YVES COLIN DE VERDIÈRE

# Chapitre III Calcul des variations

*Cours de l'institut Fourier*, tome 18 (1982-1983), p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1982-1983__18__A3_0>

# *CHAPITRE III*

# CALCUL DES VARIATIONS

Bibliographie pour le chapitre III :

[A], [M], [S] et aussi [Me] : Yves MEYER, Calcul des variations (Ecole Polytechnique 1981).

## 1. - TRANSFORMATION DE LEGENDRE.

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie, $E^*$ son dual. Si $L \in C^2(E;\mathbb{R})$, on lui associe une application $\mathcal{L}_L : E \to E^*$ définie par $\mathcal{L}_L(v) = L'(v)$. Si $E = \mathbb{R}^n$ et $E^*$ est identifié à $\mathbb{R}^n$ par la base duale, on a :

$$\mathcal{L}_L(v_1,\dots,v_n) = \left(\frac{\partial L}{\partial v_1}(v_1,\dots,v_n),\dots,\frac{\partial L}{\partial v_n}(v_1,\dots,v_n)\right) .$$

$\mathcal{L}_L$ est la <u>transformation de Legendre</u> associée à $L$.

Par exemple, si $L(v) = \frac{1}{2}\langle Gv|v\rangle$ où $G : E \to E^*$ est une matrice symétrique, on a : $\mathcal{L}_L = G$.

On suppose dans la suite que $\mathcal{L}_L$ est un <u>difféomorphisme de</u> E <u>sur</u> $E^*$. (On pourrait supposer que c'est seulement un difféomorphisme d'un ouvert de $E$ sur un ouvert de $E^*$).

On introduit alors une fonction $H$ sur $E^*$ définie par :

$$H(\xi) = \langle \xi | \mathcal{L}_L^{-1}(\xi)\rangle - L(\mathcal{L}^{-1}(\xi)) .$$

On a alors : $\mathcal{L}_H = (\mathcal{L}_L)^{-1}$.

En effet : $dH = \xi dv + v d\xi - dL$ et par définition : $\xi dv = dL$ : donc $dH = v d\xi$.

Dans l'exemple précédent, on a : $H(\xi) = \frac{1}{2}\langle G^{-1}\xi\,|\xi\rangle$ et $\mathcal{L}_H = G^{-1}$.

Si $G$ est définie positive, $\mathcal{L}_L$ est l'isomorphisme de $E$ sur $E^*$ donné par la structure euclidienne de matrice $G$ et $H$ est la structure euclidienne transportée sur $E^*$ par cet isomorphisme.

En coordonnées locales : $L(v_1,\dots,v_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}v_iv_j$ où $(g_{ij})$ est symétrique définie positive et

$$H(\xi_1,\dots,\xi_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij}\xi_i\xi_j$$

où $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ .

Soit maintenant $L \in C^2(TX;\mathbb{R})$ où $X$ est une variété différentiable. Pour $x \in X$ , $L\restriction_{T_xX} : T_xX \to \mathbb{R}$ : on peut ainsi définir $\mathcal{L}_{L_x} : T_xX \to T_x^*X$ et en le faisant pour chaque $x$ , on obtient

$$\mathcal{L}_L : TX \to T^*X .$$

Si $\mathcal{L}L_x$ est un difféormorphisme pour chaque $x \in L$ , il est clair que $\mathcal{L}_L$ est un difféomorphisme de $TX$ sur $T^*X$ .

Par exemple si $L(x,v) = \frac{1}{2}\sum g_{ij}(x)v_iv_j$ (métrique riemannienne sur $X$ ), on a :

$$\mathcal{L}_L(x,v) = (x,\sum_j g_{ij}v_j)$$

et $$H(x,\xi) = \frac{1}{2}\sum g^{ij}(x)\xi_i\xi_j .$$

Dans le contexte précédent :

$L$ s'appelle le <u>lagrangien</u>,

$H$ l'<u>hamiltonien</u>,

et $H\circ\mathcal{L} = E$ l'<u>énergie</u>.

