

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

B. MALGRANGE

Déformations de systèmes différentiels et microdifférentiels

Cours de l'institut Fourier, tome 16 (1981)

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1981__16__1_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Déformations de systèmes différentiels et microdifférentiels

par

B. MALGRANGE

1. - DEFORMATIONS INTEGRABLES D'UNE CONNEXION AVEC SINGULARITES .

Soient X (resp. T) le germe de variété analytique complexe $(\mathbb{C}, 0)$ (resp. $(\mathbb{C}^n, 0)$), et $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}\{x\}$ (resp. $\mathcal{O}_T = \mathbb{C}\{t\}$, $t = (t_1, \dots, t_n)$) les anneaux locaux correspondants. Une "connexion sur $X \times T$, avec pôle sur $x = 0$ " sera définie par la donnée

- 1) d'un module libre de rang m , E , sur $\mathcal{O}_{X \times T} (= \mathbb{C}\{x, t\})$
- 2) d'applications \mathbb{C} -linéaires $D_x, D_1, \dots, D_n : E \rightarrow E[x^{-1}]$ vérifiant, pour $f \in \mathcal{O}_{X \times T}$, $e \in E$:

$$D_x(fe) = \frac{\partial f}{\partial x} e + f(D_x e) \quad , \quad D_i(fe) = \frac{\partial f}{\partial t_i} e + f(D_i e) .$$

On fera en outre les deux hypothèses suivantes

(I) "Intégrabilité" : la connexion est sans courbure, i.e. D_x et les D_i commutent deux à deux.

(K1) "Irrégularité de Katz ≤ 1 " : on a $x^2 D_x E \subset E$, et $x D_i E \subset E$.

[Plus généralement, pour r entier ≥ 0 , on définirait (Kr) par $x^{r+1} D_x E \subset E$, $x^r D_i E \subset E$; le cas $r = 0$ donne une singularité régulière, et le cas $r = 1$ est donc le cas le plus simple où des phénomènes d'irrégularité peuvent se produire.]

Si l'on a $E = \mathcal{O}_{X \times T}^m$, cas auquel on peut se ramener par le choix d'une base, cela s'écrit ainsi :

$$(1.1) \quad D_x F = \frac{\partial F}{\partial x} + M F \quad , \quad D_i F = \frac{\partial F}{\partial t_i} + N_i F \quad , \quad \text{avec} \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{X \times T}^m$$

M et N_i des matrices de type (m, m) à coefficients dans $\mathcal{O}_{X \times T}[x^{-1}]$. Les conditions d'intégrabilité s'écrivent alors

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial t_i} + [M, N_i] = 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial t_i} - \frac{\partial N_j}{\partial t_i} + [N_i, N_j] = 0 \end{cases}$$

et la condition (K1) signifie que M (resp. N_i) a un pôle d'ordre ≤ 2 (resp. ≤ 1).

De façon plus intrinsèque, on peut introduire la différentielle de la connexion, définie par $\nabla e = (D_x e)dx + \sum (D_i e)dt_i$, et la forme de la connexion dans la base donnée, $\Omega = Mdx + \sum N_i dt_i$; la condition d'intégrabilité s'écrit alors, avec les notations usuelles $d\Omega + \frac{1}{2}[\Omega, \Omega] = 0$.

Si l'on a une application $S = (\mathbb{C}^p, 0) \xrightarrow{\varphi} T$, l'image réciproque $(\varphi^*E, \varphi^*\nabla)$ de la connexion précédente se définit immédiatement, par exemple en prenant l'image réciproque de Ω , et l'on vérifie que les conditions (I) et (K1) sont satisfaites. En particulier, si $n = 0$, la connexion obtenue est la restriction de (E, ∇) à $t = 0$; on la notera $(E(0), \nabla(0))$ et on l'appellera "valeur initiale de (E, ∇) ". En coordonnées, c'est la connexion de forme $M(x, 0)dx$. Ceci conduit aux définitions suivantes :

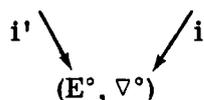
DEFINITION (1.2). - Soit (E°, ∇°) une connexion sur X

i) Une déformation de (E°, ∇°) est une connexion (E, ∇) sur un $X \times T$, munie d'un isomorphisme $i : (E^\circ, \nabla^\circ) \xrightarrow{\sim} (E(0), \nabla(0))$;

ii) Une déformation (E', ∇', i') de (E°, ∇°) sur $X \times S$ provient de (E, ∇) par image réciproque s'il existe $\varphi : S \rightarrow T$ et un isomorphisme

$(E', \nabla') \xrightarrow{j} (\varphi^*E, \varphi^*\nabla)$ tels que le diagramme

$(E'(0), \nabla'(0)) \xrightarrow{j(0)} (E(0), \nabla(0))$



soit commutatif.

iii) Une déformation (E, ∇_i) de (E°, ∇°) est dite "verselle" si toute autre déformation de (E°, ∇°) provient de (E, ∇, i) par image réciproque.

(Dans tous ces énoncés, les conditions (I) et (K1) sont sous entendues).

Le premier but de ces exposés est de donner une condition suffisante d'existence d'une déformation verselle ; le second but est de ramener à ce problème un problème analogue sur les systèmes microdifférentiels, considéré par F. Pham [7].

2. - ALGEBRISATION RELATIVE DES DEFORMATIONS.

Nous allons reprendre ici une version avec paramètres d'un argument de Birkhoff [2] conduisant sous certaines restrictions, à une forme canonique des connexions au voisinage d'une singularité ; soit D le disque $\{|z| < r\}$ et U la boule $\{\|t\| < \rho\}$, r et ρ étant choisis assez petits pour que M et N_1 soient méromorphes dans $D \times U$, avec pôles sur $\{0\} \times U$; D^* désignant le disque pointé, et \tilde{D}^* un revêtement universel de D^* , soit Y une "solution fondamentale" de (E, ∇) sur $\tilde{D}^* \times U$, c'est-à-dire une base des sections horizontales de $E|_{\tilde{D}^* \times U}$, et soit h l'action sur Y d'un lacet autour de $\{0\} \times U$ dans le sens positif ; on a $hY = Y\Gamma$, où $\Gamma \in Gl(m, \mathbb{C})$ est la "matrice de monodromie" (à noter que toutes les autres solutions fondamentales s'obtiennent en remplaçant Y par YS , $S \in Gl(m, \mathbb{C})$, ce qui change Γ en $S^{-1}\Gamma S$). Choisissons alors $C \in End(\mathbb{C}^m)$ tel qu'on ait $\exp(2\pi i C) = \Gamma$, choisissons encore une détermination de $\log x$ sur \tilde{D}^* , et posons $Z = Y \exp(-C \log x)$; l'action de h sur Z est triviale, donc Z se redescend en une section de $Gl(E)$ sur $D^* \times U$, qu'on notera encore Z ; on l'identifiera à une fonction à valeurs dans $Gl(m, \mathbb{C})$ par le choix d'une base de E .

LEMME (2.1). - Supposons que le fibré défini sur IP_1 par $Z(x, 0)$ soit trivial, i.e. supposons qu'il existe S_0 (resp. S_∞) holomorphe inversible sur D (resp. $IP_1 - \{0\}$), à valeurs dans $Gl(m, \mathbb{C})$, tels qu'on ait sur D^* : $Z(x, 0) = S_0 S_\infty$; alors, quitte à rétrécir U , il existe une base de E dans laquelle la forme de la connexion $\Omega = (Mdx + \sum N_i dt_i)$ ait l'expression suivante : $M = A/x^2 - C/x$, $N_i = B_i/x$, A et B_i étant holomorphes en t à valeurs dans $End(\mathbb{C}^m)$.

Considérons le fibré défini sur $\mathbb{P}_1 \times U$ par la matrice $Z(x, t)$; si sa restriction à $\mathbb{P}_1 \times \{0\}$ est triviale, il est trivial sur $\mathbb{P}_1 \times V$, V un voisinage ouvert de 0 dans U ; on aura alors sur $D^* \times V : Z = \Sigma_0 \Sigma_\infty^{-1}$, Σ_0 holomorphe inversible sur $D \times V$, [resp. sur $(\mathbb{P}_1 - 0) \times V$] à valeurs dans $Gl(m, \mathbb{C})$; de plus, on peut supposer qu'on a $\Sigma_\infty^{-1} = I$; si $\bar{e} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m)$ était la base choisie de E , je dis que la nouvelle base $e = (e_1, \dots, e_m)$ définie par $e = \bar{e} \Sigma_0^{-1}$ (ou $\bar{F} = \Sigma_0 F$, \bar{F} désignant les coordonnées dans l'ancienne base et F dans la nouvelle) vérifie les conditions demandées.

