

BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 1-60

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__1_0

© Bulletin de la S. M. F., 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

(NOVEMBRE ET DÉCEMBRE 1900).

SÉANCE DU 7 NOVEMBRE 1900.

PRÉSIDENTE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. d'Ocagne : *L'équation du septième degré et la Nomographie.*

M. DUPORCQ fait la Communication suivante :

Sur un remarquable déplacement à deux paramètres.

1. Je rappellerai ⁽¹⁾ tout d'abord les propriétés suivantes des transformations quadratiques :

La donnée de cinq couples de points conjugués dans une transformation quadratique en détermine un sixième.

La donnée de six couples de points conjugués détermine, en général, une infinité de couples de points conjugués qui se correspondent sur deux cubiques.

Observons, d'autre part, que si Π_1 , Π_2 et Π_3 désignent trois positions dans l'espace d'un plan Π , et α_1 , α_2 , α_3 les trois positions correspondantes d'un point α de ce plan, on obtient une transfor-

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 16 mai 1898. Voir aussi mes *Premiers principes de Géom. mod.*, p. 142.

mation quadratique en associant au point α le point a , où l'axe de la circonférence $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ coupe un plan fixe P.

En combinant cette remarque aux résultats précédents, on voit aisément que :

Si le plan II se déplace dans l'espace de sorte que cinq de ses points restent à des distances fixes de cinq points du plan P, il existera dans les plans II et P un sixième couple de points dont la distance restera invariable.

De même :

Si six couples de points des plans II et P restaient à des distances invariables, il en serait en général de même d'une infinité de couples de points associés sur deux cubiques C et Γ .

2. Ces résultats rappelés, examinons un cas particulièrement intéressant du premier des déplacements précédents. Les six points obtenus dans chacun des plans P et II, et qui doivent se correspondre dans une double infinité de transformations quadratiques, peuvent former, dans chacun de ces plans, les six sommets d'un quadrilatère complet : à trois sommets en ligne droite dans un des quadrilatères correspondent alors trois sommets non en ligne droite dans l'autre, et il est facile, dans ce cas, grâce à la formule de Stewart, d'écrire la relation qui existe entre les six distances invariables; il nous suffira, d'ailleurs, de remarquer que cette relation est linéaire par rapport aux carrés de ces distances.

Soient, en particulier, deux quadrilatères égaux, $aa'bb'cc'$ et $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$, a et a' désignant deux sommets opposés du premier de ces quadrilatères, α et α' les sommets homologues de l'autre, de sorte que les six longueurs à envisager ici sont

$$aa', a'\alpha, b\beta', b'\beta, c\gamma', c'\gamma.$$

La relation entre ces longueurs, nécessairement symétrique par rapport aux distances aa' et $a'\alpha$, par exemple, sera donc de la forme

$$(1) \quad A(\overline{aa'}^2 + \overline{a'\alpha}^2) + B(\overline{b\beta'}^2 + \overline{b'\beta}^2) + C(\overline{c\gamma'}^2 + \overline{c'\gamma}^2) + D = 0.$$

Or, supposons maintenant nos deux quadrilatères symétriques

par rapport à une droite Δ , de sorte que

$$a\alpha' = a'\alpha, \quad b\beta' = b'\beta, \quad c\gamma' = c'\gamma.$$

En supposant fixe le premier quadrilatère, si nous nous donnons les longueurs $b\beta'$ et $c\gamma'$, nous n'assujettirons Δ qu'à deux conditions, et les longueurs égales $a\alpha'$ et $a'\alpha$ seront déterminées par la relation (1). Le déplacement du plan Π dépendra donc de deux paramètres, et, néanmoins, les six sommets du second quadrilatère resteront à des distances fixes de ceux du quadrilatère fixe. On conclut de là le théorème suivant :

Étant donnés deux quadrilatères complets symétriques par rapport à une droite, si l'on réunit chaque sommet au symétrique du sommet opposé, au moyen de six tiges articulées, le système obtenu est susceptible d'une déformation dépendant de deux paramètres.

On voit que, si l'un des quadrilatères est fixe, les six sommets de l'autre décrivent des sphères.

Enfin, les deux quadrilatères restent constamment symétriques par rapport à une droite.

3. Il est nécessaire d'observer que, si l'on se contentait des quatre liaisons, deux à deux égales, $b\beta'$ et $b'\beta$, $c\gamma'$ et $c'\gamma$, le déplacement relatif des quadrilatères dépendrait toujours de deux paramètres, mais qu'il posséderait néanmoins plus de liberté que le précédent : on pourrait, en effet, en se donnant arbitrairement la longueur $a\alpha'$, par exemple, obtenir un déplacement à un paramètre, qui ne serait pas compris dans le déplacement de tout à l'heure. On a ainsi un curieux exemple de *décomposition d'un déplacement à deux paramètres*.

4. Revenons au cas de nos six liaisons, et joignons-y une nouvelle, $d\delta'$, d et δ' désignant deux points quelconques des plans P et Π . Leur déplacement relatif dépendra alors d'un seul paramètre, mais, cette fois, il existera nécessairement (par suite du dernier des théorèmes du n° 1) deux cubiques C et Γ , dont les points resteront deux à deux à des distances invariables. Elles sont faciles à définir : si, en effet, d' désigne le symétrique de δ' par

rapport à l'axe de symétrie, Δ , des deux quadrilatères, la cubique C est la hessienne du réseau ponctuel formé par les coniques qui divisent harmoniquement les segments aa' , bb' (par suite aussi cc') et dd' . Si m et m' désignent deux points conjugués à toutes ces coniques, et, par suite, situés sur C , le point m restera à une distance invariable du point μ' , symétrique de m' par rapport à l'axe Δ . On peut remarquer que, sur la cubique C , les points m et m' forment un *couple steinérien* (c'est-à-dire que les tangentes en ces points se coupent sur la cubique). On obtient donc le théorème suivant, dont M. Raoul Bricard m'a communiqué l'énoncé :

Étant données dans l'espace deux cubiques planes, C et Γ , symétriques par rapport à une droite Δ , on considère sur C une famille de couples steinériens; soient mm' un de ces couples, et μ' le symétrique de m' par rapport à Δ . Si l'on relie chaque point m de C au point μ' , qui lui correspond ainsi sur Γ , par une tige de longueur fixe, on obtient un système déformable.

C'est là un nouvel exemple de déplacement d'une courbe plane dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques.

M. TOUCHE fait la Communication suivante :

Sur une question posée par d'Alembert.

D'Alembert a posé aux géomètres une question qui n'a pas encore reçu de réponse bien convaincante; cette question est connue sous le nom de *paradoxe singulier de d'Alembert*, et quelquefois simplement de *paradoxe de d'Alembert*.

L'auteur l'expose ainsi dans la préface du Tome V des *Opus-cules mathématiques* :

« Dans le cinquième Mémoire, j'expose un singulier paradoxe, que j'invite les mathématiciens à examiner, et duquel il résulte qu'en supposant à un corps solide une certaine figure, ce corps semble ne devoir éprouver aucune résistance de la part d'un fluide où il sera mû, dans les suppositions même qui paraissent

les plus légitimes et les moins précaires, sur la manière dont le fluide agit. »

Dans ce Mémoire du Tome V il décrit, en effet, la forme de ce corps, considère le mouvement hypothétique du fluide à l'avant et à l'arrière de ce corps et démontre sa proposition, invraisemblable; puis il fait suivre cet exposé de raisonnements destinés à prouver qu'il en serait de même dans le cas de tout autre mouvement supposé pour le fluide, autour de ce corps. Nous avons trop d'admiration à l'égard de d'Alembert pour mettre en doute la valeur de ces raisonnements, mais ils sont un peu longs à citer textuellement, et nous préférons le faire pour le résumé bien clair qu'en a fait de Saint-Venant dans son Livre sur la *Résistance des fluides* :

« Supposons un corps solide composé de quatre parties égales et semblables, . . . placé au milieu d'un fluide indéfini, . . . Imaginons que ce corps soit immobile et que les parties du fluide reçoivent toutes une impulsion égale, parallèle à l'axe du corps, . . . Supposons, pour un moment, que le mouvement du fluide soit le même à la partie antérieure et à la partie postérieure, . . . ; on trouvera qu'il se continuera de même, . . . , donc c'est, en effet, de cette manière que le mouvement aura lieu. . . . Or il en résultera que la pression du fluide sur le corps sera absolument nulle : la pression sur la surface postérieure sera égale et contraire à la pression sur la surface antérieure, . . . Je ne vois donc pas, je l'avoue, comment on peut expliquer par là théorie, d'une manière satisfaisante, la résistance des fluides. Il me paraît, au contraire, que cette théorie, traitée et approfondie avec toute la rigueur possible, donne, au moins en plusieurs cas, la résistance absolument nulle, paradoxe singulier que je laisse à éclaircir aux géomètres. »

D'Alembert y revient aux nos 8 et suivants du § 13 de ses *Nouvelles recherches sur les fluides*, dans lesquels il termine en disant de nouveau que cette matière paraît bien digne d'occuper les géomètres.

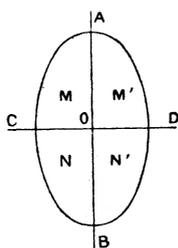
Après avoir transformé les équations d'Euler et vérifié ce premier travail, en déduisant ces équations transformées des équations

tions de Lagrange, qui ne sont, comme Cauchy l'a montré, autre chose que les équations d'Euler, nous avons cru avoir une base mathématique pour déduire, en les rapprochant, les équations d'une trajectoire fluide.

Mais nous ne pouvions pas oublier nos anciennes publications et, en particulier, celle faite en 1890 dans la *Revue d'Artillerie*. Là nous avons calculé de prime abord la résistance de l'air aux projectiles et, en nous basant sur des faits d'observation, nous étions arrivés à des résultats numériques, aussi approchés que nous pouvions l'espérer des résultats numériques fournis par l'expérience. Nous nous sommes demandé s'il n'y aurait pas dans ce travail quelque principe nouveau qui pût éclairer la question posée par d'Alembert et nous avons songé à celui-ci, qui s'y trouve en effet : Le mouvement d'un point matériel ou son impulsion ne se transmet pas instantanément à un point voisin situé sur la même courbe orthogonale aux trajectoires, mais bien avec une vitesse égale à celle du son dans le fluide considéré et pour la température à laquelle se trouve ce fluide.

Examinons en effet (*fig. 1*) le corps immergé décrit par d'Alem-

Fig. 1.



bert. Soient AB une parallèle à la direction générale du fluide, CD une perpendiculaire passant par le milieu O de AB; M, M', N, N' quatre surfaces superposables, M étant égal à AOC, M' à AOD, N à COB et N' à DOB; le fluide partant de A léchant la surface antérieure suivant les arcs AC et AD et la surface postérieure suivant les arcs CB et DB. Suivant la surface du corps, les tangentes aux courbes orthogonales aux trajectoires seront normales à la surface. Alors, il s'ensuivra, d'après d'Alembert, que les composantes des pressions parallèles à AB se détruiront mutuellement

deux à deux et qu'il en sera de même pour les composantes des pressions parallèles à CD; de là, suivant d'Alembert, le paradoxe singulier, car en repliant le bas de la figure sur le haut, en le faisant tourner autour de CD, les tangentes aux courbes orthogonales aux trajectoires fluides, aux points où ces courbes orthogonales partent de la surface du corps et pour la partie $N + N'$ viendront recouvrir exactement celles qui sont relatives à la partie supérieure $M + M'$; la résultante des pressions sera donc nulle.

Si, au lieu de cela, nous introduisons le principe posé dans notre publication de la *Revue d'Artillerie*, que le mouvement d'un point matériel ou son impulsion ne se transmet pas instantanément à un point voisin, situé sur la même courbe orthogonale aux trajectoires, mais bien avec une vitesse égale à celle du son, dans le fluide considéré et pour la température à laquelle se trouve ce fluide, alors les choses changent bien sur la figure que nous avons considérée. Tandis que le fluide se meut avec la vitesse v tangentiuellement à la trajectoire, l'impulsion se transmet avec la vitesse ξ de transmission du mouvement, normalement à cette trajectoire; et alors, au lieu de considérer des courbes orthogonales aux trajectoires, nous devons considérer des lignes inclinées sur elles de l'angle dont la tangente est $\frac{v}{\xi}$; alors, quelque petite que soit la tangente de l'angle, $\frac{v}{\xi}$, nous voyons qu'il n'y a pas recouvrement pour ces nouvelles lignes, quand on rabat la partie de figure CBD sur CAD, ces nouvelles lignes étant, pour CBD, inclinées par rapport aux courbes orthogonales aux trajectoires, de l'autre côté que lorsque l'on considère CAD. Loin de se détruire, les pressions s'ajouteront pour la partie antérieure du corps immergé et pour la partie postérieure.

M. RIVEREAU adresse la Note suivante :

**Invariants des équations aux dérivées partielles du second ordre
linéaires et homogènes.**

Soit l'équation

$$(1) \quad a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial z}{\partial x} + 2e \frac{\partial z}{\partial y} + fz = 0,$$

où les coefficients de a, \dots, f sont des fonctions de x et y . Cette équation conserve la même forme si l'on fait le changement de fonction ou de variables

$$(2) \quad z = u(x, y)\zeta, \quad \xi = F_1(x, y), \quad \eta = F_2(x, y),$$

où ζ est une fonction des nouvelles variables indépendantes ξ et η .

Pour trouver des expressions invariantes, nous particulariserons les fonctions indéterminées u, F_1, F_2 , de manière à obtenir une transformée de forme réduite, méthode employée dans le cas des équations différentielles ordinaires.

