BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 54-70

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__54_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 MARS 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la représentation graphique des équations à quatre variables.*

M. Fouret : *Sur le centre des moyennes distances de plusieurs points.*

M. Humbert présente quelques observations à propos de cette Communication.

M. Carvallo : *Sur la démonstration du théorème de d'Alembert.*

M. Collignon présente deux tableaux graphiques donnant, l'un la distance de deux points sur la sphère, l'autre la résolution des triangles rectilignes.

M. Kœnigs : *Interprétation géométrique d'une forme donnée à l'intégrale de l'équation d'Euler.*

M. Humbert : *Génération des courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer.*

M. Raffy fait la Communication suivante :

Sur les surfaces moulures dont les lignes d'égale courbure sont parallèles.

Je vais montrer que *toute surface moulure, dont les lignes* *d'égale courbure sont parallèles, a pour élément linéaire*

$$ds^2 = du^2 + \left(e^{au} - \frac{b}{v}\right)^2 dv^2.$$

Pour que les courbes d'une famille $\varphi = \text{const.}$, tracées sur une surface d'élément linéaire

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2,$$

soient parallèles, il faut et il suffit, comme on sait, que le paramètre différentiel

$$\Delta\varphi = \frac{\mathrm{G}\varphi_u'^2 - 2\mathrm{F}\varphi_u'\varphi_v' + \mathrm{E}\varphi_v'^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}$$

soit une fonction de φ. Appliquons cette règle aux surfaces moulures; pour ces surfaces, on a

$$\mathrm{E} = 1, \qquad \mathrm{F} = 0, \qquad \mathrm{G} = (\mathrm{U} - \mathrm{V})^2.$$

Leur courbure totale, que je représente par $-\frac{1}{\varphi}$, est donnée par la formule connue

$$-\frac{1}{\varphi} = \frac{-1}{\sqrt{\mathrm{G}}} \frac{\partial^2 \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u^2} = \frac{-\mathrm{U}''}{\mathrm{U} - \mathrm{V}}.$$

Nous avons donc pour équation des lignes d'égale courbure

$$\varphi = \frac{\mathrm{U} - \mathrm{V}}{\mathrm{U}''} = \text{const.},$$

et nous supposerons la dérivée U'' essentiellement différente de zéro, afin d'exclure les surfaces développables.

Calculons le paramètre différentiel $\Delta\varphi$, en ayant soin d'y remplacer partout $\mathrm{U} - \mathrm{V}$ par le produit $\varphi\mathrm{U}''$; nous trouvons

$$\Delta\varphi = \varphi_u'^2 + \frac{\varphi_v'^2}{\mathrm{G}} = \frac{(\mathrm{U}' - \varphi\mathrm{U}''')^2}{\mathrm{U}''^2} + \frac{\mathrm{V}'^2}{\varphi^2\mathrm{U}''^4}.$$

Pour exprimer que $\Delta\varphi$ est une fonction de φ, nous égalerons à zéro le déterminant fonctionnel $\varphi_v'\Delta_u' - \varphi_u'\Delta_v'$, dans lequel nous pourrons évidemment remplacer les dérivées Δ_u' et Δ_v' par les valeurs plus simples (Δ_u'), (Δ_v'), qu'elles prennent lorsqu'on les calcule en considérant φ comme constant, savoir :

$$(\Delta_u') = 2\varphi_u'\left[\left(\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}''}\right)' - \varphi\left(\frac{\mathrm{U}'''}{\mathrm{U}''}\right)'\right] - \frac{4\mathrm{U}'''}{\mathrm{U}''^5}\frac{\mathrm{V}'^2}{\varphi^2}, \qquad (\Delta_v') = \frac{2\mathrm{V}'\mathrm{V}''}{\varphi^2\mathrm{U}''^4}.$$

