacunaires.*

M. Laisant présente une observation sur le même sujet.

SÉANCE DU 15 JUILLET 1891.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Lemoine : *Sur une transformation relative à la géométrie du triangle.*

M. Raffy : *Sur la déformation de certaines surfaces de révolution.*

M. Bioche fait la Communication suivante :

Sur une classe de surfaces gauches.

Il peut arriver, comme je l'ai fait remarquer dans une Communication verbale à la Société, que les lignes asymptotiques d'une surface réglée se transforment les unes dans les autres par homographie. Je me suis proposé de déterminer parmi les surfaces réglées, dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire, celles qui possèdent la propriété énoncée. Voici les résultats auxquels je suis parvenu.

On peut reconnaître par de simples considérations géométriques que les génératrices de ces surfaces rencontrent au moins une droite. Ces surfaces se déduisent donc par homographie des surfaces à plan directeur.

Si l'on suppose les points homologues situés sur une même génératrice, la condition nécessaire et suffisante est que les tangentes d'une asymptotique quelconque appartiennent à un complexe linéaire. Les génératrices de la surface font alors partie d'une congruence linéaire. Les surfaces répondant aux conditions proposées sont donc les transformées homographiques des conoïdes, ou des surfaces dont l'équation générale peut s'écrire

$$ay = xz + F(z).$$

Ces dernières sont les surfaces dont les génératrices font partie d'une congruence singulière ayant pour directrice la droite à l'infini du plan $z = 0$.

Si l'on ne suppose pas les points homologues situés sur une même génératrice, on trouve d'autres surfaces qui se déduisent par homographie de la surface à plan directeur représentée par les équations

$$y \cos\omega - x \sin\omega = ae^{m\omega}, \qquad z = be^{p\omega}.$$

SÉANCE DU 4 NOVEMBRE 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Fouret : *Sur les transformations homographiques qui laissent inaltérée une congruence linéaire.*

M. Raffy : *Sur des déformations imaginaires de certaines surfaces.*

M. Laisant fait la Communication suivante :

Note sur l'interpolation successive.

L'inconvénient des formules classiques d'interpolation, au point de vue des applications pratiques, réside dans la longueur des calculs qu'elles exigent, et dont quelques-uns sont parfois inutiles. Le but de cette Note est d'indiquer un procédé, plutôt qu'une formule nouvelle, qui permet, nous semble-t-il, d'abréger considérablement les opérations.

Supposons qu'une fonction d'une seule variable indépendante y, représentant, par exemple, un phénomène physique dont on se propose de trouver la loi, ait été déterminée pour n valeurs, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de cette variable, et qu'elle prenne respectivement les valeurs correspondantes

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n.$$

Si, par l'une quelconque des méthodes et formules connues, on a obtenu une fonction u de x qui satisfait aux conditions ci-dessus, la loi cherchée est convenablement indiquée par la relation

$$(1) \qquad y = u,$$

dans la limite des observations enregistrées.

La formule

$$y = u + (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)f(x),$$

et plus particulièrement

$$(2) \qquad y = u + k(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

satisfera également aux conditions énumérées.

Soit maintenant qu'une observation ou une expérience nouvelle nous apprenne que, pour une nouvelle valeur x_{n+1} de la variable, la fonction doit prendre la valeur y_{n+1}. La formule (1), si l'on y remplaçait x par x_{n+1}, donnerait pour y une valeur u_{n+1} généralement différente. Donc, en écrivant la formule (2) après cette substitution, nous aurons

$$y_{n+1} = u_{n+1} + k(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\dots(x_{n+1} - x_n),$$

relation qui nous déterminera le coefficient k :

$$(3) \qquad k = \frac{y_{n+1} - u_{n+1}}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\dots(x_{n+1} - x_n)}.$$

Cette détermination de k nous permet donc de passer de la formule (1) à la formule (2). On remarquera que le numérateur de k est la différence entre la valeur *observée* de la fonction, et sa valeur *calculée* par la formule (1).

En faisant tout d'abord $n = 2$, auquel cas la loi cherchée est représentée suffisamment par une relation linéaire, ou graphiquement par une droite, on voit qu'on pourra calculer de proche en proche des formules successives qui permettront de *serrer*, pour ainsi dire, de plus en plus près, le phénomène dont on veut représenter analytiquement la loi.

Dans le cas particulier remarquable où les valeurs de la variable se succèdent en progression arithmétique de raison h, comme dans la formule classique de Newton, on voit que la relation (3) devient

$$k = \frac{y_{n+1} - u_{n+1}}{n!\, h^n}.$$

Si la différence $y_{n+1} - u_{n+1}$, entre les valeurs observées et calculées, devient tellement faible que la valeur qui s'ensuivra pour

$$k(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n),$$

dans les limites intéressantes au point de vue du phénomène, soit inférieure aux erreurs physiques inévitables, on pourra supprimer ce terme, et la formule (1) conviendra alors à la représentation de la loi, même avec une observation de plus.