Si $(x,v) \in TX$ et $(x,\xi) = \mathcal{L}_L(x,v)$ : $\begin{cases} x & \text{s'appelle la } \underline{\text{position}} \\ v & \text{la } \underline{\text{vitesse}} \\ \xi & \text{l'}\underline{\text{impulsion}}. \end{cases}$

## 2. - EQUATIONS D'EULER-LAGRANGE.

On se donne un lagrangien $L : TX \to \mathbb{R}$ et on cherche les extrémas de la fonctionnelle $I(\gamma) = \int_0^1 L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt$ où $\gamma : [0,1] \to X$ est un chemin $C^2$ sur $X$ et $\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} \in T_{\gamma(t)}X$, vérifiant des conditions aux limites du type suivant :

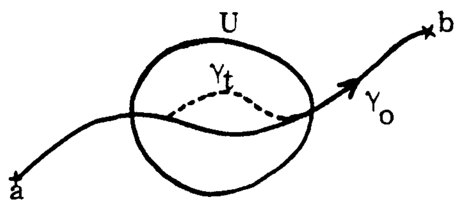
$$\begin{cases} ⓐ \quad \gamma(0) = a \ , \quad \gamma(1) = b \quad (a,b \in X \text{ donnés}) \\ ⓑ \quad \gamma(0) \in X_0 \ , \quad \gamma(1) \in X_1 \quad (X_0, X_1 \text{ sous-variétés fermées de } X) \\ ⓒ \quad \gamma(a) = \gamma(b) \quad (\gamma \text{ fermé}). \end{cases}$$

PROPOSITION. - Supposons qu'un chemin $C^2$, $\gamma$ soit un extremum local de $I(\gamma)$ parmi les $\gamma$ vérifiant une des conditions au bord du type précédent, alors on a, en coordonnées locales :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma, \dot{\gamma})\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(\gamma, \dot{\gamma}) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1,\dots,n$$

(équations d'Euler-Lagrange).

Preuve. - Soit $x_0 = \gamma(t_0)$ et $(U,\varphi)$ une carte au voisinage de $x_0$, on ne considère que des variations de $\gamma$ dans $U$, on peut donc travailler en coordonnées locales




On pose $\gamma_s(t) = \gamma_0(t) + sX(t)$. Il vient :

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} I(\gamma_s) = \int_0^1 \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}(\gamma_0, \dot{\gamma}_0).X_i + \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0, \dot{\gamma}_0)\dot{X}_i\right)dt \ .$$

Soit en intégrant par parties et en utilisant le fait que $X$ est nul au voisinage de 0 et 1 :

$$\frac{d}{ds} I(\gamma_s)\Big|_{s=0} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}(\gamma_0, \dot{\gamma}_0) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_0, \dot{\gamma}_0)\right)\right). X_i(t)dt \ .$$

Comme $\frac{d}{ds} I(\gamma_s)|_{s=0} = 0$ pour tout choix de $X_i$, on en déduit les équations d'Euler-Lagrange.

DEFINITION. - Toute solution des équations d'Euler-Lagrange s'appelle une extrémale de $I$.

Problème.

① Existe-t-il une extrémale vérifiant les conditions aux limites données ? Réponse : pas toujours.

② S'il en existe, en existe-t-il réalisant effectivement le minimum de $I(\gamma)$ ? Réponse : pas toujours.

On résoudra ces problèmes dans le § suivant pour la recherche des géodésiques joignant deux points.

Remarque. - Cas d'une variation non fixée aux extrémités.

Dans ce cas l'intégration par parties fait apparaître des termes tout intégrés :

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} I(\gamma(s)) = \left[\sum X_i \cdot \frac{\partial L}{\partial v_i}(\gamma_o, \dot{\gamma}_o)\right]_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)\right) \cdot dt .$$

Equations canoniques. Supposons que $\mathcal{L}_L$ soit un difféomorphisme, on peut transformer les équations différentielles d'Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = v_i \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial v_i}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x_i} \end{cases}$$

au moyen de la transformation de Legendre, on obtient :

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i = \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \qquad (\text{car } \mathcal{L}_L^{-1} = \mathcal{L}_H)$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\langle \xi | v \rangle - H(x, \xi))$$

$$= \sum \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \xi_j} - \frac{\partial H}{\partial x_i} - \sum \frac{\partial H}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} .$$

D'où : si $(x(t), \dot{x}(t))$ est une extrémale de $I(\gamma)$ , $(x(t), \xi(t)) = \mathcal{L}_L(x(t), \dot{x}(t))$ vérifie les équations canoniques assoicées à l'hamiltonien $H$ .

