YVES COLIN DE VERDIÈRE

Chapitre V Ergodicité du flot géodésique sur les variétés hyperboliques

Cours de l'institut Fourier, tome 18 (1982-1983), p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1982-1983__18__A5_0>

D.E.A. - Géométrie symplectique
1982-1983

CHAPITRE V

ERGODICITE DU FLOT GEODESIQUE SUR LES VARIETES HYPERBOLIQUES

<u>Bibliographie</u>

[A-A]

E. HOPF, Bull. A.M.S. 77 (1971), p. 863-877.

LEHNER, Discontinuous groups and automorphic functions.

MAGNUS, Non euclidean tesselations and their groups.

C. SERIES, Non euclidean geometry, continued fractions and ergodic theory. Math. Intelligencer 4 (1982), p. 24-33.

M. BERGER, Géométrie. 5) La sphère,...

BUSEMANN et KELLY, Projective geometry and projective metrics.

COXETER, Non euclidean geometry. U. Toronto Press.

Le but de ce chapitre est de décrire un exemple de système hamiltonien ergodique. Pour cela, on aura besoin de quelques préliminaires sur la géométrique hyperbolique en dimension 2 et sur les pavages hyperboliques. On reproduira ensuite la preuve de E. Hopf de l'ergodicité du flot géodésique sur H/Γ si $\text{aire}(H/\Gamma) < +\infty$.

1. - LE DEMI-PLAN DE POINCARE.

Il existe de nombreux modèles isomorphes pour l'espace hyperbolique. Le plus agréable pour les calculs est le demi-plan de Poincaré $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y>0\}$ muni de la métrique $g = \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$. On pose aussi $z = x + iy$.

<u>Géodésiques de</u> H .

Utilisant la transformation de Legendre, on obtient à partir de l'hamiltonien $h = \frac{1}{2} y^2(\xi^2+\eta^2)$ les équations différentielles :

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = y^2\xi \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = y^2\eta \quad ; \quad \frac{d\xi}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d\eta}{dt} = -y(\xi^2+\eta^2) \ .$$

Les géodésiques paramétrées par l'abscisse curviligne s'obtiennent à partir de l'intégrale première $y^2(\xi^2+\eta^2) = 1$ qui, jointe à (1), donne :

$$(2) \qquad \xi = \xi_0 \ , \quad \xi_0^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 = Y^2 \quad \text{avec} \quad Y = \frac{1}{y} \ .$$

D'où les 2 types de géodésiques :

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{\xi_0 \text{ch}t} \\ x = x_0 + \dfrac{1}{\xi_0}\text{th}t \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y = y_0 e^t \\ x = x_0 \end{cases}$$

Les géodésiques sont donc les $\frac{1}{2}$ cercles euclidiens centrés sur l'axe $y = 0$ et les demi-droites verticales. De plus, la représentation paramétrique précédente montre que (H,g) est <u>géodésiquement complet</u>. De plus, une construction géométrique simple montre que si $A,B \in H$, il existe une géodésique unique joignant A à B . La distance $d(A,B)$ est donc la longueur de cette géodésique. On trouve :

$$d(A,B) = \arg\operatorname{ch}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{(z_A-z_B)^2}{y_A y_B}\right) .$$

D'autres modèles du même espace sont utilisés : en fait si (X,g) est une variété riemannienne de dimension 2 complète et simplement connexe à courbure -1 , (X,g) est isométrique au $\frac{1}{2}$ plan de Poincaré.

<u>Isométries de</u> H .

On désigne ainsi tout difféomorphisme T de H sur H préservant g et donc la distance d , les géodésiques. On dit que T est un déplacement s'il conserve l'orientation, un antidéplacement sinon. On note $\mathrm{Isom}(H)$ (resp. $\mathrm{Isom}_+(H)$) le groupe des isométries (resp. déplacements) de H .

THEOREME. -

$$\mathrm{Isom}_+(H) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} ,\ ad-bc=1 \right\}$$

$$\mathrm{Isom}_-(H) = \left\{ z \mapsto \frac{-a\bar{z}+b}{-c\bar{z}+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} ,\ ad-bc=1 \right\} .$$

Il est clair que $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ est une isométrie de H , car on peut écrire une telle transformation comme composée de translations, d'homothéties et de $z \mapsto -\frac{1}{z}$. Pour Isom_- , il suffit de vérifier que $z \mapsto -\bar{z}$ est dans $\mathrm{Isom}_-(H)$. La réciproque utilise 2 lemmes :

LEMME 1. - <u>Soit</u> $v_0 \in T_{z_0}H$ <u>et</u> $v_1 \in T_{z_1}H$ <u>deux vecteurs tangents de longueur</u> 1 , <u>il existe</u> $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ <u>telle que</u> $T'_{z_0}(v_0) = v_1$.