On trouve ainsi, en remplaçant φ'_u et φ'_v par leurs valeurs, une équation qui peut s'écrire

$$(U' - \varphi U''')\left[U''V'' + U''^4\left(\frac{U'}{U''}\right)'\varphi^2 - U''^4\left(\frac{U'''}{U''}\right)'\varphi^3\right] = 2U'''V'^2.$$

C'est l'équation qui va nous déterminer les fonctions U et V. Pour la résoudre, nous prendrons V comme variable au lieu de v; il suffira de remplacer V' par une fonction V_1 de V et V'' par $V_1 V'_1$, V'_1 étant la dérivée de V_1 par rapport à V. Il vient ainsi

$$(1)\qquad \frac{VU''' + U'U'' - UU'''}{U''}\left[U''V_1V'_1 + U''^4\left(\frac{U'}{U''}\right)'\varphi^2 - U''^4\left(\frac{U'''}{U''}\right)'\varphi^3\right] = 2U'''V_1^2.$$

Je dis d'abord qu'on doit supposer $U''' \neq 0$. Soit, en effet, $U''' = 0$; la dérivée U'' sera une constante a, différente de zéro, et l'équation deviendra

$$U'[V_1V'_1 + a(U - V)^2] = 0,$$

ce qui exige $U' = 0$, solution à rejeter comme entraînant l'hypothèse exclue $U'' = 0$.

Cela posé, je dis que l'expression

$$\gamma = \frac{UU''' - U'U''}{U'''}$$

se réduit à une constante. En effet, s'il n'en est pas ainsi, en attribuant à la variable V la succession des valeurs que prend cette expression quand u varie, on annulera le premier membre de notre équation; par suite, la fonction $V_1 = V'$ sera identiquement nulle, ce que nous ne supposons pas, l'hypothèse $V = \text{const.}$ réduisant les moulures à des surfaces de réduction. Il y a plus; on peut faire $\gamma = 0$. Car la formule précédente peut s'écrire

$$(U - \gamma)U''' - U'U'' = 0,$$

et l'on voit qu'il suffit de remplacer U par $U + \gamma$ et V par $V + \gamma$, ce qui ne change pas l'élément linéaire, pour être en droit de supposer $\gamma = 0$. Mais l'évanouissement de γ exprime que la dérivée U'' est dans un rapport constant avec la fonction U. Cette hypothèse

$$U'' = a^2 U,$$

introduite dans l'équation (1), la réduit à

$$(2) \qquad V^2(U-V)^2\left(\frac{U'}{U}\right)' = V_1(2V_1 - VV'_1).$$

Il suffit maintenant de faire $V = U$ pour voir que le second membre est identiquement nul; comme V_1 ne l'est pas, il reste

$$\frac{V'_1}{V_1} = \frac{2}{V}.$$

L'intégration donne successivement

$$V_1 = V' = -\frac{V^2}{b}, \qquad V = \frac{b}{v - v_0},$$

en désignant par b et v_0 deux constantes arbitraires, dont la dernière peut être supposée nulle. Mais, le second membre de l'équation (2) étant nul, le premier l'est aussi; donc la dérivée logarithmique $U' : U$ est une constante. On a donc $U = e^{a(u-u_0)}$, et, comme l'arbitraire u_0 peut être supposée nulle, il reste

$$U - V = e^{au} - \frac{b}{v}.$$

ce qui démontre notre théorème.

Les moulures que nous venons de déterminer sont celles que M. Dini a trouvées (*Giornale di Matematica*, p. 65; 1865) en cherchant toutes les moulures qui s'appliquent sur des surfaces de révolution, de telle manière que leurs profils viennent coïncider avec des géodésiques sur lesquelles des arcs égaux soient interceptés par des courbes dont chacune coupe ces géodésiques sous le même angle. Elles sont engendrées par des tractrices allongées ou raccourcies dont le plan roule sur un cylindre convenable, la génératrice de contact étant la base de la courbe.

Il résulte de ce qui précède que toute moulure à lignes d'égale courbure parallèles est applicable sur une surface de révolution.