On est passé du formalisme lagrangien (équations d'Euler-Lagrange) au formalisme hamiltonien qui présente l'avantage d'être beaucoup plus simple : stable par transformation canonique. Le formalisme hamiltonien est également un passage nécessaire pour formuler la mécanique quantique à partir de la mécanique classique (voir plus loin le chapitre sur la quantification).

## 3. - GEODESIQUES D'UNE METRIQUE RIEMANNIENNE.

(a) Variétés riemanniennes.

(b) Energie et longueur : géodésiques.

(c) Les géodésiques réalisent localement le minimum de la longueur.

(d) Théorème de Hopf-Rinow : variétés complètes.

(a) Une métrique riemannienne $g$ sur une variété $C^\infty X$ est une 2-forme symétrique définie positive : autrement dit, c'est la donnée sur chaque espace tangent $T_x X$ de $X$ d'une structure euclidienne. En coordonnées locales, on a : $g = ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx_i \circ dx_j$ où $\circ$ est le produit symétrique des formes linéaires et la matrice $g_{ij}(x)$ est symétrique définie positive. ( $g_{ij}(x) = g_x(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ ).

Ex. : (i) $X = \mathbb{R}^n$ , $ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$ : métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ .

(ii) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y>0\}$ , $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ : métrique hyperbolique sur le $\frac{1}{2}$ plan de Poincaré.

(iii) Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété, $T_x X$ s'identifie naturellement à un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et donc est muni d'une structure d'espace euclidien.

Cas des surfaces $\subset \mathbb{R}^3$ : soit $X$ paramétrée pour $(u,v) \mapsto M(u,v)$, on pose :

$$E = \left\|\frac{\partial M}{\partial u}\right\|^2 , \quad F = \left\langle \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}\right\rangle \quad \text{et} \quad G = \left\|\frac{\partial M}{\partial v}\right\| ,$$

on a :

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 ,$$

c'est la 1ère forme fondamentale de la surface. Ex. : $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, surfaces de révolution, ellipsoïdes,...

(iv) Soit $\Gamma$ un réseau de $\mathbb{R}^n$, les translations de $\Gamma$ préservent la structure euclidienne : cela permet d'équiper le tore $\mathbb{R}^n/\Gamma$ de la structure riemannienne quotient.

Si $\gamma : [0,1] \to X$ est un chemin $C^1$ on peut définir la longueur de $\gamma$ par

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))}\, dt$$

où $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}X$ est la vitesse de $\gamma$. Il est facile de vérifier que cette définition ne dépend pas du paramétrage choisi.

On pose, pour $a,b \in X$, $d(a,b) = \inf_{\gamma \in \Omega_{a,b}} \ell(\gamma)$ où $\Omega_{a,b}$ désigne l'ensemble des chemins qui joignent $a$ à $b$. On vérifie aisément que $(X,d)$ est un <u>espace métrique</u>.

b Est-ce qu'il existe une courbe $\gamma \in \Omega_{a,b}$ telle que $\ell(\gamma) = d(a,b)$ ? On cherche à minimiser $\ell(\gamma)$, mais ce n'est pas aisé car $\ell(\gamma)$ est invariant par changement de paramétrisation de $\gamma$. On introduit l'<u>énergie</u> (cinétique) de $\gamma$ définie par $E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))dt$, on a alors :

THEOREME.- <u>Pour tout</u> $\gamma$, $(\ell(\gamma))^2 \leq 2E(\gamma)$ <u>et on a égalité si et seulement si</u> $g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = c^{te}$.

COROLLAIRE. - $(d(a,b))^2 = \inf_{\gamma\in\Omega_{a,b}} \ell(\gamma)^2 = 2 \inf_{\gamma\in\Omega_{a,b}} E(\gamma)$ .

