SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 44-52
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__44_1>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 7 MARS 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Élections :

Sont élus à l'unanimité Membres de la Société : M. George Bruce

Halsted, présenté par MM. Poincaré et Craig; M. Balitrand, présenté par MM. Mannheim et Picquet.

Communications :

M. d'Ocagne : *Sur la composition des lois d'erreur de situation d'un point.*

M. Poincaré : *Sur la question de savoir si les courbes d'un même genre forment une multiplicité continue.*

M. Raffy : *Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.*

M. Goursat adresse la Note suivante :

Sur les tangentes à une cubique plane.

Étant donnée une cubique plane sans point double (C), on sait que, par un point M de cette courbe, on peut lui mener quatre tangentes, sans compter celle qui a son point de contact en M; *le rapport anharmonique de ces quatre tangentes reste constant lorsque le point* M *décrit la cubique* (C). On possède déjà plusieurs démonstrations de cette remarquable propriété; en voici une autre, qui me paraît assez simple.

Prenons sur la cubique (C) deux points quelconques A et B, qui seront supposés fixes, et un troisième point variable M. Si λ et μ désignent les coefficients angulaires des deux droites AM et BM, il y a évidemment entre λ et μ une relation algébrique et du second degré par rapport à chacune des variables, car à une valeur de λ correspondent deux valeurs de μ et inversement. Soit

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(\lambda, \mu) = {} & \lambda^2(A\mu^2 + B\mu + C) \\ & + \lambda(A_1\mu^2 + B_1\mu + C_1) + A_2\mu^2 + B_2\mu + C_2 = 0 \end{aligned}\right.$$

cette relation, que l'on peut aussi écrire

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} F(\lambda, \mu) = {} & \mu^2(A\lambda^2 + A_1\lambda + A_2) \\ & + \mu(B\lambda^2 + B_1\lambda + B_2) + C\lambda^2 + C_1\lambda + C_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Si la droite AM devient tangente en M à la cubique, les deux valeurs correspondantes de μ deviennent égales; les coefficients angulaires des quatre tangentes issues du point A sont donc les racines de l'équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} R(\lambda) = (B\lambda^2 + B_1\lambda + B_2)^2 \\ - 4(A\lambda^2 + A_1\lambda + A_2)(C\lambda^2 + C_1\lambda + C_2) = 0. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients angulaires des tangentes issues du point B sont de même les racines de l'équation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} R_1(\mu) = (A_1\mu^2 + B_1\mu + C_1)^2 \\ - 4(A\mu^2 + B\mu + C)(A_2\mu^2 + B_2\mu + C_2) = 0. \end{aligned}\right.$$

Tout revient à démontrer que les équations (3) et (4) ont même invariant absolu. Le calcul direct serait un peu long, mais on peut l'éviter comme il suit.

Il est permis évidemment d'effectuer sur λ et sur μ deux substitutions linéaires quelconques, et la proposition sera établie si l'on montre qu'on peut choisir ces deux substitutions linéaires de telle façon que la relation $F(\lambda, \mu) = 0$ soit remplacée par une relation symétrique en λ et μ; alors, en effet, les deux équations (3) et (4) seront identiques. Soient λ_1 une racine de $R(\lambda) = 0$, et μ_1 la racine double de l'équation $F(\lambda_1, \mu) = 0$; soient de même μ_2 une racine de $R_1(\mu) = 0$, et λ_2 la racine double de l'équation $F(\lambda, \mu_2) = 0$. Posons

$$\frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \lambda_2} = \lambda', \qquad \frac{\mu - \mu_2}{\mu - \mu_1} = \mu';$$

la relation (1) se change en une nouvelle relation de même forme

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} f(\lambda', \mu') = \lambda'^2(a\mu'^2 + b\mu' + c) \\ + \lambda'(a_1\mu'^2 + b_1\mu' + c_1) + a_2\mu'^2 + b_2\mu' + c_2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour $\lambda' = 0$, la nouvelle équation en μ' doit avoir une racine double infinie et, de même, pour $\mu' = 0$, l'équation en λ' doit avoir une racine double infinie. Ceci exige que l'on ait $a_2 = b_2 = 0$, $c = c_1 = 0$. La relation (5) est donc de la forme

$$f(\lambda', \mu') = a\lambda'^2\mu'^2 + \lambda'\mu'(b\lambda' + a_1\mu' + b_1) + c_2 = 0.$$

Si aucun des coefficients b, a_1 n'est nul, il suffit de remplacer μ' par $\frac{b}{a_1}\mu'$ pour être ramené à une relation symétrique entre λ' et μ', et la proposition est établie.

Aucun des coefficients b, a_1 ne peut être nul. Si, par exemple, on avait $b = 0$, l'équation $f(\lambda', \mu') = 0$ aurait, pour $\mu' = 0$, une racine double infinie en λ', et, pour $\lambda' = \infty$, une racine double nulle en μ'. Les deux droites correspondantes AM et BM rencontreraient chacune la cubique en deux points confondus en M; ce point serait nécessairement un point double. On arrive à la même conclusion en supposant $a_1 = 0$.

