BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 184-200

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__184_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 4 AVRIL 1900.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Élections :

M. Renard, présenté par MM. Blutel et Laisant; M. Estienne, présenté par MM. Appell et Borel, sont élus, à l'unanimité, membres de la Société.

Communications :

M. Bricard : *Sur les surfaces ayant un système de lignes de courbure égales.*

M. Desaint : *Sur la généralisation d'un résultat dû à M. Borel.*

SÉANCE DU 18 AVRIL 1900.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communication :

M. Touche : *Sur les forces extérieures.*

SÉANCE DU 3 MAI 1900.

PRÉSIDENCE DE M. MAURICE D'OCAGNE.

Communications :

M. André : *Sur un théorème de la Géométrie des coniques.*

M. Hoffbauer : *Sur une transformation des déterminants.*

M. Andoyer présente quelques observations à ce sujet.

M. Laisant : *Sur quelques propriétés des figures semblables dans le plan et dans l'espace.*

MM. Fontené et Bricard présentent quelques observations à ce sujet.

SÉANCE DU 16 MAI 1900.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Demoulin : *Sur quelques formules nouvelles de la théorie des congruences rectilignes.*
M. Hadamard : *Sur l'équation de Laplace.*

SÉANCE DU 6 JUIN 1900.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Élection :

M. Firmin Comte, présenté par MM. Brocard et Laisant, est élu, à l'unanimité, membre de la Société.

Communications :

M. Touche : *Observations sur les principes de la Dynamique.*
M. Duporcq : *Sur les cercles circonscrits aux triangles circonscrits à une conique.*
M. Blutel : *Sur les surfaces admettant un système de courbes tétraédrales comme lignes asymptotiques.*

SÉANCE DU 20 JUIN 1900.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

La Société, réunie en Assemblée générale, convoquée par délibération spéciale du Conseil, étudie le traité à intervenir avec le Conseil de l'Université de Paris. Le *quorum* n'étant pas atteint, l'Assemblée décide qu'il y a lieu de poursuivre la question et de convoquer une nouvelle Assemblée générale, dans le délai d'un mois.

M. PICARD adresse la Note suivante :

Sur quelques problèmes relatifs à l'équation $\Delta u = k^2 u$;

Dans une Note récente [1] *Sur l'équilibre calorifique d'une surface fermée rayonnant au dehors* j'ai traité la question générale de l'équilibre calorifique d'une surface fermée avec rayonnement au dehors. Me plaçant ici à un point de vue purement analytique, je traiterai deux problèmes très particuliers se rapportant au même ordre d'idées et relatifs à l'équation $\Delta u = k^2 u$; le second concernera certaines solutions doublement périodiques de cette équation.

1. Le premier problème est relatif au cas d'une plaque indéfinie avec une seule source de chaleur à l'origine. L'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u = u \qquad (\text{nous faisons } k^2 = 1),$$

se réduit ici, par raison de symétrie, à l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - u = 0, \tag{1}$$

u ne dépendant que de la distance r à l'origine. D'après le problème physique, il s'agit d'avoir l'intégrale u de cette équation s'annulant à l'infini, et devenant infinie à l'origine, de telle sorte que l'intégrale

$$\int \frac{du}{dr}\, ds,$$

prise le long d'une circonférence de rayon infiniment petit autour de l'origine (intégrale correspondant au flux) ait une valeur donnée.

L'intégrale de l'équation (1), s'annulant pour $r = \infty$, est déterminée à un facteur près. La méthode classique de Laplace pour l'intégration des équations linéaires dont les coefficients sont du premier degré, par rapport à la variable, la donne bien aisément.

---

[1] *Comptes rendus* (5 juin 1900).

Posons

$$u = \int_\alpha^\beta v(z)\, e^{zr}\, dz,$$

les constantes α et β, et la fonction $v(z)$ étant à déterminer. En substituant dans l'équation différentielle, on voit que l'on aura une solution, si

$$-\frac{d(vz^2)}{dz} + vz + \frac{dv}{dz} = 0,$$

et si de plus

$$(v e^{zr})_\alpha^\beta = 0, \qquad (v z^2 e^{zr})_\alpha^\beta = 0,$$

en entendant par $(f)_\alpha^\beta$ la différence des valeurs de f pour $z = \beta$ et $z = \alpha$. On pourra donc prendre

$$v = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

et ensuite on prendra, comme champ d'intégration, un lacet entourant le point -1, et venant de l'infini négatif et y retournant dans la direction de l'axe réel ($\alpha = \beta = -\infty$). On est ainsi conduit à la solution

$$u = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{zr}\, dz}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

