

# COURS DE L'INSTITUT FOURIER

GÉRARD BESSON

**Rigidité des variétés hyperboliques compactes de dimension  $\geq 3$**

*Cours de l'institut Fourier*, tome 21 (1992)

[http://www.numdam.org/item?id=CIF\\_1992\\_\\_21\\_\\_7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CIF_1992__21__7_0)

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## 0. Introduction

On se propose de prouver le théorème suivant :

**THÉORÈME (G. D. Mostow).** — *Soit  $M_1, M_2$  deux variétés hyperboliques compactes connexes de dimension  $n \geq 3$ . Si  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est une équivalence d'homotopie, alors il existe une isométrie  $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$  homotope à  $f$ .*

*Rappel.* —  $f : X \rightarrow Y$  est une équivalence d'homotopie s'il existe un inverse homotopique  $g$ , i.e. une application continue  $h : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ h$  et  $h \circ f$  sont homotopes à l'identité.

Ici  $X$  et  $Y$  sont des espaces topologiques et  $f$  est une application continue.

Ce résultat exprime le fait que les variétés hyperboliques sont caractérisées par leur  $\pi_1$ .

*Remarques.*

- 1) L'existence de l'équivalence d'homotopie est équivalente, dans ce cas, à l'existence d'un isomorphisme entre les groupes fondamentaux.
- 2) Le résultat est notoirement faux en dimension 2.

Nous présentons ici la preuve due à M. Gromov et W.P. Thurston de ce théorème, plus géométrique que l'argument classique, elle est toutefois limitée, pour l'instant, au cas hyperbolique (courbure constante négative).

La philosophie du théorème est très simple : une équivalence d'homotopie entre deux variétés doit préserver toute la topologie (homotopie), or, comme le montre le théorème principal, pour des variétés hyperboliques compactes une partie de la topologie s'exprime à l'aide du volume des simplexes idéaux réguliers dans le revêtement universel (voir le chapitre 4). Le relevé de l'équivalence d'homotopie doit donc "préserver ce volume" (en un sens qui sera précisé au chapitre 2). De là découle aisément, en dimension supérieure où égale à 3, qu'il existe une isométrie entre les variétés.

En dimension supérieure ou égale à 3 il existe donc des "disymétries cachées" qui rendent impossible les déformations, à l'inverse de ce qui se passe en dimension 2 : les  $(n + 1)$ -uples de points sur la sphère à l'infini ne sont pas tous équivalents. Nous utiliserons ce fait en nous servant du volume des simplexes idéaux qui est une fonction *non constante* sur les  $(n + 1)$ -uples de points à l'infini, pour  $n \geq 3$ .

## 1. Rappels de géométrie hyperbolique : volume des simplexes

### A. Les modèles.

L'espace hyperbolique simplement connexe peut être défini de différentes manières.

#### 1) L'hyperboloïde.

Dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on considère la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_{n+1}^2.$$

La nappe "supérieure"

$$\mathcal{H}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(x) = -1, x_{n+1} > 0\}$$

est difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . Restreinte à  $\mathcal{H}_n$ ,  $q$  est non dégénérée et définie positive; elle définit une métrique riemannienne et  $(\mathcal{H}, q)$  est un modèle de l'espace hyperbolique de dimension  $n$ .

Les géodésiques sont les intersections de l'hyperboloïde avec les deux plans passant par l'origine de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Le groupe d'isométrie est  $O(n, 1)$ .

#### 2) Le disque unité (modèle de Poincaré).

On projette stéréographiquement la nappe  $\mathcal{H}_n$  par rapport au pôle sud, c'est-à-dire le point  $(0, 0, \dots, 0, -1)$ . Cette projection est un difféomorphisme de  $\mathcal{H}_n$  sur le disque unité de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $D_n$ . La métrique riemannienne de ce modèle est

$$ds^2 = \frac{4|dx|^2}{(1 - |x|^2)^2} \quad \text{et} \quad dv = \frac{4^{n/2}}{(1 - |x|^2)^n} dv_E$$

où  $dv$  est la forme volume hyperbolique et  $dv_E$  est la forme volume euclidienne.

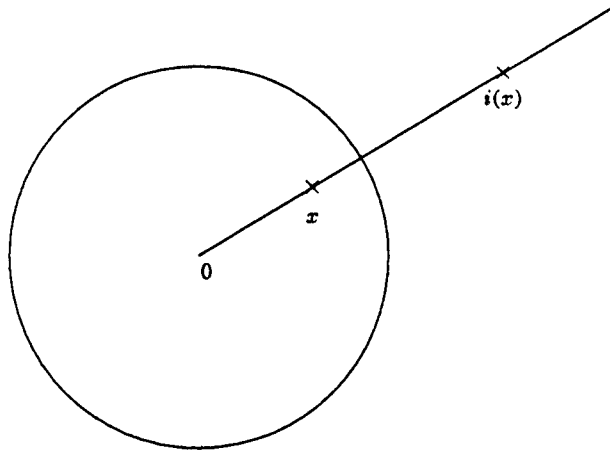
Les géodésiques sont les cercles orthogonaux au bord. Les  $p$ -sphères orthogonales au bord sont des sous-variétés *totale*ment géodésiques.

On rappelle la définition de l'inversion par rapport à une sphère. Soit  $M(x_0, \alpha)$  la sphère de  $\mathbb{R}^n$  centrée en  $x_0$  et de rayon  $\alpha$ , on définit

$$i_{x_0, \alpha}(x) = \alpha \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^2} + x_0.$$

C'est une involution  $C^\infty$ . Si  $\alpha = 1$  et  $x_0 = 0$

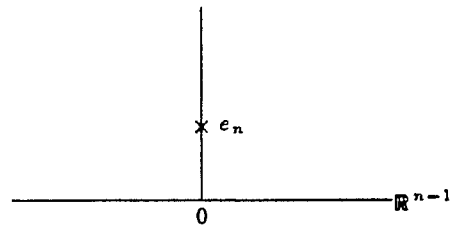
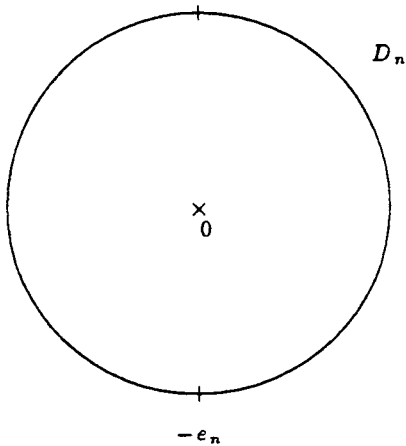
$$i(x) = x / \|x\|^2$$



Cette transformation préserve l'ensemble {hyperplans, sphères}, et préserve les angles. Elle est dite conforme. Elle préserve aussi la sphère  $M(x_0, \alpha)$  points par points. Si  $M(x_0, \alpha)$  est orthogonale au bord de  $D^n$ , alors  $i_{x_0, \alpha}$  préserve  $D^n$  et fixe l'hyperplan  $M(x_0, \alpha) \cap D^n$ . C'est une isométrie hyperbolique, une symétrie hyperplane par rapport à  $M(x_0, \alpha) \cap D^n$ .

THÉORÈME 1.1. — *Le groupe d'isométrie dans ce modèle est l'ensemble des transformations  $A \cdot i$ , où  $A \in O(n)$  et  $i$  est une symétrie hyperplane.*

3) *Le demi-espace (modèle de Poincaré).*



Soit l'inversion  $i_{-e_n, \sqrt{2}}$ , c'est-à-dire

$$x \mapsto 2 \frac{x + e_n}{\|x + e_n\|^2} - e_n.$$

C'est un difféomorphisme de  $D_n$  sur  $\Pi^{n,+}$ , où

$$\Pi^{n,+} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

La métrique obtenue est

$$ds^2 = \frac{|dx|^2}{t^2} \quad dv_g = \frac{dv_E}{t^n}$$

où  $|dx|^2$  (resp.  $dv_E$ ) est la métrique euclidienne (resp. la forme volume euclidienne) sur  $\mathbb{R}^n$ .

THÉORÈME 1.2. — *Le groupe d'isométrie de  $\Pi^{n,+}$  est l'ensemble des*

$$\lambda \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ i + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $A \in O(n-1)$ ,  $\lambda > 0$ ,  $i = id$  ou une inversion et  $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

On l'utilisera beaucoup. Il est engendré par les transformations

i)  $x \mapsto x + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}^{n-1}.$

ii)  $x \mapsto \lambda x, \quad \lambda > 0.$

iii)  $x = (y, t) \mapsto (Ay, t), \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}, A \in O(n-1), t \in \mathbb{R}^+.$

iv)  $x \mapsto x/\|x\|^2.$

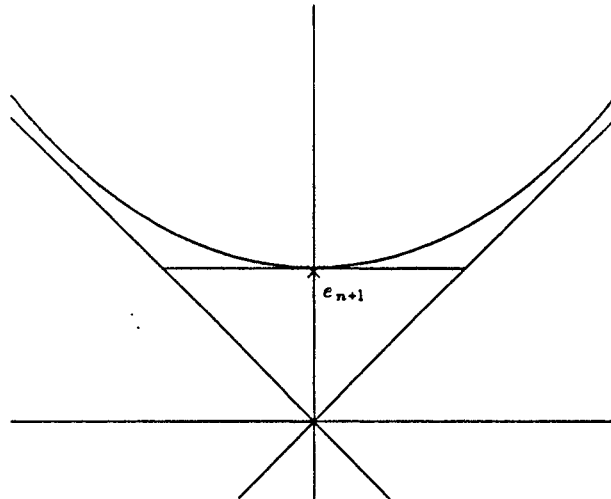
*Remarque.* — Les deux modèles de Poincaré sont conformes c'est-à-dire les angles sont les mêmes que les angles euclidiens.

4) *Le modèle projectif* (modèle de Klein).

Considérons la projection

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$$

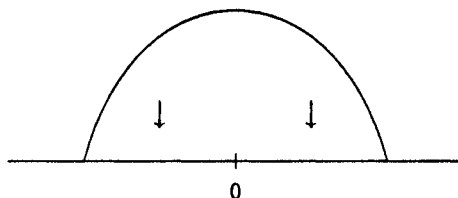
l'image de  $\mathcal{H}^n$  est un ouvert de  $P^n(\mathbb{R})$ , c'est l'espace des droites de  $\mathbb{R}^{n+1}$  qui rencontrent  $\mathcal{H}^n$ .



L'image peut être représentée comme la boule unité (ouverte) de l'hyperplan affine parallèle à  $\mathbb{R}^n$  et passant par  $e_{n+1}$ .

Nous décrirons la métrique et la forme volume plus tard. Il est clair, dès maintenant, que dans ce modèle les géodésiques sont les segments de droites contenus dans la boule car ce sont les intersections de celle-ci avec les deux plans passant par l'origine et intersectant  $\mathcal{H}^n$ . De même les  $p$ -plans hyperboliques (totalement géodésiques) sont les bouts de  $p$ -plans euclidiens contenus dans la boule.

On peut le décrire autrement. Soit  $\Pi^{n+1,+}$  et l'hémisphère unité orthogonal au bord  $\mathbb{R}^n$  et centré en 0.



Il est totalement géodésique et donc la restriction à celui-ci de la métrique de  $\Pi^{n+1,+}$ , est la métrique hyperbolique de dimension  $n$ .

La projection verticale réalise un difféomorphisme entre cet hémisphère et la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ . L'image est le modèle de Klein.

Il est clair que les géodésiques sont des segments de droites mais il est aussi clair que le modèle est non conforme (sauf en 0, image du pôle nord).

*Remarques finales.*

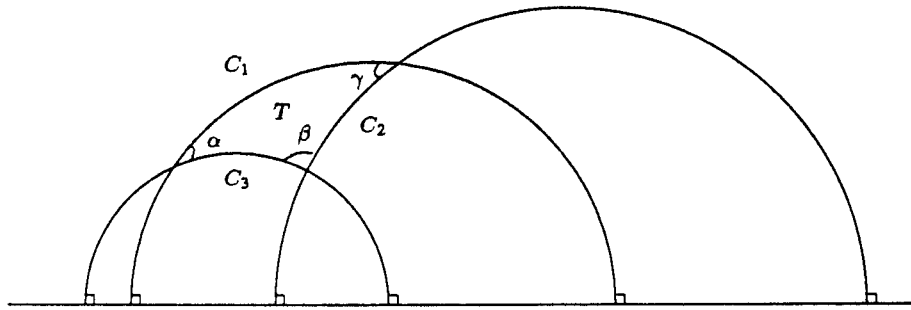
- 1) Les deux modèles de Poincaré sont conformes et le modèle de Klein à des géodésiques qui sont celles de l'espace euclidien. On passe d'un modèle à l'autre suivant les problèmes.
- 2) Dans la suite nous adopterons la notation  $\mathcal{H}^n$  pour désigner un modèle quelconque d'espace hyperbolique simplement connexe.
- 3) Dans les trois derniers modèles, la sphère qui borde le domaine (dans le cas du demi-espace, c'est  $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$ ) est à distance infini de n'importe quel point à l'intérieur, nous l'appellerons "sphère à l'infini".
- 4) Pour plus de détails le lecteur peut se reporter à [Bea].

## B. Le volume des simplexes géodésiques : le cas $n = 2$ .

Nous allons rappeler le calcul de l'aire des triangles géodésiques dans  $\mathcal{H}^2$ .