L'équation obtenue à l'aide des formules (2) est

$$(3) \quad \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} + 2\delta \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + 2\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + \varphi \zeta = 0.$$

1° Si $b^2 - ac \neq 0$, on pourra choisir pour ξ et η des valeurs X, Y annulant α et γ . Il suffit, comme on sait, de prendre pour X et Y deux solutions distinctes de l'équation

$$a \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + 2b \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, nous pouvons supposer que l'on fasse d'abord le seul changement de variables X, Y . On obtient une équation de la forme

$$(4) \quad 2b_1 \frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} + 2d_1 \frac{\partial z}{\partial X} + 2e_1 \frac{\partial z}{\partial Y} + f_1 z = 0,$$

où l'on a

$$\begin{aligned} b_1 &= a \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + b \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + c \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y}, \\ 2d_1 &= a \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial X}{\partial x} + 2e \frac{\partial X}{\partial y}, \\ 2e_1 &= a \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial Y}{\partial x} + 2e \frac{\partial Y}{\partial y}, \\ f_1 &= f. \end{aligned}$$

Si nous posons maintenant

$$z = U(X, Y)Z$$

et si nous déterminons U de manière à annuler le coefficient de

$\frac{\partial Z}{\partial X}$, par exemple, nous obtiendrons une équation réduite de la forme

$$2 \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + 2H \frac{\partial Z}{\partial Y} + KZ = 0.$$

Le calcul des coefficients H et K va nous fournir deux invariants relatifs. On trouve facilement que U doit vérifier l'équation

$$b_1 \frac{\partial U}{\partial y} + d_1 U = 0.$$

H et K peuvent alors s'écrire

$$H = \int \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{e_1}{b_1} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{d_1}{b_1} \right) \right] dY,$$
$$K = \frac{f_1}{b_1} - \frac{2 d_1 e_1}{b_1^2} - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{2 d_1}{b_1} \right) \quad (1)$$

$\frac{\partial H}{\partial Y}$ et K s'expriment en fonction des coefficients de l'équation proposée et du déterminant fonctionnel

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Voici comment on peut faire ce calcul. Posons

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \alpha \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \beta \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

α et β sont alors les deux racines distinctes de l'équation

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0.$$

Prenons

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

(1) Cf. DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 27.

nous aurons

$$b_1 = -\frac{2(b^2 - ac)}{a} \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$\Delta = (\alpha - \beta) \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a} \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{b_1}{\sqrt{b^2 - ac}},$$

$$2d_1 = \left[a \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) + 2b \frac{\partial \alpha}{\partial y} + 2d\alpha + 2e \right] \frac{\partial X}{\partial y},$$

$$2e_1 = \left[a \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + 2b \frac{\partial \beta}{\partial y} + 2d\beta + 2e \right] \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

On calculera les dérivées de α à l'aide de la relation

$$a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0.$$

Ainsi l'on aura

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{2 \left(b \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial b}{\partial y} \right) \alpha + c \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial c}{\partial x}}{2a(a\alpha + b)}.$$

Or

$$a\alpha + b = -\sqrt{b^2 - ac}, \quad a\beta + b = +\sqrt{b^2 - ac}.$$

Nous obtiendrons finalement

$$\frac{2d_1}{b_1} = \frac{P + \alpha Q}{\frac{\partial Y}{\partial y}}, \quad \frac{2e_1}{b_1} = -\frac{P + \beta Q}{\frac{\partial X}{\partial y}},$$

où nous avons posé

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \frac{a}{4(b^2 - ac)^{\frac{3}{2}}} \left[c \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial c}{\partial x} + 2 \left(c \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial c}{\partial y} \right) + 4(be - cd) \right], \\ Q = \frac{a}{4(b^2 - ac)^{\frac{3}{2}}} \left[c \frac{\partial a}{\partial y} - a \frac{\partial c}{\partial y} + 2 \left(b \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial b}{\partial x} \right) + 4(ae - bd) \right]. \end{array} \right.$$

En remarquant que l'on a les formules

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} &= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial Y}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \beta \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} &= -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial X}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

on trouve, après quelques réductions,

$$2 \frac{\partial H}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{2e_1}{b_1} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{2d_1}{b_1} \right) = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\beta - \alpha) Q + \frac{\partial}{\partial y} (\beta - \alpha) P \right];$$

or

$$\beta - \alpha = + \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

On a donc

$$\frac{\partial H}{\partial Y} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{b^2 - ac} \frac{Q}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{b^2 - ac} \frac{P}{a} \right) \right] = \frac{I}{\Delta}.$$

Puis

$$\begin{aligned} K &= \frac{f_1}{b_1} - \frac{2d_1 e_1}{b_1^2} - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{2d_1}{c_1} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{b^2 - ac}} \left[f - \frac{b^2 - ac}{a^2} (aP^2 - 2bPQ + cQ^2) \right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{c}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e}{\sqrt{b^2 - ac}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{b^2 - ac} Q}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sqrt{b^2 - ac} P}{a} \right) \right\}. \end{aligned}$$

On simplifierait l'écriture en posant

$$\sqrt{b^2 - ac} = h.$$

Alors, en appelant J la quantité en { }, on aurait

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{h} \left[f + \frac{h^2}{a^2} (aP^2 - 2bPQ + cQ^2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{e}{h} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{b}{h} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{c}{h} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{hQ}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{hP}{a} \right). \end{aligned}$$

Alors

$$K = \frac{J}{\Delta}.$$

Les expressions I, J sont des fonctions des coefficients de l'équation proposée et de leurs dérivées. Si l'on fait une transformation quelconque

$$z = u\zeta, \quad \xi = F_1(x, y), \quad \eta = F_2(x, y)$$

et si l'on appelle Δ_1 le déterminant fonctionnel

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

les fonctions (I), (J), composées avec les coefficients de l'équation transformée comme I, J le sont avec ceux de l'équation primitive, vérifient les relations

$$(I) = \frac{I}{\Delta_1}, \quad (J) = \frac{J}{\Delta_1}.$$

Si l'on avait annulé le coefficient de $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ au lieu d'annuler celui de $\frac{\partial Z}{\partial X}$, on eût obtenu un autre invariant δ , au lieu de J. On a entre ces deux invariants la relation

$$J - \delta = 2I.$$

En résumé, les invariants obtenus sont ceux de M. Darboux.

La relation $I = 0$ exprime que les invariants J et δ sont égaux et que l'équation peut se ramener à la forme

$$2 \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + KZ = 0.$$

M. Picard a étudié les équations du second ordre obtenues, en écrivant que la variation première de l'intégrale

$$\int f \left(v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx$$

est nulle, f étant une forme quadratique. Pour ces équations, $I = 0$. Cela explique comment on peut les ramener à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + F(x, y)z = 0 \quad (1).$$

2° Soit $b^2 - ac = 0$.

(1) *Acta mathematica*, t. XI, 1888, et *Bulletin des Sciences mathématiques*, avril 1892.

Nous prendrons comme variable Y une solution de l'équation

$$a \frac{\partial Y}{\partial x} + b \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

ce qui annule les termes en $\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}$ et $\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}$. Puis, z_1 et z_2 étant deux solutions distinctes de l'équation proposée, nous poserons

$$X = \frac{z_2}{z_1}, \quad z = z_1 Z.$$

L'équation réduite sera de la forme

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2M \frac{\partial Z}{\partial Y} = 0.$$

Le calcul de M fournit un invariant. On a, en effet,

$$2M = \frac{2(ae - bd) + b \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial b}{\partial x} + c \frac{\partial a}{\partial y} - b \frac{\partial b}{\partial y}}{\left(a \frac{\partial X}{\partial x} + b \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Pour trouver la relation d'invariance, nous ferons le raisonnement suivant. On peut obtenir la même forme réduite précédente en faisant d'abord un changement de fonction et de variables quelconques

$$z = u\zeta, \quad \xi = F_1(x, y), \quad \eta = F_2(x, y)$$

qui donne la transformée (3). Nous opérerons sur cette équation comme sur l'équation primitive en posant

$$\alpha \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0, \quad X = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}, \quad \zeta = \zeta_1 Z,$$

où ζ_1 et ζ_2 sont les solutions de (3) correspondant à z_1 et z_2 . Les fonctions X, Y, Z peuvent être supposées les mêmes que dans le cas précédent, puisque les équations qui les déterminent sont précisément les mêmes. On a, en effet,

$$z_1 = u\zeta_1 \quad z_2 = u\zeta_2.$$

D'où

$$X = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad z = u\zeta = u\zeta_1 Z = z_1 Z.$$

D'ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} &= \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(a \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \alpha &= \frac{1}{a} \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 u, \\ \beta &= \frac{1}{a} \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(a \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) u, \\ a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{a}{u \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \right). \end{aligned}$$

Les équations

$$a \frac{\partial Y}{\partial x} + b \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \quad \alpha \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial Y}{\partial \eta} = 0$$

sont donc bien équivalentes. Les deux formes réduites ainsi obtenues étant identiques, nous aurons

$$\begin{aligned} & \frac{2(\alpha\epsilon - \beta\delta) + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} - \alpha \frac{\partial \beta}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \beta}{\partial \eta}}{\left(\alpha \frac{\partial X}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial X}{\partial \eta} \right)^2} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \\ &= \frac{2(a\epsilon - b\delta) + b \frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial b}{\partial x} + c \frac{\partial a}{\partial y} - b \frac{\partial b}{\partial y}}{\left(a \frac{\partial X}{\partial x} + b \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2} \frac{\partial Y}{\partial y}. \end{aligned}$$

Appelons, pour abrégé (L), L les numérateurs des expressions précédentes, et remarquons que nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_1 \frac{\partial Y}{\partial \eta} &= - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1}{a} \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \frac{\partial Y}{\partial y}, \\ \alpha \frac{\partial X}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial X}{\partial \eta} &= \frac{a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y}}{a} \left(a \frac{\partial X}{\partial x} + b \frac{\partial X}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

nous obtenons donc

$$[L] = \frac{\Delta_1 u^2}{a} \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) L.$$

Or

$$\sqrt{a\alpha} = \left(a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \sqrt{u};$$

nous avons finalement

$$\frac{(L)}{\sqrt{\alpha}} = \Delta_1 u^{\frac{3}{2}} \frac{L}{\sqrt{a}}.$$

Nous obtenons ainsi un seul invariant $\frac{L}{\sqrt{a}}$. S'il est nul, l'équation est réductible à la forme intégrable

$$a \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0.$$

Les équations de M. Picard (*loc. cit.*) rentrent dans ce type lorsque la partie homogène du second degré en $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ de la forme quadratique $f\left(V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right)$ est un carré parfait.

Remarquons en terminant que, si $L = 0$, un seul changement de variables ramène l'équation à la forme intégrable

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2d \frac{\partial z}{\partial x} + fz = 0.$$

Il suffit de garder la variable x et de prendre, pour nouvelle variable y , une solution de l'équation

$$a \frac{\partial Y}{\partial x} + b \frac{\partial Y}{\partial y} = 0.$$

SÉANCE DU 21 NOVEMBRE 1900.

PRÉSIDENTE DE M. POINCARÉ.

Élections :

M. Auric, présenté par MM. Maillet et d'Ocagne; M. Levi Civita, présenté par MM. Drach et Borel; M. Estanave, présenté par MM. Blutel et Borel; M. Z. de Galdeano, présenté par MM. Laisant et Borel; M. Dickstein, présenté par MM. Niewenglowski et Borel; M. Ackermann-Teubner, présenté par MM. Claude Lafontaine et Gauthier-Villars; M. Hardel, présenté par MM d'Ocagne et Bricard, sont élus, à l'unanimité, membres de la Société.

Communications :

M. Borel : *Sur les prolongements analytiques des séries de fractions rationnelles.*

M. Hadamard : *Sur les discontinuités dans l'étude du déplacement des fluides.*

MM. Poincaré et Borel présentent quelques observations à ce sujet.

M. APPELL adresse la Note suivante :

Déformation spéciale d'un milieu continu; tourbillons de divers ordres.

I. Soit une transformation ponctuelle continue transformant une région \mathfrak{R}_0 de l'espace en une région \mathfrak{R} par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x = f(a, b, c), \\ y = f_1(a, b, c), \\ z = f_2(a, b, c), \end{cases}$$

faisant correspondre à chaque point $M_0(a, b, c)$ de \mathfrak{R}_0 un point $M(x, y, z)$ de \mathfrak{R} , et réciproquement. Nous supposons que $x da + y db + z dc$ est une différentielle exacte.

Soient trois fonctions A, B, C de a, b, c et trois fonctions X, Y, Z de x, y, z . Nous imaginerons le champ des vecteurs P_0 de projections A, B, C appliqués aux points M_0 , et le champ des vecteurs P de projections X, Y, Z appliqués aux points M.

Supposons que l'on ait, en vertu des relations (1), l'identité

$$(2) \quad A da + B db + C dc = X dx + Y dy + Z dz$$

ou

$$(3) \quad P_0 ds_0 \cos \widehat{P_0, ds_0} = P ds \cos \widehat{P, ds},$$

ds et ds_0 étant deux déplacements correspondants dans les deux régions. On peut établir alors la propriété suivante :

Permutons les deux champs de vecteurs, c'est-à-dire appliquons les vecteurs P aux points $M_0(a, b, c)$ et les vecteurs P_0 aux points $M(x, y, z)$. On peut évidemment supposer X, Y, Z fonctions de a, b, c et A, B, C fonctions de x, y, z . Alors les lignes de vecteurs des champs ainsi permutés se correspondent dans la transformation.

II. Mais il est possible d'aller plus loin et de déduire de l'identité (2) d'autres identités en nombre infini, de même forme et donnant lieu aux mêmes propriétés. Pour cela, considérons les tourbillons de ces deux vecteurs

$$X_1 = \frac{\partial C}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial c},$$

$$Y_1 = \frac{\partial A}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial a},$$

$$Z_1 = \frac{\partial B}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial b}$$

et

$$A_1 = D \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right),$$

$$B_1 = D \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right),$$

$$C_1 = D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right),$$

D étant le déterminant fonctionnel de x, y, z par rapport à a, b, c . On a la nouvelle identité

$$A_1 da + B_1 db + C_1 dc = X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz,$$

qui donne lieu aux mêmes propriétés, et par la même transformation à une identité nouvelle, etc.