Cette solution de l'équation (1), définie pour r positif, s'annule évidemment pour $r = +\infty$. Il est indispensable pour nous de rechercher ce qu'elle devient pour $r = 0$. La forme de l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$A\, G_0(r) \log r + G_1(r),$$

les G étant des fonctions entières de r; $G_0(r)$ est une fonction paire de r et $G_0(0) = 1$. Il faut avoir la valeur de la constante A correspondant à u. Or si

$$a = A\, G_0(r) \log r + G_1(r),$$

on voit de suite que

$$A = \lim \left(r \frac{du}{dr}\right)_{r=0}.$$

Cherchons donc la limite de $r\frac{du}{dr}$ pour $r=0$. Or

$$\frac{du}{dr}=\int_{-\infty}^{-1}\frac{z e^{zr}\,dz}{\sqrt{z^2-1}},$$

et, en posant $zr=t$, il vient

$$r\frac{du}{dr}=\int_{-\infty}^{-r}\frac{t e^{t}\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}},$$

le radical $\sqrt{t^2-r^2}$ étant pris avec le signe *plus*. Pour avoir en toute rigueur la limite du second membre pour $r=0$, il serait un peu rapide de faire de suite $r=0$, quoiqu'on trouve ainsi immédiatement -1.

Pour le voir avec plus de précision, prenons un nombre positif fixe ρ supérieur à r, aussi voisin, d'ailleurs, que l'on voudra de zéro si r est lui-même suffisamment petit, et partageons l'intégrale en deux parties

$$\int_{-\infty}^{-\rho}\frac{t e^{t}\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}+\int_{-\rho}^{-r}\frac{t e^{t}\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}.$$

Pour la première partie, on peut faire de suite $r=0$, et l'on trouve ainsi

$$-e^{-\rho};$$

pour la seconde, elle peut s'écrire

$$e^{t_1}\int_{-\rho}^{-r}\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}=-e^{t_1}\sqrt{\rho^2-r^2},$$

t_1 étant compris entre $-\rho$ et $-r$. Il résulte bien de là que, à partir d'une valeur suffisamment petite de r, l'intégrale proposée diffère de -1 d'aussi peu que l'on veut; nous avons donc

$$A=-1.$$

Pour l'intégrale trouvée, le flux est donc égal à -2π.

Je ferai encore une remarque sur la façon dont u tend vers zéro pour $r=\infty$, en montrant que le *produit*

$$u\sqrt{r}\,e^{r}$$

tend vers une limite finie et différente de zéro pour $r=\infty$. En posant

$$z=-1+z',$$

on a

$$u=e^{-r}\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{z'r}\,dz'}{\sqrt{z'(z'-2)}},$$

et, en désignant par ρ une quantité positive, nous écrirons

$$u\sqrt{r}\,e^{r}=\sqrt{r}\int_{-\infty}^{-\rho}\frac{e^{zr}\,dz}{\sqrt{z(z-2)}}+\sqrt{r}\int_{-\rho}^{0}\frac{e^{zr}\,dz}{\sqrt{z(z-2)}}.$$

La première partie, on le voit de suite, tend vers zéro pour $r=+\infty$; il s'agit d'avoir la limite de la deuxième partie. En changeant z en $-z$ nous l'écrirons

$$\sqrt{r}\int_{0}^{\rho}\frac{e^{-zr}\,dz}{\sqrt{z(z+2)}}\quad\text{ou}\quad\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\rho}e^{-zr}z^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}dz.$$

On peut développer $\left(1+\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ suivant la formule de Taylor; le premier terme seul est intéressant pour nous; il se réduit à

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\rho}e^{-zr}z^{-\frac{1}{2}}\,dz,$$

ce qui, en posant $zr=y$, devient

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\rho r}e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}\,dy.$$

Donc, pour $r=+\infty$, la limite cherchée sera

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-y}\,dy}{\sqrt{y}}\quad\text{ou}\quad\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Nous avons donc la formule cherchée

$$\lim_{r=\infty}\left(u\sqrt{r}\,e^{r}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2. Proposons-nous maintenant relativement à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$$

un second problème, qui, au point de vue physique, se rattacherait à l'équilibre calorifique de la surface d'un tore, et qui, au point de vue analytique, a une lointaine analogie avec la théorie des fonctions doublement périodiques.

