Bulletin de la S. M. F.

SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 24 (1896), p. 184-199
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__184_1>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 1er JUILLET 1896.

PRÉSIDENCE DE M. KŒNIGS.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Euverte, présenté par MM. Laisant et Kœnigs; M. Courtin, présenté par MM. Laisant et Touche; M. Larose, présenté par MM. Carvallo et Laisant; M. Hadamard, présenté par MM. Kœnigs et Tannery; M. Laugel, présenté par MM. Hermite et Picard; M. Baker, présenté par MM. Fields et Raffy ; M. Boulanger, présenté par MM. Humbert et Painlevé.

Communications :

M. Kœnigs : *Sur les courbes à torsion constante.*

M. Raffy fait la Communication suivante :

Sur le signe de la torsion des courbes gauches.

Une courbe gauche étant tracée dans l'espace, pour nous rendre compte de son allure en l'un de ses points M, imaginons qu'un observateur soit debout sur l'une des faces du plan xMy osculateur en M, et qu'il regarde le point M. Comme la courbe traverse ce plan en M, l'un des deux arcs de courbe séparés par le point M lui paraîtra *au-dessous* du plan xMy, l'autre *au-dessus.* Si l'arc *inférieur* est à sa gauche, il jugera qu'un point qui décrit la courbe en s'élevant *monte de gauche à droite;* on dit alors que l'allure de la courbe en M est *dextrorsum* (*sinistrorsum* dans le cas contraire).

Ce qui justifie cette distinction importante, c'est que la courbe, comme on le voit aisément, présente la même apparence à l'observateur, quelle que soit celle des deux faces du plan osculateur sur laquelle celui-ci se tient debout, pourvu qu'il se place toujours du même côté du plan rectifiant xMz, soit du côté du centre de courbure K relatif au point M (côté des y positifs), soit du côté opposé.

Convenons maintenant de placer l'observateur *du côté du plan rectifiant où n'est pas le centre de courbure.* Donnons au trièdre (M, xyz) la disposition habituellement adoptée en Géométrie analytique et choisissons le signe de la torsion (indépendant, comme on sait, du sens des arcs croissants) de telle sorte qu'on ait pour les points de la courbe voisins de l'origine M

$$x = s + \ldots, \qquad z = -\frac{6s^3}{RT} + \ldots.$$

Nous arriverons à cette règle : *une courbe à torsion positive est dextrorsum, une courbe à torsion négative est sinistrorsum.*

Les conclusions seraient inverses si l'on changeait la disposition des axes ou la situation de l'observateur.

J'ajouterai encore ce théorème : *Si deux courbes ont, aux extrémités d'arcs égaux, leurs courbures égales, leurs torsions égales et de signes contraires, l'une d'elles peut être rendue symétrique de l'autre par rapport à un plan.*

M. Hadamard adresse la Note suivante :

Sur les fonctions entières.

Dans un précédent Mémoire ([1]), j'ai étudié les relations qui existent entre l'ordre de grandeur des coefficients du développement d'une fonction entière et l'ordre de grandeur de la fonction pour des valeurs infinies de la variable. J'ai reconnu depuis que ces relations pouvaient se mettre sous une forme plus simple et en même temps plus exacte. Je vais exposer sommairement les résultats auxquels j'ai été conduit à cet égard.

Soit la fonction entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \ldots. \tag{1}$$

Comme dans le Mémoire cité, je porterai les valeurs de m en abscisses et les valeurs de $\mu = \mathrm{L}\left|\frac{1}{a_m}\right|$ en ordonnées. Les coefficients de la série seront ainsi représentés par une série de points auxquels je circonscrirai le polygone de Newton P, ainsi qu'il a été expliqué *loco citato*.

D'autre part, je désignerai par η le logarithme du module maximum de la fonction sur le cercle de rayon e^ξ (où ξ est un nombre réel quelconque). Le lieu du point (ξ, η) est une courbe C qui tourne toujours sa concavité vers les η positifs; elle aura en général (mais non en tous ses points) une tangente, ce dont d'ailleurs nous n'aurons pas à nous servir.

