SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 24-39
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__24_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 NOVEMBRE 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Le diplôme et la médaille d'or obtenus par la Société à l'Exposition universelle de 1889 sont déposés sur le bureau.

Démissions : MM. Hermary, Pucciarelli et Rey adressent leurs démissions de membres de la Société.

Communications :

M. Fouret : *Sur les normales aux hyperboles équilatères.*

M. Laisant : *Sur une généralisation d'un théorème de Laguerre.*

M. Humbert : *Sur une surface remarquable du quatrième ordre.*

SÉANCE DU 19 NOVEMBRE 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Communications :

M. Vicaire : *Sur un mouvement pendulaire troublé.*

M. Fouret : *Sur un théorème relatif au centre de gravité des pieds des droites faisant avec une courbe algébrique un angle donné et menées par un point fixe.*

M. d'Ocagne : *Démonstration élémentaire du théorème de Malus sur les rayons réfléchis par une surface.*

SÉANCE DU 3 DÉCEMBRE 1890.

PRÉSIDENCE DE M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

Élections : M. Colot, présenté par MM. Javary et Marie ; M. Genty, présenté par MM. Laisant et Haton de la Goupillière; M. Vaschy, présenté par MM. Sarrau et Poincaré, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. Fouret : *Sur le nombre des points brillants d'une surface éclairée par des rayons issus d'un point.*

M. Humbert : *Sur les normales à une quadrique et sur la surface lieu des centres de courbure.*

M. Humbert : *Sur la surface de Kummer.*

M. Laisant : *Sur deux problèmes relatifs au mouvement de deux points.*

SÉANCE DU 17 DÉCEMBRE 1890.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

M. le Ministre de l'Instruction publique annonce qu'une somme de mille francs est mise à la disposition de la Société pour la publication du *Répertoire bibliographique.*

Élections : M. Antomari, présenté par MM. André et Carvallo; M. Massieu, présenté par MM. Haton de la Goupillière et Vicaire, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. Humbert : *Sur une famille de quadriques faisant partie d'un système triple orthogonal.*

M. Lemoine : *Sur quelques formules de la géométrie du triangle.*

M. Kœnigs : *Sur certaines surfaces admettant pour lignes asymptotiques une série de cubiques gauches.*

M. d'Ocagne : *Sur une propriété des courbes algébriques.*

SÉANCE DU 7 JANVIER 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

La Société procède au renouvellement de son Bureau.

Communications :

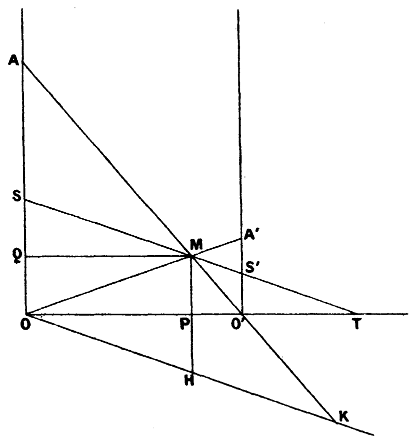
M. Vicaire : *Sur les oscillations troublées d'un système matériel autour d'une position d'équilibre.*

M. d'Ocagne fait la Communication suivante :

Sur la liaison entre les expressions du rayon de courbure en coordonnées ponctuelles et en coordonnées tangentielles.

Rappelons que si M est un point d'une courbe, ST la tangente

Fig. 1.



en ce point, les coordonnées rectangulaires (cartésiennes) du point M sont

$$OP = x, \qquad OQ = y;$$

celles (pluckériennes) de la tangente ST sont

$$-\frac{1}{OT} = \eta, \qquad -\frac{1}{OS} = \zeta.$$

Les coordonnées parallèles de la tangente ST sont

$$OS = u, \qquad O'S' = v;$$

celles du point M sont

$$-\frac{1}{OA}=p,\qquad -\frac{1}{O'A'}=q.$$

Les formules qui, dans chaque système, lient les unès aux autres ces diverses coordonnées peuvent se résumer en une seule,

$$\omega=\frac{d\alpha}{\alpha\,d\beta-\beta\,d\alpha},\tag{1}$$

complétée par le Tableau ci-dessous, qui fait connaître les valeurs correspondantes de ω, α et β :

Valeurs de ω......	x,	y,	η,	ζ,	u,	v,	p,	q,
» α......	ζ,	η,	y,	x,	q,	p,	v,	u,
» β......	η,	ζ,	x,	y,	p,	q,	u,	v.