Si $\bar{\Omega} = (\bar{M}dx + \sum \bar{N}_i dt_i)$ désigne la forme de ∇ dans l'ancienne base, et $\Omega = (Mdx + \sum N_i dt_i)$ sa forme dans la nouvelle base, on a $\Omega = \Sigma_0^{-1} \bar{\Omega} \Sigma_0 + \Sigma_0^{-1} d\Sigma_0$; donc, sur $x = 0$, M (resp. N_i) aura au plus un pôle d'ordre 2 (resp. 1). D'autre part, dans la nouvelle base, $\Sigma_0^{-1} Y = \sum \exp(C \log x)$ est une solution fondamentale ; or on a évidemment $\bar{\Omega} = -(dY)Y^{-1}$ et de même $\Omega = -d(\Sigma_0^{-1} Y)(\Sigma_0^{-1} Y)^{-1}$, d'où $\Omega = -(d\Sigma_0) \Sigma_0^{-1} - \sum C \frac{dx}{x} \Sigma_0^{-1}$; en regardant les coefficients de Ω , on trouve d'abord que M se prolonge en une fonction holomorphe sur $(\mathbb{P}_1 - \{0\}) \times V$, nulle à l'infini, et que le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans son développement de Taylor à l'infini vaut $-C$; donc M a la forme voulue ; ensuite, on trouve $N_i = -\frac{\partial \Sigma_\infty}{\partial t_i} \Sigma_\infty^{-1}$ et on conclut de la même manière.

Pour abrégé, on dira à partir de maintenant qu'une matrice $\in \text{End}(\mathbb{C}^m)$ "vérifie la condition (Z^*) " si ses valeurs propres ne diffèrent pas d'un entier non nul.

THEOREME (2.2). - Soit (E°, ∇°) une connexion sur X .

- 1) Supposons que, dans une base convenable, sa matrice s'écrive
 $M^\circ = \frac{A^\circ}{x^2} - \frac{C}{x}$, avec C vérifiant (Z^*) . Alors, pour toute déformation
 (E, ∇) de (E°, ∇°) il existe une base et une seule qui coïncide pour
 $t = 0$ avec la base donnée, et dans laquelle les matrices de la connexion
s'écrivent $M = \frac{A}{x^2} - \frac{C}{x}$, $N_i = \frac{B_i}{x}$, avec A et B_i fonctions holomor-
phes de t , et $A(0) = A^\circ$.

- 2) Si la monodromie Γ de (E°, ∇°) a ses valeurs propres distinctes, il existe un C vérifiant $\exp(2\pi i C) = \Gamma$ et une base de E° pour lesquelles les hypothèses de 1) (et donc aussi ses conclusions) soient satisfaites.

Démonstration de 1). - Sous les hypothèses de 1) il est classique qu'il existe au voisinage de l'infini une matrice holomorphe inversible \tilde{S}_∞ , avec $\tilde{S}_\infty(\infty) = I$, telle que le changement de base sur E° donné par $F = \tilde{S}_\infty G$ (F les "anciennes coordonnées" et G les "nouvelles") ramène la matrice de la connexion à la forme $-\frac{C}{x}$ (voir p. ex. une démonstration dans [5]). Au voisinage de l'infini sur $\tilde{\mathbb{C}}^*$, un revêtement universel de \mathbb{C}^* , une solution fondamentale de (E°, ∇°) dans la base initiale sera donc donnée par $Y^\circ = \tilde{S}_\infty \exp(C \log x)$; comme Y° se prolonge à $\tilde{\mathbb{C}}^*$ tout entier, \tilde{S}_∞ se prolonge en une matrice sur \mathbb{C}^* , nécessairement inversible; enfin, sur $\tilde{D}^* \times U$, on peut étendre Y° en une solution fondamentale Y de (E, ∇) ; on aura $Y = Z \exp(C \log x)$, et $Z(x, 0) = \tilde{S}_\infty$; on est donc dans les conditions d'application du lemme précédent, avec $S_0 = I$, $S_\infty = \tilde{S}_\infty$, et l'existence d'une nouvelle base de E dans laquelle $M = \frac{A}{x^2} - \frac{C}{x}$, $N_1 = \frac{B_1}{x}$ s'ensuit. Montrons que la démonstration du lemme fournit en fait une base qui coïncide pour $t = 0$ avec la base donnée, ce qui impliquera aussi qu'on a $A(0) = A^\circ$; en reprenant les notations de cette démonstration, il suffit de voir qu'on a $\Sigma_0(x, 0) = I$; or on a $\Sigma_0(x, 0) \Sigma_\infty(x, 0) = Z(x, 0) = \tilde{S}_\infty(x)$; donc on a $\Sigma_0(x, 0) = \Sigma_\infty(x, 0)^{-1} \tilde{S}_\infty(x)$; donc $\Sigma_0(x, 0)$ est holomorphe sur \mathbb{P}_1 , donc constante; comme le second membre de cette égalité vaut I pour $x = \infty$, on a bien $\Sigma_0(x, 0) = I$, ce qui démontre l'assertion.

Montrons enfin que la base de E qu'on a obtenue est la seule à posséder les propriétés voulues. Soit e la base considérée, et soit e' une autre base vérifiant les mêmes conditions; si S désigne la matrice de changement de base, et $M'dx + \Sigma N'_i dt_i$ la nouvelle forme de connexion, on devra avoir

$$M' = S^{-1}MS + S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x}, \quad N'_i = S^{-1}N_i S + S^{-1} \frac{\partial S}{\partial t_i}, \quad \text{et } S(x, 0) = \text{id};$$

et d'autre part, on aura $M' = \frac{A'}{x^2} - \frac{C}{x}$, $N'_i = \frac{B'_i}{x}$, (A' et B'_i des fonctions de t).

Montrons d'abord que S est indépendant de x ; en effet l'équation donnant M' en fonction de S et M s'écrit explicitement :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = S\left(\frac{A'}{x^2} - \frac{C}{x}\right) - \left(\frac{A}{x^2} - \frac{C}{x}\right)S ;$$

pour $t = t_0$ fixé, cette équation différentielle n'admet que 0 et ∞ comme points singuliers, et le point singulier à l'infini est régulier ; par suite $S(x, t_0)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} , et méromorphe à l'infini ; un développement en série de Laurent à l'infini, joint au fait que C vérifie (\mathbb{Z}^*) montre alors, en utilisant (3.1), que $S(x, t_0)$ est en fait holomorphe à l'infini, donc constante.

Montrons ensuite que S est indépendant de t ; les équations donnant les N'_i s'écrivent explicitement : $S^{-1} \frac{B_i}{x} S + S^{-1} \frac{\partial S}{\partial t_i} = \frac{B'_i}{x}$; puisque S est indépendant de x , cela donne $\frac{\partial S}{\partial t_i} = 0$, d'où le résultat.

Enfin, S est constante et $S(x, 0) = \text{id}$, donc $S = \text{id}$, ce qui démontre 1).

Démonstration de 2). - Soit Y° une solution fondamentale de (E°, ∇°) avec $hY^\circ = Y^\circ \Gamma$; quitte à changer Y° , on peut supposer Γ diagonale ; choisissons alors C' diagonale, vérifiant $\exp(2\pi i C' \log x) = \Gamma$, écrivons encore $Y^\circ = Z^\circ \exp(C' \log x)$, et identifions Z° à une fonction sur D^* à valeurs dans $\text{Gl}(m, \mathbb{C})$ par le choix d'une base de E° ; pour $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{Z}$, on peut modifier la représentation précédente en remplaçant C' par $C' - R$, et Z° par $Z^\circ x^R$, avec $R = \text{diag}(r_1, \dots, r_m)$. Il résulte alors d'un théorème de Plemelj [9] et Birkhoff [2] (voir aussi une démonstration dans [13]) que le fibré défini par $Z^\circ x^R$ est trivial pour un choix convenable de R , ce choix n'étant d'ailleurs pas nécessairement unique ; le lemme (2.1), appliqué au cas $p = 0$, nous montre alors l'existence d'une base dans laquelle M° s'écrit sous la forme voulue ; d'autre part, les valeurs propres de $C = C' - R$ sont distinctes modulo \mathbb{Z} , donc a fortiori C vérifie (\mathbb{Z}^*) . Cela montre que (E°, ∇°) vérifie les hypothèses de 1) .

Remarque (2.3). - Si l'on ne fait aucune hypothèse sur la monodromie de (E°, ∇°) , il est connu qu'il n'est pas toujours possible de réduire la matrice de la connexion à la forme $\frac{A^\circ}{x^2} - \frac{C}{x}$, contrairement à ce qu'affirmait Birkhoff.

D'autre part, si cette réduction est possible mais que C ne vérifie pas (\mathbb{Z}^*) , le raisonnement ne s'applique plus. Je ne sais pas si la conclusion de (2.2.1) reste vraie dans ce cas, cela me semble douteux.

3. - ETUDE DES CONDITIONS D'INTEGRABILITE .

Rappelons d'abord le résultat suivant :

(3.1) Soit $C \in \text{End}(\mathbb{C}^m)$, et notons C_1, \dots, C_m ses valeurs propres ; alors les valeurs propres de $\text{ad}(C)$ (défini comme d'habitude par $\text{ad}(C)A = [C, A]$) sont les $C_i - C_j$, $1 \leq j \leq m$.

Tout d'abord, si C est semi-simple, le résultat est immédiat en se ramenant au cas diagonal ; dans le cas général, on écrit $C = C' + C''$, avec C' semi-simple, C'' nilpotent, et $[C', C''] = 0$, et il suffit de voir que $\text{ad}(C')$ et $\text{ad}(C'')$ sont respectivement la partie semi-simple et la partie nilpotente de $\text{ad}(C)$; et $\text{ad}(C'')$ est visiblement nilpotente, et $[\text{ad}(C), \text{ad}(C'')] = \text{ad}[C', C''] = 0$; enfin $\text{ad}(C')$ est semi-simple (si C' est diagonal, $\text{ad}(C')$ l'est aussi). D'où le résultat.

