Jean-Pierre Serre
J.-F. Boutot (réd.)

# Tamagawa I

*Cours de Jean-Pierre Serre*, tome 2 (1982)
<http://www.numdam.org/item?id=CJPS_1982__2_>

# JEAN - PIERRE SERRE

## COURS AU COLLÈGE DE FRANCE

*janvier-mars 1982*

*Notes de* J-F. BOUTOT

# Table des Matières

Gauss Disquisitiones 1801 quad 2 et 3 var.

Jacobi Fund. 1829 $r_4(n), r_6(n), r_8(n) \Leftarrow$ f. elliptiques

Dirichlet 1838 $L(1)$ nbrs de classes $n=2$

Eisenstein 1847 $n=3$ masse , $r_5(n)$

H. Smith 1867 démontre ↗ | Académie 1881

H. Minkowski 1882 id.

Siegel 1935.37 3 articles Annals

Tamagawa, Kneser, Weil 1959 $\Leftrightarrow \tau(O_n)=1$.

oubliés Liouville, Hermite, Poincaré.

ref. oeuvres complètes
+ cours de Weil à l'Institute 1961

---

<u>Gauss</u> lien entre $r_3(n) = \#$ de déc. de $n$ en somme de 3 carrés

et nbre de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$ (ie f. quadr. binaires positives)

$$r_3(n) = \begin{cases} 12\, h(-n) & n \not\equiv 3 \pmod 8 \\ 24\, h(-n) & \equiv \end{cases}$$

$n$ sans facteurs carrés, $n>3$ et $n \not\equiv -1 \pmod 8$

<u>Jacobi</u> $$r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d \mid n \\ 4 \nmid d}} d \iff \theta^4 = 1 + 8\left\{\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \cdots\right\}$$

si $\theta = 1 + 2q + 2q^4 + \cdots = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2}$ analogues pour $\theta^6$ et $\theta^8$.

$\Theta$ est forme de poids 1/2, à une puissance paire, clair de poids entier donc plus facile.

Dirichlet $\quad L(s,\chi) = \sum \chi(n)\, n^{-s}$

1) Calcule $L(1,\chi)$

2) Applique aux nbres de classes de formes binaires

cas imaginaire $\quad \mathbb{Q}(\sqrt{-D}) \qquad -D<0 = $ disc.

$h(-D)$ = nbre de classes

$w_D$ = nbre de racines de l'unité $\in \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$

$= 2$ si $D \neq 3,4$

$= 4$ si $D = 4$

$= 6$ si $D = 3$

$\chi_D(p) = \left(\frac{-D}{p}\right)$ caractère associé

$$\boxed{\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \frac{h(-D)}{w_D} = L(1,\chi_D)}$$

e.g. $L(1) \neq 0$ et $>0$.

$$\frac{h(-D)}{w_D/2} = -\frac{1}{D} \sum_{1 \leq x < D} \chi_D(x)\, x$$

$$= \frac{1}{2-\chi_D(2)} \sum_{1 \leq x < D/2} \chi_D(x)$$

cf. Borevich - Safarevic

$\ell$

exemple $D = p \equiv 3 \pmod 4$

alors
$$h(-p) = \begin{cases} R - N & p \equiv 7 \pmod 8 \\ \frac{1}{3}(R-N) & p \equiv 3 \quad \text{—} \end{cases}$$

$R$ = nbre de résidus quadratiques entre 1 et $p/2$ $1 \leq x < p/2$

$N$ = nbre de non résidus

en particulier $R > N$.

Via Gauss la formule de Dirichlet donne $r_3(n)$.

Eisenstein On a vu intervenir $\frac{h}{w}$, où $w$ est le nbre d'automorphismes de det 1 de la forme. Pour formes à $n \geq 3$ variables, on introduit le "poids" $= \frac{1}{|\mathrm{Aut}\, f|}$ $f$ forme quadr définie

si on a un nbre fini de formes $f_i$, e.g un "genre", on définit

$$\text{masse} = \sum \frac{1}{|\mathrm{Aut}\, f_i|}$$

si $n \geq 3$, $|\mathrm{Aut}\, f|$ varie. Eisenstein donne des formules pour la masse d'un genre de formes à 3 variables et des formules pour $r_5(n)$.

$$r_5(n) = -80 \sum_{1 \leq x < n/2} \chi_n(x)\, x \qquad \begin{array}{l} n > 1 \quad \text{sqf} \\ n \equiv 1 \pmod 8 \end{array}$$

Smith publie des dém des résultats d'Eisenstein.

En 1881 l'Acad. des Sciences met au concours la démonstration des résultats d'Eisenstein. (déjà par Smith en 1867).

Minkowski a envoyé un mémoire en 82 (il avait 18 ans).

En 83 l'académie a partagé le prix entre Smith et Minkowski.

Siegel reprend les résultats de Smith.

I. formes quadratiques positives $/\mathbb{Q}$

II. formes quadratiques indéfinies $/\mathbb{Q}$

III. formes quadratiques positives sur un corps de nbres tot réel

(et énoncé sans dém pour formes quad. indef sur corps de nbres).

Le théorème de Siegel (I) : représentation d'une forme quadratique par une autre.

"f. quad" = module libre sur $\mathbb{Z}$ de rg fini muni d'une f. quad à valeur dans $\mathbb{Z}$ (ou dans $\mathbb{Q}$)

2 normalisations $\sum a_{ij} x_i x_j$ 1) $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $a_{ij} = a_{ji}$

2) $a_{ii} \in \mathbb{Z}$ $a_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (i valeurs $\in \mathbb{Z}$)

$\Lambda \simeq \mathbb{Z}^m$, $Q$ forme quadr.

$L \simeq \mathbb{Z}^n$, $\Pi$ autre mod. quad.

formes quad. non dég $/\mathbb{Q}$ et $>0$ (disc $\neq 0$)

Une représentation de $L$ par $\Lambda$ est un plongement $i : L \longrightarrow \Lambda$ compatible avec les formes quadratiques

Matriciellement $Q$ et $T$ sont des matrices sym de rang $m$ et $n$

$X$ = matrice de $i$ $m \times n$.

la compatibilité s'écrit $T = {}^tX.Q.X \overset{def}{=} Q[X]$.

ie on se donne $T$ et $Q$, on cherche $X$.

[cas particulier si $T = (\mathbb{Z}, d.x^2)$ on cherche les repr. de $d$.].

Siegel : pour $Q$ et $T$ donnés, le nombre des $X$ est fini, soit $N(Q,T)$. Soit $w_Q = |\mathrm{Aut}\, Q| = N(Q,Q)$.

$(\Lambda, Q)$ et $(\Lambda', Q')$ sont dans la même <u>classe</u> si $(\Lambda, Q) \simeq (\Lambda', Q')$

ie il existe $X \in GL_m(\mathbb{Z})$ tel que $Q' = {}^tXQX$.

$(\Lambda, Q)$ et $(\Lambda', Q')$ ont même <u>genre</u> si $(\Lambda, Q) \simeq (\Lambda', Q')$

sur $\mathbb{R}$ et sur tous les $\mathbb{Z}_p$.

- Sur $\mathbb{R}$ ça veut dire la signature si $\Lambda$ et $\Lambda'$ positifs automatique.
- Sur tous les $\mathbb{Z}_p \Leftrightarrow$ pour tout entier $N$ il existe $X \in GL(m, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ telle que $Q' \equiv {}^tXQX \pmod N$.

(def d'après Poincaré, Minkowski).

On montre qu'un genre est formé d'un nbre fini de classes (car le discriminant est alors fixé). Soient $Q_1, \ldots, Q_n$ des représentants des classes de formes du genre de $Q$, on définit <u>la masse du genre</u>

$$M_Q = \sum \frac{1}{w_{Q_i}}$$

et

$$N_{moyen}(Q,T) = \left\{ \sum_i N(Q_i, T)/w_{Q_i} \right\} / M_Q$$

cond. locales: T est représentable par Q localement, i.e. sur $\mathbb{R}$ et sur les $\mathbb{Z}_p$ pour tout p.

cond. locales $\Rightarrow$ $N_{moyen}(Q,T) \neq 0$, i.e. il existe une forme du genre de Q qui représente T.

ex: $n \not\equiv -1 \pmod 8$ $\Rightarrow$ $n = \boxed{3}$ somme de 3 carrés

$x^2+y^2+z^2$ a disc 1

$x_1^2+\dots+x_m^2$ est seule dans son genre pour $m \leq 8$.

donc il suffit de montrer qu'il y a une forme du genre de $x^2+y^2+z^2$ qui représente n.

## Formule de Siegel

$$\boxed{N_{moyen}(Q,T) = c \prod_{p,\infty} \delta_p(Q,T)}$$

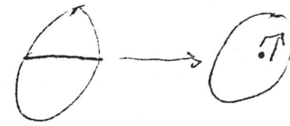
$\delta_p$ = "densité"

Q forme quadr. déf > 0 de rang m $\qquad m \geq n \geq 1$

T ——— n

$$c = \begin{cases} 2 & \text{si } m = n = 1 \\ 1/2 & \text{si } m = n+1 \\ 1 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

définition des $\delta_p(Q,T)$.



1) $p = \infty$ $\quad \mathbb{R}$. $\qquad X \mapsto Q[X]$

$$\mathbb{R}^{mn} \xrightarrow{Q} \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$ matrices sym de taille n

on cherche le volume de la fibre. Soit $U$ "petit" voisinage de $T$ dans $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$, $Q^{-1}(U)$ son image réciproque.

$$\frac{\text{mes } Q^{-1}(U)}{\text{mes } U} \xrightarrow[U \to T]{} \delta_\infty(Q,T)$$ par définition si $m \neq n$

la limite existe.

si $m = n$, $\delta_\infty(Q,T) = \frac{1}{2} \lim \frac{\text{mes } Q^{-1}(U)}{\text{mes}(U)}$

car pour $m = n$ la fibre a deux composantes connexes

2) $p \neq \infty$ $\quad \mathbb{Z}_p \quad \delta_p$ a la même définition p-adiquement.

$$\mathbb{Z}_p^{mn} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{n(n+1)/2}$$

ou ce qui revient au même : si $q = p^\alpha$, on définit une densité modulo $q$

$$d_q(Q,T) = \frac{\text{nbre de } X \bmod q,\ Q[X] \equiv T \bmod q}{q^{mn - n(n+1)/2}} \quad \text{si } m \neq n$$

$$= \frac{1}{2} \quad \text{id} \qquad \text{si } m = n$$

pour $\alpha$ grand $d_q(Q,T)$ est indépendant de $\alpha$, par def

$$\delta_p = \lim_{\alpha \to \infty} d_{p^\alpha}(Q,T).$$

Le théorème dit : le produit converge pour $p$ croissant (pas absolument en général)

Cas particulier $Q = T$

$$N_{\text{moyen}} = \frac{\sum N(Q_i, T)/w_{Q_i}}{\sum 1/w_{Q_i}}$$

$N(Q_i, T) = 0$ si $Q_i$ n'est pas isom à $Q = T$

$= w_Q$ si $Q_i \simeq Q$

on trouve donc $N_{\text{moyen}} = \dfrac{1}{M_Q}$, d'où

Cor $\boxed{\dfrac{1}{M_Q} = \prod_{p,\infty} \delta_p(Q, Q)}$ . $m \geq 2$.

ce qui s'écrit en terme de val. de fonctions zéta ou L aux entiers pairs et $\delta_\infty$ fait intervenir ds puissances de $\pi$

Cor (Siegel III) Si $K$ est un corps totalement réel de degré $r$ et discriminant $D$, alors $\zeta_K(2k) = \pi^{2kr} D^{1/2} \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{Q}^*$.

$(\Leftrightarrow \zeta_K(1-2k) \in \mathbb{Q}$ par l'éq. fonctionnelle, énoncé par Hecke)

Tamagawa, Kneser On peut exprimer le th. de Siegel

$SO_m$ relatif à $Q$

$\tau(SO_m) = \operatorname{vol}(SO_m(A_K)/SO_m(K))$

fini sauf si $m = 2$ et $Q$ indéfini alors $SO_2 \simeq G_m$.

Th de Siegel $\Longleftrightarrow$ $\tau(SO_m) = 2$ si $m \geq 2$. $\Leftrightarrow \tau(O_m) = 1$

$[SO_1 = \{e\} \quad \tau(SO_1) = 1]$. Le th. est vrai sur corps de nombres ou de fonctions (de car $\neq 2$).

Si on est sur $\mathbb{Q}$ et $f$ défini $> 0$

$\tau(O_n) = 1 \Longleftrightarrow$ formule pour la masse $\frac{1}{M_Q} = \prod \delta_p(\ \ )$.

et cette dernière formule, entraîne la formule générale de Siegel.

e.g. $Q[X] = T$ est espace homogène sous $O_m/O_{m-n}$

donc la formule générale provient de $\tau = 1$ appliqué à $m$ et $m-n$.

[cf Weil 62 à Bruxelles].

<u>Enoncé général</u> (conj de Weil) : Le nombre de Tamagawa d'un groupe semi-simple simplement connexe est égal à 1.

$$\begin{array}{lll} \tau=1 & O_n & \\ & {}_2\cup & \overset{\tau=1}{Spin_n} \text{ (simpl. connexe)} \\ & SO_n \xleftarrow{\ 2\ } & \\ & \tau=2 & \end{array}$$

En gros démontré pour les groupes classiques (Weil, Mars)

$D_4$ trialitaire ?

sur les corps de nombres (et corps de fonctions ?)

$G_2$ (Demazure)

$F_4, E_6, E_7$ (certaines formes) Mars, Igusa

formes quasi-déployées Langlands_Lai

Cas particulier $\tau(SL_n) = 1$.

$\Leftrightarrow$ th de Minkowski-Hlawka : Soit $C$ un ensemble mesurable quarrable borné de $\mathbb{R}^n$ et $\delta \geq vol(C)$, alors il existe un réseau $\Lambda$ de $\mathbb{R}^n$ de volume $\delta$ tel que $(\Lambda - \{0\}) \cap C = \emptyset$.

Si $C$ est un domaine étoilé symétrique (ie $x \in C \Rightarrow tx \in C$ pour $|t| \leq 1$), même énoncé pour $\delta > \dfrac{vol(C)}{2\zeta(n)}$.

Siegel 1945.

On démontre une formule de moyenne.

$\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}^n$ intégrable Jordan, $\Lambda$ réseau

$$\varphi(\Lambda) = \sum_{x \in \Lambda - \{0\}} \varphi(x)$$

$$\boxed{\underset{\substack{\text{réseaux } \Lambda \\ \text{de vol } 1}}{\text{Moyenne}} \ \varphi(\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx}$$

réseaux de vol 1 = esp homogène sous $SL_n(\mathbb{R})$

$$\simeq SL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{Z})$$

a une mesure invariante $\rightarrow$ notion de moyenne.

On calcule le volume de ce quotient. Siegel avait auparavant fait une erreur, intégrales divergentes.

corps de fonction sur un corps fini $K = k(X)$ $X$ courbe alg $/\mathbb{F}_q$.

$\tau = 1$ se traduit par une "formule de masse" pour les fibrés vectoriels $E$ sur $X$ de rang $n$ donné avec $\det E \simeq$ fibré dg 1 donné $L$

f. de masse :

$$\sum_{\substack{E \text{ à isom près} \\ \det E \simeq L}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}\, E|} = \frac{1}{q-1}\, q^{(n^2-1)(g-1)} \zeta_X(2) \zeta_X(n)$$

où $g$ = genre de $X$.

C'est une somme infinie.

La formule a été utilisée par Harder pour étudier la variété $M$ des modules des fibrés stables, si $E$ est stable $\mathrm{Aut}\, E = \mathbb{F}_q^*$, d'où

$$\frac{1}{q-1} |M(\mathbb{F}_q)| + \text{masse instable} = \cdots$$

on compte aussi les fibrés instables. D'où une formule explicite pour $M(\mathbb{F}_q)$ en terms de $q, g$ et val props de Frob pour $\mathrm{Jac}(X)$.

et de même pour $M(\mathbb{F}_{q^n})$. de la forme :

$$= q^{nN} + q^{n(N-1)} - \sum \pi_\alpha^n q^{\cdots}$$

d'où par conj de Weil $\dim M = N$

$M$ est connexe $B_0 = 1$

nbres de Betti de $M$ $B_1 = 0$ $B_3 = \cdots$
$B_2 = 1$

$n = 2$, $\deg L \equiv 1 \pmod 2$ d'où $M$ complète : seulement stables et instables.

## Formes modulaires et fonctions thêta (cf Siegel I)

nbre moyen de repr d'un entier par les fonctions d'un genre

$$\sum \frac{1}{w_{Q_i}} \theta_{Q_i} = \text{série d'Eisenstein}$$

$$\theta_Q = \sum r_Q(n) q^n = \sum_{x \text{ entier}} q^{Q(x)}$$

$$\theta_Q = \underbrace{E_Q}_{\text{Eisenstein}} + \underbrace{\psi_Q}_{\text{parabolique}}$$

et $E_Q$ ne dépend que du genre de $Q$

et $\sum \frac{1}{w_{Q_i}} \psi_{Q_i} = 0$.

---

Références :


Milnor. Husemoller - Sym. Bilinear Forms
énoncé et cor. du th. de Siegel.

Eichler. Quad. Formen
dém du th. de Siegel, pas facile à lire

O'Meara

Cassels Rational Quad Forms (/$\mathbb{Q}$)

Weil cours IAS

Siegel Lectures on the anal theory of quadr. forms
(pas conseillé)

# de Tamagawa

Ono  # de Tamagawa ds tores et ds gr semi-simples
Annals 53, 65

Sansuc  J. Crelle  81

la normalisation d'Ono doit être changée dans le cas des corps de fonctions.

Langlands

Lai  Comp Math 80  $\tau = 1$  pour G quasi. déployé / corps de nombres

Bloch  Invent. 80  Conj de Birch. Sw.D $\Leftrightarrow$ $\tau$ (extension d'une var. abélienne par un tore)

Harder  / corps de fonctions  Annals, Inventiones

J. Mars  $\tau = 1$  certains groupes exceptionnels  Bull SMF?, Annals? 68-70

J. Mars  Annals ENS v 70  méthode du cercle en termes adéliques

Lachaud  Paris VII  le pb de Waring adéliquement

J. Igusa  Forms of higher degree  (Tata. Oxford v 79)

N. Bourbaki  Fasc. Résultats ds variétés. (intégration p-adique)

## Intégration - cas local

$K$ corps local (ultramétrique)

= complet pour une valuation discrète $v : K^* \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ (normalisée)

$\mathcal{O}_K$ = anneau des entiers

$\pi$ : uniformisante

$k$ : corps résiduel supposé fini $\quad q = |k| = p^a$

ie $K$ extension finie de $\mathbb{Q}_p$ $\quad$ car $K \neq 0$

ou $\simeq k((T))$

$K$ loc compact

val absolue normalisée $\quad x \neq 0 \quad \|x\| = q^{-v(x)}$

$\|0\| = 0$

$x \in \mathcal{O}_K$, $x \neq 0$ $\quad q^{v(x)} = (\mathcal{O}_K : x\mathcal{O}_K)$

$$\|x\| = \frac{1}{(\mathcal{O}_K : x\mathcal{O}_K)}$$

Soit $\mu$ une <u>mesure de Haar</u> sur $K_+ = K$

$$(\mathcal{O}_K : x\mathcal{O}_K) = \mu(\mathcal{O}_K)/\mu(x\mathcal{O}_K)$$

$$\|x\| = \frac{\mu(x\mathcal{O}_K)}{\mu(\mathcal{O}_K)}$$

la formule est vraie alors pour $x \in K$. De plus si $U$ est 1/g ouvert compact dans $K$

$$\|x\| = \frac{\mu(xU)}{\mu(U)}$$

ie la multiplication par $x$ transforme $\mu$ en $\|x\|\mu$.

en d'autres termes $\boxed{d(ax) = \|a\| \cdot dx}$.

mesure de Haar <u>standard</u> sur $K$ : celle t.q. $\mu(\mathcal{O}_K) = 1$.

Autres choix possibles : mesure attachée à un caractère additif non trivial de $K$ $\psi : K \to \mathbb{C}^*$ avec

a) $\psi$ homom. continu

b) $|\psi(\alpha)| = 1$ pour tout $\alpha \in K$

(b est conséquence de a).

$\psi \neq 1$ existe

<u>Théorème</u> Tout caractère additif continu de $K$ est de la forme $\alpha \mapsto \psi(\lambda\alpha)$, avec $\lambda \in K$.

i.e. si $K^\wedge$ = dual de $K$, $K^\wedge$ est un $K$ esp. vectoriel de dimension 1. (cf. Weil Basic Number theory)

<u>Construction de car. additif</u> :

1) $K$ <u>extension finie de $\mathbb{Q}_p$</u>.

i) $\mathbb{Q}_p \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^*$

de noyau $\mathbb{Z}_p$ $\alpha \in \mathbb{Q}_p$ $\alpha = \frac{m}{p^n} + \nu$ $m \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $\nu \in \mathbb{Z}_p$

$$\psi(\alpha) = e^{\frac{2\pi i}{p^n} m} = \zeta_n^m .$$

ii) $K \xrightarrow{t} \mathbb{Q}_p$ appl. lin. $\neq 0$ (eg trace) $K \xrightarrow{t} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^*$

2) car $K = p$ $\quad K = k((T))$

$\alpha = \alpha(T)$ $\quad \psi_\omega(\alpha) = \lambda_k\left(\mathrm{Res}\left(\alpha(T)\,\omega(T)\right)\right)$

où $\omega(T) = f(T)\,dT$ est une forme différentielle

$\lambda_k$ = caract additif non trivial de $k$

$\left(= e^{\frac{2\pi i}{p} \mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_p}(x)} \text{ par ex}\right)$.

---

Si $\psi : K \to \mathbb{C}^*$ est choisi, $\psi \neq 1$. Il identifie $K^\wedge$ et $K$. Il existe une unique mesure de Haar compatible à cette dualité pour la transf de Fourier.