Preuve. - $(\ell(\gamma))^2 = (\int_0^1 \|\dot{\gamma}\|.1.dt)^2 \leq (\int_0^1 \|\dot{\gamma}\|^2 dt)(\int_0^1 1^2 dt) = 2E(\gamma)$ d'après Cauchy-Schwartz et égalité seulement si $\|\dot{\gamma}\| = c^{te}$ .

Les extrêmales de $E(\gamma)$ (i.e. les solutions de l'équation d'Euler-Lagrange de ce problème) s'appellent les géodésiques.

L'équation en coordonnées locales est :

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{j,k} A^i_{jk}(x).\frac{dx_j}{dt}.\frac{dx_k}{dt}$$

où les $A^i_{jk}$ sont $C^\infty$ : la théorie générale des équations différentielles nous dit que si $(\gamma(0),\dot{\gamma}(0)) \in T_{\gamma(0)}X$ sont données, cette équation admet une solution maximale unique $\gamma$ vérifiant ces conditions aux limites : il existe une unique géodésique d'origine donnée et de vitesse initiale donnée. On remarque aussi que si $\gamma(t)$ est une géodésique, $\gamma(ct)$ en est une autre.

La transformation de Legendre est $(x,v) \to (x,\xi)$ où $v \to \xi$ est l'isomorphisme de $T_xX$ sur $T^*_xX$ donné par la structure euclidienne $g_x$ . On a $H(x,\xi) = \frac{1}{2} g^*(x,\xi) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij}(x)\xi_i\xi_j$ où $g^{ij}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}$ et les équations canoniques :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial g^*}{\partial \xi_i} \quad \text{et} \quad \frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{\partial g^*}{\partial x_i} .$$

De la conservation de $g^*$ le long de $\mathcal{L}(\gamma)$ où $\gamma$ est une géodésique, on déduit facilement $g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = c^{te}$ si $\gamma$ est une géodésique. En particulier, si $\gamma(t)$ est maximale on a ou bien $\gamma(t)$ définie sur $[0,+\infty[$ ou $\gamma(t)$ définie sur $[0,\alpha[$ $(\alpha<+\infty)$ et $\lim_{t\to\alpha}\gamma(t) = \infty_X$ .

DEFINITION. - $(X,g)$ est géodésiquement complète si toutes les géodésiques maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ entier.

D'après ce qui précède, toute variété compacte et toute sous-variété riemannienne fermée de $\mathbb{R}^n$ a cette propriété. Un ouvert de

$\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne n'est pas géodésiquement complet.

Formule de la variation première.

Soit $\gamma(s,t) \in X$ une application $C^2$ de $]-\varepsilon,\varepsilon[ \times [0,1]$ dans $X$ telle que $\gamma_o(t) = \gamma(0,t)$ soit une géodésique, on pose $X(i) = \frac{\partial\gamma}{\partial s}(0,i)$ $(i=0,1)$ . On a :

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(\gamma(s,\cdot)) = \langle X(1), \dot{\gamma}_o(1)\rangle_{g(\gamma_o(1))} - \langle X(0), \dot{\gamma}_o(0)\rangle_{g(\gamma_o(0))} .$$

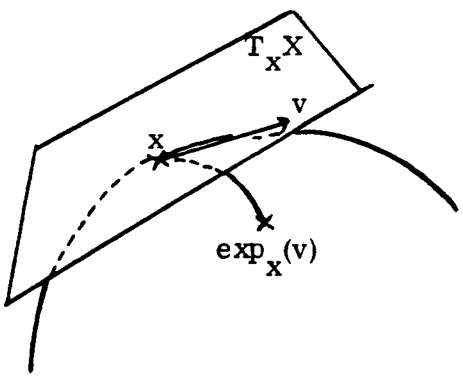
Cela résulte du calcul fait pour obtenir les équations de Lagrange en tenant compte cette fois-ci des termes tout intégrés dans l'intégration par parties.

c) Application exponentielle. Si $(x,v) \in TX$ il existe une unique géodésique $\gamma(t)$ telle que $\gamma(0) = x$ , $\dot{\gamma}(0) = v$ : on pose, si $\gamma$ est définie jusqu'au point $1$ , $\exp_x(v) = \gamma(1)$ .