En particulier, dire que C vérifie (\mathbb{Z}^*) équivaut à dire que les valeurs propres de $\text{ad}(C)$ n'appartiennent pas à $\mathbb{Z} - \{0\}$.

Pour étudier les déformations d'une connexion (E°, ∇°) donnée, nous nous restreindrons dans tout ce paragraphe au cas où les hypothèses du théorème (2.2.1) sont vérifiées, i.e. au cas où dans une base convenable de E° , la matrice M° de ∇ s'écrit $\frac{A^\circ}{x^2} - \frac{C}{x}$, avec C vérifiant (\mathbb{Z}^*) . Le théorème (2.2.1) nous dit alors que l'étude des déformations se réduit à la recherche de germes de fonctions $A(t)$ et $B_i(t)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(3.2.i) \quad A(0) = A^\circ$$

$$(3.2.ii) \quad \text{Pour tous } i, j : \frac{\partial}{\partial t_i} \frac{B_j}{x} - \frac{\partial}{\partial t_j} \frac{B_i}{x} + [B_i, B_j] = 0$$

$$(3.2.iii) \quad \text{Pour tout } i : \frac{\partial}{\partial x} \frac{B_i}{x} - \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{A}{x^2} - \frac{C}{x} \right) + \left[\frac{A}{x^2} - \frac{C}{x}, \frac{B_i}{x} \right] = 0 .$$

La condition ii) s'écrit aussi $\frac{\partial B_j}{\partial t_j} - \frac{\partial B_i}{\partial t_j} = 0$, et $[B_i, B_j] = 0$; la première condition s'écrit aussi $\frac{\partial B_i}{\partial t_j} = dB$, B étant déterminée à une constante près; la seconde s'écrit alors $[dB, dB] = 0$.

La condition iii) se décompose en deux $[A, B_i] = 0$ ou encore $[A, dB] = 0$ et $B_i + \frac{\partial A}{\partial t_i} + [C, B_i] = 0$, ou encore $B + [C, B] + A = \text{constante}$; comme C vérifie (\mathbb{Z}^*) , (3.1) nous montre que $I + \text{ad}(C)$ est inversible; quitte à ajouter une constante à B on peut donc supposer qu'on a $B + [C, B] + A = 0$. Finalement, on trouve le système d'équations suivant, équivalent à (3.2.ii) + (3.2.iii):

$$(3.3) \begin{cases} B + [C, B] + A = 0 \\ [A, dB] = 0 \\ [dB, dB] = 0. \end{cases}$$

Pour interpréter ces équations, posons $S = \text{End}(\mathbb{C}^m)$, et considérons sur S les formes vectorielles $\omega = [B + [C, B], dB]$ et $\Omega = [dB, dB]$; alors le calcul précédent s'interprète ainsi: les déformations de (E°, ∇°) sont données par les germes d'application $(T, 0) \xrightarrow{\varphi} (S, B^\circ)$, avec B° défini par $B^\circ + [C, B^\circ] + A^\circ = 0$, qui vérifient $\varphi^*(\omega) = 0$, $\varphi^*(\Omega) = 0$, autrement dit par les variétés intégrales du système différentiel $\omega = 0$, $\Omega = 0$ passant par B° . Ce résultat peut être simplifié par le lemme suivant.

LEMME (3.4). - Si $\varphi^*(\omega) = 0$, alors $\varphi^*(\Omega) = 0$.

En effet, si l'on a $\varphi^*(\omega) = 0$, alors on a $\varphi^*(d\omega) = 0$, ce qui s'écrit aussi $\varphi^*[dB + [C, dB], dB] = 0$, ou encore, par Jacobi $\varphi^*(\Omega) + \frac{1}{2}[C, \varphi^*(\Omega)] = 0$; en utilisant (3.1) et (\mathbb{Z}^*) , on voit alors que ceci entraîne $\varphi^*(\Omega) = 0$. En résumé

THEOREME (3.4). - Avec les notations ci-dessus, les déformations de (E°, ∇°) sont données par les applications $\varphi : (T, 0) \rightarrow (S, B^\circ)$ qui vérifient $\varphi^*(\omega) = 0$.

Rappelons maintenant un résultat bien connu :

PROPOSITION et DEFINITION (3.5). - Soit $M \in \text{End}(\mathbb{C}^m)$ donné ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) Le polynôme caractéristique de M et son polynôme minimal sont égaux ;
- 2) Le commutant de M dans $\text{End}(\mathbb{C}^m)$ est de dimension minimale (et égale à m) ;
- 3) Le commutant de M dans $\text{End}(\mathbb{C}^m)$ est égal à $\mathbb{C}[M]$.

On dit que M est "régulière" si ces conditions sont vérifiées.

Maintenant, les points $B \in S$ où le système de formes constitué des coefficients de ω est de rang maximum coïncident manifestement avec les points B où le commutant de $B+[C, B]$, ou encore celui de A est de dimension minimale, c'est-à-dire les B tels que A soit régulier.

Montrons qu'au voisinage d'un tel point, le système $\omega=0$ est complètement intégrable ; il suffit de vérifier ceci : soient β_1 et β_2 deux vecteurs tangents en B à S ; si l'on a $\langle \omega, \beta_1 \rangle = \langle \omega, \beta_2 \rangle = 0$, on a aussi $\langle d\omega, \beta_1 \wedge \beta_2 \rangle = 0$. Or en identifiant β_1 et β_2 à des éléments de $\text{End}(\mathbb{C}^m)$, la première relation s'écrit $[A, \beta_1] = [A, \beta_2] = 0$ et la seconde $[\beta_1, \beta_2] + \frac{1}{2}[C, [\beta_1, \beta_2]] = 0$ (cf. le calcul du lemme (3.4)). On conclut alors par (3.5.3). On en déduit le théorème suivant :

THEOREME (3.6). - Soit (E°, ∇) une connexion telle que, dans une base convenable de E° , la matrice M° de ∇ puisse s'écrire $\frac{A^\circ}{x^2} - \frac{C}{x}$, avec C vérifiant (\mathbb{Z}^*) . Si A° est régulière, (E°, ∇) admet une déformation verselle (de dimension $= \text{rang}(E^\circ)$) .

En effet, il suffit de prendre pour base de la déformation, le germe de variété intégrale maximale passant par A° .

COROLLAIRE (3.7). - Soit (E°, ∇) une connexion vérifiant les conditions suivantes :

- 1) Les valeurs propres de sa monodromie sont distinctes ;
- 2) Dans une (ou n'importe quelle) base, la partie polaire d'ordre 2 de sa matrice de connexion est régulière.

Alors (E°, ∇°) admet une déformation verselle.

Résulte immédiatement des théorèmes (2.2.2) et (3.6).

(3.8) Remarques. -

i) Dans le théorème (3.6), si l'on ne suppose plus régulière, alors en général il n'existe plus de déformation verselle. Pour le voir, prenons $m=2$ et C diagonale ; comme C n'intervient que par son crochet, on peut supposer $C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $c \notin \mathbb{Z} - \{0\}$. D'autre part, si $A(t)$ est une déformation, $A(t) + sI$ en est une aussi, donc on peut se limiter au cas où $\text{Tr}(A^\circ) = 0$ et $\text{Tr}(A) = 0$. Prenons alors A (plutôt que B) comme variable, et posons $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$; l'équation $\omega = 0$ donne immédiatement $\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{d\beta}{(1+c)\beta} = \frac{d\gamma}{(1-c)\gamma}$. Les points réguliers sont ici donnés par $A^\circ \neq 0$; la solution est alors $\alpha = \alpha_0 e^t$, $\beta = \beta_0 e^{(1+c)t}$, $\gamma = \gamma_0 e^{(1-c)t}$, ce qui s'écrit aussi $A = e^t \exp(ct) A^\circ \exp(-ct)$.

Par contre, il est facile de fabriquer des solutions distinctes passant par 0, et qui ne peuvent pas être obtenues comme images réciproques d'une même solution ; par exemple $\alpha = t$, $\beta = \gamma = 0$; $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = t$; $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = t$.

Si c est irrationnel, ce sont "essentiellement" les seules ; par contre, si c est rationnel, on pourra en fabriquer d'autres ; posons $c = \frac{p}{q}$, avec $(p, q) = 1$, et supposons $c \in]-1, 1[$, alors on trouve une infinité de solutions passant par 0 : $\alpha = \alpha_0 t^p$, $\beta = \beta_0 t^{p+q}$, $\gamma = \gamma_0 t^{p-q}$; si de plus $p+q$ est pair, on aura aussi les solutions $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0 t^{(p+q)/2}$, $\gamma = \gamma_0 t^{(p-q)/2}$; pour $c < -1$, on aura encore une infinité de solutions $\alpha = \alpha_0 t^p$, $\beta = 0$, $\gamma = \gamma_0 t^{p-q}$; et pour $c > 1$ on aura $\alpha = \alpha_0 t^p$, $\beta = \beta_0 t^{p+q}$, $\gamma = 0$.