Soit  $T$  un triangle dont les côtés sont des segments géodésiques, c'est-à-dire des

arcs de cercles. Travaillons dans le modèle du demi-espace



$$\text{aire}(T) = \int_T \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\partial T} \frac{dx}{y}$$

par la forme de Green-Riemann (Stokes). Le problème ainsi présenté n'est plus hyperbolique mais euclidien. Soit  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , les trois côtés :

$$\text{aire}(T) = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \frac{dx}{y}$$

Si  $C$  est un arc de cercle orthogonal au bord, il peut être paramétré par (en coordonnées complexes)

$$x + iy = Z, \quad Z - a = re^{i\theta}$$

où  $a \in \mathbb{R}$  est le centre de  $C$  et  $r$  son rayon. Donc

$$\begin{cases} x - a = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} dx = -r \sin \theta d\theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\int_C dx/y = - \int_C d\theta.$$

C'est la variation totale de l'angle du rayon vecteur définissant  $C$ . Comme la tangente d'un cercle est orthogonale à son vecteur position c'est la variation totale de l'argument de la tangente le long de  $C$ .

Si la courbe  $\partial T$  était  $C^\infty$ , la variation totale de l'argument serait  $2\pi$ , mais ici on "perd" les sauts en les sommets, donc

$$\int_{\partial T} dx/y = -[2\pi - (\pi - \alpha) - (\pi - \beta) - (\pi - \gamma)] = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

d'où

$$\text{THÉORÈME 1.3. — } \text{aire}(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

C'est la formule de l'aire des triangles hyperboliques. Pour un triangle dont les trois sommets sont à l'infini, un triangle idéal, les trois angles sont nuls et donc

$$\text{aire}(T_{\text{idéal}}) = \pi.$$

Tous les triangles idéaux sont équivalents, en fait ils sont tous isométriques, en effet, il est aisé de vérifier (sur le modèle du demi-espace, par exemple) que deux triplets de points à l'infini peuvent être envoyés l'un sur l'autre par isométrie.

C'est la particularité de la dimension 2 et la seule raison pour laquelle la preuve du théorème principal ne s'applique pas dans ce cas.

### C. Le volume des simplexes géodésiques : le cas $n \geq 3$ .

La situation est tout à fait différente en dimension  $n \geq 3$ .

**DÉFINITION 1.4.** — *Nous appelons simplexe géodésique de  $\mathcal{H}^n$  l'enveloppe convexe d'un  $n + 1$ -uple de points de  $\mathcal{H}^n$ . Si les points sont à l'infini, le simplexe est dit idéal et si toute permutation des sommets peut être réalisée par une isométrie, il est dit régulier.*

*Remarques.*

- 1) Les faces d'un simplexe hyperbolique sont des sous-variétés totalement géodésiques, des hyperplans hyperboliques.
- 2) En dimension 2, les triangles idéaux sont tous réguliers d'après ce qui précède. Les théorèmes qui suivent sont cruciaux.

**THÉORÈME 1.5.** — *Le volume des simplexes de  $\mathcal{H}^n$  est borné.*

**THÉORÈME 1.6.** (U. Haagerup- H.J. Munkholm, [H-M]). — *La valeur maximale du volume des simplexes géodésiques est atteinte pour les simplexes "idéaux réguliers" et pour eux seulement.*

*Remarques.*

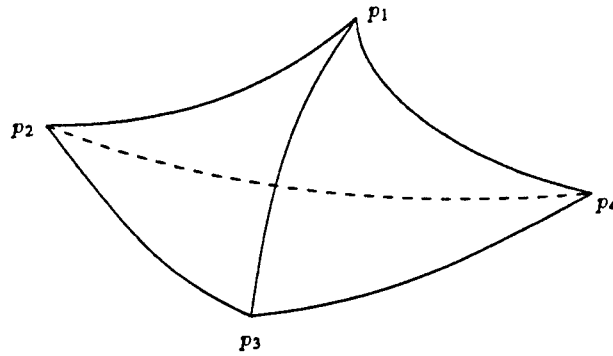
- a) Tous les simplexes idéaux réguliers ont même volume  $v_n$ . Ce nombre ne dépend pas de la dimension  $n$ . Tout autre simplexe a un volume strictement plus petit.
- b) Ce nombre  $v_n$  n'est pas connu sauf en dimension 3.
- c) Le théorème de Haagerup et Munkholm n'est pas très difficile mais un peu technique. Nous ne le prouverons qu'en dimension 3, où un calcul explicite du volume des simplexes idéaux est possible.

*Preuve en dimension 3.*

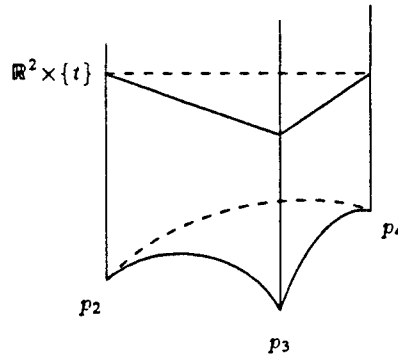
- a) Soit  $T_0$  un simplexe de  $\mathcal{H}^3$ , si  $T_0$  n'est pas idéal, il existe un simplexe idéal de volume strictement plus grand. En effet, si  $p \in T_0$ , projetons de  $p$  les sommets de  $T_0$  à l'infini, alors le simplexe engendré par ces points est idéal et contient strictement  $T_0$ .
- b) Il suffit donc de s'intéresser aux simplexes idéaux. Calculons leur volume. Soit



$T$  un simplexe idéal.



Envoyons un sommet à  $+\infty$  dans le modèle du demi-espace

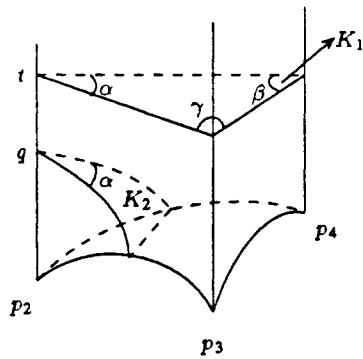


Soit une horizontale  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ , si  $t$  est assez grand, elle coupe  $T$  en un triangle  $K_1$ . Celui-ci n'est défini qu'à similitude près. En effet si on transforme  $T$  par une isométrie fixant l'infini, elle agit sur  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  par similitude.

Seuls les angles  $\alpha, \beta, \gamma$  de  $K_1$  sont donc bien définis. Au sommet  $p_1$  on peut donc associer une classe d'équivalence de triangles semblables de  $\mathbb{R}^2$ .

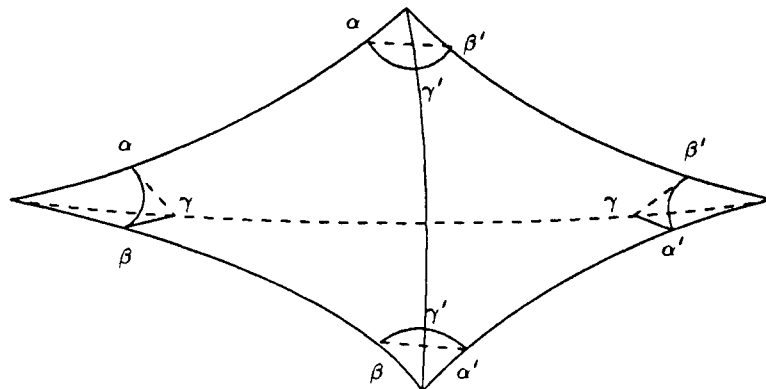
Les horizontales de  $\Pi^{3,+}$  sont les horosphères centrées en  $+\infty$ ; les horosphères centrées en un autre point  $x_0$  à l'infini, c'est-à-dire en un point de  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  sont les sphères tangentes à  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  en ce point. Ce sont les trajectoires orthogonales aux géodésiques issues de  $x_0$ , c'est-à-dire, toute horosphère centrée en  $x_0$  est orthogonale à toute géodésique issue de  $x_0$ . Ceci se voit plus facilement si  $x_0 = +\infty$ , l'horosphère est alors une horizontale  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ .

On peut faire de même en  $p_2$  et associer à ce point une classe d'équivalence de triangles dessinés sur l'horosphère.



L'angle de ce triangle  $K_2$  en  $q$  est égal à l'angle dièdre des faces verticales passant par  $p_2$ . C'est le cas pour l'angle  $\alpha$  de  $K_1$  en  $t$  également.

On fait de même avec  $p_3$  et  $p_4$  et on obtient la figure



Les nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$  et  $\gamma'$  vérifient donc,

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta' + \gamma' = \alpha' + \beta + \gamma' = \alpha' + \beta' + \gamma = \pi$$

et donc

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \alpha' + \beta' \\ \alpha + \gamma = \alpha' + \gamma' \\ \beta + \gamma = \beta' + \gamma' \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \gamma = \gamma' \end{cases}$$

Il n'y a donc que trois paramètres et en chaque sommet nous avons la même classe d'équivalence de triangles semblables de  $\mathbb{R}^2$ .

En fait, nous pouvons paramétrer les simplexes idéaux par les classes d'équivalence de triangles semblables de  $\mathbb{R}^2$ , et donc par trois nombres  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

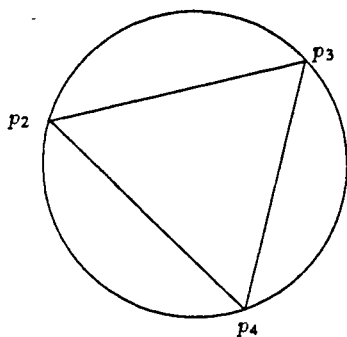
Le volume de  $T$  doit donc être une fonction de  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

LEMME 1.7. — *Le simplexe est régulier si et seulement si  $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$ .*

*Preuve.* — i) Si le simplexe est régulier, envoyons  $p_1$  à l'infini. Alors quitte à transporter le simplexe par une isométrie fixant  $+\infty$ , on peut supposer que  $p_2, p_3$  et  $p_4$  sont sur le cercle unité centré en  $0$  de  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Le triangle  $p_2, p_3, p_4$  est dans la classe d'équivalence.

Toute permutation de  $p_2, p_3, p_4$  doit être réalisée par une isométrie de  $\Pi^{3,+}$ . Elle doit fixer  $p_1$  et aussi fixer le cercle passant par  $p_2, p_3, p_4$  ce doit donc être une isométrie de  $\mathbb{R}^2$ . Le triangle  $p_2, p_3, p_4$  est donc équilatéral et  $\alpha = \beta = \gamma$ .

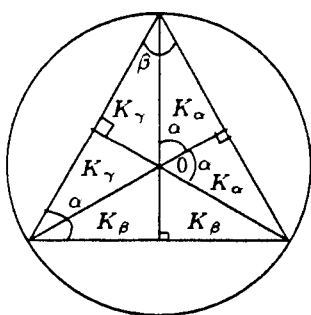
ii) Réciproquement si le triangle est équilatéral, toute permutation de  $p_2 p_3 p_4$  est réalisée par une isométrie euclidienne de  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  donc par une isométrie hyperbolique. De plus la distance euclidienne de  $p_2$  à  $p_4$  est égale à celle de  $p_3$  à  $p_4$ . Soit donc le cercle centré en  $p_4$  et passant par  $p_2$  et  $p_3$  et la sphère de  $\Pi^{3,+}$  qui s'appuie sur ce cercle. L'inversion par rapport à cette sphère préserve  $p_2$  et  $p_3$  et échange le centre en  $+\infty$  c'est-à-dire  $p_4$  et  $p_1$ . La permutation de  $p_1$  et  $p_4$  est donc également réalisée par une isométrie et ceci conclut la preuve.



PROPOSITION 1.8. —  $\text{vol}(T) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$  où  $\Lambda$  est la fonction de Lobatchevskii

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin t| dt \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

*Preuve.* — Dans le modèle de Poincaré le simplexe peut être supposé avec un sommet à l'infini et les trois autres sur le cercle unité, centré à l'origine de  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Le simplexe est alors déterminé par le triangle défini dans  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Subdivisons le comme sur la figure.



Les tétraèdres engendrés par  $K_\alpha, K_\beta$  et  $K_\gamma$  que nous noterons  $T_\alpha, T_\beta$ , et  $T_\gamma$  sont bien définis.

Calculons le volume de  $T_\alpha$ , par exemple,

$$\text{vol}(T_\alpha) = \int_0^{\cos \alpha} dx \int_0^{x \tan \alpha} dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\infty} \frac{dz}{z^3}$$

où  $(x, y)$  sont des coordonnées de  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  telles que :

- i) l'axe des  $x$  soit la direction de la hauteur;
- ii) l'axe des  $y$  soit la direction orthogonale.