SÉANCE DU 18 MARS 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Élections : M. Fauquembergue, présenté par MM. Picquet et

Humbert; MM. Lery et Guimaraes, présentés par MM. Collignon et d'Ocagne, sont élus à l'unanimité.

Communications :

M. d'Ocagne présente un abaque faisant connaître la distance de deux points sur une sphère, en fonction de leurs latitudes et de la différence de leurs longitudes, et qui peut être considéré comme transformé de celui que M. Collignon a présenté dans la dernière séance.

M. Antomari : *Sur l'extension aux courbes gauches de la notion des diamètres de Newton.*

M. Fouret présente quelques observations sur le même sujet.

M. Fouret fait la communication suivante :

Sur les congruences de droites du premier ordre et de la première classe.

1. Suivant une dénomination proposée par Plücker et généralement adoptée, on désigne, sous le nom de *congruence de droites du* $m^{\text{ième}}$ *ordre et de la* $n^{\text{ième}}$ *classe,* un ensemble de droites, en nombre doublement infini, remplissant l'espace, telles qu'il y en ait m passant par un point arbitraire et n contenues dans un plan arbitraire.

En partant de cette définition, nous allons démontrer, avec une extrême simplicité, que *les droites d'une congruence du premier ordre et de la première classe rencontrent deux mêmes droites, non situées dans un même plan.* Ce théorème est bien connu; mais, en raison de son importance, il y a peut-être quelque intérêt à y parvenir par une voie plus directe que celles habituellement suivies.

Nous ferons usage d'une remarque qui s'applique utilement dans d'autres circonstances semblables, et qui consiste en ce que, *si des surfaces algébriques d'un même degré, en nombre simplement infini, sont telles que, par tout point pris arbitrairement, il en passe une et une seule, ces surfaces forment un faisceau ponctuel* (1).

(1) Une remarque analogue s'applique à des courbes algébriques situées dans un même plan.

En effet, ces surfaces sont définies par une même équation, renfermant un paramètre variable. La substitution, dans cette équation, des coordonnées d'un point arbitraire devant donner lieu à une valeur unique de ce paramètre, celui-ci doit entrer linéairement dans l'équation.

2. Nous allons maintenant démontrer deux théorèmes préliminaires sur les congruences du premier ordre et de la première classe, que nous appellerons abréviativement *congruences* (1, 1).

Théorème I. — *Les droites d'une congruence* (1, 1), *qui rencontrent une même droite fixe arbitraire, forment une quadrique.*

Par la droite fixe D faisons passer un plan quelconque. Ce plan contient une droite de la congruence, et une seule, qui fait partie de la section par le plan de la surface engendrée. Cette section est complétée par la droite D, qui est une ligne simple de la surface, puisque, par chaque point de D, il passe une droite et une seule de la congruence. La surface est donc coupée par un plan quelconque passant par D, suivant deux droites : c'est par conséquent une quadrique.

Théorème II. — *Les diverses quadriques engendrées par les droites d'une congruence* (1, 1), *qui s'appuient sur des droites d'un même plan concourant en un même point, contiennent un même quadrilatère gauche.*

Considérons un faisceau de droites D, concourant en un même point p et contenues dans un même plan (P). Chaque droite D donne lieu à une quadrique (S) engendrée par les droites de la congruence qui la rencontrent. Par tout point a pris arbitrairement passe une des quadriques (S) et une seule. Par ce point, en effet, passe une droite L et une seule de la congruence, à laquelle correspond une des droites D, celle qui joint le point p à la trace de L sur le plan (P), et à cette droite D correspond une des quadriques (S), la seule qui passe par le point a. Donc, en vertu d'une remarque faite au début de cette Note, les quadriques (S) forment un faisceau ponctuel.