Il s'agit de *trouver l'intégrale de cette équation, ayant une période a par rapport à x et une période b par rapport à y, et continue sauf au point* (α, β) *et à ses homologues* $(\alpha + ma, \beta + nb)$, *où elle devient infinie comme le devenait tout à l'heure l'intégrale u à l'origine.*

Il est clair d'abord que la solution est unique, car s'il y avait deux solutions, leur différence serait une solution de l'équation

$$\Delta u = u,$$

qui serait doublement périodique et continue dans tout le plan, ce qui est impossible, car une solution continue de l'équation précédente ne peut avoir ni maximum positif ni minimum négatif.

Pour avoir maintenant la solution cherchée, il n'y a qu'à se reporter au problème traité ci-dessus et à faire la somme des solutions correspondant à tous les homologues du point (α, β). Formons la fonction

$$\Theta(z, x, y) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{z\sqrt{(x-\alpha-ma)^2+(y-\beta-nb)^2}}.$$

Elle est parfaitement définie pour z négatif, puisque

$$e^{z\sqrt{(x-ma)^2+(y-nb)^2}} < \frac{1}{z^\mu[(x-ma)^2+(y-nb)^2]^{\frac{\mu}{2}}} \qquad (\mu > 1),$$

pour $|m|$ et $|n|$ suffisamment grands.

Formons alors l'expression

$$u(x, y) = +\int_{-\infty}^{-1} \frac{\Theta(z, x, y)\,dz}{\sqrt{z^2-1}}.$$

Ce sera l'intégrale de l'équation proposée, doublement périodique, et continue sauf aux points $(\alpha + ma, \beta + nb)$, où elle devient infinie comme le devenait à l'origine l'intégrale du paragraphe précédent.

On passe évidemment de suite de l'équation $\Delta u = u$ à l'équation

$$\Delta u = k^2 u \qquad (k^2 > 0).$$

Nous avons ainsi un type de solutions doublement périodiques de cette équation, qui cesse entièrement d'exister dans le cas particulier correspondant à $k^2 = 0$.

M. Painlevé adresse la Note suivante :

De la détermination unique des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par les conditions initiales de Cauchy.

Dans son savant *Traité sur les équations différentielles,* dont les tomes II et III ont paru récemment [1], M. Forsyth a discuté longuement la question de savoir si les conditions initiales de Cauchy définissent une solution unique d'un système différentiel. Il a formulé [2], au sujet des deux solutions distinctes que nous avons données, M. Picard et moi, de la question, des critiques qui ne me semblent pas fondées.

Je voudrais montrer ici que le procédé qui m'a permis d'établir que la solution de Cauchy est *unique* ne prête à aucune objection.

Il convient, avant tout, de bien préciser la question. Soit

$$\text{(S)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

un système de n équations différentielles dont les seconds membres sont des fonctions analytiques des variables complexes $x, y_1, \ldots, y_n$, holomorphes pour $x = a, y_1 = b_1, \ldots, y_n = b_n$, par exemple holomorphes dans le domaine

$$|x - a| < \mathrm{R}, \qquad |y_1 - b_1| < \mathrm{R}, \qquad \ldots, \qquad |y_n - b_n| < \mathrm{R}.$$

D'après le théorème de Cauchy, il existe une solution $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ de (S), holomorphe pour $x = a$, et qui répond aux conditions initiales

$$y_1(a) = b_1, \qquad \ldots, \qquad y_n(a) = b_n.$$

---

[1] Forsyth, *Theory of differential equations,* t. II et III; Cambridge, 1900.
[2] *Loc. cit.,* t. II, p. 44-47 et p. 80-83.

Toute solution, holomorphe pour $x = a$, qui répond aux mêmes conditions initiales, coïncide évidemment avec la solution de Cauchy.

Mais ne saurait-il exister d'autres solutions analytiques $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *de* (S), *holomorphes dans un certain domaine* Δ *attenant au point* $\bar{a}$, *mais non au point* $\bar{a}$, *et telles que,* x *tendant vers* $\bar{a}$ *à l'intérieur de* Δ, *les fonctions* $y_1, \ldots, y_n$ *tendent respectivement vers* $b_1, \ldots, b_n$?