<u>Preuve</u>. - On construit d'abord 2 transformations $T_0, T_1 \in SL_2(\mathbb{R})$ telles que $T_0(z_0) = i$, $T_1(z_1) = i$ et on cherche T sous la forme :

$T = T_1^{-1} \circ W \circ T_0$, $W(i) = i$ et W doit transformer l'un en l'autre 2 vecteurs unitaires de $T_i H$.

Les $T \in SL_2(\mathbb{R})$ qui fixent i sont $T(z) = \dfrac{\cos\theta z - \sin\theta}{\sin\theta z + \cos\theta}$ et $T'(i)$ = rotation euclidienne d'angle -2θ ; d'où la conclusion :

LEMME 2. - <u>Si</u> $T \in \mathrm{Isom}_+(H)$ <u>laisse fixe</u> z_0 <u>et</u> $v_0 \in T_{z_0}H$ $(v_0 \neq 0)$, $T = \mathrm{Id}$.

<u>Preuve</u>. - Comme $T \in \mathrm{Isom}_+(H)$, $T'(z_0) \in \mathrm{Isom}_+(T_{z_0}H)$ est une rotation laissant fixe z_0 , donc $T'(z_0) = \mathrm{Id}$. Si $z_1 \in H$, l'unique géodésique joignant z_0 à z_1 est donc fixée par T et donc $T(z_1) = z_1$.

Les deux lemmes qui précèdent permettent facilement de prouver le théorème.

<u>Classification des isométries de</u> H .

<u>Déplacements</u> : si $|a+d| < 2$, T a un point fixe dans H , c'est une rotation autour de ce point fixe ; T est dite <u>elliptique</u>.

Si $|a+d| = 2$, T est dite <u>parabolique</u>, elle est conjuguée dans $\mathrm{Isom}_+(H)$ à une translation $z \mapsto z+1$.

Si $|a+d| > 2$, T est dite <u>hyperbolique</u>, elle laisse globalement invariante une géodésique γ unique, appelée son <u>axe</u>, sur laquelle elle opère par translation.

<u>Antidéplacements</u> : ce sont soit des symétries par rapport à une géodésique , soit des composés d'une symétrie et d'une transformation hyperbolique de même axe.

<u>Formule de Gauss-Bonnet</u> : si T est un <u>triangle géodésique</u> de H , d'angles $\alpha, \beta, \gamma \in [0,\pi[$, on a :

$$\text{aire}(T) = \iint_T \frac{dx\,dy}{y^2} = \pi - (\alpha+\beta+\gamma) .$$

(en particulier $\alpha+\beta+\gamma < \pi$).

2. - SOUS-GROUPE DISCRETS ET PAVAGES DE H .

Un sous-groupe $\Gamma \subset \text{Isom}(H)$ est dit discret si pour tout compact $K \subset H$, $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. En particulier si $z_0 \in H$, l'orbite de z_0 par Γ n'a pas de point d'accumulation dans H . Si Γ est discret et que, $\forall \gamma \in \Gamma$, γ n'a pas de points fixes, H/Γ est une variété C^∞ ; sinon H/Γ peut être une variété à bord (présence de symétries) ou avec des points coniques (rotations).

Domaine fondamental.

On appelle ainsi toute partie fermée D de H telle que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D) = H$ et $\forall \gamma_1 \neq \gamma_2$, $\gamma_1(\mathring{D}) \cap \gamma_2(\mathring{D}) = \emptyset$. H/Γ s'identifie donc à D où on a identifié certains points du bord de D .

Construction d'un domaine fondamental polygonal.