Si $m \geq 3$, les équations ne s'intègrent plus explicitement en général, et le problème de trouver les solutions passant par un A° non régulier semble très difficile.

ii) Si l'on remplace la condition (K1) par la condition (Kr), avec $r \geq 2$ des calculs analogues aux précédents, mais plus pénibles conduisent à des résultats généralisant (3.6) et (3.7); la condition qui doit remplacer (3.7.2) est la suivante : la partie polaire d'ordre (r+1) de la matrice de la connexion (E°, ∇) est régulière.

Dans le cas où la partie polaire d'ordre (r+1) a ses valeurs propres distinctes, voir les travaux de Ueno, Jimbo et Miwa, notamment [14], [3]; c'est d'ailleurs la lecture de [14], conjointement avec mon article [6] qui est à l'origine du présent travail.

iii) Il me paraît plausible que la condition considérée en ii), (par exemple dans le cas (K1), la condition 3.7.2) est suffisante pour assurer l'existence d'une déformation verselle, sans qu'on ait besoin d'autre hypothèse. Voir dans cette direction les remarques du paragraphe 6.

iv) On pourrait, dans l'étude des déformations, considérer des images par des transformations plus générales que celles considérées en (1.2), par exemple par des transformations fibrées

$$\begin{array}{ccc} X \times S & \xrightarrow{\phi} & X \times T \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\varphi} & T \end{array}$$

qui ne respecteraient pas les structures de produit de $X \times S$ et $X \times T$. Par exemple, pour $n = 1$ l'application

$$\begin{array}{ccc} X \times T & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & (pt) \end{array}$$

définie par $(x, t) \rightarrow xe^{-t}$, jointe à l'automorphisme $S = \exp(-Ct)$ transforme la connexion initiale de forme $(\frac{A}{x^2} - \frac{C}{x})dx$ en une connexion dont la forme vérifie $M = \frac{A}{x^2} - \frac{C}{x}$, $N = \frac{B_1}{x}$, avec $A = -B_1 = e^t \exp(Ct) A^\circ \exp(-Ct)$; on retrouve ainsi la déformation considérée en i), qui apparaît triviale de ce nouveau point de vue.

Par contre, je ne vois pas bien ce que donneraient des transformations fibrées plus générales. Il me paraît douteux qu'elles conduisent, saus cas particulier, à des réductions ultérieures significatives.

4. - ANALYTISATION DE CONNEXIONS DANS LES CLASSES DE GEVREY .

En vue de l'application des résultats précédents aux systèmes microdifférentiels, nous allons étendre ici au cas de plusieurs variables le théorème (1.4) de [6]. Reprenons la situation du § 1, et désignons par $\tilde{\mathcal{O}}_{X \times T}$ l'anneau des séries formelles f en x et $t = (t_1, \dots, t_n)$ qui sont "analytiques en t et de classe de Gevrey 1 en x ", c'est-à-dire qui vérifient la condition suivante : si $f = \sum_{p, \alpha} a_{p, \alpha} x^p t^\alpha$ ($p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$), alors la série $\sum \frac{a_{p, \alpha}}{p!} x^p t^\alpha$ est convergente. On définira alors une "connexion de Gevrey sur $X \times T$, avec pôle sur $x = 0$ " de manière analogue à ce qu'on a fait au § 1, en y remplaçant $\mathcal{O}_{X \times T}$ par $\tilde{\mathcal{O}}_{X \times T}$; une telle connexion sera encore supposée intégrable, et de type (K1). Dans une base convenable, $e = (e_1, \dots, e_m)$ elle s'écrira de manière analogue à (1.1) :

$$(4.1) \quad D_x F = \frac{\partial F}{\partial x} + MF, \quad D_i F = \frac{\partial F}{\partial t_i} + N_i F, \quad F \in \tilde{\mathcal{O}}_{X \times T}^m,$$

M et N_i des matrices de type (m, m) à coefficients dans $\tilde{\mathcal{O}}_{X \times T}^{[x^{-1}]}$. La condition d'intégrabilité s'écrit encore comme au § 1, formule (I)', et la condition (K1) signifie que M (resp. N_i) a un pôle d'ordre ≤ 2 (resp. ≤ 1).

On posera $M = \sum_{k=-2}^{+\infty} M_k(t) x^k$.

Si l'on a une nouvelle base $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$, soit $S \in \text{Gl}(m, \tilde{\mathcal{O}})$ la matrice de changement de base, définie par $e' = eS$, ou encore $F = SF'$ (F' désignant les nouvelles coordonnées); alors les nouvelles matrices de la connexion s'écrivent

$$(4.2) \quad M' = S^{-1}MS + S^{-1} \frac{\partial S}{\partial x}, \quad N'_i = S^{-1}N_i S + S^{-1} \frac{\partial S}{\partial t_i}.$$

Avec ces notations, on a le théorème suivant :

THEOREME (4.3). - Supposons que $M_{-2}(0)$ soit nilpotente (ce qui est d'ailleurs une hypothèse indépendante de la base choisie initialement).

Alors, il existe une base e' dans laquelle M' et N'_i sont convergentes, i.e. à coefficients dans \mathcal{O} ; de plus, si l'on a deux bases e' et e'' vérifiant cette propriété, la matrice Σ définie par $e'' = e'\Sigma$ est convergente.

En termes de connexions, cela signifie que, sous les hypothèses précédentes, la connexion donnée (\tilde{E}, ∇) sur $\tilde{\mathcal{O}}$ provient par extension des scalaires de \mathcal{O} à $\tilde{\mathcal{O}}$ d'une connexion (E, ∇) sur \mathcal{O} , unique à isomorphisme unique près.

Dans le cas d'une variable, i.e. $n = 0$, ce résultat est démontré dans [6] par une méthode indirecte utilisant le calcul microdifférentiel ; je suis très reconnaissant à Y. Sibuya de m'avoir indiqué qu'une adaptation convenable de son article [12] permettait d'obtenir une démonstration beaucoup plus rapide, et qui s'applique même à certaines connexions dans des espaces de Banach. Ayant ici seulement en vue des connexions dans des vectoriels de dimension finie, je ne reprendrai pas telle quelle l'idée de Sibuya, mais une variante simplifiée, qu'il faudra agrémenter de l'adjonction de paramètres.

Il serait aussi possible de reprendre, avec paramètres, la démonstration de [6] ; cela serait plus long, mais donnerait comme sous-produits un certain nombre de résultats intéressants par eux-mêmes, par exemple l'extension à plusieurs variables des résultats du §4 de [6] ; je n'aborderai pas cette question ici.

La démonstration se fera en deux parties : dans la première, on montre l'existence d'une base e' dans laquelle M' est convergente. Dans la seconde, on établit une variante avec paramètre d'un théorème de comparaison de Ramis [10], ce qui permet alors d'établir les autres assertions.

Première partie. - Pour $\rho > 0$, on désignera par H_ρ l'espace des séries formelles $f = \sum_{p \geq 0} a_p x^p$ qui vérifient

$$|f|_\rho \stackrel{\text{def}}{=} |a_0| + \sum_{p \geq 1} \frac{|a_p|}{(p-1)!} \rho^p < +\infty ;$$

on désignera aussi par $H_\rho(p)$ les séries de H_ρ sans termes de degré $< p$, et par $M(H_\rho)$ l'espace des matrices d'ordre $m \times m$ à coefficients dans H_ρ ; soit U un voisinage de I dans $M(H_\rho)$, choisi assez petit pour que l'application $S \rightarrow S^{-1}$ soit définie et analytique de U dans $M(H_\rho)$. Pour $\Sigma \in U$ et $P \in M(H_\rho)$ on pose $\Phi(\Sigma, P) = \Sigma^{-1}P\Sigma + x^2 \Sigma^{-1} \frac{d\Sigma}{dx}$.

LEMME 4.4. - Φ est analytique de $U \times M(H_\rho)$ dans $M(H_\rho)$.

Ce lemme résulte des remarques évidentes suivantes :

i) L'application $f \mapsto x^2 \frac{df}{dx}$ est continue de H_ρ dans H_ρ ; en fait, l'application $f \mapsto \frac{1}{\rho} x^2 \frac{df}{dx}$ est même isométrique de $H_\rho(1)$ sur $H_\rho(2)$.

ii) La multiplication est bilinéaire continue de $H_\rho \times H_\rho$ dans H_ρ , et de norme ≤ 1 .

LEMME 4.5. - Soit $P \in M(H_\rho)$ de la forme $P = P(0) + xP'$, avec $P(0)$ nilpotente et $P' \in M(H_\rho)$; alors la dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma}(I, P)$ est une application à indice de $M(H_\rho)$ dans lui-même.

En effet, cette dérivée partielle s'écrit $\Sigma' \mapsto [P, \Sigma'] + x^2 \frac{d\Sigma'}{dx}$; en mettant $P(0)$ sous forme de Jordan, et en utilisant la remarque i) précédente, on voit immédiatement que l'application $\Sigma' \mapsto [P(0), \Sigma'] + x^2 \frac{d\Sigma'}{dx}$ est à indice, et que son indice vaut $-m$; le lemme pour achever la démonstration, il suffit donc d'établir que l'application $\Sigma \mapsto [xP', \Sigma]$ est compacte, ce qui résulte du lemme suivant :

LEMME 4.6. - La multiplication par x est compacte dans H_ρ .