[ $\quad (G, \mu) \qquad (\hat{G}, \hat{\mu})$

$\qquad c\mu \qquad c^{-1}\hat{\mu}$

$\mu \otimes \hat{\mu}$ sur $G \times \hat{G}$ est canonique. ]

Si $G \simeq G^\wedge$ il existe un unique $\mu$ tel que $\mu = \hat{\mu}$, dite $\mu$ autoduale

s/q

(a) Si $G \supset U$ ouvert compact

$G^\wedge \supset U^\perp$ = orthogonal de $U$ = dual de $G/U$

$G/U$ discret $\Rightarrow$ $U^\perp$ compact

$G^\wedge / U^\perp$ = dual de $U$ est discret

d'où $U^\perp$ ouvert compact dans $G^\wedge$.

$$\boxed{\mu(U) \cdot \mu^\wedge(U^\perp) = 1}$$

(b) si $G \supset \Gamma$ discret à quotient compact

$G^\wedge \supset \Gamma^\perp$ id.

alors $$\boxed{\mu(G/\Gamma) \cdot \hat{\mu}(\hat{G}/\Gamma) = 1}$$

ex. $\mathbb{R}$ . $e^{2\pi i xy}$ $\mu(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = 1$.

---

Si $\psi$ choisi, on note $\mu_\psi$ = mesure autoduale quand on identifie $K$ à $K^\wedge$ grâce à $\psi$.

Si $U$ est un s/g ouvert compact de $K$

$U^\perp = \{x \in K \,/\, \psi(ux) = 1 \text{ pour tout } u \in U\}$

= s/g ouvert compact de $K$

$$\boxed{\mu_\psi(U) \cdot \mu_\psi(U^\perp) = 1}$$

En particulier si $U = \mathcal{O}_K$ et si $U^\perp = U = \mathcal{O}_K$, alors

$\mu_\psi = \mu$ mesure standard.

Ex. $\mathbb{Q}_p$ avec caractère standard.

Intégration sur une K-variété.

Soit $m$ entier $\geq 0$

$X$ variété K-analytique (lisse) partout de dimension $m$

localement isom à $O_K \times \cdots \times O_K$ = boule unité

recollt par ds fonctions analytiques

$\rightarrow$ formes diff, fibré tangent ...

Soit $\omega$ une forme diff de degré $m$ sur $X$, on lui attache une mesure $\mathrm{mod}(\omega) = \|\omega\|$ sur $X$ :

loct. $x_1, \dots, x_m$ coord. $\omega = f(x)\, dx_1 \dots dx_m$

$f$ analytique en $x = (x_1, \dots, x_m)$

$$\boxed{\|\omega\| = \|f(x)\|\, dx_1 \cdots dx_n}$$

où $dx$ = mesure standard

$\|\omega\|$ est une mesure $\geq 0$. Il faut vérifier que ça ne dépend pas du syst de coord, formule du chgt de variable

Th. $(x_1, \dots, x_m) \mapsto y(x) = (y_1, \dots, y_m)$ anal en $x$

$\|\mathrm{Jac}\, y\|\, dx_1 \dots dx_m \mapsto dy_1 \cdots dy_m$ ie $dy = f'(x)\, dx$.

Dém. Vérification pour certains $y_i$

a) $y_i$ linéaire homog en les $x_i$

se ramène à $y_i \mapsto a_i x_i$

se ramène à $\quad d(ax) = \|a\| dx \quad$ (déf de $\|a\|$).

b) $y_i = x_i$ + termes de plus haut degré

la question est locale au voisinage de zéro.

b₁) cas $y_i = x_i + \varphi_i(x) \qquad \varphi_i = \sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha x^\alpha$

$a_\alpha \in O_K \quad a_\alpha \to 0$ si $|\alpha| \to \infty$ i.e. série ~~restreinte~~ coeff $O_K$

la série converge pour tout $(x_1, .., x_m) \in \prod O_K$.

$$B = O_K \times \cdot \times O_K \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{(y)}} O_K \times \cdot\cdot \times O_K$$

$$x_i = y_i + \psi_i(y) \qquad \psi_i \text{ idem}$$

donne bijection modulo $\pi^n$ pour tout $n$.

donc la mesure de Haar est invariante par cette bijection, car elle est caractérisée par

$$\mu(x_0 + \pi^n B) = \frac{1}{q^{mn}}$$

b₁) ⇒ b) $\qquad y_i = x_i + \sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha^{(i)} x^\alpha$

sur un voisin de 0 $\quad \pi^n B \quad n \gg 0 \quad$ ça converge

$x_i = \pi^n X_i \qquad y_i = \pi^n Y_i$

$$Y_i = X_i + \sum_{|\alpha| \geq 2} a_\alpha \pi^{n(|\alpha| - 1)} X^\alpha$$

est une série restreinte (si $n \gg 0$)

<u>Autre présentation</u> (valable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$T_X^*$ fibré cotangent

$\Omega^n = \det$ de $T^*_X$ fibré vectoriel de rang 1,

fibré principal à groupe $K^*$.

$K^* \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ par $\lambda \mapsto \|\lambda\|$

on en déduit par chgt de groupe structural, un fibré <u>réel</u>

de rang 1 $= \mathcal{D}$ fibré des <u>densités</u>.

Les sections continues de $\mathcal{D} \mapsto$ mesures sur $X$.

si $K=\mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*_+ \qquad \|\lambda\| = \lambda \cdot \mathrm{sgn}(\lambda)$

$$\boxed{\mathcal{D} = \Omega^n \otimes \mathrm{Orientations}_X}$$

si $K=\mathbb{C}$ $\qquad \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*_+ \qquad \lambda \mapsto \lambda\bar\lambda$

$\omega = f(z)\,dz \qquad \mapsto$ mesure $\qquad \|\omega\| = |f(z)|^2\,dx\,dy$

---

<u>Retour au cas ultramétrique</u>

Supposons $X$ compact. On peut faire $\int_X \|\omega\|$

1) <u>si</u> $\omega = f(x)\,dx_1 \cdots dx_n \qquad f(x) \neq 0 \qquad$ <u>$\omega$ partout $\neq 0$</u>

alors $\|f\|$ est loc cste.

Sur $B$ boule $\qquad \|f\|$ cste sur les classes mod $\pi^n B \qquad n \gg 0$

$$\int_X \|\omega\| = \sum \int_{\text{boules mod } \pi^n} \|\omega\|$$

alors sur une boule telle dans $\|f\| = q^{\alpha}$

$$\mathrm{vol}(\pi^n B) = \frac{1}{q^{mn}}$$

$$\int_X \|\omega\| = \sum q^{d_i} = \frac{a}{p^n} \quad a>0 \quad \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{q}\right].$$

on a $\quad \mathbb{Z}\left[\frac{1}{q}\right] \longrightarrow \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$

<u>Prop</u> <u>l'image de</u> $\int_X \|\omega\|$ <u>dans</u> $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ <u>ne dépend que de</u> $X$. <u>Notons le</u> $\mathrm{inv}(X)$.

<u>Si</u> $X$ <u>et</u> $X'$ <u>sont des variétés compactes non vides de dimension</u> $n$, <u>on a</u> $\mathrm{inv}(X) = \mathrm{inv}(X') \iff X \simeq X'$.

elts de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} \longrightarrow 1, 2, \dots, q-1$

$B$ boule $\mapsto 1$

$B \sqcup B \mapsto 2$ (Topology 1964)

$\vdots$

$B \sqcup \dots \sqcup B \mapsto q-1$

<u>dém</u>. Toute variété est somme disjointe de boules.

$B \sim qB$ (par mod $\pi$ on coupe en morceaux) ∎

Soit $\Lambda$ un groupe abélien tel que $\lambda \mapsto p\lambda$ soit un autom de $\Lambda$

ie $\Lambda$ est un $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$-module. Soit $f$ fonction loc. cste sur $X$ à valeurs dans $\Lambda$. Alors on peut définir $\int_X f \|\omega\|$

$X = \amalg X_i$ $\quad X_i$ ouverts compacts tq $f = \lambda_i$ sur $X_i$

$$\int_X f \|\omega\| = \sum_i \mathrm{vol}(X_i)\, \lambda_i$$

$$\mathrm{vol}(X_i) = \int_{X_i} \|\omega\| \in \mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{p}\right].$$

$$= \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{vol}\left(f^{-1}(\lambda)\right)$$

---

2) <u>Cas général</u> ($\omega$ peut s'annuler)

<u>Th</u> (Igusa). <u>Si</u> K <u>est</u> <u>de carac.</u> 0, X <u>compacte</u>, $\omega$ <u>forme différentielle</u>, alors $\int_X \|\omega\| \in \mathbb{Q}$.

[Vrai aussi en carac $p$, modulo résolution des singularités.]

Donc on peut intégrer des fonct. loc. ctes dans des $\mathbb{Q}$ esp. vect.

<u>dém</u>. localt $X = B = \mathcal{O}_K \times \cdots \times \mathcal{O}_K$

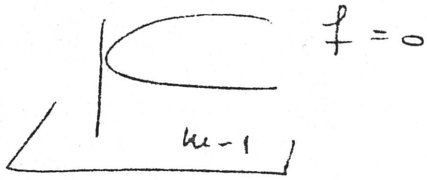
$f(x)$ anal sur $B$ série à coef $\xrightarrow{\text{entiers}} 0$ $\qquad f \not\equiv 0$

$$\int_B \|f(x)\|\, dx_1 \cdots dx_m$$

$X_n = \{x \in X \mid v(f(x)) = n\}$ $\qquad n = 0, 1, \ldots$

$X_\infty = \{x \mid f(x) = 0\}$

préparation




$\mathrm{vol}(X_\infty) = 0$

$$\int_B \|f(x)\|\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^n} \mathrm{vol}(X_n)$$

$N = n+1$ ?

$X_n$ est ouvert et fermé donc réunion de classes mod $\pi^N$

<u>th (Igusa Kato) la série</u> $\sum_{n=0}^{\infty} T^n \mathrm{vol}(X_n) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{q}][[T]]$ <u>est une fonction rationnelle de $T$.</u>

soit $r(T)$. Alors $\int \|\omega\| = r(\frac{1}{q})$

$r(T) \in \mathbb{Q}(T)$ n'a pas de pole dans $|T| < 1$ car

$\sum \mathrm{vol}(X_n) = 1$. $\rightarrow r(1/q) \in \mathbb{Q}$.

<u>dém</u> Eclater $X_\infty \cdot \{f(x) = 0\}$

a) Si c'est un diviseur à croisements normaux, ie loct

$f(x) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} g(x)$ $\quad$ $g(x)$ ne s'annule pas

on calcule

<u>ex:</u> $\int_{O_K} \|x\|^\alpha \|dx\|$

$\pi^n O_K - \pi^{n+1} O_K = P_n = \{$elts de val $n\}$

sur $P_n$ $\|x\|^\alpha = \frac{1}{q^{n\alpha}}$ $\quad$ $\mathrm{vol}(P_n) = \frac{1}{q^n}(1 - \frac{1}{q})$

$$\int_{O_K} \|x\|^\alpha \|dx\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^{n\alpha} q^n} (1 - 1/q)$$

$$= (1 - \frac{1}{q})\left(\frac{1}{1 - 1/q^{\alpha+1}}\right) = \frac{q^\alpha}{1 + q + \cdots + q^\alpha}$$

(b) $X \supset X_\infty$ lieu des zéros de $f$

$$\begin{array}{ll} \tilde{X} & \text{compact lisse} \supset \tilde{X}_\infty = h^{-1}(X_\infty) \\ h \downarrow & \\ X & \end{array} \qquad \begin{array}{c} \tilde{X} - \tilde{X}_\infty \\ \wr\wr \\ X - X_\infty \end{array}$$

$\tilde{X}_\infty$ diviseur à croisements normaux

$\tilde{\omega} : h^* \omega = g x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} dx_1 \cdots dx_n$ loc.

$$\int_X |\omega| = \int_{\tilde{X}} |\tilde{\omega}|$$

Igusa traite $X$ esp affine et $f$ polynôme, applique Hironaka

Pour les séries convergentes ça marche, anneau excellent

Souhait dém sans résol des singularités.

Serre 25-1-82 (notes Szpiro)

Th (Igusa) $k$ corps local de car 0 polyn $f(x_1 \cdots x_n)$ coeff $\in \mathcal{O}_k$

$a_n =$ nb de sol de $f(x) \equiv 0$ mod $(\pi^n)$

ds l'anneau $\mathcal{O}_k / \pi^n \mathcal{O}_k$

$\Sigma a_n T^n$ fonction rat /T

m résultat avec une famille de polynome ⇒ schéma

(Diane Meuser)

Rep Asterle plusieurs $f_i$ → un seul

sur réels $\Sigma f_i^2 = 0$

1) $d$ entier $\geq 1$ sur $\mathbb{F}_q$ $\varphi$ polynome de $d$ variables

homog de $d^\circ$ $d$ $\varphi(x_1 \cdots x_d) \neq 0$ $x_i \in \mathbb{F}_q$ $x_i$ non tous nuls

$\mathbb{F}_{q^d} / \mathbb{F}_q$ la norme

2) $\phi$ relève $\varphi$ homog $d^\circ d$ à coeff ds $\mathcal{O}_k$

$x_1 \cdots x_d$ non tous div par $\pi$ $\phi(x_1 \cdots x_d) \in \mathcal{O}_k^*$

$\pi^i | x_j$ $\forall j$ et $\exists j$ $\pi^{i+1} \nmid x_j$

$\phi(x_1 \cdots x_d)$ div par $\pi^{di}$ par par $\pi^{d(i+1)}$

$f = \phi(f_1 \cdots f_d)$

$f_1 \cdots f_d \equiv 0$ mod $\pi^n$

sol de $f \equiv 0$ mod $\pi^{nd}$

$\Sigma b_n T^n$ pour $f$ $a_n = b_{nd}$

- Appl. de Weil

1) mes. de Haar etc.

2) Formule de Hermann Weyl

3) Formule de masse pour les extr de $k$ de $d^\circ$ $n$ donné

(CRAS 286 (1978))

1) $G$ gpe de Lie sur $k$

$\omega$ diff de $d^o$ $n$ maximum nonnulle et inv à $g$.

$\mu = \|\omega\|$ est une mesure de Haar à $g$ sur $G$.

$\mathrm{Int}(g)$ $x \to g x g^{-1}$

$\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$

L unimodulaire si $\mathrm{Ad}(g)$ est de det 1 pour tout $g$

i.e. si la représentation de $G$ opère trivialement sur $\det(\mathfrak{g})$ i.e il existe une forme $\neq 0$ de $d^o$ $n$, bi invariante

$\Rightarrow$ mesure de Haar bi invariante

$\|\det \mathrm{Ad}(g)\| = 1 \Leftarrow\Rightarrow G$ unimodulaire (mes. de Haar bi invar.)

$G$ alg réductif $\Rightarrow$ $G$ est L-unimodulaire

- Si $X = G/H$ $\quad G, H$ unimodulaire $\mu_G$, $\mu_H$ m. de Haar

$\phi$ cont à supp. compact $\displaystyle\int_G \phi(x)\,\mu_G(x)$

$$= \int_{G/H} \left( \int_H \phi(xh)\, d\mu_H(h) \right) \mu_{G/H}(x)$$

si tout L-unimod on fait avec des formes diff invariante

Rappel $k = \mathbb{R}$ $\quad$ $G$ compact Lie réel connexe, $T$ tore max max.

$dx$ de Haar sur $G$, $dt$ sur $T$, $dy$ mesure sur $G/T$ associée

$\phi(x)$ $\quad$ $f$ sur $G$ $\quad$ $\int_G \phi(x)\,dx$ $\quad$ par tous vol $= 1$ $G, T, G/T$

$$\int_G \phi(x)\,dx = \frac{1}{|W| \int_T |D(t)| \left( \int_{y \in G/T} \phi(y t y^{-1})\,dy \right) dt}$$

$D(t) = \prod 1 - \alpha_i(t)$ $\quad$ $\alpha_i$ racines

<u>le cas</u> $\quad k$ local $\quad$ Harish Chandra C.N. 162 lemme 42

$G = \underline{G}(k)$ $\quad$ pts rat de $\underline{G}$ gp alg réd connexe $/k$

$\underline{H}$ ss gpe de Cartan de $G$ $\quad$ $(H = \underline{H}(k))$ $\quad$ $\underline{H}$ un tore

Réunion des conj de $H$ par $G$

<u>Pts régaliers</u> $x \in G$ $\quad$ $\mathrm{Ad}\,x$ auto de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathfrak{g})$ $\quad$ $n = \dim G$

val propres de $\mathrm{Ad}(x) = \begin{cases} 1 \text{ mult} \geq \ell \\ \text{autres} \end{cases}$ $\quad$ $\ell = \mathrm{rg}\, G = \dim H$

$x$ régalier $\quad$ si 1 val avec mult exact égale à $\ell$.

$\alpha_1 \ldots \alpha_m (x)$ autres val propres $\quad$ ce sont les racines de $x$, $\quad D(x) = \prod_1^m (1 - \alpha_i(x))$

i.e $x$ régalier $\Leftrightarrow D(x) \neq 0 \quad (\Rightarrow x$ semi simple$)$

ex $\underline{G} = \underline{G\ell}_\ell$

$G = \underline{G\ell}_\ell(F)$ $n = \ell^2$ $m = \ell(\ell-1)$

$x \in G$ $\mathrm{End}\, V = V \otimes V^\vee$

$\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ val. propres $\lambda_i/\lambda_j$ ds l'adjointe

$x$ rég $\Rightarrow (\lambda_i/\lambda_j) \underset{i \neq j}{\neq 1}$ et rég $\Leftarrow$ que pour $i = j$ que c'est égal.

$x$ rég $\Leftrightarrow$ $x \in$ un seul Cartan (comp neutre du centralisateur

$G^{reg}$ = ens des éléments réguliers de $G$

$H^{reg}$ (de $G$) dans $H$

$H \times G/H \to G$

$x, y \to y x y^{-1}$

$H^{reg} \times G/H \xrightarrow{h} G^{reg}$

surj sur les réels $\left(\text{image} = G_H^{reg}\right) = G^{reg}$

mais pas sur corps local

Prop

① $G_H^{reg}$ ouvert ds $G^{reg}$

② $H^{reg} \times G/H \to G_H^{reg}$ revet étale de gpe $W_H$ Galoisien

$\| $

$N_G(H)/H$ (…

③ $\omega_G, \omega_H, \omega_{G/H} = \omega_G/\omega_H$ formes diff invariantes (L unimodulair…

$\boxed{\pi^*(\omega_G) = D_H \cdot \omega_H \otimes \omega_{G/H}}$ restr de $D$ à $H = D_H$

$$\pi^*(\mu_G) = \|D_H\| \, \mu_H \, \mu_{G/H}$$

i.e formule d'intégration $\phi$ continue, intégrable,

$$\int_{G^{reg}_H} \phi(x)\,\mu_G(x) = \frac{1}{|W_H|} \int_H \|D_H(h)\| \left( \int_{G/H} \phi(yhy^{-1})\,\mu_{G/H}(y) \right) \mu_H(h)$$

– Cor si $G/H$ compact $\overset{vol=1}{\phantom{x}}$ $\phi$ centrale

$$\boxed{\int_{G^{reg}_H} \phi(x)\,\mu_G(x) = \frac{1}{W_H} \int_H \|D_H(h)\|\,\phi(h)\,\mu_H(h)}$$

$H_\alpha$ les gpe de Cartan à conj. près fibini si cas = 0 dim. sinon

$$\int_G \phi(x)\,\mu_G(x) = \sum_\alpha \int_{G^{reg}_{H_\alpha}} \phi(x)\,\mu_G(x)$$

– $n \in N_H/H$ $\quad H \times G/H$

$$(h, y) \to (nhn^{-1}, yn^{-1})$$

$W_H$ opère librement

dem de (3) on suppose $Y_0 = 1$ $\quad$ $\hat{h}$ ou peut-pas

$$T_{h_0}(H) \times T_1(G/H) \to T_{h_0}(G)$$

$$\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \qquad \overset{\| \, \mathrm{adte}}{\mathfrak{g}}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d, "1-Ad(h_0)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{h} \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et ça prouvera car $\det 1 - Ad(h_0) = D(h_0)$

pas d'ext résiduelle. tot. ramif

Appl Formule de masse pour ext finie sép de degré $\ell$ donné.

$$\{L \mid L \subset \overline{k}^{\text{sép}} \ d^\circ \ell\} = \Sigma_\ell$$

$$\operatorname{dis}(L) = \pi^{d(L)} \mathcal{O}_k \qquad v_L(\text{différente } L/k) = d(L)$$

$$f(x) = x^\ell + a_1 x^{\ell-1} + \cdots + a_\ell = 0$$

$$d(L) = v_L(f'(x))$$

$$d(L) = \ell - 1 + c(L) \qquad c(L) > 0 \Leftrightarrow \text{sauvage}$$

$$\text{poids} = \frac{1}{q^{c(L)}}$$

Th $$\sum_{L \in \Sigma_\ell} \frac{1}{q^{c(L)}} = \ell$$

somme finie si car $k = 0$

ou si car de $k = p$ $\quad p \nmid \ell$

variante $S_\ell$ au cas de repr des extr sep tot ramifiées de $d^\circ L$ à $k$ iso près

$w(L) =$ nb de $k$ auto de $L$

Th 2 $\quad - \displaystyle\sum_{L \in S_\ell} \frac{1}{w(L)\, q^{c(L)}} = 1$

dém sous forme Th 2 $\quad$ $D$ corps gauche de d° $\ell^2$ de $k$

existe et contient toutes les ext. de $k$ de d° $L$

$G = D^*$ gpe multiplicatif

= gpe des pts du gpe alg des éléments inv

$\underline{D}^* \simeq Gl_\ell$ sur $\bar{k}$

s gpe de Cartan de $\underline{D}$ def $/k$

$L \subset D$ sous corps sép de d° $\ell$

$\underline{L}^* \subset \underline{D}^*$ s gpe de Cartan

$D^* \xrightarrow{v_D} \mathbb{Z} \qquad v_D(x) = \ell v(x) \qquad x \in k^*$

$v_D(x) = v_k(\mathrm{Nrd}(x))$

$\Omega =$ ens $\{x \in D^*$ $\quad v_D(x) =$

$U_D =$ "unités" de $D$ $\qquad \Omega$ est une classe mod $U$

mesure de Haar t.q $\mathrm{vol}(U_D) = 1$, alors $v(\Omega) =$

$\Omega^{reg} \subset \Omega$ $\qquad$ formés des $x$ de $\Omega$ sép sur $k$
(val = $\ell$ fois ...)

