Jean-Pierre Serre
J.-F. Boutot (réd.)

Tamagawa II

Cours de Jean-Pierre Serre, tome 3 (1982)
<http://www.numdam.org/item?id=CJPS_1982__3_>

Table des Matières

Nombres de Tamagawa (rappels) ... 121
Traductions $\Omega | G / \Gamma$ ... 130
Parenthèse sur les formules de masse ... 131
Genres ... 134
Cas orthogonal ... 137
Cas local ... 139
Formule de masse (type I) ... 151
Représentation par une forme du genre ... 154
Comparaison entre types I et II ... 156
Démonstration du lemme de stabilité ... 158
<u>La formule de Siegel</u> ... 160
Le jeu des 2 groupes ... 164
Démonstration (par Siegel) de la f. de Siegel ... 171
$n \geq 5$ ... 176
$n = 4$ ... 176
$n = 3$ ... 178
$n = 2$ ... 179
Exemple : $r_5(n)$ ... 181
Représentations primitives ... 183
Lien avec les fonctions modulaires ... 184
Théorème de Tartakowski ... 187
Opérateurs de Hecke ... 189
Formes indéfinies ... 191
La démonstration adélique ... 193

1982. Nombres de Tamagawa

La littérature est mauvaise.

- non explicitement dém. mais vrai : Tamagawa est invariant par restriction des scalaires K'/K à la Weil (non nec séparable)

- démontré mais faux : normalisation d'Ono pour les corps de fonctions.

On se concentrera sur le groupe orthogonal pour montrer le th. de Siegel $\tau(O_n) = 1$ $(n \geq 2)$
et l'équivalence : Tamagawa = .. $\Leftrightarrow$ th "connect".

Rem $\tau(SO_n) = 2$ et $\tau(\mathrm{Spin}_n) = 1$ $(n \geq 3)$.

Si F est fini $\tau(F) = \frac{1}{|F|}$ e.g. $\tau(O_1) = 1/2$.

On donnera la dém de Siegel (même I, cas déf >0 sur $\mathbb{Q}$).

K corps global (de nbs ou de fonctions)

Question : que faut-il faire pour une courbe sur un corps alg clos
cf. Atiyah-Bott sur les complexes.

Σ = ens des places $\quad \Sigma_\infty$ archim.

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Sigma_f$ ultram.

$v \in \Sigma_f$ K_v complété O_v l'anneau des entiers

A_K = anneau des adèles de K $= \prod_{v \in \Sigma} (K_v, \mathcal{O}_v) \subset \prod K_v$

$a = (a_v)$ $\quad a_v \in K_v$ pour tout v

$\quad a_v \in \mathcal{O}_v$ pour tout v

top loc. compact métrisable

<u>mesures</u> : On les choisit localement :

si $v \in \Sigma_f$ $\quad$ mes $(\mathcal{O}_v) = 1$

$v \in \Sigma_\infty$ $\quad K_v \simeq \mathbb{R}$ $\quad dx$ $\quad$ mes $[0,1] = 1$

$\quad K_v \simeq \mathbb{C}$ $\quad 2dx\,dy = |dz\,d\bar{z}|$.

Sur A_K la mesure produit $\mu = \otimes \mu_v$ notée da

$$\mathrm{vol}(A_K/K) = c_K = \begin{cases} |d_K|^{1/2} & \text{pour les corps de nbres} \\ q^{g-1} & \text{pour les corps de fonctions} \end{cases}$$

où q = nbre d'éléments du corps des csts

g = genre de la courbe

(on voit l'analogie entre g et $\log |d_K|$).

On note $\quad d'a = \dfrac{1}{c_K}\, da$ $\quad$ de sorte que $\mathrm{vol}_{d'a}(A_K/K) = 1$.

C'est la mesure self-duale sur A_K dual de lui-même (K étant son propre orthogonal).

<u>pts adéliques</u> : V var alg sur K. On connait $V(K)$ et $V(K_v)$

$V(A_K)$ = pts de V à valeurs dans la K-algèbre A_K. (groth.)

Weil explicite $V(A_K) \subset \prod V(K_v)$

$x = (x_v) \in V(A_K) \iff$ presque tous les x_v sont entiers

i.e. $V = \bigcup_{\substack{\text{finie} \\ i \in I}} U_i$ U_i ouverts affines $\underset{\text{fermé}}{\subset} \mathrm{Aff}^{N_i}$

dans ces coordonnées on peut parler de points entiers sur $\mathcal{O}_v$.

$$V_*(\mathcal{O}_v) = \text{réunion des } U_i(\mathcal{O}_v) \text{ dans } V(K_v).$$

dépend d'$*$ = choix des U_i, $U_i \subset \mathrm{Aff}^{N_i}$.