En outre on a la relation

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 = A_1X + B_1Y + C_1Z.$$

On obtient ainsi une infinité d'autres champs de vecteurs possédant des propriétés analogues et donnant des tourbillons des divers ordres. Ces théorèmes se rattachent à ceux que nous avons développés dans un Mémoire inséré dans le *Journal* de M. Jordan (1^{er} fascicule, 1899).

SÉANCE DU 5 DÉCEMBRE 1900.

PRÉSIDENTE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Duporcq : *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.*

M. Servant : *Sur la théorie des surfaces et la déformation du parabolôïde.*

M. BRICARD fait la Communication suivante :

Sur une propriété du cylindroïde.

1. Dans une Note récemment insérée au *Bulletin* (1), M. Appell a donné une démonstration directe et fort élégante du théorème suivant :

Le cylindre et le cylindroïde (ou conoïde de Plucker) sont les seules surfaces réglées telles que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur leurs génératrices soit une courbe plane.

Ce même théorème peut être dérivé simplement de résultats connus, ainsi que je vais le montrer.

Soit (S) une surface réglée telle que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace a sur ses génératrices soit une courbe plane et G, l'une de ces génératrices. Quand G se déplace sur (S), le symétrique a' du point a par rapport à G décrit aussi une courbe plane.

Si donc on considère une figure fixe quelconque F, et si pour chaque position de G on construit la figure F' symétrique de F par rapport à cette droite, la figure F', qui est évidemment de grandeur invariable, sera assujettie à une loi de déplacement telle que tous ses points décrivent des courbes planes.

Or les conditions d'un pareil déplacement sont connues par les travaux de MM. Darboux et Mannheim (2); elles se résument en ceci :

Soit (C) un cylindre de révolution fixe : faisons rouler à l'intérieur de (C) un cylindre de révolution (C₁) de rayon moitié, ce cylindre pouvant en outre recevoir un glissement parallèle à son axe, et achevons de déterminer le déplacement

(1) 1900, p. 261.

(2) V. KÆNIGS, *Leçons de Cinématique*, p. 353 (Note de M. Darboux); MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 176 et 389.

de (C) en assujettissant un point quelconque, relié à ce cylindre, à rester sur un plan fixe, également quelconque; tous les points invariablement liés à (C₁) décrivent alors des courbes planes (des ellipses), et ces conditions de déplacement sont les plus générales qui permettent à tous les points d'une figure de grandeur invariable de décrire des courbes planes. (On laisse de côté le cas, sans intérêt, où la figure en question serait animée d'une translation telle que l'un de ses points décrive une courbe plane.)

Le déplacement de la figure F' doit donc pouvoir s'obtenir de cette manière. Mais il faut observer que, F' étant constamment symétrique d'une figure fixe par rapport à une droite, le déplacement de F' relativement à F doit être identique au déplacement inverse.

Il faut donc particulariser les conditions que j'ai rappelées plus haut de manière à réaliser cette identité du déplacement direct et du déplacement inverse. Cela n'est possible, on le voit, que si les cylindres (C₁) et (C) sont égaux, ce qui exige qu'ils soient tous deux réduits à une droite D.

Le déplacement de F' est donc ainsi défini : une droite D, invariablement liée à F', occupe une position fixe dans l'espace, tout en pouvant glisser sur elle-même, et un point m' de F' reste sur un plan fixe.

Réciproquement, quand F' se déplace dans ces conditions, cette figure reste symétrique d'une figure fixe F par rapport à une droite qui se déplace suivant une loi convenable.

Soit, en effet, m un point fixe tel que sa distance à D soit égale à la distance constante du point m' à la même droite. Appelons G la perpendiculaire commune à D et mm' : G rencontre le segment mm' en son milieu μ . La figure constituée par le point m' et la droite D est symétrique par rapport à G de la figure constituée par le point m et la droite D. Tout point de la figure F', point invariablement lié à m' et à D, reste donc symétrique par rapport à G d'un point invariablement lié à m et à D, c'est-à-dire d'un point fixe.

C. Q. F. D.

Puisque tous les points de F' décrivent des courbes planes, la projection d'un point fixe quelconque sur G décrit aussi une

courbe plane, et la surface engendrée par G jouit bien de la propriété énoncée.

La droite G , avons-nous dit, est la perpendiculaire commune à D et à mm' , et passe par le point μ , milieu du segment mm' . Or le point m' décrit une section plane d'un cylindre de révolution ayant pour axe D et passant par le point m . Le point μ décrit une courbe homothétique de la précédente par rapport au point m , le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire une section plane d'un cylindre de révolution contenant D .

La droite G est donc assujettie à rencontrer constamment à angle droit une droite D et s'appuie sur une section plane d'un cylindre de révolution contenant D : on retrouve une génération classique du cylindroïde.

Nous avons laissé de côté le cas où F' serait animée d'une translation : on voit immédiatement qu'à ce cas correspond celui où la surface cherchée (S) est un cylindre.

2. Il y aurait lieu de chercher à généraliser la propriété du cylindroïde, en traitant la question suivante :

Quelles sont les surfaces réglées telles que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur leurs génératrices soit une courbe sphérique?

Je n'ai pu encore résoudre complètement ce problème, mais je signalerai le résultat suivant, qui se présente comme conséquence immédiate de recherches, déjà publiées, relatives au déplacement d'une figure dont tous les points décrivent des lignes sphériques⁽¹⁾.

On considère le conoïde droit, ayant pour directrice curviligne la courbe d'intersection d'un cylindre de révolution dont l'axe se confond avec celui du conoïde, et d'une sphère ayant son centre sur le cylindre : ce conoïde est tel que le lieu des projections sur ses génératrices d'un point quelconque de l'espace est une courbe sphérique.

On a une propriété moins étendue pour la surface définie de la manière suivante :

(¹) Voir, sur ce sujet, un Mémoire de M. E. DUPORCQ et un Mémoire de l'auteur, insérés dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (années 1897 et 1898).

Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle. Considérons, dans le plan Oxy , un cercle C ayant son centre sur Oz et passant par le point O . La surface en question (S) est engendrée par une droite qui s'appuie sur C et sur Oz , et qui de plus fait un angle constant avec cette dernière droite.

Le lieu des projections d'un point quelconque du plan Oxy ou du plan Oxz sur les génératrices de (S) est une courbe sphérique.

J'énoncerai en dernier lieu deux théorèmes qui peuvent être utiles dans l'étude de la question indiquée plus haut.

Je dirai, pour abrégier le langage, qu'une droite variable D est en relation sphérique avec le couple de points a, a' si le symétrique du point a par rapport à D reste constamment sur une sphère de centre a' .

Il est alors évident que le symétrique du point a' par rapport à la même droite reste sur une sphère de centre a , et que les projections des points a et a' sur D restent sur une même sphère ayant pour centre le point milieu de aa' .

Cela posé, on a les théorèmes suivants :

1° Si une droite variable est en relation sphérique avec deux couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet, elle est également en relation sphérique avec le troisième couple de sommets opposés (¹).

(La droite en question, assujettie à deux conditions, engendre une congruence.)

2° Si une droite variable est en relation sphérique avec trois couples de points quelconques situés dans un même plan, elle est également en relation sphérique avec une infinité d'autres couples de points répartis sur une cubique plane passant par les six points donnés; deux points faisant partie d'un même couple sont en correspondance steinerienne sur cette cubique (autrement dit, les tangentes en ces deux points à la cubique vont se couper sur la même courbe).

(¹) Ce théorème est dû à M. Duporcq.

M. BOREL fait la Communication suivante :

Sur les formules d'Olinde Rodrigues.

On sait que, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point d'une surface, et par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale, on a, pour tout déplacement le long d'une ligne de courbure L les formules

$$(1) \quad \begin{cases} dx + R dc = 0, \\ dy + R dc' = 0, \\ dz + R dc'' = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles R désigne le rayon de courbure qui correspond à L. Ces formules permettent de trouver aisément l'équation différentielle des lignes de courbure et l'équation aux rayons de courbure principaux.

Les trois formules (1) se réduisent d'ailleurs à deux, comme on le voit, en remarquant que l'on a, pour tout déplacement effectué sur la surface,

$$\int c(dx + R dc) = 0.$$

Dans les applications, il y a souvent avantage à employer, au lieu des cosinus directeurs c, c', c'' , des quantités proportionnelles u, v, w . Si dans les formules (1) on remplace c, c', c'' par u, v, w et R par ρ on obtient les formules

$$(2) \quad \begin{cases} dx + \rho du = 0, \\ dy + \rho dv = 0, \\ dz + \rho dw = 0, \end{cases}$$

dont nous allons chercher la signification. Les différentielles se rapportant toujours à un déplacement effectué sur la surface, on a

$$\int u(dx + \rho du) = \rho(u du + v dv + w dw).$$

On déduit donc des formules (2) la suivante :

$$\rho d(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

qui se décompose en deux :

$$\begin{aligned} \rho &= 0, \\ u^2 + v^2 + w^2 &= h^2, \end{aligned}$$

h étant une constante. D'ailleurs, si l'on pose

$$\begin{aligned} u &= ch, & v &= c'h, & w &= c''h, \\ \rho &= \frac{R}{h}, \end{aligned}$$

les formules (2) deviennent identiques aux formules (1).

Donc les formules (2) peuvent remplacer les formules (1) pour la détermination des directions principales et des rayons de courbure principaux; il y a lieu seulement de remarquer : 1° que l'on a

$$(3) \quad \rho = \frac{R}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

2° que les équations (2) peuvent fournir la solution $\rho = 0$, étrangère à la question.

Comme application, proposons-nous de déterminer les rayons de courbure principaux d'une surface représentée par l'équation tangentielle

$$(4) \quad f(u, v, w, s) = 0.$$

Nous supposons les axes rectangulaires et l'équation d'un plan écrite sous la forme

$$ux + vy + wz + s = 0;$$

les coordonnées d'un point de la surface (4) sont alors

$$x = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial s}}, \quad y = \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial s}}, \quad z = \frac{\frac{\partial f}{\partial w}}{\frac{\partial f}{\partial s}}$$

et les formules (2) deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} d \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} d \frac{\partial f}{\partial s} + \rho \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 du &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial s} d \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} d \frac{\partial f}{\partial s} + \rho \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 dv &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial s} d \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w} d \frac{\partial f}{\partial s} + \rho \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right)^2 dw &= 0. \end{aligned}$$

L'introduction d'un paramètre auxiliaire $d\lambda$ permet de remplacer ces équations par les suivantes plus symétriques

$$\begin{aligned} d \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} d\lambda + \rho \frac{\partial f}{\partial s} du &= 0, \\ d \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} d\lambda + \rho \frac{\partial f}{\partial s} dv &= 0, \\ d \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial w} d\lambda + \rho \frac{\partial f}{\partial s} dw &= 0, \\ d \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial s} d\lambda &= 0, \end{aligned}$$

auxquelles il y a lieu de joindre la relation

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \frac{\partial f}{\partial s} ds = 0,$$

obtenue en différentiant totalement l'équation (4). Si l'on élimine du , dv , dw , ds , $d\lambda$ entre les équations précédentes, on obtient l'équation

$$(5) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \rho_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \rho_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial s} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} + \rho_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial s} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} & \frac{\partial f}{\partial s} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} & \frac{\partial f}{\partial s} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

dans laquelle on a posé

$$\rho_1 = \rho \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{R}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \frac{\partial f}{\partial s}.$$

L'équation (5) est du troisième degré en ρ_1 ; il est aisé de s'assurer qu'elle admet la solution étrangère prévue $\rho_1 = 0$; les deux autres racines fournissent les deux rayons de courbures principaux de la surface donnée.

On peut éliminer aisément la solution $\rho_1 = 0$ en remarquant que, si l'on désigne par m le degré d'homogénéité de $f(\mu, \nu, \omega, s)$, on a

$$u \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \nu \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \nu} + \omega \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \omega} + s \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} = (m-1) \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$u \frac{\partial f}{\partial u} + \nu \frac{\partial f}{\partial \nu} + \omega \frac{\partial f}{\partial \omega} + s \frac{\partial f}{\partial s} = mf = 0.$$

L'équation (5) se transforme en la suivante ⁽¹⁾ :

$$-(m-1)\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \rho_1 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \nu} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \omega} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & u \rho_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \nu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2} + \rho_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial \omega} & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial s} & \nu \rho_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \omega} & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial \omega} & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} + \rho_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial s} & \omega \rho_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial \nu} & \frac{\partial f}{\partial \omega} & \frac{\partial f}{\partial s} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle le facteur ρ_1 est en évidence et peut être supprimé. En le supprimant et en effectuant sur les lignes l'opération analogue à celle que nous avons effectuée sur les colonnes, on obtient l'équation

$$(6) \frac{(m-1)^2 \Delta}{\rho_1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \rho_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \nu} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \omega} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & u \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \nu} & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu^2} + \rho_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial \omega} & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial s} & \nu \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \omega} & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial \omega} & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} + \rho_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial s} & \omega \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial \omega \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} & 0 \\ u \rho_1 & \nu \rho_1 & \omega \rho_1 & 0 & h^2 \end{vmatrix} = 0.$$

(1) On peut toujours supposer que m n'est pas égal à un. Cette hypothèse sera toujours vérifiée dans le cas d'une surface algébrique, si, comme il est naturel, on prend pour f un polynôme.

La formule (5) montre immédiatement que, dans Δ , le coefficient de ρ_1^3 est $-\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2$; d'autre part le coefficient de ρ_1 est, d'après (6),

$$\frac{h^2}{(m-1)^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial s} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w} & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial s} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial s} & \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \end{vmatrix} = \frac{h^2}{(m-1)^2} H.$$

On en déduit immédiatement l'expression de la courbure totale, car l'on a

$$R_1 R_2 = \frac{-h^4}{(m-1)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^4} H;$$

H désigne le hessien de la forme f . On retrouve ainsi très simplement ce fait bien connu, que la relation $H = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (4) représente, non une surface, mais une courbe.

M. N. WEILL adresse la Note suivante :

Sur les points de base d'un faisceau linéaire de courbes algébriques.