$S_\ell$ repr les ext tot ram. sép.

$L^* \hookrightarrow D^*$ s/g de Cartan

$$\Omega_L = \Omega \cap (\mathrm{conj}(L)) = \{x \in \Omega \mid k(x) = L\}$$

Skolem-Noether

(iso donné par conjugaison)

$$1 = \sum_{L \in S_L} \mathrm{vol}(\Omega_L)$$

reste $\quad v(\Omega_L) = \dfrac{1}{w(L)\, q^{c(L)}}$

Formule de H-Weyl $\qquad \phi(x) = \chi_{\Omega(L)}$ $\qquad$ fction caract

$$\mathrm{vol}(\Omega_L) = \int \phi(x)\,dx = \frac{1}{|w(H_L)|} \int_{L^\times} \phi(h) \| D_H(h) \| \, dh$$

$$\mathrm{vol}\; G/H = 1$$

$W(H_L) =$ Auto de $L$ $\qquad$ (Skolem-Noether ! encore)

$$\int_{\mathrm{Unif}(L)} \| D_H \| \, dh \overset{?}{=} \frac{1}{q^{c(L)}}$$

$$\mathrm{vol}(U_D) = 1$$

choix $\mathrm{vol}(U_L) = 1$ $\qquad$ compatible i.e $v(D^\times)/v(L^\times)$

car $= \mathrm{vol}(U_D/U_L)$

montrer $\; x \in \mathrm{Unif}(L) \quad \| D(x) \| = \dfrac{1}{q^{c(L)}}$

sur $GL_e = \underline{D}^*(\bar{k})$ $\quad D(x) = \prod_{i \neq j} \left(1 - \dfrac{d_i}{d_j}\right)$

$x \in L^*$ $\quad L \xrightarrow{\sigma_i} \bar{k}$ $\quad d_i = \sigma_i(x)$

$$D(x) = \prod_{i\neq j}\left(1 - \frac{\sigma_i(x)}{\sigma_j(x)}\right)$$

$$D(x) = \prod_{i\neq j}\left(\sigma_i(x) - \sigma_j(x)\right) \Big/ \underbrace{\left(\prod \sigma_i(x)\right)}_{N_{L/k}(x)^{\ell-1}}{}^{\ell-1}$$

$N_{L/k}(x) = q^{-1}$ car $x$ uniformisante

$\prod_{i\neq j}\left(\sigma_i(x) - \sigma_j(x)\right)$ eng. discr $L/k$

$q^{-d(L)}\ q^{\ell-1}$

Rem si $p \nmid \ell$ c'est facile

Krasner nb d'ext avec $c(L)$ donné

cas part car $k = p$ $\quad p \mid \ell$

$c = c(L)$ $\quad \ell(q-1)\, q^{[c/p]}$ quand $p \nmid c$

sinon 0

Polyn d'Eis de d° $n$ $\quad x^{\ell} + a_1 x^{\ell-1} \cdots + a_{\ell}$

$a_i \in \pi\mathcal{O}_k$ $\quad a_{\ell}$ unif.

$\rightarrow L$ sep def parce que.

$$\mathrm{Eis}_{\ell} \longrightarrow S_{\ell}$$

$\mathrm{vol}(\mathrm{Eis}_{\ell}) = \dfrac{1-q^{-1}}{q^{\ell}}$ vol fibre, étale

1.2.82

# Intégration p-adique (suite)

## 1. Cas lisse

$\underline{X}$ schéma lisse $/\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ de dim $m$

$X = \underline{X}(\mathcal{O}_K)$ = points entiers de $X$

$X$ est une variété $K$-analytique compacte lisse de dim $m$.

<u>mesure canonique sur $X$</u> :

$X_n = \underline{X}(\mathcal{O}_K/\pi^n\mathcal{O}_K)$ ens. fini $\qquad X = \varprojlim X_n$

les applications $X_n \to X_{n-1}$ sont surjectives et les fibres ont $q^m$ éléments.

mesure $\mu_n$ sur $X_n$ : la mesure d'un point est $q^{-mn}$

alors $\mu_n \to \mu_{n-1}$, d'où $\mu = \varprojlim \mu_n$ sur $X$.

caractérisation de $\mu$ : toute fibre de $X \to X_n$ a pour mesure $q^{-mn}$

en particulier $\boxed{\mu(X) = q^{-m}.|X_1|}$

En fait $|X_1| \sim q^m$ donc $\mu(X) \sim 1$.

<u>Ex.</u> $SL_2$ nbre de pts mod $\pi$ : $q(q-1)(q+1) = q^3(1-\frac{1}{q^2})$

mesure $= 1 - \frac{1}{q^2}$

En général si $G$ s.s. mesure $= 1 + O(\frac{1}{q^2})$, les csts du $O$ ne dépendant que du type de $G$.

$\mu$ est liée aux mesures associées aux formes différentielles

soit $\alpha$ une telle forme de degré $m$ et $x \in X$

$T_x(X)$ contient un $\mathcal{O}_K$-module $T_x(\underline{X})$

donc $\Omega_x^m = \overset{m}{\Lambda} T_x(X)$ qui est un K-vect de dim 1 contient un réseau canonique $\ni e$. Si $\alpha = \lambda . e$, on peut donc définir $\|\alpha\|_x = abs(\lambda)_x$.

Alors on a une égalité de mesures :

$$\boxed{\|\alpha\| = \|\alpha\|_x \cdot \mu}$$

Supposons $\alpha$ forme différentielle sur $\mathcal{O}_K$ et que $\tilde{\alpha}$ sa réd mod $\pi$ est partout non nulle, ie $abs(\alpha) = 1$. Alors $\|\alpha\| = \mu$.

---

<u>Intégration sur les fibres</u>. <u>Sommes d'exponentielles</u>.

① <u>Cas général</u>

$X \xrightarrow{f} Y$ var anal lisses $/K$ $\dim X = m$ $\dim Y = r$

$\alpha_X$ et $\alpha_Y$ des formes diff de deg max sur $X$ et $Y$ resp.

t.q. $\alpha_Y$ partout non nulle. Supposons que $f$ est une <u>submersion</u>, ie $T_x f : T_x X \to T_{f(x)} Y$ surjectif pour tout $x \in X$.

Pour $y \in Y$, soit $f^{-1}(y) = X_y$

forme diff. dessus $\theta_y$ de degré $m - r$

$$\theta_y = \alpha_X / \alpha_Y$$

## déf avec équations

$f^*\alpha_Y$ est une forme de deg $r$ sur $X$

soit $x \in X$ $\quad f(x) = y$

il existe une forme $\beta$ au voisinage de $x$ tel que

$$\alpha_X = \beta \wedge f^*\alpha_Y$$

(car $\alpha_Y$ est non nulle en $f(x)$)

$x_1, \dots, x_m$ coord sur $X$ $\qquad x_{m-r+1}, \dots x_m$ coord sur $Y$

$$\alpha_Y = \varphi \, dx_{m-r+1} \wedge \dots \wedge dx_m$$

$$\alpha_X = \psi \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$$

$$\beta = \psi/\varphi \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-r}$$

$\beta$ n'est pas unique, mais sa restriction à $X_y$ est bien déterminée

c'est $\theta_y$.

## déf avec fibrés

On a une suite exacte,

$$0 \to T_x X_y \to T_x X \longrightarrow T_{f(x)} Y \to 0$$

d'où sur $\det = \Lambda^{max}$

$$\det(T_x X)^* = \det(T_x X_y)^* \otimes \det(T_{f(x)} Y)^*$$

$\|\theta_y\| = \|\alpha_X\| / \|\alpha_Y\|$ est une mesure sur $X_y$.

<u>Formule</u> (Fubini) $\Phi$ fonction continue et intégrable sur $X$.

alors

$$\boxed{\int_{x\in X} \Phi(x)\, \|\alpha_X(x)\| = \int_{y\in Y} \left( \int_{x\in X_y} \Phi(x)\, \|\theta_y(x)\| \right) \|\alpha_Y(y)\|}$$

i.e.

$$\|\alpha_X\| = \int_{y\in Y} \|\theta_y\| \cdot \|\alpha_Y(y)\|$$

Si $\alpha_X$ et $\alpha_Y$ sont partout non nulles, alors idem pour $\theta_y$.

Si $\Phi$ est loc. cste à support compact, alors $y \mapsto F(y) = \int_{X_y} \Phi(x)\, \|\theta_y\|$ est loc. cste à support compact.

---

$X$ compact, $Y$ compact, $f$ submersion, $\alpha_X$ et $\alpha_Y$ <u>partout non nulles</u>

$F(y) = \int \|\theta_y\|$ = volume de la fibre $X_y$ par rapport à $\|\theta_y\|$

est une fonction loc. cste de $y$.

$U$ vois. ouvert compact de $y_0$ où $F$ est cst

$f^{-1}(U)$ ouvert compact de $X$

$$\text{mes}\, f^{-1}(U) = \int_U F(y)\, \|\alpha_Y(y)\| = F(y_0) \cdot \text{mes}\, U$$

i.e.

$$\boxed{F(y_0) = \text{mes}\, f^{-1}(U) / \text{mes}\, U}$$

pour $U$ assez petit. (cf. def de Siegel)

<u>Rem</u> dans le cas $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on aurait

$$F(y) = \lim_{U \to y} \text{mes}\, f^{-1}(U) / \text{mes}\, U.$$

<u>Exemple</u> $X = \mathcal{O}_K \times \cdots \times \mathcal{O}_K$ $m$ fois

$Y = \mathcal{O}_K \times \cdots \times \mathcal{O}_K$ $r$ fois

$f = (f_1, \ldots, f_r)$ polynômes à coeff dans $\mathcal{O}_K$.

avec $\text{Jac}(f)$ <u>de rang $r$</u> <u>en tout point</u> (rationnel)

$y^0 = (y_1^0, \ldots, y_r^0) \in Y$

$U = \{ y \equiv y^0 \mod \pi^n \}$ $\quad$ $\text{mes}\, U = q^{-nr}$

$f^{-1}(U) = \{ x \mid f_i(x) \equiv y_i^0 \mod \pi^n \text{ pour tout } i \}$

$a_n(y) = \#$ de sol mod $\pi^n$ de $f(x) \equiv y_0 \mod \pi^n$

$\text{mes}\, f^{-1}(U) = a_n(y^0) \cdot q^{-mn}$ $\quad$ donc

$$\boxed{F(y) = q^{-(m-r)n}\, a_n(y)}$$ pour $n$ grand

$\alpha_X = dx_1 \ldots dx_n$

$\alpha_Y = dy_1 \ldots dy_n$

Rem si $\mathrm{Jac}(f)$ est non seulement non nul, mais unité, alors $n = 1$ suffit.

---

<u>Cas avec singularités</u>

$Y = K$ esp. affine de dim $1$ $\quad \alpha_Y = dy$

$X$ = var. compacte de dim $m$, $\alpha_X$ partout non nulle

$f : X \to K \qquad f$ submersion en $x \in X$

$$\Updownarrow$$

$$df(x) \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

l'un des $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est $\neq 0$ en $x$

<u>pt critique</u> de $f$ = $x \in X$ où $df_x = 0$

<u>valeur critique de</u> $f$ = $f(x)$ pour $x$ critique.

L'ens des valeurs critiques est une partie compacte $C$ de $K$

pts critiques $\qquad X_c$

$$X - f^{-1}(C) \xrightarrow{\ f\ } K - C \qquad \text{germe de } f \not\equiv 0 \text{ en tout pt}$$

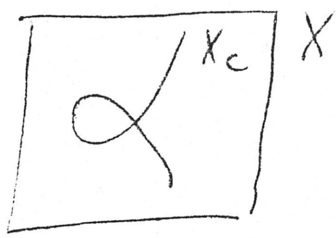
Sur $K - C$, on a $F : K - C \to \mathbb{R}_+$ loc. cste.

<u>Ex</u> $X = \mathcal{O}_K \times \cdots \times \mathcal{O}_K \qquad f = \sum x_i^2 \qquad p \neq 2$

$0$ est le seul pt critique $\qquad C = \{0\}$

Qu'est-ce qui se passe en 0. Dans l'exemple si $m \geq 3$, ça se prolonge continuement en 0.

Th (Sard) Si car $K = 0$, $C$ est fini.




. $X_c$ est analytique défini par des équations

$f|X_c$ a une différentielle nulle

$\Rightarrow f|X_c$ est loc cste (du moins sur les pts lisses) donc nombre fini de valeurs.

---

car $K = p$ $\quad m = p \quad$ $\mathcal{O}_K \times \cdots \times \mathcal{O}_K \xrightarrow{f} K$

$$x_1, \dots, x_p \longmapsto x_1^p + \pi x_2^p + \cdots + \pi^{p-1} x_p^p$$

$\operatorname{Im} f = \mathcal{O}_K$ $\quad 1, \pi, \dots, \pi^{p-1}$ $p$-base

$df = 0$ partout. $C = \mathcal{O}_K$ n'est pas de mesure 0.

Problème Si $\dim(X) < p$, alors $C$ est de mesure 0 ?

Supposons $K$ de carac. 0.

On utilise la résol des singularités (anal ou alg).

On se ramène au cas où la seule valeur critique est 0.

On étudie $F(y)$ pour $y \to 0$.

Les trois fonctions $F$, $F^*$ et $Z$

(Igusa $F_\Phi$, $F^*_\Phi$ et $Z_\Phi$, $\Phi$ loc cste sur $X$ Forms in many var. Tata)

1) $F(y)$ = mesure de $X_y$ pour $y \neq 0$

$$= \lim_{U \ni y} \frac{\text{mes } f^{-1}(U)}{\text{mes } U}$$

$F$ à valeurs réelles $\geq 0$, définie sur $K - \{0\}$, loc. cste, à support borné (car $X$ compact), $F \in L^1$. $\int_K F(y)\,dy = \int_{X - f^{-1}(0)} 1\,dx = \text{mes}(X)$

2) $F^*(t)$ = transformée de Fourier de $F$ $\qquad t \in K$

$$= \int_K F(y)\,\psi(ty)\,dy \qquad \psi \text{ car. additif non trivial fixé}$$

$$= \int_X \psi(t\,f(x))\,dx$$

3) $\pi$ unif. de $K$ $\qquad \omega : K^* \to \mathbb{C}^*$ caractère multiplicatif

$K^* = U_K \cdot \pi^{\mathbb{Z}}$ $\qquad \omega|U_K$ est un caractère continu (d'ordre fini) $\chi$

$\omega(\pi) = T \in \mathbb{C}^*$

$(\chi, T)$ définit $\omega = \omega_{\chi, T}$

Soit $\omega = \omega_{\chi,\pi}$. $\boxed{\text{si } |T| \leq 1}$ la fonction $F(y)\omega(y)$ est sommable, on définit :

$$Z(\omega) = \int_K F(y)\,\omega(y)\,dy$$

$$= \int_X \omega\,(f(x))\cdot dx$$

si $\omega \leftrightarrow \chi, T$ on note $Z(\omega) = Z_\chi(T)$.

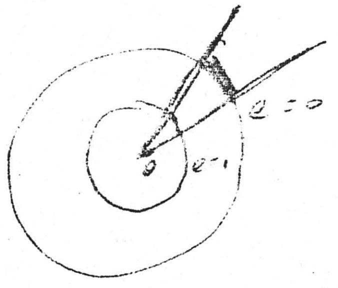
<u>Th</u> <u>Pour</u> $\chi$ fixé, $Z_\chi(T)$ <u>est une fonction rationnelle de</u> $T$.

<u>Pour</u> $T$ <u>fixé et</u> $Z_\chi(T) = 0$ <u>pour presque tout</u> ~~…~~ $\chi$.

<u>Variante de</u> (3).

$K^* = U_K \cdot \pi^{\mathbb{Z}}$ est l'analogue de $z = e^{i\theta}\cdot\rho$

$t = u \cdot \pi^e$ $\quad u$ = partie polaire




"angle" : si $\Omega$ ouvert fermé dans $U_K$

$= \{ t \in \Omega\pi^e \,/\, e \in \mathbb{Z} \}$

$X_{\Omega,e} = \{ x \,/\, f(x) \in \Omega\pi^e \}$ est ouvert compact

$a(\Omega, e)$ = mesure de $X_{\Omega,e}$

Ex $\Omega = U_K$ $\quad X_{\Omega,e}$ = pts où $v(f(x)) = e$

on a vu que alors $\sum a(\Omega,e)T^e$ est fonct. rat de T.

Th $\sum_{-\infty}^{+\infty} a(\Omega,e)T^e$ est une fonction rationnelle de T,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a(\Omega,e)T^e = r_\Omega(T)$$

(il n'y a qu'un nbre fini de termes $<0$ car X compact).

Lien entre $r_\Omega(T)$ et $Z_\chi(T)$ et F.

[Rem si 0 n'est pas la seule val. critique, $Z_\chi(T)$ est encore fonct rat de T, mais pas 0 pour presque tout $\chi$].

$\chi$ car. continu sur $U_K$, donc loc cst. Il existe un s/g ouvert $U'$ de $U$ et des repr. $u_i$ de $U/U'$ tq $\chi = 1$ sur $U'$

$\Omega_i = u_i U'$ $\quad \chi = \chi(u_i)$ sur $\Omega_i$

$$Z_\chi(T) = \int_X \omega(f(x))\,dx$$

$$X = \coprod_{i,e} X_{\Omega_i,e} \xrightarrow{f} \Omega_i \pi^e \xrightarrow{\omega} \chi(u_i)\cdot T^e \quad \text{d'où}$$

$$Z_\chi(T) = \sum_{i,e} \chi(u_i)\, T^e\, a(\Omega_i,e)$$

$$\boxed{Z_\chi(T) = \sum_i \chi(u_i)\, r_{\Omega_i}(T)}$$

Inversement si $\Omega_i = u_i U'$ $\qquad \chi = 1$ sur $U'$

$$\sum_\chi \chi(u_j)^{-1} Z_\chi(T) = \sum_{i,\chi} \chi(u_i u_j^{-1})\, r_{\Omega_i}(T)$$

$$= (U_K : U')\, r_{\Omega_j}(T)$$

$(U_K : U') = \#$ de $\chi$

$\mathrm{vol}(U') = \mathrm{vol}(\Omega_j)$

$\mathrm{vol}(U_K) = 1 - q^{-1}$ $\qquad$ d'où

$$\boxed{r_{\Omega_j}(T) = \frac{\mathrm{vol}(\Omega_j)}{1-q^{-1}} \sum_{\substack{\chi = 1 \\ \text{sur } U'}} \chi(u_j)^{-1} Z_\chi(T)}$$

Mais $Z_\chi(T) = 0$ sauf pour un nbre fini de $\chi$, donc si $\Omega$ est un voisinage assez petit de $u$ :

$$\boxed{r_\Omega(T) = \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{1-q^{-1}} \sum_\chi \chi(u)^{-1} Z_\chi(T)}$$

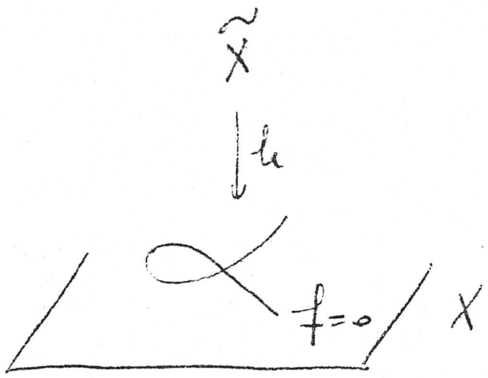
---

$t = u\pi^e$ $\qquad \Omega$ voisinage petit de $u$

$$F(t) = \frac{\mathrm{vol}(f^{-1}\Omega\pi^e)}{\mathrm{vol}(\Omega\pi^e)} = \frac{a(\Omega, e)}{q^{-e}\,\mathrm{vol}(\Omega)}$$

d'où $$\boxed{F(u.\pi^e) = \frac{q^e}{1-q^{-1}} \left\{\text{coeff de } T^e \text{ dans } \sum_\chi \chi(u^{-1}) Z_\chi(T)\right\}}$$

---




On éclate $X$ jusqu'à situation à croisements normaux pour $f$ et $\alpha_X$. ie en chaque pt coord $z_1, \dots, z_m$ tel que

$$(f \circ h) = \sum N_i (z_i)$$

$$(h^*\alpha) = \sum (\nu_i - 1)(z_i)$$

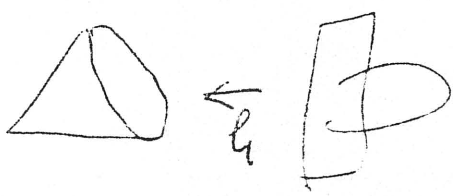
ie $\left|\begin{array}{l} f = z_1^{N_1} \dots z_m^{N_m} \times (\text{fonct non nulle au pt}) \\ h^*\alpha = \prod z_i^{\nu_i - 1} dz_i \times (\text{fonct non nulle}) \end{array}\right.$

---

Les pôles des $Z_\chi(T)$ sont de la forme $q^\lambda$ tel que

$$N_i \lambda \equiv \nu_i \quad \text{mod } 2\pi i / \log(q)$$

Ex cône quadr $f = \sum x_i^2$




$(N, \nu) = (2, m)$ div exc

$= (1, 1)$ transf stricte

d'où $\lambda = \frac{m}{2}$ et $1$ pôle en $T = q$ et $T = q^{m/2}$

15.2.82

$f$ fonction à valeurs dans $K$

$X \xrightarrow{f} K$ var. anal. compacte lisse de dim $n$

$\alpha$ diff. de degré max. sur $X$ partout non nulle.

On suppose que $0$ est la seule valeur critique de $f$.

