Cours de l'institut Fourier

Yves Colin de Verdière

Chapitre IV Systèmes hamiltoniens complètement intégrables

Cours de l'institut Fourier, tome 18 (1982-1983), p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1982-1983__18__A4_0>

CHAPITRE IV

SYSTEMES HAMILTONIENS COMPLETEMENT INTEGRABLES

Bibliographie

[A] , [A-A] , [S-M]

Pour des travaux récents sur les systèmes complètement intégrables :

[F-Z] Faddeev-Zakharov ; Functional Analysis and its applications 5 (1971), 280-287.

[K-K-S] Kazhdan-Kostant-Sternberg ; Comm. on Pure and Applied Math. 31 (1978), 481-507.

L'étude globale des trajectoires d'un système hamiltonien, et notamment le comportement quand $t \to +\infty$ est un problème important aussi bien en mécanique qu'en géométrie différentielle (géodésiques).

Deux cas extrêmes apparaissent :

1) Le cas complètement intégrable où les trajectoires sont canalisées par l'existence d'un nombre maximal d'intégrales premières ; les trajectoires sont alors périodiques ou quasi-périodiques. Les exemples classiques sont le problème à 2 corps avec un potentiel ne dépendant que de la distance, les géodésiques d'une surface de révolution ou d'une ellipsoïde. Il est apparu récemment (depuis 1970) un grand nombre de nouveaux exemples, notamment en dimension infinie (équation de Korteweg-de Vries).

2) Le cas ergodique où, pour presque toute donnée initiale, la trajectoire est partout dense dans l'hypersurface $\{H = E\}$. L'exemple le plus simple étant le problème des géodésiques sur une variété à courbure constante négative de volume fini (voir chapitre 5).

Entre ces deux extrêmes apparaissent des cas "quasi-intégrables" où se trouvent réunis des régions d'ergodicité et des régions de stabilité. L'étude de ces cas est extrêmement difficile. Le résultat le plus célèbre est connu sous le nom de théorème K.A.M. (Kolmogorov, Arnold, Moser) dont nous dirons quelques mots sur un exemple.

1. - SYSTEMES COMPLETEMENT INTEGRABLES ; QUASI-PERIODICITE.

DEFINITIONS. - (X,ω) est une variété symplectique de dimension $2n$. Un système complètement intégrable est la donnée d'une sous-algèbre $\mathcal{G}$ de $C^\infty(X;\mathbb{R})$ du type suivant : il existe des fonctions $f_1,\dots,f_n \in \mathcal{G}$ (base de $\mathcal{G}$) telles que :

(i) les $df_i(x)$ sont linéairement indépendantes dans un ouvert dense Ω de X ;

(ii) $\forall i, j = 1, 2, \ldots, n$, $\{f_i, f_j\} = 0$;

(iii) les champs H_{f_i} sont complets ;

(iv) $\mathcal{A}$ est l'ensemble des $\Phi(f_1, \ldots, f_n\}$ où Φ est une fonction C^∞ de n variables réelles.

Si $f \in C^\infty(X)$ est un hamiltonien, on dira qu'il est complètement intégrable s'il appartient à une algèbre $\mathcal{A}$ du type précédent (pas nécessairement unique).

Si $T : X \to X$ est un difféomorphisme canonique, on dit que T est complètement intégrable s'il existe $\mathcal{A}$ complètement intégrable telle que pour toute $f \in \mathcal{A}$, $f \circ T = T$.

Les algèbres $\mathcal{A}$ complètement intégrables ont les propriétés suivantes : on pose pour $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $X_a = \{x \in X | f_1(x) = a_1, \ldots, f_n(x) = a_n\}$.

① $X_a \cap \Omega$ est une sous-variété lagrangienne de X ;

② $\forall f, g \in \mathcal{A}$, $[H_f, H_g] = 0$;

③ Si $x_0 \in X_a$ et $f = \Phi(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{A}$, on a, en désignant par φ_t^i le flot de H_{f_i} , φ_t celui de H_f et $\alpha_i = \frac{\partial \Phi}{\partial f_i}(f_j(x_0))$,
$\varphi_t(x_0) = \varphi^1_{\alpha_1 t} \circ \ldots \circ \varphi^n_{\alpha_n t}(x_0)$.