Cela posé, on a

$$\frac{d\zeta}{d\eta}=\frac{d\zeta}{dx}\frac{dx}{d\eta}.\tag{2}$$

Mais, au moyen des diverses formes de (1), on trouve facilement

$$\frac{d\zeta}{d\eta}=-\frac{x}{y},$$

$$\frac{d\zeta}{dx}=\frac{-x\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)^2}=-x\zeta^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\frac{dx}{d\eta}=\frac{\zeta\dfrac{d^2\zeta}{d\eta^2}}{\left(\zeta-\eta\dfrac{d\zeta}{d\eta}\right)^2}=\zeta y^2\frac{d^2\zeta}{d\eta^2}.$$

Portant ces diverses expressions dans la formule (2), nous avons, toute réduction faite,

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2\zeta}{d\eta^2}=\frac{1}{y^3\zeta^3}\tag{3}$$

et de même

$$\frac{d^2v}{du^2}\frac{d^2q}{dp^2}=\frac{1}{v^3q^3}.\tag{3 bis}$$

Cette remarquable formule permet de passer de l'expression du rayon de courbure en coordonnées ponctuelles à son expression en coordonnées tangentielles et réciproquement.

Menons par le point O la parallèle OH à ST. L'expression du rayon de courbure en coordonnées cartésiennes peut s'écrire

(I) $$R = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{\overline{OH}^3}{\overline{OP}^3}.$$

Tirant de là $\frac{d^2y}{dx^2}$ et portant dans (3), nous avons, après une transformation facile, pour le rayon de courbure en coordonnées pluckériennes,

(II) $$R = \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} \frac{\overline{MT}^3}{\overline{OT}^3},$$

formule que nous croyons nouvelle.

De même, en posant $OO' = \delta$, nous avons obtenu ailleurs l'expression suivante pour le rayon de courbure en coordonnées parallèles tangentielles

(III) $$R = \frac{d^2v}{du^2} \frac{\overline{SM}^3}{\delta}.$$

Dès lors, la formule (3 *bis*) donne, pour le rayon de courbure en coordonnées parallèles ponctuelles,

(IV) $$R = \frac{1}{\frac{d^2q}{dp^2}} \frac{\overline{AK}^3}{\delta},$$

formule également nouvelle dont nous avons communiqué une démonstration géométrique directe à l'Académie de Belgique.

En suivant un procédé de démonstration que nous avons récemment indiqué (*Nouv. Ann. de Math*, p. 445; 1890), on obtient, soit au moyen de la formule (I), soit au moyen de (IV), le théorème de Reiss :

Si une droite quelconque coupe une courbe algébrique d'ordre m sous les angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *en des points où les rayons de courbure sont* $R_1, R_2, \ldots, R_m$, *on a*

$$\frac{1}{R_1 \sin^3\alpha_1} + \frac{1}{R_2 \sin^3\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{R_m \sin^3\alpha_m} = 0.$$

De même, l'une ou l'autre des formules (II) ou (III) conduit au théorème suivant que nous avons énoncé pour la première fois (*loc. cit.*, p. 448) :

Si les tangentes menées d'un point quelconque à une courbe algébrique de la classe n ont pour longueurs $t_1, t_2, \ldots, t_n$, *et si* $R_1, R_2, \ldots, R_n$ *sont les rayons de courbure aux points de contact, on a*

$$\frac{R_1}{t_1^3}+\frac{R_2}{t_2^3}+\ldots+\frac{R_n}{t_n^3}=0.$$

SÉANCE DU 21 JANVIER 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communication :

M. Humbert fait une Communication *sur les surfaces algébriques inscrites dans la surface de Kummer*. Il montre que cette surface admet 32 systèmes de surfaces cubiques inscrites et 31 systèmes de surfaces de quatrième degré inscrites.

