COURS DE L'INSTITUT FOURIER

M. LEJEUNE-JALABERT

Systèmes linéaires, idéaux complets et/ou diviseurs exceptionnels

Cours de l'institut Fourier, tome S24 (1993), p. 77-91
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1993__S24__77_0>

Journées Singulières et Jacobiennes
GRENOBLE
26–28 mai 1993 (77–91)

Systèmes linéaires, idéaux complets et/ou diviseurs exceptionnels

M. LEJEUNE-JALABERT

Rapport sur une partie d'un travail en collaboration avec A. Campillo et G. Gonzalez-Sprinberg.

Les systèmes linéaires de courbes à points base assignés figurent en bonne place dans le sac à malice des géomètres italiens de la fin du siècle dernier. (Par exemple, les surfaces de Del Pezzo, de Véronese, les transformations de Cremona, certaines involutions du plan projectif sont construites à partir de tels systèmes). Dans le § 17, Cap. II, Lib. IV de [E.C], F. Enriques et O. Chisini considèrent le cas où les points base assignés sont des points infiniment voisins d'un même point (propre) du plan et ils leur assignent des multiplicités virtuelles. Ils montrent que certaines inégalités sur ces multiplicités, appelées depuis "inégalités de proximité" (cf. [Z1]), sont nécessaires et suffisantes pour assurer l'existence de courbes passant par ces points avec ces multiplicités, au moins si on n'exige rien sur leur degré. Les points assignés sont alors les seuls points base du système linéaire qu'elles engendrent.

Environ vingt ans plus tard, O. Zariski dégage une classe d'idéaux de l'anneau des polynômes (et de l'anneau des séries formelles) à deux indéterminées qui décrivent exactement les systèmes linéaires ci-dessus ([Z2]). Par analogie avec la terminologie géométrique, il qualifie ces idéaux de complets. Un des résultats principaux de la théorie développée par Zariski est un théorème de factorisation unique d'un idéal complet quelconque d'un anneau local régulier de dimension deux en produit d'idéaux complets simples ([Z.S]).

A peu près au même moment, P. Du Val généralise le critère de contractibilité de Castelnuovo aux courbes réductibles d'une surface non singulière ([DV]). L'analyse directe fait intervenir la matrice de passage entre deux bases naturelles du groupe libre engendré par les courbes contractées par un morphisme, composition d'une suite d'éclatements de points, entre deux surfaces non singulières. En appliquant cette matrice à un système de multiplicités virtuelles assignés à ces points, on obtient le premier membre des inégalités de proximité.

Nous donnons ici une présentation unifiée des résultats précédents et de résultats récents de J. Lipman relatifs à la factorisation des idéaux complets à support fini (*i.e.* qu'on peut simplifier par une suite finie d'éclatements de points) en "produit" d'idéaux $*$-simples spéciaux [L2].

1. Amas, systèmes linéaires et idéaux à support fini.

Soit X une variété algébrique non singulière définie sur un corps algébriquement clos K. Si la dimension de X est au moins deux, tout point (fermé) d'une variété obtenue à partir de X par une suite finie d'éclatements de points est classiquement appelé un *point infiniment voisin* de X. Si $O \in X$ est l'image de Q, on dit que Q est infiniment voisin de O et on note $Q \geq O$.

1.1. DÉFINITION. — Une suite finie $\mathcal{C} = \{Q_0, \dots, Q_n\}$ de points infiniment voisins de $O \in X$ telle que $Q_0 = O$ et pour tout $i, 1 \leq i \leq n$, Q_i est un point de la variété X_i obtenue en éclatant Q_{i-1} est appelée une *constellation* d'origine O. La variété $X(\mathcal{C}) := X_{n+1}$ obtenue en éclatant Q_n est appelée le *ciel* de $\mathcal{C}$. La dimension de X est appelée la *dimension* de $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{C}$ est une chaîne si $Q_i \geq Q_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$.

Étant donné une constellation $\mathcal{C}$ d'origine O, pour tout $Q \in \mathcal{C}$, la sous-suite $\mathcal{C}_Q = \{P \in \mathcal{C} \mid Q \geq P\}$ est une chaîne d'origine O.

1.2. DÉFINITION. — Soit $\mathcal{C}$ une constellation d'origine O. On dit que $Q \in \mathcal{C}$ appartient au ℓ-ième voisinage infinitésimal de O ou plus simplement que le *niveau* $\ell(Q)$ de Q est ℓ si la chaîne $\mathcal{C}_Q$ contient $\ell + 1$ points. L'origine O est le seul point de $\mathcal{C}$ de niveau 0. Si $Q \in \mathcal{C} \setminus \{O\}$, le point de $\mathcal{C}_Q$ de niveau $\ell(Q) - 1$ est appelé le *prédécesseur* de Q et noté Q_-.

1.3. Notation. — Pour tout $Q = Q_i \in \mathcal{C}$, on désigne par B_Q (ou B_i) le diviseur exceptionnel de l'éclatement σ_{i+1} de Q_i et par E_Q (ou E_i) (resp. E_Q^* (ou E_i^*)) son transformé strict (resp. total) sur n'importe lequel des X_h, $i + 1 \leq h \leq n + 1$. (L'espace ambiant du diviseur exceptionnel considéré sera précisé dans tous les cas où il n'est pas uniquement déterminé par le contexte). Enfin, on pose $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{n+1}$.

1.4. PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{C} = \{Q_0, \dots, Q_n\}$ une constellation d'origine O et soit $\mathfrak{h}$ une hypersurface (i.e. un diviseur effectif) sur X.*

Pour tout $i, 1 \leq i \leq n + 1$, soit $\mathfrak{h}_i^*$ (resp. $\mathfrak{h}_i$) la transformée totale (resp. stricte) de $\mathfrak{h}$ sur X_i. On a $\mathfrak{h}_i^* = \mathfrak{h}_i + \sum_{0 \leq j < i} e_j(\mathfrak{h}) E_j^*$ où $e_j(\mathfrak{h})$ est la multiplicité de $\mathfrak{h}_j$ en Q_j.

Preuve. — Immédiat par récurrence sur i.

1.5. DÉFINITION. — Une application $\mathcal{A}$ d'une constellation $\mathcal{C}$ d'origine O dans l'ensemble $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ des entiers non négatifs est appelée un *amas* de points infiniment voisins d'origine O. L'image m_Q de Q est appelée la *multiplicité virtuelle* ou *poids* de Q dans l'amas. Si $\mathcal{C} = \{Q_0, \ldots, Q_n\}$ et $\underline{m} = (m_i)_{0\leq i\leq n}$ est un vecteur colonne d'entiers ≥ 0, la notation $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ signifie que m_i est le poids de Q_i, $0 \leq i \leq n$ (•). Si $\underline{m} \neq 0$, on dit que $\mathcal{A}$ est *propre*. Sa *dimension* est celle de $\mathcal{C}$.

Le diviseur exceptionnel $D(\mathcal{A}) = \sum_{0\leq i\leq n} m_i E_i^*$ sur $X(\mathcal{C})$ est appelé le *diviseur associé* à $\mathcal{A}$.

Le germe en O de l'image directe du faisceau d'idéaux associé à $-D(\mathcal{A})$ par $\sigma : X(\mathcal{C}) \to X$ est appelé *l'idéal associé* à $\mathcal{A}$ et noté $I(\mathcal{A})$.