En effet, pour $p \geq 1$, sur $H_\rho(p)$, la norme de la multiplication par x est égale à $\frac{\rho}{p}$; donc sur H_ρ , la multiplication par x est limite uniforme d'opérateurs de rang fini, donc est compacte.

Démontrons maintenant l'assertion qui fait l'objet de la première partie.

PROPOSITION 4.7. - Sous les hypothèses du théorème (4.3) il existe un changement de base $e' = eS$ tel que $M' = S^{-1}MS + S^{-1} \frac{dS}{dx}$ soit convergente.

Posons $P = x^2 M(x, 0)$; si ρ est choisi assez petit, P vérifiera les hypothèses du lemme (4.5) ; par suite, la dérivée partielle $\frac{\partial \phi}{\partial \Sigma}(I, P)$ sera à indice ; désignons encore par π_k l'espace des polynômes en x de degré $\leq k$, et par $\psi(\Sigma, Q, \pi)$ l'application de $U \times M(H_\rho) \times \pi_k$ dans $M(H_\rho)$ définie par $\psi(\Sigma, Q, \pi) = \phi(\Sigma, Q) + \pi$. Il résulte du lemme 4.5 que, pour k assez grand, la dérivée partielle $\frac{\partial \psi}{\partial (S, \pi)}(I, P, 0)$ est surjective, de $M(H_\rho) \times \pi_k$ sur $M(H_\rho)$ et que son noyau est de dimension finie ; en particulier cette application est directe, i.e. son noyau admet un supplémentaire topologique. Alors, le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe un voisinage de P , soit V , dans $M(H_\rho)$ et des applications analytiques $S : V \times V \rightarrow U$, avec $S(P, P) = I$, et $\pi : V \times V \rightarrow \pi_k$, avec $\pi(P, P) = 0$ telles qu'on ait identiquement $\psi(S(Q, Q'), Q, \pi(Q, Q')) = Q'$, ou encore

$$S(Q, Q')^{-1} Q S(Q, Q') + x^2 S(Q, Q')^{-1} \frac{d}{dx} S(Q, Q') + \pi(Q, Q') = Q' ;$$

choisissons alors des familles à n paramètres $Q(t)$ et $Q'(t)$ définies ainsi :

$$Q(t) = x^2 M(x, t) \quad , \quad Q' = x^2 \sum_{-2}^{\ell} M_m(0) x^m \quad (\text{on aura bien } Q' \in V \text{ pour } \ell \text{ assez grand}),$$

et posons $S(t) = S(Q(t), Q'(t))$, $\pi(t) = \pi(Q(t), Q'(t)) = \sum_0^k a_m(t) x^m$; on

trouve qu'on aura $S^{-1}MS + S^{-1} \frac{dS}{dx} = \frac{1}{x^2} Q' - \frac{1}{x^2} \pi$; désignant par M' le second membre de cette formule, on trouve que M' est polynomial en x , et a fortiori convergent ; cela démontre la proposition.

Deuxième partie. - La fin du théorème (4.3) résultera de la proposition suivante :

PROPOSITION (4.8). - Soit $P \in \mathcal{O}_{X \times T} \otimes \text{End}(\mathbb{C}^H)$ et soit D (resp. \tilde{D}) l'application $F \rightarrow x^2 \frac{dF}{dx} + PF$ de \mathcal{O}^μ dans lui-même (resp. de $\tilde{\mathcal{O}}^\mu$ dans lui-même). On suppose que $P(0, 0)$ est nilpotente ; alors les applications naturelles $\text{Ker } D \rightarrow \text{Ker } \tilde{D}$ et $\text{Coker } D \rightarrow \text{Coker } \tilde{D}$ sont bijectives.

Admettons provisoirement ce résultat et montrons comment on termine la démonstration du théorème (4.3). D'après la proposition (4.7), on peut déjà supposer que dans la base e , la matrice M est convergente ; montrons que les N_i le seront alors aussi ; on a en effet, par les conditions d'intégrabilité, $\frac{\partial N_i}{\partial x} + [M, N_i] = \frac{\partial M}{\partial t_i}$, et il suffit d'appliquer la proposition (4.8) à $F = xN_i$ (et $\mu = m^2$).

Montrons maintenant que, si les matrices M et M' correspondant à deux bases e et e' convergent, alors la matrice S définie par $e' = eS$ converge ; d'après (4.2) on a $\frac{\partial S}{\partial x} = SM' - MS$; comme $M_{-2}(0)$ et $M'_{-2}(0)$ sont nilpotentes, on est dans les conditions d'application de la proposition précédente, et l'on trouve que S converge ; d'où le théorème.

Démontrons maintenant la proposition ; dans le cas où $T = \{0\}$, c'est un résultat de Ramis, comme je l'ai rappelé plus haut. Le cas général s'obtient par une facile adjonction de paramètres, que je vais détailler pour être complet.

Le résultat se déduit de la situation abstraite suivante : soient E et \tilde{E} deux espaces de Hilbert, avec une injection continue et d'image dense $E \subset \tilde{E}$; soit de même F et \tilde{F} une autre paire analogue ; soit encore $t \rightarrow \tilde{u}(t)$ un germe de fonction analytique de $t \in (\mathbb{C}^n, 0)$, à valeurs dans $L(\tilde{E}, \tilde{F})$, espace des applications linéaires continues $\tilde{E} \rightarrow \tilde{F}$; on suppose que $u = \tilde{u}|_E$ est analytique à valeurs dans F ; notons enfin par $\mathcal{O}_T(E)$ l'espace des germes en 0 de fonctions holomorphes de t à valeurs dans E et de même avec les autres espaces considérés.

LEMME (4.9). - Supposons que $u(0)$ et $\tilde{u}(0)$ soient des opérateurs à indice, et que leurs indices soient égaux ; alors

- 1) L'injection du complexe $0 \rightarrow E \xrightarrow{u(0)} F \rightarrow 0$ dans le complexe $0 \rightarrow \tilde{E} \xrightarrow{\tilde{u}(0)} \tilde{F} \rightarrow 0$ est un quasi-isomorphisme.
- 2) L'injection du complexe $0 \rightarrow \mathcal{O}_T(E) \xrightarrow{u} \mathcal{O}_T(F) \rightarrow 0$ dans le complexe $0 \rightarrow \mathcal{O}_T(\tilde{E}) \xrightarrow{\tilde{u}} \mathcal{O}_T(\tilde{F}) \rightarrow 0$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration de 1). - L'application $\text{Ker } u(0) \rightarrow \text{Ker } \tilde{u}(0)$ est évidemment injective ; d'autre part, comme F est dense dans \tilde{F} , et que $\text{Im } \tilde{u}(0)$, est fermée par une propriété classique des opérateurs à indice, l'application $\text{Coker } u(0) \rightarrow \text{Coker } \tilde{u}(0)$ est d'image dense, donc surjective ; l'égalité des deux indices entraîne alors que ces deux applications sont bijectives.

Démonstration de 2). - On prend le cylindre de l'injection considérée $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_T(E) \xrightarrow{v} \mathcal{O}_T(\tilde{E}) \oplus \mathcal{O}_T(F) \xrightarrow{w} \mathcal{O}_T(\tilde{F}) \rightarrow 0$ avec $v(e) = (e, u(e))$, $w(f, g) = \tilde{u}(f) - g$; par 1), la restriction de ce complexe à la fibre $t = 0$ est acyclique ; il est alors classique que le complexe lui-même est acyclique, ce qui est précisément le résultat cherché (à noter que c'est ici le seul point où l'hypothèse "Hilbert" plutôt que "Banach" intervient, pour ne pas avoir des problèmes de "suites exactes directes").

On applique ce lemme dans la situation suivante ; soient ρ et $r > 0$; il suffit évidemment de démontrer la proposition pour F sans terme constant en x ; on prend alors $\tilde{E} = \tilde{F} = K_\rho^\mu$, en désignant par K_ρ l'espace des $f = \sum_{p \geq 1} a_p x^p$ qui vérifient $\sum \left(\frac{a_p}{(p-1)!}\right)^2 \rho^{2p} < +\infty$; on prend $E = (L_{r,1})^\mu$ et $F = L_r^\mu$, en désignant par L_r (resp. $L_{r,1}$) le sous-espace de $\mathbb{C}\{x\}$ formé des séries $f = \sum_{p \geq 1} a_p x^p$ qui vérifient $\sum |a_p|^2 r^{2p} < +\infty$ (resp. $\sum |pa_p|^2 r^{2p} < +\infty$) ; enfin, on prend pour u et \tilde{u} la restriction de D et \tilde{D} aux espaces précédents, avec r et ρ assez petits ; d'après le lemme (4.9), la proposition sera démontrée si l'on établit que $u(0)$ et $\tilde{u}(0)$ ont même indice ; or, les mêmes calculs que dans la première partie montrent que $\tilde{u}(0)$ est d'indice $-\mu$; d'autre part, $u(0)$ est une perturbation compacte de $x^2 \frac{d}{dx}$; or, cette dernière application est d'indice -1 de $L_{r,1}$ dans L_r (immédiat), donc d'indice $-\mu$ de E dans F . Ceci termine la démonstration de la proposition (4.8) et donc celle du théorème (4.3).

5. - DEFORMATION DE SYSTEMES MICRODIFFERENTIELS HOLONOMES .