SÉANCE DU 4 FÉVRIER 1891.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

M. Laisant fait la Communication suivante :

Sur l'extension de la Géométrie cartésienne aux figures imaginaires.

Parmi les travaux ayant pour but d'étendre aux imaginaires les conceptions de la Géométrie analytique de Descartes, il convient de citer ceux de MM. Mouchot, entrepris depuis bien des années déjà, et Tarry, qui a publié plusieurs Mémoires sur ce sujet dans les comptes rendus de l'*Association française pour l'avancement des Sciences*. Laguerre et M. Marie, à un point de vue plus analytique, s'étaient jadis occupés de la même question.

Le principe fondamental de cette nouvelle *Géométrie générale*, pour employer l'expression de M. Tarry, est la conception du *point double* (M, M′) formé par le *couple* des deux points ordinaires M, M′ pris dans un ordre déterminé; M et M′ sont dits les *composantes positive* et *négative* du point (M, M′), qui devient *réel* quand les deux composantes coïncident.

J'avais essayé, de mon côté, d'étendre aux imaginaires la notion des coordonnées cartésiennes par la construction du point M donné par l'équipollence $\mathrm{M} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}\varepsilon^{\theta}$, θ étant l'angle des axes coordonnés, et X, Y les deux coordonnées imaginaires. Mais cette conception se trouvait incomplète et défectueuse, faute de la notion du point double, car un même point pouvait avoir une infinité de coordonnées différentes.

Si, au contraire, nous considérons les deux points M, M′ définis par les équipollences

$$\mathrm{M} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}\varepsilon^{\theta}, \qquad \mathrm{M}' = \mathrm{cj}\,\mathrm{X} + \mathrm{cj}\,\mathrm{Y}.\varepsilon^{\theta},$$

il est facile de constater, soit géométriquement, soit par le calcul, que le point (M, M′) est déterminé par ses coordonnées, et réciproquement les détermine.

Les deux relations ci-dessus peuvent s'exprimer par la formule unique

$$(\mathrm{M}, \mathrm{M}') = (\mathrm{X}, \mathrm{cj}\,\mathrm{X}) + (\mathrm{Y}, \mathrm{cj}\,\mathrm{Y})\varepsilon^{\theta},$$

équipollence *double*, qui les englobe toutes deux en une seule.

On démontre que les formules ordinaires de transformation de coordonnées s'appliquent identiquement aux points doubles de la Géométrie générale à deux dimensions, ce qui permet de généraliser d'une façon considérable les résultats de la Géométrie ordinaire.

Du même coup, on arrive à donner en quelque sorte une réalité objective et une absolue clarté à des notions de Géométrie imaginaire un peu obscures avec le langage habituel. Il est possible, sur ces données, d'établir un lien de plus entre l'Analyse et la Géométrie par le calcul des équipollences. Il est juste d'ajouter que Bellavitis avait entrevu cette notion du point double dans ses considérations sur les *points fictifs* des courbes.

M. Béghin fait la Communication suivante :

Sur l'impossibilité d'une fonction d'une seule variable à plus de deux périodes.

Il suffit de faire voir que le module de $Aa + Bb - Cc$ peut être rendu aussi petit qu'on veut, A, B, C désignant trois périodes et a, b, c trois nombres entiers. Soit $C = \lambda A + \mu B$, où l'on peut supposer λ et μ positifs.

On aura

$$\pm\left(\lambda - \frac{a}{c}\right) < \frac{\varepsilon}{c},$$

$$\pm\left(\mu - \frac{b}{c}\right) < \frac{\varepsilon}{c},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{10^p}.$$