1.6. DÉFINITION. — Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ un amas comme ci-dessus et soit $\mathfrak{h}$ un diviseur sur X. Pour tout i, $1 \leq i \leq n+1$, le diviseur $(\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_i)^*(\mathfrak{h}) - \sum_{0\leq j<i} m_j E_j^*$ est appelé le *transformé virtuel* de $\mathfrak{h}$ sur X_i relativement à $\mathcal{A}$. La multiplicité en $Q = Q_i$, $1 \leq i \leq n$, de ce diviseur est appelée la *multiplicité virtuelle* de $\mathfrak{h}$ en Q (ou Q_i) relativement à $\mathcal{A}$ et notée $e_{Q,\mathcal{A}}(\mathfrak{h})$ (ou $e_{i,\mathcal{A}}(\mathfrak{h})$) ; on pose $e_{O,\mathcal{A}}(\mathfrak{h}) = e_{0,\mathcal{A}}(\mathfrak{h}) = e_O(\mathfrak{h})$.

1.7. PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ un amas et soit $\mathfrak{h}$ le diviseur sur X défini au voisinage de O par la fonction rationnelle non nulle f sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{h}$ est un diviseur effectif au voisinage de O et $e_{Q,\mathcal{A}}(\mathfrak{h}) \geq m_Q$, $\forall Q \in \mathcal{C}$.

(ii) Le transformé virtuel $\tilde{\sigma}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ sur $X(\mathcal{C})$ est un diviseur effectif au voisinage de la fibre exceptionnelle $\sigma^{-1}(O)$ de σ.

(iii) $f \in I(\mathcal{A})$.

Preuve. — L'assertion (i) est équivalente à l'assertion (ii) car la multiplicité du diviseur E_Q dans $\tilde{\sigma}(\mathfrak{h})$ est $e_{Q,\mathcal{A}}(\mathfrak{h}) - m_Q$. L'assertion (iii) n'est qu'une reformulation de (ii).

1.8. COROLLAIRE. — *Si $\mathcal{A}$ est propre, l'idéal $I(\mathcal{A})$ est primaire pour l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,O}$ et il est complet (i.e. intégralement clos).*

Preuve. — Il suffit d'appliquer [L1] lemma 5.3 au faisceau d'idéaux associé à $-D(\mathcal{A})$ et à $\sigma : X(\mathcal{C}) \to X$.

1.9. DÉFINITION. — Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ un amas d'origine O et soit $\mathfrak{h}$ une hypersurface de (X, O). On dit que $\mathfrak{h}$ *passe par* $\mathcal{A}$ (resp. *passe effectivement* par $\mathcal{A}$) si $e_{Q,\mathcal{A}}(\mathfrak{h}) \geq$ (resp. $=$)m_Q pour tout $Q \in \mathcal{C}$. L'ensemble $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ des hypersurfaces de (X, O) qui passent par $\mathcal{A}$ est appelé le *système linéaire* complet associé à $\mathcal{A}$.

(•) Comparer avec la notation $O_1^{r_1} O_2^{r_2} \cdots O_i^{r_i}$ de [E.C]

Les remarques suivantes sont une simple reformulation de 1.7 ou résultent de sa preuve.

1.10. Remarque.

(a) On a $\mathfrak{s}(\mathcal{A}) = \{H_f \mid f \in I(\mathcal{A}) \setminus 0\}$ où H_f est l'hypersurface de (X,O) définie par f. Cet ensemble est donc non vide.

(b) Pour une hypersurface $\mathfrak{h}$ de (X,O), les conditions suivantes sont équivalentes :

  (i) $\mathfrak{h}$ passe effectivement par $\mathcal{A}$.

  (ii) $e_Q(\mathfrak{h}) = m_Q$ pour tout $Q \in C$.

  (iii) la transformée stricte de $\mathfrak{h}$ sur $X(C)$ et sa transformée virtuelle relativement à $\mathcal{A}$ coïncident.

Il n'existe pas nécessairement d'hypersurface de $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ qui passe effectivement par $\mathcal{A}$.

(c) Soit $\mathfrak{d}(\mathcal{A})$ le système linéaire complet sur $(X(C), \sigma^{-1}(O))$ déterminé par $-D(\mathcal{A})$ (*i.e.* l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à $-D(\mathcal{A})$). L'application "transformée virtuelle" $\tilde{\sigma}$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ sur $\mathfrak{d}(\mathcal{A})$.

1.11. DÉFINITION (J. LIPMAN). — On dit qu'un idéal $I \subset R_0 = \mathcal{O}_{X,O}$ est à *support fini* s'il est primaire pour l'idéal maximal M_0 de R_0 et s'il existe une constellation C d'origine O telle que $I\mathcal{O}_{X(C)}$ soit un idéal inversible.

La constellation minimale C_I ayant cette propriété est appelée la *constellation des points base* de I. Le poids m_Q de $Q \in C_I$ et le transformé faible I_Q de I en $Q \in C_I$ sont définis par récurrence sur $\ell(Q)$ en posant :

(i) $I_0 = I,\qquad m_O = \operatorname{ord}_O I$

(ii) $I_Q = (x)^{-m_{Q_-}} I_{Q_-} R_Q,\qquad m_Q = \operatorname{ord}_Q I_Q$

où étant donné un idéal $I_Q \neq 0$ dans l'anneau local (R_Q, M_Q) de Q sur la variété à laquelle il appartient, $\operatorname{ord}_Q I_Q = \max\{n \mid I_Q \subset M_Q^n\}$, Q_- est le prédécesseur de Q et x est un générateur de l'idéal principal $M_{Q_-} R_Q$. L'amas $\mathcal{A}_I = (C_I, \underline{m})$ est appelé *l'amas associé* à I.

La définition précédente entraîne immédiatement que $I\mathcal{O}_{X(C_I)}$ est le faisceau d'idéaux associé à $-D(\mathcal{A}_I)$ et que pour tout $Q \in C_I$, I_Q est un idéal à support fini de R_Q et $m_Q \neq 0$.

1.12. PROPOSITION. — *La complétion (i.e. la clôture intégrale) $\overline{I}$ d'un idéal à support fini I est un idéal à support fini et $\mathcal{A}_I = \mathcal{A}_{\overline{I}}$.*

Preuve. — Voir [L2] Prop. 1.10.

1.13. DÉFINITION. — On dit qu'un *amas* est *idéaliste* s'il est l'amas associé à un idéal à support fini.

1.14. PROPOSITION.

(a) Soit $\mathcal{A}$ un amas idéaliste. L'idéal $I(\mathcal{A})$ est l'unique idéal complet à support fini I tel que $\mathcal{A}_I = \mathcal{A}$.

(b) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ est un amas idéaliste.

(ii) $I(\mathcal{A})$ est un idéal à support fini et $\mathcal{A}$ est l'amas associé à $I(\mathcal{A})$.

(iii) $\underline{m} > 0$ (i.e. $m_Q \neq 0$, $\forall Q \in \mathcal{C}$) et $-D(\mathcal{A})$ est σ-engendré (i.e. $\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(-D(\mathcal{A}))$ est engendré par ses sections globales sur un voisinage de $\sigma^{-1}(O)$).

Preuve de (a). — Soit I un idéal à support fini tel que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_I$. Alors $\overline{I}$ est un idéal complet à support fini, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\overline{I}}$ et $\overline{I}\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}$ est le faisceau d'idéaux associé à $-D(\mathcal{A})$. Il résulte alors de [L1] Prop. 6.2 et de la définition de $I(\mathcal{A})$ que $\overline{I} = I(\mathcal{A})$, d'où (a).

Preuve de (b). — L'équivalence de (i) et (ii) résulte de (a). La condition (iii) est essentiellement une reformulation de (ii).