L'application $\exp_x : U \to X$ est définie sur un ouvert étoilé $U$ de $T_xX$ . Elle est différentiable et on a :

$(\exp'_x)(0) : T_xX \to T_xX$ est l'application identité.

En effet si $v \in T_xX$ ; $\exp_x(tv) = \gamma(t)$ et $\dot{\gamma}(0) = v$




En particulier, d'après le théorème d'inversion locale, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\exp_x : B_x(0,\varepsilon) \to U_x \subset X$ est un difféomorphisme où $B_x(0,\varepsilon) = \{v \in T_x(X) \mid g_x(v) < \varepsilon\}$ et $U_x$ est un voisinage de $x$ dans $X$ .

PROPOSITION. - Soit $a \in X$ et $\varepsilon > 0$ comme précédemment alors si $b \in U_a$ , et $v_o \in B_a(0,\varepsilon)$ tel que $\exp_a(v_o) = b$ , on a : $d(a,b) = \sqrt{g_a(v_o)}$ et c'est la longueur de la géodésique $\gamma(t) = \exp_a(tv_o)$ .

COROLLAIRE. - La topologie définie par $d_g$ coïncide avec la topologie usuelle de $X$ .

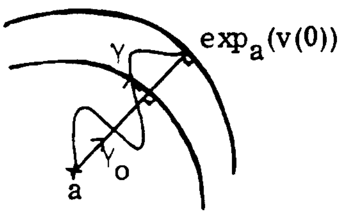
Preuve du corollaire. - On a évidemment, d'après la proposition, que $\exp_a(B(0,\varepsilon_1)) \subset B_d(a,\varepsilon_1)$ pour $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ et les $\exp_a(B(0,\varepsilon_1))$ forment une base de voisinages de $a$ pour la topologie usuelle de $X$ . Soit maintenant $b$ tel que $d(a,b) < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ ; si $b \notin \exp_a(B(0,\varepsilon_1))$ tous les chemins de $a$ à $b$ rencontrent la sphère $\exp_a(S(0,\varepsilon_1))$ et donc sont de longueur $\geq \varepsilon_1$ : ce qui est contradictoire. Donc $\exp_a(B(0,\varepsilon_1)) = B_d(a,\varepsilon_1)$ , $\forall \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$ .

Preuve de la proposition. - Soit $s \to v(s)$ telle que $\|v(s)\| = \alpha < \varepsilon$ une courbe $C^2$ tracée sur la sphère de centre $0$ et de rayon $\alpha$ de $T_aX$ . Ces courbes $\gamma_s(t) = \exp_a(tv(s))$ ont une énergie constante, donc la formule de la variation première implique l'orthogonalité de $\dot{\gamma}_s(1)$ et de la sphère $\exp_a(S(0,\alpha))$ (lemme de Gauss).

Si on utilise des coordonnées polaires $(r,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ dans $T_aX$ et $(r,\omega) \to \exp_a(r.\omega)$ au voisinage de $a$ , on a :

$$ds^2 = dr^2 + g(r,\omega)$$

où $g(r,\omega)$ est une métrique riemannienne sur la sphère de rayon $r$ . A partir de là, on voit que tout chemin $(r(t),\omega(t))$ de $0$ à $(r_o,\omega_o)$ a une longueur plus grande que le chemin $(r(t),\omega_o)$ , d'où la proposition.



(d) On a le :

THEOREME (de Hopf-Rinow). - $(X,g)$ <u>variété riemannienne connexe. On a</u> ( (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ) $\Rightarrow$ (iii)

(i) $(X,d)$ <u>est un espace métrique complet</u>.

(ii) $(X,g)$ <u>est géodésiquement complète</u>.

(iii) <u>Pour tout</u> $a,b \in X$ , <u>il existe une géodésique</u> $\gamma \in \Omega_{a,b}$ <u>telle que</u> $\ell(\gamma) = d(a,b)$ .

<u>Remarque</u>. - Si $(X,g)$ est une variété riemannienne non complète, il peut arriver qu'il n'existe qu'une géodésique joignant $a$ à $b$ et de longueur $> d(a,b)$ .

Lorsque $(X,g)$ est complète, il n'y a pas nécessairement unicité de la géodésique réalisant la distance (cas des 2 pôles d'une sphère).