Comme exemple très simple, soit qu'aux temps 0, 1, 2, 3, 4 un mobile ait parcouru les espaces 7, 8, 11, 16, 23, successivement. D'après les deux premières observations, la loi du mouvement est représentée par $y = 7 + t$. Écrivons

$$y = 7 + t + kt(t-1),$$

et remplaçons y par 11, t par 2. Alors $2 = k.2.1$, d'où $k = 1$ et $y = 7 + t^2$. Nous aurons alors

$$y = 7 + t^2 + k't(t-1)(t-2);$$

en remplaçant y par 16, t par 3, il s'ensuit $k' = 0$. Enfin écrivons

$$y = 7 + t^2 + k''t(t-1)(t-2)(t-3);$$

les valeurs $y = 23$, $t = 4$ donnent $k'' = 0$. Par conséquent le mouvement observé est complètement représenté par la formule $y = 7 + t^2$.

M. d'Ocagne en présentant son livre intitulé : *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques* (¹), où il expose une théorie générale de la construction des Tableaux graphiques de calculs tout faits ou *abaques*, indique les particularités au point de vue mathématique de cet Ouvrage, écrit avant tout dans un but technique. Il croit pouvoir, notamment, signaler l'emploi, fait en vue d'un objet absolument *pratique*, des principes de *dualité* et d'*homographie* dont l'usage semblait jusqu'ici réservé aux recherches purement spéculatives.

Le premier de ces principes lui a permis de substituer, pour les équations qu'il appelle *à triple réglure*, aux abaques à *droites isoplèthes* des abaques à *points isoplèthes* qui, tout en étant aussi simples de construction, moyennant l'emploi des *coordonnées parallèles*, sont d'une lecture bien plus facile et se prêtent bien mieux aux interpolations à vue. Ils ont encore l'avantage, que ne présentent point les précédents, de permettre, dans certains cas, l'introduction de une, deux et trois nouvelles variables. On conçoit, en effet, qu'on puisse, au moyen d'un nouveau paramètre, faire varier l'un des systèmes de points isoplèthes en le représentant dans chacune de ses nouvelles positions. Pareille opération serait impossible avec les systèmes de droites isoplèthes, car la superposition sur une même feuille de ces divers systèmes produirait un enchevêtrement non seulement inextricable à l'œil, mais même matériellement irréalisable.

(¹) Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891.

Quant au principe d'homographie, il intervient utilement pour permettre de substituer à un abaque primitivement construit, où certaines courbes sont trop rapprochées ou coupées par certaines droites sous un angle trop petit, un autre abaque ne présentant pas ces inconvénients

---

SÉANCE DU 18 NOVEMBRE 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Lemoine : *Sur la transformation continue.*

M. Fouret : *Sur les points singuliers des équations différentielles à deux variables, du premier ordre et du premier degré.*

M. Humbert : *Sur la surface desmique du quatrième ordre.*

M. Catalan adresse cinq Notes *Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique.*

M. Bioche fait la Communication suivante :

Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe et coupent sous un angle constant la développable des tangentes.

On sait que, si l'on considère les développables qui coupent sous un angle constant la développable des tangentes d'une courbe c, le lieu des génératrices de ces développables qui passent par un point de c est un cône du deuxième degré. Ce cône a pour plan principal le plan rectifiant; pour génératrices principales, la tangente et la droite rectifiante; les sections circulaires sont perpendiculaires à ces droites.

Pour qu'une droite liée invariablement au trièdre d'une courbe engendre une développable, il faut et il suffit que le cône, dont je viens de parler, soit de grandeur constante et que la droite soit sur ce cône. Si ces conditions sont réalisées, la courbe c est une hélice.

On peut généraliser ces résultats en considérant, au lieu des développables, des surfaces réglées qui auraient, tout le long de la courbe c, une courbure totale dont la valeur ne dépendrait que des coordonnées du pied de chaque génératrice sur la courbe. Les développables correspondent au cas où cette courbure serait constamment nulle. Dans le cas plus général dont je viens de parler, on trouve les résultats suivants.

Le lieu des génératrices qui passent par un point de c et qui correspondent à des surfaces ayant en ce point même courbure totale se compose de deux cônes du deuxième degré Γ, Γ'. Ces cônes ont tous deux pour plan principal le plan rectifiant; ils contiennent tous deux la tangente à la courbe c, et les plans perpendiculaires à c les coupent l'un et l'autre suivant des cercles.

Les autres génératrices, situées dans le plan rectifiant, forment, avec la tangente et la droite rectifiante, un faisceau harmonique. Plus généralement : tout plan passant par la tangente coupe le cône des développables et les cônes Γ, Γ', suivant des droites qui constituent, avec la tangente, un faisceau harmonique.