Nous partageons la partie décimale de chacun des nombres λ et μ en tranches de p chiffres; toutes ces tranches ne pouvant être distinctes, on peut trouver deux entiers α et β tels que, dans chacun des deux nombres, la tranche d'ordre α soit identique à celle d'ordre $\alpha + \beta$. On choisit pour $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$ les fractions décimales x et y, qui ont respectivement pour périodes les nombres formés, dans λ et μ, par les chiffres situés depuis le commencement de la tranche α jusqu'au commencement de la tranche d'ordre $\alpha + \beta$, les chiffres situés à gauche de la tranche d'ordre α étant les mêmes; on aura, N et N' étant entiers,

$$x = \frac{N}{10^{p\alpha} - 10^{p(\alpha-1)}}, \qquad y = \frac{N'}{10^{p\alpha} - 10^{p(\alpha-1)}},$$

$$\pm(\lambda - x) < \frac{1}{10^{p(\alpha+\beta)}} < \frac{1}{10^p(10^{p\alpha} - 10^{p(\alpha-1)})}.$$

On voit que cette démonstration ne repose que sur des considérations tout à fait élémentaires.

M. d'Ocagne fait la Communication suivante :

Sur une détermination particulière du centre de courbure des lignes planes. Application aux courbes algébriques d'ordre quelconque.

Si l'on pose $P = x^2 + y^2$, on trouve facilement, pour l'expression de l'abscisse ON $= n$ du pied de la normale correspondant au point M,

(1)
$$n = \frac{1}{2}\frac{dP}{dx};$$

par suite,

$$\frac{dn}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dx^2}.$$

Mais, si ds est la différentielle de l'arc au point M, on a, en appelant Ω le centre de courbure correspondant et θ l'angle de la normale avec l'axe des x,

$$\frac{dn}{ds} = \frac{\Omega N}{\sin\theta}\frac{1}{\Omega M}, \qquad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\sin\theta};$$

donc

(2)
$$\frac{1}{2}\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{\Omega N}{\Omega M}\frac{1}{\sin^2\theta}.$$

Cette formule fait connaître le centre de courbure lorsque la courbe est définie par son équation en P et en x. Remarquons en passant qu'une telle équation représente, en même temps que la courbe, sa symétrique par rapport à l'axe des x.

Prenons, par exemple, la conique représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette équation peut s'écrire

$$P = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 1.$$

La formule (2) donne donc, dans ce cas,

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{\Omega N}{\Omega M}\frac{1}{\sin^2\theta},$$

d'où se déduit la construction du centre de courbure due à M. Mannheim.

Prenons une courbe algébrique quelconque, d'ordre m; son équation peut s'écrire

(3)
$$y^m + X_1 y^{m-1} + X_2 y^{m-2} + \ldots + X_m = 0,$$

où

$$X_k = a_k x^k + b_k x^{k-1} + \ldots + l_k.$$

Gardant dans le premier membre tous les termes d'une même parité, faisant passer dans le second tous ceux de la parité contraire, élevant au carré, puis réunissant de nouveau tous les termes dans un même membre et réduisant, nous avons

$$y^{2m} + y^{2m-2}(2X_2 - X_1^2) + y^{2m-4}(X_2^2 - 2X_1X_3 + 2X_4) + \ldots = 0$$

ou

$$(4) \qquad P^m + P^{m-1}(-mx^2 + 2X_2 - X_1^2) + \ldots = 0.$$

Il faut remarquer que cette dernière équation représente à la fois la courbe C proposée et sa symétrique C' par rapport à l'axe des x, car à chaque valeur de P correspondent deux points symétriques par rapport à cet axe.

Si nous donnons à x une certaine valeur, nous avons

$$\sum_{i=1}^{i=m} P_i = mx^2 - 2X_2 + X_1^2;$$

par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{d^2P_i}{dx^2} = 2(m - X_2'' + X_1'^2 + X_1X_1'') = 2(m - 2a_2 + a_1^2),$$

ou, d'après (2),

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\Omega_i N_i}{\Omega_i M_i} \frac{1}{\sin^2\theta_i} = m - 2a_2 + a_1^2.$$

Or, si nous remplaçons la courbe par le système de ses m asymptotes, a_1 et a_2 restent les mêmes; les rapports $\frac{\Omega_i N_i}{\Omega_i M_i}$ tendent vers l'unité. Appelant donc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les angles des asymptotes avec l'axe des y, on a

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{\sin^2\alpha_i} = m - 2a_2 + a_1^2.$$