1.15. Exemples.

(a) L'idéal $I(\mathcal{A})$ associé à un amas propre $\mathcal{A}$ de dimension au moins 3 n'est pas nécessairement un idéal à support fini comme le montre l'exemple suivant : soit $\mathcal{C} = \{O, Q_1, \ldots, Q_9\}$ la constellation formée de $O \in X$ de dimension 3 et de 9 points $Q_1, \ldots, Q_9$ en position générale sur une cubique C de B_O (*i.e.* tels que C soit la seule cubique de B_O qui les contienne) et soit $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ avec $m_0 = 3$, $m_1 = \cdots = m_9 = 1$. Alors $I(\mathcal{A}) \subset M_0^3$ et son image dans M_0^3/M_0^4 est le K-espace vectoriel engendré par un polynome homogène définissant C. Pour rendre I inversible, on doit donc après avoir éclaté O, éclater C.

(b) Si $I(\mathcal{A})$ est un idéal à support fini, l'amas $\mathcal{A}$ n'est pas nécessairement idéaliste. L'amas $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_{I(\mathcal{A})}$ est idéaliste et on vérifie que $I(\mathcal{A}) = I(\overline{\mathcal{A}})$. Si $\dim \mathcal{A} = 2$, on passe de $\mathcal{A}$ à $\overline{\mathcal{A}}$ par applications répétées du principe de décharge (principio di scaricamento [E.C] p. 427–433). Les points de $\mathcal{C}$ sont les seuls points base de $I(\mathcal{A})$.

Si $\dim \mathcal{A} \geq 3$, $I(\mathcal{A})$ peut en avoir d'autres. Par exemple soit $\mathcal{C}$ formé de $O \in X$ de dimension 3 et de 8 des points d'intersection de 2 cubiques de B_O et soit $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ avec $m_0 = 3$ et $m_1 = \cdots = m_8 = 1$. Le 9[e]point d'intersection des 2 cubiques est un point base de $I(\mathcal{A})$.

1.16. DÉFINITION. — Étant donné une constellation $\mathcal{C}$ d'origine O, l'ensemble des amas idéalistes d'origine O dont la constellation est contenue dans $\mathcal{C}$ est appelé la *galaxie* de $\mathcal{C}$ et noté $\mathcal{G}(\mathcal{C})$.

1.17. Remarque. — Si $\mathcal{A}_i = (\mathcal{C}, \underline{m}_i) \in \mathcal{G}(\mathcal{C})$, $i = 1,2$, alors $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 := (\mathcal{C}, \underline{m}_1 + \underline{m}_2) \in \mathcal{G}(\mathcal{C})$ et on a $D(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = D(\mathcal{A}_1) + D(\mathcal{A}_2)$ et $I(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = I(\mathcal{A}_1) * I(\mathcal{A}_2)$ où $*$ désigne la complétion du produit $I(\mathcal{A}_1)I(\mathcal{A}_2)$.

2. Diviseurs et courbes exceptionnelles sur le ciel d'une constellation.

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{C} = \{Q_0, \dots, Q_n\}$ désigne une constellation d'origine O et de dimension $d \geq 2$; Z désigne son ciel $X(\mathcal{C})$ et $\mathcal{G}$ sa galaxie.

On dit qu'une sous-variété V de Z est exceptionnelle si elle est contenue dans le lieu exceptionnel $\sigma^{-1}(O)$ de la projection canonique $\sigma : Z \to X$. On dit qu'un *diviseur* sur Z est *exceptionnel*, si son support est exceptionnel.

Soit $\mathsf{E} = \oplus_{0 \leq i \leq n} \mathbb{Z} E_i$ le groupe des diviseurs exceptionnels de Z. L'ensemble $(E_0^*, \dots, E_n^*)$ est aussi une base de E car $E_i^* - E_i \in \sum_{i<j\leq n} \mathbb{Z}_{\geq 0} E_j$.

On identifie le groupe de Picard, noté Pic, d'une variété non singulière au quotient du groupe de ses diviseurs par la relation d'équivalence linéaire ($\sim$). On voit alors immédiatement par récurrence sur n que :

2.1. LEMME. — *L'application canonique* $\operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}^{n+1} \to \operatorname{Pic} Z$ *qui envoie* $\mathfrak{h} \oplus (m_0, \dots, m_n)$ *sur* $\sigma^*(\mathfrak{h}) + \Sigma m_i E_i^*$ *est un isomorphisme.*

Le calcul de la matrice de changement de base des (E_i) aux (E_i^*) introduit naturellement la relation de proximité ($\to$) entre les points d'une constellation (cf. [E.C]).

2.2. DÉFINITION. — Suivant la terminologie d'Enriques, on dit que Q_i est *proche* de Q_j et on note $Q_i \to Q_j$ (ou $i \to j$) si $Q_i \in E_j$.

La matrice $\mathsf{P} = (p_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$ définie par $p_{ii} = 1$, $p_{ij} = -1$ si $i \to j$ et 0 sinon est appelée la *matrice de proximité* de $\mathcal{C}$.

2.3. PROPOSITION. — (•)*La matrice de proximité de* $\mathcal{C}$ *est la matrice de changement de base des* (E_i) *aux* (E_i^*).

Preuve. — En appliquant la proposition 1.4. à $E_i \subset X_{i+1}$, on obtient l'égalité dans E, $E_i = E_i^* - \sum_{j \to i} E_j^*$. ∎

Les lemmes qui suivent ont pour but le calcul de la forme bilinéaire d'intersection

$$(\,.\,) : \operatorname{Pic} Z \times Z_1(Z/X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

où $Z_1(Z/X)$ est le groupe abélien libre engendré par les courbes irréductibles exceptionnelles de Z et des groupes $N^1(Z/X)$ et $N_1(Z/X)$ respectivement quotient de $\operatorname{Pic} Z$ et de $Z_1(Z/X)$ par la relation d'équivalence numérique ($\equiv$) qu'elle induit.

(•) Cette observation est due à Du Val si $d = 2$ [DV]

2.4. LEMME. — *Les conditions suivantes sur une sous-suite* $\{Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_k}\}$ *de* $\mathcal{C}$ *telle que* $1 \leq k \leq d-1$ *sont équivalentes :*

(i) $i_k \to i_\ell \quad 1 \leq \ell < k$.

(ii) $i_j \to i_\ell \quad 1 \leq \ell < j \leq k$.

(iii) $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k} \neq \emptyset$.

Preuve. — Si (i) est vérifiée, alors $Q_{i_k} \in E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_{k-1}}$ dans X_{i_k} ; donc $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k} \neq \emptyset$ dans X_h, $i_k < h \leq n+1$ car $k \leq d-1$. ∎

S'il en est ainsi, on dit alors que $\{Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_k}\}$ (ou $\mathcal{I} = \{i_1 < \cdots < i_k\}$) est *complètement auto-proche*. La variété $B_\mathcal{I} := E_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{P}^{d-k}$, car c'est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de Q_{i_k} dans $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_{k-1}} \subset X_{i_k}$. Le produit d'intersection $-B_{i_k}{\scriptstyle\bullet} B_\mathcal{I}$ est la classe d'un hyperplan de $B_\mathcal{I}$ dans $\operatorname{Pic} B_\mathcal{I}$. Pour tout $i \to \mathcal{I}$ (i.e. $i \to i_\ell, 1 \leq \ell \leq k$), Q_i est un point infiniment voisin de $B_\mathcal{I}$. Soit $E_\mathcal{I} := E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}$ dans Z. Le morphisme $\sigma_\mathcal{I} := \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{n+1|E_\mathcal{I}} : E_\mathcal{I} \to B_\mathcal{I}$ est la composition des éclatements des Q_i, $i \to \mathcal{I}$. Si $k = d-1$, $\sigma_\mathcal{I}$ est un isomorphisme. Si $k \neq d-1$, E_i(resp. E_i^*) intersecte transversalement $E_\mathcal{I}$ dans Z et $E_{i,\mathcal{I}} := E_i \cap E_\mathcal{I}$(resp. $E_{i,\mathcal{I}}^* := E_i^* \cap E_\mathcal{I}$) est le transformé strict (resp. total) du diviseur exceptionnel de l'éclatement de Q_i dans $E_\mathcal{I} \subset X_i$. On désigne par $H_\mathcal{I}^*$ le transformé total (ou strict) sur $E_\mathcal{I} \subset Z$ d'un hyperplan $H_\mathcal{I}$ de $B_\mathcal{I}$ ne contenant aucun $Q_i, i \in \mathcal{I}$.