Considérons une conique et un premier groupe G de $2m$ points sur cette conique, ces $2m$ points étant les points communs à la conique et à une première courbe C de degré m ; les droites, au nombre de $\frac{2m(2m-1)}{2}$, qui joignent ces points deux à deux, forment un premier groupe D . Considérons, sur la conique, un second groupe G' de $2m$ points, ces points étant les points communs à la conique et à une seconde courbe C' de degré m ; les droites qui joignent ces points deux à deux forment un groupe D' . Les courbes C et C' ont m^2 points communs; si par ces m^2 points nous faisons passer une courbe quelconque C'' de degré m , elle déterminera sur la conique un groupe G'' de $2m$ points et un groupe D'' de droites; l'enveloppe des droites du groupe variable D''

est une courbe de classe $(2m - 1)$, et les droites des groupes D et D' ont aussi cette courbe pour enveloppe. On peut énoncer ce résultat de la manière suivante : Étant donnés sur une conique deux groupes de $2m$ points chacun, les droites qui joignent deux à deux les points du premier groupe, et les droites qui joignent deux à deux les points du second groupe, au nombre total de $2m(2m - 1)$, sont tangentes à une courbe de classe $(2m - 1)$.

Le même résultat subsiste pour un nombre impair de points pris sur une conique ; il suffit d'adjoindre un point fixe de la conique. Transformant ce résultat par polaires réciproques, on a enfin l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Deux polygones de m côtés étant circonscrits à une conique, il existe une courbe de degré $(m - 1)$ passant par tous leurs sommets, au nombre de $m(m - 1)$.*

Ainsi les six sommets de deux triangles circonscrits à une conique sont sur une conique, résultat bien connu.

Considérons 2 quadrilatères circonscrits à une conique ; leurs 12 sommets sont sur une cubique. Laissons fixes l'un des quadrilatères et 3 droites de l'autre, lesquelles formeront un triangle de sommets A, B, C, circonscrit à la conique ; soient P, Q, R les points où les côtés du triangle ABC sont rencontrés par le quatrième côté du second quadrilatère ; si ce quatrième côté se déplace, nous aurons des cubiques passant par les 3 points variables P, Q, R et par 9 points fixes, savoir : les 6 sommets du premier quadrilatère et les 3 points A, B, C ; en d'autres termes, ces 9 points sont les points de base d'un faisceau de cubiques.

En généralisant ce raisonnement, nous arrivons au théorème suivant que nous avons en vue :

THÉORÈME. — *Étant donnés un polygone de $(m + 1)$ côtés circonscrit à une conique et un polygone de m côtés circonscrit à cette même conique, leurs sommets, au nombre de*

$$\frac{(m + 1)m}{2} + \frac{m(m - 1)}{2},$$

c'est-à-dire de m^2 , sont les points de base d'un faisceau linéaire de courbes de degré m .

Ce théorème général, qui a de nombreuses conséquences, est le premier, croyons-nous, qui permette de construire *effectivement* le groupe des points de base d'un faisceau linéaire de degré quelconque.

Le cas le plus simple, celui où $m = 3$, a été signalé par Laguerre. Ainsi, si l'on considère toutes les cubiques qui passent par les 6 sommets d'un quadrilatère et par 2 points A, B, on obtient le neuvième point du faisceau en construisant une conique inscrite dans le quadrilatère et tangente à la droite AB, et prenant le point de rencontre des tangentes menées de A et B à cette conique.

Considérons la valeur $m = 4$; les 10 sommets d'un pentagone circonscrit à une conique et les 6 sommets d'un quadrilatère circonscrit à cette même conique sont les 16 points de base d'un faisceau de courbes du quatrième degré. Dès lors, considérons un pentagone circonscrit à une conique et 3 points A, B, C, pris sur une tangente à cette conique; toutes les courbes du quatrième degré qui passent par les 10 sommets du pentagone et les 3 points A, B, C passent par 3 autres points fixes que l'on obtient en menant par A, B, C les 3 tangentes à la conique, lesquelles se coupent aux 3 points cherchés. On pourrait de même prendre un point A quelconque et les points B et C respectivement sur les 2 tangentes partant de A; on aurait les 3 points restants en menant par B et C des tangentes à la conique, qui forment avec les tangentes AB, AC le quadrilatère dont les sommets sont les 6 points qui, avec les 10 sommets du pentagone, forment les 16 points demandés. Si les points A, B, C étaient les sommets d'un triangle circonscrit à la conique, les 13 points donnés ne seraient plus distincts; on ne pourrait donc en déduire les 3 points restants.

On peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donné un polygone de $(m + 1)$ côtés circonscrit à une conique, et $(m - 1)$ points sur une tangente à cette conique, toutes les courbes du degré m qui passent par les sommets du polygone et par les $(m - 1)$ points passent par $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ autres points fixes que l'on obtient en menant par les $(m - 1)$ points des tangentes à la conique et prenant leurs points d'intersection.*

Plus généralement, on peut prendre $(m - 1)$ points sur des tangentes, pourvu que ces points permettent de déterminer complètement le polygone de m côtés circonscrit à la conique et dont ces points sont des sommets.

SÉANCE DU 19 DÉCEMBRE 1900.

PRÉSIDENTE DE M. LAISANT.

Communications :

M. Saltykow : *Sur les systèmes d'équations aux linéaires partielles.*

M. DUPORCQ fait la Communication suivante :

Sur une extension à l'espace du théorème de Simson.

Le lieu des points dont les projections sur les faces d'un tétraèdre sont situées dans un même plan est, comme on sait, une surface du troisième ordre à quatre points doubles, corrélative, par conséquent, d'une surface de Steiner. Cette surface correspond au plan de l'infini au moyen de la transformation qui associe entre eux les points dont les coordonnées normales, par rapport au tétraèdre, sont inversement proportionnelles; il suffit, pour le voir, de remarquer que deux points ainsi associés, qu'on peut appeler *inverses* par rapport au tétraèdre, sont les foyers principaux d'une même quadrique de révolution inscrite au tétraèdre : l'inverse du plan de l'infini est donc bien le lieu des foyers des paraboloides de révolution inscrits au tétraèdre.

On peut remarquer encore que deux points inverses sont conjugués à tous les hyperboloïdes équilatères conjugués au tétraèdre, et il en résulte que la surface obtenue est aussi le lieu des centres de ces hyperboloïdes, nouvelle analogie avec le problème correspondant dans le plan. Mais on peut en tirer encore une conséquence intéressante.

Rappelons, à cet effet, que toutes les quadriques qui passent par cinq points coupent un plan fixe P suivant des coniques harmoniquement circonscrites à une conique fixe Γ , qu'on dit *conjuguée* au pentagone des cinq points : cette conique est commune

aux cinq quadriques qui admettent l'un des cinq points comme pôle du plan P et le tétraèdre des quatre autres comme tétraèdre conjugué. Si P est le plan de l'infini, on voit que les cinq quadriques admettant un des points pour centre et respectivement conjuguées aux tétraèdres des quatre autres, sont homothétiques : en particulier, elles seront en même temps équilatères. On en conclut que :

Si cinq points sont tels que les projections de l'un sur les faces du tétraèdre déterminé par les quatre autres soient dans un même plan, cette propriété est symétrique par rapport aux cinq points.

D'après ce qui précède, on peut énoncer sous forme symétrique la relation qui existe entre ces cinq points de la manière suivante :

Il faut et il suffit que la conique du plan de l'infini, conjuguée au pentagone gauche formé par les cinq points, soit harmoniquement circonscrite à l'ombilicale.

Pour terminer, je me contenterai d'indiquer que dans toute cubique gauche on peut inscrire une double infinité de tétraèdres sur les faces desquels tout point de la cubique a ses projections dans un même plan.

Enfin, si les points à l'infini de la cubique forment un triangle circonscrit à l'ombilicale, la propriété précédente a lieu pour tout tétraèdre inscrit à cette cubique.

M. DE SPARRE adresse la Note suivante :

Sur une application des fonctions elliptiques à l'étude du mouvement des projectiles.

Lorsqu'on suppose la résistance de l'air proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse, si l'on désigne par

v , la vitesse horizontale du projectile ;

θ l'angle de la tangente à la trajectoire avec l'horizon ;

x et y les coordonnées horizontale et verticale du projectile dans le plan de tir ;

χ une constante dépendant de la forme et du poids du projectile;
 g l'accélération de la pesanteur;

et si l'on pose de plus

$$v_1 = \chi \omega, \quad x = \frac{\chi^2}{g} \xi, \quad y = \frac{\chi^2}{g} \eta,$$

on a

$$\frac{1}{\omega^4} = \frac{1}{\omega_0^4} + F(\theta_0) - F(\theta),$$

$$\xi = \int_{\theta_0}^{\theta} \omega^2 d \operatorname{tang} \theta, \quad \eta = \int_{\theta_0}^{\theta} \omega^2 \operatorname{tang} \theta d \operatorname{tang} \theta$$

où

$$F(\theta) = \operatorname{tang} \theta \left(\sec^3 \theta + \frac{3}{2} \sec \theta \right) + \frac{3}{2} \mathcal{L} \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right).$$

Mais si l'angle θ de la tangente avec l'horizon ne dépasse pas 45° à 46° , on peut prendre, avec une approximation très suffisante,

$$F(\theta) = A_1 \operatorname{tang} \theta + A_2 \operatorname{tang}^3 \theta$$

avec

$$A_1 = 3,91, \quad A_2 = 2,36.$$

Par suite, si l'on pose de plus

$$A = \frac{1}{\sqrt{A_2}}, \quad \beta = \frac{A_1}{A_2}, \quad \alpha = \operatorname{tang}^3 \theta_0 + \beta \operatorname{tang} \theta_0 + \frac{1}{A_2 \omega_0^4},$$

on aura

$$\omega^2 = \frac{2A}{\sqrt{-4 \operatorname{tang}^3 \theta - 4\beta \operatorname{tang} \theta + 4\alpha}}.$$

Faisons maintenant

$$z = -\frac{\operatorname{tang} \theta}{\gamma^2}, \quad g_2 = -\frac{4\beta}{\gamma^4}, \quad g_3 = -\frac{4\alpha}{\gamma^6};$$

il viendra

$$\omega^2 = \frac{2A}{\gamma^2 \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

et, par suite, p désignant la fonction de Weierstrass, dont les invariants sont g_2 et g_3 .

$$z = p(u) = -\frac{\operatorname{tang} \theta}{\gamma^2},$$

$$\omega^2 = \pm \frac{2A}{\gamma^2 p'(u)}.$$

Nous supposons γ^2 toujours réel et, par suite, γ^4 positif; nous sommes donc dans le cas du discriminant négatif.

Les formules (78) et (80) du précis de M. Lévy donnent alors (1)

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{K}{\sqrt{H}}, & H &= \sqrt{2e_1^2 + \frac{g_3}{4e_1}}, \\ \omega_2 &= \frac{iK'}{\sqrt{H}}, & k^2 &= \frac{1}{2} - \frac{3e_1}{4H}, \\ p(u) &= e_1 + H \frac{1 + \operatorname{cn} 2u\sqrt{H}}{1 - \operatorname{cn} 2u\sqrt{H}}.\end{aligned}$$

D'ailleurs e_1 est la racine réelle de l'équation

$$4z^3 - g_2z - g_3 = 0,$$

de sorte que, si θ_1 désigne la valeur réelle de θ , comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, racine de l'équation

$$\operatorname{tang}^3\theta + \beta \operatorname{tang}\theta - \alpha = 0,$$

on a

$$e_1 = -\frac{\operatorname{tang}\theta_1}{\gamma^2}$$

et aussi

$$\alpha = \operatorname{tang}^3\theta_1 + \beta \operatorname{tang}\theta_1.$$

Nous disposerons maintenant de γ , qui est arbitraire, de façon que $H = \frac{1}{4}$. En tenant compte de la valeur de H écrite plus haut, ainsi que de celles de e_1 et α que nous venons d'écrire, cette condition donne

$$\gamma^2 = \pm 4 \sqrt{\frac{2 \operatorname{tang}^3\theta_1 + \alpha}{\operatorname{tang}\theta_1}} = \pm 4 \sqrt{3 \operatorname{tang}^2\theta_1 + \beta}.$$

Les formules écrites plus haut deviennent alors

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2K, & k^2 &= \frac{1}{2} - 3e_1 = \frac{1}{2} + \frac{3 \operatorname{tang}\theta_1}{\gamma^2}, \\ \omega_2 &= 2iK', & p(u) &= e_1 + \frac{1}{4} \frac{1 + \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{cn} u} = \frac{1}{4} \frac{1 + \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{cn} u} - \frac{\operatorname{tang}\theta_1}{\gamma^2}\end{aligned}$$

(1) En supprimant, pour simplifier l'écriture, les indices de K , K' et k , ce qui est ici sans inconvénient.

Les valeurs de ξ et η deviennent de plus

$$\xi = \pm \frac{2A}{\gamma} (u - u_0),$$

$$\eta = \mp 2A\gamma \int_{u_0}^u p(u) du.$$

Nous distinguerons maintenant deux cas (1) :

1° On veut se servir des Tables.