De là ce théorème :

Si une droite quelconque coupe une courbe algébrique d'ordre m aux points $M_1, M_2, \ldots, M_m$, *sous les angles* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, *et ses m asymptotes sous les angles* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; *si une perpendiculaire quelconque à la première droite rencontre les* *normales correspondantes aux points* $N_1, N_2, \ldots, N_m$, *et si* Ω_1, $\Omega_2, \ldots \Omega_m$ *sont les centres de courbure correspondants, on a*

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{\Omega_i N_i}{\Omega_i M_i} \frac{1}{\sin^2\theta_i} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{\sin^2\alpha_i}.$$

Si la courbe considérée est *isotropique,* le second membre de cette formule est nul, et l'on retombe sur une propriété que j'ai déjà obtenue d'une autre façon (*Journ. de Math. sp.*, p. 126, th. VI; 1887).

SÉANCE DU 18 FÉVRIER 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Raffy fait la Communication suivante :

Détermination de toutes les surfaces moulures applicables sur des surfaces de révolution.

D'après un théorème de M. Massieu, pour qu'une surface soit applicable sur une surface de révolution, il faut et il suffit que l'équation aux géodésiques de cette surface admette une intégrale linéaire et homogène (voir Darboux, *Théorie des surfaces,* t. III, p. 29). Appliquant ce principe aux moulures dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = du^2 + (U - V)^2 dv^2,$$

on trouve qu'il doit exister une fonction C de u et de v et une fonction W' de v seulement, vérifiant le système

$$W'U' + \frac{\partial}{\partial v} C(U - V) = 0, \tag{1}$$

$$W'' + (U - V)^2 C'_u = 0. \tag{2}$$

Avant de résoudre ce système, nous remarquerons qu'on ne peut supposer $W' = 0$; car alors il vient, U_0 étant une fonction inconnue de u,

$$C = \frac{U_0}{U - V}, \qquad C'_u = 0.$$

Si $U_0 = 0$, l'intégrale linéaire disparaît, puisque ses deux coefficients W' et C sont nuls. Si $U_0 \neq 0$, la fonction C ne saurait être indépendante de U que si U_0 et par suite U sont constants, auquel cas la moulure est une développable, ou si V est constant, auquel cas elle dégénère en une surface de révolution.

Cela posé, l'équation (1) intégrée par rapport à v donne

$$C = \frac{U_0 - WU'}{U - V},$$

et l'équation (2) devient, par substitution de C,

$$(3) \qquad W'' + UU'_0 - U_0 U' + VWU'' - VU'_0 + W(U'^2 - UU'') = 0.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de résoudre. Égalons à zéro sa dérivée seconde prise par rapport à u et à v, et divisons par la dérivée V' qui n'est pas nulle; nous trouvons

$$(4) \qquad \frac{(VW)'}{V'} U''' + \frac{W'}{V'}(U'^2 - UU'')' = U''_0;$$

et, en différentiant une fois encore par rapport à v,

$$(5) \qquad U''' \frac{d}{dv} \frac{(VW)'}{V'} + (U'^2 - UU'')' \frac{d}{dv} \frac{W'}{V'} = 0.$$

Dans cette dernière équation, on ne peut supposer à la fois

$$U''' = 0, \qquad (U'^2 - UU'')' = U'U'' - UU''' = 0,$$

car alors $U'' = 0$; les moulures seraient des développables.

Si donc on fait $U''' = 0$, on devra supposer le rapport $W' : V'$ constant. Soient alors

$$U = au^2 + b, \qquad W = 3mV + n.$$

L'équation (4) intégrée deux fois donne

$$U'_0 = 3m(U'^2 - UU'') + p, \qquad U_0 = 2ma^2u^3 - (6mab - p)u + q,$$

tandis que l'équation (3) devient

$$W'' + 2aVW - Vp + n(U'^2 - UU'') + UU'_0 - U_0 U' = 0.$$

Les termes en v et les termes en u doivent séparément se réduire à des constantes. Or les termes en u forment un polynôme du quatrième degré dont le terme en u^4 a pour coefficient $2ma^3$. Donc $m = 0$, d'où résulte $W' = 0$, solution exclue.