2.5. LEMME. — *Soit* $\mathcal{I} = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ *complètement auto-proche et soit* $E_\mathcal{I} \subset Z$ *comme ci-dessus. Si* $k \neq d-1$, $\operatorname{Pic} E_\mathcal{I}$ *est le groupe libre engendré par* $H_\mathcal{I}^*$ *et* $E_{i,\mathcal{I}}^*$, $i \to \mathcal{I}$ *; si* $k = d-1$, $\operatorname{Pic} E_\mathcal{I} = \mathbb{Z}$.

L'application "restriction à $E_\mathcal{I}$*" qui fait correspondre à* $D \in \operatorname{Pic} Z$ *le produit d'intersection* $D{\scriptstyle\bullet} E_\mathcal{I} \in \operatorname{Pic} E_\mathcal{I}$ *envoie* $\operatorname{Pic} X$ *sur 0 et* $D = \Sigma m_i E_i^* \in \mathbb{E}$ *sur*

$$D{\scriptstyle\bullet} E_\mathcal{I} = -m_\mathcal{I} H_\mathcal{I}^* + \sum_{i|i \to \mathcal{I}} m_i E_{i,\mathcal{I}}^* \quad \text{si } k \neq d-1$$

$$= -m_\mathcal{I} + \sum_{i|i \to \mathcal{I}} m_i \quad \text{si } k = d-1$$

où $m_\mathcal{I} := m_{i_k}$.

Preuve. — La première partie de l'énoncé résulte directement du lemme 2.1. Si $i < i_k$, $E_i^*{\scriptstyle\bullet} E_\mathcal{I} = 0$, car $E_\mathcal{I}$ est contracté en un point sur X_{i+1}, d'où $\mathcal{E}_i^* = \mathcal{O}_Z(E_i^*)$ est libre au voisinage de $E_\mathcal{I}$. Pour $i \geq i_k$, le calcul de $E_i^*{\scriptstyle\bullet} E_\mathcal{I}$ découle de l'identification de la classe de $H_\mathcal{I}$ dans $\operatorname{Pic} B_\mathcal{I}$ à $-B_{i_k}{\scriptstyle\bullet} B_\mathcal{I}$ et de la définition de $E_{i,\mathcal{I}}^*$. ∎

Soit donc C une courbe exceptionnelle irréductible de Z et soit $\mathcal{I} = \mathcal{I}_C = \{i, 0 \leq i \leq n, | \; C \subset E_\mathcal{I}\}$. Puisque $E_\mathcal{I}$ contient C, sa dimension est au moins un et d'après 2.4., $\mathcal{I}$ est complètement auto-proche. La courbe C n'est pas exceptionnelle pour $\sigma_\mathcal{I} : E_\mathcal{I} \to B_\mathcal{I}$; C est donc la transformée stricte sur $E_\mathcal{I}$ de son image $C_\mathcal{I} := \sigma_\mathcal{I}(C)$ dans $B_\mathcal{I}$.

2.6. Proposition. — *Soit $D = \Sigma m_i E_i^* \in \mathbb{E}$. Alors*

$$-D{\bullet}C = \deg(C_{\mathcal{I}})m_{\mathcal{I}} - \sum_{i|i\to\mathcal{I}} e_{Q_i}(C_{\mathcal{I}})m_i$$

où $\deg(C_{\mathcal{I}})$ *est le degré de $C_{\mathcal{I}}$ dans l'espace projectif $B_{\mathcal{I}}$ et $e_{Q_i}(C_{\mathcal{I}})$ est la multiplicité de la transformée stricte de $C_{\mathcal{I}}$ en Q_i.*

Preuve. — D'après 2.5, on a

$$-D{\bullet}C = -(D{\bullet}E_{\mathcal{I}}){\bullet}C = m_{\mathcal{I}} H_{\mathcal{I}}^*{\bullet}C - \sum_{i|i\to\mathcal{I}} m_i E_{i,\mathcal{I}}^*{\bullet}C.$$

On applique ensuite la formule de projection. ∎

2.7. Proposition. — *Soit H_i (resp. H_i^*) un hyperplan de B_i ne contenant aucun point de C proche de Q_i (resp. son transformé total sur $E_i \subset Z$). Dans le groupe des $(d-s)$-cycles de la fibre exceptionnelle $\sigma^{-1}(O)$ modulo équivalence rationnelle, on a les égalités*

$$\begin{aligned} E_{i_1}^*{\bullet}\cdots{\bullet}E_{i_s}^* &= (-H_i^*)^{s-1} \quad \text{si } i_1 = \cdots = i_s = i \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{avec } 2 \le s \le d \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

2.8. Corollaire. — *$N^1(Z/X)$ est canoniquement isomorphe au groupe des diviseurs exceptionnels $\mathbb{E}$ de Z.*

$N_1(Z/X)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{L} = \oplus_{0\le i\le n}\mathbb{Z}L_i^*$ où L_i^* est la transformée stricte sur $E_i \subset Z$ d'une droite L_i de B_i ne contenant aucun point proche de Q_i si $d \ge 3$ et est le diviseur E_i^* si $d = 2$.

Les bases $(-E_0^*, \ldots, -E_n^*)$ et $(L_0^*, \ldots, L_n^*)$ respectivement de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{L}$ sont duales.

Preuve. — Il suffit de remarquer que

$$E_i^*{\bullet}(-E_j^*)^{d-1} = -E_i^*{\bullet}L_j^* = \delta_{ij}, \quad 0 \le i,j \le n$$

car au vu de 2.1. et 2.5., il en résulte aussitôt que Pic X est l'orthogonal de $Z_1(Z/X)$. ∎

2.9. Corollaire. — *Si* $\dim X = 2$, *on a* $((E_i{\bullet}E_j)) = -{}^t\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}$ *où* $\mathbf{P}$ *(resp. ${}^t\mathbf{P}$) est la matrice de proximité (resp. sa transposée).*

Réciproquement, Du Val démontre dans [DV] que si la matrice d'intersection d'un ensemble de courbes non singulières de genre 0 (pour un ordre convenable de ces courbes) peut se mettre sous la forme $-{}^t\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}$ pour une matrice triangulaire inférieure ayant des 1 sur la diagonale principale et des -1 ou des 0 en dessous, alors on peut les contracter en un point non singulier.

