BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 190-198

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__190_1>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 JUIN 1895.

PRÉSIDENCE DE M. GOURSAT.

Communications :

M. Fleury : *Sur la considération de l'infini dans l'Analyse.*

M. Carvallo : *Démonstration du théorème de Coriolis.*

M. Raffy : *Sur la définition du genre des courbes algébriques planes.*

M. Laisant communique les observations suivantes :

A propos des asymptotes et des cercles de courbure.

Au sujet d'une récente Communication que j'ai faite à la Société, et qui est intitulée *Note relative aux asymptotes et aux* *cercles de courbure* [1], M. Émile Borel me fait remarquer que la propriété signalée peut se déduire de propositions plus générales relatives à l'ordre de contact des courbes aux points fondamentaux d'une transformation Cremona. Il ajoute qu'il s'est servi de cette transformation dans sa copie du concours général, en 1889, pour construire l'asymptote d'une courbe, et que cette copie a été imprimée chez Delalain, dans un Recueil de compositions couronnées aux concours généraux.

Bien que notre jeune et éminent Collègue me déclare qu'il n'élève à ce sujet aucune réclamation de priorité, je tiens à faire connaître à la Société les renseignements qu'il me communique, d'autant plus que cela ne pourra qu'attirer davantage l'attention sur une question fort intéressante au point de vue de l'enseignement.

M. Maupin adresse la Note suivante :

Note relative à un passage d'Albert Girard.

Que la théorie des fractions continues soit due à lord Brouncker, ou bien, comme l'affirme Libri, à Cataldi, il semble bien qu'Albert Girard en ait eu une idée fort nette, ainsi qu'il appert du passage suivant [2], relatif à la série de Fibonacci :

« Puis que je suis entré en la matière des nombres rationaux j'adjousteray encor deux ou trois particularitez non encor par cy devant practiquées, comme d'explicquer les radicaux extremement pres, par certains nombres à ce plus aptes et idoines que les autres, tellement que si l'on entreprenoit les mesmes choses par des autres nombres ce ne seroit sans grandement augmenter le nombre des charactères ; et pour exemple soit proposé d'explicquer par des rationaux la raison des segmens de la ligne coupée en la moyenne et extreme raison, soit faicte une telle progression 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc., dont chasque nombre soit egal

---

(1) Page 95 du présent Volume.

(2) Voyez à ce sujet les *Œuvres mathématiques* de Simon Stevin *de Bruges, où sont insérées les Mémoires mathématiques esquelles s'est exercé le Très haut et Très illustre Prince Maurice de Nassau, prince d'Aurenge, ... Le tout reveu, corrigé et augmenté par* Albert Girard Samielois, *Mathematicien*. In-folio de 678 p., Leyde, 1634. — Le passage cité est à la page 169.

aux deux precedens, alors deux nombres pris immédiatement denotteront la mesme raison, comme 5 à 8 ou 8 à 13, et tant plus grands, tant plus pres, comme ces deux 59 479 986 et 96 234 155, tellement que 13, 13, 21 constituent assez precisement un triangle isosceles ayant l'angle du pentagone. »

Je ferai remarquer seulement que, si l'on considère un triangle isoscèle dont l'angle au sommet vaille 108°, le rapport du côté à la base est égal à

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}$$

dont les réduites successives sont $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \ldots$, ce qui vérifie l'assertion d'Albert Girard.

Les nombres 59 475 986 et 96 234 155 sont inexacts et doivent être remplacés par 63 245 986 et 102 334 155. Est-il bien invraisemblable de supposer que cette erreur viendrait de ce que, considérant la suite 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., Albert Girard aurait écrit, comme vingt-cinquième terme, le nombre 111 393 pour 121 393? Cette omission d'une unité du cinquième ordre donnerait, au bout de treize opérations subséquentes, une nouvelle erreur de 377 unités du même ordre, et au bout de quatorze opérations une erreur de 610 unités. Or on a bien

$$\begin{cases} 6324 - 5947 = 377, \\ 10233 - 9623 = 610. \end{cases}$$

SÉANCE DU 19 JUIN 1895.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. Selivanoff : *Étude élémentaire des polynômes de Bernoulli.*

M. d'Ocagne : *Sur un problème proposé au dernier concours de l'École Polytechnique.*

SÉANCE DU 3 JUILLET 1895.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Selivanoff : *Sur les fractions continues périodiques.*

M. Demoulin adresse unę Note *Sur un théorème de Ribaucour et sur une propriété caractéristique des surfaces spirales.*

M. Picard transmet la Note suivante :

Sur les fonctions à espaces lacunaires;

Par M. G. d'Arone.