D'autre part, toutes ces quadriques (S) ont en commun deux droites de la congruence : celle qui passe par le point p et celle qui est contenue dans le plan (P), puisque ces deux droites rencontrent toutes les droites D. L'intersection commune des quadriques (S) comprend ainsi deux droites, qui, appartenant à la congruence, ne peuvent être dans un même plan. Par suite, d'après une proposition bien connue, le complément de cette intersection est formé de deux autres droites Δ et Δ', réelles ou imaginaires conjuguées, s'appuyant sur les deux premières, c'est-à-dire formant avec elles un quadrilatère gauche.

3. Il n'y a qu'un mot à dire, pour déduire de ce qui précède le théorème qui fait l'objet principal de cette Note, à savoir :

Théorème III. — *Les droites d'une congruence* (1,1) *rencontrent deux mêmes droites.*

En effet, toutes les droites de la congruence, qui servent à engendrer les quadriques (S), considérées dans la démonstration du théorème II, rencontrent les deux droites Δ et Δ', ces droites Δ et Δ' étant, sur chaque surface (S), des génératrices d'un système autre que celui des génératrices formées par les droites de la congruence. Il est d'ailleurs facile de voir que toutes les droites de la congruence concourent à engendrer les quadriques (S). Considérons, en effet, une quelconque de ces droites L; elle est rencontrée par une droite D passant par le point p et située dans le plan (P), et cette droite D sert à engendrer une quadrique (S) qui contient L. Donc toute droite L de la congruence s'appuie sur les deux droites Δ et Δ'.

4. On peut déduire de là, comme conséquence immédiate, un beau théorème, bien connu, sur les déplacements à deux paramètres d'un solide invariable, qui a été établi pour la première fois par Schönemann et auquel M. Mannheim, par ses travaux, a donné une portée considérable.

Ce théorème consiste en ce que *les normales aux surfaces trajectoires des points d'un solide invariable, pour chaque position de ce solide, s'appuient sur deux mêmes droites.*

Montrons que ces normales forment une congruence (1,1) : la proposition en résultera. Or, en premier lieu, par chaque point de l'espace, considéré comme appartenant au solide, passe une telle droite, la normale à la surface décrite par ce point. D'autre part, dans le cas général, deux pareilles normales N, N′ ne peuvent se rencontrer. Supposons en effet qu'elles se rencontrent en un certain point i. Ou bien ce point sera fixe, aux infiniment petits près d'ordre supérieur, et alors toutes les normales iront y concourir, ce qui correspond à un cas particulier et exceptionnel du théorème. Ou bien le point i sera mobile; mais, dans cette hypothèse, deux points du solide, respectivement situés sur N et sur N′, décriront des surfaces parallèles à la surface décrite par i, ce qui entraîne la coïncidence des normales N et N′. D'ailleurs, deux normales N et N′ ne pouvant avoir un point commun, quelque éloigné qu'on le suppose, ne peuvent pas non plus être parallèles.

On conclut de ce qui précède qu'il ne peut y avoir plus d'une normale passant par un point quelconque, ni plus d'une normale contenue dans un plan quelconque. Ces normales forment donc bien une congruence (1,1), et, par conséquent, d'après le théorème III, elles s'appuient sur deux mêmes droites.

M. Émile Picard fait la Communication suivante :

Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires

Dans mon Mémoire sur les équations aux dérivées partielles (*Journal de Mathématiques*, 1890), j'ai proposé incidemment une démonstration nouvelle et extrêmement simple pour établir l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires. M'étant borné à l'équation du premier ordre, que j'ai d'ailleurs traitée très rapidement, je ne crois pas inutile d'exposer ici cette démonstration d'une manière complète et dans toute sa généralité.

1. Envisageons le système des m équations du premier ordre

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= f_1(x, u, v, \ldots, w),\\
\frac{dv}{dx} &= f_2(x, u, v, \ldots, w),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{dw}{dx} &= f_m(x, u, v, \ldots, w).
\end{aligned}$$

Les fonctions f sont des fonctions continues réelles des quantités réelles x, u, $v, \ldots, w$ dans le voisinage de x_0, u_0, $v_0, \ldots, w_0$. Elles sont définies quand x, u, v, $\ldots$, w restent respectivement compris dans les intervalles

$$\begin{array}{ll} (x_0 - a, & x_0 + a), \\ (u_0 - b, & u_0 + b), \\ (v_0 - b, & v_0 + b), \\ \multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\ (w_0 - b, & w_0 + b), \end{array}$$

a et b désignant deux grandeurs positives.