La donnée d'un amas propre ayant C pour constellation est équivalente à la donnée d'un diviseur exceptionnel non nul $D \in \langle E_0^*, \dots, E_n^* \rangle := \Sigma \mathbb{Z}_{\geq 0} E_i^*$ sur Z. Deux autres sous-monoïdes de $\mathbb{E}$ s'introduisent naturellement :

$$\mathbb{E}^\# = \{D \in \mathbb{E}, D \neq 0 \mid -D \text{ est } \sigma\text{-engendré}\} (\text{cf. } 1.14)$$

$$\mathbb{E}^+ = \{D \in \mathbb{E}, D \neq 0 \mid -D \text{ est } \sigma\text{-nef (numériquement effectif)}\}.$$

On rappelle que D est dit σ-nef si $D.C \geq 0$ pour toute courbe irréductible exceptionnelle C de Z (voir aussi [L1]§ 18).

2.10. Proposition. — *On a les inclusions* $\mathbb{E}^\# \subset \mathbb{E}^+ \subset \langle E_0^*, \dots, E_n^* \rangle$.

Preuve. — Soit $D \in \mathbb{E}^\#$; on choisit des sections de $\mathcal{O}_Z(-D)$ qui engendrent ce faisceau sur un ouvert U de $E := \sigma^{-1}(O)$ et on construit le morphisme $U \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$ correspondant. Soit $\pi : E \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$ sa restriction à E. Pour toute courbe irréductible exceptionnelle C de Z, on a

$$-D.C = (-D.E).C = \pi^* H.C = H.\pi_*(C)$$

où H est un hyperplan de $\mathbb{P}_K^n$. Si π contracte la courbe C, alors $-D.C = 0$; sinon $-D.C > 0$ car c'est le produit du degré de la courbe projective $\pi(C)$ par l'indice de ramification du morphisme $C \longrightarrow \pi(C)$. Donc $-D \in \mathbb{E}^+$. Il résulte de 2.8. que pour tout $D \in \mathbb{E}$, on a $D = -\Sigma(D.L_i^*)E_i^*$. Si $D \in \mathbb{E}^+$ alors $-D.L_i^* \geq 0$, $0 \leq i \leq n$, car L_i^* est un 1-cycle effectif ; d'où $\mathbb{E}^+ \subset \langle E_0^*, \dots, E_n^* \rangle$.

2.11. Corollaire. — *L'application $\mathcal{G} \longrightarrow \langle E_0^*, \dots, E_n^* \rangle$ qui envoie $\mathcal{A}$ sur $D(\mathcal{A})$ identifie $\mathcal{G}$ à $\mathbb{E}^\#$.*

Si $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$, $I(\mathcal{A})$ est $*$-simple (i.e. n'est pas le $*$-produit de deux idéaux propres) si et seulement si $D(\mathcal{A})$ est indécomposable dans $\mathbb{E}^\#$ (i.e. n'est pas la somme de deux éléments de $\mathbb{E}^\#$).

Preuve. — Immédiat au vu de 1.16., 1.14. et 2.10.

2.12. Remarque. — Si $d = \dim C = 2$, alors $\mathbb{E}^\# = \mathbb{E}^+$. En fait, les conditions suivantes sur un amas $\mathcal{A} = (C, \underline{m})$ sont équivalentes :

(i) $D(\mathcal{A}) \in \mathbb{E}^+$ (*i.e.* $-D(\mathcal{A})$ est σ-nef).

(ii) Le système linéaire $\mathfrak{s}^1(\mathcal{A})$ contient une courbe qui passe effectivement par $\mathcal{A}$.

(iii) $D(\mathcal{A}) \in \mathbb{E}^\#$ (*i.e.* $-D(\mathcal{A})$ est σ-engendré).

Voir [E.C] [L1] [C] [LJ] [L3].

Le diviseur $-D$ est σ-nef si et seulement si $-D.E_i = m_i - \sum_{j \to i} m_j \geq 0$, $0 \leq i \leq n$. Ces inégalités sur les multiplicités virtuelles des points infiniment voisins $Q_0, \dots, Q_n$ de O sont celles qu'on trouve dans [E.C] page 427 et sous la dénomination *d'inégalités de proximité* dans [Z1] page 27. Elles caractérisent la galaxie de C.

2.13. THÉORÈME. — *Soit $\mathcal{C}$ une constellation d'origine O et de dimension deux et soit Z son ciel et $\mathcal{G}$ sa galaxie. Alors*

(i) $N_1(Z/X) = \mathsf{E}$.

(ii) L'application de $\mathcal{G} \to \langle E_0^*, \ldots, E_n^* \rangle$ qui envoie $\mathcal{A}$ sur $D(\mathcal{A})$ identifie $\mathcal{G}$ à l'ensemble des éléments non nuls de $\langle -E_0^\vee, \ldots, -E_n^\vee \rangle$ où $(E_0^\vee, \ldots, E_n^\vee)$ est la $\mathbf{Z}$-base de $\mathsf{E} = N^1(Z/X)$ duale de la $\mathbf{Z}$-base $(E_0, \ldots, E_n)$ de $\mathsf{E} = N_1(Z/X)$ et $\langle \cdots \rangle$ est le monoïde engendré par $-E_i^\vee$, $0 \leq i \leq n$.

Preuve. — L'assertion (i) est claire. Au vu de 2.11 et 2.12, pour montrer (ii), il suffit de montrer que

$$\mathsf{E}^+ \cup \{0\} = \langle -E_0^\vee, \ldots, -E_n^\vee \rangle.$$

Or par définition $E_i^\vee \bullet E_j = \delta_{ij}$, $0 \leq i, j \leq n$, d'où $-E_i^\vee \in \mathsf{E}^+$, $0 \leq i \leq n$. Inversement pour tout $D \in \mathsf{E}$, on a $D = \Sigma(D \bullet E_i)E_i^\vee$; or si $D \in \mathsf{E}^+$, on a justement $D \bullet E_i \leq 0$, $0 \leq i \leq n$.

Le théorème 2.13 est un avatar du théorème de factorisation unique de Zariski [Z.S] p. 386 (voir aussi [LJ] et [L3]).

2.14. THÉORÈME. — *Soit I un idéal complet primaire pour l'idéal maximal d'un point sur une surface non singulière. On désigne par $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ l'amas associé à I et par $\mathbf{P}$ la matrice de proximité de $\mathcal{C}$.*

(i) Pour tout $Q \in \mathcal{C}$, soit $\underline{e}_Q$ le vecteur colonne donné par $e_{PQ} = \delta_{PQ}$, $P \in \mathcal{C}$, et soit $\underline{m}_Q = {}^t\mathbf{P}^{-1} \cdot \underline{e}_Q$. Alors $m_{PQ} \neq 0$ si et seulement si $Q \geq P$ et il existe un unique idéal complet $\mathcal{P}_Q$ dont les points base sont ceux de la chaîne allant de O à Q et les poids sont donnés par $\underline{m}_Q$. Cet idéal est simple.

(ii)
$$I = \prod_{Q \in \mathcal{C}} \mathcal{P}_Q^{r_Q} \quad \text{avec } \underline{r} = {}^t\mathbf{P} \cdot \underline{m}$$

et c'est la seule factorisation en produits d'idéaux simples de I.