Soit (ξ, η) un point de cette courbe C. Les expressions des coefficients a_m sous forme d'intégrales définies nous montrent que l'on a

$$|a_m| < e^{\eta - m\xi},$$

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*; 1893.

ou bien

$$(2) \qquad \mu + \eta - m\xi > 0.$$

Le premier membre égalé à o représente, en supposant le plan du point (m, μ) et le plan du point (ξ, η) superposés, la polaire du point ξ, η par rapport à la parabole $m^2 - 2\mu = 0$. *Cette polaire doit donc laisser le point* (m, μ) *en dessus.*

Nous arrivons, par conséquent, à la première conclusion suivante :

Prenons le contour C_1, *réciproque du contour* P *par rapport à la parabole*

$$(3) \qquad m^2 - 2\mu = 0;$$

la courbe C *est tout entière au-dessus du contour* C_1.

Soit, d'autre part, $\mu = m\alpha - \beta$ un côté du polygone P. Le point (α, β) est un sommet de C_1. Les coefficients a_m seront tous inférieurs en valeur absolue aux valeurs correspondantes de $e^{\beta - m\alpha}$. Remplaçant dans l'équation (1), on obtient, pour $\xi < \alpha$, l'inégalité

$$(4) \qquad e^{\eta} < \frac{e^{\beta}}{1 - e^{\xi - \alpha}}.$$

Considérons la courbe $e^{\xi} + e^{-\eta} = 1$. C'est une courbe tout entière comprise dans l'angle des ξ négatifs et des η positifs, et qui admet ces axes pour asymptotes. Transportons l'origine de ces axes successivement aux différents sommets du polygone C_1 (sans changer leur direction). Nous aurons ainsi une série de courbes que nous rejoindrons par des tangentes communes, de manière à former un contour mixtiligne C_2 dont les côtés courbes se raccordent aux côtés droits qui les comprennent. *La courbe* C *est tout entière en dessous de ce second contour* C_2.

Nous avons donc ainsi constamment deux contours, dont l'un limite la fonction inférieurement, l'autre supérieurement. D'ailleurs, ces deux contours vont en se resserrant indéfiniment et, par conséquent, *le contour* C_1, par exemple, *représente asymptotiquement la courbe* C (en définissant convenablement, bien entendu, ce qu'on doit entendre par cette locution).

SÉANCE DU 15 JUILLET 1896.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. Demoulin : *Sur les surfaces réglées minima.*

M. MANNHEIM adresse la Note suivante :

Sur le rapport des deux courbures d'une courbe gauche.

Dans la séance du 20 mai 1896, M. Mangeot s'est occupé d'une manière de représenter le rapport des deux courbures d'une courbe gauche et il a prouvé que *lorsqu'un point se déplace sur une génératrice* G *d'un cône quelconque, le rayon de courbure principal du cône en ce point varie proportionnellement à sa distance au sommet du cône, et le coefficient de proportionnalité est égal au rapport de la première à la seconde courbure d'une courbe quelconque ayant ses tangentes parallèles aux génératrices du cône, ces courbures étant relatives au point où la tangente est parallèle à* G.

D'après cela, le rapport des deux courbures de la courbe gauche est égal à la tangente de l'angle compris entre G et la droite Δ qui joint le sommet du cône au centre de courbure principal de cette surface relatif à un point de G.

Mais on sait (voir *Principes et développements de Géométrie cinématique,* p. 238) que ce rapport est aussi égal à la tangente de l'angle compris entre la tangente de la courbe gauche, parallèle à G, et la droite rectifiante de cette courbe pour le point de contact de cette tangente.

Rapprochant ces deux résultats, on doit conclure que Δ est parallèle à cette droite rectifiante.

