SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 33-36
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__33_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 FÉVRIER 1897.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Dumont, présenté par MM. Laisant et Bioche; M. Nicollier, présenté par MM. Raffy et Dumas; M. Cabreira, présenté par MM. Laisant et d'Ocagne.

Communications :

M. Picard : *Développements en séries des intégrales des systèmes d'équations différentielles.*

M. Duporcq : *Sur les barycentres des surfaces parallèles.*

M. Félix Lucas communique la Note suivante :

Note relative à la théorie des nombres.

Considérons le polynôme

$$\varphi_m = (x+y)^m - x^m - y^m,$$

en supposant l'exposant m premier et impair.

On a, identiquement, les formules particulières

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_3 = 3xy(x+y), \\ \varphi_5 = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2), \\ \varphi_7 = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2, \\ \varphi_{11} = 11xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\,[(x^2+xy+y^2)^3+x^2y^2(x+y)^2], \\ \varphi_{13} = 13xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2[(x^2+xy+y^2)^3+2x^2y^2(x+y)^2]. \end{cases}$$

On a aussi les formules générales :

1° Pour $m = 6k-1$, l'entier k étant supérieur à 2,

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi_m = mxy(x+y)(x^2+xy+y^2) \\ \qquad \times\left[(x^2+xy+y^2)^{\frac{m-5}{2}} + x^2y^2(x+y)^2\mathrm{U}\right]. \end{cases}$$

U étant un polynôme homogène du degré $m - 11$, dont la valeur pour $m = 17$ est

$$U = 5(x^6 + y^6) + 15\,xy(x^4 + y^4) + 31\,x^2y^2(x^2 + y^2) + 37\,x^3y^3;$$

2° Pour $m = 6k + 1$, l'entier k étant supérieur à 2,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi_m &= m\,xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2 \\ &\times\left[(x^2+xy+y^2)^{\frac{m-7}{2}} + x^2y^2(x+y)^2\,V\right], \end{aligned}\right.$$

V étant un polynôme homogène du degré $m - 13$, dont la valeur pour $m = 19$ est

$$V = 7(x^6 + y^6) + 21\,xy(x^4 + y^4) + 45\,x^2y^2(x^2 + y^2) + 55\,x^3y^3.$$

La démonstration de ces formules, que je crois nouvelles, ne présente aucune difficulté sérieuse.

Elles conduisent immédiatement au théorème suivant :

Théorème. — *Désignons par m un exposant premier impair et par x et y deux entiers premiers entre eux et considérons le binôme $x^m + y^m$.*

Si $(x + y)$ est premier avec m, il est premier aussi avec $\dfrac{x^m + y^m}{y + x}$.

Si $(x + y)$ est divisible par m, le produit $m(x + y)$ est premier avec $\dfrac{x^m + y^m}{m(x + y)}$.

Voici un corollaire de ce théorème. Si l'équation

$$x^m + y^m = z^m$$

était résolue en nombres entiers, on aurait nécessairement :

1° Si aucun des binômes premiers entre eux $x + y$, $z - x$ et $z - y$ n'était divisible par m,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x + y &= \alpha^m, & z &= \alpha A, \\ z - x &= \beta^m, & y &= \beta B, \\ z - y &= \gamma^m, & x &= \gamma C, \end{aligned}\right.$$

α, β, γ, A, B, C étant six nombres premiers entre eux deux à deux.

2° Si un des binômes dont il s'agit, soit, par exemple, $(x+y)$, était un multiple de m,

$$(5)\qquad \begin{cases} x+y = m^{m-1}\alpha^m & z = m\alpha A \\ z-x = \beta^m & y = \beta B \\ z-y = \gamma^m & x = \gamma C, \end{cases}$$

$m\alpha$, β, γ, A, B, C étant six nombres premiers entre eux deux à deux.

Mon savant ami, M. Jordan, membre de l'Institut, auquel j'ai communiqué ces formules (4) et (5), m'a appris qu'elles étaient déjà connues de lui.

M. Émile Picard adresse la Note suivante :

Remarques au sujet d'une Communication récente de M. I. Bendixson (¹).

Je viens de lire, dans le dernier Cahier du *Bulletin de la Société mathématique*, une intéressante étude de M. Bendixson relative à l'existence de l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} f(x, y) = 0,$$

quand on ne suppose pas que la fonction $f(x, y)$ est analytique. Je me permets de faire remarquer que je me suis occupé de la même question à la fin d'une Note relative aux méthodes d'approximations successives, qui a été insérée par M. Darboux dans le tome IV de ses *Leçons sur la Géométrie des surfaces* (p. 353), et imprimée en juin 1895. La méthode que j'ai suivie diffère d'ailleurs de celle du savant géomètre de Stockholm; aussi son article conserve-t-il tout son intérêt.

(¹) Annexe au procès-verbal de la séance du 3 février (Note reçue le 8 février). Le travail de M. Bendixson a été présenté à la Société dans la séance du 5 février 1896. Les Notes qui complètent le quatrième Volume de l'Ouvrage de M. Darboux ont paru en mai 1896. (*Réd.*).

SÉANCE DU 17 FÉVRIER 1897.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Grévy : *Sur les équations fonctionnelles avec second membre.*

M. d'Ocagne : *Construction de la conique osculatrice en un point d'une courbe plane.*

M. Raffy : *Sur une transformation analogue aux transformations de contact.*

M. Goursat adresse un Mémoire *Sur une équation aux dérivées partielles.*

M. d'Ocagne présente, de la part de M. Greenhill, un stéréoscope et une collection de diagrammes stéréoscopiques. Ces figures permettent de voir en relief des exemples de chaînette sphérique et de courbe gyrostatique, choisis dans les cas où leur détermination a été obtenue par M. Greenhill au moyen des intégrales pseudo-elliptiques.