Preuve. — Par définition de la galaxie $\mathcal{G}$ de $\mathcal{C}$ (1.16), on a $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$. Le théorème de structure 2.13 entraîne l'existence et l'unicité d'entiers non négatifs r_Q tels que

$$D(\mathcal{A}) = -\sum_{Q \in \mathcal{C}} r_Q E_Q^\vee.$$

Il entraîne aussi pour tout $Q \in \mathcal{C}$, l'existence de $\mathcal{A}_Q \in \mathcal{G}$ tel que $D(\mathcal{A}_Q) = -E_Q^\vee$. Soit $\mathcal{P}_Q = I(\mathcal{A}_Q)$. Il résulte alors de 1.17 et du fait qu'en dimension 2, le produit d'idéaux complets reste complet que

$$I = I(\mathcal{A}) = \prod_{Q \in \mathcal{C}} \mathcal{P}_Q^{r_Q}.$$

Comme les vecteurs $-E_Q^\vee$ sont les seuls indécomposables de $\mathsf{E}^\# = \langle -E_Q^\vee \rangle_{Q \in \mathcal{C}}$, les idéaux $\mathcal{P}_Q$ sont les seuls idéaux complets simples dont les points base soient des points de $\mathcal{C}$ et la factorisation précédente est la seule possible (2.11). Enfin, $\mathbf{P}$ étant la matrice de changement de base des (E_i) aux (E_i^*), sa transposée ${}^t\mathsf{P}$ est la matrice de changement de base des $(E_i^*)^\vee = (-E_i^*)$ à $(E_i^\vee)$ d'où l'expression de $\underline{r}$ et de $\underline{m}_Q$, $Q \in \mathcal{C}$ au moyen de P. ∎

2.15. Remarque. — Si $\dim \mathcal{C} \geq 3$, l'inclusion $\mathsf{E}^\# \subset \mathsf{E}^+$ peut-être stricte. L'amas $\mathcal{A}$ de l'exemple 1.15 (a) n'est pas idéaliste ; donc d'après 1.14, $D(\mathcal{A}) \notin \mathsf{E}^\#$, mais on vérifie facilement à l'aide du théorème de Bézout que $D(\mathcal{A}) \in \mathsf{E}^+$. Cependant, on a $\mathsf{E}^\# = \mathsf{E}^+$ en toute dimension, si la constellation $\mathcal{C}$ est torique (*i.e.* formée de points fixes pour l'action d'un tore algébrique) [GS].

Dans [L2] § 2, Lipman associe un idéal complet $*$-simple spécial $\mathcal{P}_Q$ à tout point infiniment voisin Q de O ; les points base de $\mathcal{P}_Q$ sont les points de la chaîne allant de O à Q et le poids de Q dans l'amas associé $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_Q}$ est 1. Par suite, une constellation $\mathcal{C}$ étant donnée, si D_Q désigne le diviseur exceptionnel sur le ciel Z de $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{P}_Q\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Z(-D_Q)$ et m_{PQ} le poids de P dans $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_Q}$, on a

$$D_Q = \sum_{P|Q\geq P} m_{PQ} E_P^*.$$

L'ensemble $(D_Q)_{Q\in\mathcal{C}}$ est donc une nouvelle base de E et on a :

2.16. PROPOSITION. — *La matrice de changement de base* $\mathsf{M}=(m_{QP})_{QP\in\mathcal{C}}$ *des* (D_Q) *au* (E_Q^*) *est telle que* m_{QP} *soit le poids de* Q *dans l'amas* $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_P}$ *si* $P \geq Q$ *et 0 sinon.*

2.17. COROLLAIRE. — *Soit* I *un idéal complet à support fini,* $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, m)$ *son amas associé et* M *la matrice ci-dessus. Si*

$$I = \prod_{Q\in\mathcal{C}}^{*} \mathcal{P}_Q^{r_Q}, \quad r_Q \in \mathbb{Z}$$

est l'écriture formelle de la "factorisation" de I *en produits d'idéaux complets* $*$*-simples spéciaux donnée dans [L2] th. 2.5, alors* $\underline{r} = \mathsf{M}^{-1} \cdot \underline{m}$.

2.18. Remarque. — Si $d = 2$, on a $D_Q = -E_Q^\vee$ et, P désignant la matrice de proximité, $\mathsf{M} = ({}^t\mathsf{P})^{-1}$.

3. Amas idéalistes et désingularisation plongée.

Il résulte facilement de 2.14 que si $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ est un amas idéaliste de dimension deux, la factorisation de $I(\mathcal{A})$ en produits d'idéaux complets simples correspond à la factorisation de son élément général f en produit d'éléments analytiquement irréductibles. Le morphisme σ du ciel $X(\mathcal{C})$ sur X est une désingularisation plongée de la courbe C_f définie par f dans (X, O) (*i.e.* sa transformée totale sur $X(\mathcal{C})$ est un diviseur à croisements normaux) ; r_Q désignant pour tout $Q \in \mathcal{C}$, l'exposant de l'idéal simple $\mathcal{P}_Q$ dans la factorisation de $I(\mathcal{A})$, C_f a r_Q composantes analytiquement irréductibles dont la transformée stricte sur $X(\mathcal{C})$ coupe transversalement $\sigma^{-1}(O)$ en un point de E_Q. En particulier, si $I(\mathcal{A})$ est simple, alors $\mathcal{C}$ est une chaîne, on a $r_Q = 0$ si Q n'est pas le point terminal P de la chaîne $\mathcal{C}$ et $r_P = 1$. En général, on a

3.1. THÉORÈME. — *Soit I un idéal à support fini (de $\mathcal{O}_{X,O}$) et soit $\mathcal{C}$ sa constellation de points base. Si la caractéristique du corps de base K est 0, alors $\sigma : X(\mathcal{C}) \to X$ est une désingularisation plongée de la sous-variété de (X, O) définie par r, $1 \leq r < \dim X$, éléments généraux de I.*

Avant de donner la démonstration, on rappelle ce qu'on entend par désingularisation plongée.

3.2. DÉFINITION. — Soit V un sous-schéma réduit d'une variété algébrique non singulière X, ayant un point singulier isolé en O. On dit qu'un morphisme propre et birationnel $\pi : Z \to X$ est une désingularisation plongée de V si

a) Z est non singulier et π induit un isomorphisme $Z \setminus \pi^{-1}(O) \to X \setminus \{O\}$.

b) le sous-schéma $\pi^{-1}(V)$, image inverse de V sur Z, n'a que des croisements normaux.

La condition b) signifie que chaque composante irréductible de $\pi^{-1}(V)$ est non singulière et que pour tout $Q \in \pi^{-1}(O)$, il existe un système régulier de paramètres $(u_1, \ldots, u_d)$ de $\mathcal{O}_{Z,Q}$ et des entiers non négatifs r ; $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_d$ tels que $(u_1, \ldots, u_r)$ (resp. $(u_1, \ldots, u_r)u_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \cdots u_d^{\alpha_d}$), soit l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,Q}$ définissant la transformée stricte (resp. la transformée totale) de V au voisinage de Q.

La démonstration de 3.1 comporte les étapes suivantes : on introduit la notion d'élément propre et de r-uple d'éléments non dégénéré relativement à un amas idéaliste $\mathcal{A}$; on montre que $\sigma : X(\mathcal{C}) \to X$ est une désingularisation plongée de la sous-variété définie par un tel r-uple ; on montre enfin qu'un élément général (resp. un r-uple d'éléments généraux) de I est propre (resp. non dégénéré) relativement à l'amas associé à I.

Nous utilisons les mêmes notations qu'au § 1, en particulier 1.1 et 1.3.