De plus, on suppose que l'on puisse déterminer m quantités positives A, B, ..., L, telles que

$$\begin{aligned} &| f(x, u', v', \ldots, w') - f(x, u, v, \ldots, w) | \\ &\quad < \mathrm{A}.| u' - u | + \mathrm{B}.| v' - v | + \ldots + \mathrm{L}.| w' - w | \end{aligned}$$

(où $|\alpha|$ désigne, suivant l'usage, la valeur absolue de α), x ainsi que les u, v, $\ldots$, w restant dans les intervalles indiqués. Il en sera évidemment ainsi, en particulier, si les fonctions f ont des dérivées partielles du premier ordre, restant finies, par rapport à u, v, $\ldots$, w.

Ces hypothèses très générales étant faites, on veut démontrer qu'*il existe des fonctions* u, v, $\ldots$, w *de* x, *continues dans le voisinage de* x_0, *satisfaisant aux équations différentielles et se réduisant respectivement, pour* $x = x_0$, *à* u_0, v_0, $\ldots$, w_0.

2. Nous procéderons par approximations successives. Considérons d'abord le système

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_0, v_0, \ldots, w_0), \qquad \ldots, \qquad \frac{dw_1}{dx} = f_m(x, u_0, v_0, \ldots, w_0);$$

nous en tirons, par quadratures, les fonctions u_1, v_1, $\ldots$, w_1, en les déterminant de manière qu'elles prennent pour x_0 les valeurs u_0, v_0, $\ldots$, w_0. On forme ensuite les équations

$$\frac{du_2}{dx} = f_1(x, u_1, v_1, \ldots, w_1), \qquad \ldots, \qquad \frac{dw_2}{dx} = f_m(x, u_1, v_1, \ldots, w_1),$$

et l'on détermine u_2, v_2, $\ldots$, w_2 par la condition qu'elles prennent respectivement pour x_0 les valeurs u_0, v_0, $\ldots$, w_0. On continue ainsi indéfiniment. Les fonctions u_{m-1}, v_{m-1}, $\ldots$, w_{m-1} seront liées aux suivantes u_m, v_m, ..., w_m par les relations

$$\frac{du_m}{dx} = f_1(x, u_{m-1}, v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dw_m}{dx} = f_m(x, u_{m-1}, v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}),$$

et, pour $x = x_0$, on a

$$u_m = u_0, \quad v_m = v_0, \quad \ldots, \quad w_m = w_0.$$

Nous allons établir que, m augmentant indéfiniment, u_m, v_m, ..., w_m *tendent vers des limites qui représentent les intégrales cherchées, pourvu que x reste suffisamment voisin de x_0.*

Soit M la valeur absolue maxima des fonctions f, quand les variables dont elles dépendent restent dans les limites indiquées. Désignons par ρ une quantité au plus égale à a : si x reste dans l'intervalle $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, on aura

$$|u_1 - u_0| < M\rho, \quad \ldots, \quad |w_1 - w_0| < M\rho.$$

Par suite, si $M\rho < b$, les quantités u_1, v_1, ..., w_1 resteront dans les limites voulues, et il est évident qu'alors il en sera de même pour tous les autres systèmes de valeurs u, v, ..., w. Désignant par δ une quantité au plus égale à ρ, nous allons supposer que x reste dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

En posant

$$u_m - u_{m-1} = U_m, \quad \ldots, \quad w_m - w_{m-1} = W_m,$$

on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dU_m}{dx} = f_1(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1}) - f_1(x, u_{m-2}, \ldots, w_{m-2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dW_m}{dx} = f_m(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1}) - f_m(x, u_{m-2}, \ldots, w_{m-2}) \end{array}\right\} (m = 2, \ldots, \infty).$$