$X_y = f^{-1}(y)$ $\qquad \theta_y = \alpha_X / dy$

pour $y \in K$, $y \neq 0$ $\qquad \boxed{F(y) = \int_{X_y} |\theta_y|}$ $\qquad y \to 0$?

transformée de Fourier.

pour $t \in K$ $\qquad F^*(t) = \int_K \psi(ty) F(y) \, dy = \int_X \psi(t f(x)) \|\alpha(x)\|$

$\psi = 1$ sur $O_K$ $\quad \psi \neq 1$ sur $\pi^{-1} O_K$

$\psi$ carac. additif non trivial. On étudie le comportement pour $t \to 0$. ex: $F^* \in L^1 \Leftrightarrow F$ continue en $0$

$F^* \leftrightarrow$ sommes d'exponentielles.

fonction zêta $\qquad \omega$ caract de $K^*$

$$Z(\omega) = \int_X \omega(f(x)) \, \|\alpha(x)\|$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \quad dx$

défini par prolongement analytique

$\omega$ caractère de $K^* = U_K \cdot \pi^{\mathbb{Z}}$ $\qquad \omega \to \chi$ restr. à $U_K$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \omega(\pi) = T \in \mathbb{C}^*$

$Z(\omega)$ converge si $|T| < 1$.

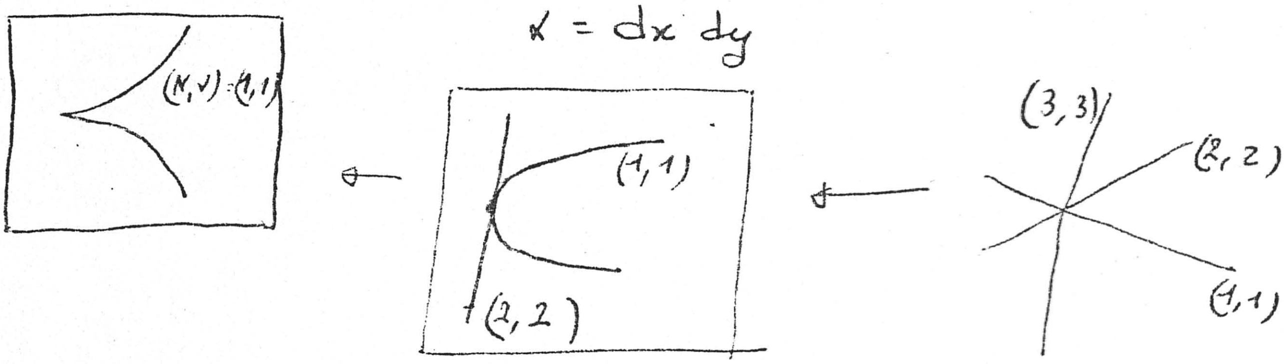
On choisit un éclatement $\tilde{X}$ de $X$ tel que $\tilde{X} \to X$ isomorphisme en dehors de $X_0$, $\tilde{X}$ régulier en $\tilde{x}$ coord locales $z_1, \dots, z_m$ telles que

$$f \circ h = c\, z_1^{N_1} \cdots z_m^{N_m} \qquad \text{div } \overbrace{h^*(f)} \text{ à crois. normaux}$$

$$h^* \alpha = c'\, z_1^{\nu_1 - 1} dz_1 \wedge \cdots \wedge z_m^{\nu_m - 1} dz_m$$

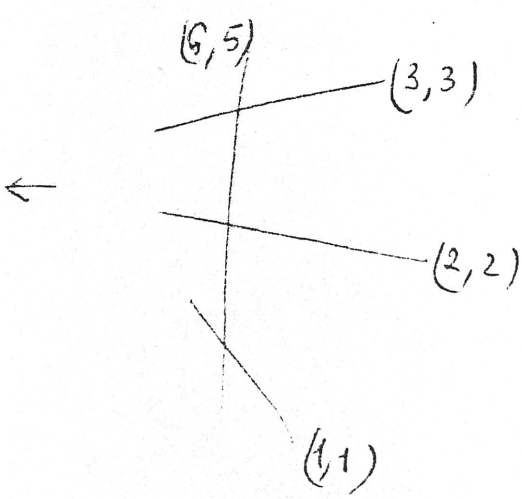
en termes de diviseurs
$$h^*(f) = \sum N_i (z_i)$$
$$(h^* \alpha) = \sum (\nu_i - 1) z_i$$

<u>Exemple</u> $f = y^2 - x^3$ $\quad X = \text{plan}$ $\quad \alpha = dx\, dy$ $\quad$ couples $(N, \nu)$




$x, y$ $\qquad$ $x,\ t = y/x$

$$dx\, dy = dx\, t\, dx + x\, dx\, dt \qquad \nu = 2$$



On suppose que carac $= 0$ ou $p$ et $p \nmid N_i$. Alors :

<u>Théorème</u> (Igusa) $Z_\chi(T)$ est fonction rationnelle de $T$ nulle pour presque tout $\chi$ avec comme pôles (au plus) $T = \xi \cdot q^{\nu_i/N_i}$ avec $\xi^{N_i} = 1$ de multiplicité au plus le nombre maximum de couples $(\nu_i/N_i)$ avec $\nu_i/N_i$ donné passant par le même point.

[ex. mult $\leq$ dim $X = m$]. + pôles en $0$ et $\infty$.

<u>dém</u>. Par chgt de variable on peut supposer $X = \tilde{X}$.
On peut couper en morceaux. Plaçons nous en un point de $f = 0$. Un changement de variable rend $c$ constant.

$c(\tilde{x}) = c\,(1 + \cdots)$ $\qquad$ $c$ cste

$\quad = c\,(1 + \cdots)^{N_1}$ $\qquad$ localement $\qquad$ on met la fonction dans $z_1$.

Pour $\alpha$ seul compte $|c'|$ qui est constante. D'où le calcul pour

$$X = \mathcal{O}_K \times \cdots \times \mathcal{O}_K \quad m \text{ fois}$$

$$f = c \cdot z_1^{N_1} \cdots z_m^{N_m}$$

$$\|h^* \alpha\| = \|z_1\|^{\nu_1 - 1} \cdots \|z_m\|^{\nu_m - 1} dz_1 \cdots dz_m$$

A calculer :

$$\int \omega(c)\, \omega(z_1)^{N_1} \cdots \omega(z_m)^{N_m} \|z_1\|^{\nu_1 - 1} \cdots \|z_m\|^{\nu_m - 1} dz$$

$$= \omega(c) \prod_{i=1}^{m} \int_{\mathcal{O}_K} \omega(z)^{N_i} \|z\|^{\nu_i - 1}\, dz$$

---

calcul de $\int_{\mathcal{O}_K} \omega(z)\, dz$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi^n U} \omega(z)\, dz \qquad \omega(\pi^n u) = T^n \chi(u)$$

$$z = \pi^n u$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{U} T^n \chi(u)\, q^{-n} |du| \qquad |dz| = q^{-n}\, du$$

$$\int_U \chi(u)\, du = 0 \text{ si } \chi \neq 1$$
$$= 1 - q^{-1} \text{ si } \chi = 1$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \neq 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} q^{-n} T^n (1 - q^{-1}) = \dfrac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-1} T} & \text{si } \chi = 1 \end{cases}$$

---

Appliquons ce calcul au caractère $z \mapsto \omega(z)^{N_i} \|z\|^{\nu_i - 1}$

i.e. $\pi^n u \mapsto \chi(u)\, T^{N_i n}\, q^{-n(\nu_i - 1)}$

i.e. $\chi' = \chi^{N_i}$, $T' = T^{N_i} q^{-(\nu_i - 1)}$. Donc

$$\int = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi^{N_i} \neq 1 \text{ pour un } i \\ \omega(c) \prod_{i=1}^{m} (1 - q^{-1}) / 1 - q^{-\nu_i} T^{N_i} & \text{si } \chi^{N_i} = 1 \text{ pour tout } i \end{cases}$$

$$\omega(c) = \chi(v)\, T^{e}$$

Au voisinage d'un point où $f \neq 0$. On se ramène à

$f = c(1+\pi^M z_1)$ car $f' \neq 0$ par hyp.

$\alpha = dz_1 \dots dz_m$

Alors le calcul donne $Z_\chi = 0$ si $\chi \neq 1$ sur $1+\pi^M O_K$ et

si $M > 0$ $\quad Z_\chi(T) = c \cdot T^{\text{cste}}$

si $M \leq 0$ $\quad = \left(1-\frac{1}{q}\right) T^{\text{cste}} / (1-q^{-1}T)$

∎

---

F est loc cst en dehors de 0

0 en dehors d'un compact de K

Pour $x = u\pi^e$, $F(x)$ est combinaison lin de fonctions du type

$\boxed{\varphi(u)\, \|x\|^{\lambda-1} (\log\|x\|)^j}$ $\quad$ $\varphi$ loc cste sur $U$

$u$ = "arg $x$"

où les $\lambda$ sont les mêmes que pour $Z$ ie

pôles de $Z_\chi$ $= q^\lambda$ ie $\lambda = \frac{\nu_i}{N_i} + \frac{a_i}{N_i} 2\pi i/\log q$

et $j \leq$ (multiplicité de $\lambda$) $- 1$.

En effet on a vu

$$F(u\pi^e) = \frac{q^e}{1-q^{-1}} \left\{ \text{coeff de } T^e \text{ dans } \sum_\chi \chi(u^{-1}) Z_\chi(T) \right\}.$$

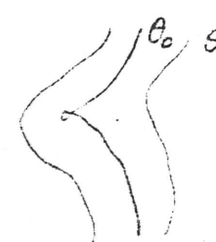
$$\frac{1}{1-q^{-\lambda}T} = \sum q^{-\lambda e} T^e .$$

<u>Remarque</u> Soit $\lambda_0 = \mathrm{Inf}\, \mathrm{Re}(\lambda)$ et supposons mult 1 pour les $\lambda$ avec $\mathrm{Re}(\lambda) = \lambda_0$. Alors $\underset{x \to 0}{F(x) = O}\left(\|x\|^{\lambda_0 - 1}\right)$.

<u>Cas particulier</u> : les $\nu_i/N_i$ sont tous $> 1$ sauf (au plus, pour chaque point) l'un qui est égal à 1.

ie $Z_\chi(T)$ pour $\chi = 1$ a un pôle simple en $T = q$ et c'est le seul pôle de $Z_\chi(T)$ dans le disque $|T| \leq q$. Alors on montre que F est <u>continue</u> au point 0 et sa valeur F(0) est donnée par

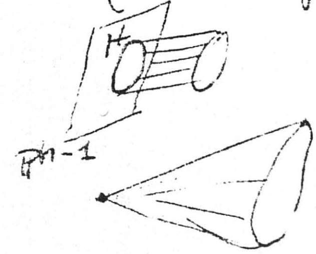
$$F(0) = \int_{X_0^{\mathrm{reg}}} \theta_0 .$$




(en général on ne sait pas si cette intégrale converge, elle peut diverger)

<u>Exemple</u> f polynôme homogène de degré d en m variables "non singulier" (ie l'hypersurface $f = 0$ de $\mathbb{P}_{m-1}$ est lisse).

cône $f = 0$




<u>couples</u> $(N, \nu)$ $(1,1)$ sauf propre le long du div except. $\left|\begin{array}{l} N = d \\ \nu = m \quad (\dim X) \end{array}\right.$

cas favorable si $m > d$. (ex. 3 variables ou plus pour les formes quadratiques non dégénérées).

<u>Exercice</u> $y^2 - x^3 = 0$

$a_n$ = nbre de sol modulo $p^n \sim$ cste $. \, p^{\frac{7}{6}n}$

par calcul direct ou

par $(6,5)$ $(3,3)$ $(2,2)$ $(2,1)$

$F(x) \approx c' \|x\|^{-1/6} \quad x \to 0$


$df$

$$p^{-2n} a_n = \mathrm{vol}\,(f \equiv 0 \mod p^n)$$
$$= \int_{p^n \mathbb{Z}_p} F(x)\,dx \sim c''. \, p^{-n\frac{5}{6}}$$
$$a_n \sim c'' p^{\frac{7}{6}n}$$

<u>Attention</u> Ce n'est pas la m chose que les sol de $y^2 - x^3$ dans $\mathbb{Z}_p$ réduits modulo $p^n$. (qui donnerait $\sim p^n$).

il y a des solutions non relevables $y \equiv 0 \mod p^{n/2}$

$x \equiv 0 \mod p^{n/3}$

$p^{n/2} \cdot p^{2n/3} = p^{\frac{7}{6}n}$.

---

<u>Passage de F à F*</u> (cf. Igusa)

F est comb lin de $\chi(x) \, \|x\|^{\lambda - 1} \, (\log \|x\|)^j$

On trouve que Fourier transforme cette fonction en une combinaison lin de fonctions (pour $x \to \infty$) $x \mapsto \chi^{-1}(x) \, \|x\|^{-\lambda} \, (\log\|x\|)^{j'}$ $j' \leq j$

(c'est le $s \mapsto 1 - s$ $\chi \mapsto \chi^{-1}$)

Donc $F^*$ est combinaison linéaire finie de fonctions de ce type (avec mêmes $\lambda_i$ et $j' \leq$ mult. du pôle). En particulier $F^*(x)$ pour $x \to \infty$ a un developpement asymptotique.

<u>Remarque</u> si $\lambda = 1$, $\chi = 1$, $j = 0$, i.e. $1$ au voisinage de $0$ sa transformée de Fourier au voisinage de l'$\infty$ est $0$. (ce terme disparaît).

En part dans le cas favorable de plus haut $\nu_i, N_i$ $\nu_i > N_i$ sauf un ce sauf un disparait dans $F^*$
$$\|F^*(x)\| = O\left(\|x\|^{-\operatorname{Inf}_{\nu_i \neq N_i}(\nu_i/N_i)}\right)$$

<u>Ex</u> $f$ homogène de deg $d$ non sing en $m$ variables $m > d$

$(N, \nu) = (d, m)$ et $(1, 1)$

$\lambda = \dfrac{m}{d}$ $\boxed{F^*(x) \simeq c \, . \, \|x\|^{-m/d}}$ e.g. $F^* \in L^1$.

---

<u>La fonction $F^*$</u>

$X = \mathcal{O}_K \times \cdot \times \mathcal{O}_K$ $\psi$ carac. additif de $K$ normalisé par

$\alpha = dx_1 \times \cdot \times dx_m$ $\psi = 1$ sur $\mathcal{O}_K$

$f \in \mathcal{O}_K[x_1, \cdot, x_m]$ $\neq 1$ sur $\pi^{-1}\mathcal{O}_K$

i.e. $\mathcal{O}_K$ est son propre orthogonal pour $\psi$

On associe à $f$ des sommes exponentielles :

pour $a \in \mathcal{O}_K$ $\qquad g(a,n) = \sum_{x \bmod \pi^n} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right)$

estimation triviale $\quad |g| \leq q^{mn}$

La théorie d'Igusa donne l'ordre de grandeur de ces sommes.

$$F^*\left(\frac{a}{\pi^n}\right) = \int_X \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) dx$$

$\frac{f(x)}{\pi^n} \bmod \mathcal{O}_K$ ne dépend que de $x \bmod \pi^n$ donc

$$\boxed{F^*\left(\frac{a}{\pi^n}\right) = q^{-mn} g(a,n)}$$

La théorie d'Igusa donne des estimations du genre

$$\| F^*(x) \| = O\left(\|x\|^{-\lambda}\right)$$

ie $\quad F^*\left(\frac{a}{\pi^n}\right) = O\left(q^{-n\lambda} n^t\right)$

$$g(a,n) = O\left(q^{n(m-\lambda)}\right).$$

<u>Exemple</u> $\quad f$ homogène non singulier de degré $d$

$$\lambda = \frac{m}{d}$$

$$\Rightarrow \quad g(a,n) = O\left(q^{mn\left(1-\frac{1}{d}\right)}\right)$$

eg pour $f$ quadratique $\quad O\left(q^{\frac{mn}{2}}\right)$.

Lien avec nombre de solutions

$t \in \mathcal{O}_K / \pi^n \mathcal{O}_K$

$a(t,n)$ = nbre de sol mod $\pi^n$ de $f(x) = t$ dans $\mathcal{O}_K/\pi^n\mathcal{O}_K$

$$\boxed{v_n(t) = a(t,n) = \sum_{b \in \mathcal{O}_K/\pi^n\mathcal{O}_K} \psi\left(-\frac{bt}{\pi^n}\right) g(b,n)\; q^{-n}}$$

C'est une inversion de Fourier.

---

Exemple $f$ homogène de degré $d$

non singulier modulo $\pi$ ie pour tout $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{O}_K \neq (0,\ldots,0) \bmod \pi$

l'une des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est $\not\equiv 0 \pmod{\pi}$.

Calculons les $g(a,n)$ $\quad n \geq 2$

$$g(a,n) = \sum_{x \bmod \pi^n} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) \qquad a \text{ unité.}$$

Lemme Si $n \geq 2$, on a

$$\sum_{\substack{x \text{ réguliers} \\ \bmod \pi^n}} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) = 0$$

($x$ rég mod $\pi^n$ = $f$ lisse en $x$ mod $\pi$)

dem. $x$ rég $\Rightarrow$ $x + \pi^{n-1} t$ aussi et

$$\sum_{t \bmod \pi} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x + \pi^{n-1} t)\right) = 0$$

$$f(x+\pi^{n-1}t) = f(x) + \sum \pi^{n-1} t_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \mathrm{mod}\ \pi^n$$

$$\sum = \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) \sum_t \psi\left(\sum \frac{a}{\pi_1} \frac{\partial f}{\partial x_i} . t_i\right)$$

$= 0$ orth des caractères.

Dans le cas considéré on a donc

$$g(a,n) = \sum_{x \equiv 0\ (\pi)} \psi(-) \qquad x = \pi X \qquad X \bmod \pi^{n-1}$$

$$= \sum_{X \bmod \pi^{n-1}} \psi\left(\frac{a\pi^d f(X)}{\pi^n}\right)$$

$$= \begin{cases} q^{m(d-1)} g(a, n-d) & \text{si } n \geqslant d \\ q^{m(n-1)} & \text{si } n \leqslant d \end{cases}$$

d'où récurrence pour $g(a,n)$

si $n = 1 + kd$
$$\boxed{g(a,n) = q^{mk(d-1)} g(a,1)}$$

$g(a,1)$ est considéré par Deligne dans Weil I

$$|g(a,1)| \leqslant (d-1)^m q^{m/2}$$

d'où $|g(a,n)| \leqslant q^{km(d-1)+m/2} (d-1)^m$

et en termes de $F^*$

$$|F^*(t)| \leq \|t\|^{-\frac{m}{d}} (d-1)^m \, q^{-m(1/2 - 1/d)}$$

$$\leq \|t\|^{-\frac{m}{d}}$$ sauf pour un nbre fini de $q$.
(dépendant de $d, m$).

---

22.2.82 $t \neq 0$ valeur non critique.

$$F(t) = \int_{f(x)=t} |\theta_t| \qquad \theta_t = \frac{dx_1 \cdots dx_m}{df}$$

$$F(t) = \frac{1}{q^{n(m-1)}} \nu_n(t)$$ si $n$ assez grand
$t \in \mathcal{O}_K \quad t \neq 0$

$\nu_n(t)$ = nbre de sol mod $\pi^n$ de $f(x) \equiv t$ mod $\pi^n$.

$F^*$ est transformée de Fourier de $F$ ($F \in L^1$). En général $F^* \notin L^1$.

On peut réécrire la formule

$$\nu_n(t) = \frac{1}{q^n} \sum_{a \bmod \pi^n} \psi\left(-\frac{at}{\pi^n}\right) g(a, n)$$

$$\nu_n(t) = q^{n(m-1)} \int_{\pi^{-n}\mathcal{O}_K} F^*(y)\, \psi(-ty)\, dy$$ car

$F^*$ est cste modulo $\mathcal{O}_K$. etc

$$\nu_n(t) = q^{n(m-1)} \sum_{a \bmod \pi^n} q^{-nm}\, g(a,n)\, \psi\left(-\frac{at}{\pi^n}\right)$$

D'où

$$\boxed{F(t) = \int_{\pi^{-n}\mathcal{O}_K} F^*(y)\,\psi(-ty)\,dy \qquad \text{pour } n \text{ grand}}$$

L'intégrale sur $K$ serait divergente.

<u>Exemple</u>

1 variable $\qquad p = 2 \qquad \mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Q}_2$

$f(x) = x^2$ , $t = 1$

$X^2 \equiv 1 \mod 2^n$

$n = 1 \quad \nu_n = 1$

$n = 2 \quad \nu_n = 2$

$n \geq 3 \quad \nu_n = 4$

$\pm 1 \,, \pm 1 + 2^{n-1}$

$$F(t) = \int_{f(x)=t} \theta_t \qquad \theta_t = \frac{dx}{dx^2} = \frac{1}{2x}$$

$x^2 = 1 \qquad \left|\frac{1}{2}\right| = 2 \qquad$ deux fois $\qquad F(1) = 4$

## Stabilité de $\nu_n(t)$

Soit $t$ fixé. Supposons qu'il existe $e, n_0$ $1 \leq e \leq n_0$

tels que $f(x) \equiv t \mod \pi^{n_0} \Rightarrow df(x) \not\equiv 0 \mod \pi^e$

i.e. l'une des dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ n'est pas divisible par $\pi^e$.

Alors $q^{-n(m-1)} \nu_n(t)$ est constante pour $n \geq n_0 + e - 1$.

ex (cas lisse, $e = n_0 = 1$) stabilité pour $n \geq 1$.

La démonstration est standard. On se ramène au cas type

$$f(x) = a + \pi^{\varepsilon} x \qquad \varepsilon \leq e - 1 .$$

Exemple $\mathbb{Z}_p$, $p \neq 2$, $f$ quad. $Q$ à disc. inversible

$Q(x) = t$ c'est le cas lisse $t$ unité stabilité pour $n \geq 1$

$p = 2$, stabilité pour $n \geq 3$.

---

$\nu_n(t) =$ nbre de solutions de $f(x) = t \mod \pi^n$

$\tilde{\nu}_n(t) =$ ———————— relevables dans $\mathcal{O}_K$

en des solutions de $f(x) = t$

On a $\tilde{\nu}_n(t) \leq \nu_n(t)$ avec égalité dans le cas lisse.

Ici $t \neq 0$ n'est pas valeur critique. On a

$$\nu_n(t) = q^{n(m-1)} \cdot a \qquad \text{si } n \to \infty$$

$$a = F(t) = \int_{X_t} |\theta_t|$$

$$\tilde{V}_n(t) = q^{n(m-1)}\,\tilde{a} \qquad \text{pour } n \text{ grand}.$$

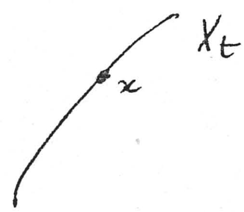
où $\tilde{a}$ est une autre constante.

cf exposé Serre – Oesterlé DPP 81 Juin et Novembre
Serre Čebotarev IHES § 3.

et
$$\tilde{a} = \int_{X_t} |\tilde{\theta}_t|$$

où $\tilde{\theta}_t$ est une autre forme différentielle sur $X_t$.