En effet, la droite Δ est l'intersection du plan mené par G normalement au cône et du plan analogue mené par la génératrice infiniment voisine de G; comme ces deux plans sont respectivement parallèles à deux plans rectifiants de la courbe gauche, Δ est bien une droite parallèle à la droite rectifiante en question.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 NOVEMBRE 1896.

PRÉSIDENCE DE M. KŒNIGS.

Communications :

M. Duporcq : *Sur les centres de gravité.*
M. Kœnigs : *Sur les mouvements identiques à leurs inverses.*

M. Appell adresse la Note suivante :

Les équations établies par Cauchy dans la deuxième partie, section première, de son Mémoire sur la *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie,* peuvent être interprétées comme il suit :

Si l'on appelle a, b, c *et* u_0, v_0, w_0 *les coordonnées et les projections de la vitesse initiale d'une molécule,* x, y, z *et* u, v, w *les quantités analogues au temps* t, *l'expression*

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc)$$

est une différentielle exacte.

On retrouve ainsi facilement, en partant des équations de Cauchy, le théorème de Helmholtz sur les tourbillons.

M. Lemoine expose, d'après des renseignements personnels récents, l'état de la question des *Congrès internationaux de Mathématiciens.*

Il rappelle que l'échange préalable des vues de mathématiciens de diverses nations semblant désigner une ville de Suisse comme un lieu très favorable pour tenir la première assemblée internationale qui organiserait les Congrès périodiques, et, en particulier, Zurich parmi elles, les mathématiciens de cette ville ont décidé de s'occuper de la convocation des mathématiciens en 1897.

La Société Mathématique de France, sur la proposition de son Conseil, avait adhéré au projet, par vote unanime, dans sa séance du 17 juillet 1895.

La Société allemande des mathématiciens (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*), qui avait appuyé le projet de tels Congrès lors de sa réunion de Vienne, en 1894, avant que le lieu de réunion ne fût en question, a reçu, à la réunion de Francfort-sur-le-Mein, à la fin du mois de septembre dernier, une invitation du Comité provisoire de Zurich, invitation que lui apportait le Professeur Rudio, membre de ce Comité.

Il est déjà décidé que la réunion aura lieu vers le 10 août 1897, à Zurich, et qu'elle durera trois ou quatre jours; la date reste à déterminer d'une façon précise. Un Comité zurichois est nommé; il se compose de MM. Geiser, Hurwitz, Rudio, F. Weber et Franel; il doit s'adjoindre des mathématiciens étrangers afin de prendre le caractère international. Alors, après entente avec les diverses Sociétés de Mathématiques de l'ancien et du nouveau monde, il enverra des invitations personnelles aux mathématiciens; elles seront faites dans l'esprit le plus large. Le Comité s'occupera également de l'organisation générale et du programme du Congrès.

Parmi les renseignements généraux dont M. Lemoine a connaissance, il signale que la Société Mathématique d'Édimbourg a adhéré au projet qui lui a été soumis par J. Mackay; que l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, au Congrès de Caen, en 1895, a émis un vote favorable; que les savants russes ont été des premiers à s'intéresser au projet et s'en sont occupés, particulièrement à la réunion de Kazan, le 6 septembre 1896, à propos du centenaire de Lobatchefsky, où M. Wassilief a pris la parole sur la question; que la Société Mathématique Américaine s'y est associée dès le mois d'août 1894. Il termine en disant que les fondateurs de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* ont trouvé dans des lettres de savants allemands et russes, écrites à propos de son apparition prochaine, les prémices de l'idée qu'ils ont propagée personnellement d'abord et qui est aujourd'hui en cours de réalisation. Le Journal en a, depuis, entretenu plusieurs fois ses lecteurs; il continuera à leur faire connaître les notes et les décisions y relatives qu'on voudra bien lui communiquer.

SÉANCE DU 18 NOVEMBRE 1896.

PRÉSIDENCE DE M. KOENIGS.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Andoyer, présenté par MM. Kœnigs et Raffy; M. Girardville, présenté par MM. Laisant et Lemoine.