Ici nous supposons que les trois angles  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont aigus.

$$\text{vol}(T_\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{\cos \alpha} dx \int_0^{x \tan \alpha} \frac{dy}{(1-x^2-y^2)}$$

maintenant

$$\frac{1}{1-x^2-y^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2+y}} \right)$$

$$\text{vol}(T_\alpha) = \frac{1}{4} \int_0^{\cos \alpha} \log \left[ \frac{\sqrt{1-x^2+y}}{\sqrt{1-x^2-y}} \right] \Big|_{y=0}^{y=x \tan \alpha} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

posons  $x = \cos t$

$$\begin{aligned} \text{vol}(T_\alpha) &= -\frac{1}{4} \int_{\pi/2}^\alpha \log \left[ \frac{\sin t \cos \alpha + \cos t \sin \alpha}{\sin t \cos \alpha - \cos t \sin \alpha} \right] dt = \frac{1}{4} \int_\alpha^{\pi/2} \log \left( \frac{\sin(t+\alpha)}{\sin(t-\alpha)} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_\alpha^{\pi/2} \log |2 \sin(t+\alpha)| dt - \frac{1}{4} \int_\alpha^{\pi/2} \log |2 \sin(t-\alpha)| dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{2\alpha}^{\alpha+\pi/2} \log |2 \sin t| dt - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2-\alpha} \log |2 \sin t| dt \\ &= \frac{1}{4} \left( -\Lambda(\alpha + \pi/2) + \Lambda(2\alpha) + \Lambda(\pi/2 - \alpha) \right) \end{aligned}$$

LEMME 1.9. — On a les relations :

$$\Lambda(2\alpha) = 2\Lambda(\alpha) + 2\Lambda(\alpha + \pi/2)$$

et

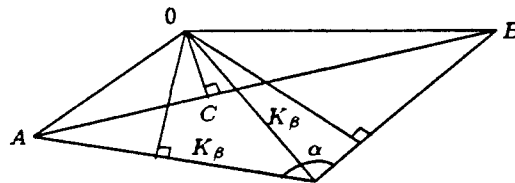
$$\Lambda(\pi/2 - \alpha) = -\Lambda(\alpha - \pi/2) = -\Lambda(\alpha + \pi/2).$$

Admettons le lemme, alors

$$\text{vol}(T_\alpha) = \frac{\Lambda(\alpha)}{2}$$

d'où le résultat.

Dans le cas où l'un des angles est obtus, on subdivise comme suit,  $K_\alpha = \widehat{OCB}$ .



Pour trouver

$$\begin{aligned} \text{vol}(T) &= 2 \left( \frac{\Lambda(\beta)}{2} + \frac{\Lambda(\gamma)}{2} - \frac{\Lambda(\pi - \alpha)}{2} \right) \\ &= \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma). \end{aligned}$$

*Preuve du théorème.* — Nous allons montrer que  $\text{vol}(T) = v_3 \iff T$  régulier, en fait nous allons montrer que comme fonction de  $(\alpha, \beta)$ ,  $\text{vol}(T)$  est strictement concave, posons :

$$v(\alpha, \beta) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\pi - (\alpha + \beta))$$

sur le domaine  $\{\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < \pi\} = D$ .

LEMME 1.10. — *La fonction  $v$  est strictement concave sur l'ensemble où elle est définie.*

*Preuve.* — Calculons le Hessien. On a

$$\Lambda''(x) = -\cotg(x)$$

le Hessien de  $\text{vol}(T)$  sur  $\alpha, \beta, \gamma$  est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} -\cotg(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & -\cotg(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & -\cotg(\gamma) \end{pmatrix}$$

En chaque point de  $D$ , l'espace tangent est engendré par  $(1, 0, -1)$  et  $(1, -1, 0)$ , d'où le Hessien de  $v$  sur  $D$  est donné par la matrice

$$\text{Hess}_{(\alpha, \beta)} v = \begin{pmatrix} -(\cotg \alpha + \cotg \gamma) & -\cotg \alpha \\ -\cotg \alpha & -(\cotg \alpha + \cotg \beta) \end{pmatrix}$$

Il est ensuite facile de démontrer que cette forme est définie négative.

LEMME 1.11. — *Le point  $(\alpha = \pi/3, \beta = \pi/3)$  est critique.*

*Preuve.* —  $\text{vol}(T) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\pi - \alpha - \beta)$  d'où

$$d \text{vol} = (\Lambda'(\alpha) - \Lambda'(\pi - \alpha - \beta)) d\alpha + (\Lambda'(\beta) - \Lambda'(\pi - \alpha - \beta)) d\beta$$

alors si  $\alpha = \beta = \pi/3$   $\pi - \alpha - \beta = \pi/3$ . ■

Maintenant, une fonction strictement concave qui a un point critique, a un maximum strict en ce point.

#### D. La fonction de Lobatchevskii.

Dégageons quelques propriétés de la fonction

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin t| dt \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

$\Lambda$  est bien définie car l'intégrale converge, elle est de plus clairement continue. Elle est dérivable pour tout  $\theta \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . De plus on a

PROPOSITION 1.12.

- 1)  $\Lambda$  est impaire.
- 2)  $\Lambda$  est  $\pi$ -périodique.

3) pour  $m \in \mathbb{Z}$  on a l'identité

$$\Lambda(m\theta) = m \sum_{k=0}^{m-1} \Lambda(\theta + k\pi/m).$$

*Preuve.*

- 1) est évident car  $\lambda : t \rightarrow \log |2 \sin t|$  est paire.
- 2)  $\lambda$  est périodique et de période  $\pi$ . Pour montrer que  $\Lambda$  partage les mêmes propriétés, il suffit de vérifier que

$$\Lambda(\pi) = \int_0^\pi \lambda(t) dt = 0$$

remarquons que

$$\frac{1}{2}\Lambda(2\theta) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\theta} \log |2 \sin t| dt = -\int_0^\theta \log |2 \sin 2t| dt$$

or

$$\sin(2t) = 2 \sin t \sin(t + \pi/2)$$

$$1/2\Lambda(2\theta) = -\int_0^\theta \log |2 \sin t| dt - \int_0^\theta \log |2 \sin(t + \pi/2)| dt$$

$$= \Lambda(\theta) - \int_{\pi/2}^{\theta+\pi/2} \log |2 \sin(t)| dt = \Lambda(\theta) + \Lambda(\theta + \pi/2) - \Lambda(\pi/2)$$

pour  $\theta = \pi/2$  on obtient

$$\Lambda(\pi) = 2\Lambda(\pi/2) \Rightarrow \Lambda(\pi/2) = 0$$

ce qui prouve la périodicité et l'égalité

$$\Lambda(2\theta) = 2(\Lambda(\theta) + \Lambda(\theta + \pi/2))$$

car

$$\int_{-\pi/2}^0 \lambda(t) dt = \int_{\pi/2}^\pi \lambda(t) dt \quad \text{par } \pi - \text{périodicité}$$

$$\int_{-\pi/2}^0 \lambda(t) dt = + \int_0^{\pi/2} \lambda(t) dt \quad \text{par imparité}$$

et donc

$$\Lambda(\pi) = \int_0^{\pi/2} \lambda(t) dt + \int_{\pi/2}^\pi \lambda(t) dt = 2\Lambda(\pi/2) \Rightarrow \Lambda(\pi/2) = 0.$$

3) nous avons montré le cas  $m = 2$  de l'équation fonctionnelle. Pour  $m$  quelconque on utilise

$$2 \sin(mt) = \prod_{k=0}^{m-1} 2 \sin(t + k\pi/m).$$

Ensuite on procède comme précédemment

$$\begin{aligned}
1/m\Lambda(m\theta) &= -\frac{1}{m} \int_0^{m\theta} \log |2 \sin t| dt = - \int_0^\theta \log |2 \sin(mt)| dt \\
&= - \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^\theta \log |2 \sin(t + k\pi/m)| dt \\
&= - \sum_{k=0}^{m-1} \left( \int_0^{\theta+k\pi/m} \log |2 \sin t| dt - \int_0^{k\pi/m} \log |2 \sin t| dt \right) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \Lambda(\theta + k\pi/m) + C(m)
\end{aligned}$$

avec  $C(m) = \sum_0^{m-1} \int_0^{k\pi/m} \log |2 \sin t| dt$  or on a

$$\int_0^\pi \Lambda(m\theta) d\theta = \int_0^\pi \Lambda(\theta + \alpha) d\theta = 0 \Rightarrow \int_0^\pi C(m) d\theta = C(m) \cdot \pi = 0$$

d'où

$$C(m) = 0.$$

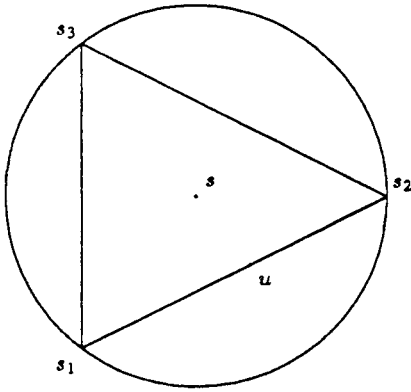
■

## 2. Isométries et simplexes idéaux réguliers

Dans ce chapitre, on se propose de prouver le théorème suivant,

**THÉORÈME 2.1.** — *Pour  $n \geq 3$ , soit  $f$  une application continue injective de  $S^{n-1}$  sur elle même telle que si  $\theta_0, \dots, \theta_n$  engendre un simplexe géodésique régulier, il en est de même de  $f(\theta_0), \dots, f(\theta_n)$ , alors  $f$  est la restriction à  $S^{n-1}$  d'une isométrie hyperbolique.*

*Preuve.* — Pour simplifier, nous nous limitons au cas  $n = 3$ . Quitte à composer  $f$  par la trace sur  $S^{n-1}$  d'une isométrie, on peut supposer qu'elle fixe le tétraèdre basé sur un triangle équilatéral  $s_1 s_2 s_3$  inscrit dans le cercle unité et  $+\infty$  (modèle demi-espace).



1) Soit  $s'_3$  le symétrique de  $s_3$  par rapport à  $s_1s_2$ . Le tétraèdre  $(s_1, s_2, s'_3, +\infty)$  est régulier ainsi donc que son image  $(s_1, s_2, f(s'_3), +\infty)$ . Il n'y a donc que deux possibilités  $f(s'_3) = s_3$  ou  $f(s'_3) = s'_3$ .  $f$  est injective et  $f(s_3) = s_3$  donc  $f(s'_3) = s'_3$ .

$s'_3$

2) Tous les symétriques possibles de  $s_1, s_2$  ou  $s_3$  sont préservés par  $f$ . En itérant l'opération on voit que si on pave  $\mathbb{R}^2$ , par réflexion, à partir de  $(s_1s_2s_3)$ , les sommets sont tous invariants.

Soit  $s$  le centre du triangle  $(s_1, s_2, s_3)$ . L'inversion par rapport à la sphère unité centrée en  $s$ , envoie  $+\infty$  sur  $s$ . Le tétraèdre  $(s_1, s_2, s_3, s)$  est donc régulier. Comme précédemment, on conclut que

$$f(s) = s.$$

3) Soit  $u$  le milieu de  $s_1s_2$ . La même inversion que précédemment envoie  $s'_3$  sur  $u$ . Le tétraèdre  $(s_1s_2su)$  est régulier et  $s_1, s_2$  et  $s$  sont fixes par  $f$ , donc

$$f(u) = u.$$

4) En itérant cette opération sur tous les triangles du pavage on construit un ensemble dense de points de  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  pour lesquels  $f(x) = x$ . Par continuité de  $f$ , on a

$$f = id.$$

■

*Remarque.* — Ce théorème est bien évidemment faux en dimension 2.

### 3. Homologie singulière et volume simplicial

Le but de ce chapitre est de montrer que le volume d'une variété hyperbolique compacte est un invariant topologique.

À cette fin, nous allons introduire une notion différente "le volume simplicial" dont nous montrerons que dans le cas hyperbolique elle coïncide avec le volume.



## A. Homologie singulière.

On appelle  $k$ -simplexe singulier une application continue  $f$  :

$$f : \Delta^k \longrightarrow X$$

( $\Delta^k$  étant le simplexe canonique de  $\mathbb{R}^{k+1}$ ). Nous le noterons  $\sigma$

$$\sigma = [a_0, a_1, \dots, a_k]$$

où les points  $a_i$  sont les sommets du simplexe.

Nous travaillerons avec coefficients dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ . Le module libre engendré par les  $k$ -simplexes singuliers sera noté  $C^k(X; \Lambda)$  ( $\Lambda = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ ). L'opérateur de bord est donné par

$$\partial f = \sum_q (-1)^q (\sigma_q, f|_{\sigma_q})$$

où la  $q$ -ième face  $\sigma_q$  est définie par :

$$\sigma_q = [a_0, a_1, \dots, \hat{a}_q, \dots, a_k].$$

On a ainsi un complexe de chaîne

$$C^{k+1}(X) \xrightarrow{\partial} C^k(X) \xrightarrow{\partial} C^{k-1}(X); \quad \partial \circ \partial = 0.$$

L'homologie de ce complexe est par définition l'homologie singulière de  $X$ .

*Remarques.* — Si on a une triangulation de  $X$ , ou une décomposition en cellules, on peut calculer les groupes d'homologie  $H_n(X; \Lambda)$ .

L'homologie singulière est difficilement calculable directement, mais elle est plus pratique pour les théorèmes abstraits. On admettra

PROPOSITION 3.1. — *Soit  $X^n$  une variété compacte, connexe, orientée alors*

i)  $H_n(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  le représentant canonique s'appelle la classe fondamentale  $[X]$ .

ii) Si  $X$  est triangulée (chaque  $(n-1)$ -simplexe est la face de précisément deux  $n$ -simplexes) alors  $[X]$  est canoniquement représentée par la somme formelle des  $n$ -simplexes de la triangulation.