On choisit $z_0 \in H$ qui ne soit point fixe d'aucun $\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$ et on pose :

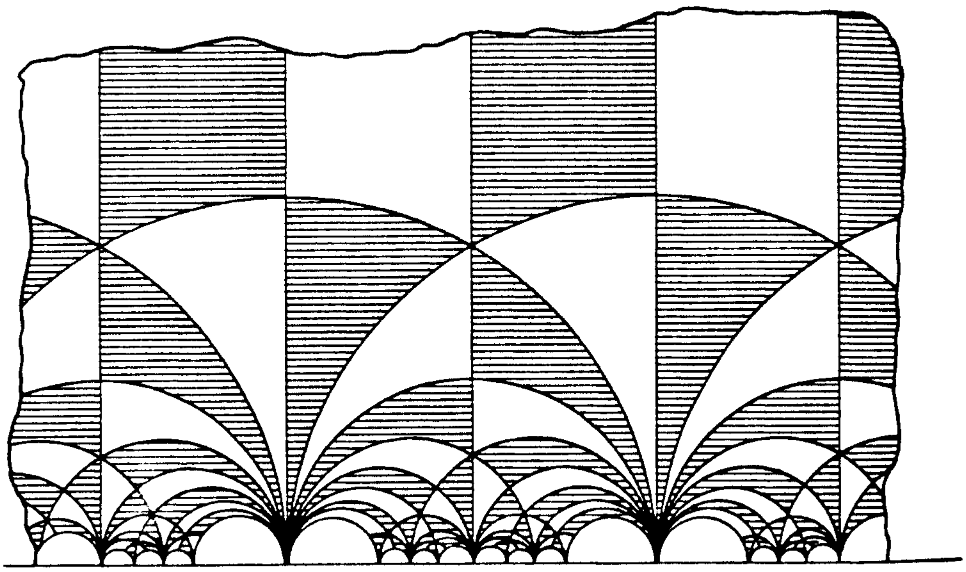
$$D = \{z \in H \mid \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{Id\} , \ d(z_0, z) \le d(\gamma z_0, z)\}$$

Pavage.

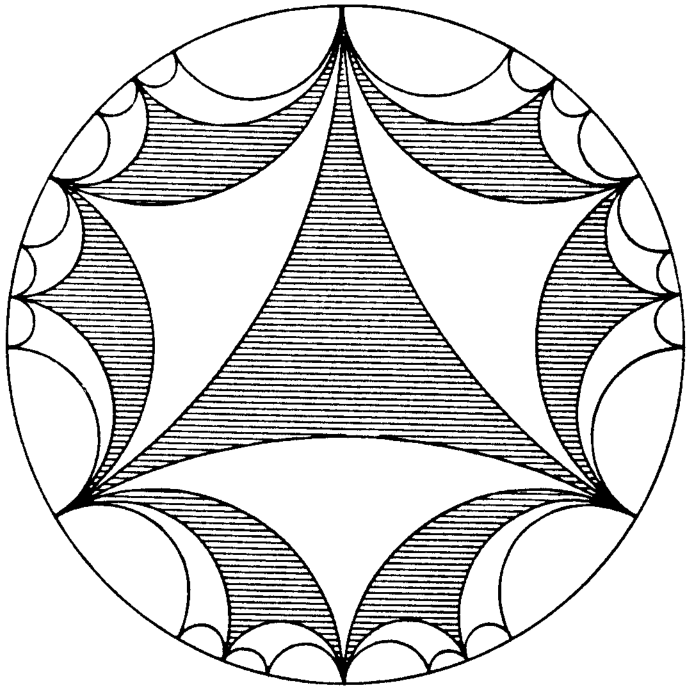
La figure formée des $\gamma(D)$ avec $\gamma \in \Gamma$ s'appelle un pavage hyperbolique de H : c'est un recouvrement de H par des parties isométriques presque disjointes.

Exemple 1. - Soient p, q, r trois entiers tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$, il existe (à isométrie près) un unique triangle hyperbolique $\mathcal{T}$ d'angles $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}$ et $\frac{\pi}{r}$. Faire un raisonnement par continuité en utilisant la formule de Gauss-Bonnet.