Nous devons donc désormais supposer $U''' \neq 0$. Je dis qu'on ne peut supposer le rapport $W' : V'$ constant, car il faudrait alors que le rapport $(VW)' : V'$ fût constant aussi. On aurait donc

$$W = 3mV + n, \qquad VW = \alpha V + \beta,$$

d'où l'équation du second degré à coefficients constants

$$3mV^2 + (n - \alpha)V - \beta = 0,$$

qui devrait, puisque V n'est pas constant, avoir lieu indépendamment de V. Donc en particulier $m = 0$ et, par suite, $W' = 0$, solution exclue.

La seule et dernière hypothèse à faire est donc

$$U''' \neq 0, \qquad \frac{d}{dv}\frac{W'}{V'} \neq 0.$$

On peut diviser les deux membres de l'équation (5) par le produit de ces quantités; alors l'équation se décompose en deux

$$\frac{(U'^2 - UU'')'}{U'''} = -\left[\frac{d}{dv}\frac{(VW)'}{V'}\right] : \left[\frac{d}{dv}\frac{W'}{V'}\right] = \text{const.} = \gamma.$$

De ces deux relations on tire successivement

$$(6) \qquad (U'^2 - UU'')' = \gamma U''', \qquad (VW)' + \gamma W' = nV',$$

$$(7) \qquad U'^2 - UU'' = \gamma U'' + \delta; \qquad (W - n)(V + \gamma) = h.$$

Substituant les expressions (6) dans l'équation (4) il vient

$$U''_0 = nU''', \qquad U_0 = nU' + pu + q.$$

Avec cette valeur de U_0, l'équation (3) devient, eu égard aux relations (7),

$$(3') \qquad W'' - pV + \delta(W - n) + pU - (pu + q)U' + hU'' = 0.$$

Donc les termes en u doivent avoir une somme constante. Mais, en vertu d'une des relations (7), on a

$$U''' : U'' = U' : (U + \gamma), \qquad U'' = a^2(U + \gamma),$$

ce qui montre, a ne pouvant être nul, que la fonction U est périodique. Par suite p est nul. Donc nous avons à la fois

$$(8) \qquad qU' - hU''' = 0, \qquad U''U' - (U + \gamma)U''' = 0.$$

Or h n'est pas nul, sans cela W se réduirait à la constante n, solution exclue. Ainsi on peut éliminer U' et U''' de ces deux relations (8), ce qui donne

$$U' : (U + \gamma) = q : h = a, \qquad U + \gamma = e^{au}.$$

Mais alors tous les termes qui, dans la relation (3'), dépendent de u se détruisent, et il reste

$$W'' + \delta (W - n) = 0.$$

Or, avec la valeur trouvée pour U, la première des équations (7) entraîne $\delta = 0$. On a donc $W'' = 0$. Alors la seconde des équations (7) donne pour $V + \gamma$ une expression qu'on peut écrire $b : v$, b étant une nouvelle constante; d'où finalement

$$U - V = e^{au} - \frac{b}{v},$$

et l'on retrouve les moulures déjà obtenues par M. Dini comme solution d'un problème moins général.

M. D'OCAGNE fait la Communication suivante :

Sur les substitutions linéaires d'une seule variable à coefficients périodiques.

Si l'on répète indéfiniment la même substitution linéaire

$$x_1 = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad x_2 = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{ax_{n-1} + b}{cx_{n-1} + d}, \qquad \ldots$$

on a

$$x_n = \frac{A_n x + B_n}{C_n x + D_n}.$$

Le problème qui consiste à trouver les valeurs de A_n, B_n, C_n, D_n en fonction de a, b, c, d a été résolu d'une façon ingénieuse par M. le prince de Polignac (*Bulletin de la Société mathématique,* p. 120; 1876). En voici une solution plus directe :