Or on a

$$|U_1| < M\delta, \quad \ldots, \quad |W_1| < M\delta.$$

Les équations précédentes, pour $m = 2$, démontrent que $|U_2|$, $|V_2|$, ..., $|W_2|$ sont inférieurs à

$$(A + B + \ldots + L)M\delta^2,$$

et, d'une manière générale, de proche en proche, on voit que $|U_m|, \ldots, |W_m|$ sont inférieurs à

$$M\delta(A+B+\ldots+L)^{m-1}\delta^{m-1}.$$

Or

$$u_m = u_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_m;$$

par suite, $u_m, v_m, \ldots, w_m$ tendront vers une limite, si

$$(A+B+\ldots+L)\delta < 1.$$

En prenant δ assez petit, cette condition sera vérifiée. Nous voyons donc que $u_m, v_m, \ldots, w_m$ tendront vers des limites déterminées $u, v, \ldots, w$, fonctions continues de x dans l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, δ *étant la plus petite des trois quantités*

$$a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{1}{A+B+\ldots+L};$$

$u, v, \ldots, w$ seront représentées par des séries qui convergent à la manière d'une progression géométrique décroissante.

On a d'ailleurs

$$u_m = \int_{x_0}^{x} f_1(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1})\,dx + u_0,$$

et, puisque les $u_m, v_m, \ldots, w_m$ diffèrent de leurs limites d'aussi peu qu'on veut, pour m assez grand, quel que soit x dans l'intervalle indiqué, on aura, à la limite

$$u = \int_{x_0}^{x} f_1(x, u, v, \ldots, w)\,dx + u_0;$$

et, par suite,

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w),$$

et de même pour les autres équations. *Les fonctions $u, v, \ldots, w$ sont donc les intégrales cherchées.*

SÉANCE DU 1er AVRIL 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Fouret : *Sur l'extension donnée par Poncelet à la notion de diamètres de Newton.*

M. Fouret : *Sur le lieu des points tels que la somme des carrés des longueurs des normales menées de l'un d'eux à une courbe gauche algébrique, soit constante.*

M. Beghin présente quelques observations sur le même sujet.

M. Kobb : *Sur les maxima et minima de certaines intégrales.*

M. Raffy fait la Communication suivante :

Sur la déformation des surfaces spirales.

1. Le problème dont je vais d'abord indiquer la solution est le suivant :

Étant donné un élément linéaire, exprimé au moyen de variables quelconques, reconnaître s'il existe des spirales admettant cet élément linéaire.

Voici comment on devra procéder. Sauf pour la courbure totale, que je représente par $-2e^{\theta}$, j'emploie, pour les paramètres différentiels, les notations qu'on trouvera définies dans la *Théorie des surfaces* de M. Darboux (Livre VII, Chap. I).

Pour reconnaître si un élément linéaire, donné sous une forme quelconque, convient à des spirales, on calculera la courbure totale $-2e^{\theta}$ *(qui ne peut être constante sans être nulle) et l'on formera l'invariant* $e^{-\theta}\Delta\theta$.

S'il ne se réduit pas à une constante, on formera les deux invariants

$$\frac{\Theta(e^{-\theta}\Delta\theta,\, \theta)}{\Delta(e^{-\theta}\Delta\theta)}, \qquad \frac{\Delta_2(e^{-\theta}\Delta\theta)}{\Delta(e^{-\theta}\Delta\theta)};$$

chacun d'eux devra être une fonction de $e^{-\theta}\Delta\theta$.