Soient Y un ouvert de \mathbb{C}^{n+1} , avec $0 \in Y$ et $T^*Y \xrightarrow{\pi} Y$ son cotangent ; les coordonnées de Y sont notées $y = (y_0, \dots, y_n)$, et celles de T^*Y , (y, η)

avec $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_n)$. Soit \mathcal{E} le faisceau des opérateurs microdifférentiels analytiques sur T^*Y , et $\mathcal{E}(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, sa filtration usuelle ; soit encore F un Module holonome sur \mathcal{E} , défini au voisinage du point $a = (0, dy_0) \in T^*Y$; on désigne par Λ le support ou "variété caractéristique" de F , et par L l'image de Λ par π . Rappelons que Λ est une variété lagrangienne, éventuellement avec singularités, i.e. elle est purement de dimension n et la forme de Liouville $\lambda = \sum \eta_i dy_i$ s'annule sur la partie lisse de Λ ; d'autre part, comme Λ est homogène par rapport aux η , elle provient d'une variété de P^*Y ; donc L , image d'un ensemble analytique par une application propre, est encore analytique. Pour toutes ces notions, je renvoie à [11], [1] ou [8].

D'après un lemme de Kashiwara-Kawai [4], corollaire 1.6.4, on peut supposer, après une transformation canonique convenable que Λ est "en position générique" au point a , c'est-à-dire que, au voisinage de a , on a $\Lambda \cap \pi^{-1}(0) = \mathbb{C}^*a$. Dans la suite, nous ferons désormais cette hypothèse.

LEMME 5.1. - La restriction à Λ (resp. L) de la projection

$(y, \eta) \mapsto (y_1, y_n, \eta_0)$ [resp. $y \mapsto (y_1, \dots, y_n)$] est finie : autrement dit la restriction de F à la droite Y° définie par $y_1 = \dots = y_n = 0$ est non caractéristique.

Il suffit évidemment de démontrer l'assertion "resp.". Comme Λ est de dimension n , l'hypothèse de position générique montre que, au voisinage de 0 , L est purement de dimension $n-1$; désignons par L' l'ensemble des points lisses de L et par Λ' son image réciproque dans Λ ; comme Λ est lagrangienne, Λ' est le fibré conormal de L' ; par suite, quand $y \in L'$ tend vers 0 , l'hyperplan tangent en y à L' a pour position limite l'hyperplan orthogonal à dy_0 , i.e. l'hyperplan tangent à $y_0 = 0$. De là, et du "curve selection lemma", on déduit facilement que, pour $\epsilon > 0$ fixé, L est contenu au voisinage de 0 , dans le cône $|y_0| \leq \epsilon \sum |y_i|$ (cf. [4], lemme 4.2.1). En particulier, l'intersection de L avec Y_0 est réduite à $\{0\}$; le théorème de préparation montre alors que la restriction à L de la projection $y \mapsto (y_1, \dots, y_n)$ est finie, ce qui établit le lemme.

Nous sommes donc ici dans un cas particulier de la situation considérée par F. Pham [7] ; on va rappeler son formalisme, dans ce cas particulier. Soient $F(i)$ ($i \in \mathbb{Z}$) une bonne filtration de F (i.e. une filtration quotient d'une surjection $\mathcal{E}^p \rightarrow F \rightarrow 0$), et $\sigma(F) = F(0)/F(-1)$ le symbole de F muni de cette filtration ; comme $\sigma(F)$ a pour support Λ , le lemme précédent nous montre que $\sigma(F)_a$ est fini sur $\mathbb{C}\{y_1, \dots, y_n\}$. On fera "l'hypothèse de platitude" suivante :

(P) $\sigma(F)_a$ est libre sur $\mathbb{C}\{y_1, \dots, y_n\}$.

Notons avec Pham que cette condition est en fait intrinsèque sur F , car elle signifie que F_a admet une bonne filtration dont le symbole est de Cohen-Macaulay sur l'anneau $\mathcal{E}(0)_a/\mathcal{E}(-1)_a$. Par ailleurs, je ne connais aucun exemple où cette condition ne soit pas satisfaite pour une bonne filtration convenable.

La restriction F° de F à Y° est définie par $F^\circ = F/y_1 F + \dots + y_n F$; puisque cette restriction est non caractéristique, F° est un module holonome sur $\mathcal{E}_{T^*Y^\circ}$, et la filtration $F(i)$ induit par restriction une bonne filtration $F^\circ(i)$ de F° . En appelant T l'espace des dernières coordonnées (y_1, \dots, y_n) , muni de la projection naturelle $y \rightarrow (y_1, \dots, y_n)$ de Y sur T , on résume cette situation en disant que $(F, F(i))$ est, au voisinage de a , un déploiement de $(F^\circ, F^\circ(i))$ de base T . Comme la donnée du $\mathcal{E}(0)$ -Module $F(0)$ détermine F et sa filtration, on dira aussi que $F(0)$ est, au voisinage de a , un déploiement de $F^\circ(0)$ (ou encore que $F(0)_a$ est un déploiement de $F^\circ(0)_a$ de base T).

Un dira qu'un autre déploiement $F'(0)$ de base S est image réciproque (resp. image réciproque stricte) du déploiement précédent par le changement de base $\varphi : S \rightarrow T$ s'il existe un morphisme fibré $\tilde{\varphi}$, i.e. un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y^\circ \times S & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & Y = Y^\circ \times T \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\varphi} & T \end{array}$$

avec $\tilde{\varphi}$ égal à l'identité sur Y° , tel que $F'(0)$ soit l'image de $F(0)$ par

l'application non caractéristique $\tilde{\varphi}$, c'est-à-dire tel qu'on ait $F'(0) = \mathcal{O}_{Y^0 \times S} \otimes_{\mathcal{O}_Y} F(0)$ (resp. même chose, avec $\tilde{\varphi} = \text{id} \times \varphi$). On dira enfin qu'un déploiement de $F^\circ(0)$ est versel (resp. strictement versel) si tout autre déploiement est isomorphe à une image réciproque (resp. à une image réciproque stricte) du précédent.

Le but de ce paragraphe est de montrer que ces notions se ramènent plus ou moins à celles qui ont été considérées dans les paragraphes précédents. Ceci va résulter des considérations suivantes, qui répètent celle de [6], § 3, avec une adjonction de paramètres.

(5.2) Soit $\tilde{\mathcal{E}}$ le faisceau des opérateurs microdifférentiels dont le symbole total ne dépend que de $(y_1, \dots, y_n, \eta_0)$. $\tilde{\mathcal{E}}$ est un faisceau d'anneaux commutatifs, et les éléments de $\tilde{\mathcal{E}}(k)_a$ s'écrivent, par définition des opérateurs microdifférentiels analytiques : $p = \sum_{\ell \leq k} a_\ell \eta_0^\ell$, avec $a_\ell \in \mathbb{C}\{y_1, \dots, y_n\}$, la série $\sum_{\ell \leq 0} \frac{p_\ell(y_1, \dots, y_n) x^{-\ell}}{(-\ell)!}$ étant convergente au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. Autrement dit, le changement de variables $x = \eta_0^{-1}$, $y_i = t_i$ ($i \geq 1$) identifie $\tilde{\mathcal{E}}(0)_a$ à l'espace $\tilde{\mathcal{O}}_{X \times T}$ considéré au § 4, et il identifie $\tilde{\mathcal{E}}_a$ à $\tilde{\mathcal{O}}_{X \times T}[x^{-1}]$.

(5.3) L'hypothèse (P), et le théorème de préparation pour les opérateurs microdifférentiels entraînent que $F(0)_a$ est libre sur $\tilde{\mathcal{E}}(0)_a$; plus précisément, soient $e_1, \dots, e_m \in F(0)_a$ tels que leurs classes \bar{e}_i dans $\sigma(F)_a = F(0)_a / F(-1)_a$ forment une base de $\sigma(F)_a$ sur $\mathbb{C}\{y_1, \dots, y_n\}$; alors les e_i forment une base de $F(0)_a$ sur $\tilde{\mathcal{E}}(0)_a$.

(5.4) Moyennant le changement de variables considéré en (5.1), $F(0)_a$ est maintenant libre de rang n sur $\tilde{\mathcal{O}}_{X \times T}$; pour abréger, on écrira $E = F(0)_a$. Montrons que E est naturellement muni d'une connexion de type (K1); pour $e \in E$, on pose $D_x e = \eta_0^2 y_0 e$, et $D_i e = \eta_i e$ ($i \geq 1$) (la première formule est simplement la "transformation de Fourier formelle" $y_0 = -D_{\eta_0}$, suivie du changement de variable $x = \eta_0^{-1}$, les autres vont de soi). Il est immédiat de vérifier, à partir de la définition du produit des opérateurs microdifférentiels, que cela définit bien une connexion; elle est de type (K1) parce que $y_0 F(0) \subset F(0)$,

$\eta_1 F(0) \subset F(1)$; elle est intégrable car D_x et les D_i commutent.