Aucune hypothèse n'est faite d'ailleurs sur le domaine Δ; Δ peut être, par exemple, compris entre deux spirales qui admettent le point $\bar{a}$ comme point asymptote et dont l'arc croît indéfiniment quand le point de la courbe tend vers $\bar{a}$.

On peut encore poser la question ainsi :

Existe-t-il un chemin l *aboutissant au point* $\bar{a}$, *tel qu'une solution* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *de* (S) *soit holomorphe sur* l, *sauf au point* $\bar{a}$, *et que* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *tendent respectivement vers* $b_1, \ldots, b_n$ *quand* x *tend vers* $\bar{a}$ *sur* l?

Il est toujours loisible (en modifiant, si besoin est, le chemin l) d'admettre que l possède en chaque point une tangente continue. Soit s l'arc de l compté à partir d'un point $\overline{x_1}$, positivement dans le sens de $\overline{x_1}$ vers $\bar{a}$. Quand le point $\bar{x}$ parcourt l dans le sens positif, s croît constamment et tend vers une limite σ quand $\bar{x}$ tend vers $\bar{a}$, σ pouvant être égal à $+\infty$. Par exemple, l peut admettre le point $\bar{a}$ comme point asymptote, et l'arc compris entre $\overline{x_1}$ et $\bar{a}$ peut être infini.

Insistons enfin sur le sens précis des mots : $\bar{x}$ *tend vers* $\bar{a}$ *sur* l. Il n'y a aucun malentendu possible à ce sujet, si l est un chemin de longueur *finie* aboutissant au point $\bar{a}$. Mais supposons σ *infini : on dit que* $\bar{x}$ *tend vers* $\bar{a}$ *sur* l, *si la distance rectiligne* $\overline{xa}$ *tenv* CONSTAMMENT *ders zéro quand* s *croît indéfiniment;* autrement dit, ε étant une quantité positive prise d'avance aussi petite qu'on veut, on peut trouver une valeur s' assez grande pour que *tous* les points $\bar{x}$ de l qui correspondent à $s > s'$ soient intérieurs à un cercle de centre $\bar{a}$ et de rayon ε.

Ces préliminaires admis, on établit le théorème suivant :

Théorème. — *Il n'existe pas de solution* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *de* (S), *holomorphe sur un chemin* l (*aboutissant au point* $\bar{a}$) *sauf au point* $\bar{a}$, *et telle que* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *tendent vers* $b_1, \ldots, b_n$ *quand* $\bar{x}$ *tend vers* $\bar{a}$ *sur* l (1).

La démonstration que j'ai proposée (2) s'appuie sur un lemme, aujourd'hui classique, conséquence presque immédiate du théorème fondamental de Cauchy.

Lemme. — *Soit* $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ *des valeurs voisines respectivement de* $a, b_1, \ldots, b_n$, *et soit*

$$y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{1}$$

la solution de Cauchy définie par les conditions initiales

$$y_i(x_0) = y_i^0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

(1) C'est pour avoir interprété dans un tout autre sens les mots : « $\bar{x}$ tend vers $\bar{a}$ sur l » que M. Fuchs (*Berl. Sitzungsberichte*, 1886, p. 279) et M. Forsyth après lui (*loc. cit.*, tome II, p. 80-83) ont cru devoir nier l'exactitude du théorème précédent. Considérons l'exemple le plus simple de M. Fuchs, à savoir l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x} \tag{e}$$

dont l'intégrale générale est $y = \dfrac{1}{h + \log x}$ (h const. arbitraire).

La solution de Cauchy, définie par la condition $y(1) = 0$, n'est autre ici que $y \equiv 0$. D'autre part, faisons croître x de $\frac{1}{2}$ à 1 par valeurs réelles, en lui faisant de plus parcourir (dans le sens positif) le cercle de centre $x = 0$ et de rayon $1 - \dfrac{1}{n}$ chaque fois que x atteint une valeur $1 - \dfrac{1}{n}$, (n entier > 2); étudions les variations de la fonction $y = \dfrac{1}{h + \log x}$ quand x décrit le chemin L ainsi défini. Il est clair que pour les valeurs de x voisines de 1, $|y(x)|$ est très petit $\left[\text{par exemple, } \lim y\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 0 \text{ pour } n = \infty\right]$; mais x *ne tend pas vers* 1 *sur le chemin* L; le chemin L, tantôt se rapproche du point $x = 1$, tantôt s'en écarte à une distance plus grande que l'unité, un nombre indéfini de fois.