Démissions :

MM. Charles Henry, Laquière et de Presle adressent leurs démissions de membres de la Société.

Communications :

M. Fouret : *Méthode pour exprimer qu'une droite est située sur une quadrique.*

M. Humbert : *Observations sur le même sujet.*

M. Laisant communique la Note suivante :

Identités relatives à des polynômes entiers.

Il y a déjà plusieurs mois, M. Maillard, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers, m'a communiqué les propositions suivantes :

Si $f(x) = 0$ *est une équation du troisième degré ayant pour racines* a, b, c, *on a identiquement*

$$(1) \qquad f'(a) + f'(b) + f'(c) + 3f'\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 0;$$

Si $F(x) = 0$ *est une équation du quatrième degré ayant pour racines* a, b, c, d, *on a identiquement*

$$(2) \qquad F'(a) + F'(b) + F'(c) + F'(d) + 8F'\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) = 0.$$

En cherchant à généraliser ces résultats, qui paraissent à un premier examen ne pas s'étendre au delà du quatrième degré, j'ai trouvé les deux identités suivantes, que je me borne ici à énoncer sans démonstration, et dans lesquelles h représente la moyenne arithmétique des racines $a, b, c, \ldots, l$ d'une équation $f(x) = 0$

de degré m :

$$(3)\qquad \sum f^{(m-3)}(a) + \frac{m^2(m-3)}{2} f^{(m-3)}(h) = 0,$$

$$(4)\qquad \sum f^{(m-2)}(a) + m(m-2) f^{(m-2)}(h) = 0;$$

les sommations s'étendent, naturellement, à toutes les racines de l'équation.

La relation (1) est un cas particulier de l'identité (4), en supposant $m = 3$, et la relation (2) est un cas particulier de l'identité (3) en supposant $m = 4$. On remarquera en outre que, si dans l'identité (4) on fait $m = 4$, on a la relation suivante, relative à un polynôme $f(x)$ du quatrième degré :

$$f''(a) + f''(b) + f''(c) + f''(d) + 8f''\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) = 0.$$

M. Duporcq fait la Communication suivante :

Sur les centres de gravité des courbes parallèles.

Dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1895, p. 461) j'ai démontré le théorème suivant :

A tout déplacement d'un plan mobile sur un plan fixe correspond un point dont la trajectoire est fermée. Le centre de gravité de cette trajectoire coïncide avec celui de la courbe formée dans le plan fixe par les centres instantanés de rotation, à la condition de supposer que les arcs de ces courbes ont des masses proportionnelles aux angles dont tourne le plan mobile pendant la description de ces arcs.

Dans le cas particulier où le plan mobile est entraîné par le roulement d'une circonférence sur une courbe fermée, le centre de cette circonférence décrit une trajectoire fermée, dont un arc quelconque est visiblement proportionnel à l'angle dont tourne le plan mobile pendant la description de cet arc : le théorème général qui précède va donc nous donner des propriétés des centres de gravité des périmètres de courbes fermées parallèles. Je rappellerai d'ailleurs que le périmètre d'une courbe y aura sa signification analytique, c'est-à-dire que deux arcs séparés par un point de rebroussement doivent se retrancher au lieu de s'ajouter.

Parmi les courbes fermées parallèles entre elles, il y en aura toujours une, Γ, dont le périmètre ainsi défini sera nul; et si R est la distance à cette dernière d'une, C, des courbes parallèles, celle-ci aura pour longueur $\pm 2n\pi R$, selon qu'elle se trouvera d'un côté ou de l'autre de Γ, en désignant par $2n\pi$ la courbure de Γ. D'ailleurs l'aire de C et celle de Γ différeront de l'aire $n\pi R^2$.