Il faudra alors faire en sorte que u soit réel; il faudra donc prendre d'abord pour γ^2 une valeur positive; nous prendrons donc

$$\gamma^2 = 4\sqrt{3 \operatorname{tang}^2 \theta_1 + \beta}, \quad \gamma = 2\sqrt[4]{3 \operatorname{tang}^2 \theta_1 + \beta}.$$

Nous aurons ensuite pour calculer u

$$-\frac{\operatorname{tang} \theta}{\gamma^2} = p(u) = -\frac{\operatorname{tang} \theta_1}{\gamma^2} + \frac{1}{4} \frac{1 + \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{cn} u},$$

d'où

$$\operatorname{cn} u = \frac{\operatorname{tang} \theta_1 - \operatorname{tang} \theta - \frac{\gamma^2}{4}}{\operatorname{tang} \theta_1 - \operatorname{tang} \theta + \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Cette dernière formule fait voir que, lorsque θ décroît de θ_1 à $-\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cn} u$ croît de -1 à $+1$; on pourra donc, entre les mêmes limites, faire décroître u de $2K$ à 0 , et il faudra, par suite, prendre les signes inférieurs dans les valeurs de ξ et η et l'on aura donc

$$\xi = \frac{2A}{\gamma} (u_0 - u),$$

$$\eta = 2A\gamma \int_{u_0}^u \left(\frac{1}{4} \frac{1 + \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{cn} u} - \frac{\operatorname{tang} \theta_1}{\gamma^2} \right) du.$$

Si l'on se propose d'introduire l'argument φ des Tables, en posant

$$\operatorname{sn} u = \sin \varphi$$

(1) Cet exemple met en évidence un des avantages des fonctions de Weierstrass. En effet, nous passerons d'un cas à l'autre par le simple changement du signe de γ^2 , tandis qu'avec les fonctions de Jacobi il faudrait recourir à la théorie de la transformation.

on aura

$$\operatorname{cn} u = \cos \varphi = \frac{\operatorname{tang} \theta_1 - \operatorname{tang} \theta - \frac{\gamma^2}{4}}{\operatorname{tang} \theta_1 - \operatorname{tang} \theta + \frac{\gamma^2}{4}}.$$

On a d'ailleurs

$$\int \frac{1 + \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{cn} u} du = \int \frac{1 + 2 \operatorname{cn} u + \operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{sn}^2 u} du = 2 \int \frac{1 + \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du - u;$$

d'ailleurs

$$D_u \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = - \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u};$$

de plus, la relation connue

$$k^2 \operatorname{sn}^2 u = \frac{J}{K} - D_u \frac{\theta'_2(u)}{\theta_2(u)}$$

donne, en changeant u en $u + iK'$,

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = k^2 \operatorname{sn}^2(u + iK') = \frac{J}{K} - D_u \frac{\theta'(u)}{\theta(u)}.$$

On aura donc

$$\int \frac{1 + \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du = \frac{J}{K} u - \frac{\theta'(u)}{\theta(u)} - \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}.$$

Pour se servir des Tables, il faut introduire la fonction $E(\varphi)$ de Legendre; on a, pour cela,

$$E(\varphi) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u = u - \int_0^u k^2 \operatorname{sn}^2 u = \left(1 - \frac{J}{K}\right) u + \frac{\theta'_2(u)}{\theta_2(u)}$$

et, de plus,

$$D \mathcal{L} \operatorname{sn} u = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = \frac{\theta'(u)}{\theta(u)} - \frac{\theta'_2(u)}{\theta_2(u)},$$

d'où

$$\frac{\theta'(u)}{\theta(u)} + \frac{\theta'_2(u)}{\theta_2(u)} + \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} = E(\varphi) - \left(1 - \frac{J}{K}\right) u + \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} du &= u - E(\varphi) - \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} (1 + \operatorname{cn} u) \\ &= u - E(\varphi) - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cot \frac{\varphi}{2}, \end{aligned}$$

puisque

$$\operatorname{sn} u = \sin \varphi, \quad \operatorname{cn} u = \cos \varphi, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

On a donc, en fin de compte,

$$\eta = \eta_0 + \Lambda \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{2 \operatorname{tang} \theta_1}{\gamma} \right) u - \Lambda \gamma \left[E(\varphi) + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cot \frac{\varphi}{2} \right]$$

avec

$$\eta_0 = -\Lambda \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{2 \operatorname{tang} \theta_1}{\gamma} \right) u_0 + \Lambda \gamma \left[E(\varphi_0) + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_0} \cot \frac{\varphi_0}{2} \right].$$

La formule

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{tang} \theta_1 - \operatorname{tang} \theta - \frac{\gamma^2}{4}}{\operatorname{tang} \theta_1 - \operatorname{tang} \theta + \frac{\gamma^2}{4}}$$

donnera φ , qui est compris entre 0 et π sans ambiguïté.

Si φ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on en déduira de suite, au moyen des Tables, $E(\varphi)$ et $u = F(\varphi)$.

Si φ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π , on aura

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= 2E - E(\pi - \varphi), \\ u = F(\varphi) &= 2K - F(\pi - \varphi), \end{aligned}$$

E et K désignant les intégrales complètes.

2° Supposons maintenant qu'on veuille recourir aux développements en séries.

On devra alors, pour que les séries soient plus convergentes, faire en sorte que k^2 soit plus petit que $\frac{1}{2}$.

On prendra, par suite (1),

$$\gamma^2 = -4\sqrt{3 \operatorname{tang}^2 \theta_1 + \beta} = -\gamma_1^2,$$

γ_1 étant réel et positif.

On aura alors

$$k^2 = \frac{1}{2} - \frac{3 \operatorname{tang} \theta_1}{\gamma_1^2} < \frac{1}{2}.$$

(1) γ étant toujours choisi de façon que $\Pi = \frac{1}{2}$.

Les valeurs de ξ et en u deviennent, par suite,

$$\xi = \pm \frac{2A}{\gamma_1 i} (u - u_0),$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\operatorname{tang} \theta_1 - \operatorname{tang} \theta + \frac{\gamma_1^2}{4}}{\operatorname{tang} \theta_1 - \operatorname{tang} \theta - \frac{\gamma_1^2}{4}}.$$

Cette formule fait voir que $\operatorname{cn} u$ est toujours réel et plus grand que 1 en valeur absolue. Il décroît de -1 à $-\infty$ lorsque $\operatorname{tang} \theta$ décroît de $\operatorname{tang} \theta_1$, à $\operatorname{tang} \theta_1 - \frac{\gamma_1^2}{4}$ pour décroître ensuite de $+\infty$ à 1 lorsque $\operatorname{tang} \theta$ décroît de $\operatorname{tang} \theta_1 - \frac{\gamma_1^2}{4}$ à $-\infty$. Il résulte de là que l'on peut prendre la valeur de u entre 0 et $2iK'$ et que, lorsque θ décroît de θ_1 , à $-\frac{\pi}{2}$, u variera de $2iK'$ à 0. u sera donc de la forme $u - \nu i$, ν étant réel. Il faudra donc prendre les signes inférieurs dans les valeurs de ξ et η , et l'on aura

$$\xi = \frac{2A}{\gamma_1} (\nu_0 - \nu).$$

Il y a lieu toutefois de faire ici, *comme toutes les fois où u est imaginaire, une remarque très importante.*

Il faut, si l'on convient, par exemple, de négliger les termes de l'ordre de q^2 dans les séries, s'assurer que les termes que l'on néglige sont bien *effectivement* de cet ordre.

Prenons, en effet, la série

$$\theta_3(u) = 1 + 2q \cos \frac{\pi u}{K} + 2q^3 \cos \frac{2\pi u}{K} + \dots,$$

comme dans le cas actuel $u = \nu i$, nous aurons

$$\cos \frac{2\pi u}{K} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2\pi \nu}{K}} + e^{-\frac{2\pi \nu}{K}} \right).$$

D'ailleurs, nous avons dit que ν varie de 0 à $2K'$, par suite $e^{\frac{2\pi \nu}{K}}$ varie de 1 à $e^{\frac{4\pi K'}{K}} = q^{-4}$ de telle sorte que le terme $2q^4 e^{\frac{2\pi \nu}{K}}$ est égal à 1 pour $u = 2iK'$ et nullement très petit de l'ordre de q^4 . Si donc on gardait pour variable u et que l'on voulût obtenir les

résultats aux termes *effectivement* de l'ordre de q^2 près, on devrait, dans la série que nous venons de considérer, garder les termes en q^4 .

On évitera toutefois cet inconvénient en posant

$$u = iK' + \zeta,$$

ζ variant, par suite, de iK' à $-iK'$.

La formule

$$\operatorname{cn}(iK' + \zeta) = -i \frac{\operatorname{dn} \zeta}{k \operatorname{sn} \zeta}$$

nous donne alors

$$\frac{1 + \operatorname{cn} u}{1 - \operatorname{cn} u} = \frac{k \operatorname{sn} \zeta - i \operatorname{dn} \zeta}{k \operatorname{sn} \zeta + i \operatorname{dn} \zeta} = (k \operatorname{sn} \zeta - i \operatorname{dn} \zeta)^2 \quad (1),$$

donc

$$\eta = 2A \gamma_1 i \int_{u_0}^u p(u) du = 2A \gamma_1 i \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left[\frac{\operatorname{tang} \theta_1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{4} (k \operatorname{sn} \zeta - i \operatorname{dn} u \zeta)^2 \right] d\zeta.$$

Mais

$$\begin{aligned} \int (k \operatorname{sn} \zeta - i \operatorname{dn} \zeta)^2 d\zeta &= \int (2k^2 \operatorname{sn}^2 \zeta - 2ki \operatorname{sn} \zeta \operatorname{dn} \zeta - 1) d\zeta \\ &= 2 \frac{J}{K} \zeta - 2 \frac{\theta_2'(\zeta)}{\theta_2(\zeta)} + 2ki \operatorname{cn} \zeta - \zeta. \end{aligned}$$

D'ailleurs, aux termes de q^2 près,

$$\frac{J}{K} = \frac{\theta_2'(0)}{\theta_2(0)} = \frac{2q\pi^2}{K^2},$$

de sorte que l'on aura

$$\eta = \eta_0 + 2A \gamma_1 i \left[\left(\frac{\operatorname{tang} \theta_1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{4} + \frac{q\pi^2}{K^2} \right) \zeta + \frac{1}{2} ki \operatorname{cn} \zeta - \frac{1}{2} \frac{\theta_2'(\zeta)}{\theta_2(\zeta)} \right]$$

où

$$\eta_0 = -2A \gamma_1 i \left[\left(\frac{\operatorname{tang} \theta_1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{4} + \frac{q\pi^2}{K^2} \right) \zeta_0 + \frac{1}{2} ki \operatorname{cn} \zeta_0 - \frac{1}{2} \frac{\theta_2'(\zeta_0)}{\theta_2(\zeta_0)} \right].$$

On pourra d'ailleurs, dans la série $\theta_2(\zeta)$, négliger les termes en q^4 , si l'on néglige ceux qui sont effectivement de l'ordre de q^2 .

En effet, ici $\zeta = \lambda i$, λ étant réel et plus petit que K' en valeur

(1) On a, en effet,

$$(k \operatorname{sn} \zeta + i \operatorname{dn} \zeta)(k \operatorname{sn} \zeta - i \operatorname{dn} \zeta) = k^2 \operatorname{sn}^2 \zeta + \operatorname{dn}^2 \zeta = 1.$$

absolue, de sorte que dans

$$\cos \frac{2\pi\zeta}{K} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2\pi\lambda}{K}} + e^{-\frac{2\pi\lambda}{K}} \right),$$

on a pour λ positif

$$e^{\frac{2\pi\lambda}{K}} < e^{\frac{2\pi K'}{K}} = q^{-2},$$

de sorte que $q^4 \cos \frac{2\pi u}{K}$ est inférieur à q^2 en valeur absolue.

On pourra donc prendre, avec cette approximation,

$$\frac{\theta'_2(\zeta)}{\theta_2(\zeta)} = \frac{2q\pi}{K} \frac{\sin \frac{\pi\zeta}{K}}{1 - 2q \cos \frac{\pi\zeta}{K}}.$$

Pour calculer ensuite $\operatorname{cn} \zeta$ et ζ , nous poserons

$$k \operatorname{sn} \zeta - i \operatorname{dn} \zeta = -i \operatorname{tang} \mu,$$

d'où

$$k \operatorname{sn} \zeta + i \operatorname{dn} \zeta = i \cot \mu.$$

On déduit ensuite de ces formules et de celles dont nous nous sommes déjà servi plus haut

$$p(u) = \frac{\operatorname{tang} \theta_1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{4} \operatorname{tang}^2 \mu = \frac{\operatorname{tang} \theta}{\gamma_1^2},$$

d'où

$$\frac{1}{4} \operatorname{tang}^2 \mu = \frac{\operatorname{tang} \theta_1 - \operatorname{tang} \theta}{\gamma_1^2} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta)}{\gamma_1^2 \cos \theta_1 \cos \theta}.$$

Cette formule fera connaître μ .

On aura ensuite

$$i \operatorname{dn} \zeta = \frac{i}{2} (\cot \mu + \operatorname{tang} \mu) = \frac{i}{\sin 2\mu},$$

$$k \operatorname{sn} \zeta = \frac{i}{2} (\cot \mu - \operatorname{tang} \mu) = i \cot 2\mu,$$

et l'on en déduira

$$\operatorname{cn} \zeta = \sqrt{1 + \frac{\cot^2 2\mu}{k^2}}.$$

Puis, aux termes *effectivement* de l'ordre q^2 près, d'après ce

que nous avons vu,

$$\frac{1 + 2q \cos \frac{\pi\zeta}{K}}{1 - 2q \cos \frac{\pi\zeta}{K}} = \frac{dn \zeta}{\sqrt{k'}} = \frac{1}{\sqrt{k'} \sin 2\mu},$$

d'où

$$2q \cos \frac{\pi\zeta}{K} = \frac{1 - \sqrt{k'} \sin 2\mu}{1 + \sqrt{k'} \sin 2\mu} = q \left(e^{\frac{\pi\lambda}{K}} + e^{-\frac{\pi\lambda}{K}} \right);$$

en posant comme plus haut $\zeta = \lambda i$, λ étant réel, tout est maintenant connu dans les expressions de ξ et η qui se calculeront sans peine.

M. A. DEMOULIN adresse la Note suivante :

Sur le cylindroïde et sur la théorie des faisceaux de complexes linéaires.

Dans le dernier fascicule du *Bulletin de la Société mathématique de France*, M. P. Appell a établi que le cylindroïde est la seule surface réglée qui jouisse de la propriété suivante : *le lieu des projections orthogonales d'un point pris arbitrairement dans l'espace sur les génératrices est une courbe plane*. Je possède depuis près de deux ans une démonstration analytique de ce théorème et je la fais connaître ci-après. A cette méthode échappent les surfaces réglées à plan directeur isotrope. Une méthode directe me conduit aux surfaces de cette nature qui possèdent la propriété du cylindroïde. Ce sont : 1° une surface (A) qui est, comme le cylindroïde, le lieu des axes centraux des complexes linéaires compris dans une série linéaire à deux termes; 2° une surface (B) qui n'admet pas ce mode de génération. Ainsi se trouve mis en évidence un fait curieux : alors que la propriété du cylindroïde caractérise cette surface parmi les surfaces réglées réelles ou, plus généralement, parmi les surfaces qui n'ont pas un plan directeur isotrope, cette même propriété ne caractérise pas la surface (A), de même définition que le cylindroïde, parmi les surfaces à plan directeur isotrope.