*Degré d'une application.* — Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variétés compactes connexes orientées et  $f : X_1^n \longrightarrow X_2^n$  continue. Soit

$$f_* : H_n(X_1) \longrightarrow H_n(X_2)$$

l'homomorphisme induit, alors on définit le degré de  $f$  par

$$\deg(f)[X_2] = f_*([X_1]).$$

Si  $f$  est de classe  $C^1$  et si  $y \in X_2$  est une valeur régulière de  $f$

$$\deg(f) = \#\{x \in f^{-1}(y) \mid d_x f \text{ positive}\} - \#\{x \in f^{-1}(y) \mid d_x f \text{ négative}\}.$$

## B. Le volume simplicial.

On se propose d'introduire une (semi-)norme dans les espaces d'homologie, pour rendre "plus efficace" leur utilisation. Nous travaillerons dans  $C_k(X; \mathbb{R})$  et  $H_k(X; \mathbb{R})$ . Soit  $c \in C_k(X; \mathbb{R})$

$$c = \sum a_i \tau_i, \quad \tau_i \text{ est un } k\text{-simplexe et } a_i \in \mathbb{R}$$

on pose

$$|c| = \sum |a_i|$$

(il faut supposer que l'écriture de  $c$  est réduite ou alors prendre un inf sur les écritures possibles). Pour une classe  $\alpha \in H_k(X; \mathbb{R})$

$$\|\alpha\| = \inf\{|c| \mid c \text{ représente } \alpha\}.$$

*Remarque.* — Ce n'est pas une norme, mais une semi-norme, en effet, comme nous le verrons plus bas,

$$\|[S^1]\| = 0.$$

DÉFINITION 3.2. — On appelle volume simplicial de  $X$  (norme de Gromov) la norme de  $[X]$ ; elle sera notée  $\|X\|$ .

Ce n'est qu'une semi-norme car l'espace des bords,  $B_k(X)$  n'est pas nécessairement fermé.

*Remarque.* — Les exemples de variétés à  $\|X\| \neq 0$  sont non triviaux.

PROPOSITION 3.3. — Soit  $f : X \rightarrow X$ ,  $|\deg f| \geq 2 \Rightarrow \|X\| = 0$ .

Le corollaire immédiat est que

$$\|S^n\| = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

*Preuve de la proposition.* — Si  $\alpha \in H_k(X; \mathbb{R})$ ,  $\alpha = [c]$  et  $c = \sum a_i \sigma_i$  alors  $f \circ c = \sum a_i (f \circ \sigma_i)$  représente  $f_*(\alpha)$  donc

$$|f \circ c| \leq |c| \Rightarrow \|f_*(\alpha)\| \leq \|\alpha\|$$

d'où

$$\|X\| \geq \|f_*(X)\| = |\deg f| \cdot \|X\| \text{ et } \|X\| \neq 0 \Rightarrow |\deg(f)| \leq 1.$$

■

## C. Chaines droites.

Soit  $X$  hyperbolique

$$X = \mathbb{H}^n / \Gamma, \quad \Gamma \simeq \pi_1(X).$$

Soit  $x_0, \dots, x_k, k+1$ -points de  $\mathbb{H}^n$  et  $\sigma(x_0, \dots, x_k)$  le  $k$ -simplexe engendré (combinaisons convexes), alors on a un simplexe singulier sur  $X$  par

$$\begin{array}{ccc} \Delta^k & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{H}^n & \xrightarrow{\pi} & X \\ & & \sigma(x_0, \dots, x_k) & \longmapsto & \pi \circ \sigma \end{array}$$

où

- i)  $\sigma$  est l'application "barycentrique",
- ii)  $\pi$  la projection canonique de  $\mathbb{H}^n$  sur  $X$ .

DÉFINITION 3.4.

- 1) Le simplexe  $\pi \circ \sigma$  est dit "droit".
- 2) Une chaîne  $\Sigma a_i \sigma_i$  est dite droite si les simplexes  $\sigma_i$  sont droits.

#### D. Rectification des chaînes singulières.

Soit  $f : \Delta^k \rightarrow X$  un simplexe ( $f$  continue) on a (théorie des revêtements) un relèvement  $\tilde{f}$  de  $f$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{H}^n \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ \Delta^k & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Soient les sommets de  $\tilde{f}(\Delta^k)$ ,  $x_0, \dots, x_k$  et le simplexe droit  $\sigma(x_0, \dots, x_k)$

$$\Delta^k \xrightarrow{\sigma} \mathbb{H}^n.$$

On définit une homotopie de  $f$  à  $\pi \circ \sigma$  par

$$\begin{array}{l} \Delta^k \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}^n \\ (t, s) \longmapsto \pi(s\tilde{f}(t) + (1-s)\sigma(t)). \end{array}$$

*Remarques.* — La somme signifie : combinaison linéaire convexe affectée des coefficients  $s$  et  $(1-s)$ ; en clair, on considère la géodésique de  $\tilde{f}(t)$  à  $\sigma(t)$  (qui est unique dans  $\mathbb{H}^n$ ) et on prend le point entre  $\tilde{f}(t)$  et  $\sigma(t)$  qui divise dans le rapport  $s/1-s$ .

L'opération de rectification est bien définie sur  $X$ , en effet le simplexe droit  $\pi \circ \sigma$  est celui dont les arêtes (par exemple) sont les géodésiques joignant les sommets qui sont dans la même classe d'homotopie que les arêtes de  $f$ .

On définit ainsi une application  $s_X$  (resp.  $s_{\mathbb{H}^n}$ )

$$s_X : f \longmapsto \bar{\sigma} = \pi \circ \sigma = s_X(f)$$

et on a de manière évidente

$$\pi \circ s_{\mathbb{H}^n} = s_X \circ \pi.$$

## 4. Le théorème principal

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal.

**THÉORÈME 4.1.** (M. Gromov-W.P. Thurston). — *Si  $X$  est une variété hyperbolique compacte, connexe et orientée*

$$\|X\| = \frac{\text{vol}(X)}{v_n}.$$

*Remarques.*

1) Le volume est un invariant d'homotopie pour les variétés hyperboliques. Ce qui est clair en dimension 2 et plus généralement en dimension paire, l'est maintenant en dimension quelconque.

2) Avant ce théorème il fallait le théorème de rigidité de G.D. Mostow pour prouver que le volume était un invariant d'homotopie, maintenant on renverse l'ordre des implications, car cette invariance entraîne la rigidité.

Nous procéderons par inégalités.

*Preuve heuristique de  $v_n \|X\| \geq \text{vol}(X)$ .* — Soit  $[X] = [\sum a_i f_i]$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ . On peut remplacer le cycle  $\sum a_i f_i$  par  $\sum a_i \bar{\sigma}_i$  le cycle droit qui lui correspond, alors on calcule le volume

$$\text{vol}(X) \leq \sum |a_i| \text{vol}(\sigma_i) \leq v_n \sum |a_i|$$

et en prenant l'infimum on a le résultat.

Le calcul du volume doit être fait avec plus de précisions, en effet  $\bar{\sigma}_i$  se recouvre éventuellement il faut donc compter la multiplicité du recouvrement, c'est un volume algébrique qu'il faut calculer.

Pour faire une preuve rigoureuse, il faut adopter un point de vue dual et donner une définition différente du volume simplicial. Elle est aussi due à M. Gromov et la preuve de l'égalité qui en découle est due à W. Thurston (qui l'attribue à M. Gromov).

### A. Le volume simplicial : 2<sup>ième</sup> version.

Ici  $X$  est une *variété différentiable* quelconque. Posons

$$Y_k = \mathcal{C}^1(\Delta^k, X) = \{f : \Delta^k \rightarrow X, f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1\}.$$

Si  $Y_k$  est muni de la topologie  $\mathcal{C}^1$ , c'est un espace topologique (qui est en fait une variété Banachique). On pose alors

$$\mathcal{M}_k(X) = \{\text{mesures boréliennes à support compact et à variations bornées sur } Y_k\}.$$

*Rappels.* — Rappelons quelques faits classiques sur les mesures. Soit  $\mu$  une mesure borélienne sur un espace topologique  $Y$ , elle est dite à variations bornées si

$$\sup\{\sum |\mu(E_i)| \mid (E_i) \text{ partition borélienne de } Y\} < +\infty.$$

La borne supérieure est appelée la variation totale de  $\mu$ , notée  $\|\mu\|$ .

*Exemples.* —  $\mu = f(x)dx$  sur  $\mathbb{R}$ , où  $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ , alors  $\|\mu\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$ .

À une mesure  $\mu$  on associe une mesure positive notée  $|\mu|$  qui est à variations bornées si  $\mu$  l'est, et

$$\left| \int_Y f(y)d\mu(y) \right| \leq \int_Y |f(y)d|\mu|(y).$$

Enfin si  $f : Y \rightarrow Z$  est une application borélienne entre deux espaces topologiques, la mesure image  $f_*(\mu)$  est définie par

$$\int_Z g(f_*(d\mu)) = \int_Y (g \circ f)d\mu.$$

*Le complexe associé à  $\mathcal{M}_k(X)$ .* — Les inclusions de faces

$$F_i : \Delta^{k-1} \hookrightarrow \Delta^k$$

induisent par composition des applications

$$\begin{aligned} F_i : \mathcal{C}^1(\Delta^k, X) &= Y_k \longrightarrow Y_{k-1} \\ f &\longmapsto f \circ F_i \end{aligned}$$

et donc des homomorphismes

$$\partial_i = (F_i)_* : \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{M}_{k-1}.$$

En posant  $\partial = \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_i$ , on vérifie que  $\partial^2 = 0$  et donc que la suite

$$\mathcal{M}_{k+1} \xrightarrow{\partial} \mathcal{M}_k \xrightarrow{\partial} \mathcal{M}_{k-1}$$

est un complexe de chaînes, noté  $\mathcal{M}_*$ . Par ailleurs, à partir des simplexes  $\mathcal{C}^1$ , on peut définir un complexe de chaînes également,  $Y_*$ , le complexe des chaînes singulières de classe  $\mathcal{C}^1$ . L'application

$$i_* : Y_* \longrightarrow \mathcal{M}_*$$

est alors définie par

$$f \in Y_k, i_k(f) = \text{masse de Dirac sur } Y_k \text{ au } k\text{-simplexe } f.$$

PROPOSITION 4.2. —  *$i$  induit un isomorphisme en homologie.*

On peut prouver cette proposition en passant à l'homologie de De Rham.

*Remarques.*

i) L'homologie des chaînes singulières  $\mathcal{C}^1$  est clairement la même que celle des chaînes singulières  $\mathcal{C}^0$ , en effet dans toute classe singulière on peut trouver des représentants  $\mathcal{C}^1$ , dans notre contexte, on peut par exemple utiliser la chaîne droite.

ii) L'intérêt des chaînes  $\mathcal{C}^1$  est de pouvoir travailler avec des formes différentielles. En effet l'accouplement :

$$Y_*(X) \otimes \Lambda^*(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, \omega) \longmapsto \int_{\Delta^k} f^*(\omega)$$

se prolonge en un accouplement

$$\mathcal{M}_*(X) \otimes \Lambda^*(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

donné par

$$\langle \mu, \omega \rangle = \int_{Y_k} \left( \int_{\Delta^k} f^*(\omega) \right) d\mu(f).$$

(on rappelle que si  $\omega$  est une  $k$ -forme sur  $X$  et  $f$  une application  $\mathcal{C}^1$  de  $\Delta^k$  dans  $X$ ,  $f^*(\omega)$  est la  $k$ -forme image réciproque sur  $\Delta^k$ ).

Enfin si  $X$  est une variété hyperbolique compacte orientée,

PROPOSITION 4.3. — Si  $\mu \in \mathcal{M}_n(X)$  est un  $n$ -cycle il représente la classe

$$\left( \frac{1}{\text{vol}(X)} \langle \mu, \Omega_X \rangle \right) [X]$$

où  $\Omega_X$  est la forme volume de  $X$ .

*Preuve.* —  $\mu$  représente un multiple de  $[X]$ , pour calculer le coefficient multiplicatif, il suffit de le tester sur la classe d'orientation "normalisée" :

$$\frac{1}{\text{vol}(X)} [\Omega_X].$$

Notons que  $\Omega_X$  n'est rien d'autre que la forme volume de la métrique hyperbolique. ■

On a alors la 2<sup>ième</sup> définition du volume simplicial.

DÉFINITION 4.4. —  $\|X\| = \inf\{\|\mu\| \mid \mu \text{ est un } n\text{-cycle qui représente } [X]\}$ .

*Remarque.* — Si  $\sum a_i f_i$  est un cycle, on lui associe la mesure suivante sur  $Y_n$

$$\sum a_i \delta_{f_i} = \mu$$

dont la variation totale est  $\sum |a_i|$ . Il est donc clair que cette définition du volume simplicial donne un invariant plus petit que la précédente définition. La réciproque est laissée au lecteur.

Enfin la rectification induit une application

$$S_X : \mathcal{M}_*(X) \longrightarrow \mathcal{M}_*(X)$$

homotope à l'identité.

PROPOSITION 4.5. — *Il y a une homotopie de chaîne entre  $S_X$  et l'identité.*

*Preuve.* — Reprenons l'homotopie précédente entre un simplexe  $f$  et le simplexe rectifié  $\bar{\sigma}$

$$F : \Delta^k \times [0, 1] \longrightarrow X$$

$$(t, s) \longmapsto F(t, s) = \pi [sf(t) + (1 - s)\sigma(t)].$$

Les sommets étant fixés, on peut décomposer  $F$ , en une somme d'applications de  $\Delta^{k+1}$  dans  $X$ , c'est-à-dire en  $k + 1$ -simplexes singuliers. De plus si  $f$  est  $C^1$ ,  $F$  l'est. À chaque  $k$ -simplexe  $C^1$  on associe donc (une  $k + 1$ -chaîne)  $C^1$  que nous noterons  $F(f)$ , on a construit

$$F : Y_k \longrightarrow Y_{k+1}$$

qui est clairement continue. (ici  $Y_k$  désigne aussi bien l'espace  $C^1(\Delta^k, X)$  que le  $\mathbb{Z}$ -module libre construit à partir de celui-ci).