④ Si $\Omega = X$ et que les X_a sont connexes, toute $f \in C^\infty(X)$ telle que, $\forall g \in \mathcal{A}$, $\{f, g\} = 0$, est dans $\mathcal{A}$.

Les algèbres $\mathcal{A}$ sont donc des sous-algèbres commutatives maximales de $(C^\infty(X), \{\ \})$.

Preuves. ① Il est clair que $(f_1, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une submersion et donc les $X_a \cap \Omega$ sont des sous-variétés de dimension n de X . De plus $df_i(H_{f_j}) = 0$, donc les H_{f_i} sont dans l'espace tangent à X_a ; comme ils sont indépendants, ils forment une base de l'espace tangent et la relation $\omega(H_{f_i}, H_{f_j}) = \{f_i, f_j\}$ prouve que X_a est lagrangienne.

② Si $f = \Phi(f_i)$ et $g \in \psi(f_i)$, on a :

$$\{f,g\} = \sum \frac{\partial\Phi}{\partial f_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial f_j}\{f_i,f_j\} = 0 .$$

③ Comme $df_i(H_{f_j}) = 0$, on a pour tout t, $f_i(\varphi_t(x_0)) = f_i(x_0) = a_i$ et donc $H_f = \sum \alpha_i H_{f_i}$ le long de la trajectoire de x_0. Comme les H_{f_i} commutent, on a le résultat annoncé.

④ De la relation $\{f,f_i\} = 0$, on déduit que $df\restriction_{X_a} \equiv 0$ et donc f est constante sur chaque X_a. Le théorème des fonctions implicites permet alors de conclure.

DEFINITION. - Une application $t \mapsto x(t)$ de $\mathbb{R}$ dans une variété (ou un espace topologique) X est dite <u>quasi-périodique</u> s'il existe une application $\Phi : (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^k \to X$, C^∞ (ou continue) et des nombres réels ω_i tels que : $x(t) = \Phi(\omega_1 t,\dots,\omega_k t)$.

Un mouvement périodique est quasi-périodique avec $k=1$.

THEOREME. - <u>Si</u> $\mathcal{A}$ <u>est une algèbre complètement intégrable et</u> $f \in \mathcal{A}$ <u>toute trajectoire</u> $x(t)$ <u>de</u> H_f <u>est quasi-périodique si</u> $x(0) \in X_a$ <u>où</u> X_a <u>est compacte</u> $\subset \Omega$.

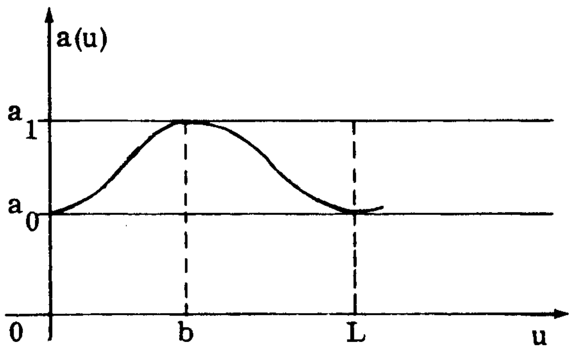
<u>Preuve</u>. Si $(t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in X$, on pose $(t_1,\dots,t_n)\cdot x_0 = \varphi^1_{t_1} \circ \dots \circ \varphi^1_{t_n}(x_0)$. Cela définit une action de $\mathbb{R}^n$ sur X. Les orbites sont ouvertes dans $X_a \cap \Omega$ et donc si $X_a \subset \Omega$ est compacte, chaque composante connexe de X_a est une orbite. On en déduit que pour $x_0 \in X_a$ le groupe d'isotropie de x_0 est un réseau Γ de $\mathbb{R}^n$; x_0 étant fixé, on peut choisir la base $(f_1,\dots,f_n)$ de façon que $\Gamma = 2\pi\cdot\mathbb{Z}^n$ (changement linéaire de base). On pose alors $\Phi(t_i) = \varphi^1_{t_1} \circ \dots \circ \varphi^n_{t_n}(x_0)$ et si $f = \psi(f_i)$, $\omega_i = \frac{\partial\psi}{\partial f_i}(a_j)$: on obtient ainsi la quasi-périodicité.