I.

Soit à déterminer la surface réglée la plus générale telle que le

lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur ses génératrices soit une courbe plane. Nous considérerons la surface cherchée comme engendrée par l'axe Oz d'un trièdre trirectangle $Oxyz$. Sur chaque génératrice, il y a un point central déterminé et situé à distance finie, à moins toutefois que la surface soit un cylindre ou qu'elle admette un plan directeur isotrope. Les cylindres constituent une solution évidente du problème et il n'y a pas à s'en occuper davantage. Quant aux surfaces à plan directeur isotrope, nous les étudierons au § III. Ces deux cas particuliers écartés, nous achèverons de définir le trièdre $Oxyz$ en plaçant l'origine O au point central de la génératrice et en faisant coïncider le plan xOz avec le plan tangent en O à la surface. Soient $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ les translations et les rotations du trièdre : ce sont des fonctions d'une variable t . La vitesse d'un point de coordonnées relatives x, y, z a pour composantes

$$\begin{aligned} V_x &= \xi + qz - ry + x', \\ V_y &= \eta + rx - pz + y', \\ V_z &= \zeta + py - qx + z' \end{aligned} \quad \left(x' = \frac{dx}{dt}, \dots \right).$$

Le plan tangent à la surface au point de coordonnées (o, o, z) fait avec le plan xOz un angle θ tel que

$$\text{tang } \theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{\eta - pz}{\xi + qz}.$$

L'hypothèse $z = o$ doit donner $\theta = o$, donc $\eta = o$. L'hypothèse $z = \infty$ doit donner $\theta = \frac{\pi}{2}$, donc $q = o$. Nous pourrions supposer $p \neq o$, car l'hypothèse $p = o$ correspond au cas des cylindres. Observons enfin que le paramètre de distribution h égale $-\frac{\xi}{p}$.

Soient $P(x, y, z)$ un point fixe pris arbitrairement dans l'espace et $H(o, o, z)$ la projection orthogonale du point P sur Oz .

Nous exprimerons la fixité du point P en égalant à zéro les composantes de sa vitesse, d'où les trois relations

$$(1) \quad \begin{cases} \xi - ry + x' = 0, \\ rx - pz + y' = 0, \\ \zeta + py + z' = 0. \end{cases}$$

La vitesse du point H a pour composantes

$$V_x = \xi, \quad V_y = -pz, \quad V_z = \zeta + z' = -py.$$

Soient A, B, C les projections d'un vecteur unitaire normal au plan de la trajectoire du point H. On a

$$AV_x + BV_y + CV_z = 0$$

ou

$$(2) \quad Ah + Bz + Cy = 0.$$

Par un point fixe de l'espace, menons un segment géométriquement égal au vecteur (A, B, C) et un trièdre parallèle au trièdre $Oxyz$. Par rapport à ce trièdre, les coordonnées de l'extrémité du segment sont A, B, C et, comme ce point est fixe, on a

$$(3) \quad \begin{cases} -rB + A' = 0, \\ rA - pC + B' = 0, \\ pB + C' = 0. \end{cases}$$

Différentions l'équation (2) en tenant compte des relations (1) et (3), il viendra

$$(4) \quad A(h' - rz) + B(k - 2py) + C(2pz - rx) = 0,$$

pourvu qu'on pose

$$k = rh - \zeta = -\frac{r\xi + p\zeta}{p}.$$

Différentions l'équation (4) à son tour, en tenant compte des mêmes relations (1) et (3),

$$(5) \quad \begin{cases} A(\alpha - r'z + 3pry) + B(\beta - 2p'y - 4p^2z' + 3prx) \\ + C(-3p\zeta + 2p'z - r'x - \sqrt{4p^2 + r^2}) = 0. \end{cases}$$

On a posé, pour la simplicité,

$$\begin{aligned} h'' + \zeta r - kr &= \alpha, \\ k' + rh' &= \beta. \end{aligned}$$

L'élimination de A, B, C entre les égalités (2), (4), (5) conduit

à la relation

$$\begin{vmatrix} h & h' - rz & x - r'z + 3pry \\ z & k - 2py & \beta - 2p'y - 4p^2z + 3prx \\ y & 2pz - rx & -3p\zeta + 2p'z - r'x - (4p^2 + r^2)y \end{vmatrix} = 0,$$

qui doit avoir lieu quels que soient x, y, z, t .

Divisons les éléments de chaque colonne par y , puis faisons y infini. Il viendra $p^2r = 0$ et, comme p n'est pas nulle, $r = 0$.

Faisons ensuite $x = y = z = 0$, d'où $p\zeta hk = 0$ ou $\xi\zeta^2 = 0$. Si $\xi = 0$, Oz reste tangente à une courbe plane, solution évidente. Il faut donc supposer $\zeta = 0$.

En résumé, on a jusqu'ici

$$\begin{aligned} q = 0, & \quad r = 0, & \quad \eta = 0, & \quad \zeta = 0, \\ \xi \neq 0, & \quad p \neq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, *la surface cherchée est nécessairement un conoïde droit dont la directrice rectiligne est l'axe Ox du trièdre.*

Introduisons ces valeurs des rotations et des translations dans l'équation ci-dessus; il viendra, après quelques réductions,

$$h'' - \frac{p'}{p} + 4p^2h = 0.$$

En choisissant convenablement la variable indépendante t , on peut supposer p constant. Si l'on prend p égal à $\frac{1}{2}$, l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} h'' + h &= 0, \\ \text{ou, comme } h &= -\frac{\xi}{p}, \\ \xi'' + \xi &= 0. \end{aligned}$$

On déduit de là, en intégrant,

$$\xi = A \cos(t + B).$$

Nous allons établir l'équation du conoïde en prenant comme trièdre de référence la position O_1XYZ qu'occupe le trièdre $Oxyz$ à l'instant $t = -B$.

Soit X l'abscisse du point O . On a

$$X = \int_{-B}^t \xi dt = A \sin(t + B).$$

L'angle des plans zOx et ZO, X égale $\frac{t+B}{2}$.

Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point quelconque de la génératrice Oz et o, o, z ses coordonnées relatives. On a

$$X = A \sin(t + B),$$

$$Y = z \sin \frac{t + B}{2},$$

$$Z = z \cos \frac{t + B}{2}.$$

L'élimination de z et de t entre ces trois équations donne l'équation classique du cylindroïde

$$X = \frac{2AYZ}{Y^2 + Z^2},$$

ce qui démontre le théorème de M. Appell.

II.

A l'analyse qui précède échappent, nous l'avons vu, les surfaces réglées à plan directeur isotrope. Si l'on veut traiter ce cas par la méthode du trièdre, on pourra faire décrire à l'origine O une trajectoire orthogonale des génératrices et prendre pour plan des xz le plan tangent à la surface à l'origine, d'où les deux conditions $\eta = 0, \zeta = 0$. On aura également, le plan asymptote étant isotrope, $p^2 + q^2 = 0$. Malgré la simplicité de ces relations, on est conduit à des conditions très compliquées desquelles il serait difficile de déduire les valeurs des translations et des rotations. Aussi avons-nous étudié par une méthode directe les surfaces en question. Avant d'exposer cette méthode, nous allons faire voir qu'il existe au moins une surface de cette nature jouissant de la propriété du cylindroïde.

Soient $C = 0, C' = 0$ les équations de deux complexes linéaires; l'équation

$$C + \rho C' = 0,$$

où ρ désigne un paramètre variable, définit une série simplement infinie de complexes linéaires dont les axes centraux sont parallèles à un même plan. Si ce plan n'est pas isotrope, le lieu des axes centraux est un cylindroïde. Si ce plan est isotrope, le lieu des axes centraux est une certaine surface (A). Pour cette surface comme pour le cylindroïde, le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices sera une courbe plane. Si l'on démontre, en effet, cette propriété pour le cylindroïde, en prenant des axes quelconques, les calculs s'appliqueront également à la surface (A). C'est, au reste, ce que nous allons vérifier par un calcul direct après avoir établi l'équation réduite de la surface (A).

Parmi les complexes de la famille $C + \rho C' = 0$, il y en a deux qui sont spéciaux; supposons que ce soient C et C'. Les axes étant rectangulaires, nous prendrons l'axe central de C pour axe des z et, pour axe des x , une droite rencontrant l'axe central de C'.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, p, q, r$ les coordonnées pluckériennes d'une droite quelconque de l'espace; un complexe linéaire étant défini par l'équation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + Pp + Qq + Rr = 0,$$

les coordonnées de son axe central ont pour valeurs

$$\begin{aligned} \alpha &= P, & p &= A - kP, \\ \beta &= Q, & q &= B - kQ, \\ \gamma &= R, & r &= C - kR, \\ k &= \frac{AP + BQ + CR}{P^2 + Q^2 + R^2}. \end{aligned}$$

L'axe central du complexe C' est parallèle à l'un des plans isotropes passant par Oz , de là résulte la condition $P^2 + Q^2 = 0$; nous prendrons $P = 1, Q = i$. L'axe central rencontrant l'axe des x , une de ses équations se réduit à $y\gamma - z\beta = 0$, donc $p = 0$, et, par suite, $A = 0$. Le complexe C' a donc une équation de la forme

$$B\beta + C\gamma + p + iq + Rr = 0,$$

avec la condition

$$Bi + CR = 0.$$

L'équation du complexe C est $r = 0$, l'équation de la famille de

complexes sera donc

$$B\beta + C\gamma + p + iq + (R + \rho)r = 0.$$

L'axe central du complexe du paramètre ρ a pour coordonnées

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, & p &= -\frac{C\rho}{(R + \rho)^2}, \\ \beta &= i, & q &= B - \frac{C\rho i}{(R + \rho)^2}, \\ \gamma &= R + \rho, & r &= C - \frac{C\rho}{R + \rho}. \end{aligned}$$

On déduit de là les équations de cette droite

$$\begin{aligned} xi - y &= \frac{RC}{R + \rho}, \\ y(R + \lambda) - zi &= -\frac{C\rho}{(R + \rho)^2} \end{aligned}$$

et, par l'élimination de ρ entre ces deux équations, l'équation de la surface (A)

$$y = -\frac{(y - ix)zi}{RC} - \frac{(y - ix)^3}{R^2C^2} - \frac{(y - ix)^2}{R^2C}.$$

Cette équation est de la forme

$$(A) \quad y = Mz(y - ix) + M^2(y - ix)^3 + N(y - ix)^2,$$

M et N désignant deux constantes *essentiellement différentes de zéro*.

Vérifions que la surface (A) jouit bien de la propriété indiquée.

Les équations d'une génératrice quelconque g de la surface peuvent s'écrire

$$(g) \quad \begin{cases} y - ix = \lambda, \\ y = M\lambda z + M^2\lambda^3 + N\lambda^2. \end{cases}$$

Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées d'un point P pris arbitrairement dans l'espace.

Le plan mené par le point P, perpendiculairement à la génératrice g , a pour équation

$$M\lambda [(x - x_0) + i(y - y_0)] + i(z - z_0) = 0.$$

Le lieu de la projection du point P sur la génératrice g s'obtient en éliminant λ entre cette dernière équation et les équations (g), ce qui donne pour équation du lieu cherché, l'équation (A) et la suivante

$$(1) \quad M(y - ix)[(x - x_0) + i(y - y_0)] + i(z - z_0) = 0.$$

L'élimination de z entre les équations (A) et (1) donne

$$y = Mz_0(y - ix) + (Mu_0 - N)(y - ix)^2,$$

pourvu qu'on pose $y_0 - ix_0 = u_0$, et si l'on porte dans cette dernière équation la valeur de $(y - ix)^2$, tirée de (1), il viendra

$$(\pi) \quad y = Mz_0(y - ix) + \frac{M^2u_0 + N}{M} [Mu_0(y - ix) - z + z_0].$$

Cette équation étant linéaire, le théorème est démontré.

On reconnaîtra aisément que le plan π renferme la génératrice qui correspond à la valeur $-\frac{M^2u_0 + N}{M^2}$ du paramètre λ .

III.

Cherchons maintenant toutes les surfaces réglées à plan directeur isotrope qui ont la même propriété que le cylindroïde.

Soient

$$\begin{aligned} y - ix &= \lambda, \\ y &= zf(\lambda) + \varphi(\lambda) \end{aligned}$$

les équations d'une génératrice variable de la surface. Les coordonnées de la projection d'un point quelconque (x_0, y_0, z_0) sur cette génératrice ont pour expression

$$\begin{aligned} x &= \lambda i - iz_0f - iu_0f^2 - i\psi, \\ y &= z_0f + u_0f^2 + \psi, \\ z &= z_0 + u_0f - \lambda f. \end{aligned}$$

Pour abrégé, on a écrit f et φ au lieu de $f(\lambda)$ et $\varphi(\lambda)$, et l'on a posé $u_0 = y_0 - ix_0$, $\psi = \psi(\lambda) = \varphi - \lambda f^2$.

Ces équations doivent définir une courbe plane quels que soient

x_0, y_0, z_0 ; il faut donc et il suffit qu'il y ait une relation linéaire entre x, y, z ou bien entre y, z et $y - ix$ ou λ . De là cette condition très simple

$$y'' z''' - z'' y''' = 0$$

qui s'écrit, en tenant compte des valeurs de y et de z ,

$$(1) \quad \begin{vmatrix} -u_0 f'' + \lambda f''' + 2f' & z_0 f'' + u_0 (f^2)'' + \psi'' \\ -u_0 f''' + \lambda f'' + 3f'' & z_0 f''' + u_0 (f^2)''' + \psi''' \end{vmatrix} = 0.$$

Si f' est nulle, cette équation est identiquement vérifiée et φ est arbitraire. La surface correspondante est un cylindre dont les génératrices sont parallèles au plan $y - ix = 0$, solution évidente. Nous pourrions donc supposer $f' \neq 0$.