On voit facilement que les quatre séries de quantités A, B, C, D satisfont à une même loi de récurrence

$$U_n = (a + d) U_{n-1} + (bc - ad) U_{n-2}$$

(où l'on remplace successivement U par A, B, C, D) avec les conditions initiales

$$\begin{array}{llll} A_0 = 1, & B_0 = 0, & C_0 = 0, & D_0 = 0, \\ A_1 = a, & B_1 = b, & C_1 = c, & D_1 = d. \end{array}$$

Donc, en vertu d'une formule que nous avons démontrée autrefois [*Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 71; 1884 (¹)], on a, en posant

$$a + d = \lambda, \qquad bc - ad = \mu,$$

et

$$u_n = \sum_{i=0}^{i=E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C^i_{n-(i+1)} \lambda^{n-(2i+1)} \mu^i,$$

les formules suivantes :

$$\begin{aligned} A_n &= a u_n + \mu u_{n-1}, \\ B_n &= b u_n, \\ C_n &= c u_n, \\ D_n &= d u_n + \mu u_{n-1}, \end{aligned}$$

qui résolvent le problème.

Supposons maintenant que les coefficients des substitutions successives, au lieu d'être constants, se reproduisent périodiquement, c'est-à-dire qu'on ait

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}, \quad x_2 = \frac{a_2 x_1 + b_2}{c_2 x_1 + d_2}, \quad \ldots, \quad x_k = \frac{a_k x_{k-1} + b_k}{c_k x_{k-1} + d_k},$$

$$x_{k+1} = \frac{a_1 x_k + b_1}{c_1 x_k + d_1}, \quad x_{k+2} = \frac{a_2 x_{k+1} + b_2}{c_2 x_{k+1} + d_2}, \quad \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit alors que les quantités A et B sont données par la série récurrente à coefficients périodiques

$$U_{nk+i} = \alpha_i U_{nk+i-1} + \beta_i U_{nk+i-2} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_i &= a_i + \frac{b_i}{b_{i-1}} d_{i-1}, \\ \beta_i &= \frac{b_i}{b_{i-1}} (b_{i-1} c_{i-1} - a_{i-1} d_{i-1}); \end{aligned} \right.$$

les quantités C et D par la suivante

$$V_{nk+i} = \gamma_i V_{nk+i-1} + \delta_i V_{nk+i-2} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_i &= \frac{c_i}{c_{i-1}} c_{i-1} + d_i, \\ \delta_i &= \frac{c_i}{c_{i-1}} (b_{i-1} c_{i-1} - a_{i-1} d_{i-1}. \end{aligned} \right.$$

Écrivons $2k - 1$ formules consécutives de la série U, et sur les

(¹) Nous avons donné la généralisation explicite de cette formule dans le même Recueil (année 1890, p. 93).

$2k+1$ termes qu'elles renferment, éliminons les $2k-2$ autres que U_{nk+i}, $U_{(n-1)k+i}$ et $U_{(n-2)k+i}$. Il vient, après des calculs que nous supprimons,

$$U_{nk+i} = LU_{(n-1)k+i} + MU_{(n-2)k+i},$$

où, en représentant par $R\left(\frac{k-1}{2}\right)$ le reste, o et 1, de la division $k-1$ par 2,

$$L = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k + \sum_{i=1}^{i=E\left(\frac{k-1}{2}\right)} \sum_{j=1}^{j=k} \alpha_j\alpha_{j+1}\ldots\alpha_{j+k-2i-1}\beta_{j-1}\beta_{j-3}\ldots\beta_{j-1-2(i-1)}$$
$$+ R\left(\frac{k-1}{2}\right)(\beta_1\beta_3\beta_5\ldots\beta_{k-1} + \beta_2\beta_4\ldots\beta_k),$$
$$M = (-1)^{k-1}\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_k,$$

étant entendu que, dans la double somme qui figure dans l'expression de L, les indices sont pris résiduairement par rapport au module k. *Les expressions de* L *et de* M *ne changeant pas par permutation circulaire, la loi de récurrence est la même pour les coefficients pris de k en k, à partir de l'un quelconque des termes de la première période.*

Pour les coefficients C et D, il suffit, dans ce qui précède, de changer α en γ et β en δ.

Pour achever la question, il n'y a plus qu'à appliquer la formule rappelée plus haut.