<u>Remarque</u>. Ce théorème de quasi-périodicité est un critère pratique permettant d'entrevoir la possibilité qu'un hamiltonien soit complètement intégrable.

2. - EXEMPLES DE SYSTEMES COMPLETEMENT INTEGRABLES.

Exemple 1. - Surfaces de révolution.

On considère sur le tore $X = \mathbb{R}/L\cdot\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ muni des coordonnées locales u (mod. L) et v (mod. 2π) la métrique riemannienne $g = a^2(u)\,dv^2 + du^2$ où a est une fonction > 0 dont le graphe a l'allure suivante :



Par exemple $a(u) = A - \frac{L}{2\pi}\cos\frac{2\pi u}{L}$ $(0 < L < 2\pi\cdot A)$ correspond au tore de révolution usuel dans $\mathbb{R}^3$.

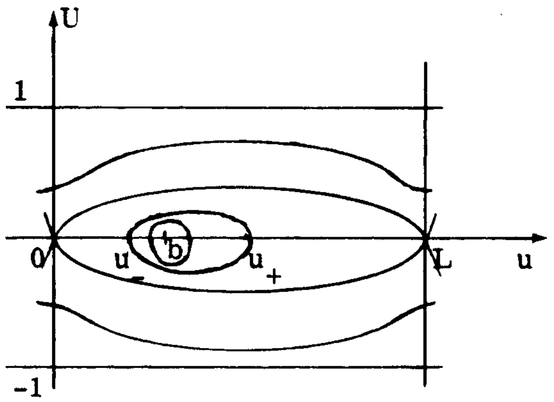
On sait que, via la transformation de Legendre, les géodésiques correspondent aux courbes intégrales de l'hamiltonien $f_1 = \frac{1}{2}g^* = \frac{1}{2}\left(\frac{V^2}{a^2(u)} + U^2\right)$ où $(u,v\,;U,V)$ sont les coordonnées canoniques naturelles sur $T^*(X)$.

Soit $\mathfrak{a}$ l'algèbre des fonctions de f_1 et de $f_2 = V$: $\mathfrak{a}$ est complètement intégrable : il est immédiat que $\{f_1,f_2\} = 0$; comme les lignes de niveau de f_1 sont compactes, on voit que les champs H_f sont complets (en fait $H_{f_2} = \frac{\partial}{\partial v}$) ; les différentielles df_1, df_2 sont linéairement indépendantes sur $\Omega = \{U \neq 0\} \cup \{Va'(u) \neq 0\}$ qui est dense dans T^*X. Utilisant l'homogénéité de f_1 et f_2, on voit qu'il suffit d'étudier les surfaces X_a contenues dans $f_1 = \frac{1}{2}$:

$$X_{V_0} = \left\{ \frac{V_0^2}{a^2(u)} + U^2 = 1\ ,\ V = V_0 \right\} .$$

Soit $\Gamma_{V_0} = (u,U) \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \mid V_0^2 = a(u)^2(1-U^2)$ on a :

$X_{V_0} = \Gamma_{V_0} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{V_0\}$. Les courbes Γ_{V_0} sont représentées sur la figure : ce sont en général des cercles (topologiquement) et donc X_{V_0} est un tore sur lequel les trajectoires sont quasi-périodiques.



Pour $V_0 = a_1$, Γ_{V_0} se réduit au point $(b, 0)$ correspondant à la géodésique périodique $u = b$.

Pour $a_1 > V_0 > a_0$, Γ_{V_0} est un cercle : les géodésiques oscillent entre deux valeurs u_- et u_+ de u situées de part et d'autre de b .

Pour $V_0 = a_0$, Γ_{V_0} présente 1 point singulier correspondant à la géodésique périodique $u = 0$; la partie régulière de Γ_{V_0} donne lieu à des géodésiques asymptotes à cette géodésique périodique.

Pour $V_0 < a_0$, Γ_{V_0} est un cercle qui correspond à des géodésiques s'enroulant en solénoïdes sur le tore X .