De plus

$$\partial \circ F = s_X - id + F \circ \partial.$$

C'est donc une homotopie de chaîne du complexe  $Y_*$  construit à partir des  $Y_k$ . En passant aux mesures on a de même

$$\partial \circ F_* - F_* \circ \partial = S_X - id \quad (S_X = (s_X)_*).$$

■

De cette proposition il résulte que  $S_X$  induit l'identité en homologie, en particulier si  $\mu$  représente  $[X]$  il en est de même de  $S_X(\mu)$ .

Soit alors  $\mu$  représentant  $[X]$  et  $\tilde{\sigma} \in C^1(\Delta^n, \mathbb{H}^n)$  le relevé de  $\sigma \in C^1(\Delta^n, X)$ .

**B. Preuve rigoureuse de  $v_n \|X\| \geq \text{vol}(X)$ .**

$$\begin{aligned} \text{vol}(X) &= \langle S_X(\mu), \Omega_X \rangle \\ &= \int_{\sigma \in Y_n} \left( \int_{\Delta^n} \sigma^*(\Omega_X) \right) d((s_X)_*(\mu)) \\ &= \int_{\sigma \in Y_n} \left( \int_{\Delta^n} (s_X(\sigma))^*(\Omega_X) \right) d\mu \\ &= \int_{Y_n} \left( \int_{\Delta^n} (s_{\mathbb{H}}(\tilde{\sigma}))^* \circ p^*(\Omega_X) \right) d\mu \\ \text{vol}(X) &= \int_{Y_n} \left( \int_{\Delta^n} (s_{\mathbb{H}}(\tilde{\sigma}))^*(\Omega_{\mathbb{H}^n}) \right) d\mu \end{aligned}$$

car  $p^*(\Omega_X) = \Omega_{\mathbb{H}^n}$ . Mais pour un simplexe droit

$$\int_{\Delta^n} (s_{\mathbb{H}}(\tilde{\sigma}))^* \Omega_{\mathbb{H}^n} = \text{vol}(\text{image de } s_{\mathbb{H}}(\tilde{\sigma})) \leq v_n$$

d'où

$$\text{vol}(X) \leq \int_{Y_n(X)} v_n d|\mu| = v_n \|\mu\|$$

et

$$\text{vol}(X) \leq v_n \|X\|.$$

■

Avant de prouver l'autre inégalité il est intéressant de traiter le cas de dimension 2.

### C. L'inégalité $v_n \|X\| \leq \text{vol}(X)$ pour les surfaces.

Nous rappelons la notion de domaine fondamental de  $\mathbb{H}^n$  pour l'action du groupe fondamental  $\Gamma$ .

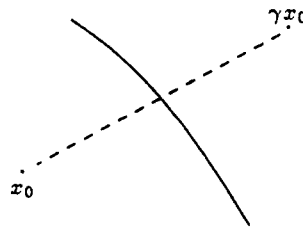
Un ensemble borelien  $D$  est appelé domaine fondamental pour  $\Gamma$  si

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D) = \mathbb{H}^n \text{ et } \gamma(D) \cap D \subseteq \partial D \quad \forall \gamma \neq id.$$

Dans notre cas on peut choisir

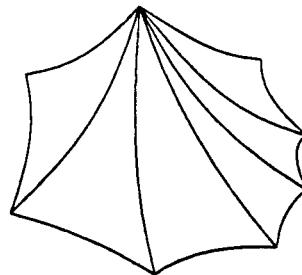
$$D = \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, x_0) \leq d(x, \gamma x_0) \quad \forall \gamma \in \Gamma\}$$

où  $x_0$  est un point fixé dans  $\mathbb{H}^n$ .



Si  $X$  est compacte, ce qui est le cas,  $D$  est compacte et est un polyèdre à bords totalement géodésiques. De plus  $\text{vol}(D) = \text{vol}(X)$ .

Dans le cas d'une surface  $D$  est un polygone géodésique à  $4g$  côtés, si  $g$  est le genre de la surface. Nous pouvons utiliser le découpage suivant de  $D$  donnant une décomposition de  $[X]$  en somme de simplexes.



surface de genre 2



on a  $\text{vol}(X) = 4\pi(g - 1)$ ,  $v_2 = \pi$  et avec le découpage précédent

$$\|X\| \leq (4g - 2)$$

car la triangulation du domaine fondamental représente au quotient la classe fondamentale.

On rappelle qu'une propriété des surfaces est qu'il existe des revêtements de degré aussi grand que l'on veut

$$\begin{array}{ccc} X_1 & & \\ \downarrow & \text{degré } d & \\ X & & \end{array}$$

En effet on sait par la théorie classique que les revêtements galoisiens de  $X$  sont en bijection avec les sous-groupes normaux de  $\pi_1(X)$ ,  $\pi_1(X_1)$  étant un tel sous-groupe, et le degré est l'indice de  $\pi_1(X_1)$  dans  $\pi_1(X)$ .

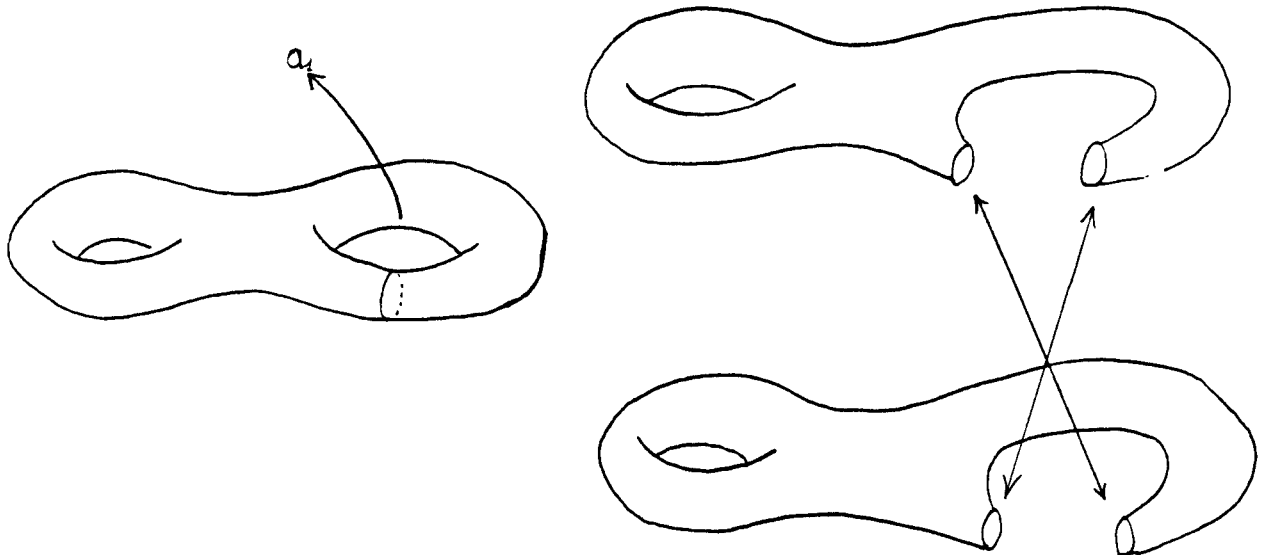
Alors il suffit de construire des sous-groupes normaux d'indice arbitrairement grand. Or la présentation standard du  $\pi_1$  d'une surface est

$$\pi_1(X) = \{a_1, \dots, a_{2g} \mid [a_1, a_2][a_3, a_4] \cdots [a_{2g-1}, a_{2g}] = 1\}.$$

On construit des morphismes à valeurs dans  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  comme suit

$$\begin{array}{ccccc} \varphi : \pi_1(X) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\ a_1 & \longmapsto & 1 & \longmapsto & 1 \\ a_i & \longmapsto & 0 & \longmapsto & 0 \quad \text{pour } i \neq 1 \end{array}$$

alors  $\ker \varphi$  est un sous-groupe normal d'indice  $d$ . On peut d'ailleurs voir la surface comme suit (exemple de genre 2) :



On recolle comme indiqué et on construit un revêtement à deux feuillettes de la précédente correspondant au morphisme dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  qui envoie  $a_1 \rightarrow 1$ . Or la projection  $X_1 \rightarrow X$  est de degré  $d$ , donc

$$\|X_1\| \geq d\|X\| = \|\pi_*([X_1])\|$$

(il y a égalité car c'est un revêtement). Le genre de  $X_1$  se calcule avec le volume hyperbolique, en effet

$$\text{vol}(X_1) = 4\pi(g_{X_1} - 1) = d \text{vol}(X) = 4\pi d(g_X - 1)$$

d'où

$$g_{X_1} = d(g - 1) + 1 \quad (g_X = g)$$

et donc l'inégalité précédente donne

$$d\|X\| \leq \|X_1\| \leq 4d(g - 1) + 3$$

en divisant par  $d$  il vient

$$\|X\| \leq 4(g - 1) + 3/d, \quad \forall d \in \mathbb{N}$$

et donc

$$\|X\| \leq 4(g - 1) = \frac{\text{vol}(X)}{\pi}.$$

En dimension plus grande il n'y a pas l'outil essentiel du genre.

#### D. Preuve de l'inégalité $v_n\|X\| \leq \text{vol}(X)$ .

L'idée est de construire un cycle de  $\mathcal{M}_n(X)$  qui représente le mieux possible  $[X]$  en ce sens ou sa norme sera la plus proche possible de  $X$ .

Soit  $G$  le groupe des isométries positives de l'espace hyperbolique. Le groupe d'isotropie de l'origine dans le modèle de la boule unité (modèle de Poincaré) est  $SO(n)$  et  $G/SO(n)$  s'identifie à  $\mathbb{H}^n$ . De même  $G$  s'identifie à l'espace des repères de  $\mathbb{H}^n$ , soit  $\mathcal{R}(\mathbb{H}^n)$ , qui sont orthonormés

$$G \simeq \mathcal{R}(\mathbb{H}^n).$$

Si  $\Gamma$  est le sous-groupe discret cocompact de  $\mathbb{H}^n$  tel que

$$X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$$

( $\Gamma$  s'identifie au  $\pi_1(X)$ ), alors  $\mathcal{R}(X) = \Gamma \backslash G$  s'identifie canoniquement au fibré des repères orthonormés de  $X$ .

Comme espace mesurable on a

$$G = SO(n) \times \mathbb{H}^n = \mathcal{R}(\mathbb{H}^n)$$

on construit donc une mesure bi-invariante sur  $G$ , notée  $h_0$  en prenant le produit de la mesure de probabilité invariante sur  $SO(n)$  par la mesure de volume  $\Omega_{\mathbb{H}^n}$ .

La mesure  $h_0$  est invariante à gauche et donc passe au quotient sur  $\mathcal{R}(X)$ , nous la noterons  $h_X$ . On a bien sûr

$$h_X(\mathcal{R}(X)) = \text{vol}(X).$$

Soit  $\sigma \in \mathcal{C}^1(\Delta^k, \mathbb{H}^n)$ , on pose

$$\begin{array}{ccc} K_\sigma : \mathcal{R}(X) & \longrightarrow & Y_k = \mathcal{C}^1(\Delta^k, X) \\ g & \longmapsto & K_\sigma(g) = \pi(g\sigma) \end{array}$$

la fonction  $K_\sigma$  est bien définie sur  $\mathcal{R}(X)$ , car

$$K_\sigma(\gamma g) = \pi(\gamma g\sigma) = \pi(g\sigma) = K_\sigma(g).$$

Posons alors

$$L(\sigma) = (K_\sigma)_*(h_X).$$

PROPOSITION 4.6. —  $L(\sigma) \in \mathcal{M}_k(X)$ .

*Preuve.* —  $L(\sigma)$  est une mesure sur  $Y_k$ . Elle est positive et de masse totale finie car elle est l'image d'une mesure positive de masse totale finie. Elle est donc à variations bornées.