(2) *Voir* mes *Leçons de Stockholm*, p. 19-20 et p. 394-396.

les fonctions $\varphi_i(x, x_0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ *sont des fonctions analytiques des* $(n+2)$ *variables* $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, *fonctions holomorphes pour*

$$x=a, \qquad x_0=a, \qquad y_1^0=b_1, \ldots, y_n^0=b_n.$$

Autrement dit, les φ_i *sont holomorphes dans le domaine*

$$|x-a|<\rho, \quad |x_0-a|<\rho, \quad |y_0-b_1|<\rho, \ldots, |y_0-b_n|<\rho,$$

où ρ *désigne une certaine quantité positive.*

Quand on donne à $x_0, x, y_1, \ldots, y_n$ des valeurs voisines respectivement de $a, a, b_1, \ldots, b_n$, les équations (1) en $y_1^0, \ldots, y_n^0$ admettant une solution (et une seule) pour laquelle $y_1^0, \ldots, y_n^0$ sont voisins de $b_1, \ldots, b_n$, à savoir la solution

$$(2) \qquad y_i^0=\varphi_i(x_0, x, y_1. \ldots, y_n), \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Ce lemme admis, j'effectue le changement de variables

$$(3) \qquad y_i=\varphi_i(x, a, u_1, \ldots, u_n), \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad u_i=\varphi_i(a, x, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Pour $x, y_1, \ldots, y_n$ voisins de $a, b_1, \ldots, b_n$, les quantités $u_1, \ldots, u_n$ sont voisines de $b_1, \ldots, b_n$; à la solution de Cauchy de (S) définie par les conditions initiales $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, correspond pour les u_i, le système de fonctions $u_i(x)\equiv y_i^0$. Le système (S) se transforme donc, d'après (3), (4), dans le système [1]

$$(S') \qquad \frac{du_i}{dx}=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

S'il existe une solution $y_1(x), \ldots. y_n(x)$ de (S) holomorphe sur un chemin l (aboutissant au point $\bar{a}$) mais non au point $\bar{a}$, et telle que $y_1, \ldots, y_n$ tendent vers $b_1, \ldots, b_n$ quand x tend

(1) En effet, la solution de Cauchy, définie pour (S') par les conditions initiales $u_1(x_0)=u_1^0, \ldots, u_n(x_0)=u_n^0$, doit se réduire à $u_1\equiv u_1^0, \ldots, u_n\equiv u_n^0$, (quels que soient $x_0, u_1^0, \ldots, u_n^0$, voisins de $a, b_1, \ldots, b_n$). Cela n'est possible que si les coefficients différentiels de (S') sont identiquement nuls.

vers $\bar{a}$ sur l, il existera une solution $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ de (S') qui satisfera aux mêmes conditions. Or cette solution, composée de fonctions qui, d'après (S'), sont constantes sur l, se confondra nécessairement avec la solution de Cauchy $u_1 = b_1, \ldots, u_n = b_n$, ce qui est contre l'hypothèse.

En un mot, la transformation (3) ramène le cas d'un système (S) quelconque au cas d'un système (S'), pour lequel le théorème en question est intuitif. C. Q. F. D.

Remarque. — Nous avons supposé que la solution $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, non holomorphe pour $x = a$, était analytique sur un chemin l aboutissant au point $\bar{a}$. Bornons-nous, pour un instant, à considérer les valeurs *réelles* de la variable; faisons tendre x (par valeurs réelles croissantes, par exemple) vers la valeur réelle a, et soit $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ un système de fonctions, *analytiques ou non,* qui vérifient le système (S) et telles que $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ tendront vers $b_1, \ldots, b_n$ quand x tend vers a. De la démonstration qui précède il résulte que la solution $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ se confond avec la solution de Cauchy [1].