<u>Description locale de $\theta_t$ et $\tilde{\theta}_t$</u> :




$\varepsilon = \operatorname{Inf} v\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ en $x$ atteint pour $i$

coord locales $x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_m$ sur $X_t$

$$\theta_t = \frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m}{\partial f / \partial x_i}$$

$$\text{mesure } |\theta_t| = q^{\varepsilon}\, dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_m$$

Par contre on montre que :

$$\text{mesure } |\tilde{\theta}_t| = dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_m$$

<u>Exercice</u> Supposons que $f$ soit une "fonction de Morse" i.e. pts critiques isolés avec hessien inversible $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ cas $K \neq 2$

Alors $|F^*(t)| = O(|t|^{-m/2})$ $t \to \infty$.

ou $\Leftrightarrow$ pour $a \in \mathcal{O}_K^*$ $|g(a,n)| = O(q^{nm/2})$ $n \to \infty$

$g(a,n)$ est somme de $q^{nm}$ termes de val absolue 1. On a donc l'estimation qu'on aurait eu prenant ces termes au hasard.

déci. On se ramène à $f = \sum a_i x_i^2$ (localement)

$a_i$ inversible et on fait le calcul

Sous-exercice sommes de Kloosterman

$$f(x) = \alpha x + \beta x^{-1}$$

---

Aspect distribution

A $X \xrightarrow{f} K$ on a associé $F, F^*$ et $Z$.

Soit $\Phi$ fonction de Schwartz-Bruhat i.e loc cste à support compact ($X$ non néc. compact). On définit $F_\phi, F^*_\phi, Z_\phi$

$$F_\phi(t) = \int_{X_t} \phi(x) \, |\theta_t|$$

$$F^*_\phi(t) = \text{Fourier de } F_\phi = \int_X \phi(x) \, \psi(t f(x)) \, dx$$

$$Z_\phi(\omega) = \text{“}\int_X \phi(x) \, \omega(f(x)) \, dx\text{”} \qquad (\text{car } K = 0)$$

défini par prolongement analytique $\omega \leftrightarrow \chi, T$

= fonction rationnelle de $T$ pour $\chi$ fixé et $\phi$ fixé

$F_\phi, F^*_\phi, Z_\phi$ sont linéaires en $\phi$, donc sont ds distributions (par définition). De plus, pour $Z_\phi$, il existe un polynôme $b(T) \neq 0$ ne dépendant que de $f$ tel que ($X$ compact ou algébrique)

$$b(T) \, Z_\phi(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(\phi) \, T^n \qquad \chi \text{ fixé}$$

$a_n(\phi)$ distribution en $\phi$ et pour tout $\phi$ $a_n(\phi) = 0$ pour presque tout $n$

## Bibliographie

### Cas local p-adique


J.I. Igusa. Lectures on Forms of Higher Degree
Tata, Springer, 1978

— Complex powers and asymptotic expansions
J. Crelle 268 et 278 (1974 et 75)


### Cas réel


Igusa idem

L. Schwartz distributions vol 1

Hörmander. Lojasiewicz Division des distributions

Bernstein, Atiyah Prolongt. analytique

J.E. Björk Rings of differential operators, North Holl. 1979

## Cas réel $/\mathbb{R}$

$f$ polynôme $\in \mathbb{R}[X_1, .., X_n]$

$f \neq 0$ 0 seule valeur critique

On lui attache $F_\Phi, F^*_\Phi, Z_\Phi$ où $\Phi$ est • soit une fonction $C^\infty$ à support compact $\phi \in \mathcal{D}$

• soit une fonction $C^\infty$ à décroissance rapide (ainsi que toutes ses dérivées) ie $\phi \in \mathcal{S}$

De même que $K^* = U_K \times \pi^{\mathbb{Z}}$, on a

$$\mathbb{R}^* = \{\pm 1\} \times \mathbb{R}^*_+$$

$$\mathbb{C}^* = S_1 \times \mathbb{R}^*_+$$

$\{\pm 1\}$ a deux caractères $1$ et sgn.

$\mathbb{R}^*_+ \ni t \longmapsto t^s = e^{-s(\log t)}$

D'où deux types de caractères $\omega_s : t \longmapsto |t|^s$

$\omega^0_s : t \longmapsto \mathrm{sgn}(t)\,|t|^s$

Alors

$$\boxed{Z_\phi(s) = \int_X \phi(x)\,\omega_s(f(x))\,dx = \int \phi(x)\,|f(x)|^s\,dx}$$

$$Z^0_\phi(s) = \int_X \phi(x)\,\omega^0_s(f(x))\,dx$$

convergent pour $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Ainsi $|f(x)|^s$ est une distribution définie pour $Re(s) > 0$.

Théorème (Bernstein, Atiyah et S. Gelfand) $Z_\phi(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe de $s$, avec pôles (au plus) en les points $-\frac{1}{N}, -\frac{2}{N}, \dots$ $N$ entier $\geq 1$ convenable (indépendant de $\phi$) avec multiplicité bornée par $m$ = dimension.

Rem) I. Gelfand avait posé la conjecture en Amsterdam 1954.

2) deux cadres plus généraux

a) anal. réel $X$ anal. sans singularité
$f$ fonction anal. $\phi$ à support compact (mais $N$ dépendant de $\phi$)

b) alg non singulière $f$ fonction régulière, $\phi$ à décroissance rapide
il faut résoudre une compactification de $X$.

La dém est analogue à celle du cas p-adique. Avec résolution des singularités. Bernstein a donné une dém. plus élémentaire avec les polynômes de Bernstein qui donne facilement le prolongement analytique et Kashiwara donne la position des pôles.

Identité de Bernstein

$f(x)$ polynôme $\geq 0$

Il existe un polynôme $b(s) \neq 0$ tel que

$$\boxed{b(s)\, f(x)^s = P\left(s, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x)^{s+1}}$$

où $P$ est un poly en $\frac{\partial}{\partial x}$ à coeff poly en $s$ et $x$.

Alors le prolongt analytique est immédiat

$$b(s)\, Z_\phi(s) = \int \phi(x)\, P\left( f(x)^{s+1}\right) dx$$

On intègre par parties. Soit $P'$ l'adjoint de $P$

ie $\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)' = -\frac{\partial}{\partial x} \quad . \quad (f D)' = (D' f).$

$$\int \varphi_1 \cdot D\varphi_2\, dx = \int D'\varphi_1 \cdot \varphi_2\, dx$$

donc

$$b(s)\, Z_\phi(s) = \int P'(\phi) \cdot f(x)^{s+1} dx$$

$$\boxed{b(s)\, Z_\phi(s) = Z_{P'(\phi)}(s+1)}$$

hol $Re(s) > 0 \Rightarrow$ holom $Re(s) > -1$ etc.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ les zéros de $b$. Alors les pôles possibles sont les $\alpha_j - i$, $i$ entier $\geq 0$.

<u>Exemples</u> 1) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

alors on trouve $\quad P = \Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f^{s+1}\right) = 2(s+1)\, x_i\, f^s$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(f^{s+1}\right) = 2(s+1) f^s + 4s(s+1)\, x_i^2\, f^{s-1}$$

$$\Delta\left(f^{s+1}\right) = 2n(s+1) f^s + 4s(s+1) f^s \quad = b(s) f^s$$

$\boxed{b(s) = (s+1)(4s+2n)}$ $\quad$ D'où pôles $\quad -1, -2, \dots$

$\quad -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \dots$

2) $f(x) = (y^2 - x^3)^2$ Écrire l'identité de Bernstein ?

La dém. du th. est basée sur l'étude de l'algèbre $\mathbb{R}[x_i, \frac{\partial}{\partial x_i}]$

ie eng par $x_i$ et $y_i$ avec

$$\begin{cases} x_i y_i - y_i x_i = -1 \\ x_i y_j = y_j x_i \end{cases}$$

C'est l'algèbre de Weyl.

---

<u>Relation avec la division des distributions</u> par $\left|\begin{array}{l}\text{polynôme} \\ \text{fonct analytique}\end{array}\right.$

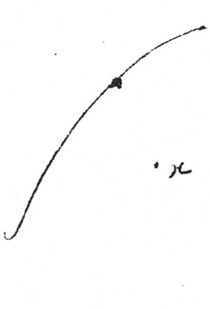
$f(x)$ anal. réelle $\neq 0$

$D$ distribution. Existe-t-il une distribution $\Delta$ telle que $\boxed{\Delta . f = D}$ ?

formellement $\Delta$ "$=$" $\frac{D}{f}$.

Sur $U$ l'ouvert où $f \neq 0$, $\frac{1}{f}$ existe. Alors $\Delta$ est un prolongement de $\frac{D}{f}$ de $U$ à $\mathbb{R}^n$.

L'existence a été montrée par Hörmander pour les polynômes et Lojasiewicz pour les fonct. anal. à l'aide de l'inégalité



$X_0 = \{f(x) = 0\}$

$$d(x, X_0) = \inf \{|x-y| \;/\; y \in X_0\}$$

sur un compact $|f(x)| \leq O(d)$ trivial.

$$\boxed{d = O(|f|^\rho) \quad \rho > 0}$$ inég. Lojasiewicz

Greenberg et Schappacher ont montré l'analogue ultramétrique.

L'existence de « $\frac{1}{f}$ » comme distribution, se déduit des propriétés de $Z_\phi(s)$. Supposons $f \geq 0$ pour simplifier.

$\Phi \mapsto Z_\phi(s)$ est moralement $|f|^s$, c'est vrai pour $Re(s) > 0$.

il y a holomorphie en $Re(s) \geq 0$ et $|f|^0 = 1$ partout comme distr.

On développe au voisinage du pôle $s = -1$.

$$Z_\phi(s) = \sum_{n=0}^{m} a_n(\phi) \frac{1}{(s+1)^n} + \Lambda_\phi(s)$$

où $\Lambda_\phi(s)$ est holomorphe au voisinage de $s=-1$ et $\Lambda_\phi(-1) = 0$.

<u>Alors</u> $\phi \mapsto a_0(\phi)$ <u>est une distribution et c'est un inverse de</u> $f$.

En dehors de $X_0$. c'est clair tous les termes sont nuls sauf $a_0 = \frac{1}{f(x)}$.

$$Z_{f\phi}(s) = \sum a_n(f\phi) \frac{1}{(s+1)^n} + \Lambda_{f\phi}(s)$$

$Z_{f\phi}(s) = Z_\phi(s+1)$ est holom en $s = -1$ et sa valeur y est $1$

donc $a_n(f\phi) = 0 \quad n \geq 1$

et $a_0(f\phi) = 1$ cqfd.

Il n'y a pas unicité de « $\frac{1}{f}$ ». Mais on trouve ici un choix <u>canonique</u>.

<u>Exemple</u> sur $\mathbb{R}$ dist $\left(\frac{1}{x}\right) = vp\left(\frac{1}{x}\right)$ valeur principale

définie par : $\varphi \mapsto \lim_{\substack{\varepsilon,\varepsilon' \to 0 \\ \varepsilon/\varepsilon' \to 1}} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x) \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon'}^{\infty} \varphi(x) \frac{dx}{x} \right\}$ .

(écrit comme ça sans imposer $\varepsilon' = +\varepsilon$ c'est clairement invariant par difféomorphisme) .

---

Inverser un polynôme, c'est trouver une solution élémentaire

Soit $P(x)$ un polynôme $\neq 0$ et $D$ distribution tempérée (ie. dans $\mathcal{S}'$ $D(\phi)$ a un sens pour $\phi \in \mathcal{S}$) telle que $D \cdot P = 1$.

Alors on applique Fourier . Soit $D'$ = Fourier de $D$ $\in \mathcal{S}'$

$P'$ = opérateur différentiel $P(-\frac{\partial}{\partial x})$ .

Fourier donne $\boxed{D' * P' = \delta \quad (\text{Dirac})}$ .

Alors on peut étendre

$$P' * f = g$$

$$D' * P' * f = \delta * f = f = D' * g$$

solution $\boxed{f = D' * g}$

---

# Fonctions $F$ et $F^*$

$$F^*_\phi(t) = \int \phi(x)\, e^{2\pi i t f(x)}\, dx$$

intégrale oscillante. Alors Igusa donne un développement asymptotique :

$$F^*_\phi(t) = \sum a_{k,m}(\phi)\, t^{-\lambda_k} (\log t)^{m_k - 1} \qquad t \to +\infty$$

où les $-\lambda$ sont les pôles $\qquad F^*_\phi(t) \to 0$ si $t \to +\infty$.

$m_k \leq$ mult. pôles.

Pour $F_\phi(t) = \int_{X_t} \phi(x)\, |\theta_t|$ on a un développement analogue pour $t \to 0$.

70

1.3.82.

1) Adèles

2) Nombres de Tamagawa

3) Minkowski - Hlawka et $\tau(SL_n)=1$

4) Application aux modules de fibrés sur les courbes

## Adèles

$K$ corps global, ie extension finie de $\mathbb{Q}$ ou corps de fonctions d'une courbe alg sur un corps fini.

$\Sigma$ = ensemble des places de $K$ $= \Sigma_\infty \cup \Sigma_f$

$v \in \Sigma_f \Leftrightarrow$ val. discrète sur $K$

$v \in \Sigma_\infty \Leftrightarrow$ plgt $K \to \mathbb{C}$ (deux plgts conjugués définissent la même place)

$K_v = \hat{K}_v$ = complété de $K$ pour $v$ (= corps local ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$\hat{\mathcal{O}}_v$ = anneau des entiers $\quad \mathcal{O}_v = K \cap \hat{\mathcal{O}}_v$ = anneau local de $v$. $\quad v \in \Sigma_f$

les corps $\hat{K}_v$ sont loc. compacts et $\hat{\mathcal{O}}_v$ est un ouvert compact de $\hat{K}_v$.

<u>"Produit restreint"</u>: Soit $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ famille d'espaces top. loc. compacts et $(\mathcal{O}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda - \text{ens. fini } S_0}$ des ouverts compacts de $X_\lambda$. On définit un espace loc. compact
$$X = \prod(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda) \subset \prod X_\lambda$$

$x = (x_\lambda) \in X \Leftrightarrow x_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$ pour tout $\lambda$ sauf un nbre fini.

topologie : si $S \subset \Lambda$ fini et $S_0 \subset S$ soit $X_S = \prod_{\lambda\in S} X_\lambda \times \prod_{\lambda\notin S} \mathcal{O}_\lambda$

avec la topologie produit est loc. compact.

pour $S \subset S'$, $X_S$ est ouvert et fermé dans $X_{S'}$, avec top. induite

$X = \bigcup_S X_S$ est muni de la top. limite inductive de celle des $X_S$

Base d'ouvert de $X$ : soit $S \supset S_0$ et si $\lambda \in S$ $U_\lambda$ ouvert de $X_\lambda$ alors $\prod_{\lambda \in S} U_\lambda \times \prod_{\lambda \notin S} O_\lambda$ est ouvert dans $X$. Tout ouvert est réunion d'ouvert comme ça.

$$A_K = \coprod (\hat{K}_v, \hat{\mathcal{O}}_v) \text{ est l'anneau des \underline{adèles} de } K$$

anneau loc. compact, métrisable (exercice écrire une métrique)

$a = (a_v)$ $a_v \in \hat{K}_v$, $a_v \in \hat{\mathcal{O}}_v$ pour presque tout $v$.

$I_K$ = <u>idèles</u> = élément inversibles de $A_K$

Si $A$ est un anneau topologique et $I$ les éléments inversibles, alors $I \subset A \times A$ par $x \mapsto (x, 1/x)$ est fermé (si $A$ séparé) $= \{(x,y) / xy = 1\}$ on met sur $I$ la topologie induite.

ie $a_n \in I_K \to a \in I_K \iff \begin{cases} a_n \to a \text{ dans } A_K \\ \text{et } a_n^{-1} \to a^{-1} \text{ dans } A_K \end{cases}$

la convergence de $a_n$ vers $a$ n'entraîne pas celle de $a_n^{-1}$ vers $a^{-1}$.

<u>Norme</u> d'un idèle : Sur $\hat{K}_v$ il y a une "valeur absolue normalisée" $\|x\|_v$

$v \in \Sigma_f$ voir plus haut

$\mathbb{R}$ $\|x\|$ = val. absolue usuelle

$\mathbb{C}$ $\|x\| = |x|^2 = x\bar{x}$ (attention ce n'est pas une val absolue au sens usuel $\|x+y\| \leq 2(\|x\|+\|y\|)$)

Si $a = (a_v)$ est un idèle $\boxed{Na = \prod_v \|a_v\|_v}$

$a_v \neq 0$ pour tout $v$ et est une unité pour presque tout $v$.

<u>Ex</u> si $a \in A_K - I_K$ alors $\prod \|a\|_v = 0$.

<u>Ex</u>. Si $a^{(n)} \in I_K$ et $a^{(n)} \to a$ dans $A_K$ et $Na^{(n)} \to \lambda \neq 0$, alors $a \in I_K$ et $a^{(n)} \to a$ dans $I_K$.

ie $I_K \to A \times \mathbb{R}_+^*$ est un plongement topologique.
$a \mapsto (a, Na)$

Historique

Idèls (1936) note de Chevalley aux C.R.

$I_K = \prod (\hat{K}_v^*, \hat{O}_v^*)$

notons $K_\infty^* = \prod_{v \in \Sigma_\infty} K_v^* = \mathbb{R}^{*^{r_1}} \times \mathbb{C}^{*^{r_2}}$ ne joue pas de rôle pour le corps de classe. Chevalley avait mis une topologie non séparée telle que l'adhérence de l'origine soit la composante neutre de $K_\infty^*$.

Weil (CR, 1936) a défini la top usuelle et vu que les nouveaux caractères $\chi$ qui en résultent s'identifient aux Grössencharaktere de Hecke

les adèls apparaissent dans une lettre de Weil à Hasse (1938) sur le th. de Riemann Roch (cf. oeuvres complètes).

Corps de classes Chevalley 1940 Annals.

Artin. Whaples 1945 "val-vectors", "répartitions".

1950 | Tate thèse
Iwasawa
Weil

introduisent l'analyse, transf de Fourier sur idèls et classes d'idèls donnent l'éq. fonct de la fonction zêta.

Références

Weil Basic number theory

Cassels-Fröhlich

Lang

# Retour aux adèls

$$K \to A_K \subset \prod \hat{K}_v \qquad \text{diagonal par \underline{tous} les } K \to \hat{K}_v .$$

on identifie ainsi $K$ à un sous anneau de $A_K$.

**th** $K$ est <u>discret</u> dans $A_K$ et $A_K/K$ est <u>compact</u>.

<u>dem</u> de $A_K/K$ compact.

1) corps de nombres

$\mathcal{O}_K$ = anneau des entiers de $K$

$$\hat{K}_\infty = \prod_{v \in \Sigma_\infty} K_v$$

On a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_K \to \hat{K}_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{\mathcal{O}}_v \longrightarrow A_K/K \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

$$0 \to \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{\mathcal{O}}_v \to \Big(\hat{K}_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{\mathcal{O}}_v\Big)/\mathcal{O}_K \longrightarrow \hat{K}_\infty/\mathcal{O}_K \to 0$$

$\prod_{v \in \Sigma_f} \hat{\mathcal{O}}_v$ " compact

$\Big(\hat{K}_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{\mathcal{O}}_v\Big)/\mathcal{O}_K$ " $A_K/K$

$\hat{K}_\infty/\mathcal{O}_K$ " $\mathbb{R}^n$/réseau des entiers = tore compact

suite $(*)$ : . noyau = elements de $K$ entiers en chaque $v \in \Sigma_f$ = $\mathcal{O}_K$

. $\sharp$ $(a_v)_{v \in \Sigma_f} \longrightarrow \coprod_{v \in \Sigma_f} \hat{K}_v/\hat{\mathcal{O}}_v$

$\uparrow$ surjectif (th. d'approximation)
$K$ lemme chinois

si $\Omega_\infty$ = domaine fondamental de $\hat{K}_\infty$ mod $\mathcal{O}_K$, alors

$\Omega_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{\mathcal{O}}_v$ est un domaine fond. de $A_K$ mod $K$

$\Omega_\infty = \prod [0,1]$ ou plutôt $[0,1[$

pour $\mathbb{Q}$ : $[0,1] \times \prod \mathbb{Z}_p$ avec $(0,\nu) \leftrightarrow (1, \nu+1)$

2) corps de fonctions (sur $\mathbb{F}_q$) courbe $C$

$$0 \to \underset{\text{fini}}{\mathbb{F}_q} \to \underset{\text{compact}}{\prod_v \hat{\mathcal{O}}_v} \to A_K/K \to \underset{\text{fini}}{V} \to 0 \qquad (*)$$

le conoyau $V$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de dimension $g$ = genre

canoniquement $V = H^1(C, \mathcal{O}_C)$ = dual de l'espace des formes différentielles de 1ère espèce sur $C$

noyau : fonction rationnelle sans pôle = ctes.

conoyau : $A_K / \prod_v \hat{\mathcal{O}}_v = \bigoplus_v \hat{K}_v / \hat{\mathcal{O}}_v = \bigoplus_v K / \mathcal{O}_v$ $\qquad \mathcal{O}_v$ = an. loc. alg

sur la courbe $C$ on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \underset{\text{cst}}{K} \to \underset{\text{gratte-ciel}}{K/\mathcal{O}_C} \to 0$$

d'où suite exacte de cohomologie $\qquad k = \mathbb{F}_q$

$$0 \to k \to K \to \coprod_v K/\mathcal{O}_v \to H^1(C, \mathcal{O}_C) \to 0$$

d'où $V = A_K / (K + \prod \hat{\mathcal{O}}_v)$. ∎

Volume de $A_K/K$.