M. Demoulin adresse la Note suivante :

Sur une propriété caractéristique de l'élément linéaire des surfaces de révolution.

Soient (S) et (S_1) deux surfaces qui se correspondent ponctuellement dans les conditions suivantes : M étant un point quelconque de (S) et M_1 le point qui lui correspond sur (S_1), deux éléments correspondants MM', $M_1 M'_1$ et la normale en M sont parallèles à un même plan.

Est-il possible de choisir les deux surfaces (S) et (S_1) de telle manière que les droites MM_1 soient tangentes en M à la première?

Pour répondre à cette question, rapportons la surface (S) aux courbes ($v = \text{const.}$), auxquelles les droites MM_1 seront tangentes, et à leurs trajectoires orthogonales ($u = \text{const.}$); son élément linéaire sera de la forme

$$ds^2 = A^2\,du^2 + C^2\,dv^2.$$

Soient Mx, My les tangentes aux lignes coordonnées, et Mz la normale à la surface; les coordonnées du point M_1 sont $(x, 0, 0)$. On a, pour les composantes du déplacement infiniment petit du point M,

$$A\,du, \quad C\,dv, \quad 0,$$

et, pour celles du déplacement correspondant de M_1 (1),

$$dx + A\,du, \quad C\,dv + (r\,du + r_1\,dv)x, \quad -(q\,du + q_1\,dv)x.$$

Nous exprimerons toutes les conditions du problème en écrivant que le déplacement du point M est parallèle à la projection

(1) *Voir* G. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 385.

du déplacement du point M_1 sur le plan $x M y$, ce qui donnera

$$\frac{dx + A\,du}{A\,du} = \frac{C\,dv + (r\,du + r_1\,dv)x}{C\,dv}.$$

Cette équation devant avoir lieu quels que soient du et dv, on en conclut, en tenant compte des valeurs de r et de r_1,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{A}{C}\dfrac{\partial A}{\partial v}x = 0, \\ C\dfrac{\partial x}{\partial v} = 0, \\ C\dfrac{\partial x}{\partial u} - x\dfrac{\partial C}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

On tire de là

$$A = U, \qquad x = U_1, \qquad C = U_1 V,$$

U et U_1 désignant des fonctions arbitraires de u et V une fonction arbitraire de v.

Nous arrivons donc à cette conclusion : Pour que la surface (S) satisfasse à la question, il est nécessaire et il suffit que son élément linéaire soit de la forme

$$ds^2 = U^2\,du^2 + U_1^2 V^2\,dv^2.$$

La surface (S) choisie, la surface (S_1) sera le lieu du point (U_1, o, o).

Il suffit de poser

$$\int U\,du = \alpha, \qquad \int V\,dv = \beta,$$

pour ramener l'élément linéaire ci-dessus à la forme la plus générale de l'élément linéaire des surfaces de révolution, savoir

$$ds^2 = d\alpha^2 + A(\alpha)\,d\beta^2.$$

Les équations (1) donnent ensuite

$$MM_1 = m\sqrt{A(\alpha)},$$

m désignant une constante arbitraire.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si deux surfaces (S) *et* (S_1) *se correspondent ponctuellement de telle manière que deux éléments correspondants* MM', $M_1M'_1$ *et la normale en* M *soient parallèles à un même plan; si, en outre, les droites* MM_1 *sont tangentes à la surface* (S), *cette dernière sera applicable sur une surface de révolution. L'élément linéaire ayant été ramené à la forme*

$$ds^2 = d\alpha^2 + A(\alpha)\,d\beta^2,$$

les droites MM_1 *seront tangentes aux lignes* $\beta = const.$, *et l'on aura* $MM_1 = m\sqrt{A(\alpha)}$, *m désignant une constante.*

Réciproquement, si une surface (S) *est applicable sur une surface de révolution d'élément linéaire*

$$ds^2 = d\alpha^2 + A(\alpha)\,d\beta^2,$$

et si l'on porte, à partir de chaque point M *de la surface* (S), *sur la tangente à la courbe* $\beta = const.$ *qui passe en ce point, une longueur* $MM_1 = m\sqrt{A(\alpha)}$, *m désignant une constante, le lieu du point* M_1 *sera une surface* (S_1) *qui correspondra à la surface* (S) *dans les conditions indiquées ci-dessus.*

SÉANCE DU 21 MARS 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. D. André : *Sur la structure des permutations.*

M. Antomari : *Sur les surfaces réglées applicables avec parallélisme des génératrices.*

M. Ém. Picard adresse une Note *Sur la méthode des approximations successives et les équations différentielles linéaires.*

SÉANCE EXTRAORDINAIRE DU 30 MARS 1894.

PRÉSIDENCE DE M. PICQUET.