Cela posé, soit $d\varphi$ la courbure d'un arc ds d'une courbe fermée C; soit C_1 une courbe parallèle à C, décrite par le centre d'une circonférence de rayon ρ, roulant sur C : du théorème général on déduit que le périmètre de C_1 a pour centre de gravité celui de la courbe C, si l'on suppose la masse de l'arc ds proportionnelle à la somme $(ds + \rho\, d\varphi)$. Ce résultat peut s'interpréter ainsi : soit ω le *centre de gravité des courbures* de C (la masse de ds étant supposée proportionnelle à $d\varphi$), et soient O et O_1 les centres de gravité des périmètres des courbes C et C_1, supposées homogènes : le point O_1 sera le centre de gravité des points O et ω, si l'on attribue au point O une masse proportionnelle au périmètre de la courbe C, et au point ω une masse proportionnelle à la somme $\int_C \rho\, d\varphi$, qui représente évidemment la différence des périmètres des courbes C_1 et C. Par suite les points ω, O et O_1 sont en ligne droite, et les distances ωO et ωO_1 sont inversement proportionnelles aux périmètres des courbes C et C_1.

Ces résultats se résument ainsi :

Des courbes fermées, géométriques ou non, parallèles entre elles, ont le même centre de gravité des courbures. Les centres de gravité de leurs périmètres sont sur une droite passant par ce point fixe, et leurs distances à ce point sont inversement proportionnelles aux périmètres correspondants.

Autrement dit :

Le centre de gravité des courbures, commun à une famille de courbes fermées parallèles, a, en direction et en grandeur, le même moment relativement aux périmètres de ces courbes.

Il est bien évident que cette droite, lieu des centres de gravité des périmètres, est aussi le lieu des centres de gravité des aires comprises entre deux quelconques des courbes fermées parallèles. On voit aisément que le centre de gravité de l'aire comprise entre deux courbes parallèles C et C′ coïncide avec celui du périmètre de la courbe parallèle à C et C′, qui est équidistante de ces courbes. On en déduit sans peine la propriété suivante :

Soient ω le centre de gravité des courbures, commun à une famille de courbes fermées parallèles C, $x\omega x'$ *la droite qui constitue le lieu des centres de gravité des périmètres de ces courbes; soit enfin γ le centre de gravité de l'aire de celle,* Γ, *des courbes* C, *dont le périmètre est nul. Le lieu des centres de gravité des aires des courbes* C *est une conique admettant pour centre le milieu de $\gamma\omega$ et touchant en ω la droite $x\omega x'$.*

Pour terminer, j'indiquerai, sans en développer les démonstrations, quelques résultats applicables à des courbes parallèles *non fermées*. Ils se déduisent des précédents, en formant des courbes fermées au moyen des courbes données, dont on prend les symétriques par rapport à leur normale commune en l'une de leurs extrémités, puis qu'on ferme par des arcs de cercle concentriques. On trouve ainsi que :

Les centres de gravité des courbures ω d'une famille d'arcs ab parallèles entre eux sont sur une droite, parallèle à la bissectrice de l'angle des normales communes extrêmes. Si φ désigne cet angle, deux courbes distantes de ρ ont des centres de gravité dont la distance est

$$2\frac{\rho}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Quant aux centres de gravité g des périmètres de ces arcs, ils sont sur une hyperbole dont une des asymptotes est parallèle à la bissectrice de l'angle des normales extrêmes.

Les droites $g\omega$ enveloppent une parabole, qui touche également les perpendiculaires abaissées des centres de gravité g sur les cordes ab correspondantes.

SÉANCE DU 2 DÉCEMBRE 1896.

PRÉSIDENCE DE M. HIOUX.

Communications :

M. Antomari : *Conditions pour qu'une équation algébrique ait un nombre donné de racines distinctes.*

M. Carvallo : *Sur l'intégrale de Clausius pour les cycles non réversibles.*

M. D'OCAGNE adresse la Note suivante :

Sur le signe de la torsion des courbes gauches et du paramètre de distribution des surfaces réglées.