<u>Preuve</u>. - On va montrer que :

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) , ((iii) et (ii)) $\Rightarrow$ (i) .

(i) $\Rightarrow$ (ii) : soit $\gamma : ]\alpha,\beta[ \to X$ une géodésique maximale avec $\beta < +\infty$ , on pose $x_n = \gamma(\beta - \frac{1}{n})$ . Il est clair que si $\|\dot{\gamma}\| = C$ on a $d(x_n, x_m) \leq C(\frac{1}{n} - \frac{1}{m})$ , donc $x_n$ a une limite $\ell \in X$ , ce qui contredit $\lim_{t \to \beta^-} \gamma(t) = \infty_X$ .

((iii) et (ii)) $\Rightarrow$ (i) : en effet, on a alors $\bar{B}(a,R) = \exp_a(\bar{B}(0,R))$ et donc les boules fermées de $(X,d)$ sont compactes.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : soit $a \in X$ et $\epsilon > 0$ comme plus haut : $\forall p$ tel que $d(a,p) \leq \epsilon$ , il existe $\gamma$ géodésique de $a$ à $p$ réalisant la distance. Soit $p_\epsilon \in S(a,\epsilon)$ tel que $d(p_\epsilon, b) = \inf_{p \in S(a,\epsilon)} d(p,b)$ . Soit $v$ tel que $\exp_a(\epsilon v) = p_\epsilon$ et $p_t = \exp_a(tv)$ .

On va montrer que si $d_o = d(a,b)$ on a $p_d = b$ et donc la géodésique $\exp_a(tv)\restriction_{[0,\alpha]}$ réalise la distance de a à b .

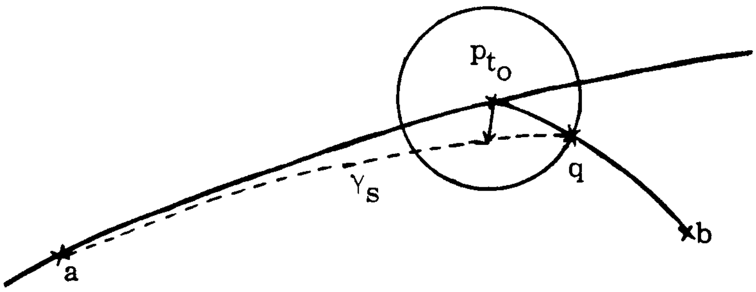
Soit $A = \{t \mid d(p_t, b) = d-t\}$ . Il est clair que A est fermé. Montrons que $\varepsilon \in A$ et que si $t_o = \sup A$ , il existe $\varepsilon_1$ tel que $t_o + \varepsilon_1 \in A$ .

Si $\gamma \in \Omega_{a,b}$ , $\gamma$ coupe $S(a,\varepsilon)$ en un point p , on a donc :

$$d(a,b) = \varepsilon + \inf_{p \in S(a,\varepsilon)} d(p,b) = \varepsilon + d(p_\varepsilon, b) .$$

Soit $\varepsilon_1$ tel que $\exp_{p_{t_o}}$ soit un difféomorphisme de la boule $\overline{B}(0,\varepsilon_1)$ de $T_{p_{t_o}}X$ sur $\overline{B}(p_{t_o}, \varepsilon_1)$ et q tel que

$$d(q,b) = \inf_{q' \in S(p_{t_o}, \varepsilon_1)} (d(q',b)) .$$




On a par le même raisonnement $d(p_{t_o}, b) = \varepsilon_1 + d(q,b)$ et donc $d(a,q) = t_o + \varepsilon_1$ = longueur du chemin obtenu en parcourant successivement $\exp_a(tv)\restriction_{[0,t_o]}$ et la géodésique minimisante de $p_b$ à q : il suffit donc de montrer qu'il n'y a pas d'angle en $p_{t_o}$ , ce qui résulte de la variation première : on pourrait sinon construire $\gamma_s$ de a à q telle que $\frac{d}{ds} E(\gamma_s) < 0$ .