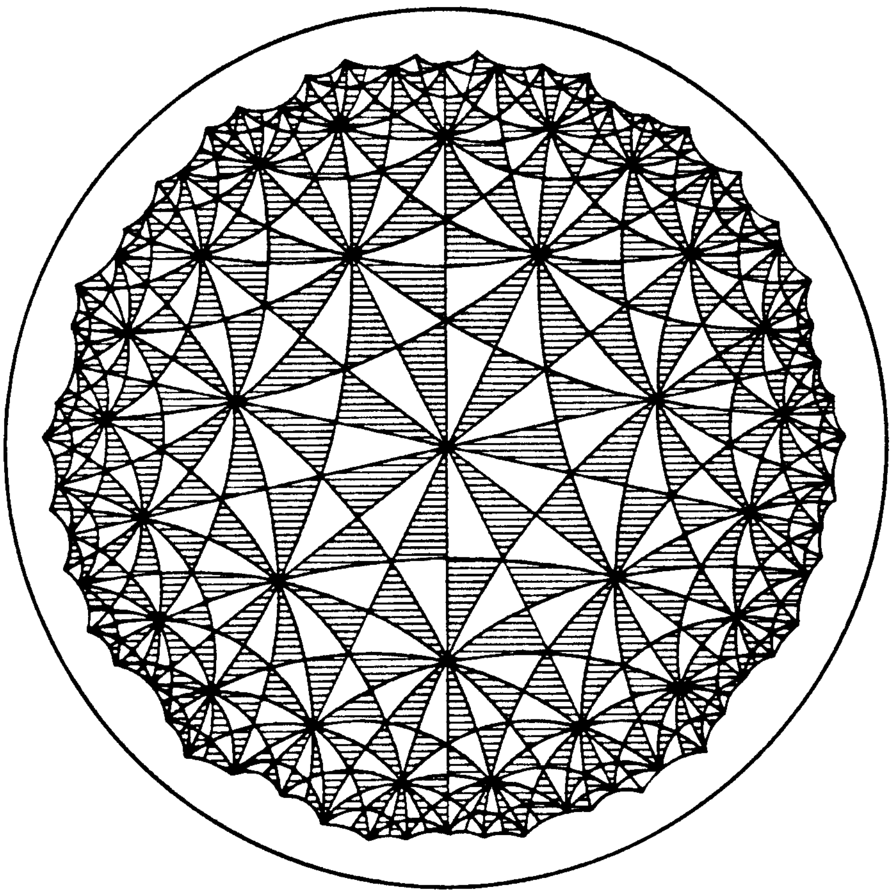
On désigne par $\Gamma(p,q,r)$ le sous-groupe de $\mathrm{Isom}(H)$ engendré par les symétries par rapport aux côtés de $\mathcal{T}$ et $\Gamma_+(p,q,r) = \Gamma(p,q,r) \cap \mathrm{Isom}_+(H)$. Alors $\Gamma_+(p,q,r)$ (resp. $\Gamma(p,q,r)$) sont des sous-groupes discrets de $\mathrm{Isom}(H)$. $\mathcal{T}$ est un domaine fondamental pour Γ et $\mathcal{T} \cup \sigma_1(\mathcal{T})$ (σ_1 = symétrie / un côté de $\mathcal{T}$) un domaine fondamental pour Γ_+ .



Pavage par $\Gamma(2,3,\infty)$



Pavage par $\Gamma(\infty, \infty, \infty)$



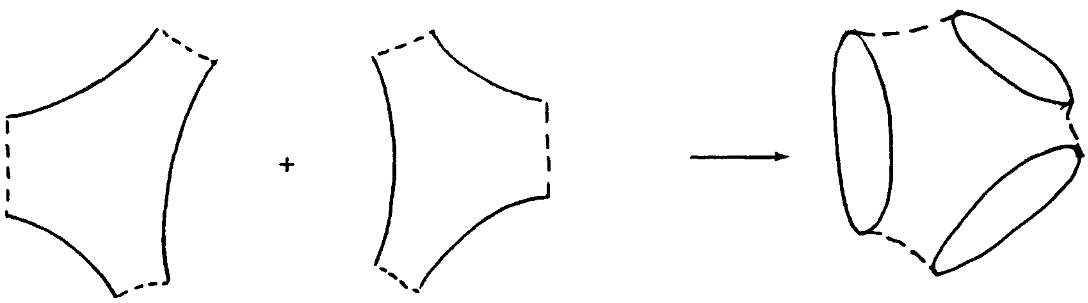
Pavage par $\Gamma(2, 3, 7)$

Exemple 2. - $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \{T_{a,b,c,d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe discret de Isom(H) et le pavage associé est le même que celui de $\Gamma(3,3,\infty)$.

Exemple 3. - Soit X une variété riemannienne complète de dimension 2 à courbure de Gauss constante et égale à -1 . Soit $\tilde{X}$ le revêtement universel de X , si $\pi : \tilde{X} \quad X$ est la projection canonique $d\pi(\tilde{x}) : T_{\tilde{x}}\tilde{X} \mapsto T_{\pi(x)}X$ est un isomorphisme qui permet d'équiper $\tilde{X}$ de la métrique riemannienne $\pi^*(g)$ qui est encore complète et à courbure -1 . Comme $\tilde{X}$ est simplement connexe, $\tilde{X}$ est isométrique à H . Donc si $x_0 \in X$ et $\Gamma = \pi_1(X, x_0)$ opérant de la manière naturelle sur $\tilde{X}$ identifié à H , on a $X = H/\Gamma$ ($\gamma \in \Gamma$ opère par isométries, car localement c'est une permutation des feuilles commutant avec π). Cela donne de nombreux exemples, car toute surface compacte orientable non difféomorphe à S^2 ou à π^2 admet une métrique à courbure -1 .