Son support est l'image de  $K_\sigma$  qui est compacte (c'est l'ensemble des simplexes  $\pi(g\sigma)$ ). ■

*Remarques.* — Par abus de langage et en identifiant un simplexe à la mesure de Dirac qu'il définit on peut écrire

$$L(\sigma) \sim \int_{\Gamma \setminus G} \pi(g\sigma) dh_X(g).$$

$L$  vérifie un certain nombre de propriétés évidentes

i) par construction  $\forall g_0 \in G$  (isométries positives)

$$L(g_0\sigma) = L(\sigma)$$

ceci car  $h_X$  est  $G$ -invariante à droite. Plus précisément si  $r_{g_0}$  désigne la translation à droite dans  $G$

$$K_{g_0\sigma}(g) = (K_\sigma \circ r_{g_0})(g)$$

et

$$L(g_0\sigma) = (K_{g_0\sigma})_*(h_X) = (K_\sigma)_*(r_{g_0})_*(h_X) = L(\sigma).$$

ii) on a  $L(\sigma^{(i)}) = \partial_i(L(\sigma))$  où  $\sigma^{(i)}$  est la  $i$ -ième face de  $\sigma$ . C'est la définition de  $\partial_i$ .

iii)  $\|L(\sigma)\| = \text{vol}(X)$  pour tout  $\sigma \in \mathcal{C}^1(\Delta^n, \mathbb{H}^n)$ . En effet,  $L(\sigma)$  est une mesure positive donc  $\|L(\sigma)\|$  est sa masse totale qui est par conséquent celle de  $h_X$ , c'est-à-dire  $\text{vol}(X)$ . On peut le voir aussi en disant que si chaque simplexe est considéré comme une masse de Dirac, sa norme est 1 (comme dans la version classique) et donc

$$\|L(\sigma)\| = \int_{\Gamma \setminus G} dh_X = \text{vol}(X).$$

iv) Enfin si  $\sigma \in \mathcal{C}^1(\Delta^n, \mathbb{H}^n)$ , bien que  $L(\sigma)$  ne définisse pas à priori un cycle on peut calculer

$$\begin{aligned}
 \langle L(\sigma), \Omega_X \rangle &= \int_{\tau \in \mathcal{Y}_n(X)} \left( \int_{\Delta^n} \tau^*(\Omega_X) \right) d[(K_\sigma)_*(h_X)] \\
 &= \int_{g \in \Gamma \setminus G} \left( \int_{\Delta^n} (K_\sigma(g))^*(\Omega_X) \right) d(h_X)(g) \\
 &= \int_{g \in \Gamma \setminus G} \left( \int_{\Delta^n} \sigma^* g^* \pi^*(\Omega_X) \right) d(h_X)(g) \\
 &= \int_{\Gamma \setminus G} \left( \int_{\Delta^n} \sigma^* g^*(\Omega_{\mathbb{H}^n}) \right) d(h_X) \\
 &= \int_{\Gamma \setminus G} \left( \int_{\Delta^n} \sigma^*(\Omega_{\mathbb{H}^n}) \right) d(h_X)
 \end{aligned}$$

car  $g^*(\Omega_{\mathbb{H}^n}) = \Omega_{\mathbb{H}^n}$ , d'où

$$\langle L(\sigma), \Omega_X \rangle = (\text{vol}(\sigma)) \text{vol}(X)$$

où  $\text{vol}(\sigma) = \int_{\Delta^n} \sigma^*(\Omega_{\mathbb{H}^n})$ .

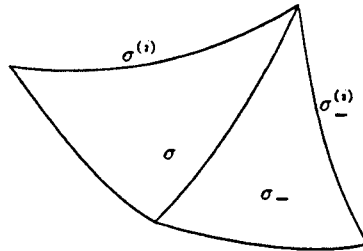
On peut aussi utiliser la formule intuitive pour  $L(\sigma)$ . Maintenant si  $\sigma$  est un  $n$ -simplexe droit (idéal régulier par exemple), appelons  $\sigma_-$  le symétrique de  $\sigma$  par rapport à une de ses faces, et posons

$$M(\sigma) = L(\sigma) - L(\sigma_-).$$

LEMME 4.7. —  $M(\sigma)$  est un cycle.

*Preuve.*

$$\begin{aligned}
 \partial(M(\sigma)) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i(M(\sigma)) \\
 \partial_i M(\sigma) &= \partial_i L(\sigma) - \partial_i L(\sigma_-) = L(\sigma^{(i)}) - L(\sigma_-^{(i)})
 \end{aligned}$$



la  $i$ -ième face de  $\sigma$  et celle de  $\sigma_-$  sont entièrement définies par leurs sommets,  $n$ -uplets de points.

Il est facile de voir qu'il existe une isométrie *positive*  $g_i$  telle que

$$g_i \sigma^{(i)} = \sigma_-^{(i)}$$

alors

$$L(\sigma_-^{(i)}) = L(g_i \sigma^{(i)}) = L(\sigma^{(i)})$$

et

$$\partial_i M(\sigma) = 0 \Rightarrow \partial M(\sigma) = 0.$$

LEMME 4.8. — On a

$$\|M(\sigma)\| = \|L(\sigma)\| + \|L(\sigma_-)\| = 2 \operatorname{vol}(X).$$

*Preuve.* — Il suffit de prouver que les mesures  $L(\sigma)$  et  $L(\sigma_-)$  ont des supports disjoints, car alors on aura

$$\begin{aligned} \|M(\sigma)\| &= \int_{Y_n} d|M(\sigma)| = \int_{Y_n} d|L(\sigma)| + \int_{Y_n} d|L(\sigma_-)| \\ &= \|L(\sigma)\| + \|L(\sigma_-)\|. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \operatorname{support} L(\sigma) &= \{\pi(g\sigma), g \in G\} \\ \operatorname{support} L(\sigma_-) &= \{\pi(g\sigma_-), g \in G\} \end{aligned}$$

et ils sont disjoints car il n'existe pas d'isométries *positives* envoyant  $\sigma$  sur  $\sigma_-$  (ils ont des orientations différentes).

En conclusion le cycle  $M(\sigma)$  représente  $2 \operatorname{vol}(\sigma)[X]$  et  $\|M(\sigma)\| = 2 \operatorname{vol}(X)$ , il s'ensuit que

$$\|X\| \leq \operatorname{vol}(X) / \operatorname{vol}(\sigma).$$

En prenant  $\sigma$  arbitrairement proche (ou égal à) un simplexe idéal régulier on prouve l'inégalité.

## 5. Fin de la preuve du théorème de rigidité

Soient  $X_1, X_2$  deux variétés hyperboliques compactes connexes orientées de dimension  $n$  et  $f$  une équivalence d'homotopie entre elles

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ & \xleftarrow{h} & \end{array}$$

$f \circ h \sim id_{X_2}$  et  $h \circ f \sim id_{X_1}$ .  $f$  induit un isomorphisme  $\rho = f_*$

$$\rho : \pi_1(X_1) \longrightarrow \pi_1(X_2).$$

On identifie  $X_i$  à  $\Gamma_i \backslash \mathbb{H}^n$  où  $\Gamma_i (i = 1, 2)$  sont des sous-groupes discrets cocompacts d'isométries de  $\mathbb{H}^n$ . On a le

THÉORÈME 5.1. — L'application  $f$  se relève en une application continue  $\tilde{f} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  qui vérifie

$$\tilde{f}(\gamma x) = \rho(\gamma)\tilde{f}(x), \quad \gamma \in \Gamma_1$$

et de même avec  $h$ . De plus  $\tilde{f}$  se prolonge en une application continue bijective notée encore  $\tilde{f}$

$$\tilde{f} : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$$

vérifiant les mêmes identités.

Admettons ce théorème et prouvons le suivant :

THÉORÈME 5.2. — Soient  $x_0, \dots, x_n \in S^{n-1}$  qui engendrent un simplexe idéal régulier (et géodésique) dans  $\mathbb{H}^n$ , il en est de même pour  $\tilde{f}(x_0), \dots, \tilde{f}(x_n)$ .

Nous déduisons alors de ce qui précède le

COROLLAIRE 5.3. — Les variétés  $X_1$  et  $X_2$  sont isométriques.

*Preuve du corollaire.* — D'après ce qui précède  $\tilde{f}$  coïncide sur  $S^{n-1}$  avec une isométrie hyperbolique  $\varphi$ . Une telle isométrie vérifie

$$\forall x \in S^{n-1}, \varphi(\gamma x) = \rho(\gamma)\varphi(x) \quad \forall \gamma \in \Gamma_1$$

puisqu'elle est entièrement déterminée par sa trace sur  $S^{n-1}$ , elle vérifie la même identité dans  $\mathbb{H}^n$ , à savoir

$$\forall x \in \mathbb{H}^n, \forall \gamma \in \Gamma_1 \quad \varphi(\gamma x) = \rho(\gamma)\varphi(x).$$

Elle passe donc au quotient en une isométrie de  $X_1$  sur  $X_2$  qui induit  $\rho$  en homotopie et donc est homotope à  $f$ . ■

*Preuve du théorème 5.2.* — Soient  $x_0, \dots, x_n \in S^{n-1}$  engendrant un simplexe géodésique  $\sigma$  idéal régulier et tel que ce ne soit pas le cas pour  $\tilde{f}(x_0), \dots, \tilde{f}(x_n)$ . L'idée est alors la suivante :  $f$  est une équivalence d'homotopie, donc elle ne perd rien de la topologie (de l'homotopie), or pour les variétés hyperboliques le volume et la topologie sont étroitement liés et donc  $\tilde{f}$  ne doit rien perdre du volume non plus.

Un peu plus précisément adoptons la notation intuitive, le "meilleur" cycle est

$$\mu = \frac{1}{2v_n} \left( \int_{\Gamma_1 \setminus G} \pi_1(g\sigma) dh_{X_1}(g) - \int_{\Gamma_1 \setminus G} \pi_1(g\sigma_-) dh_{X_1}(g) \right)$$

si  $\sigma$  est idéal régulier. En effet,  $\mu$  représente  $[X_1]$ . L'application  $f$  étant une équivalence d'homotopie  $f_*(\mu)$  doit représenter  $f_*([X_1]) = [X_2]$ . Or

$$f_*(\mu) = \frac{1}{2v_n} \left( \int_{\Gamma_1 \setminus G} f \circ \pi_1(g\sigma) dh_{X_1} - \int_{\Gamma_1 \setminus G} f \circ \pi_1(g\sigma_-) dh_{X_1} \right)$$

traitons un des deux termes :

$$\int_{\Gamma_1 \setminus G} f \circ \pi_1(g\sigma) dh_{X_1} = \int_{\Gamma_1 \setminus G} \pi_2(\tilde{f}g\sigma) dh_{X_1}$$

où  $\pi_2$  est la projection  $\mathbb{H}^n \rightarrow X_2$ . Et en rectifiant (on note  $s$  la rectification dans  $\mathbb{H}^n$ ),

$$L_2(\sigma) = \int_{\Gamma_1 \setminus G} f \circ \pi_1(g\sigma) dh_{X_1} \sim \int_{\Gamma_1 \setminus G} \pi_2(s(\tilde{f}g\sigma)) dh_{X_1}.$$

L'accouplement avec  $\Omega_{X_2}$  donne

$$\langle L_2(\sigma), \Omega_{X_2} \rangle = \int_{\Gamma_1 \setminus G} \langle s\tilde{f}g\sigma, \pi_2^*(\Omega_{X_2}) \rangle dh_{X_1}$$

or l'image réciproque de  $\Omega_{X_2}$  sur  $\mathbb{H}^n$  est  $\Omega_{\mathbb{H}^n}$ ,

$$\langle L_2(\sigma), \Omega_{X_2} \rangle = \int_{\Gamma_1 \setminus G} \text{vol}(s\tilde{f}g\sigma) dh_{X_1}.$$

Alors puisque  $\sigma$  est idéal régulier,

$$\langle L_2(\sigma), \Omega_{X_2} \rangle \leq v_n \text{vol}(X_1) = \text{vol}(\sigma) \text{vol}(X_1)$$

et

$$\langle f_*(\mu), \Omega_{X_2} \rangle \leq \text{vol}(X_1).$$

A priori donc  $f_*(\mu)$  va représenter

$$f_*(\mu) \sim A[X_2] \text{ avec } A \leq \frac{\text{vol}(X_1)}{\text{vol}(X_2)} = 1.$$

En effet, les volumes de  $X_1$  et  $X_2$  sont égaux car

$$\|X_2\| = \|f_*(X_1)\| \leq \|X_1\|$$

et on obtient l'égalité en utilisant l'inverse homotopique de  $f$ . L'égalité des volumes simpliciaux entraîne celle des volumes par le théorème principal. La fonction  $f$  étant une équivalence d'homotopie, on doit avoir  $A = 1$  donc l'inégalité

$$\int_{\Gamma \setminus G} \text{vol}(s\tilde{f}g\sigma) dh_{X_1} \leq \text{vol}(\sigma) \int_{\Gamma \setminus G} dh_{X_1} = \text{vol}(\sigma) \text{vol}(X_1)$$

doit être une égalité, d'où

$$\text{vol}(s\tilde{f}(g\sigma)) = \text{vol}(g\sigma) \text{ pour presque tout } g$$

et par continuité,

$$\text{vol}(s\tilde{f}(g\sigma)) = \text{vol}(g\sigma) \quad \forall g \in G$$

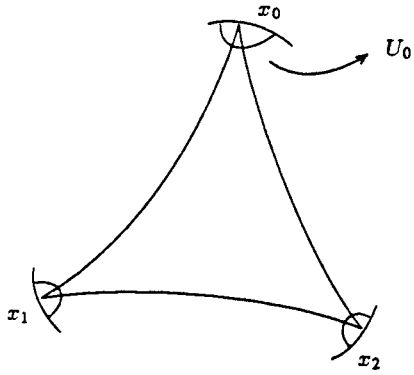
donc

$$\text{vol}(s\tilde{f}(\sigma)) = v_n$$

d'où la contradiction. ■

On peut aussi faire une preuve calculatoire n'utilisant pas de simplexes idéaux, mais des simplexes à distance finie. Nous la donnons pour être complet.

Utilisons les mêmes notations, on peut trouver des voisinages  $U_i$  de  $x_i$  dans  $\mathbb{H}^n$

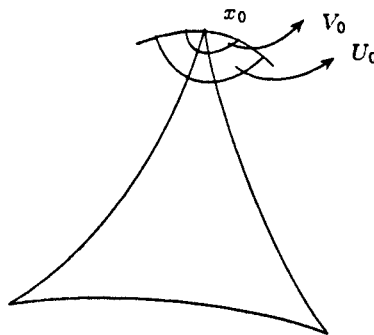


et un  $\varepsilon > 0$  tels que si  $\sigma = \sigma(y_0, \dots, y_n)$   
 $y_i \in U_i$  alors  $\text{vol}(s(\tilde{f}(\sigma))) \leq v_n - \varepsilon$  où  
 $s = s_{\mathbb{H}^n}$  est la rectification dans  $\mathbb{H}^n$ .