Divisons les éléments de la seconde colonne du déterminant par z_0 , puis faisons z_0 infini; il viendra

$$(2) \quad 2f' f''' = 3f''^2.$$

Divisons ensuite les éléments de chaque colonne par u_0 , puis faisons u_0 infini, nous obtiendrons, toutes réductions faites,

$$3f''^2 = f' f''''.$$

Pour que cette équation soit compatible avec l'équation (2), il faut que $f'' = 0$, c'est-à-dire que f' soit constante. On a donc

$$f(\lambda) = a\lambda + a'.$$

L'équation (1) se réduit alors à $\psi''' = 0$, d'où

$$\psi(\lambda) = b\lambda^2 + b'\lambda + b''$$

et

$$\varphi(\lambda) = \lambda(a\lambda + a')^2 + b\lambda^2 + b'\lambda + b''.$$

Les équations de la génératrice peuvent donc s'écrire

$$y - ix = \lambda, \\ y = z(a\lambda + a') + a^2\lambda^2 + m\lambda^2 + m'\lambda + m''.$$

On conclut de là l'équation de la surface cherchée

$$y = z[a(y - ix) + a'] + a^2(y - ix)^2 \\ + m(y - ix)^2 + m'(y - ix) + m''.$$

Le changement d'axes coordonnés défini par les équations

$$-ix = -iX + h, \quad y = Y + h', \quad z = Z + h''$$

permet, par un choix convenable et toujours possible des constantes h, h', h'' , de ramener cette équation à la suivante

$$(S) \quad Y = aZ(Y - iX) + a^2(Y - iX)^3 + (m - 3aa')(Y - iX)^2.$$

Il y a maintenant deux cas à distinguer : 1° si $m - 3aa'$ n'est pas nul, l'équation ci-dessus est de même forme que l'équation (A), et la surface (S) est une surface (A); 2° si $m - 3aa' = 0$, l'équation (S) se réduit à

$$(B) \quad Y = aZ(Y - iX) + a^2(Y - iX)^3.$$

La surface (B) est-elle une surface (A)? En d'autres termes, est-il possible de déterminer les coefficients M et N de manière que les équations (A) et (B) représentent deux surfaces égales? La réponse est négative : en effet, si les deux surfaces étaient égales, elles seraient applicables l'une sur l'autre avec correspondance des asymptotiques; or, nous allons montrer que cette condition nécessaire (et d'ailleurs suffisante) n'est pas vérifiée.

Occupons-nous d'abord de la surface (A) ou plus généralement de la surface (A') définie par l'équation

$$(A') \quad y = M k z(y - ix) + M^2(y - ix)^3 + N(y - ix)^2$$

qui se réduit à l'équation (A) pour $k = 1$.

Si l'on pose $y - ix = \lambda$, l'équation des lignes asymptotiques sera $z = -\frac{3M\lambda^2}{2k} + \mu$, μ désignant une constante arbitraire. On déduit des trois équations ci-dessus les expressions des coordonnées de la surface (A') en fonction des paramètres des asymptotiques et l'on trouve, pour le carré de l'élément linéaire, l'expression

$$ds^2 = \left[2kM\mu + \frac{3M^2\lambda^2}{k^2}(2k^2 + 3) + 2N\lambda - 1 \right] d\lambda^2 + \frac{2M\lambda}{k}(k^2 - 3)d\lambda d\mu + d\mu^2.$$

Pour $k = \pm\sqrt{3}$, le terme en $d\lambda d\mu$ s'évanouit et la surface (A') est minima. Nous retrouvons ainsi la surface minima réglée imaginaire, signalée en premier lieu par Ribaucour, et que nous avons

étudiée ailleurs d'une manière détaillée (1). La relation entre la surface (A) et cette surface minima est extrêmement simple : deux points correspondants ont mêmes coordonnées x et y , et leurs z sont dans le rapport de $\sqrt{3}$ à 1.

Si l'on fait dans la formule ci-dessus $k = 1$, on aura le ds^2 de la surface (A)

$$ds^2 = (2M\mu + 15M^2\lambda^2 + 2N\lambda - 1) d\lambda^2 - 4M\lambda d\lambda d\mu + d\mu^2.$$

Quant au carré de l'élément linéaire de la surface (B), il est donné par la formule

$$ds'^2 = (2a\mu' + 15a^2\lambda'^2 - 1) d\lambda'^2 - 4a\lambda' d\lambda' d\mu' + d\mu'^2.$$

Pour que ces deux surfaces fussent applicables l'une sur l'autre avec correspondance des asymptotiques, il faudrait que l'on eût

$$ds^2 = ds'^2$$

pour toutes les valeurs de λ , μ , $d\lambda$, $d\mu$, les paramètres λ' et μ' étant respectivement fonctions de λ et de μ seulement. Or, on reconnaîtra aisément que cette identité est impossible. La surface (B) n'est donc, en aucun cas, une surface (A) et nous pouvons énoncer ce théorème :

Il y a deux surfaces réglées à plan directeur isotrope qui jouissent de la propriété du cylindroïde : la surface (A) et la surface (B).

Cette dernière n'est pas, comme la surface (A) et le cylindroïde, le lieu des axes centraux des complexes linéaires définis par une équation de la forme $C + \rho C' = 0$. Autrement dit, la propriété qui caractérise le cylindroïde parmi les surfaces réglées qui n'ont pas de plan directeur isotrope, ne caractérise pas la surface (A) parmi celles qui ont un plan directeur isotrope.

La surface (B) est, comme la surface (A), une transformée ho-

(1) A. DEMOULIN, *Sur les surfaces minima réglées et les surfaces minima à lignes de courbure planes* (Mémoires, in-8°, de l'Académie royale de Belgique, t. LVIII: 1899).

mographique d'une surface minima réglée de Ribaucour. Or deux surfaces minima de Ribaucour sont nécessairement semblables. Concluons de là que les surfaces (A) et (B) se correspondent dans une homographie.

Observons enfin que, pour $M = \alpha$, les surfaces (A) et (B) sont applicables l'une sur l'autre : c'est ce qu'on reconnaîtra en exprimant leurs ds^2 en fonction des paramètres des génératrices et de leurs trajectoires orthogonales.

M. HADAMARD adresse la Note suivante :

Sur la propagation des ondes.

On sait que Hugoniot a, le premier, défini avec précision ce que l'on doit entendre par *propagation d'un mouvement dans un autre*. Il a appliqué sa méthode aux équations de l'Hydrodynamique et a retrouvé, sous ce nouveau point de vue, la formule classique donnant la vitesse des ondes dans les gaz; d'autre part, il a indiqué les conditions de compatibilité de deux mouvements gazeux, mais dans le cas du mouvement rectiligne seulement.

Non seulement il y a lieu d'étendre la définition et l'étude de la compatibilité au mouvement à trois dimensions, mais, d'une manière plus générale, la méthode d'Hugoniot demandait à être complétée sur deux points importants, dont le premier est l'interprétation géométrique et le second, la distinction, nécessaire ici comme en toute autre question de Mécanique, entre les faits d'ordre proprement dynamique, ayant leur source dans les propriétés propres aux fluides, et les faits d'origine purement cinématique.

Dans le Cours que j'ai professé au Collège de France en 1898-1899 et 1899-1900, j'ai été amené à étudier cette question. J'indiquerai ici sommairement les conclusions auxquelles je suis parvenu.

1. Soit un milieu déformable, divisé en deux régions 1 et 2 par une surface qui occupe, à l'instant t_0 , la position S. Nous supposons : 1° que, dans chacune des régions 1 et 2, les coordonnées x, y, z sont des fonctions continues, tant des coordonnées

initiales a, b, c que du temps t , et qu'il en est de même de leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé n ; 2° que, au contraire, lorsqu'on traverse S , l'une au moins des dérivées d'ordre n éprouve une variation brusque, toutes les dérivées d'ordre inférieur à n restant d'ailleurs continues.

Nous considérons comme ordre d'une dérivée quelconque l'ordre *total* de dérivation par rapport à a, b, c et t indistinctement. Nous nommerons, par exemple, dérivées du second ordre les dérivées des trois catégories suivantes :

1° Dérivées du second ordre par rapport à a, b, c ;

2° Dérivées du premier ordre par rapport à a, b ou c et du premier ordre par rapport à t ;

3° Dérivées du second ordre par rapport à t

(la première catégorie comprenant 18 dérivées, la seconde 9, la troisième 3 seulement, qui ne sont autres que les composantes de l'accélération). D'une manière générale, les dérivées d'ordre n se distribueront en $n + 1$ catégories analogues aux précédentes.

Cela posé, il est aisé de voir que, en toute hypothèse, les variations brusques qu'éprouvent les dérivées d'ordre n lorsqu'on traverse la surface S ont entre elles des relations qui permettent de les exprimer toutes par le moyen de $n + 1$ vecteurs seulement. Si, pour simplifier l'écriture, nous bornons au cas de $n = 2$, un premier vecteur (λ, μ, ν) fera connaître les variations brusques des dérivées appartenant à la première des trois catégories distinguées plus haut, et cela par le moyen des formules que l'on déduira des identités (par rapport à A, B, C)

$$\left[A \left(\frac{\partial}{\partial a} \right) + B \left(\frac{\partial}{\partial b} \right) + C \left(\frac{\partial}{\partial c} \right) \right]^2 x = \lambda (A\alpha + B\beta + C\gamma)^2,$$

$$\left[A \left(\frac{\partial}{\partial a} \right) + B \left(\frac{\partial}{\partial b} \right) + C \left(\frac{\partial}{\partial c} \right) \right]^2 y = \mu (A\alpha + B\beta + C\gamma)^2,$$

$$\left[A \left(\frac{\partial}{\partial a} \right) + B \left(\frac{\partial}{\partial b} \right) + C \left(\frac{\partial}{\partial c} \right) \right]^2 z = \nu (A\alpha + B\beta + C\gamma)^2,$$

où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à S au point considéré; (M) désignant, pour abrégier, la variation brusque éprouvée par la quantité quelconque M , à la traversée de S .

Le second vecteur λ_1, μ_1, ν_1 fera connaître les dérivées de la

seconde catégorie, par les formules déduites des identités

$$\begin{aligned} \left[A \left(\frac{\partial^2}{\partial a \partial t} \right) + B \left(\frac{\partial^2}{\partial b \partial t} \right) + C \left(\frac{\partial^2}{\partial c \partial t} \right) \right] x &= \lambda_1 (A \alpha + B \beta + C \gamma), \\ \left[A \left(\frac{\partial^2}{\partial a \partial t} \right) + B \left(\frac{\partial^2}{\partial b \partial t} \right) + C \left(\frac{\partial^2}{\partial c \partial t} \right) \right] y &= \mu_1 (A \alpha + B \beta + C \gamma), \\ \left[A \left(\frac{\partial^2}{\partial a \partial t} \right) + B \left(\frac{\partial^2}{\partial b \partial t} \right) + C \left(\frac{\partial^2}{\partial c \partial t} \right) \right] z &= \nu_1 (A \alpha + B \beta + C \gamma). \end{aligned}$$

Enfin le troisième vecteur $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ n'est autre que la variation brusque de l'accélération.

2. Il semble, au premier abord, que ces relations sont les seules qu'il y ait lieu d'écrire : elles sont, en effet, suffisantes pour que, à l'instant t_0 , il existe une discontinuité de la nature indiquée en chaque point S. Mais si d'autres relations ne sont pas vérifiées, la nature du phénomène sera assez profondément modifiée avant et après l'instant t_0 . Si, en effet, les trois vecteurs précédents ont des composantes arbitraires, il est cinématiquement impossible de concevoir aucun mouvement dans lequel, aux instants $t_0 \pm \varepsilon$ existe, comme à l'instant t_0 , une discontinuité du second ordre suivant une surface *unique* (voisine de S). Il faut tout au moins supposer (c'est l'hypothèse la plus simple) que la surface S engendre deux feuillettes (au moins) de discontinuité, réunis seulement à l'instant t_0 et séparés, avant et après, par toute une région intermédiaire 3 dans laquelle règne un troisième mouvement, en discontinuité du second ordre avec chacun des deux premiers.

Pour que les mouvements 1 et 2 soient *cinématiquement compatibles*, c'est-à-dire pour que la surface de discontinuité puisse rester unique, il faut donc des conditions nouvelles. Ces conditions s'énoncent ainsi :

Les trois vecteurs (λ, μ, ν) , $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ sont de même direction et en progression géométrique.

La raison de cette progression donne d'ailleurs la vitesse de propagation.

Pendant la durée d'un mouvement déterminé quelconque, on

doit considérer la compatibilité comme le cas général; on peut alors parler de la *direction* d'une discontinuité : cette direction est (si la discontinuité est du second ordre) la direction commune des trois vecteurs (λ, μ, ν) , $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$.

3. Signalons quelques conséquences des principes précédents.

Puisqu'on a défini la direction d'une discontinuité, on peut considérer, en particulier, des discontinuités purement *longitudinales*, dans lesquelles la direction de la discontinuité est, en chaque point, perpendiculaire à celle du plan tangent à la surface S; et des discontinuités purement *transversales*, dans lesquelles ces deux directions sont parallèles entre elles.

Or on sait que, dans la théorie des vibrations, on est obligé de renoncer à la définition primitive des mouvements longitudinaux et transversaux lorsqu'on sort du cas des ondes planes ou sphériques, pour en adopter une autre fondée sur la densité ou la rotation moléculaire. Cette nécessité disparaît lorsqu'on se place au point de vue d'Hugoniot, complété comme nous venons de l'indiquer. Les deux définitions n'en font d'ailleurs plus qu'une : en effet, on constate que les variations brusques des dérivées de la densité dépendent de la composante normale de la discontinuité, tandis que les variations du tourbillon et de ses dérivées dépendent de la composante tangentielle.