Plus généralement, soit l un chemin continu aboutissant au point $\bar{a}$, chemin dont l'*arc* s existe mais peut croître indéfiniment quand $\bar{x}$ tend vers $\bar{a}$. Supposons qu'il existe un système de fonctions $y_1(x) = Y_1(s), \ldots, y_n(x) = Y_n(s)$, *analytiques ou non,* mais bien définies sur le chemin l [2], telles que, d'une

---

(1) Il est loisible, en augmentant le nombre des fonctions, de supposer (S) réel. La remarque précédente résulte alors aussi bien de la méthode de Cauchy-Lipschitz, ou de la méthode d'approximations successives de M. Picard.

(2) On peut même supposer que l est un chemin continu sans tangente. Soit $y_i(x)$ une fonction bien déterminée en tout point x de l, telle que le rapport $\dfrac{y_i(x+\Delta x) - y_i(x)}{\Delta x}$ (où x et $x + \Delta x$ sont deux points de l) tende vers une limite $y_i'(x)$ quand Δx tend vers zéro; si le système $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ vérifie en tout point de l les égalités

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et si, de plus, $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ tendent vers $b_1, \ldots, b_n$ quand $\bar{x}$ tend vers $\bar{a}$ sur l, le système $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ se confond avec la solution de Cauchy.

part, $y_1, \ldots, y_n$ tendent vers $b_1, \ldots, b_n$ quand $\overline{x}$ tend vers $\overline{a}$ sur l, et que, d'autre part, les égalités

$$\frac{\frac{dy_i}{ds}}{\frac{dx_i}{ds}} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

soient vérifiées en tout point de l. La démonstration précédente établit que le système de fonctions $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ se confond avec la solution de Cauchy.

M. Ripert adresse la Communication suivante :

Sur les triangles trihomologiques inscrits ou circonscrits à une conique.

1. *On peut inscrire* ET *circonscrire à toute conique une double infinité* (P, Q) *de triangles trihomologiques à tout triangle inscrit* OU *circonscrit donné* A *et trihomologiques entre eux. Les neuf centres d'homologie sont en ligne droite et les neuf axes passent par un point fixe, si les triangles* A, P, Q *sont tous les trois soit inscrits soit circonscrits. Si* A *est inscrit et* P, Q *circonscrits,* ou vice versa, *les centres du couple* (P, Q) *restent en ligne droite et ses axes concourants; les six centres des couples* (A, P) *et* (A, Q) *sont sur une conique et les six axes correspondants touchent une autre conique.*

2. Les coordonnées étant barycentriques, et étant posé

$$i, k, l = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2,$$

soit le triangle A_i inscrit dans la conique $\Gamma\left(\sum \frac{\alpha_i}{x_i} = 0\right)$; soit [1]

$$K = \sum \alpha_i u_i = 0$$

---

[1] Je représente un point par son équation tangentielle :

$$K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \qquad \text{et} \qquad K = \sum \alpha_i u_i = 0$$

sont équivalents. On est prié de faire la figure.

le centre d'homologie de A_i et du triangle circonscrit a_i dont les sommets sont les pôles des côtés $A_k A_l$, et soit

$$\Delta = \sum \frac{x_i}{\alpha_i} = 0$$

l'axe d'homologie déterminé par les points

$$\Delta_i = \alpha_k u_k - \alpha_l u_l = 0$$

d'intersection des tangentes aux points A_i avec les côtés $A_k A_l$. Prenons sur Γ un point arbitraire $\left(P_1 = \sum \beta_i u_i = 0\right)$; soient Q_i les intersections de Γ avec les droites $P_1 \Delta_i$.

1° *Les droites* $\Delta_i Q_k$ *concourent, sur* Γ, *au point* P_2, *et les droites* $\Delta_i Q_l$ *au point* P_3;

2° *Les triangles* A_i, P_i, Q_i *sont deux à deux trihomologiques.*

En effet, soit $\left(\sum \lambda_i u_i = 0\right)$ l'*inverse* par rapport à K du point P_1 de Γ, c'est-à-dire le point

$$P'_1 = \sum \frac{\alpha_i}{\beta_i} u_i = 0;$$

à cause de

$$\sum \frac{\alpha_i}{\beta_i} = 0,$$

on a

$$\sum \lambda_i = 0;$$

en d'autres termes, P'_1 est à l'infini.