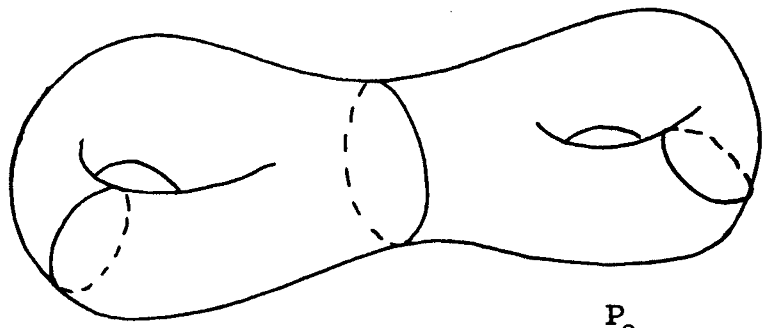
Une manière simple de le voir est de fabriquer une surface en recollant des pantalons dont les bords sont de même longueur.

Un pantalon s'obtient en recollant un côté sur deux de 2 hexagones hyperboliques à angles droits.



Les bords d'un pantalon sont des géodésiques périodiques.

Exemple de recollement de 2 pantalons pour obtenir un tore à 2 trous.



P_1 P_2

3. - ERGODICITE.

Soit (X,μ) un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts muni d'une mesure de Radon μ positive de masse finie et chargeant tout ouvert non vide de X. Soit φ_t un groupe à un paramètre d'homéomorphismes de X tel que $\varphi_t^*(\mu) = \mu$.

On a alors le THEOREME DE BIRKHOFF :
<u>si</u> $f \in L^1(X,\mu)$, <u>alors, pour</u> μ-<u>presque tout</u> x <u>les limites suivantes existent et sont égales</u> :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t(x))dt = \lim_{T\to-\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t(x))dt = \bar{f}(x) .$$

<u>La fonction</u> $\bar{f}$ <u>est invariante par</u> φ_t <u>(comme élément de</u> L^1), $\int \bar{f}d\mu = \int fd\mu$ <u>et</u> $\|\bar{f}\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$.

DEFINITION. - $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ <u>est dit ergodique si, pour toute</u> $f \in L^1(X,\mu)$, $\bar{f}(x) = \frac{1}{\mu(X)}\int_X fd\mu$ (μ presque partout).

Autrement dit, si φ_t est ergodique, pour presque toute donnée initiale, les moyennes spatiales $\frac{1}{\mu(X)}\int_X fd\mu$ et temporelle $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi_t(x))dt$ <u>coïncident</u>.

PROPOSITION. - Si φ_t est ergodique, tout sous-ensemble $A \subset X$, φ_t invariant, vérifie $\mu(A) = 0$ ou $\mu(X \setminus A) = 0$; si φ_t est ergodique, pour presque tout x de X, la trajectoire de x est partout dense dans X.

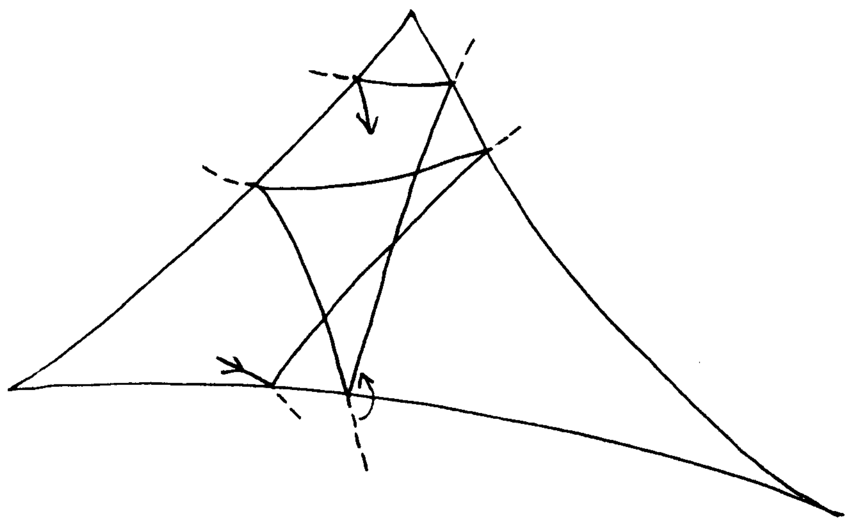
Preuve laissée en exercice.