Si l'invariant $e^{-\theta}\Delta\theta$ *est constant, on calculera l'invariant* $e^{-\theta}\Delta_2\theta$. *Si ce dernier est constant aussi, l'élément linéaire donné convient à des spirales en même temps qu'à des surfaces* *de révolution. Si l'invariant* $e^{-\theta}\Delta_2\theta$ *n'est pas constant, on formera*

$$\frac{\Theta(e^{-\theta}\Delta_2\theta, \theta)}{\Delta(e^{-\theta}\Delta_2\theta)},$$

et ce nouvel invariant devra être une fonction de $e^{-\theta}\Delta_2\theta$.

Je ne donnerai pas ici la démonstration de cette règle, parce qu'elle exigerait quelques développements. Je me bornerai à faire remarquer qu'en égalant à zéro les deux invariants $\Theta(e^{-\theta}\Delta\theta, \theta)$ et $\Theta(e^{-\theta}\Delta_2, \theta)$ on aurait les caractères spécifiques des surfaces applicables sur les surfaces de révolution.

2. Ce qui précède conduit à chercher les éléments linéaires qui conviennent à la fois à des spirales et à des surfaces de révolution.

Pour qu'un élément linéaire $e^{\omega}\,dx\,dy$ soit réductible à la forme

$$ds^2 = e^{-i(x'-y')}e^{\int \mathrm{T}(x'+y')\,d(x'+y')}\,dx'\,dy',$$

qui convient aux spirales, il faut et il suffit qu'après un changement de variables approprié

$$dx' = \frac{dx}{\xi(x)}, \qquad dy' = \frac{dy}{\eta(y)}$$

on ait identiquement

$$\omega + \log\xi + \log\eta = -\,i(x'-y') + \int \mathrm{T}(x'+y')\,d(x'+y').$$

Pour éliminer la fonction inconnue T, différentions par rapport à x' et à y'; nous aurons

$$\xi\left(\omega'_x + \frac{\xi'}{\xi}\right) = \mathrm{T} - i, \qquad \eta\left(\omega'_y + \frac{\eta'}{\eta}\right) = \mathrm{T} + i;$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$\xi' - \eta' + \xi\omega'_x - \eta\omega'_y = -\,2i.$$

Si l'élément linéaire $e^{\omega}\,dx\,dy$ convient à une surface de révolution, on peut faire

$$\omega = \varphi(x+y), \qquad \omega'_x = \omega'_y = \varphi'.$$

L'équation du problème devient alors

$$(\xi - \eta)\varphi' + \xi' - \eta' + 2i = 0. \tag{1}$$

Égalons à zéro la dérivée seconde du premier membre prise par rapport à x et à y; nous trouvons

$$(2) \qquad (\xi - \eta)\varphi''' + (\xi' - \eta')\varphi'' = 0.$$

Or la dérivée $\varphi'' = \omega''_{xy}$ doit être supposée différente de zéro (on n'écarte ainsi que les surfaces développables). On peut alors tirer $\xi' - \eta'$ de l'équation (2) et porter sa valeur dans l'équation (1), ce qui donne

$$(\xi - \eta)\left(\varphi' - \frac{\varphi'''}{\varphi''}\right) + 2i = 0.$$

En conséquence, la différence $\xi - \eta$ ne dépend que de $x + y$. Il suit de là que les deux dérivées ξ' et η' sont égales et de signes contraires

$$\xi' = -\eta' = \text{const.} = mi.$$

Intégrant et négligeant les constantes additives, nous avons

$$\xi = mix, \qquad \eta = -miy.$$

L'équation (1) devient alors

$$\varphi' = -\frac{2(m+1)}{m(x+y)} = \frac{n}{x+y}.$$

On en déduit immédiatement $\omega = n \log(x+y)$, d'où l'élément linéaire cherché

$$ds^2 = (x+y)^n \, dx \, dy.$$

C'est le résultat obtenu par M. Lie (*Mathem. Annalen*, t. XX, p. 387) comme solution de ce problème : *Trouver les éléments linéaires de toutes les surfaces dont les lignes géodésiques admettent plusieurs transformations infinitésimales conformes.* D'après un théorème de M. Weingarten, ces surfaces sont les lieux des centres de courbure de celles dont les rayons principaux sont dans le rapport constant $-\frac{n}{2}$.