En modifiant convenablement la fonction connue $\Theta(x)$, M. Freedholm a pu construire la transcendante

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^{n^2} \qquad |a| < 1,$$

qui, pour des valeurs de x dont le module est moindre que l'unité, représente une fonction uniforme et continue ainsi que toutes ses dérivées dans un cercle de rayon un, contour inclus.

La représentation conforme nous permet d'affirmer le même fait pour la transcendante

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^n}{(x-\alpha_1)^{n^2}} \qquad |a_1| < 1,$$

où α_1 est l'affixe d'un point quelconque du plan, pour tous les points du plan extérieurs au cercle de centre α_1 et de rayon égal à l'unité.

Désignons alors par α_1, α_2, α_3 les affixes de trois points du plan tels que les circonférences de rayon égal à l'unité se coupent deux à deux; il est évident que la fonction

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{3} \frac{a_s^n}{(x-\alpha_s)^{n^2}} \qquad |a_s| < 1$$

existera dans l'espace compris en dehors de ces trois circonférences.

Or, par trois des six points d'intersection des trois circonférences convenablement choisis, traçons une circonférence; soit α l'affixe du centre et r le rayon; il est évident que la fonction

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{3} \left[\frac{a_s^n}{(x - a_s)^{n^2}} + \frac{\overline{ar}^{\,n^2}}{(x - \alpha)^{-n^2}} \right] \qquad |a_s| < 1$$

existera comme la fonction de Freedholm dans le triangle curviligne susdit.

Exemple I. — Suivant M. Appell, appelons $+1, +i, -1, -i$ les affixes de quatre points placés sur les axes rectangulaires, que nous prendrons comme centres, et ayant choisi comme rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, nous obtiendrons un quadrilatère curviligne.

Ensuite, de l'origine comme centre et avec le même rayon, décrivons une autre circonférence; il est évident que la fonction

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_1^n}{(x+1)^{n^2}} + \frac{a_2^n}{(x-1)^{n^2}} + \frac{a_3^n}{(x-i)^{n^2}} + \frac{a_4^n}{(x+i)^{n^2}} + \frac{a_5^n}{x^{-n^2}} \right]$$

existera seulement dans le susdit quadrilatère.

Exemple II. — Soient $+1$, -1 les affixes de deux points placés sur l'axe des x, que nous prendrons comme centres et, choisissant comme rayon l'unité, nous obtiendrons deux circonférences tangentes à l'origine des coordonnées. De ce point comme centre et avec un rayon égal à deux, on décrit une circonférence.

Dans l'espace compris entre la circonférence de rayon deux et les deux premières circonférences, la fonction

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_1^n}{(x+1)^{n^2}} + \frac{a_2^n}{(x-1)^{n^2}} + \frac{a_3^n}{x^{-n^2}} \right]$$

est uniforme et continue; dans tout autre espace elle n'a pas d'existence.

SÉANCE DU 17 JUILLET 1895.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. N. Delaunay, présenté par MM. Carvallo et Raffy.

Communications :

M. Raffy : *Sur les lignes de plus grande pente.*

M. Paul Adam fait la Communication suivante :

Sur la déformation des surfaces avec conservation des lignes de courbure.

Dans son Mémoire bien connu sur la déformation des surfaces [1], O. Bonnet s'est occupé des surfaces applicables les unes sur les autres avec conservation des lignes de courbure. Il a établi que la détermination de ces surfaces dépend de l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \sin 2\theta. \tag{1}$$

A une fonction $\theta(u, v)$ satisfaisant à cette équation correspond un couple de surfaces répondant à la question.

Si l'on suppose que θ ne dépende que de u, par exemple, on obtient les surfaces moulures de Monge (O. Bonnet arrive à ces surfaces par une autre voie); une surface moulure de Monge est, en effet, susceptible de se déformer d'*une manière continue* avec conservation des lignes de courbure.

On peut former l'équation (1) d'une manière très simple.