Remarque. Pour montrer que φ_t est ergodique, il suffit de vérifier le critère de la définition pour les fonctions continues à support compact sur X. (exercice).

4. - ERGODICITE DU FLOT GEODESIQUE SUR H/Γ.

Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{Isom}(H)$, soit φ_t le flot géodésique restreint au fibré tangent unitaire, l'action de Γ s'étend à UH par différentiation et φ_t commute avec cette action : donc φ_t est défini par passage au quotient sur UH/Γ qui peut s'identifier à UD_Γ/Γ où D_Γ est un domaine fondamental.

Exemple. - Si Γ est engendré par les symétries par rapport aux côtés de D_Γ, le flot φ_t sur UH/Γ s'identifie au billard à l'intérieur de D_Γ.



Si Γ agit sans points fixes, H/Γ est une variété riemannienne et le flot φ_t sur UH/Γ s'identifie au flot géodésique sur le fibré tangent unitaire de H/Γ .

Le flot φ_t sur UH laisse invariant la mesure associée à la forme différentielle $i\left(\sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\right)\omega\wedge\omega$ sur T^*H (homogénéité de l'hamiltonien). Cette mesure s'identifie à $\sigma\otimes d\theta$ où σ est la mesure riemannienne sur H et θ la mesure angulaire sur U_zH $(z\in H)$. (exercice).

On est donc dans la situation du paragraphe précédent dès que $\text{aire}(H/\Gamma) < +\infty$ avec $X = UH/\Gamma$, $\mu = \sigma\otimes d\theta$ et φ_t le flot géodésique.

THEOREME. - <u>Si</u> $\text{aire}(H/\Gamma) < +\infty$, <u>le flot géodésique sur</u> UH/Γ <u>est ergodique</u>.

On identifiera un sous-ensemble de UH/Γ à un sous-ensemble de UH saturé par Γ . La notion d'ensemble de mesure nulle est la même car Γ est dénombrable.

LEMME. - <u>Soit</u> $B_\pm$ <u>deux sous-ensembles mesurables</u> φ_t <u>invariants de</u> UH <u>tels que si</u>

1. $v\in B_\pm$ et $v_\pm$ tel que $\lim_{t\to\pm\infty} d(\varphi_t(v),\varphi_t(v_\pm)) = 0$ alors $v_+\in B_-$ (resp. $v_-\in B_-$) .

2. $\mu(B_+\Delta B_-) = 0$.

<u>Alors, ou bien</u> $\mu(B_+) = \mu(B_-) = 0$ <u>ou bien</u> $\mu(UH\setminus B_+) = \mu(UH\setminus B_-) = 0$.

<u>Preuve.</u> - Représentons une géodésique de H par ses extrémités $x_-, x_+ \in \mathbb{R}\cup\infty$ la mesure sur UH est alors de la forme $a(x_-,x_+)dx_-dx_+ds$ (ds = mesure de la longueur sur une géodésique).

L'invariance pour $SL_2(\mathbb{R})$ donne du reste $a(x_-, x_+) = \dfrac{c}{(x_+ - x_-)^2}$, $c > 0$.

On peut ainsi identifier $B_\pm$ à des sous-ensembles mesurables de $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$. La propriété (1) signifie que $B_+ = A_+ \times \bar{\mathbb{R}}$ et $B_- = \bar{\mathbb{R}} \times A_-$. La propriété (2) mène alors immédiatement à la conclusion.

Preuve du théorème. - Soit f une fonction continue à support compact sur UH/Γ ; on pose

$$f_\pm(x) = \lim_{T \to \pm\infty} \frac{1}{T} \int_0^t f(\varphi_t(x))dt \quad \text{et pour} \quad a \in \mathbb{R} \, ,$$

$$B_\pm^a = \{x \in UH/\Gamma \mid f_\pm(x) \geq a\} \, .$$

Il est clair que $B_\pm^a$ vérifie les hypothèses du lemme. Soit $I = \{a \mid \mu(B_\pm^a) = 0\}$ et $\alpha = \inf(I)$, on a $f_\pm(x) = \alpha$, μ-p.p. et donc l'ergodicité.