Sur $A_K$ on a une mesure de Haar "naturelle" $\mu = \prod_v \mu_v$ où "$\otimes \mu_v$"

$\mu_v$ : mesure telle que $\mu_v(\hat{\mathcal{O}}_v) = 1$ si $v \notin \Sigma_f$

$\mu_v = dx$ si $\hat{K}_v = \mathbb{R}$

$\mu_v = 2\,dx\,dy = |dz \wedge d\bar{z}|$ si $K_v = \mathbb{C}$

<u>Th</u> $\mu(A_K/K) = \begin{cases} |d_K|^{1/2} & \text{si } K \text{ est un corps de nombres} \\ q^{g-1} & \text{si } K \text{ est un corps de fonctions de genre } g. \end{cases}$

<u>dem</u> On regarde les domaines fondamentaux

1) corps de nombres : $\Omega = \hat{K}_\infty / \mathcal{O}_K$

$$\mu(\Omega \times \prod_v \hat{\mathcal{O}}_v) = \mu(\hat{K}_\infty/\mathcal{O}_K)$$
$$= \mu(\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}/\mathcal{O}_K)$$

calcul classique avec souvent $dx\,dy$ au lieu de $2\,dx\,dy$.

2) corps de fonctions : $1 \to \mathbb{F}_q \to \prod_v \hat{\mathcal{O}}_v \to A_K/K \to V \to 0$

donc $A_K/K$ a comme s/g ouvert le quotient $\prod_v \hat{\mathcal{O}}_v / \mathbb{F}_q$ avec indice $q^g$, donc $\mu(A_K/K) = q^g \cdot \mathrm{vol}(\prod_v \hat{\mathcal{O}}_v / \mathbb{F}_q)$.

mais $\mu(\prod_v \hat{\mathcal{O}}_v) = 1$ donc $\mu(\prod_v \hat{\mathcal{O}}_v / \mathbb{F}_q) = 1/q$.

---

<u>Caractères additifs</u>

$\psi : A_K \to S_1 = \{ z \,/\, |z| = 1 \}$

$\psi = \prod \psi_v$ $\quad\psi_v$ caract. additif de $K_v$ tel que $\psi_v = 1$ sur $\hat{\mathcal{O}}_v$ pour presque tout $v$.

<u>Th</u>. Il existe un caractère $\psi = \prod \psi_v$ ($\psi_v \neq 1$ pour tout $v$) qui est trivial sur $K$.

Tout caractère ayant cette propriété est de la forme $x \mapsto \psi(\lambda x)$ avec $\lambda \in K^*$.

ie le dual de $A_K/K$ est $K$ (ou plutôt est de dim 1 sur $K$).
alors que le dual de $A_K$ est $A_K$ (par autodualité des $K_v$).

<u>Explicitement</u> 2) corps de fonctions : si $\omega \in \Omega^1 K$ est une forme différentielle ($\neq 0$) on lui associe un caractère additif (on a choisi un caractère additif $\psi_0$ de $\mathbb{F}_q$). localement

$$\psi_{\omega,v}(x) = \psi_0\left(\mathrm{Tr}_{k(v)/\mathbb{F}_q} \mathrm{Res}\,(\omega x)\right) \qquad x \in \widehat{K}_v$$

d'où $\psi_\omega = \prod \psi_{\omega,v}$, trivial sur $K$ $\left( \sum \mathrm{Res}\,(\omega x) = 0 \right)$

1) corps de nombres : on a $A_K = K \otimes_{\mathbb{Q}} A_{\mathbb{Q}}$

pour $A_{\mathbb{Q}}$ on définit $\psi_p : \mathbb{Q}_p \to S^1$ trivial sur $\mathbb{Z}_p$

$$p^{-n}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \mu_{p^n}$$
$$x \mapsto e^{2\pi i x/p^n}$$

$$\psi_\infty : \mathbb{R} \to S^1 \qquad x \mapsto e^{-2\pi i x}$$

$\psi = \prod_{p,\infty} \psi_p$ est trivial sur $\mathbb{Q}$.

pour $A_K$ $\quad \psi_K(x) = \psi_{\mathbb{Q}}\left(\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}\, x\right)$.

<u>"Unicité"</u> à $\lambda \in K^*$ près : astuce de Tate par $\psi$ le dual de $A_K$ s'identifie à $A_K$. Soit $K^\perp$ l'orthogonal de $K \subset A_K$. Comme $\psi$ est trivial sur $K$ on a $K^\perp \supset K$. Par principes généraux $K^\perp$ est discret, $K^\perp/K \subset A^K/K$ discret compact donc fini

mais c'est un $K$ ev donc c'est $0$, i.e. $K^\perp = K$ d'où ce qu'on veut.

---

Mesure "canonique" ou "de Tamagawa" sur $A_K$.

soit $\psi$ car additif non trivial, trivial sur $K$ par lequel on identifie $A_K^\wedge$ à $A_K$. Alors il y a une mesure "self-duale" $\mu_c$ unique caractérisée par $\boxed{\mu_c(A_K/K) = 1}$, car $K$ est discret à quotient compact.

d'où

$$\boxed{\mu_{nat} = \begin{cases} |d_K|^{1/2} \\ q^{g-1} \end{cases} \times \mu_c}$$

On a $\mu_c = \otimes \mu_{v,\psi_v}$ où $\mu_{v,\psi_v}$ est la mesure autoduale pour le caractère $\psi_v$.

1) corps de nombres si $\psi_K = \psi_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Tr})$

à l'$\infty$ mesure correspondante $dx$ sur $\mathbb{R}$

$2\,dx.dy$ sur $\mathbb{C}$

en $v$ finie $\mu_{v,\psi_v} = \mu_v \cdot \|\delta_K\|_v^{-1/2}$. $\delta$ = différente

2) corps de fonctions les $\sigma_p(\omega)$ interviennent et $g-1 = \frac{1}{2}\deg(\omega)$

## Points adéliques des variétés algébriques.

$K$ corps global

$X$ var alg $/K$, quasi-projective

espace des points adéliques de $X$ : $X_A$ ou $X(A_K)$ ...

1) def de Weil : $X_{Weil}(A_K) = \prod_v (X(K_v), \overset{\circ}{X}_{\varphi,v})$ restreint

$X(K_v)$ est un espace loc. compact (top induite par $\mathbb{P}^N(K_v)$)

$X^\circ_{\varphi,v}$ = points $\hat{\mathcal{O}}_v$-entiers "par rapport à $\varphi$"

$X = \bigcup_{\text{finie}} U_i$  $U_i$ ouverts affines

$\varphi_i : U_i \hookrightarrow$ ss. var. fermée de $Aff^{n_i}$  $\varphi = (\varphi_i)$

$x \in X(\hat{K}_v)$  $x$ est "entier$_\varphi$" s'il existe $i$ tel que $x \in U_i$ et coord de $\varphi_i(x) \in \hat{\mathcal{O}}_v$.

Si l'on remplace $\varphi$ par $\varphi'$, on a $X^\circ_{\varphi,v} = X^\circ_{\varphi',v}$ pour presque tout $v$.

pt adélique : $x = (x_v)$  $x_v \in X(\hat{K}_v)$ pour tout $v$

$x_v$ entier pour presque tout $v$.

Exemple (1) $X$ variété affine d'équations $\Phi_\alpha = 0$

$x \in \prod X(\hat{K}_v)$  $\Phi_\alpha(x_v) = 0$  pour tout $\alpha$ et tout $v$

$x = (x_v)$ et les coordonnées sont des adèles ie $x_v$ entier pour presque tout $v$.

(2) $X$ variété projective $\subset \mathbb{P}_n$  $t_0, \dots, t_n$

$U_i = \{t_i \neq 0\} \simeq Aff^n$ $\frac{t_0}{t_i}, \dots, \frac{t_n}{t_i}$  $X(A) = \prod X(K_v)$

alors tout $x \in \mathbb{P}_n(\hat{K}_v)$ est entier  est compact.

<u>Modification de la définition de Weil</u> soit $\mathcal{O}_{K,S}$ l'anneau des $S$ entiers ($S$ ens fini de places), alors il existe un schéma quasi projectif $X_0$ sur $\mathcal{O}_{K,S}$ pour $S$ convenable tel que $X = X_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K,S}} K$.
Alors "entier" est relatif au choix de $X_0$.

2) <u>def de Grothendieck</u> si $K'$ est une $K$-algèbre

$$X(K') = \mathrm{Morph}_K(\mathrm{Spec}\, K', X)$$

comme $A_K \supset K$ ça a un sens de parler de

$$X(A_K) = \mathrm{Morph}_K(\mathrm{Spec}\, A_K, X)$$

<u>Weil $\Leftrightarrow$ Groth.</u>

$$A_{K,S} = \prod_{v \in S} \hat{K}_v \times \prod_{v \notin S} \hat{\mathcal{O}}_v \qquad A_K = \varinjlim A_{K,S}$$

$X^0$ sur $\mathcal{O}_K$.

$$X(A_K) = X^0(A_K) = \varinjlim X^0(A_{K,S}) = \varinjlim \prod_{v \in S} X^0(\hat{K}_v) \times \prod_{v \notin S} X^0(\hat{\mathcal{O}}_v)$$

(comme $X^0$ est de présentation finie).

<u>Exercice sur</u> $\mathrm{Spec}(A_K)$ :

on définit un "recouvrement partition" de $\mathrm{Spec}(A_K)$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \quad \cup \Sigma_h$ $\quad \cup$ disjointe

$A_K = A_{\Sigma_1} \times \quad \times A_{\Sigma_h}$ donc $\mathrm{Spec}\, A_K = \coprod$ ouverts et fermés correspondants

Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de $\mathrm{Spec}\, A_K$, il y a un recouvrement partition plus fin que $\mathcal{U}$.

Sorite : si $X \subset X'$ est fermé, $X(A_K)$ est fermé dans $X'(A_K)$.

si $X \subset X'$ est ouvert, $X(A_K)$ n'est pas ouvert en général dans $X'(A_K)$.

si $X \supset Y$ fermé, $x = (x_v) \in X(A_K)$ appartient à $(X-Y)(A_K)$ ssi

1) $x_v \notin Y(\hat{K}_v)$ pour tout $v$

2) $\tilde{x}_v \notin \tilde{Y}_v$ pour presque tout $v$ (en réduction modulo $v$)

Ex : $X = Aff^1$ $\quad Y = \{0\}$

$X - Y = \mathbb{G}_m \qquad X-Y(A_K) = I_K \qquad x_v$ unité pour presque tout $v$.

soit $f : X \to Y$ un morphisme, alors $f_A : X(A_K) \to Y(A_K)$ est continu.

① prop : Si $f$ est propre (géom-alg), $f_A$ est propre (top).

dem $f$ est composé d'une injection fermée et d'une projection $\mathbb{P}_n \times Y \to Y$.

en effet

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \\ \mathbb{P}^n & \end{tikzcd} \qquad X \xrightarrow{\text{im. fermée}} \mathbb{P}_n \times Y \to Y$$

$f$ im. fermée $\Rightarrow f_A$ im. fermée

$f$ projection $\mathbb{P}_n \times Y \to Y$ $\Rightarrow$ compact $\times\, Y(A_K) \to Y(A_K)$ est propre.

② Si $f$ a des sections locales, alors $f_A$ est surjectif.

$\exists$ rec. ouvert $Y = \cup U_i$ et section de $f$ au-dessus de $U_i$

si $x \in Y(A_K)$ $\quad x = \prod x_i \qquad A = \prod A_i$ tel que $x_i \in U_i(A_i)$

(on découpe les adèles) on remonte $x_i$.

③ <u>si</u> $f : X \to Y$ <u>est lisse à fibres géom irréductibles de dimension</u> $d$,

<u>alors</u> $f_A : X(A_K) \to Y(A_K)$ <u>est ouverte</u>.

<u>déjà</u> (i) pour tout $v$ $X(\hat{K}_v) \to Y(\hat{K}_v)$ est ouvert

et (ii) pour presque tout $v$ $X^\circ(\hat{O}_v) \to Y^\circ(\hat{O}_v)$ est surjectif

(i) car "loc" sur $X$ c'est un produit.

(ii) surjectif $\tilde{X}^\circ(k(v)) \to \tilde{Y}^\circ(k(v))$ surjectif ie les fibres de $X \to Y$ ont pour presque tout $v$ un point rationnel sur $k(y)$.

or $\tilde{X}_{v,y}$ est absolument irréductible de dimension $d$

Lang-Weil : si $Z_t$ est une "famille limitée" de var alg abs irréd de dim $d$ sur des corps finis $k_t$ on a

$$|Z_t(k_t) - |k_t|^d| \leq A\, |k_t|^{d-1/2} \quad . \ A \text{ constante}$$

(Lang-Weil donnent une dem en égale carac avec coord de Chow)

donc si $|k_t| > A^2$ $Z_t(k_t) \neq \emptyset$

On peut utiliser les conj de Weil pour exprimer $Z_t(k_t)$ abs irréd de dim $d$ donne le terme principal $q^d$, le reste est borné.

8.3.82

# Nombres de Tamagawa

## 1) Produit de mesures

$X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda$ $X_\lambda$ loc-compact, $\mathcal{O}_\lambda$ ouvert compacts défini pour presque tout $\lambda$.

$\mu_\lambda$ mesure positive sur $X_\lambda$ avec condition de convergence :

$\prod \mu_\lambda(\mathcal{O}_\lambda)$ est absolument convergent dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\mu = \otimes \mu_\lambda$ est défini sur $X = \coprod X_\lambda$ :

X est réunion de sous-espaces ouverts $\prod_{\substack{\lambda \in S \\ \text{fini}}} X_\lambda \times \prod_{\lambda \notin S} \mathcal{O}_\lambda$

$\otimes \mu_\lambda$ sur le produit fini $\prod X_\lambda$

$\otimes \mu_\lambda$ sur le produit d'espaces compacts $\prod_{\lambda \notin S} \mathcal{O}_\lambda$ grâce à la cond de convergence. si $\mu_\lambda = c_\lambda \nu_\lambda$ avec $\nu_\lambda(\mathcal{O}_\lambda) = 1$

$\otimes \mu_\lambda = \prod c_\lambda \cdot (\otimes \nu_\lambda)$.

$\mu$ est caractérisée par : soit $\varphi_\lambda$ sur $X_\lambda$ continue à support compact et $\varphi_\lambda$ fonct. caract. de $\mathcal{O}_\lambda$ pour $\lambda \notin S$ ($S$ fini)

alors $\int \varphi \mu = \prod_\lambda \int \varphi_\lambda \mu_\lambda$.

Remarque Siegel définit des densités avec l'hypothèse plus faible $\prod_{p \nearrow} \mu_p(\mathcal{O}_p)$ converge (pas absolument).

## 2/ Mesure associée à une forme différentielle

$X$ var alg lisse partout de dim $d$ sur un corps global $K$

$X_A = X(A_K)$ espace des points adéliques de $X$.

Soit $\omega$ une forme diff. de degré maximum sur $X$, partout non nulle, définie sur $K$. (ex: forme invariante à gauche sur un groupe alg.). Pour toute place $v$ de $K$, $\omega$ définit une mesure $\|\omega\|_v = \mu_{\omega,v}$ sur $X(\hat{K}_v)$.

Supposons $X_A$ non vide. $X(\hat{K}_v) \supset X_\varphi(\hat{O}_v)$ ouv. compact

$q_v = Nv = \#$ corps résiduel de $v$, soit $k(v)$

$\tilde{X}_{\varphi,v}$ = réduction mod $v$ de $X$

pour presque tout $v$ $(\tilde{\omega}_v \neq 0)$

$c_v = \mu_v(\hat{O}_v) \doteq q_v^{-d}$ (nbre de points dans $k(v)$ de $\tilde{X}_{\varphi,v}$)

Cas convergent : le produit $\prod_v c_v$ est convergent.

Alors $\mu_\omega = \bigotimes_v \mu_{\omega,v}$ est bien défini, c'est une mesure sur $X_A$.

Remarque
$$\boxed{\mu_{a\omega} = \mu_\omega \qquad a \in K^*}$$

car $\mu_{a\omega,v} = \|a\|_v \cdot \mu_{\omega,v}$

et on a la formule du produit $\prod_v \|a\|_v = 1$.

[$a \in K^*$ définit un automorph de $A_K/K$ qui est compact, mesure de masse totale 1 invariante donc conservée par $a$.]

d'où, pour $\omega$ invariante à gauche sur un gr. alg, la mesure de Tamagawa $\mu_\omega$ indépendante de $\omega$.

Ex • $G_a = \mathrm{Aff}^1$

nbre de points mod $v$ $= q_v$ $\quad c_v = 1$ convergent

• $G_m = \mathrm{Aff}^1 - \{0\}$ $\quad q_v - 1 \quad c_v = 1 - \frac{1}{q_v} = 1 - \frac{1}{N_v}$ divergent

Exercice. Si $X$ est une courbe, il y a convergence si et seulement si $X \simeq \mathrm{Aff}^1$.

Ex $\quad X = \mathbb{P}^1 \quad q_v + 1 \quad c_v = 1 + \frac{1}{q_v}$ divergent

mais de plus il n'y a pas de forme diff partout non nulle

Ex $\quad X = \bar{X} - D \quad$ $\bar{X}$ var proj. lisse absolument connexe

$D$ fermé $\neq \bar{X}$

Hyp : Toute classe de cohomologie de $\bar{X}$ de degré 2 est algébrique (sur $\bar{K}$) (par ex $\bar{X}$ variété rationnelle).

(cette hyp ne devrait pas être nécessaire).

Prop Alors il y a convergence si et seulement si :

1) $H^1(\bar{X}) = 0$

2) la rep de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $NS(\bar{X})$ est isomorphe à la rep. de permutation sur les composantes irréductibles de $D$ de codim 1.

Un cas de convergence : $H^1(X) = H^2(X) = 0$.

Exemples de groupes

① supposons car $K = 0$, $G$ unipotent (connexe), alors convergence. on a $c_v = 1$ pp t $v$

car $K = p$ et $G$ unipotent connexe idem.

② Tore $\neq 1$, pas convergence.

③ Groupe semi-simple, convergence.

④ Extensions de ① et ③.

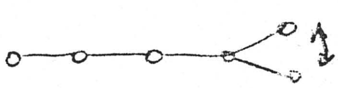
Calcul du nombre de points (ou de $c = q^{-d} \cdot$ nbre de pts)

$G = SL_n$ $\quad c = \prod_{m=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{q^m}\right)$

Si $G$ est réductif connexe sur $\mathbb{F}_q$, on a

$$c = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{h_m} \left(1 - \varepsilon_{i,m}/q^m\right)$$ où $\varepsilon_{i,m}$ racines de 1

en fait produit fini. On trouve $h_m$ et $\varepsilon_{i,m}$ avec le diag de Dynkin



~~sur~~ $\overline{\mathbb{F}}_q$, dont Frobenius définit un automorphisme

Soit $W$ le gr. de Weyl, $\mathbb{C}[h]^W$ est une alg de polynômes

on peut donc définir $H_m$ 'éléments primitifs' de degré $m$

$h_m = \dim H_m$ et $\varepsilon_{i,m}$ : val. propres de l'auto défini par Frobenius

$$c = \prod_m \det_{H_m}\left(1 - q^{-m}\,\mathrm{Frob}\right)$$

$A_{n-1}$ o—o ⋯ o—o    * auto trivial    $c = \prod_2^n \left(1 - \frac{1}{q^i}\right)$    $SL_n$

pour $GL_n$ polynômes invariants : poly sym en $x_1, \dots, x_n$

primitifs $x_1 + \dots + x_n$    1 par degré

$x_1 x_2 + \dots$

$\vdots$

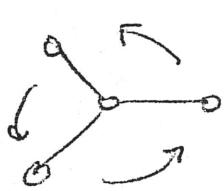
$x_1 \cdots x_n$

pour $SL_n$ on a $x_1 + \dots + x_n = 0$    d'où $2$ à $n$

* auto-non trivial  $SU_n$

$x_1, \dots, x_n$    $\sum x_i = 0$    auto ↦ chgt de signe

$$c = \prod_2^n \left(1 - \frac{(-1)^i}{q^i}\right)$$

$D_4$  d'où racines cubiques de l'unité.

Dans le cas semi-simple, il n'y a pas de polynômes invariants de degré 1 (à part 0), donc

$$c = \prod_{\text{fini}} \left(1 - \varepsilon/q^m\right) = 1 + O\left(\frac{1}{q^2}\right)$$

$m \geq 2$

$|\varepsilon| = 1$

d'où convergence absolue.

## Semi-convergence (= conv. simple) pour les tores

$K$ corps de nombres, ordonner les $v$ de telle sorte que $v \leq v'$ entraîne $Nv \leq Nv'$.

**Prop.** $G$ tore $/K$. Alors il y a convergence si et seulement si $G$ est anisotrope (i.e. n'a pas d'homomorphisme non trivial dans $G_m$).

ex: $SO(2)$ $\quad x^2+y^2 \quad K = \mathbb{Q}$

mod $p$ si $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ la forme se décompose $xy$, le groupe devient mult $\quad c_p = 1 - \frac{1}{p}$

$p \equiv 1 (4)$

si $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ on a la forme tordue $\quad c_p = 1 + \frac{1}{p}$.

$p \equiv -1 (4)$

le produit converge $\quad \sum \left(\frac{-1}{p}\right)\cdot\left(\frac{1}{p}\right)$ est semi-convergent.

Rem En carac $p$ il y a trop de places de même normes, l'ordre est décisif sur la conv. des produits.

---

Soit $G$ extension de semi-simple et d'unipotents.
Soit $\omega$ forme diff invariante (à gauche donc à droite) $\neq 0$ sur $G$. $\mu_\omega = \mu$ la mesure associée sur $G_A$.
On définit le nombre de Tamagawa.

$$\boxed{\mathrm{Tam}(G) = c^{-d}\,\mu(G_A/G_K)}$$

$d = \dim G$

$G_K = G(K)$ est discret dans $G(A)$

(si $X$ est une variété quasi-affine, $X(K)$ est discret et fermé dans $X(A_K)$).

où $c = \mathrm{vol}(A_K/K) = \begin{cases} |d_K|^{1/2} & \text{corps de nombres} \\ q^{g-1} & \text{corps de fonctions} \end{cases}$

de sorte que $\boxed{\mathrm{Tam}(G_a) = 1}$.

On pourrait appeler mesure de Tamagawa de $G$ : $c^{-d}\mu_\omega$.