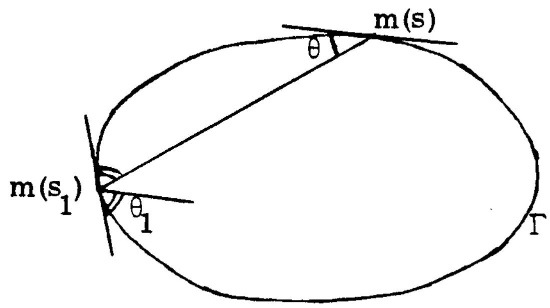
Le cas limite $V_0 = 0$ correspond aux géodésiques $v = c^{te}$ (méridiens).

Exemple 2. - Billard elliptique.

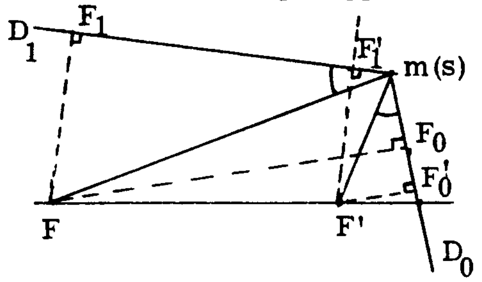
A toute courbe Γ convexe de $\mathbb{R}^2$ on a associé (ex. 8 du chap. 2) une transformation canonique $T : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times]-1,+1[\circlearrowleft$ munie de la structure symplectique $ds \wedge du$ définie par

$$T(s, \cos\theta) = (s_1, \cos\theta_1)$$

au moyen de la figure suivante :

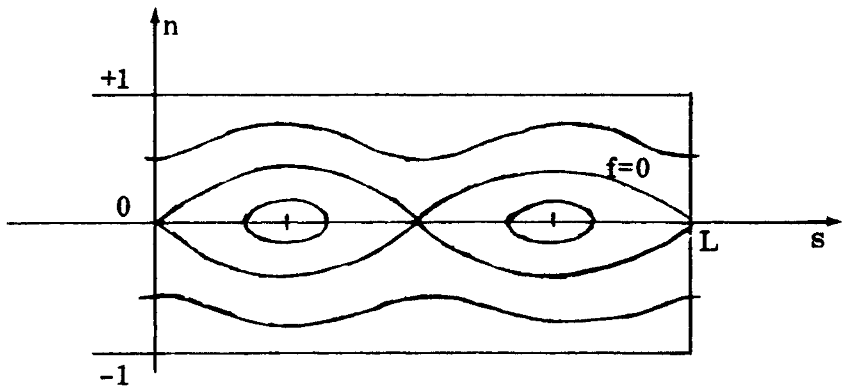


Lorsque Γ est une ellipse cette transformation est complètement intégrable. Rappelons que si Γ est une ellipse de foyer F , F' la tangente en M à Γ est la bissectrice extérieure de l'angle FMF' . Soit D une droite et $\varphi(D)$ le produit des distances algébriques de F et F' à D ($\varphi(D) < 0$ (resp. > 0) si D passe entre F et F' (resp. sinon)). On désigne par $D_{s,\theta}$ la droite qui joint $m(s)$ à $m(s_1)$ et par $f(s,\cos\theta) = \varphi(D_{s,\theta})$, alors f est intégrale première de T : $f \circ T = T$. Cela résulte de quelques triangles semblables qui apparaissent dans la figure suivante :

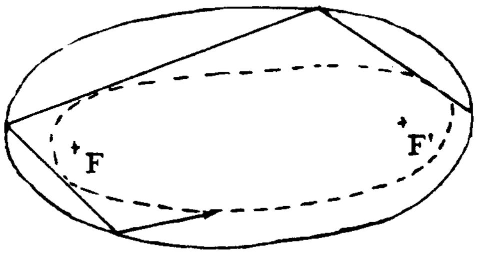


$$\frac{mF'_0}{mF'} = \frac{mF_1}{mF} \quad \text{et} \quad \frac{mF_0}{mF} = \frac{mF'_1}{mF'} \text{ ; cela implique } \varphi(D_0) = \varphi(D_1) .$$

Représentons les lignes de niveaux de $f(s,u)$:



La ligne $f = 0$ qui est singulière correspond aux rayons passant par F ou F' ; la ligne $f = -c^2$ au petit axe de l'ellipse ; si $-c^2 < f < 0$ les droites $D_{s,\theta}$ sont tangentes à une hyperbole ou foyer F et F' , alors que si $f > 0$, elles sont tangentes à une ellipse de foyer F et F' .