Dans ses *Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse* (¹), récemment parues, M. Raffy a adopté, quant au signe de la torsion des courbes gauches (qui entraîne celui du paramètre de distribution des surfaces réglées), une convention qu'il a d'ailleurs fait connaître aux lecteurs de ce *Bulletin* (²).

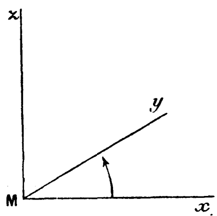
J'ai eu, en raison de mon enseignement à l'École des Ponts et Chaussées, à m'occuper aussi de la question, et la convention que j'ai admise [et qui est reproduite dans mon *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale* (³), paru il y a quelques mois] se trouve être inverse de celle de notre Collègue.

Aussi demanderai-je la permission d'indiquer ici la raison de mon choix. Il suffit, pour passer de la convention de M. Raffy à la mienne, de changer, dans la définition très précise qu'il a donnée à la page 185 de ce *Bulletin* (avant-dernier alinéa), les mots : « Donnons au trièdre (M, xyz) la disposition habituellement adoptée... », par ceux-ci : « Donnons au trièdre (M, xyz) une disposition telle que, considérés de l'intérieur du trièdre, chacun des trois angles xMy, yMz et zMx soit compté dans le sens di-

(¹) Pages 113 et 201.
(²) Page 185.
(³) Pages 301, 311 et 361.

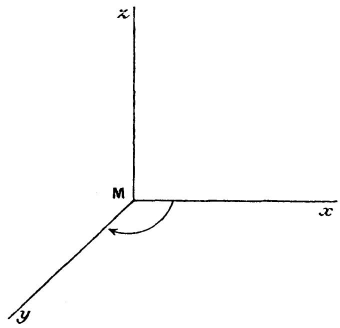
rect, c'est-à-dire dans le sens trigonométrique *positif* (*fig.* 1). »

Fig. 1.



Avec la disposition habituellement adoptée (*fig.* 1 *bis*), chacun

Fig. 1 *bis*.



de ces trois angles est compté dans le sens rétrograde ou trigonométrique *négatif,* ce qui me semble peu rationnel.

On ne voit, en effet, aucune raison pour que le sens positif des angles sur le plan des xy soit changé suivant que ce plan est considéré seul ou comme rattaché à l'axe des z.

Je reconnais que la convention à laquelle je me suis arrêté va contre les usages reçus; mais elle me semble davantage dans la logique des choses et plus conforme au besoin d'uniformité qui se fait sentir dans le domaine mathématique.

M. Laisant, à propos de la Communication de M. d'Ocagne, présente quelques observations sur un moyen de définir l'allure des courbes gauches (*dextrorsum* ou *sinistrorsum*).

SÉANCE DU 16 DÉCEMBRE 1896.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Laisant : *Sur l'organisation des Congrès internationaux de mathématiciens.*

M. Andoyer : *Détermination des racines communes à plusieurs équations.*

M. Duport fait la Communication suivante :

Sur la constitution des atomes et l'action de la matière sur la matière.

Comme suite au Mémoire que j'ai publié récemment dans le *Bulletin* (t. XXIV) sous le même titre, et où j'ai montré que les atomes doivent être considérés comme de petits corps solides, j'ai obtenu les résultats suivants :

1° Les moments principaux d'inertie relatifs au centre de gravité d'un atome sont égaux;

2° L'action d'un point M d'un atome sur un point A du même atome ne saurait dépendre seulement de la position relative de ces deux points et de leurs vitesses;

3° Cette action peut être représentée par le segment

$$\omega^2(AP)\mu\frac{dv}{V},$$

P étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur la vitesse de rotation de l'atome, cette vitesse étant considérée comme ayant pour origine le point M, μ étant la masse du point A, dv le volume du point M, V le volume de l'atome.

M. Laisant fait la Communication suivante :

Propriétés algébriques des coefficients du binôme.