On peut alors trouver des voisinages de  $x_i$ ,  $V_i \subset U_i$  (dans  $\mathbb{H}^n$ ) tels que

$$\mathcal{R}_1(X_1) = \{\Gamma g \in \mathcal{R}(X_1) \setminus g \text{ vérifiant } g(V_i) \subset U_i \text{ pour tout } i\}$$

ait une mesure  $> 0$  soit  $h_{X_1}(\mathcal{R}_1(X_1)) = h_1 > 0$ .



Soit alors  $\sigma_0$  un simplexe géodésique de  $\mathbb{H}^n$  dont les sommets sont dans  $V_i$  et vérifiant

$$\text{vol}(\sigma_0) > v_n - \delta$$

où  $\delta$  sera déterminé plus loin.



Alors  $S_{X_2}(f_*L(\sigma_0))$  représente un multiple de  $[X_2]$  que nous allons calculer.

$$\begin{aligned}
\langle S_{X_2}f_*L(\sigma_0), \Omega_{X_2} \rangle &= \int_{\tau \in Y_n(X_2)} \left( \int_{\Delta^n} \tau^*(\Omega_{X_2}) \right) d(s_*f_*K(\sigma_0)_*(h_{X_1})) \\
&= \int_{\rho \in Y_n(X_1)} \left( \int_{\Delta^n} (s(f\rho))^*(\Omega_{X_2}) \right) d[K(\sigma_0)_*(h_{X_1})] \\
&= \int_{\mathcal{R}(X_1)} \left( \int_{\Delta^n} (s(f\pi g\sigma_0))^*(\Omega_{X_2}) \right) dh_{X_1} \\
&= \int_{\mathcal{R}(X_1)} \left( \int_{\Delta^n} [s(\pi \tilde{f}g\sigma_0)]^*(\Omega_{X_2}) \right) dh_{X_1} \\
&= \int_{\mathcal{R}(X_1)} \left( \int_{\Delta^n} (s(\tilde{f}g\sigma_0))^* \circ \pi^*(\Omega_{X_2}) \right) dh_{X_1} \\
&= \int_{\mathcal{R}(X_1)} \left( \int_{\Delta^n} (s(\tilde{f}g\sigma_0))^*(\Omega_{\mathbb{H}^n}) \right) dh_{X_1} \\
&= \int_{\mathcal{R}(X_1)} \text{vol}(s(\tilde{f}g\sigma_0)) dh_{X_1} \\
&= \int_{\mathcal{R}_1(X_1)} \text{vol}(s(\tilde{f}g\sigma_0)) dh_{X_1} + \int_{\mathcal{R}(X_1) \setminus \mathcal{R}_1(X_1)} \text{vol}(s(\tilde{f}g\sigma_0)) dh_{X_1} \\
&\leq h_1(\text{vol}(\sigma_0) + \delta - \varepsilon) + (\text{vol}(X_1) - h_1)(\text{vol}(\sigma_0) + \delta) \\
&= (\text{vol}(\sigma_0) + \delta) \text{vol}(X_1) - \varepsilon h_1
\end{aligned}$$

car  $\text{vol}(s\tilde{f}(g\sigma_0)) \leq v_n - \varepsilon \leq \text{vol}(\sigma_0) + \delta - \varepsilon$  pour  $\Gamma g \in \mathcal{R}_1(X_1)$  et si  $\Gamma g \notin \mathcal{R}_1(X_1)$  alors  $\text{vol}(s\tilde{f}(g\sigma_0)) \leq v_n \leq \text{vol}(\sigma_0) + \delta$ . On choisit alors

$$\delta < \varepsilon h_1 / \text{vol}(X_1)$$

et on obtient

$$\langle S_{X_2}f_*(L(\sigma_0)), \Omega_{X_2} \rangle < \text{vol}(\sigma_0) \text{vol}(X_1)$$

de même

$$-\langle S_{X_2}f_*(L(\sigma_{0-})), \Omega_{X_2} \rangle < -\text{vol}(\sigma_{0-}) \text{vol}(X_1).$$

Or  $f_*([X_1]) = [X_2]$  car  $f_*$  est un isomorphisme entre  $H_n(X_1, \mathbb{Z})$  et  $H_n(X_2, \mathbb{Z})$ , donc

$$\|X_2\| = \|f_*([X_1])\| \leq \|X_1\|$$

et par l'inégalité inverse obtenue avec  $h_*$

$$\|X_1\| = \|X_2\| \Rightarrow \text{vol}(X_1) = \text{vol}(X_2).$$

Donc  $S_{X_2}(f_*(M(\sigma_0)))$  représente  $A[X_2]$  avec  $A < 2 \text{vol}(\sigma_0)$ .

Par ailleurs  $M(\sigma_0)$  représente  $2 \text{vol}(\sigma_0)[X_1]$  et nous obtenons une contradiction car  $f_*(M(\sigma_0))$  et donc  $S_{X_2}(f_*(M(\sigma_0)))$  doivent représenter  $2 \text{vol}(\sigma_0)[X_2]$ . ■

## 6. Le théorème de prolongement des quasi-isométries

Nous allons maintenant prouver le prolongement du relevé aux revêtements universels de l'équivalence d'homotopie, c'est-à-dire le théorème 5.1.

Chaque variété est vue comme le quotient de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  par un sous-groupe discret cocompact du groupe d'isométrie de  $\mathbb{H}^n$

$$X_i = \Gamma_i \backslash \mathbb{H}^n.$$

On peut choisir un domaine fondamental  $D_i$  pour chacune des actions, alors on définit  $\tilde{f}$  sur  $D_i$  de manière à ce que

$$\pi_2(\tilde{f}(x)) = f(\pi_1(x))$$

où  $\pi_i : \mathbb{H}^n \rightarrow X_i$  est la projection canonique.

Soit  $\rho$  l'isomorphisme déduit de  $f$  sur  $\pi_1(X_i) \simeq \Gamma_i$ , on étend alors la définition de  $\tilde{f}$  par

$$\forall \gamma \in \Gamma_1, \quad \tilde{f}(\gamma x) = \rho(\gamma)(\tilde{f}(x)).$$

L'application  $\tilde{f}$  est alors bien définie sur  $\mathbb{H}^n$  et entrelace les actions de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

THÉORÈME 6.1. — *L'application  $\tilde{f}$  est une quasi-isométrie, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $(x, y)$  dans  $\mathbb{H}^n$*

$$\frac{1}{a}d(x, y) - b \leq d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq ad(x, y).$$

*Preuve.* — Si  $h$  est l'inverse homotopique de  $f$ , on peut le relever en  $\tilde{h}$  satisfaisant

$$\tilde{h}(\gamma x) = \rho^{-1}(\gamma)\tilde{h}(x) \quad \forall \gamma \in \Gamma_2.$$

Par ailleurs, on peut choisir  $f$  et  $h$  de classe  $C^1$ , en effet dans toute classe d'homotopie d'applications entre variétés il y a une application de classe  $C^1$ .

Alors  $\tilde{f}$  et  $\tilde{h}$  satisfont à une condition de Lipschitz

$$\begin{aligned} d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) &\leq ad(x, y) \\ d(\tilde{h}(x), \tilde{h}(y)) &\leq ad(x, y). \end{aligned}$$

De plus  $\tilde{h}\tilde{f}$  est équivariante pour l'action de  $\Gamma_1$  et donc vérifie

$$\exists b > 0 \quad \forall x \in \mathbb{H}^n \quad d(\tilde{h}\tilde{f}(x), x) \leq b_1.$$

Alors

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, \tilde{h}\tilde{f}(x)) + d(\tilde{h}\tilde{f}(x), \tilde{h}\tilde{f}(y)) + d(\tilde{h}\tilde{f}(y), y) \\ &\leq 2b_1 + ad(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat avec  $b = 2b_1/a$ .

Le prolongement de  $\tilde{f}$  est alors un corollaire du prolongement de toute quasi-isométrie. Soit  $F$

$$F : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H}^n$$

une quasi-isométrie de  $\mathbb{H}^n$ , alors

THÉORÈME 6.2. — *L'application  $F$  se prolonge en une application continue, injective, notée encore  $F$ ,*

$$F : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}.$$

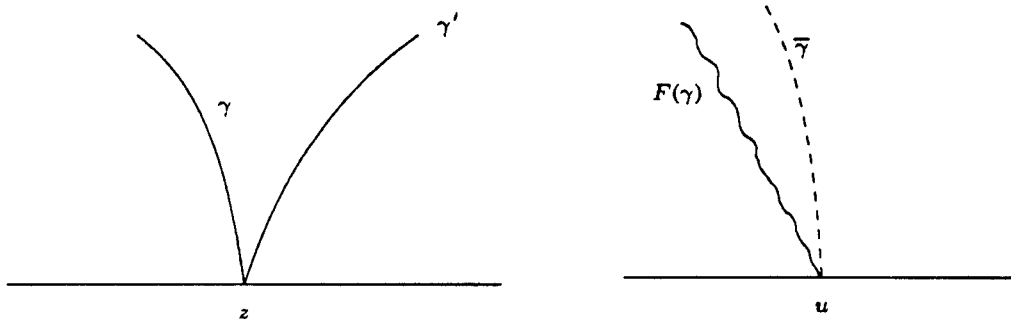
La preuve repose sur le lemme fondamental suivant, que nous allons admettre dans un premier temps.

LEMME 6.3. — *Il existe un réel  $r > 0$ , tel que si  $\gamma$  est une géodésique de  $\mathbb{H}^n$ , il existe une géodésique  $\bar{\gamma}$  telle que la courbe  $F(\bar{\gamma}(t))$  soit dans le voisinage tubulaire,  $N_2(\bar{\gamma})$ , de rayon  $r$  de  $\bar{\gamma}$ .*

*De plus si  $H$  est un hyperplan (hyperbolique) orthogonal à  $\gamma$ , la projection sur  $\bar{\gamma}$  de  $F(H)$ ,  $P_{\bar{\gamma}}(F(H))$  a un diamètre inférieur à  $r$ .*

*Preuve du théorème 6.2.*

i) Soit  $z \in S^{n-1}$  et  $\gamma$  une géodésique qui aboutit à  $z$ , alors  $F(\gamma)$  est à distance bornée d'une géodésique  $\bar{\gamma}$ , soit  $u$  le bout de  $\bar{\gamma}$  dans le sens défini par le sens de parcours de  $F(\gamma)$ .

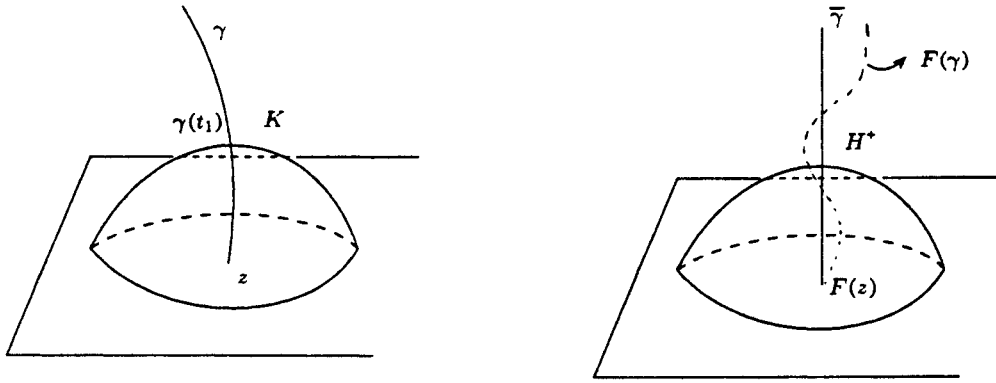


alors on pose  $F(z) = u$ . L'application  $F$  est bien définie, en effet si  $\gamma'$  est une autre géodésique aboutissant en  $z$ , alors

$$d(\gamma(t), \gamma'(t)) \leq C < +\infty \text{ pour } t \geq t_0$$

et donc par la quasi-isométrie  $F(\gamma')$  et  $\bar{\gamma}'$  sont à distance bornée de  $F(\gamma)$  et  $\bar{\gamma}$  pour  $t \geq t_0$  et définissent par conséquent le même point  $u$ .

ii) Pour montrer la continuité, il faut utiliser la seconde partie du lemme.



Tout ouvert de  $S^{n-1}$  contenant  $F(z)$ , contient un disque centré en  $F(z)$ , soit  $D$  ce disque, il est la trace à l'infini d'un hyperplan totalement géodésique  $H$  qui intersecte  $\bar{\gamma}$  en  $\bar{\gamma}(t_0)$  et sépare l'espace en deux parties  $H^+$  et  $H^-$ .

Considérons la projection sur  $\bar{\gamma}$  de  $F(\gamma)$ , pour  $t$  assez grand elle est à l'intérieur de  $H^-$ , en effet, il est aisé de vérifier que

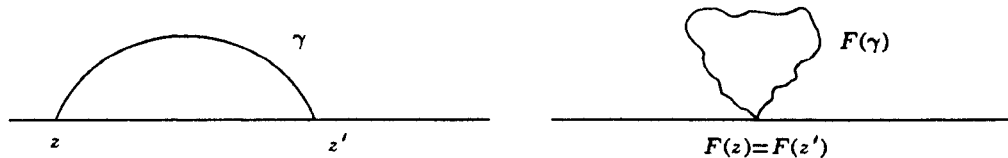
$$d\left(P_{\bar{\gamma}}(F(\gamma(t))), \bar{\gamma}(t_0)\right) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

donc si  $t \geq t_1$ ,  $d(P_{\bar{\gamma}}F(\gamma(t)), H^+) > 2r$ .