3.3. DÉFINITION. — Soit $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ un amas idéaliste de dimension d et soit $\mathfrak{h}$ une hypersurface de (X, O). On dit que $\mathfrak{h}$ *passe proprement par* $\mathcal{A}$, si pour tout $\mathcal{I} = \{i_1 < \cdots < i_k\}$, $1 \leq k \leq d$, tel que $E_{\mathcal{I}} := E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k} \subset X(\mathcal{C})$ soit non vide, la multiplicité au point Q_{i_k} de l'intersection schématique $\mathfrak{h}_{\mathcal{I}}$ de la transformée virtuelle de $\mathfrak{h}$ sur X_{i_k} et de $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_{k-1}} (\subset X_{i_k})$ est $m_{\mathcal{I}} := m_{i_k}$. On dit que $f \in \mathcal{O}_{X,O}$ est *propre relativement* à $\mathcal{A}$, si l'hypersurface H_f définie par f passe proprement par $\mathcal{A}$.

Si $\mathfrak{h}$ passe proprement par $\mathcal{A}$ (resp. f est propre relativement à $\mathcal{A}$), on désigne par $\mathfrak{H}_{\mathcal{I}}$ (resp. $\mathfrak{H}_{\mathcal{I}}(f)$) le projectivisé du cône tangent à $\mathfrak{h}_{\mathcal{I}}$ (resp. $H_{f,\mathcal{I}}$) en Q_{i_k}. C'est une hypersurface de degré $m_{\mathcal{I}}$ dans $B_{\mathcal{I}} := E_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k} \simeq \mathbf{P}^{d-k}$.

3.4. PROPOSITION.

(i) Si $\mathfrak{h}$ *passe proprement par* $\mathcal{A}$, *alors* $\mathfrak{h}$ *passe effectivement par* $\mathcal{A}$ *(déf. 1.9) et pour tout* $\mathcal{I}$ *comme dans 3.3 ci-dessus, la sous-variété* $E_{\mathcal{I}}$ *de* $X(\mathcal{C})$ *n'est pas contenue dans la transformée stricte* $\mathfrak{h}'$ *de* $\mathfrak{h}$.

(ii) Si $1 \leq k < d-1$, *le schéma* $E_{\mathcal{I}} \cap \mathfrak{h}'$ *est le transformé strict de* $\mathfrak{H}_{\mathcal{I}}$ *par* $\sigma_{\mathcal{I}} : E_{\mathcal{I}} \longrightarrow B_{\mathcal{I}}$ *et la multiplicité* $e_{Q_i}(\mathfrak{H}_{\mathcal{I}})$ *de la transformée stricte de* $\mathfrak{H}_{\mathcal{I}}$ *en* Q_i, $i \longrightarrow \mathcal{I}$, *est* m_i.

Si $k = d-1$, *identifiant* $E_{\mathcal{I}}$ *et* $B_{\mathcal{I}}$ *à* $\mathbf{P}^1$, *les points* $Q_i, i \longrightarrow \mathcal{I}$, *à des points de* $B_{\mathcal{I}}$ *et un sous-schéma de* $\mathbf{P}^1$ *à un diviseur, on a* $E_{\mathcal{I}} \cap \mathfrak{h}' = \mathfrak{H}_{\mathcal{I}} - \sum_{i|i \to \mathcal{I}} m_i Q_i$.

Preuve. — Désignant encore par $\mathfrak{h}'$ la transformée stricte de $\mathfrak{h}$ sur X_{i_k+1}, l'hypothèse implique que $B_{\mathcal{I}} \cap \mathfrak{h}' = \mathfrak{H}_{\mathcal{I}}$ ou $\emptyset$ suivant que $k < d$ ou $k = d$, d'où *(i)*.

Les morphismes $X(\mathcal{C}) \longrightarrow X_{i_k+1}$ et $\sigma_{\mathcal{I}}$ sont des isomorphismes au voisinage des points Q de $E_{\mathcal{I}}$ tels que $Q \notin \cup_{i|i \to \mathcal{I}} E_i$.

Si $k < d-1$, $E_{\mathcal{I}} \cap \mathfrak{h}'$ est donc le transformé strict de $B_{\mathcal{I}} \cap \mathfrak{h}'$. Puisque $\mathfrak{h}$ passe effectivement par $\mathcal{A}$, il résulte de 1.4 que $D(\mathcal{A}) + \mathfrak{h}'$ est linéairement équivalent à 0 au voisinage de $E_{\mathcal{I}}$. L'image de $E_{\mathcal{I}} \cap \mathfrak{h}'$ dans $\operatorname{Pic} E_{\mathcal{I}}$ est donc $m_{\mathcal{I}} H_{\mathcal{I}}^* - \sum_{i|i \to \mathcal{I}} m_i E_{i,\mathcal{I}}^*$ par 2.5. D'autre part, par 1.4 appliqué à $\mathfrak{H}_{\mathcal{I}}$ dans $B_{\mathcal{I}}$, c'est $m_{\mathcal{I}} H_{\mathcal{I}}^* - \sum_{i|i \to \mathcal{I}} e_{Q_i}(\mathfrak{H}_{\mathcal{I}}) E_{i,\mathcal{I}}^*$ car $\mathfrak{H}_{\mathcal{I}} \sim m_{\mathcal{I}} H_{\mathcal{I}}$ dans $B_{\mathcal{I}}$; d'où $e_{Q_i}(\mathfrak{H}_{\mathcal{I}}) = m_i, i \longrightarrow \mathcal{I}$.

L'identité pour $k = d-1$ résulte du fait que le nombre d'intersection d'une hypersurface et d'une courbe en un point est la somme du produit de leur multiplicité et du nombre d'intersection de leurs transformées strictes après éclatement de ce point, puisque $e_{Q_i}(\mathfrak{h}) = m_i$ et $e_{Q_i}(B_{\mathcal{I}}) = 1, i \longrightarrow \mathcal{I}$. ∎

3.5. DÉFINITION. — On dit qu'un r-uple $(f_1, \ldots, f_r)$ d'éléments de $\mathcal{O}_{X,O}$ est non dégénéré relativement à un amas idéaliste $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, m)$ de dimension d si, $1 \leq r < d$, chaque f_i, $1 \leq i \leq r$, est propre relativement à $\mathcal{A}$ et si pour tout $\mathcal{I} = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ tel que $\dim E_{\mathcal{I}} \geq 1$, les hypersurfaces $\mathfrak{H}_{\mathcal{I}}(f_1), \ldots, \mathfrak{H}_{\mathcal{I}}(f_r)$ s'intersectent transversalement dans $B_{\mathcal{I}}$ sauf peut-être aux points de $\mathcal{C}$.

3.6. PROPOSITION. — *Si* $(f_1, \ldots, f_r)$ *est non dégénéré relativement à* $\mathcal{A}$, *alors* $\sigma : X(\mathcal{C}) \longrightarrow X$ *est une désingularisation plongée du sous-schéma de* (X, O) *défini par* $f_1, \ldots, f_r$.

Preuve. — Soit $\mathfrak{h}_i$ (resp. $\mathfrak{h}_i'$) l'hypersurface définie par f_i (resp. sa transformée stricte sur $X(\mathcal{C})$). Puisque $\mathfrak{h}_i$ passe effectivement par $\mathcal{A}$, $1 \leq i \leq r$, le schéma $\mathfrak{h}_1' \cap \cdots \cap \mathfrak{h}_r'$ est le transformé strict du schéma $\mathfrak{h}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{h}_r$ sur $X(\mathcal{C})$.