Communications :

M. Pellet : *Sur les équations solubles par radicaux.*

M. Pellet : *Sur les équations numériques et les fonctions implicites.*

M. Andrade communique la Note suivante :

Note sur les intégrales de M. Schwarz.

Si l'on considère la suite infinie de fonctions $V_0, V_1, V_2, \ldots$ s'annulant toutes sur la surface qui limite un volume D, et satisfaisant, à l'intérieur de ce volume, aux équations

$$(1) \qquad \Delta V_{i+1} + V_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2\ldots),$$

et si l'on envisage les intégrales de volume relatives au domaine D,

$$W_{m,n} = \int V_m V_n \, d\tau,$$

le théorème de Green montre immédiatement que ces intégrales sont toutes positives et que l'on a

$$W_{m,n} = W_{0,m+n}.$$

De plus, on aura

$$(2) \qquad \frac{W_{01}}{W_{00}} < \frac{W_{02}}{W_{01}} < \frac{W_{03}}{W_{02}} < \ldots;$$

c'est là un théorème de M. Schwarz dont j'ai trouvé une démonstration qui, paraît-il, est nouvelle, et, comme elle est fort simple, peut-être lui accordera-t-on quelque intérêt.

En raison de la relation $W_{m,n} = W_{0,m+n}$, il suffit d'établir les deux premières inégalités (2).

Soient λ, μ, ρ les valeurs des trois premiers rapports. Nous aurons d'abord

$$\int V_0 V_1 \, d\tau - \lambda \int V_0^2 \, d\tau = 0,$$

$$\int V_0 V_2 \, d\tau - \mu \int V_0 V_1 \, d\tau = 0.$$

Remplaçant $\int V_0 V_2\, d\tau$ par $\int V_1^2\, d\tau$, et posant $V_1 = V_0 + \varepsilon_0$, nous obtenons

$$(1-\lambda)\int V_0^2\, d\tau + \int V_0 \varepsilon_0\, d\tau = 0,$$

$$(1-\mu)\int V_0^2\, d\tau + (2-\mu)\int V_0 \varepsilon_0\, d\tau + \int \varepsilon_0^2\, d\tau = 0;$$

d'où, en éliminant l'intégrale $\int V_0 \varepsilon_0\, d\tau$, dont nous ignorons le signe, nous tirons

$$[\lambda - \mu - (1-\lambda)(1-\mu)]\int V_0^2\, d\tau + \int \varepsilon_0^2\, d\tau = 0,$$

et, par suite,

$$(3) \qquad \lambda - \mu - (1-\lambda)(1-\mu) < 0,$$

inégalité non homogène. Là est le point essentiel de ma démonstration.

Pareillement, nous avons la relation

$$\int V_1 V_2\, d\tau - \rho \int V_0 V_2\, d\tau = 0,$$

que nous pourrons écrire

$$(1-\rho)\int V_0 V_2\, d\tau + \int \varepsilon_0 V_2\, d\tau = 0.$$

Si nous posons $V_2 = V_1 + \varepsilon_1$, elle devient

$$(1-\rho)\int V_0 V_2\, d\tau + \int \varepsilon_0 \varepsilon_1\, d\tau + \int \varepsilon_0 V_1\, d\tau = 0.$$

D'autre part, en écrivant ainsi l'équation de définition de μ,

$$(1-\mu)\int V_1^2\, d\tau + \mu \int \varepsilon_0 V_1\, d\tau = 0,$$

et éliminant, entre les deux dernières équations écrites, l'intégrale $\int \varepsilon_0 V_1\, d\tau$, dont nous ignorons le signe, nous aurons

$$[\mu(1-\rho) + \mu - 1]\int V_1^2\, d\tau + \mu \int \varepsilon_0 \varepsilon_1\, d\tau = 0.$$

Or, comme la suite ε_0, ε_1, ... jouit évidemment des mêmes propriétés que la suite des fonctions V. L'intégrale $\int \varepsilon_0 \varepsilon_1 \, d\tau$ est positive; donc on a

$$(4) \qquad \mu(1-\rho)+\mu-1<0.$$

Les inégalités (3) et (4) n'étant pas homogènes en λ, μ, ρ, une remarque fort simple achève la démonstration.

Si l'on fait sur le domaine D une transformation homothétique à l'échelle k, et si l'on fait sur les fonctions V_0, V_1, V_2, ... la substitution

$$V_n \mid k^{2n} V_n,$$

qui laisse inaltérée la suite des équations (1), les inégalités (2) à démontrer ne changent pas; car si les rapports λ, μ, ρ se changent en λ', μ', ρ', on a visiblement

$$\lambda^2 = k^2 \lambda', \qquad \mu = k^2 \mu', \qquad \rho = k^2 \rho'.$$

Considérons les inégalités (3) et (4), où λ', μ', ρ' remplaceraient λ, μ, ρ, nous pourrons faire $\mu' = 1$. Elles donnent alors, la première $\mu' > \lambda'$, la seconde $\rho' > \mu'$; donc enfin $\lambda < \mu < \rho$.

C. Q. F. D.