3. Si, au lieu de chercher les spirales applicables sur des surfaces de révolution, on veut déterminer la fonction T de la variable $x' + y' = t$ par la condition que les lignes d'égale courbure soient parallèles, on arrive à l'équation du second ordre

$$\frac{1}{T'}\left[\left(\frac{T''}{T'} - T\right)^2 + 1\right] = \text{const.} = 2a.$$

On peut obtenir son intégrale générale. Prenons, en effet, pour variable indépendante T et posons

$$Z = T' - \frac{T^2}{2}, \qquad p = \frac{dZ}{dT},$$

ce qui conduit à l'équation

$$p^2 = 2aZ + aT^2 - 1.$$

L'équation dérivée

$$p\frac{dp}{dT} - ap - aT = 0$$

est homogène et s'intègre par une quadrature. La détermination de T est donc ramenée aux quadratures. L'intégrale particulière

$$T = \frac{1}{q}\operatorname{tang}\frac{(q+1)t}{2q}, \qquad \frac{q^2}{q+1} = a,$$

donne l'élément linéaire des spirales applicables sur les surfaces de révolution.

SÉANCE DU 15 AVRIL 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Bioche : *Sur les développables qui passent par une courbe gauche.*

M. Kobb : *Théorème sur la variation d'une intégrale double.*

M. Fouret : *Théorème général sur le maximum ou le minimum d'une fonction symétrique de plusieurs variables dont la somme est constante.*

M. Carvallo : *Sur un nouveau mode d'exposition de la théorie des déterminants.*

M. d'Ocagne : *Principe général de la théorie des abaques.*

M. Appell adresse la Communication suivante :

Sur des potentiels conjugués.

Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire $x + yi$, la partie réelle u et le coefficient v de i de la fonction vérifient les deux équations fondamentales

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

qui donnent immédiatement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Ces deux fonctions u et v vérifient donc l'équation du potentiel logarithmique et sont associées ou conjuguées par les relations (1).

M. Picard, dans une Note récente (*Comptes rendus*, 5 avril 1891), a généralisé ce point de vue en considérant des systèmes de deux fonctions associées vérifiant des relations analogues à (1), avec des coefficients fonctions de x.

Je me propose ici d'indiquer sommairement des systèmes analogues à (1), pour le potentiel à trois et quatre variables.

Considérons quatre fonctions X, Y, Z, T de trois variables réelles x, y, z, vérifiant les relations

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right.$$

qui présentent une certaine symétrie, en ce sens que la fonction Z, par exemple, est liée à X, —Y, —T comme T à Y, X, Z, etc.

On conclut immédiatement des équations (2) que l'on a

$$\Delta_2 X = 0, \qquad \Delta_2 Y = 0, \qquad \Delta_2 Z = 0, \qquad \Delta_2 T = 0,$$

en posant

$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

De plus, on peut choisir arbitrairement la fonction T vérifiant $\Delta_2 T = 0$; il existe toujours des fonctions X, Y, Z vérifiant les équations (2); il en existe même une infinité et l'on peut préciser le degré d'indétermination et exprimer ces fonctions par des intégrales définies. Il suffit pour cela d'employer la démonstration que Beltrami a donnée pour un théorème de Stokes.

Le système (2) est un cas particulier du suivant, où figurent quatre fonctions X, Y, Z, T de quatre variables x, y, z, t,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial t}=0,\\ &\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Y}{\partial t}=0,\\ &\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial Z}{\partial t}=0,\\ &\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}+\frac{\partial T}{\partial t}=0,\end{aligned}\right.$$

et dans lequel chaque fonction vérifie nécessairement l'équation à quatre termes

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0.$$

Je me propose d'indiquer prochainement d'une façon plus détaillée les propriétés de ces potentiels associés, en me plaçant surtout au même point de vue que dans des recherches antérieures (*Acta mathematica*, t. 4).