4. A cette remarque s'en rattache une autre d'un certain intérêt théorique.

Les discontinuités dont nous venons de parler s'introduisent nécessairement dans la mise en équation des problèmes d'Hydrodynamique des gaz : il est impossible, en effet, sans leur concours, de faire cadrer les équations du mouvement interne avec les équations aux parois.

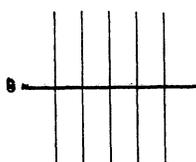
On peut se demander si la présence de ces discontinuités ne compromettrait pas la validité des propositions bien connues relatives au potentiel des vitesses ou aux tourbillons. Il n'en est rien : s'il y a compatibilité, les discontinuités hydrodynamiques sont toujours normales et il en résulte, ainsi que nous venons de le dire, qu'elles n'influent pas sur la rotation moléculaire (1).

(1) La nécessité du raisonnement que nous venons d'indiquer apparaît claire-
xxix. 4.

5. Supposons maintenant qu'au sein d'un fluide on considère deux mouvements contigus avec discontinuité et non compatibles entre eux. Les équations précédemment écrites permettent d'étudier le mouvement ou les mouvements intermédiaires qui prendront naissance.

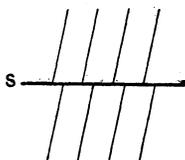
Prenons d'abord le cas d'un liquide. Alors, en vertu du n° 3, les trois vecteurs caractéristiques de la discontinuité (dont deux seulement seront donnés, puisque l'accélération se calcule par les

Fig. 1.



équations générales de l'Hydrodynamique) seront tangentiels. Le premier (le vecteur λ, μ, ν) influera directement sur l'accélération : il produira, s'il n'est pas nul, un glissement (au sens vulgaire du mot) des deux couches liquides l'une sur l'autre, de sorte que des lignes tracées à la fois dans les deux couches et à l'instant t_0 , comme l'indique la *fig. 1*, auront à l'instant $t_0 + \epsilon$ l'aspect représenté *fig. 2*.

Fig. 2.

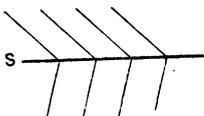


Le second vecteur (λ_1, μ_1, ν_1) n'influera pas sur l'accélération des points situés sur la surface de discontinuité : il produira un glissement (au sens que ce mot a en théorie de l'élasticité) de

ment lorsqu'on se rapporte à un cas un peu différent, lequel parait d'ailleurs très intéressant et sur lequel j'espère avoir l'occasion de revenir : je veux parler des *liquides à frottement*. On sait que, pour de tels liquides, le théorème sur le potentiel des vitesses cesse de s'appliquer. *Cette circonstance est uniquement due aux singularités du mouvement* : tant que, dans une région déterminée, celui-ci reste analytique, le théorème dont nous parlons conserve sa validité.

chaque couche sur elle-même, ces glissements étant différents entre eux : autrement dit, les lignes qui avaient à l'instant t_0 l'aspect de la *fig. 1* prendront, à l'instant $t_0 + \epsilon$, celui qui est représenté *fig. 3*. C'est ce qui se produit, par exemple, dans les

Fig 3.



mouvements bien connus où le tourbillon est discontinu.

Bien entendu, il y aura, dans cas le plus général, superposition des deux effets.

6. Si maintenant nous passons au cas d'un gaz, nous pourrons commencer par considérer l'hypothèse où les deux vecteurs caractéristiques sont normaux. Si leur rapport a la valeur bien connue $\pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, il y aura compatibilité, et l'onde se propagera suivant la loi classique. On observera qu'il n'y a aucune ambiguïté sur le sens de cette propagation [puisque le signe du radical résulte de la connaissance des deux vecteurs (λ, μ, ν) et $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$] : ce qui ne ressortait pas des développements d'Hugoniot (¹).

Si le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ n'a pas la valeur $\pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, la discontinuité se divisera en deux, qui se propageront, en sens inverse l'une de l'autre, avec la même vitesse $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$. La valeur de l'accélération dans la tranche intermédiaire qui prendra naissance sera, bien entendu, différente des valeurs que prendra cette grandeur dans les deux mouvements donnés : on saura d'ailleurs calculer cette valeur nouvelle.

Supposons enfin que la discontinuité donnée ait des composantes tangentielles. Il y aura alors superposition du phénomène que nous venons d'indiquer avec celui dont nous avons parlé dans

(¹) Voir DUHEM, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. I, p. 194.

le cas des liquides; de sorte que l'on trouvera, dans le cas le plus général, quatre mouvements séparés par trois surfaces de discontinuité dont deux seront mobiles et une fixe.

7. La méthode d'Hugoniot s'applique aux ondes qui peuvent se produire dans les solides élastiques, et cela non seulement dans le cas des déformations infiniment petites, mais aussi dans celui des déformations finies tel que l'ont traité MM. Boussinesq et Brillouin. Il est intéressant de comparer les conclusions auxquelles on parvient dans les deux cas.

Dans l'hypothèse des déformations finies comme dans celle des déformations infiniment petites, à une direction d'onde déterminée correspondent trois directions de discontinuité différentes que cette onde est susceptible de propager, et ces trois directions sont rectangulaires entre elles *dans le milieu déformé* : ce sont les directions d'axes d'une certaine quadrique E, dont l'équation dépend de la direction d'onde.

Si l'équilibre interne du solide (sous l'influence des forces données et des forces d'inertie) est stable, la quadrique E sera toujours un ellipsoïde réel, ce qui est nécessaire pour que les vitesses de propagation soient réelles. Le calcul qui établit cette proposition fournit une interprétation simple de l'ellipsoïde E (autrement dit, de l'ellipsoïde de polarisation dans le cas des mouvements infiniment petits). Le premier membre de son équation n'est autre que le travail interne correspondant à une certaine déformation immédiatement liée à une direction de discontinuité arbitrairement donnée.

8. Jusqu'ici, les résultats sont les mêmes, qu'il s'agisse de déformations infiniment petites ou finies. Au contraire, la proposition d'après laquelle, dans un milieu isotrope, les discontinuités correspondant à une direction d'onde donnée sont, les unes exclusivement longitudinales, les autres exclusivement transversales, est particulière aux déformations infiniment petites.

Si, en effet, on cherche les conditions pour qu'un axe de l'ellipsoïde E soit toujours normal à l'onde, on constate que la fonction W qui représente l'énergie de déformation rapportée à l'unité

de masse, doit avoir la forme

$$W = F(D) + \sum_{i=1}^3 a_i (\gamma_i^2 - 4 \varepsilon_k \varepsilon_l) + \sum_i b_i (\gamma_k \gamma_l - 2 \varepsilon_i \gamma_i)$$

(à une partie linéaire près), où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ désignent, comme dans le travail de MM. E. et Fr. Cosserat (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X) les composantes de la déformation, i, k, l étant une permutation des indices 1, 2, 3; D, la densité. F est une fonction arbitraire, mais les a et les b sont des constantes.

Or l'isotropie du solide se caractérise par ce fait que W est une fonction de D et des quantités

$$A = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad B = \sum_i (\gamma_i^2 - 4 \varepsilon_k \varepsilon_l).$$

On voit que cette condition n'entraîne pas la précédente, laquelle exige que W soit linéaire par rapport à A, A² et B. La séparation des mouvements longitudinaux et transversaux est donc exceptionnelle lorsqu'on sort du cas des déformations infiniment petites.

9. Les résultats d'Hugoniot ne sont que l'interprétation mécanique de ceux auxquels conduit la théorie des caractéristiques pour les équations aux dérivées partielles à plus de deux variables indépendantes (1). Toutefois, pour adapter cette théorie à la Mécanique, il est nécessaire de l'étendre aux systèmes d'équations. Le cas d'un système de trois équations à trois fonctions inconnues, par exemple, est, comme on sait, essentiellement distinct en général de celui d'une seule équation à une seule inconnue. L'étude des caractéristiques, lesquelles sont définies en égalant à zéro un certain déterminant Δ , s'y fait toutefois d'une façon analogue en général à ce qui se passe pour le cas d'une seule équation; mais cette analogie n'est pas absolue, en ce sens que (si l'on suppose, pour fixer les idées, les équations du second ordre) elle ne commence qu'au calcul des dérivées du troisième ordre.

(1) Ce fait, dont j'ai développé les conséquences au Collège de France dans les premiers mois de l'année 1900, a été constaté, d'autre part, indépendamment par M. Coulon (*Comptes rendus*, 17 avril 1900).

Le calcul des dérivées du second ordre impose bien certaines conditions restrictives aux dérivées premières, mais ces conditions laissent complètement arbitraires les dérivées de deux des fonctions inconnues et ne jouissent nullement (du moins si l'on n'effectue pas un changement d'inconnues convenables) des mêmes propriétés que les conditions analogues relatives au cas d'une seule équation ou aux dérivées d'ordre supérieur. Aussi la théorie des ondes de choc ne présente-t-elle pas une analogie complète avec celle des ondes d'accélération et n'est-elle pas, comme cette dernière, complètement dépendante de la théorie des caractéristiques.

Les conclusions dont nous venons de parler sont celles que l'on obtient dans le cas général où les caractéristiques annulent le déterminant Δ sans annuler tous les mineurs. Il est des problèmes importants, tels que celui des vibrations transversales des corps isotropes, dans lesquels les caractéristiques, *tout en conservant le même degré de généralité que dans le cas général*, annulent à la fois Δ et tous ses mineurs. Les conclusions, dans ce cas, ne sont d'ailleurs pas notablement modifiées. Mais il n'en est pas de même dans l'hypothèse intermédiaire où certaines caractéristiques, à l'exclusion des autres, annulent tous les mineurs de Δ . Cette hypothèse est réalisée dans le phénomène de la réfraction conique, lequel mériterait d'être étudié à ce point de vue.

10. A ces restrictions près, la théorie pour les systèmes de n équations à n inconnues se développe d'une manière analogue à celle qui est relative au cas de $n = 1$. On a, en particulier, à considérer des lignes correspondant à celles que Beudon a découvertes ⁽¹⁾ et qu'on peut appeler les *bicaractéristiques*, ou encore les *rayons*. Cette dernière dénomination aurait l'avantage de rappeler l'une des propriétés les plus importantes de ces lignes, au point de vue du physicien. Si, en effet, les caractéristiques correspondent aux *ondes* sonores ou lumineuses, les bicaractéristiques correspondent aux *rayons* sonores ou lumineux. On peut, dans une certaine mesure, prévoir l'importance

(¹) Ce *Bulletin*, tome XXV, pages 108 et suiv. ; 1897.

du rôle physique dévolu aux lignes en question par la proposition suivante :

Un ébranlement étant, à l'instant t_0 , limité à une certaine région de l'espace, soit P un point extérieur à cette région, et qui est atteint par l'onde à l'instant $t_0 + T$. Le mouvement produit, à cet instant, au point P, ne dépend que du mouvement qu'avait, à l'instant t_0 , le point de la surface d'onde primitive situé sur la même bicaractéristique que P.

11. Beudon (1) a également démontré la proposition suivante, généralisation d'un théorème de M. Goursat :

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre analytique aux variables indépendantes x_1, n_1, \dots, x_n , telle que $x_{n=0}$ et $x_{n-1} = 0$ soient des caractéristiques (ou même simplement soient tangentes à des caractéristiques en un de leurs points communs), il existe une solution holomorphe qui prend des valeurs données (lesquelles sont supposées fonctions holomorphes des variables dont elles dépendent) sur chacune de ces multiplicités $x_n = 0, x_{n-1} = 0$.

Cette proposition a également son importance au point de vue de l'étude des ondes.

Nous avons vu, en effet, que, lorsque deux mouvements contigus avec discontinuité (celle-ci étant supposée normale pour fixer les idées) ne sont pas compatibles, il naît entre eux un mouvement intermédiaire dont on peut aisément indiquer l'accélération initiale. Or, si l'on veut les équations complètes de ce mouvement intermédiaire, et qu'il y ait potentiel des vitesses (de manière qu'on n'ait qu'une seule équation à considérer), on est ramené précisément au problème qui fait l'objet de la proposition rappelée tout à l'heure.

La proposition analogue dans le cas des systèmes s'énonce ainsi :

Si un système de trois équations du second ordre définissant les inconnues u, v, w en fonction des variables indépendantes

(1) *Loc. cit.*, pages 116-119.

x_1, x_2, \dots, x_n ne contient pas $\frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2}$ et est résoluble par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_n \partial x_{n-1}}$, il existe (sous les conditions de régularité habituelles) une solution telle que $u, v, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial v}{\partial x_n}, w$ prennent des valeurs données pour $x_n = 0$ et que, en outre, w prenne des valeurs également données pour $x_{n-1} = 0$.

Autrement dit :

Un système de trois équations du second ordre à trois fonctions inconnues étant donné, ainsi que deux multiplicités, l'une caractéristique, l'autre quelconque ⁽¹⁾, sécantes entre elles, on peut opérer un changement de fonctions inconnues tel que la solution soit déterminée par les valeurs de deux des nouvelles inconnues et de leurs dérivées premières sur la multiplicité caractéristique, jointes aux valeurs de la troisième inconnue sur la seconde multiplicité (toutes ces données étant supposées analytiques et régulières).

Cette proposition démontre, en particulier, l'existence de la solution pour le problème suivant :

Trouver le mouvement produit, dans une masse gazeuse animée initialement d'un mouvement analytique donné, par un mouvement analytique donné des parois.

Par contre, il ne faudrait pas croire que la question se présente aussi simplement pour le mouvement intermédiaire entre deux mouvements non compatibles donnés, dans le cas où il n'existe pas de potentiel des vitesses. Dans ce cas, pour qu'il n'y ait qu'un mouvement intermédiaire (en Hydrodynamique, pour qu'il ne se produise pas de glissements analogues à ceux dont nous avons parlé au n° 5), il faut une série de conditions nouvelles introduites par les éléments infinitésimaux d'ordre supérieur.

(¹) La restriction d'après laquelle la seconde multiplicité devrait être caractéristique est inutile, ainsi qu'il est connu dans le cas de $n = 2$.