Supposant les surfaces cherchées rapportées à leurs lignes de courbure, considérons les formules de Codazzi; il faut y supposer les rotations p et q_1 égales à zéro, et le problème revient à trouver deux systèmes de solutions

$$\begin{array}{cccc} p_1, & q, & r, & r_1, \\ p'_1, & q', & r, & r_1, \end{array}$$

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XLII[e] Cahier.

des trois équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = -\, q r_1, \\[2mm] \dfrac{\partial q}{\partial v} = r p_1, \\[2mm] \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = -\, q p_1. \end{cases}$$

On doit donc avoir

$$p_1 \frac{\partial p_1}{\partial u} = p'_1 \frac{\partial p'_1}{\partial u},$$
$$q \frac{\partial q}{\partial v} = q' \frac{\partial q'}{\partial v},$$

et, en intégrant,

$$p'^2_1 = p_1^2 + \mathrm{V},$$
$$q'^2 = q^2 + \mathrm{U}.$$

Mais, en particularisant les variables u et v, on peut supposer les fonctions V et U égales à -2, et écrire

$$(3)\qquad \begin{cases} p'^2_1 = p_1^2 - 2, \\ q'^2 = q^2 - 2. \end{cases}$$

Multipliant ces deux équations membre à membre et remarquant que, d'après la dernière des équations (2),

$$p_1 q = p'_1 q',$$

on trouve

$$(4)\qquad p_1^2 + q^2 = 2.$$

Ainsi p_1, q, r et r_1 doivent satisfaire aux équations (2) et (4); ensuite le système (3) définit p'_1 et q'.

Posons alors

$$p_1 = \sqrt{2}\sin\theta,$$
$$q = \sqrt{2}\cos\theta.$$

La relation (4) est vérifiée d'elle-même; les deux premières équations (2) donnent

$$r_1 = \frac{\partial\theta}{\partial u},$$
$$r = \frac{\partial\theta}{\partial v},$$

et la dernière devient

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = \sin 2\theta,$$

ce qui est bien l'équation de Bonnet.

M. Bioche, au nom du Conseil de la Société, présente le rapport suivant :

Rapport sur un projet de Congrès mathématiques internationaux.

Il a été question depuis quelque temps, dans les correspondances échangées entre les mathématiciens de divers pays, d'un projet de congrès mathématiques internationaux. Les lecteurs de l'*Intermédiaire des mathématiciens* ont trouvé, dans les numéros de juillet et décembre 1894, des renseignements à ce sujet.

Les promoteurs du projet ont reçu des adhésions nombreuses et plusieurs sociétés, en particulier l'Association française pour l'avancement des Sciences, la Deutsche Mathematiker Vereinigung, la Société mathématique de New-York, la Société philomathique de Paris ont émis des vœux favorables.

Le Conseil de la Société mathématique de France, saisi de la question par M. Laisant, a décidé de proposer à la Société de suivre cet exemple.

Le projet d'organisation n'est pas définitivement arrêté ; mais les principes en sont bien établis et il est facile de se rendre compte qu'il est réalisable.

Voici le programme que traçait M. le professeur Wassilieff, de l'Université de Kazan : « Point de petites communications qui traitent des détails de la Science, et bien souvent n'intéressent que le rapporteur, mais de grands rapports sur les progrès et l'état de différentes parties de notre Science dans le siècle qui va se terminer. Je vous rappelle les beaux rapports de MM. Chasles et Bertrand pour l'Exposition de 1867. »

Les Congrès mathématiques internationaux auraient donc pour objet de donner une périodicité régulière à des rapports tels que ceux cités par M. Wassilieff, celui de M. Gino Loria sur le développement de la Géométrie, et divers autres. Ces rapports provoqueraient des discussions particulièrement intéressantes, en fournissant l'occasion de faire ressortir des idées générales et de signaler les desiderata de la Science. On aurait ainsi un inventaire raisonné et périodique des progrès des Mathématiques, qui compléterait le Répertoire bibliographique. Il a semblé au Conseil que la Société mathématique, après avoir prêté son concours à l'organisation du Répertoire, ne pouvait manquer d'aider aussi à celle des congrès internationaux.

Les Congrès se suivraient avec des intervalles de quelques années. L'idée des promoteurs de ces Congrès serait d'en provoquer un en 1897 pour fixer l'organisation définitive ; on a proposé pour siège de ce congrès Genève ou Bâle ; en tous cas, il est probable que la ville choisie serait une ville de pays neutre aussi centrale que possible. Le second congrès se tiendrait à Paris à l'occasion de l'Exposition de 1900.

Ce court exposé permettra, je pense, aux membres de la Société de se rendre compte de l'intérêt des Congrès mathématiques internationaux et des conditions de leur réalisation ; il pourra justifier ainsi la proposition que je fais au nom du Conseil *d'adhérer aux principes de cette organisation et d'y prendre une part active.*

Les conclusions de ce rapport sont mises aux voix et adoptées à l'unanimité.