$G$ est unimodulaire : $\det(\mathrm{Ad}) = 1$ Ad sur $\mathrm{Lie}(G)$

donc forme $\omega$ à droite aussi à gauche.

$\det = 1$ car pas d'hom $G \to G_m$.

• $K$ c de nbs, th de Borel : $G_A/G_K$ de vol. fini, donc

$\tau(G) = \mathrm{Tam}(G)$ est fini.

~~Hyp~~ $G$ est de semi-simple et d'unipotent

$\Leftrightarrow$ $G$ linéaire connexe et $\mathrm{Hom}_{\bar{K}}(G, G_m) = 0$.

Sur corps de fonctions l'ennui c'est que le radical unipotent est défini sur une extension radicielle de $K$, on ne peut pas descendre sur $K$.

<u>Question</u> Si $G$ est unipotent sur $K$ corps de fonctions, est-il vrai que $\tau(G) = 1$ ?

Sur corps de nombres, c'est vrai par dévissage en $\mathbb{G}_a$.

Soit $K_1/K$ une extension finie de corps et $X_1$ variété sur $K_1$ de dimension $d$ on lui associe $X = R_{K_1/K} X_1$ sur $K$ (restriction à la Weil)

$$\mathrm{Mor}_K(Y, X) = \mathrm{Mor}_{K_1}(Y \times_K K_1, X_1)$$

et $\quad X_1(K_1) = X(K) \qquad X_1(A_{K_1}) = X(A_K)$

Si $X_1$ est lisse de dimension $d$, $\dim X = d.[K_1 : K]$.

(Dans le cas séparable on peut définir $X$ par descente galoisienne)

Soit $G_1$ sur $K_1$ et $K_1/K$ séparable

$$G = R_{K/K_1} G_1$$

alors $\boxed{\mathrm{Tau}(G_1) = \mathrm{Tau}(G).}$ *

La dém. se "trouve" dans les notes de Weil.

* mieux mesure de Tamagawa sur $G_1(A_{K_1})$ = celle de $G(A_K)$.

A partir de $\omega_1$ sur $G_1$, on construit $\omega$ sur $G$

si $\alpha \in \overline{K}$ $\alpha$ générateur de $K_1/K$

$$\alpha = \prod_{i<j} (u^{\sigma_i} - u^{\sigma_j}) \qquad \sigma_i : K_1 \to \overline{K}$$

$s \in \mathrm{Gal}$ $\qquad \alpha^s = \mathrm{sgn}(s) \cdot \alpha$

$$\omega = \alpha^d \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\omega_1) \qquad \text{produit des conjugués corrigé.}$$

on a $\quad \mu_{\omega_1} = \mu_\omega$.

C'est probablement vrai dans le cas radiciel ie $K_1 = K^{1/p}$.

Il faudrait définir $\omega$.

Ex $\quad G_1 = \mathbb{G}_m \qquad K_1 = K^{1/p} \qquad G = R_{K_1/K} G_1$

$$1 \to U \to G \to \mathbb{G}_m \to 1$$

où $U$ a des éléments nilpotents.

---

Conjecture de Weil | $G$ semi-simple, simplement connexe
alors $\mathrm{Tam}(G) = 1$.

Vérifié dans beaucoup de cas.

K corps de nombres

① Langlands, Lai (Compositio Math.) $G$ quasi-déployé (ie il existe un s/g de Borel sur $K$).

(2) "Groupes classiques" Tamagawa, Weil, , Mars (exp. Bourbaki)

$G_2, F_4$ certaines formes de $E_6, E_7$.

Il y a une formule d'Ono qui donne $\tau(G/C)$ où $C$ est un s/g fini du centre de $G$, $G$ semi-simple simplement connexe, en fonction de $\tau(G)$.

$$\tau(G/C) = \tau(G) \cdot \frac{h^0(C^\vee)}{h^1(C^\vee)}$$

où $C^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}(C, G_m)$

$h^0(C^\vee) = |\mathrm{Hom}_K(C, G_m)|$

$h^1(C^\vee) = |\mathrm{Ker}\{H^1(K, C^\vee) \to \prod_v H^1(K_v, C^\vee)\}|$

Ex $C = \mu_n$ $C^\vee = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $h^0 = n$, $h^1 = 1$.

$H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$$\boxed{\tau(G/\mu_n) = n \cdot \tau(G)}$$

Ex $SO_n = \mathrm{Spin}_n / \mu_2$ $\tau(SO_n) = \tau(\mathrm{Spin}_n) \times 2$

Conj. de Weil (mod Langlands-Lai) $\Leftrightarrow$ si $G_1$ et $G_2$ se déduisent l'un de l'autre par torsion intérieure, alors $\tau(G_1) = \tau(G_2)$ [car ils ont le même grand $C$]

Traductions

$G$ avec mesure biinvariante $\mu$

$\Gamma$ s/g discret

$\Omega$ s/g ouvert de $G$

$\Omega$ opère sur $G/\Gamma$, se décompose en orbites ; l'ensemble de ces orbites est l'ens des doubles classes $\Omega \backslash G / \Gamma =: I$

pour $i \in I$, soit $g_i \in G$ représentant de $i$

$$G = \bigsqcup_i \Omega g_i \Gamma$$

$$G/\Gamma = \coprod_i (\Omega g_i \Gamma / \Gamma)$$

$$\mathrm{vol}(G/\Gamma) = \sum_i \mathrm{vol}(\Omega g_i \Gamma / \Gamma)$$

si $\Gamma_i = \Omega \cap g_i \Gamma g_i^{-1}$ s/g de $\Omega$ $\qquad \Omega g_i \Gamma / \Gamma \simeq \Omega / \Gamma_i$

$$\boxed{\mathrm{vol}(G/\Gamma) = \sum_i \mathrm{vol}(\Omega/\Gamma_i)}$$

cas particulier : $\Omega$ compact, alors $\Gamma_i$ fini

$$\mathrm{vol}(\Omega/\Gamma_i) = \mathrm{vol}(\Omega)/|\Gamma_i|$$

$$\boxed{\mathrm{vol}(G/\Gamma) = \mathrm{vol}(\Omega) \cdot \sum_i \frac{1}{|\Gamma_i|}}$$

$$\sum_i \frac{1}{|\Gamma_i|} = \frac{\mathrm{vol}(G/\Gamma)}{\mathrm{vol}(G)}$$

Exemple

$G$ alg  $S$ ens fini de places contenant les places arch.

$\Omega \subset G_A$  $\Omega = \prod_{v \in S} G(\hat{K}_v) \times \prod_{v \notin S} G_\varphi(\hat{\mathcal{O}}_v)$

Ex  $K = \mathbb{Q}$ , $G = SL_n$

$$\Omega = SL_n(\mathbb{R}) \times \prod_p SL_n(\mathbb{Z}_p)$$

$I$ = doubles classes $\Omega \backslash SL_n(A_\mathbb{Q}) / SL_n(\mathbb{Q})$

il y en a une seule  i.e. $\boxed{G_A = \Omega . G_\mathbb{Q}}$

ce qu'il faut démontrer se passe dans les adèles finis $G_A / G_\mathbb{R}$ dans lequel $G_\mathbb{Q}$ est dense (th. d'approximation forte : se ramène facilement au gr. additif)

$\Omega$ ouvert et $G_\mathbb{Q}$ dense $\Rightarrow$ $\Omega . G_\mathbb{Q} = G_A$.

déf  $\tau(SL_n) = vol(\Omega / \Gamma_1)$

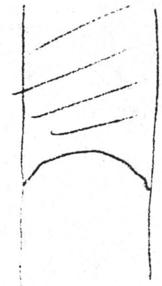
$\Gamma_1 = SL_n(\mathbb{Q}) \cap \Omega = SL_n(\mathbb{Z})$

$$vol(\Omega/\Gamma_1) = vol(SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})) \times \prod_p vol(SL_n(\mathbb{Z}_p))$$

$$= \quad id \quad \times \prod_p \prod_{m=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{p^m}\right))$$

$$\boxed{\tau(SL_n) = \zeta(2)^{-1} \cdots \zeta(n)^{-1} . vol(SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z}))}$$

$n = 2$



$SL_2(\mathbb{R}) / SO_2(\mathbb{R}) = H$

vol $(H/\Gamma) = \pi/3$ pour la mesure hyperbolique.

il faut encore passer à $SL_n(\mathbb{Z})$ et à la mesure de Tamagawa.

Minkowski l'a fait pour $n$ qq.

15.3.82

Minkowski - Hlawka $\quad \tau(SL_n) = 1$

Histoire $\quad \mathbb{R}^n \quad$ S convexe, symétrique

Th. de Minkowski $\quad \Lambda$ réseau de $\mathbb{R}^n$

tel que $\quad vol(S) > 2^n vol(\Lambda)$

alors $\quad S \cap \Lambda \neq \{0\}$

$\left( disc(\Lambda) = det(\Lambda) = vol(\Lambda) = vol(\mathbb{R}^n/\Lambda) \right)$.

Th. de Mink. Hlawka a) Si S est mesurable et borné, il existe un réseau $\Lambda$ de $\mathbb{R}^n$ de volume $\delta$ donné tel que $S \cap \Lambda = \{0\}$ si $\delta > vol(S)$

b) Si S est étoilé symétrique $(x \in S \Rightarrow tx \in S$ si $|t| \leq 1)$ alors même conclusion avec $\delta > \dfrac{vol(S)}{2\zeta(n)}$.

On définit $\delta(S)$ = cste critique de S

$= \inf vol(\Lambda)$ pour $\Lambda \cap S \subset \{0\}$.

et $\quad Q(S) = \dfrac{vol(S)}{\delta(S)}$.

Minkowski. $\quad Q(S) \leq 2^n \quad$ S convexe sym

M.H. $\quad Q(S) \geq 1$

$Q(S) \geq 2\zeta(n) \quad$ S étoilé sym.

Ces bornes ne sont pas optimales. Ex pour $n = 2$ $\quad 1 \mapsto \frac{16}{15}$.

Hlawka 1944, Siegel 1945

Soit $\delta > 0$ et $\mathcal{M}_\delta$ = espace des réseaux de vol $\delta$ dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$

$\mathcal{M}_\delta$ est un espace homogène sous $G = SL_n(\mathbb{R})$

soit $\delta^{1/n} \mathbb{Z}^n = \Lambda_0 \in \mathcal{M}_\delta$, son stabilisateur est $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$ ; donc $\mathcal{M}_\delta = G/\Gamma$.

On met sur $\mathcal{M}_\delta$ une mesure invariante.

- mesure de Haar sur $SL_n(\mathbb{R})$ définie par

① $$1 \to SL_n \to GL_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m \to 1$$

sur $GL_n$ $\quad \dfrac{\prod da_{ij}}{\det} \quad\quad \dfrac{dt}{t}$

② ou forme alternée sur Lie $SL_n$ de base $e_{ij}$ $i \neq j$ et $e_{ii} - e_{11}$ $\quad i = 2, .., n$ $\quad$ valeur 1 sur cette base.

③ $SL_n$ est sur $\mathbb{Z}$, son alg de Lie aussi. Ceci détermine une mesure de Haar qui donne le volume 1 au réseau.

<u>Remarque</u> Cette mesure de Haar n'est pas celle choisie par Siegel.

On notera $d\Lambda$ la mesure sur $\mathcal{M}_\delta$.

Soit $\varphi(x)$ une fonction sur $\mathbb{R}^n$, intégrable à support compact, $\Lambda$ un réseau. On pose

$$\Sigma(\varphi,\Lambda) = \sum_{\substack{x\in\Lambda \\ x\neq 0}} \varphi(x) \qquad \text{(somme finie)}$$

Th (Siegel. Hlawka).

1) Soit $c_n = \mathrm{vol}(G/\Gamma)$. Alors $c_n = \zeta(2)\cdots\zeta(n)$

($\Leftrightarrow$ $\tau SL_n = 1$ pour $K = \mathbb{Q}$).

2) Pour $\varphi$ comme ci-dessus,

$$\frac{1}{c_n}\int_{\Lambda\in M_\delta} \Sigma(\varphi,\Lambda)\, d\Lambda = \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \, .$$

Soit $\quad \Sigma^{\text{prim}}(\varphi,\Lambda) = \sum_{\substack{x\in\Lambda \\ \text{prim}}} \varphi(x)$

où $x$ primitif dans $\Lambda \Leftrightarrow x \notin m\Lambda$ pour $m \geq 2$

3) $$\frac{1}{c_n}\int_{\Lambda\in M_\delta} \Sigma^{\text{prim}}(\varphi,\Lambda)\, d\Lambda = \frac{1}{\delta\,\zeta(n)}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \, .$$

---

$\Rightarrow$ M.H $\qquad \varphi$ fonct. carac de $S$

$$\Sigma(\varphi,\Lambda) = \#\{\Lambda-\{0\}\cap S\}$$

Supposons $\delta > 1$. $\quad$ 2) $\Rightarrow$ moyenne de $\#\{\Lambda-\{0\}\cap S\} = \dfrac{\mathrm{vol}(S)}{\delta} < 1$

$\Rightarrow$ il existe $\Lambda$ tel que $\Lambda-\{0\}\cap S = \emptyset$.

Si $S$ est étoilé symétrique, on utilise 3 car dans ce cas $S \cap \Lambda - \{0\} \neq \emptyset \Rightarrow \#\{S \cap \Lambda^{\text{prim}}\} \geq 2$.

et même argument.

---

W. Schmidt :

Soit $\sigma$ fonction sur $\mathbb{Z}^n = \Lambda_0$, combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques $\sigma_m$ de $m\Lambda_0$ $(m = 1, 2, \dots)$

$$\sigma = \sum \lambda_m \sigma_m$$

$$\int \sigma = \sum \lambda_m \frac{1}{m^n}$$

Par transport $\sigma$ définit $\sigma_\Lambda$ pour tout réseau $\Lambda$.

On définit

$$\Sigma(\varphi, \sigma, \Lambda) = \sum_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \Lambda}} \varphi(x)\, \sigma_\Lambda(x)$$

. On a

$$2') \quad \boxed{\frac{1}{c_n} \int_{\mathcal{M}_\rho} \Sigma(\varphi, \sigma, \Lambda)\, d\Lambda = \frac{1}{\rho} \int \sigma \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx}$$

résulte de 2) appliqué aux $m\Lambda$.

Considérons un couple $(\sigma, N)$ $\quad \sigma \geq 0$ $\quad N$ entier $\geq 1$ tel que

(*) pour toute famille finie $x_i$ de pts de $\mathbb{Z}^n$ avec $\sum \sigma(x_i) < 1$, il existe un réseau $L \subset \mathbb{Z}^n$ d'indice $\leq N$ qui ne contient aucun des $x_i$

cas trivial $\sigma = 1,\ N = 1$ On note $c_\sigma = N\int \sigma$.

Th <u>Si</u> $\delta > c_\sigma \operatorname{vol}(S)$, <u>il existe un réseau de</u> <u>volume</u> $\leq \delta$ <u>qui ne rencontre pas</u> $S$.

i.e. $\Theta_\delta(S) \geq \frac{1}{c_\sigma}$.

<u>dem</u>. on utilise (2'). Soit $\delta' = \delta/N$.

$$\frac{1}{c_n}\int_{\mathcal{M}_{\delta'}} \Sigma(\varphi,\sigma,\Lambda)\,d\Lambda = \frac{N}{\delta}\int \sigma \cdot \operatorname{vol}(S) = \frac{c_\sigma}{\delta}\operatorname{vol}(S) < 1$$

donc il existe $\Lambda \in \mathcal{M}_{\delta'}$ tel que $\sum_{x\in \Lambda\cap S - \{0\}} \sigma(x) < 1$.

par (*) il existe un sous-réseau $\Lambda'$ de $\Lambda$ d'indice $\leq N$ qui ne rencontre pas $S - \{0\}$.

<u>Exemple</u> $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^n$

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in 6\Lambda \\ 3/4 & \text{si } x \in 3\Lambda,\ x \notin 2\Lambda \\ 1/4 & \text{si } x \notin 3\Lambda \end{cases}$$

$$\sigma = \tfrac{1}{4}\chi_\Lambda + \tfrac{1}{2}\chi_{3\Lambda} + \tfrac{1}{4}\chi_{6\Lambda}.$$

(*) est satisfaite pour $N = 3$.

$\Sigma\, \sigma(x_i) < 1$ possibilité ① 1 point de $3\Lambda$, non dans $2\Lambda$

pas du type 3

il y a alors un sous-réseau d'indice 2 qui ne contient pas $x$ (prendre hyperplan de $\Lambda/2\Lambda$ ne contenant pas $x$)

(5) au plus 3 pts du 3° type, pas du 2° type.

alors dans $\Lambda/3\Lambda$ on a $x_i$ en nombre $p \leq 3$ ($\neq 0$), il y a donc un hyperplan qui ne les contient pas ($\nexists$) (car il y a $p+1$ points dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$).

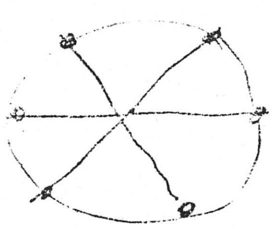
$$\int \sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{6^n}$$

$\boxed{n = 2}$ $\quad \int \sigma = \frac{5}{16}$

$$c_\sigma = N \int \sigma = \frac{15}{16} \qquad \text{d'où} \quad Q(S) \geq \frac{16}{15} \simeq 1{,}07$$

[On sait par ailleurs que $Q(S) > c_1 \log n + c_2 \quad c_1 > 0$ pour $n$ grand.]

<u>Exemple</u> disque $S$ centré en $0$

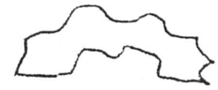


$$Q(S) = \frac{\mathrm{vol}(S)}{\delta(S)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

meilleur réseau : hexagonale.

$1/2$ disque $\rightarrow$ $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$


$$\frac{3}{4}\,\frac{\pi}{\sqrt{3}} \simeq 1{,}37$$

il y a un exemple (Ellenshaw)  1,31

record absolu.

---

<u>démonstration</u> (Siegel 1945. Weil sur qq résultats de Siegel).

réc. sur n. $n = 1$ rien $c_n = \mathrm{vol}\, SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$

$$= \prod_{i=2}^{n} \zeta(i) = 1$$

<u>lemme</u>

$$\begin{array}{ccc} & G_1 & \\ \subset & & \supset \\ G_3 & & G_2 \\ \supset & & \subset \\ & G_4 & \end{array}$$

$G_i$ groupes loc. compacts, unimodulaires

dtés des mesures sur $G_1/G_2$, ...

Hyp : $G_3/G_4$ est de vol. fini

$\varphi$ fonction sur $G_1$, constante mod $G_3$

$$\boxed{\mathrm{vol}(G_3/G_4) \cdot \int_{G_1/G_3} \varphi(x)\, dx = \int_{G_1/G_2} \left( \int_{G_2/G_4} \varphi(xg)\, dg \right) dx}$$

On intègre la fonction sur $G_1/G_4$ fibré sur $G_1/G_2$ ou $G_1/G_3$. ■

$G = SL_n(\mathbb{R})$

$\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$

$H$ = stab dans $G$ du vecteur $e_1 = 1, 0, \ldots, 0$ $= \begin{pmatrix} 1 & * \ldots * \\ 0 & \\ \vdots & SL_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$

$\gamma$ = ——— $\Gamma$

$H = \mathbb{R}^{n-1} \rtimes SL_{n-1}$

$\Gamma = \mathbb{Z}^{n-1} \rtimes SL_{n-1}(\mathbb{Z})$

$G/H \simeq \mathbb{R}^n - \{0\}$ $\qquad$ $\varphi$ fonction sur $G/H$

$g \mapsto g e_1$

on applique le lemme

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \Gamma \arrow[dr, dash] & & H \arrow[dl, dash] \\ & \gamma & \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{vol}(H/\gamma) = c_{n-1} = \mathrm{vol}\left(SL_{n-1}(\mathbb{R})/SL_{n-1}(\mathbb{Z})\right) \text{. déf}$$

$$c_{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \int_{G/\Gamma} \sim \;= \int_{\Lambda \in \mathcal{M}_1} \Sigma^{\mathrm{prim}}(\varphi, \Lambda)\, d\Lambda$$

$x \in G/\Gamma$ est identifié à $x\mathbb{Z}^n = \Lambda \in \mathcal{M}_1$

$$\sum_{g \in \Gamma/\gamma} \varphi(xg) = \Sigma^{\mathrm{prim}}(\varphi, \Lambda)$$

$ge_1$ est un vecteur primitif de $\mathbb{Z}^n$

$xge_1$ ———————— $\Lambda = x\mathbb{Z}^n$

Par homothétie :

$$\frac{1}{\delta} c_{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \int_{\Lambda \in \mathcal{M}_\delta} \Sigma^{\mathrm{prim}}(\varphi, \Lambda)\, d\Lambda \qquad (3^*)$$

Pour montrer la formule 3, il faut voir :

$$\boxed{c_n = c_{n-1}\, \zeta(n)}$$

Montrons aussi :

$$(2^*) \quad \int \Sigma(\varphi,\Lambda)\, d\Lambda = \frac{\zeta(n)}{\delta} c_{n-1} \int \varphi(x)\, dx$$

car $x \in \Lambda - \{0\}$ s'écrit $x = my$ $y$ primitif $m \geq 1$

$$\Sigma(\varphi,\Lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \Sigma^{\text{prim}}(\varphi, m\Lambda)$$

et si $\varphi_m(x) = \varphi(mx)$

$$\Sigma(\varphi,\Lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \Sigma^{\text{prim}}(\varphi_m, \Lambda)$$

On a $\int \varphi_m = \frac{1}{m^n} \int \varphi$ , d'où

$$\int \Sigma(\varphi|\Lambda)\, d\Lambda = \frac{c_{n-1}}{\delta} \sum_1^{\infty} \int \varphi_m(x)\, dx$$

$$= \frac{c_{n-1}}{\delta} \int \varphi(x)\, dx \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^n}}_{\zeta(n)} .$$

---

Deux méthodes pour montrer $c_n = c_{n-1}\, \zeta(n)$.