Si la valeur absolue de la courbure est égale au carré de la torsion, l'un des deux cônes, Γ ou Γ', se réduit à un système de deux plans : le plan osculateur et le plan normal.

Pour qu'une droite, liée invariablement au trièdre, engendre une surface réglée, pour laquelle la courbure totale soit constante le long de la courbe c, il faut et il suffit qu'un des cônes soit de grandeur constante, et que la droite soit située sur ce cône. Si ces conditions sont réalisées, la courbe c est une courbe de M. Bertrand. La génératrice principale du cône, autre que la tangente, est la génératrice de la surface réglée qui admet c comme ligne de striction et qui est applicable sur un hyperboloïde de révolution; elle est parallèle à la binormale de la courbe conjuguée.

Si la courbe c est à torsion constante, le cône se réduit à deux plans.

Si la courbe c est à courbure constante, le cône se réduit à la tangente à cette courbe.

M. P. Appell adresse la Note suivante :

Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières.

M. Fuchs a obtenu, par l'inversion des intégrales de certaines équations différentielles linéaires, des fonctions de deux variables indépendantes x et y qui ne changent pas de valeur quand on remplace x et y par $ax+by+c$ et $a'x+b'y+c'$, a, b, c, a', b', c' désignant des constantes déterminées. Nous nous proposons de former directement, à l'aide de séries ou de produits infinis, des fonctions de cette nature n'ayant pas de singularités essentielles à distance finie : ces fonctions se rattachent aussi aux fonctions hyperfuchsiennes de M. Picard.

1. Pour donner d'abord un exemple élémentaire, formons, avec des fonctions θ, une fonction méromorphe $f_n(x)$, doublement périodique de troisième espèce, vérifiant les deux relations

$$f_n(x+2\pi i)=f_n(x), \qquad f_n(x+2a)=e^{-nx}f_n(x),$$

où a désigne une constante et n un entier positif, négatif ou nul. Si l'on considère la somme

$$\varphi(x,y)=\sum \mathrm{A}_n e^{ny} f_n(x),$$

étendue à différentes valeurs de n, les lettres A_n désignant des constantes, cette somme définit une fonction $\varphi(x,y)$ vérifiant les relations

$$(1) \quad \varphi(x+2\pi i, y)=\varphi(x, y+2\pi i)=\varphi(x+2a, y+x)=\varphi(x,y).$$

La fonction φ admet donc un groupe de substitutions linéaires entières.

2. Les fonctions précédentes sont des polynômes en e^y et e^{-y}; voici des fonctions transcendantes en e^y vérifiant les mêmes relations (1). Soit a une constante dont la partie réelle est négative; posons

$$t_n=e^{an^2+(x-a)n+y}, \qquad \theta_n=e^{x+2na},$$

et désignons par $\mathrm{R}(t,\theta)$ une fonction rationnelle de t et θ, finie pour $t=0$. Les expressions

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} t_n \mathrm{R}(t_n,\theta_n),$$

$$\varphi(x,y)=\prod_{n=-\infty}^{n=+\infty}[1-t_n\mathrm{R}(t_n,\theta_n)]$$

définissent des fonctions vérifiant les relations (1). En effet, le changement de x en $x + 2a$ et de y en $y + x$ change t_n en t_{n+1} et θ_n en θ_{n+1}. Quand $R(t, \theta)$ est un polynôme en t multiplié par une fonction rationnelle de θ, la première des expressions ci-dessus donne les fonctions du n° 1.

3. Nous terminerons en rattachant au même point de vue des fonctions de trois variables, dont nous avons indiqué la formation dans une Note insérée dans les *Annales de la Faculté de Marseille,* 1891 ([1]). Si l'on considère la fonction entière de x, y, z,

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{an^4 + 4xn^3 + 6yn^2 + 4zn},$$

et si l'on forme les fonctions

$$F(x, y, z) = \prod_{\nu=1}^{\nu=k} \frac{\varphi(x, y, z + \gamma_\nu)}{\varphi(x, y, z + \gamma'_\nu)},$$

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=k} \frac{A_\nu \, d \log \varphi(x, y, z + \gamma_\nu)}{dz},$$

où les constantes A_ν ont une somme *nulle,* ainsi que les constantes $\gamma_\nu - \gamma'_\nu$, ces fonctions vérifient les relations

$$F\left(x + \frac{\pi i}{2}, y, z\right) = F\left(x, y + \frac{\pi i}{3}, z\right) = F\left(x, y, z + \frac{\pi i}{2}\right)$$
$$= F(x + a, y + 2x + a, z + 3x + 3y + a) = F(x, y, z).$$

Elles admettent donc un groupe de substitutions linéaires entières.

([1]) Dans cette Note les constantes $\alpha_\nu, \alpha'_\nu, \beta_\nu, \beta'_\nu$ doivent être supposées nulles.