Exercice 1. Déterminer la transformation de Legendre et l'hamiltonien associés aux lagrangiens définis en coordonnées locales par :

$$\begin{cases} L(x,v) = \frac{1}{2}m\sum v_i^2 - V(x) \\ L(x,v) = \frac{1}{2}\sum g_{ij}(x)v_iv_j - V(x) \\ L(x,v) = \frac{1}{2}\sum (v_i - a_i(x))^2 . \end{cases}$$

(Dans ce cas, calculer les équations canoniques associées à l'hamiltonien $H$ et montrer que les trajectoires $x(t)$ ne changent pas si on remplace $a_i$ par $b_i = a_i + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ où $\varphi$ est une fonction de $(x_1,\ldots,x_n)$ ).

Exercice 2. Soit $F : E \to E^*$ un difféomorphisme, à quelles conditions portant sur les dérivées partielles de $F$ est-ce une transformation de Legendre ?

Exercice 3. Soit $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ . Prouver que si $\mathcal{L}$ est un difféomorphisme, $f$ ou $-f$ est strictement convexe. La réciproque est-elle vraie ? Même problème avec $f \in C^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ .

Exercice 4. Chercher les extrêmales du problème $I(y) = \int_{-1}^{+1} x^4 (y')^2 dx$ . Calculer le $\inf I(y)$ où $y$ vérifie $y(1) = 1$ et $y(-1) = -1$ . Conclusion ?

Même problème pour $I_\delta(y) = \int_{-1}^{+1} (x^2(y')^2 + \delta y^2)\, dx$ $(\delta > 0)$ . Que se passe-t-il quand $\delta \to 0^+$ .

Exercice 5. Prouver que si $g = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$ sur $\mathbb{R}^n$ la distance associée à $g$ est la distance euclidienne.

Exercice 6. Prouver que les géodésiques de $S^2$ avec la métrique induite par $\mathbb{R}^3$ sont les grands cercles. Calculer la distance de deux points.

Exercice 7. Pour quelles valeurs de $\alpha$ la métrique $y^\alpha(dx^2 + dy^2)$ sur $\{(x,y) \mid y > 0\}$ est-elle complète ?

Dans le cas $\alpha = 2$ , chercher l'équation des géodésiques et la condition pour que les deux points $(x_0, 1)$ et $(x_1, 1)$ puissent être joints par une géodésique. Quelle est la distance de ces deux points ?

Exercice 8. Chercher les géodésiques de la métrique $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ sur $\{(x,y) \mid y>0\}$ . Tracer sur une même figure les géodésiques issues de $(0,1)$ et les sphères géodésiques centrées en ce point. Calculer la distance $d((x,y),(x',y'))$ .

Exercice 9. Soit $C = \{x^2+y^2=z^2 \mid z>0\}$ . Cette variété est-elle complète avec la métrique induite par $\mathbb{R}^3$ ? Chercher les géodésiques.

Exercice 10. Etudier les géodésiques d'un tore de révolution.

Exercice 11. Soit $a \in X$ où $X$ est une variété riemannienne de dimension 2 . Soit $(r, \theta)$ un système de coordonnées polaires de l'espace euclidien $(T_a X, g_a)$ et $m(r, \theta) = \exp_a(r u_\theta)$ : prouver que la métrique s'écrit : $ds^2 = dr^2 + r^2 A(r, \theta) d\theta^2$ avec $A(r, \theta) = 1 - \frac{1}{3} kr^2 + 0(r^4)$ où le nombre $k$ définit la courbure de $X$ en $a$ .

Donner l'expression exacte de $A$ dans le cas de $\mathbb{R}^2$ , $S^2$ et le $\frac{1}{2}$ plan de Poincaré avec la métrique hyperbolique.

Exercice 12. Est-ce que la condition (iii) du théorème de Hopf-Rinow implique les deux autres ? Donner un contre-exemple.

Exercice 13. Soit $U$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière $C^\infty$ , on pose $\delta(x) = d(x, \text{bord}(U))$ .

1) Prouver que $\delta$ est $C^\infty$ près du bord.

2) Prouver qu'on peut trouver une métrique riemannienne sur $U$ $g = \varphi(\delta)(dx_1^2 + \ldots + dx_n^2)$ qui soit complète et euclidienne en dehors d'un voisinage arbitrairement petit au bord.

III. 16