(5.5) Outre l'intégrabilité et la condition (K1), cette connexion vérifie encore une condition supplémentaire ; en effet, dans T^*Y , au-dessus de Y_0 , le support Λ de $\sigma(F)$ se réduit à la droite $y_0 = 0$, $\eta_1 = \dots = \eta_n = 0$ d'après l'hypothèse de position générique et le lemme (5.1). Par le Nullstellensatz, il en résulte que $\sigma(F)_a / y_1 \sigma(F)_a + \dots + y_n \sigma(F)_a$ est annulé par des puissances convenables de y_0 , $\eta_0^{-1} \eta_1, \dots, \eta_0^{-1} \eta_n$. Traduit en termes de connexion sur $\tilde{\mathcal{O}}_{X \times T}$, ceci équivaut à la condition suivante : soit $\Omega = Mdx + \sum N_i dt_i$ la forme de la connexion dans une base convenable et écrivons comme dans les paragraphes précédents

$$M = \sum_{k=-2}^{+\infty} M_k(t) x^k, \quad N_i = \sum_{k=-1}^{+\infty} N_{i,k}(t) x^k.$$

Alors, on a

(Nilp) $M_{-2}(0)$ et les $N_{i,-1}(0)$ sont nilpotentes.

(5.6) Montrons que, réciproquement, une $\tilde{\mathcal{O}}_{X \times T}$ -connexion (E, ∇) intégrable, et vérifiant (K1) et (Nilp) provient d'un \mathcal{E}_a -module holonome, en position générique, et muni d'une filtration vérifiant (P).

Soit m le rang de E ; prenons-en une base, dans laquelle la forme de la connexion s'écrit $\Omega = Mdx + \sum N_i dt_i$; posons

$$\begin{aligned} P(\eta_0, y_1, \dots, y_n) &= (\eta_0)^2 {}^t M(\eta_0^{-2}, y_1, \dots, y_n) \\ \text{et} \\ Q_i(\eta_0, y_1, \dots, y_n) &= {}^t N_i(\eta_0^{-1}, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Désignons par $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ la base canonique de \mathcal{E}_a^m , et par G le \mathcal{E}_a -module $\mathcal{E}_a^m / \mathcal{E}_a^m (y_0 - P) + \sum \mathcal{E}_a^m (\eta_i - Q_i)$, et munissons G de la filtration quotient de celle de \mathcal{E}_a^m . Il suffit d'établir le lemme suivant :

LEMME (5.7). - $G(0)$ est libre de rang m sur $\tilde{\mathcal{E}}_a^m(0)$ et admet pour
base les images dans G de $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$.

On va alors démontrer par récurrence le résultat suivant : soit G_k le

\mathcal{E}_a -module $\mathcal{E}_a^m / \mathcal{E}_a^m(y_0 - P) + \sum_{i=1}^k \mathcal{E}_a^m(\eta_i - Q_i)$, muni de la filtration induite par \mathcal{E}_a^m ; désignons par $\mathcal{E}_{k,a}$ l'espace des éléments de \mathcal{E}_a dont le symbole total ne dépend que de $(y_1, \dots, y_n, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n)$; alors, $G_p(0)$ est libre de rang m sur $\mathcal{E}_{k,a}$ et admet pour base les images dans G_p de $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$.

Traisons le cas $k = 0$: on a une suite exacte $\mathcal{E}_a^m \xrightarrow{(y-P)} \mathcal{E}_a^m \rightarrow G_0 \rightarrow 0$; pour établir le résultat voulu, d'après le théorème de préparation pour les opérateurs microdifférentiels, il suffit, en passant aux symboles, de démontrer que l'application $\mathcal{E}_a^m(0) / \mathcal{E}_a^m(-1) \xrightarrow{y-P_0} \mathcal{E}_a^m(0) / \mathcal{E}_a^m(-1)$ est injective, et que son conoyau est libre de rang m sur $\mathcal{E}_{0,a}(0) / \mathcal{E}_{0,a}(-1)$, qui est un anneau commutatif isomorphe à $\mathbb{C}\{y_1, \dots, y_n, \eta_1/\eta_0, \dots, \eta_n/\eta_0\}$ (ici, la multiplication est commutative), et qu'il admet pour base les images de $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$; ceci est un lemme élémentaire d'algèbre analytique commutative, qui se déduit du théorème de préparation, et dont je laisse les détails au lecteur (bien entendu, l'hypothèse que $P_0(0)$ est nilpotente jouera un rôle essentiel).

Le cas général de la récurrence se traite ensuite de la même manière,

en considérant la suite exacte $G_k \xrightarrow{\eta_{k+1} - Q_{k+1}} G_k \rightarrow G_{k+1} \rightarrow 0$.

(5.8) On vérifie immédiatement que la correspondance précédente transforme "restriction à Y_0 " en "restriction à $t = 0$ ", et qu'elle fait correspondre "images réciproques strictes de déploiements de \mathcal{E} -modules" et "images réciproques de déformations de $\tilde{\mathcal{O}}_{X \times T}$ -connexions". D'autre part, la condition (Nilp) permet d'appliquer les résultats du §4, et donc finalement de ramener les \mathcal{E}_a -Modules holonomes en position générique, aux $\mathcal{O}_{X \times T}$ -connexions (intégrables, et de type (K1)), avec toutefois la condition supplémentaire (Nilp) qui rend cette correspondance un peu imparfaite.

Explicitons rapidement les résultats que l'on obtient ainsi. Soit F un \mathcal{E} -Module holonome au voisinage de $a = (0, dy_0)$, en position générique, muni d'une filtration vérifiant (P) ; prenons une base $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m$ de $\sigma(F)_a$, sur $\mathbb{C}\{y_1, \dots, y_n\}$, et relevons-la en une base e_1, \dots, e_m de $F(0)_a$ sur $\tilde{\mathcal{E}}_a(0)$.

Les équations définissant F_a seront écrites comme en (5.6) : $y_0 e = P e$;
 $\eta_i e = Q_i e$, $P \in \text{End } \mathbb{C}^m \otimes_{\mathbb{C}} \tilde{\mathcal{E}}_a(0)$, $Q_i \in \text{End } \mathbb{C}^m \otimes_{\mathbb{C}} \tilde{\mathcal{E}}_a(1)$ (on écrit ici les e_i
en colonne pour se conformer à (5.6) en priant le lecteur d'excuser cette trans-
position par rapport aux notations antérieures). La restriction $F^\circ(0)_a$ à Y° sera
donnée par l'équation $y_0 e = P(0, \eta_0^{-1}) e$. Les résultats du §4 montrent qu'on peut
choisir e de manière que P et les Q_i soient convergents au sens ordinaire en
 $(y_1, \dots, y_n, \eta_0^{-1})$, et ceci d'une manière essentiellement unique (i.e. à un changement de
base près convergent au sens ordinaire). En particulier, on pourra parler de la mono-
dromie de F , ou de F° autour de $x=0$ (ou $\eta_0 = \infty$) . Avec ces notations, le
théorème (2.2) se traduit ainsi :

THEOREME (5.9). - Supposons que, dans une base convenable de $F^\circ(0)_a$
on puisse écrire $P(0, \eta^{-1}) = A^\circ + C \eta_0^{-1}$, avec C vérifiant (\mathbb{Z}^*) (ce qui
sera le cas, notamment, si la monodromie a ses valeurs propres distinctes).
Alors, pour tout déploiement de $F^\circ(0)_a$, il existe une base et une seule
de $F(0)_a$, coïncidant pour $y_1 = \dots = y_n = 0$ avec la base donnée, dans
laquelle on a $P = A(y_1, \dots, y_n) + C \eta_0^{-1}$; $Q_i = B_i(y_1, \dots, y_n) \eta_0$, avec $A(0) = A^\circ$.

Les conditions d'intégrabilité s'écrivent ici comme au §3 (on a compensé le
changement de signe dû à la transposition par le changement de signe de C). Elles
s'analysent donc de la même manière et nous garderons ici les notations de (3.2)
et (3.3) au remplacement près de (t_1, \dots, t_n) par (y_1, \dots, y_n) .

THEOREME (5.10). - Outre les hypothèses du théorème précédent, suppo-
sons que A° soit régulière. Alors $F^\circ(0)$ admet un déploiement versel au
voisinage de a .

L'application brutale du théorème (3.6) semblerait donner un déploiement
strictement versel. Mais on ne peut retenir ici que les solutions qui vérifient
" $B_i(0)$ nilpotent" ; on s'en tire par le truc suivant : on remarque d'abord que la
transformation fibrée $y'_0 = y_0 + \varphi(y_1, \dots, y_n)$, $y'_i = y_i$ ($i \geq 1$) remplace P par
 $P + \varphi \text{ id}$, et les Q_i par $Q_i - \frac{\partial \varphi}{\partial y'_i} \text{ id}$; par suite, on peut se limiter à considérer,
parmi les déploiements de la forme (5.9), ceux pour lesquels on a $\text{tr}(A) = 0$.