① Siegel. Il faut établir la valeur d'une constante, on peut supposer $\varphi$ continue à support compact. On intègre à la Riemann sur $\mathbb{R}^n$. Pour $\Lambda \in M_\delta$ on a pour $t \to 0$

$$\sum_{x \in t\Lambda} \varphi(x) \cdot \frac{\cancel{\text{[illegible]}}}{t^n \delta} \longrightarrow \int \varphi(x)\, dx$$

$$t^n \sum_{x\in\Lambda} \varphi_t(x) \longrightarrow \frac{1}{\delta}\int \varphi(x)\,dx$$

$$\Sigma(t^n\varphi_t, \Lambda) \longrightarrow \text{cste} = \frac{1}{\delta}\int\varphi \qquad (\Lambda \text{ fixé})$$

Intervertissons $\lim\limits_{t\to 0}$ et $\int_{M_\delta}$, on a :

$$c_n \cdot \frac{1}{\delta}\int \varphi(x)\,dx = \frac{\zeta(n)}{\delta}\, c_{n-1}\int \varphi(x)\,dx .$$

Pour avoir le droit d'intervertir il faut appliquer le th de la convergence dominée. Il faut une majoration, c'est ce que fait Siegel.

② Weil remplace cet argument par la formule de Poisson

$\varphi$ de Schwartz, $\hat\varphi$ = transf de Fourier

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \varphi(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^n} \hat\varphi(y) \qquad \hat\varphi(0) = \int\varphi$$

$$= \int\varphi + \sum_{y\neq 0} \hat\varphi(y)$$

Admettons $c_n < \infty$ (en fait la méthode le démontre).

$$\Sigma^c(\varphi,\Lambda) = \sum_{x\in\Lambda}\varphi(x) = \varphi(0) + \Sigma(\varphi,\Lambda).$$

$$\int_{M_\delta} \Sigma^c(\varphi,\Lambda)\,d\Lambda = c_n\,\varphi(0) + \frac{\zeta(n)}{\delta}\, c_{n-1}\, \underbrace{\hat\varphi(0)}_{\int\varphi}$$

Supposons $\delta = 1$. D'après Poisson

$$\sum_{x \in \Lambda} \varphi(x) = \sum_{y \in \Lambda'} \hat{\varphi}(y) \qquad \Lambda' = \text{dual de } \Lambda$$

si $\Lambda = g\,\mathbb{Z}^n \quad g \in SL_n(\mathbb{R})$

$$\Lambda' = {}^t g^{-1}\, \mathbb{Z}^n$$

l'application $\Lambda \mapsto \Lambda'$ respecte la mesure de Haar de $\mathcal{M}_1$.

Donc

$$\int_{\mathcal{M}_\delta} \Sigma^c(\hat{\varphi}, \Lambda)\, d\Lambda = c_n \hat{\varphi}(0) + \zeta(n)\, c_{n-1} \varphi(0)$$

$$\|$$

$$\int_{\mathcal{M}_\delta} \Sigma^c(\varphi, \Lambda)\, d\Lambda = c_n \varphi(0) + \zeta(n)\, c_{n-1} \hat{\varphi}(0)$$

donc $\quad c_n = \zeta(n)\, c_{n-1}$.

<u>Exercice</u> $G$ réductif. Aut $G$ (algébrique) opère par $\pm 1$ sur det Lie $G$ (ouvertures de rang maximum) donc laisse invariant la mesure de Haar c'est le cas en particulier de $g \mapsto {}^t g^{-1}$.

<u>Cas général</u> $\boxed{\begin{array}{c} K \text{ corps global} \;,\; n \geq 2 \\ \tau(SL_n) = 1 \end{array}}$

On adélise la formule 2.

$V = K^n$ e.v. de dim $n$ sur $K$.

$V_A = V(A) = A_K \times \cdots \times A_K$ pts adéliques.

$\varphi$ fonction de Schw. Bruhat sur $V_A = \otimes \varphi_v$

$\varphi_\infty$ à décroissance rapide $\in \mathcal{S}$

$\varphi_v$ loc cste à support compact presque toutes fonctions

carac des pts entiers.

$dx$ mesure de Tamagawa normalisée par $\tau G_a = 1$.

$$\int_{V_A} \varphi(x)\, dx = \hat{\varphi}(0)$$

$G = SL_n$

$H$ = fixateur de $e_1$

$G/H = V - \{0\} =: V'$

$V'_A \hookrightarrow V_A$ pas avec topologie induite, cependant

$$\boxed{\int_{V'_A} \varphi(x)\, dx = \int_{V_A} \varphi(x)\, dx}$$

il y a convergence pour $V'$ car $n \geq 2$

$\#$ points $= q^n - 1$

$$\frac{q^n-1}{q^n} = 1 - \frac{1}{q^n} \quad \text{converge}$$

L'égalité est vraie pour chaque $v$.

On raisonne comme précédemment par récurrence sur $n$, d'où

$$c_{n-1} \int_{V_A} \varphi(x)\, dx = \int_{G_A/G_K} \Big( \sum_{g \in G_K/H_K} \varphi(xg) \Big)\, dx$$

$G_K/H_K = V_K - \{0\}$.

Poisson adélifié dit :

$$\varphi(0) + \sum_{g \in G_K/H_K} \varphi(xg) = \hat{\varphi}(0) + \sum_{g \in G_K/H_K} \hat{\varphi}({}^t x^{-1} g)$$

Intégrons sur $G_A/G_K$, d'où.

$$c_n \varphi(0) + c_{n-1} \hat{\varphi}(0) = c_n \hat{\varphi}(0) + c_{n-1} \varphi(0)$$

d'où $\boxed{c_n = c_{n-1}}$ $\qquad c_n = \tau(SL_n)$

Mais $\tau(SL_1) = 1$. $\Rightarrow c_n = 1$.

Il n'y a pas besoin de savoir que $c_n < \infty$. On prend $\varphi$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ ; ça donnerait $\infty$ = fini. d'où la finitude de $c_n$

22.3.82 

## Fibrés vectoriels sur les courbes

$k=\mathbb{F}_q$ | $C$ courbe proj lisse abs irréd $/k$ $\quad K=k(C)$

fibrés vectoriels $E$ de rg $n$ $(n\geq 2)$ sur $C$

$\operatorname{Aut} E$ est un groupe fini $\quad w_E = |\operatorname{Aut}(E)|$

$L$ fibré vect de rang 1

$$\mathcal{M}_{L,n} = \{E \;/\; \det E \simeq L\}$$

Th 1 (Harder)

$$\boxed{\sum_{\substack{\det E\simeq L \\ \operatorname{rg} E = n}} \frac{1}{w_E} = \frac{1}{q-1}\,\zeta_C(2)\cdots\zeta_C(n)}\; q^{(n^2-1)(g-1)}$$

où $\zeta_C$ = fonction zêta de $K$ (ou $C$)

places $v \Longleftrightarrow P$ points fermés de $C$ $\quad Nv = q^{\deg P}$

$$\zeta_C(s) = \prod_v \frac{1}{1-Nv^{-s}} = \prod \frac{1}{1-q^{-s\cdot\deg P}}$$

$$Z_C(T) = \prod_P \frac{1}{1-T^{\deg P}} \qquad g = \text{genre}$$

$$= \frac{\prod_{\alpha=1}^{2g}(1-\omega_\alpha T)}{(1-T)(1-qT)} \qquad |\omega_\alpha| = q^{1/2}$$

et (éq. fonct) on peut indexer les $\omega_\alpha$ de sorte que

$$\omega_\alpha\cdot\omega_{g+1-\alpha} = q$$

dbi :

$$\sum_{\substack{\det E \simeq L \\ \operatorname{rg} E = n \\ E \text{ à iso près}}} \frac{1}{w_E} = \frac{1}{(q-1)} Z_C(q^{-2}) \cdots Z_C(q^{-n}) \cdot q^{(n^2-1)(g-1)}$$

Notons : $M = \sum_{\substack{\det E \simeq L \\ \operatorname{rg} E = n}} \frac{1}{w_E}$ (masse).

On peut regarder les couples $(E, \varphi)$ $\varphi : \det E \xrightarrow{\sim} L$

à isomorphisme près (respectant $\varphi$)

$$w_E^1 = w_{E,\varphi} = |\operatorname{Aut}(E,\varphi)| \quad \text{indep. de } \varphi$$

$$M^1 = \sum_{\substack{(E,\varphi) \\ \text{à isom près}}} \frac{1}{w_E^1}$$

Alors $\boxed{M = \frac{1}{q-1} M^1}$

On montre que pour $E$ fixé $\frac{1}{w_E} = \frac{1}{q-1} \sum_{\varphi} \frac{1}{w_E^1}$.

$s(E)$ = nbre ds sections de $E \neq 0$ $= q^{h^0(E)} - 1$

<u>Th 2</u> $$\boxed{\frac{1}{M} \sum_{E \in \mathcal{M}_{L,n}} \frac{1}{w_E} s(E) = q^{c+n(1-g)}}$$

ie val moyenne de $s(E) = q^{c+n(1-g)}$ $c = \deg L$

$s'(E)$ = nbre de sections $\sigma$ de $E$, $\sigma(x) \neq 0$ pour tout $x$

<u>Th 2'</u>. Moyenne de $s'(E) = q^{c+n(1-g)} / \zeta_C(n)$.

<u>Corollaire</u>. <u>Si</u> $c \leq n(g-1)$, <u>il existe</u> $E$ <u>avec</u> $\det E \simeq L$

<u>avec</u> $h^0(E) = 0$.

sinon chacun en a $q-1$ si $q \neq 2$ $>1$ ça ne va pas.

$q=2$ on serait ennuyé si moyenne 1 et chacun donne 1

mais $L(n) \oplus \mathcal{O}(-n)$ a beaucoup de sections.

---

<u>dem du Th 1</u> i.e. $M^1 = \zeta_C(2) \cdots \zeta_C(n)$.

On a montré $\mathrm{Tam}_K SL_n = 1$.

$v = P \rightarrow \mathcal{O}_v = \mathcal{O}_P \subset K$ et le complété $\hat{\mathcal{O}}_v = \hat{\mathcal{O}}_P \subset \hat{K}_v$

$G = SL_n(\mathbb{A})$ $\qquad \Gamma = G(K)$

$\Omega = s/g$ ouvert compact

$M = \Omega \backslash G / \Gamma$ $\qquad I \subset G$ $\qquad I$ rep de $M$

$G/\Gamma = \bigcup_{x \in I} \Omega x \Gamma / \Gamma$ $\qquad \Omega \cap x \Gamma x^{-1} = \Gamma_x$

$\mathrm{vol}(G/\Gamma) = \sum \mathrm{vol}(\Omega)/|\Gamma_x|$ d'où $\boxed{\sum \frac{1}{|\Gamma_x|} = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)}}$

$\|$

$1$ (Tamagawa)

112

On va s'arranger pour que

$I$ = ensemble des classes de couples $(E, \varphi)$

$\Gamma_x = \mathrm{Aut}(E, \varphi) \qquad (E, \varphi) \leftrightarrow x$

$$\mathrm{vol}\, \Omega = \prod_{2 \leq i \leq n} \zeta_C(i)^{-1} \cdot q^{(n^2-1)(g-1)}$$

---

fibré vectoriel de rang $n$ $\rightarrow$ sous-faisceau de $K \times \cdots \times K$ $n$ fois

pour tout $P$ $\begin{cases} \mathcal{O}_P \text{ sous-module libre de rang } n \\ \text{p.p. } \mathcal{O}_P \times \cdots \times \mathcal{O}_P \quad n \text{ fois} \end{cases}$

il existe un fibré $E$ satisfaisant la condition et $L \oplus 1 \oplus \cdots \oplus 1$

$E = (E_P) \qquad E_P \subset K^n \qquad\qquad L \qquad L_P \subset K$

$$\det E_P = L_P$$

les $\mathcal{O}_P$-réseaux dans $K^n$

$\updownarrow$

les $\hat{\mathcal{O}}_P$-réseaux dans $\hat{K}^n$

$G = SL_n(\mathbb{A})$ opère sur $\mathbb{A} \times \cdots \times \mathbb{A}$ ($n$ fois)

$g \in G$ appartient à $\Omega \iff g_P \hat{E}_P = \hat{E}_P$

$$\Omega = \prod_P SL(\hat{E}_P) = \prod \Omega_P$$

autrement $SL(E)$ est un fibré en groupes sur $C$ et $\Omega$ ses points entiers.

Calculons

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{\zeta_C(i)} \times q^{(n^2-1)(1-g)}$$

facteur correctif

Fibré $\mathfrak{g}r = SL_E$ $\quad \mathrm{End}_0 E$

$$0 \to \mathrm{End}_0 E \to \mathrm{End}\, E \longrightarrow O_C \to 0$$

$\Rightarrow$ $\det \mathrm{End}\, E \simeq \det \mathrm{End}_0 E$. De plus il est trivial.

car $\det(\underset{n_1}{E_1} \otimes \underset{n_2}{E_2}) \simeq (\det E_1)^{n_2} \otimes (\det E_2)^{n_1}$ canonique

eg $\det(\mathrm{End}\, E) \simeq 1$

$\Rightarrow$ forme multilinéaire alternée sur $\mathrm{End}_0 E$.

Ex $n = 2$ $\qquad \phi(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(u_1 u_2 u_3 - u_1 u_3 u_2)$

base naturelle de $(\overset{3}{\Lambda} \mathrm{End}_0 E)^\vee$.

Soit $\omega$ forme diff, section partout non nulle de $\Omega^{n^2-1}$ Lie $SL_E$. On calcule son volume

$$\int_{\Omega_P} |\omega_P| = \#\{\Omega_P \text{ sur le corps résiduel}\} / q_P^{n^2-1}$$

$$= \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{q_P^i}\right) = \prod \left(1 - \frac{1}{q^{i \deg P}}\right)$$

Détermination de I

$g = (g_P) \in SL_n(\mathbb{A}) \qquad g \mapsto \{g_P^{-1}\hat{E}_P\}_P = \hat{E}_{g,P}$

déf un fibré vectoriel $E_g \subset K^n$ tel que $\det E_{g,P} = L_P$ pour tout $P$ ie $\det E_g \cong L$.

Si on remplace $g$ par $\omega g$, $\omega \in \Omega$ on ne change pas $E_g$; et si $g$ est remplacé par $g\gamma$ $\gamma \in SL_n(K)$, $\gamma^{-1}E_g \simeq E_g$.

Donc $(E_g, \varphi)$ ne dépend que de $\Omega\backslash G/\Gamma$. On vérifie que c'est une bijection.

Détermination de $\Gamma_x$ il se dégonfle !

---

dem du th 2.

On avait vu que si $\varphi$ est une fonction de S.B. sur $\mathbb{A}^n$

$$\int \varphi(x)\,dx = \int_{G/\Gamma} \Big( \sum_{x \in K^n - \{0\}} \varphi(gx) \Big)\, dg$$

$\varphi_P$ = fonction carac de $\hat{E}_P \times \cdots \times \hat{E}_P$ $n$ fois $\qquad \varphi = \otimes_P \varphi_P$

$E \leftrightarrow (E_P) \subset K^n$

$H^0(C, E) = K^n \cap \prod \hat{E}_P$

si $g=1$, $\sum_{x \in K^n - \{0\}} \varphi(x)$ = # sections non nulles de $E$.

$G/\Gamma$ = somme disjointe des orbites de $\Omega$

- - - - - -

---

$E$ <u>stable</u> (Mumford) si pour tout sous-fibré $F$ de $E$

$1 \leq \text{rang } F \leq n-1$ on a $\dfrac{c(F)}{rg(F)} < \dfrac{c(E)}{rg(E)}$.

$c(E) = \deg(\det E) \in \mathbb{Z}$.

[ e.g. $n=2$ $c(F) < \frac{1}{2} c(E)$

$\Leftrightarrow c(F) < c(E/F)$ ]

$\det E \simeq L$ fixé pour simplifier $(\deg L, n) = 1$.

Alors les fibrés stables $\in \mathcal{M}_{L,n}$ sont paramétrés par une variété de modules <u>projective lisse</u> de dim $(n^2-1)(g-1)$.

(pas de semi-stables car $(\deg L, n) = 1$)

cf. Newstead Tata 1978 + articles.

<u>Ex</u> $n=2$ $\deg L = 1$ $g=2$ $\rightarrow$ dim 3

revêt ramifié de $\mathbb{P}^1$ en 6 pts $y^2 = \prod_{i=1}^{6} (x - x_i)$

$\rightarrow$ pinceau de quadriques $aQ_1 + bQ_2 = 0$ dans $\mathbb{P}_5$

6 valeurs de $\mathbb{P}_1$ correspondent à un cône. On peut choisir le pinceau tel que l'équation donnant ces points corresponde à la courbe $C$. Alors $M$ est l'intersection de ces deux quadriques.

polynôme de Poincaré de $M$ : $1+T^2+4T^3+T^4+T^6$.

---

$$\mathcal{M}^1 = \mathcal{M}_1^{st} + \mathcal{M}_1^{inst}$$

si $E$ stable $\quad \mathrm{Aut}\, E \simeq \mathbb{F}_q^* \qquad \dfrac{1}{w_E} = \dfrac{1}{q-1}$

$$M^{st} = \frac{\text{nbre de pts de } \mathcal{M} \text{ ds } \mathbb{F}_q}{q-1} = \frac{|M(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$$

donc
$$\boxed{|M(\mathbb{F}_q)| = q^{(n^2-1)(g-1)}\, \zeta_C(2)\cdot\zeta_C(n) - \mathcal{M}_1^{inst}}$$

Il faut calculer $M_1^{inst}$.

---

Supposons $\boxed{n=2,\ \deg L = 1}$

$$\mathcal{M}^1_{inst} = \frac{h\, q^g}{(q-1)(q^2-1)} \qquad h = |\,\mathrm{Jac}(\mathbb{F}_q)| = \prod_{\alpha=1}^{2g}(1-w_\alpha)$$

pour $q$ grand $\quad \mathcal{M}^1_{\text{eff}} \simeq q^{2g-3}$

$$q^{(n^2-1)(g-1)} \simeq q^{3(g-1)}$$

$g=0 \quad \mathcal{M} = \emptyset$

$g=1 \quad \mathcal{M} = 1$ pt. $\qquad$ deg det $E = -1$

Si $E$ est instable, il existe $F$ de rang 1 dans $E$ tel que $\deg F > 0$. Un tel fibré est unique.

$$0 \to F \to E \to \underbrace{E/F}_{m \quad\; 1 \quad\; 1-m}^{=F'} \to 0 \qquad m = \deg F$$

$F \otimes F' \simeq L \qquad F' = F^{-1} \otimes L$

On fait varier $F$ dans la "Jac", l'extension est classée par

$H^1(C, F^{\otimes 2} \otimes L^{-1}) \qquad$ ($F$ de rang 1 de deg $m \geq 1$)

ou plutôt par $\mathbb{P}^1$ de cet e.v.

$$\sum_{F \text{ de deg } m \geq 1} \left\{ \sum_{\substack{x \in H^1 \\ \text{mod homot.}}} \frac{1}{w_{E_x}} \right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = 0 \qquad F \oplus F' \qquad w_{E_0} = (q-1)^2 \cdot q^{h^0(\mathrm{Hom}(F', F))}$

$x \neq 0 \qquad w_{E_x} = (q-1)\, q^{h^0}$

$$\frac{1}{(q-1)^2} q^{-h^0} + \frac{q^{h^1}-1}{q-1} \frac{1}{q-1} q^{-h^0} = \frac{q^{-h^0+h^1}}{(q-1)^2}$$

$$h^0 - h^1 = 2m - 1 + 1 - g = 2m - g \qquad (F^{\otimes 2} \otimes L^{-1})$$

contribution de $F$ (de deg $m \geq 1$) à $M^1$ : $\dfrac{q^{g-2m}}{q-1}$

$$\sum_F \frac{q^{g-2m}}{q-1} = \frac{h}{q-1} q^g \sum_{m=1}^{\infty} q^{-2m}$$

$$= h q^g / (q-1)(q^2-1)$$

preprint Bott-Atiyah : Yang-Mills trouve aussi les nombres de Betti.

---

$$|M(\mathbb{F}_q)| \doteq q^{3(g-1)} \zeta_C(2) - \frac{h q^g}{(1-q)(1-q^2)}$$

$$\zeta_C(2) = Z(q^{-2}) = \frac{\prod (1 - \omega_\alpha q^{-2})}{(1-q^{-2})(1-q^{-1})}$$

$$h = \prod (1 - \omega_\alpha)$$

$$|M(\mathbb{F}_q)| = \Phi(q, \omega_\alpha)$$

$$|M(\mathbb{F}_{q^\nu})| = \Phi(q^\nu, \omega_\alpha^\nu)$$

mais $\displaystyle |M(\mathbb{F}_{q^\nu})| = \sum_{i=0}^{2 \dim M} (-1)^i \sum_{\lambda=1}^{B_i} (\pi_{\lambda,i})^\nu \qquad |\pi_{\lambda,i}| = q^{i/2}$

$$P_M(T) = \sum_{i=0}^{2\dim M} B_i T^i$$

On a $$\boxed{P_M(T) = \Phi(T^2, -T)}$$ $q \mapsto T^2$, $\omega_\alpha \mapsto -T$

$$\Phi(q,\omega_\alpha) = q^{3(g-1)} \frac{\prod(1-\omega_\alpha q^{-2})}{(1-q^{-2})(1-q^{-1})} - \frac{\prod(1-\omega_\alpha)\, q^g}{(1-q)(1-q^2)}$$

donc

$$P_M(T) = T^{6(g-1)} \frac{(1+T^{-3})^{2g}}{(1-T^{-4})(1-T^{-2})} - \frac{(1+T)^{2g}\, T^{2g}}{(1-T^2)(1-T^4)}$$

$$\boxed{P_M(T) = \frac{(1+T^3)^{2g} - T^{2g}(1+T)^{2g}}{(1-T^2)(1-T^4)}}$$

Ex $g = 2$ $\qquad T^6 + T^4 + 4T^3 + T^2 + 1$

$$M(\mathbb{F}_q) = q^3 + q^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^{4} \omega_\alpha\right) q + O(q)$$

$B^6 = 1$ $\qquad$ motif de $M$ = motif de $C$ décalé de 1

$B^5 = 0$

$B^4 = 1$ $\qquad$ éclatement de $C$ dans $\mathbb{P}_3$.

$B^3 = 4$

Bott et Atiyah montre que $M$ est sans torsion et $\pi_1 = 0$