L'équation de Γ est toujours satisfaite, avec cette condition, par les six points

$$P_i = \frac{\alpha_i}{\lambda_1} u_i + \frac{\alpha_k}{\lambda_2} u_k + \frac{\alpha_l}{\lambda_3} u_l = 0, \qquad Q_i = \frac{\alpha_i}{\lambda_i} u_i + \frac{\alpha_k}{\lambda_l} u_k + \frac{\alpha_l}{\lambda_k} u_l = 0.$$

Les droites $(A_i P_i, A_k P_l, A_l P_k)$ concourent aux points p_i et les triples de droites $(A_i Q_i)$, $(A_i Q_k)$, $(A_i Q_l)$ concourent respectivement aux points q_i :

$$p_i = \alpha_i \lambda_i u_i + \alpha_k \lambda_l u_k + \alpha_l \lambda_k u_l = 0, \quad q_i = \alpha_i \lambda_1 u_i + a_k \lambda_2 u_k + \alpha_l \lambda_3 u_l = 0.$$

Enfinles triples (P_iQ_i), (P_iQ_k), (P_iQ_l) concourent respectivement aux points Δ_i.

Les équations des axes d'homologie π_i, χ_i, δ_i correspondants sont

$$\pi_i = \frac{\lambda_i}{\alpha_i} x_i + \frac{\lambda_l}{\alpha_k} x_k + \frac{\lambda_k}{\alpha_l} x_l = 0,$$

$$\chi_i = \frac{\lambda_1}{\alpha_i} x_i + \frac{\lambda_2}{\alpha_k} x_k + \frac{\lambda_3}{\alpha_l} x_l = 0, \qquad \delta_i = \frac{x_k}{\alpha_k} - \frac{x_l}{\alpha_l} = 0.$$

Les neuf centres sont sur Δ; *les neuf axes passent par* K; d'ailleurs, chaque axe est la polaire du centre correspondant.

Si le point P_1 est pris en

$$A'_i = 2\alpha_k u_k + 2\alpha_l u_l - \alpha_i u_i = 0$$

sur une droite δ_i, deux points P et Q s'y confondent; les triangles A_i et A'_i deviennent *tétrahomologiques,* les quatre centres étant K et les points Δ'_i $(2\alpha_i u_i - \alpha_k u_k - \alpha_l u_l = 0)$; les axes sont Δ et les droites

$$\delta'_i = 2\frac{x_i}{\alpha_i} - \frac{x_k}{\alpha_k} - \frac{x_l}{\alpha_l} = 0.$$

3. Considérons maintenant le triangle a_i (n° 2), circonscrit à Γ, A_i étant le triangle des points de contact. Ces deux triangles sont, comme on sait, *tétrahomologiques* (centres K et a_i).

Les triangles a_i et P_i, a_i et Q_i sont *trihomologiques,* car les droites $(a_iP_i,\ a_kP_l,\ a_lP_k)$ concourent en

$$m_i = \alpha_i[\lambda_k\lambda_l(\lambda_k\lambda_l + \lambda_i^2) + \lambda_i^2(\lambda_k\lambda_l - \lambda_i^2)]\,u_i + \alpha_k(\lambda_k^3\lambda_l - \lambda_k^3\lambda_i - \lambda_i^2\lambda_l^2)\,u_k$$
$$+ \alpha_l(\lambda_l^3\lambda_k - \lambda_l^3\lambda_i - \lambda_i^2\lambda_k^2)\,u_l = 0,$$

et les triples (a_iQ_i), (a_iQ_k), (a_iQ_l) concourent respectivement aux points n_i

$$n_i = \alpha_i[\lambda_k\lambda_l(\lambda_k\lambda_l + \lambda_i^2) + \lambda_i^2(\lambda_k\lambda_l - \lambda_i^2)]\,u_i + \alpha_k(\lambda_l^3\lambda_k - \lambda_l^3\lambda_i - \lambda_i^2\lambda_k^2)\,u_k$$
$$+ \alpha_l(\lambda_k^3\lambda_l - \lambda_k^3\lambda_i - \lambda_i^2\lambda_l^2)\,u_l = 0.$$

Les points m_i *et* n_i *sont sur une conique,* comme on le reconnaît en calculant une Pascale (*voir* au n° 5). Les axes d'homologie correspondants ont pour équations, en posant $L_i = \frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_l} - \frac{1}{\lambda_i}$,

$$\mu_i = \frac{L_i}{\alpha_i} x_i + \frac{L_l}{\alpha_k} x_k + \frac{L_k}{\alpha_l} x_l = 0, \qquad \nu_i = \frac{L_1}{\alpha_i} x_i + \frac{L_2}{\alpha_k} x_k + \frac{L_3}{\alpha_l} x_l = 0.$$

Ces six axes touchent une conique; on le reconnaît en calculant un point de Brianchon.