Prenons alors le germe de variété intégrale maximale du système (3.3) passant par A° , et prenons sa restriction aux matrices A de trace nulle ; on obtient visiblement un germe lisse Z dont je dis qu'il donne le déploiement versel (mais non "strictement versel") cherché ; en effet sur Z , on a $[A^\circ, B_i(0)] = 0$ donc $B_i(0)$ est un polynôme en A° ; en particulier $B_i(0)$ n'a qu'une seule valeur propre ; comme on a $B_i(0) + \frac{\partial A}{\partial y_i}(0) + [C, B_i(0)] = 0$, on a $\text{Tr } B_i(0) = 0$, donc $B_i(0)$ est nilpotente et ceci achève la démonstration. (En fait, on va voir au § 6 que, dans la situation précédente, A et les B_i restent constamment nilpotentes, c'est-à-dire que la variété caractéristique de F est le fibré conormal à $y_0 = 0$)

Remarque ? (5.11). - Ici encore, je ne vois pas bien l'effet qui auraient des transformations fibrés plus générales que celle qui vient d'être considéré, et a fortiori, l'effet qu'auraient des transformations encore plus générales, p. ex. des transformations canoniques dans T^*Y préservant la position générique.

6. - UNE CONDITION DE LISSITE DE LA VARIETE CARACTERISTIQUE.

Reprenons les notations du § 1, et soit $\hat{\mathcal{O}}_{X \times T}$ l'anneau des séries formelles $f = \sum_{p \geq 0} a_p(t) x^p$, les a_p appartenant à $\mathbb{C}\{t\}$ et convergeant dans un voisinage fixe de 0 ($\hat{\mathcal{O}}$ est le "complété formel de \mathcal{O} le long de $x = 0$). Soit (E, ∇) une $\hat{\mathcal{O}}_{X \times T}$ connexion intégrable et vérifiant (K1). Dans une base, la forme de cette connexion s'écrit comme ci-dessus $\Omega = M dx + \sum N_i dt_i$, avec $M = \sum_{-2}^{+\infty} M_k(t) x^k$, $N_i = \sum_{-1}^{+\infty} N_{i,k}(t) x^k$; les conditions d'intégrabilité s'écrivent comme au § 1.

THEOREME (6.1). - Supposons que $M_{-2}(0)$ soit régulière et que toutes ses valeurs propres soient confondues. Alors, pour tout t voisin de zéro, $M_{-2}(t)$ possède les mêmes propriétés.

On peut évidemment se limiter au cas où $n = 1$; on écrit alors t pour t_1

$N = \sum N_k x^k$ pour N_1 , et l'on posera pour simplifier $A = M_{-2}$, $B = N_{-1}$. Dans la condition d'intégrabilité $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial t} + [M, N] = 0$, les termes de degré -3 et -2 en x s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} [A, B] = 0 \\ B + \frac{dA}{dt} - [A, N_0] - [M_{-1}, B] = 0. \end{cases}$$

Puisque $A(0)$ est régulière, A est régulière au voisinage de zéro ; par suite la première équation entraîne qu'il existe un polynôme unique en ξ de degré $m-1$, $R(t, \xi)$, à coefficients holomorphes en t , et tel qu'on ait $B(t) = R(t, A(t))$; en reportant dans la deuxième équation, on trouve que A vérifie l'équation différentielle

$$(6.2) \quad \frac{dA}{dt} = -R(t, A) + [A, N_0] + [M_{-1}, R(t, A)].$$

Soit alors $V \subset \text{End}(\mathbb{C}^n)$ l'ensemble des matrices régulières qui n'ont qu'une seule valeur propre ; V est une orbite sous l'action de $G\mathfrak{L}(m, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$: $(M, \lambda) \mapsto M^{-1}vM + \lambda \text{id}$ (v élément quelconque de V), donc il est lisse et son tangent en v est l'espace $\text{Im}(\text{ad } v) \oplus \mathbb{C} \cdot \text{id}$; le théorème d'unicité des équations différentielles nous montrera le résultat cherché si nous montrons que le second membre de (6.2) appartient à $T_A V$ chaque fois qu'on a $A \in V$. Ceci résulte du lemme élémentaire suivant :

LEMME (6.3). - Soient $v \in V$, Q un polynôme et $w \in \text{End}(\mathbb{C}^m)$; alors on a $Q(v) \in T_v V$, et $[w, Q(v)] \in T_v V$.

En remplaçant v par $v - \lambda \text{id}$, on se ramène au cas où v est de trace nulle, i.e. nilpotente régulière ; on peut alors supposer v mise sous la forme

de Jordan $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$; posant $c = - \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m \end{pmatrix}$ on vérifie immédiatement

qu'on a $v = [c, v]$, donc on a $v \in T_v V$; on a aussi $[cv^{p-1}, v] = [c, v]v^{p-1} = v^p$, donc $v^p \in T_v V$ pour tout $p \geq 1$, et le cas $p = 0$ est évident.

Enfin, pour tout $p \geq 1$, on a $[w, v^p] = [w_p, v]$, avec

$w_p = wv^{p-1} + vwv^{p-2} + \dots + v^{p-1}w$, donc $[w, v^p] \in T_v V$; ceci démontre le lemme et le théorème.

Remarque (6.3). - En fait, en développant le raisonnement précédent de manière plus systématique, on peut montrer ceci (cf. un article ultérieur) : si $M_{-2}(0)$ est régulière, la multiplicité des valeurs propres de $M_{-2}(t)$ est constante. On peut même établir un résultat plus fort, à savoir que la structure de la restriction de la connexion à $t = \text{constante}$ "varie continuellement" (en un sens convenable) avec t ; ceci permet d'étudier la structure des $\mathcal{O}_{X \times T}$ -connexions intégrables vérifiant (K1), et telles que $M_{-2}(0)$ soit régulière; les résultats s'étendent aussi aux connexions vérifiant (Kr), r entier ≥ 1 .

(6.4) Le théorème précédent se traduit immédiatement dans le résultat microdifférentiel suivant : soit F un \mathcal{E} -module holonome au voisinage de $a = (0, dy_0)$, en position générique, et muni d'une filtration vérifiant (P). Supposons que l'action de y_0 sur $\sigma(F)_a / \sum_{i \geq 1} \sigma(F)_a y_i$, qui par hypothèse est nilpotente, soit aussi régulière. Alors la variété caractéristique Λ de F est au voisinage de a , le fibré conormal à une hypersurface lisse.

Prenons une base de (e_1, \dots, e_n) de $F(0)_a$ sur $\tilde{\mathcal{E}}_a(0)$, et écrivons comme au §5, $y_0 e = P e$, $\eta_1 e = Q_1 e$, $P = \sum_{k \leq 0} P_k(y_1, \dots, y_n) \eta_0^k$, $Q_1 = \sum_{k \leq 1} Q_{1,k}(y_1, \dots, y_n) \eta_0^k$. Par hypothèse, $P_0(0)$ est nilpotente; le théorème précédent, via la traduction faite au §5, nous montre donc que P_0 a toutes ses valeurs propres confondues; un changement de coordonnées comme dans la démonstration de (5.10) montre qu'on peut supposer que P_0 est constamment nilpotente; d'autre part, les conditions d'intégrabilité impliquent qu'on a $[P_0, Q_{i,-1}] = 0$, et $Q_{i,-1} + \frac{\partial P_0}{\partial y_i} + [P_0, Q_{i,0}] + [P_{-1}, Q_{i,-1}] = 0$; on en conclut comme en (5.10) que $Q_{i,-1}$ est nilpotent; donc la variété caractéristique de F est donnée au voisinage de a , par $y_0 = \eta_1 = \dots = \eta_m = 0$, ce qui démontre le résultat cherché.

Plus généralement, les résultats annoncés en (6.3) donnent, par traduction une analyse de la structure d'un module holonome vérifiant les hypothèses précédentes; voir l'article ultérieur promis.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.E. BJÖRK, Rings of differential operators, North-Holland (1979).
- [2] G.D. BIRKHOFF, The generalized Riemann Problem, ... Proc. Amer. Acad. Arts Sc. 49 (1913), pp. 521-568.
- [3] M. JIMBO, T. MIWA, K. UENO, Monodromy preserving deformations... I, R.I.M.S. 319, Kyoto University (1980).
- [4] M. KASHIWARA, T. KAWAI, On holonomic systems... III, Systems with regular singularities, R.I.M.S. 293, Kyoto University (1979).
- [5] B. MALGRANGE, Sur les points singuliers des équations différentielles, Enseign. Math. 20 (1974), pp. 147-176.
- [6] B. MALGRANGE, Modules microdifférentiels et classes de Gevrey, Advances in Math. vol. 7B, Academic Press (1981), à paraître.
- [7] F. PHAM, Déploiement de singularités de systèmes holonomes, C.R. Acad. Sc. Paris, t.289 (1979), pp. 333-336.
- [8] F. PHAM, Singularités des systèmes de Gauss-Manin, Progress in Math, vol. 2, Birkhäuser (1980).
- [9] J. PLEMELJ, Problems in the sense of Riemann and Klein, Interscience public. (1964).
- [10] J.P. RAMIS, Dévissage Gevrey, Astérisque 59/60 (1978), pp. 173-204.
- [11] M. SATO, T. KAWAI, M. KASHIWARA, Microfunctions and pseudodifferential equations, Springer Lect. Notes n°287 (1973), pp.264-529.
- [12] Y. SIBUYA, Perturbation at an irregular singular point, Springer Lect. Notes n° 243 (1971), pp. 148-168.
- [13] A. TREIBICH, Appendice à l'exposé n°3 , Séminaire ENS, 1978-79, Paris.
- [14] K. UENO, Monodromy preserving deformations of linear differential equations with irregular singular points, R.I.M.S. 301, Kyoto University (1979).

(mars 81)