Soit alors  $K$  l'hyperplan orthogonal à  $\gamma$  en  $\gamma(t_1)$ . Alors  $F(K)$  passe par  $F(\gamma(t_1))$ , alors  $P_{\bar{\gamma}}(F(K))$  contient  $P_{\bar{\gamma}}(F(\gamma(t_1)))$  et à un diamètre inférieur à  $r$  donc reste à l'intérieur de  $H$ , soit dans  $H^-$ .

Ce qui prouve donc que  $F^{-1}(H^-) \supset K$  et donc que  $F^{-1}(D)$  contient un disque de  $S^{n-1}$  centré en  $z$ , c'est-à-dire un ouvert.

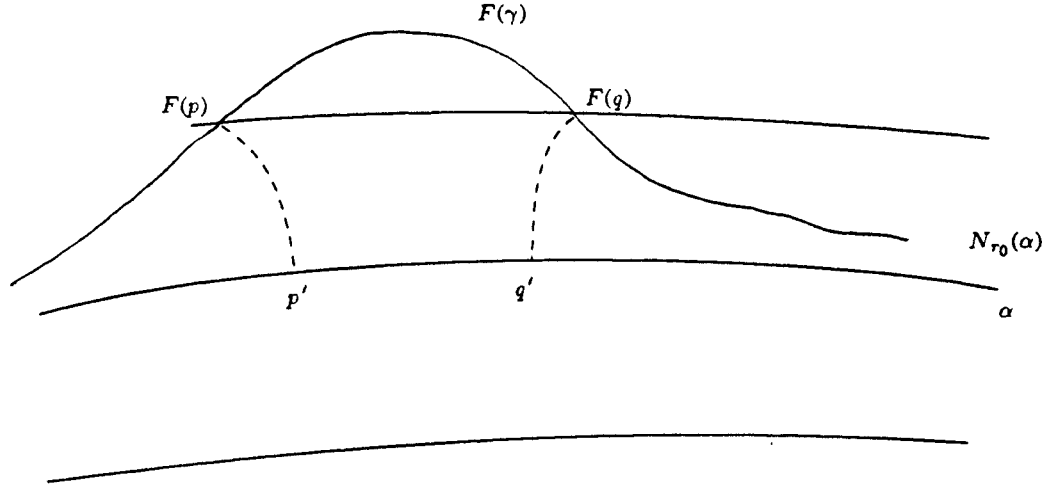
iii) L'application est injective car si  $F(z) = F(z')$  soit  $\gamma$  la géodésique qui joint  $z$  à  $z'$ ,  $\bar{\gamma}$  à deux points à l'infini et donc aussi  $F(\gamma)$  qui doit être



dans  $N_r(\bar{\gamma})$ . Ce qui prouve le théorème. ■

*Preuve du Lemme 6.3.* — Nous allons prouver la première partie du lemme, la seconde résultant de techniques analogues est laissée au lecteur.

Soient  $\gamma$  une géodésique et  $\alpha$  une autre géodésique. Considérons pour  $r_0$  donné le voisinage tubulaire de  $\alpha$ , noté  $N_{r_0}(\alpha)$ .



Si  $F(\gamma)$  rencontre  $N_{r_0}(\alpha)$ , considérons une composante connexe bornée de  $F(\gamma) \cap (\mathbb{H}^n \setminus N_{r_0}(\alpha))$ , paramétrée par un intervalle  $[p, q]$  de  $\gamma$ .

Nous allons montrer que la longueur  $\ell$  de cette composante connexe est bornée.

Soient  $p' = P_\alpha(F(p))$  et  $q' = P_\alpha(F(q))$ . La projection orthogonale sur une géodésique contracte les distances d'un facteur au moins égal à  $ch(r_0)$ , en géométrie hyperbolique, c'est-à-dire que

$$\ell \geq ch(r_0)d(p', q')$$

et donc

$$\frac{1}{a}d(p, q) - b \leq d(F(p), F(q)) \leq 2r + \ell/ch(r_0) \leq 2r + \frac{a}{ch(r_0)}d(p, q).$$

En effet, la condition de Lipschitz implique que

$$\ell \leq ad(p, q).$$

L'inégalité ci-dessus donne

$$d(p, q) \leq \frac{2r_0a + ba}{1 - (a^2/ch(r_0))} = k$$

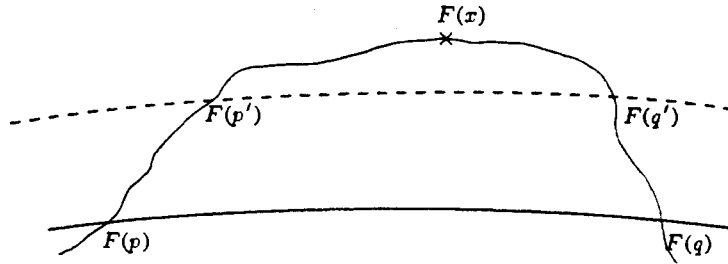
si  $r_0$  est fixé en sorte que  $ch(r_0) > a^2$ ,  $k$  est un nombre fixé qui ne dépend que des constantes apparaissant dans la définition de la quasi-isométrie. En conséquence

$$\ell \leq ad(p, q) \leq ak.$$

Posons alors  $r = r_0 + ak + 1$ . Soit  $\alpha$  la géodésique joignant  $F(p)$  à  $F(q)$  pour un intervalle  $[p, q]$  quelconque de  $\gamma$ , alors

$$F([p, q]) \subset N_r(\alpha).$$

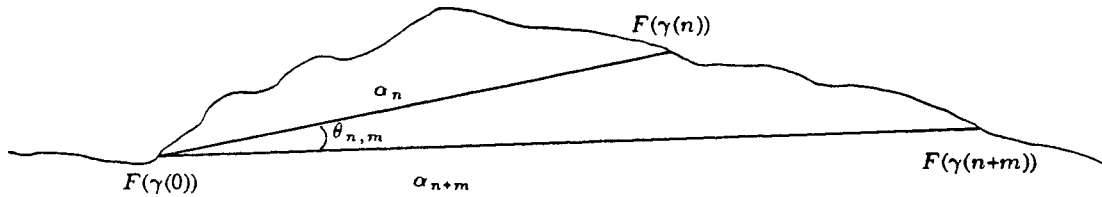
En effet si ce n'est pas le cas, soit  $[p', q'] \subset [p, q]$  un intervalle tel que  $F([p', q'])$  soit à l'extérieur de  $N_{r_0}(\alpha)$ , alors pour  $x \in [p', q']$



$$d(F(x), \alpha) \leq d(F(x), F(p)) \leq d(F(x), F(p')) + d(F(p'), F(p)) \leq \ell + r_0 < r.$$

d'où la contradiction.

Maintenant considérons les points  $F(\gamma(0))$ ,  $F(\gamma(n))$  et  $F(\gamma(n+m))$  et  $\alpha_n$  la géodésique joignant  $F(\gamma(0))$  et  $F(\gamma(n))$  (resp.  $\alpha_{n+m}$ )

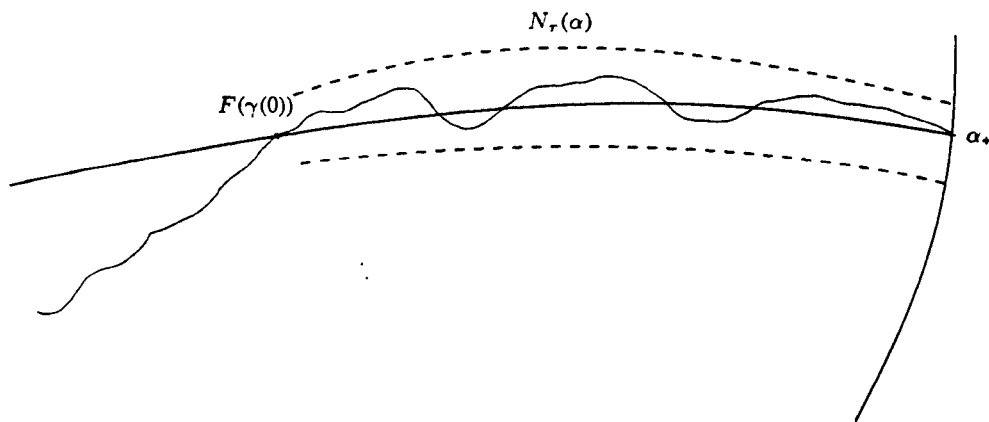


l'intervalle  $[F(\gamma(0)), F(\gamma(n+m))]$  est à distance inférieure à  $r$  de  $\alpha_{n+m}$  donc

$$d(F(\gamma(n)), \alpha_{n+m}) < r \quad \forall n, m$$

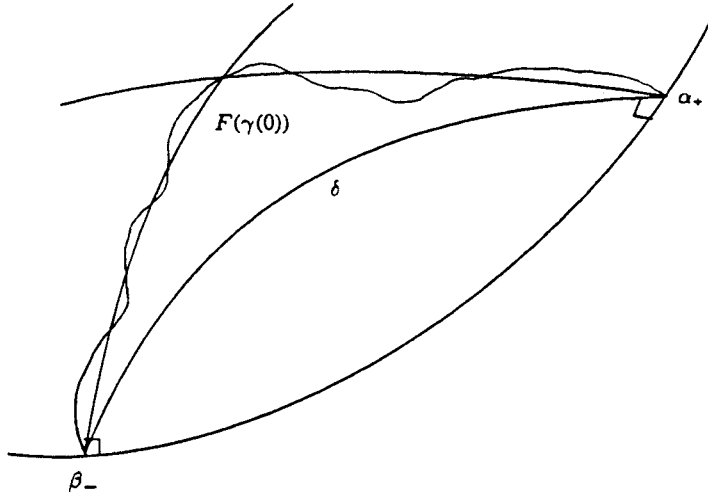
donc pour  $m$  fixé  $\theta_{n,m}$  l'angle entre  $\alpha_n$  et  $\alpha_{n+m}$  doit tendre vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

En conséquence, dans la sphère unité autour de  $F(\gamma(0))$ , la direction de  $\alpha_n$  converge et donc la géodésique  $\alpha_n$  converge vers une géodésique  $\alpha$ .



Alors pour tout  $t \in [0, +\infty[$ ,  $F(\gamma(t)) \in N_r(\alpha)$ . On fait de même pour le côté négatif et on trouve une géodésique  $\beta$  telle que

$$\forall t \in ]-\infty, 0], \quad F(\gamma(t)) \in N_r(\beta).$$

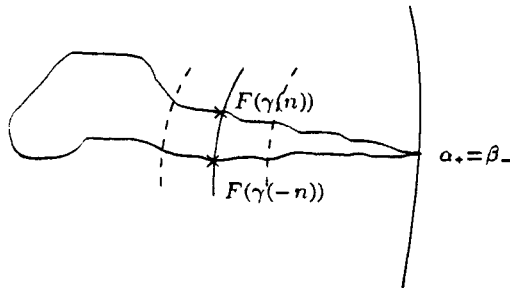


Soient  $\alpha_+ = \alpha(+\infty)$  et  $\beta_- = \beta(-\infty)$  et  $\delta$  la géodésique allant de  $\beta_-$  à  $\alpha_+$ .  
Nous allons montrer que

$$F(\gamma) \subset N_r(\delta).$$

La géodésique  $\delta$  est aussi la limite (uniforme sur tout compact) des segments géodésiques joignant  $F(\gamma(-n))$  à  $F(\gamma(n))$ . Alors le segment  $F([\gamma(-n), \gamma(n)])$  est à distance inférieure à  $r$  de cette géodésique et donc pour  $n$  assez grand toute partie compacte de  $F(\gamma)$  est à distance inférieure à  $r$  de  $\delta$ .

Dans la preuve qui précède il faut vérifier que  $\alpha_+ \neq \beta_-$ . Or si  $\alpha_+ = \beta_-$



le segment  $F(\gamma([-n, n]))$  doit être à distance inférieure à  $r$  de la géodésique joignant  $F(\gamma(-n))$  à  $F(\gamma(n))$  ce qui est contradictoire avec le fait que  $\alpha_+ = \beta_-$ .

La preuve de la seconde partie du lemme repose sur des arguments du même type et est laissée au lecteur.

*Remarque.* — Les résultats du lemme et du théorème sont valables dans un cadre bien plus général, à savoir si la courbure est négative pincée. L'adaptation est immédiate.

On peut aussi l'étendre aux espaces hyperboliques au sens de M. Gromov.

## 7. Bibliographie

- [Bea] BEARDON A.F. — *The geometry of discrete groups*, Graduate texts in Math., Springer-Verlag, New-York—Berlin 91, 1983.
- [B-P] BENEDETTI R., PETRONIO C. — *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Springer-Verlag, À paraître.
- [H-M] HAAGERUP U., MUNKHOLM H.J. — *Simplices of maximal volume in hyperbolic  $n$ -space*, Act. Math., 1941 (1981), 1–11.
- [Mos] MOSTOW G.D. — *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Ann. of Math. Studies, Princeton, 78 (1973).
- [Mun] MUNKHOLM H.J. — *Simplices of maximal volume in hyperbolic space, Gromov's norm and Gromov's proof of Mostow's rigidity theorem (following Thurston)*, Top. Symp. Siegen 1979, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin, 788 (1980), 109–124.
- [Thu] THURSTON W.P. — *The geometry and topology of three-manifolds*, Princeton University Mathematics Department, 1979.