3. - COORDONNEES ACTIONS-ANGLES.

THEOREME. Soit $\mathcal{A}$ un système complètement intégrable sur (X, ω) . Soit $a_0 = (a_1^\circ, \dots, a_n^\circ) \in \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe un voisinage U_0 de a_0 et un voisinage V_0 de $X_{a_0} = f^{-1}(a_0)$ tels que $f\restriction_V : V_0 \to U_0$ soit une submersion propre à fibres connexes. Alors il existe un difféomorphisme canonique X d'un voisinage de X_{a_0} sur $((\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n \times W, \omega_0)$ où W est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$ $(q_i \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, p \in W)$ qui transporte $\mathcal{A}$ sur l'algèbre $\mathcal{A}_0$ ayant $(p_1, \dots, p_n)$ comme base. Si α est une primitive de ω dans V_0 on peut prendre $p_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \alpha$ où γ_i est une base de l'homotopie des X_a .

La démonstration utilise le :

LEMME (Ehresmann). Si $f : V_0 \to U_0$ est une submersion propre et que U_0 est difféomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$ il existe un difféomorphisme $\Phi : V_0 \to X_0 \times U_0$ où $X_0 = f^{-1}(u_0)$ $(u_0 \in U_0)$ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "f"'] & & X_0 \times U_0 \arrow[dl, "pr_2"] \\ & U_0 & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. (Autrement dit, une submersion propre est une fibration localement triviale)

Preuve du lemme. On munit V_0 d'une métrique riemannienne g. Pour $u \in U_0$, on pose $X_u = f^{-1}(u)$ et pour $x \in V_0$, on pose $H_x = [\operatorname{Ker} df(x)]^{\perp} \subset T_x V_0$. On construit un difféomorphisme $F_{u_0, u}$ entre X_0 et X_u dépendant différentiablement de u, on pose alors $\Phi(x) = F^{-1}_{u_0, u}(x), f(x))$ avec $u = f(x)$.

Construction de $F_{u_0, u}$. Soit $V = u - u_0 \in \mathbb{R}^n$, on définit un champ de vecteur W sur V_0 par les conditions $f'(x)(W(x)) = V$ et $W(x) \in H_x$. Soit $x_0 \in X_{u_0}$ et φ_t le flot de W, on a : $f(\varphi_t(x_0)) = u_0 + t(u-u_0)$, on en déduit que $\varphi_1 \restriction X_{u_0}$ est bien défini et que c'est un difféomorphisme de X_0 sur X_u d'inverse $\varphi_{-1} \restriction X_u$.

Preuve du théorème. En utilisant le lemme précédent on peut supposer que $V_0 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n \times U_0$ et $f = pr_2$, V_0 étant muni d'une structure symplectique ω. Soit Y la sous-variété $\theta = 0$ de V_0 et pour $y \in Y$, Γ_y le groupe d'isotropie de y pour l'action de $\mathbb{R}^n$ associé aux f_i (voir § 1). Alors Γ_y admet une base $(e_1(y), \dots, e_n(y))$ dépendant différentiablement de y : en effet on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} & 2\pi\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n \arrow[d, "\text{can}"] \\ \Gamma_y \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "\text{action}"'] \arrow[ur, dashed] & (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n \end{tikzcd}$$

qui se complète en un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui envoie Γ_y sur $2\pi \cdot \mathbb{Z}^n$ (unicité du revêtement universel).

On peut donc choisir sur $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n \times U_0$ des coordonnées provisoires (θ_i, π_i) telles que les champs H_{π_i} soient de la forme :

$$H_{\pi_i} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}(\pi) \frac{\partial}{\partial \theta_j} .$$

Soit $\omega = \sum a_{ij}\, d\theta_i \wedge d\theta_j + \sum b_{ij}\, d\theta_i \wedge d\pi_j + \sum c_{ij}\, d\pi_i \wedge d\pi_j$. Comme les tores $\pi = c^{te}$ sont lagrangiens les a_{ij} sont tous nuls.