Soit $Q \in \sigma^{-1}(O)$ et soit $\mathcal{I} = \{i_1, \ldots, i_k\}$ la sous-suite maximale telle que $Q \in E_{\mathcal{I}}$. Il suffit de montrer que $E_{\mathcal{I}} \cap \mathfrak{h}_1' \cap \cdots \cap \mathfrak{h}_r'$ est une sous-variété non singulière de codimension r de $E_{\mathcal{I}}$ au voisinage de Q. Or si $k = d$, cette intersection est vide car $Q = E_{\mathcal{I}} \notin \mathfrak{h}'_i$, $1 \leq i \leq r$, par 3.4 (i) ; et si $k \neq d$, le morphisme $\sigma_{\mathcal{I}} : E_{\mathcal{I}} \to B_{\mathcal{I}}$ est un isomorphisme au voisinage de Q car $Q \notin \cup_{i|i \to \mathcal{I}} E_i$; d'où $\sigma_{\mathcal{I}}(Q) \notin \mathcal{C}$ et $(E_{\mathcal{I}} \cap \mathfrak{h}'_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{h}'_r, Q) \simeq (\mathfrak{H}_{\mathcal{I}}(f_1), \ldots, \mathfrak{H}_{\mathcal{I}}(f_r), \sigma_{\mathcal{I}}(Q))$ est un germe non singulier de dimension $d - k - r$ par 3.5. ■

La proposition suivante termine la preuve de 3.1.

3.7. PROPOSITION. — *Soit I un idéal à support fini. Si la caractéristique de K est 0, alors un élément général (resp. un r-uple d'éléments généraux) de I est propre (resp. non dégénéré) relativement à l'amas $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \underline{m})$ associé à I.*

Preuve. — Soit $\mathcal{I} = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ comme dans 3.3 et soit $I_{|\mathcal{I}}$ l'image du transformé faible de I en Q_{i_k} dans l'anneau local $(S_{\mathcal{I}}, M_{\mathcal{I}})$ de $E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_{k-1}}$ en Q_{i_k}. Alors $m_{\mathcal{I}} = \max\{n \mid I_{|\mathcal{I}} \subset M_{\mathcal{I}}^n\}$ car autrement les points de $B_{\mathcal{I}}$ seraient des points base de I. Or, ou bien $\dim B_{\mathcal{I}} \geq 1$ ou bien $B_{\mathcal{I}}$ est un point et $E_{\mathcal{I}}$ serait vide dans X_{i_k+1} et a fortiori $X(\mathcal{C})$ car on l'aurait éclaté. Un élément général de I est donc propre et on peut engendrer I par des éléments propres.

Finalement, si $k \neq \dim X$, soit $In I_{|\mathcal{I}}$ l'image de $I_{|\mathcal{I}}$ par l'application

$$M_{\mathcal{I}}^{m_{\mathcal{I}}} \longrightarrow M_{\mathcal{I}}^{m_{\mathcal{I}}}/M_{\mathcal{I}}^{m_{\mathcal{I}}+1} = H^0(\mathcal{O}_{B_{\mathcal{I}}}(m_{\mathcal{I}}))$$

et soit $\mathfrak{b}_{\mathcal{I}}(I)$ le système linéaire sur $B_{\mathcal{I}}$ qu'il définit. Si $f \in I$ est propre relativement à $\mathcal{A}$, alors $\mathfrak{H}_{\mathcal{I}}(f) \in \mathfrak{b}_{\mathcal{I}}(I)$ et sa transformée stricte sur $E_{\mathcal{I}}$ est un élément du système linéaire $\mathfrak{d}_{\mathcal{I}}(I)$ sur $E_{\mathcal{I}}$ défini par l'image de I par l'application naturelle

$$I \longrightarrow H^0(E_{\mathcal{I}}, \mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(-D(\mathcal{A})) \otimes \mathcal{O}_{E_{\mathcal{I}}})$$

car c'est l'intersection propre de $E_{\mathcal{I}}$ et de la transformée stricte H'_f de H_f sur $X(\mathcal{C})$ par 3.4 *(ii)*, et $H'_f + D(\mathcal{A})$ est le diviseur de f au voisinage de $\sigma^{-1}(O)$. Or $\mathcal{A}$ étant l'amas associé à I, les faisceaux $\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(-D(\mathcal{A}))$ et $\mathcal{O}_{X(\mathcal{C})}(-D(\mathcal{A})) \otimes \mathcal{O}_{E_{\mathcal{I}}}$ sont engendrés par I. Le système linéaire $\mathfrak{d}_{\mathcal{I}}(I)$ est donc sans point base et les seuls points base de $\mathfrak{b}_{\mathcal{I}}(I)$ sont ceux de $\mathcal{C}$. On conclut en appliquant le théorème de Bertini ([J] cor. 6.11).

3.8. Remarque. — L'amas $\mathcal{A}$ joue un rôle analogue à celui d'un polygone de Newton $\mathcal{N}$, la condition de propreté (resp. de non-dégénérescence) relativement à $\mathcal{A}$ remplace celle d'avoir $\mathcal{N}$ comme polygone de Newton (resp. celle de [Kh]).

Références

[C.G.L1] CAMPILLO A., GONZALEZ-SPRINBERG G., LEJEUNE-JALABERT M. — *Amas, idéaux à support fini et chaînes toriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **315** (1992), 987–990.

[C.G.L2] CAMPILLO A., GONZALEZ-SPRINBERG G., LEJEUNE-JALABERT M. — *Clusters, proximity inequalities and Zariski-Lipman complete ideal theory*, Prépublication de l'Institut Fourier n° 261, Grenoble, 1992.

[C] CASAS E. — *Infinitely near imposed singularities and singularities of polar curves*, Math. Ann. **287** (1990), 429–454.

[DV] DU VAL P. — *Reducible exceptional curves*, Amer. J. Math. **58** (1936), 285–289.

[E.C] ENRIQUES F., CHISINI O. — *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*,1915 (CM5 Zanichelli 1985) Libro IV.

[GS] GONZALEZ-SPRINBERG G. — *Théorie de Zariski-Lipman et amas toriques*, ce volume.

[J] JOUANOLOU J.P. — *Théorèmes de Bertini et applications*, Progress in Mathematics, Birkhaüser, 1983.

[Kh] KHOVANSKII A.G. — *Newton polyhedra and toral varieties*, Funct. Anal. and its appl. **11**, n° 4 (1977), 56–67.

[L1] LIPMAN J. — *Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, Publ. IHES **36** (1969), 195–279.

[L2] LIPMAN J. — *On complete ideals in regular local rings*, Algebraic geometry and commutative algebra in honor of M. Nagata, (1987), 203–231.

[L3] LIPMAN J. — *Proximity inequalities for complete ideals in two-dimensional regular local rings*, Comm. Alg. Week Mount Holyoke College 1992. Proceedings to appear in Contemporary Math..

[LJ] LEJEUNE-JALABERT M. — *Linear systems with infinitely near base conditions and complete ideal in dimension two*, College on Singularity ICTP Trieste, 1991 (to appear).

[S] SPIVAKOVSKY M. — *Valuations in function fields of surfaces*, Amer. J. Math. **112** (1990), 107–156.

[V] VARCHENKO A.N. — *Zeta-function of monodromy and Newton's diagram*, Inv. Math. **37** (1976), 253–262.

[Z1] ZARISKI O. — *Algebraic surfaces*, (1934), Second supplemented edition (1971) Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Chapter II and Appendix to chapter II by J. Lipman.

[Z2] ZARISKI O. — *Polynomial ideals defined by infinitely near base points*, Amer. J. Math. **60** (1938), 151–204.

[Z.S] ZARISKI O., SAMUEL P. — *Commutative Algebra* II, Appendix 5, Van Nostrand, 1960.

– ◇ –

Monique LEJEUNE-JALABERT
Université de Grenoble I
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS (URA 188)
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
email: lejeune@fourier.grenet.fr