Il y a plusieurs années déjà, j'ai communiqué à la *Société mathématique* une propriété des coefficients du binôme, sans accompagner cette communication d'aucune Note. Je n'avais alors pas de démonstration algébrique satisfaisante; un peu plus tard, au Congrès de Besançon (1893), je donnai la même proposition à titre d'exemple, dans une communication sur les tableaux de sommes; la démonstration était alors facile, mais assez indirecte. Dernièrement, cette question m'étant retombée sous les yeux, j'ai trouvé un moyen, purement algébrique et très élémentaire, d'établir la propriété dont il s'agit, et dont voici l'énoncé :

Si l'on forme le Tableau, de $n+1$ colonnes et de n lignes,

$$\left\|\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \ldots & n^2 & (n+1)^2 \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \ldots & n^{n-1} & (n+1)^{n-1} \end{array}\right\|$$

et si l'on désigne les déterminants qui résultent de la suppression de la 1^re^*, de la* 2^e^*, ..., de la* $(n+1)^{\text{ième}}$ *colonne par*

$$\Delta_0,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_{n-1},\ \Delta_n,$$

les valeurs des termes de cette suite sont proportionnelles aux coefficients du développement de la puissance $n^{\text{ième}}$ *d'un binôme.*

Appelons $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ ces coefficients, de sorte qu'on a l'identité

$$(1) \qquad c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n = (1+x)^n.$$

Si nous multiplions les deux membres par x, et si nous prenons les dérivées, il vient

$$(2) \quad c_0 + 2c_1 x + 3c_2 x^2 + \ldots + (n+1)c_n x^n = (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1}.$$

Soit $x = -1$. Les deux identités (1) et (2) nous donnent

$$\begin{aligned} c_0 - c_1 + c_2 \ldots \pm c_n &= 0, \\ c_0 - 2c_1 + 3c_2 \ldots \pm (n+1)c_n &= 0. \end{aligned}$$

Il est clair qu'en prenant la dérivée de l'identité (2) après l'avoir multipliée par x, et en faisant $x = -1$, puis en continuant de la même manière, on aura successivement

$$\begin{aligned} c_0 - 2^2 c_1 + 3^2 c_2 \ldots \pm (n+1)^2 c_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ c_0 - 2^{n-1} c_1 + 3^{n-1} c_2 \ldots \pm (n+1)^{n-1} c_n &= 0. \end{aligned}$$

L'ensemble de ces identités linéaires en $c_0, c_1, \ldots, c_n$ montre que l'on a

$$\frac{c_0}{\Delta_0} = \frac{c_1}{\Delta_1} = \ldots = \frac{c_n}{\Delta_n}.$$

Il est visible qu'on ne peut avoir des identités de la forme indiquée que jusqu'à la $(n-1)^{\text{ième}}$ opération. Si l'on continuait au delà, on obtiendrait, en effet, en prenant les dérivées, des termes qui ne contiendraient plus $(1+x)$ en facteur.

M. Andoyer indique une autre démonstration de la propriété ci-dessus.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA DISTRIBUTION DES ZÉROS DE LA FONCTION $\zeta(s)$ ET SES CONSÉQUENCES ARITHMÉTIQUES (¹);

Par M. Hadamard.

I. — *Sur les zéros de la fonction ζ et de quelques fonctions analogues.*

1. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann est définie, lorsque la partie réelle de s est plus grande que 1, par l'équation

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \tag{1}$$

où p désigne successivement les différents nombres premiers; les logarithmes sont népériens. Elle est holomorphe dans tout le plan, sauf au point $s = 1$, qui est un pôle simple. Elle ne s'annule pour aucune valeur de s dont la partie réelle soit supérieure à 1, puisque le second membre de l'équation (1) est fini. Mais elle admet une infinité de zéros imaginaires dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Stieltjes avait démontré, conformément aux prévisions de Riemann, que ces zéros sont tous de la forme

(¹) Les résultats fondamentaux du présent Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences, dans la séance du 22 juin 1896.