Calculant H_{π_k} il vient $\sum b_{ij}\alpha_{ki} d\pi_j = d\pi_k$, d'où l'on déduit que les b_{ij} ne dépendent que de π . Ecrivant la condition $dw = 0$, on voit que les $\frac{\partial c_{ij}}{\partial\theta_k}$ ne dépendent que de π et donc comme les c_{ij} sont périodiques en θ , les c_{ij} ne dépendent que de π . On a donc :

$$\omega = \sum b_{ij}(u) d\theta_i \wedge d\pi_j + \sum c_{ij}(\pi) d\pi_i \wedge d\pi_j \ .$$

La condition $dw = 0$ impose de plus : $d(\sum b_{ij}(\pi) d\pi_j) = 0$: on peut donc localement choisir p_i tels que : $-\sum b_{ij} d\pi_j = dp_i$ et comme la matrice (b_{ij}) est inversible (voir plus haut) on peut prendre les p_i comme coordonnées locales sur un voisinage de a_0 . On a alors

$$\omega = \sum dp_i \wedge d\theta_i + \sum c'_{ij}(p)\, dp_i \wedge dp_j = \sum dp_i \wedge (d\theta_i + \alpha_i)$$

avec $d\alpha_i = 0$ et donc $\alpha_i = d\mu_i$, on pose alors $q_i = \theta_i + \mu_i(p)$.

<u>Calcul pratique des</u> p_i . Soit α telle que $d\alpha = \omega$ et $\alpha_0 = \sum p_i dq_i$, on a $d(\alpha - \alpha_0) = 0$ et donc $\int_{\gamma_i} \alpha - \int_{\gamma_i} \alpha_0 = c^{te}$. On peut donc prendre $p_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \alpha = p_i^0 + c_i$.

<u>Application</u>. Soit T une transformation canonique complètement intégrable telle que X soit de dimension 2 ; soit f une intégrale première de T telle que f soit propre et les fibres de f des cercles : il existe alors localement un difféomorphisme de X sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times I$, I ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $T(q,p) = (q + \alpha(p), p)$: la restriction de T aux courbes de niveau de f est conjuguée à une rotation. Cela s'applique en particulier au billard elliptique : si (s_0, θ_0) est telle que $T^k(s_0, \theta_0) = (s_0, \theta_0)$ et si Γ_0 est l'ellipse homoforale à Γ telle que la droite $m(s_i)m(s_{i+1})$ soit tangente à Γ_0 , alors pour tout (s, θ) tel que $D_{s,\theta}$ est tangente à Γ_0 , $T^k(s,\theta) = (s,\theta)$.

4. - UN EXEMPLE DE QUASI-INTEGRABILITE.

Un système hamiltonien sera dit quasi-intégrable s'il est proche d'un système hamiltonien complètement intégrable : plus précisément il s'agit d'étudier le système hamiltonien $h_\epsilon(x)$ pour ϵ petit en supposant que $h_0(x)$ est complètement intégrable.

Il y a deux types de résultats : des résultats sur les trajectoires périodiques, dont le prototype est le théorème de Poincaré-Birkhoff et des résultats sur les trajectoires quasi-périodiques, connus sous le nom de théorème des tores invariants au théorème K.A.M. (Kolmogorov, Arnold, Moser).

L'exemple que nous allons étudier est le suivant : $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [a,b]$ muni de la forme symplectique $dx \wedge dy$ et T_ϵ est une famille de transformations canoniques de X dépendant différentiablement de ϵ. On suppose que $T_0(x,y) = (x+\alpha(y)\ ,\ y)$ où $\alpha \in C^\infty([a,b]), \alpha'(y) > 0$.

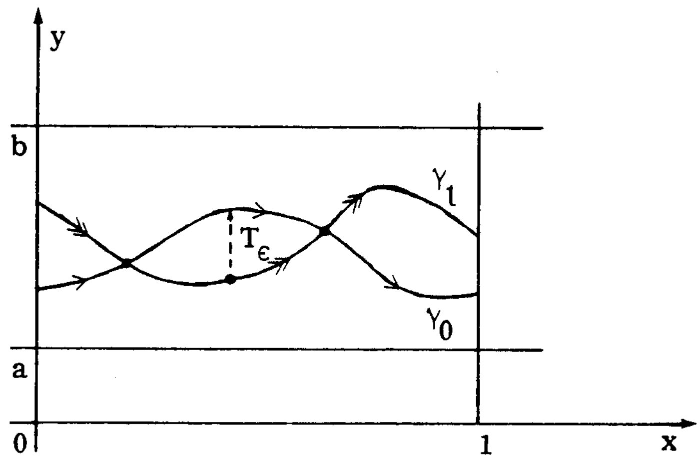
PROPOSITION. <u>Si</u> $\alpha(a) < 0 < \alpha(b)$, <u>l'application</u> T_ϵ <u>admet pour</u> ϵ <u>petit au moins deux points fixes</u>.