En tenant compte du principe de dualité, le théorème (n° 1) est entièrement démontré.

4. Les triples $(A_i p_i)$, $(A_i p_k)$, $(A_i p_l)$ concourent aux points P_i; les droites $(A_i q_i, A_k q_l, A_l q_k)$ concourent aux points Q_i; les droites $(A_i \Delta_i, A_k \Delta_l, A_l \Delta_k)$ concourent aux points A_i. Donc, les triangles dégénérés p_i, q_i, Δ_i sont les *complémentaires du type Brocardien* des triangles P_i, Q_i, A_i au sens indiqué par M. Jahnke (*Ueber dreifach perspektivische Dreiecke;* Berlin, 1900).

Les triples $(a_i m_i)$, $(a_i m_k)$, $(a_i m_l)$ concourent respectivement aux points P_i; les droites $(a_i n_i, a_k n_l, a_l n_k)$ concourent en Q_i. Les triangles (véritables) m_i et n_i sont donc les complémentaires du type Brocardien des triangles P_i et Q_i, par rapport au triangle a_i.

5. Les propriétés du n° 3 se démontrent plus aisément en prenant le triangle a_i pour triangle de référence. Soient, par rapport à ce triangle, $\sum \frac{u_i}{\gamma_i} = 0$ et $\sum \gamma_i x_i = 0$ les équations correspondantes de K et de Δ. La conique Γ a pour équation

$$\sum \gamma_i^2 x_i^2 - 2 \sum \gamma_k \gamma_l x_k x_l = 0.$$

Elle passe toujours, avec la condition $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$, le point $\sum \mu_i x_i = 0$ n'étant autre, par rapport au triangle a_i, que le point P'_1 (n° 2), par les six points

$$P_i = \frac{\mu_i^2}{\gamma_1} u_1 + \frac{\mu_k^2}{\gamma_2} u_2 + \frac{\mu_l^2}{\gamma_3} u_3 = 0, \qquad Q_i = \frac{\mu_i^2}{\gamma_1} u_1 + \frac{\mu_l^2}{\gamma_2} u_2 + \frac{\mu_k^2}{\gamma_3} u_3 = 0.$$

La vérification des propriétés du n° 3 est alors presque immédiate.

Il est aisé de développer les bases qui précèdent. On peut démontrer, par exemple, que les triangles m_i et n_i, trihomologiques à a_i, le sont aussi à A_i, que les six centres M_i et N_i des couples (A, m) et (A, n) forment deux triangles trihomologiques à a et A, les nouveaux centres (m'_i, n'_i) formant deux triangles également trihomologiques à a et à A, etc., et reconnaître qu'à chaque triangle correspond un triangle complémentaire du type Brocardien.

M. Borel adresse la Note suivante :

Sur le prolongement analytique de la série de Taylor.

J'ai indiqué, dans mon *Mémoire sur les séries divergentes* (*Annales de l'École Normale*, 1899, p. 65) comment la connaissance d'un développement en série de $\frac{1}{1-z}$ convergent dans une région A, plus grande que le cercle de rayon *un*, permet d'obtenir un développement analogue pour une fonction quelconque. Je voudrais signaler ici une formule particulièrement simple, que l'on obtient en prenant pour $\frac{1}{1-z}$ l'un des développements que fournit la série de Taylor. On a

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(1+z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}(1+z) + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}(1+z)^n + \ldots.$$

Le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de cette série s'écrit, en désignant par C_n^p les coefficients binomiaux,

$$\frac{1}{2^{n+1}}(1 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + \ldots + C_n^p z^p + \ldots C_n^n z^n).$$

Dès lors, soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

une série de Taylor, dont le rayon de convergence n'est ni nul ni infini. En posant

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}}(a_0 + C_n^1 a_1 z + \ldots + C_n^p a_p z^p + \ldots + C_n^n a_n z^n)$$

le développement

$$f(z) = \sum P_n(z)$$

est convergent dans une région aisée à déterminer, et qui dépasse le cercle de convergence en tout point non singulier.