<u>Preuve</u>. Ecrivons $T_\epsilon(x,y) = (T_1(x,y,\epsilon), T_2(x,y,\epsilon))$, on peut résoudre en y par le théorème des fonctions implicites l'équation $T_1(x,y,\epsilon) = x$; en effet, si $\alpha(y_0) = 0$, on a : $T_1(x,y_0,0) = x$ et $\frac{\partial T_1}{\partial y}(x,y_0,0) = \alpha'(y_0) \neq 0$: on a donc une fonction $y(x,\epsilon)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times]-\epsilon_0, \epsilon_0[$ telle que $y(x,0) = y_0$ et $T_1(x, y(x,\epsilon), \epsilon) = x$.

Soit $\gamma_0^\epsilon = \{(x, y(x,\epsilon)) \mid x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$ et $\gamma_1^\epsilon = T_\epsilon(\gamma_0^\epsilon)$: par construction $T_\epsilon(x, y(x,\epsilon)) = (x, y_1(x,\epsilon))$. Donc toute intersection de γ_0^ϵ et γ_1^ϵ est un point fixe de T_ϵ . Il reste à prouver que γ_0 et γ_1 se coupent : comme T_ϵ est canonique on a :

$$\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} y_0(x,\epsilon)dx = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} y_1(x,\epsilon)dx$$

et donc la fonction périodique $y_0(x,\epsilon) - y_1(x,\epsilon)$ qui est de moyenne nulle s'annule au moins deux fois.



THEOREME (Poincaré). Soit $\frac{p}{q} \in \left]\alpha(a),\alpha(b)\right[\cap \mathbb{Q}$, alors pour ϵ petit T_ϵ admet au moins deux points de période q.

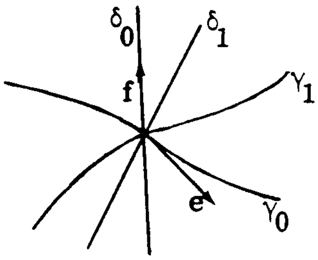
Preuve.

$$T_0^q(x,y) = (x + q\alpha(y) - p\,,y)$$

et donc on peut appliquer à T_ϵ^q la théorie précédente : on considère cette transformation comme une perturbation de T_0^q.

Remarque. En général, il y a $2n$ points de période q dont n elliptiques et n hyperboliques.

Dans la proposition précédente si $\alpha(a) < 0 < \alpha(b)$ et ϵ petit, alors si $\frac{d}{dx}(y_1 - y_0)(x,\epsilon) > 0$, le point fixe (x,y) est hyperbolique, il est elliptique si cette dérivée est négative.



Prenant la base (e,f) indiquée sur la figure on a $T'e = e + cf$, $T'f = ae + bf$ $(a>0)$ et donc $T' = \begin{pmatrix} 1 & a \\ c & b \end{pmatrix}$, $b = 1 + ac$ et $\mathrm{Tr}(T') = 2 + ac$: d'où la discussion suivant le signe de c qui est petit lorsque ϵ l'est.

Dans la situation précédente, la théorème KAM dit ce qui se passe pour les trajectoires quasi-périodiques avec $\alpha(y_0)$ suffisamment irrationnel.

THEOREME. Soit $y_0 \in]a,b[$ tel qu'il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $|\alpha(y_0) - \frac{p}{q}| \geq C \cdot q^{-N}$, alors pour ε suffisamment petit T_ε admet une courbe invariante proche de $y = y_0$ sur laquelle T_ε opère par rotation d'angle $\alpha(y_0)$.

Remarque. Plus q est grand, plus ε doit être choisi proche de 0.