De façon équivalente :

$$V(A_K) = \bigcup_{\substack{\text{partition} \\ \Sigma = \coprod_{i\in I} \Sigma_i}} U_i(A_i) \qquad A_K = \prod_{i \in I} A_i \qquad A_i = \prod_{v \in \Sigma_i} K_v .$$

<u>Cas particulier</u> :

$V \subset \mathrm{Aff}^N$ fermé défini par $P_\alpha = 0$

alors $V(A_K)$ = s.-espace de $A_K \times \cdots \times A_K$ formé des $x_1, \ldots, x_N$

tq $P_\alpha(\underline{x}) = 0$.

<u>Propriétés</u> : - $V(A_K)$ est loc. compact

- si V est projective, $V(A_K) = \prod V(K_v)$ est compact.

- $V(K)$ est discret dans $V(A_K)$, si V est affine.

<u>Mesures sur</u> $V(A_K)$.

Si V est lisse de dimension n et si ω est une forme différentielle de deg n sur V partout non nulle, alors sur chaque $V(K_v)$ on a une mesure positive $\|\omega\|_v$.

$\omega \underset{\text{loc}}{=} f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ $\qquad \|\omega\|_v = \|f\| \otimes dx_i$

où $\|f\|$ est définie par la valeur absolue canonique des corps locaux K_v telle que $d(\alpha x) = \|\alpha\| dx$ $\quad dx$ = mesure de Haar (sur $\mathbb{C}$ c'est $|z|^2$).

Quelquefois on peut faire le produit $\|\omega\|_A = \otimes \|\omega\|_v$.

Groupes algébriques

G gr alg lisse de dimension n sur K (en pratique linéaire)

$G(A_K) \supset G(K)$ groupe discret

On veut définir une mesure canonique sur $G(A_K)$ et calculer vol $(G(A_K)/G(K))$, s'il est fini.

(a) G semi-simple connexe

On choisit une forme différentielle de deg n, $\neq 0$ et bi-invariante ω; d'où une mesure $\|\omega\|_v$ sur chaque $G(K_v)$. De plus

$$\text{mes } G(O_v) \underset{\text{presque tout } v}{=} \frac{\text{nbre de points de } G \text{ sur le corps résiduel } \kappa(v)}{(N_v)^n}$$

où $N_v = |\kappa(v)|^n$ $\qquad = 1 + O\left(\frac{1}{N_v^2}\right)$

ex SL_2 $\quad \frac{p(p^2-1)}{p^3} = 1 - \frac{1}{p^2}$

Le produit infini $\prod_v \left(1 + O\left(\frac{1}{N_v^2}\right)\right)$ est convergent. On peut donc définir

$$\|\omega\|_A = \bigotimes_{v \in \Sigma} \|\omega\|_v .$$

On note $\boxed{\mu_G = c_K^{-n} \|\omega\|_A}$.

Si on change ω en $\lambda\omega$ $\quad \|\lambda\omega\| = \|\lambda\| \, \|\omega\|$

mais $\|\lambda\| = \prod \|\lambda\|_v = 1$. D'où un μ_G canonique.

Th $\boxed{\tau(G) = \mathrm{vol}_\mu\big(G(A_K)/G(K)\big) < \infty}$

Borel - Harish-C pour les corps de nombres

Harder pour les corps de fonctions

C'est le nombre de Tamagawa

Par construction $\boxed{\tau(\mathbb{G}_a) = 1}$.

N.B. On a mis sur l'alg de Lie la norme qui donne vol 1 pour cet espace vectoriel.

(b) G non nec. connexe mais tel que

b1) la comp. neutre G° est s.s.

b2) toute classe modulo G° contient un pt rat sur K.

ex: $O(n) \supset SO(n)$ $\quad n \geq 1 \quad n \neq 2$ $\quad$ indice 2

il existe des réflexions définies sur K (par rapport à un vecteur non isotrope).

cas 2 $\quad O(1) = \lambda \in GL(1)$ $\quad y\ (\lambda x)^2 = x^2 \quad = \{\lambda \,/\, \lambda^2 = 1\} = \mu_2$

si le nbre de variables est pair par contre c'est lisse.

$O(n)/SO(n) = \begin{cases} \mu_2 & \text{si } n \text{ impair} \\ \mathbb{Z}/2 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

On choisit ω invariante comme plus haut, d'où les $G(K_v)$ munis de $\|\omega\|_v$. Mais le $\prod$ ne converge pas, on définit :

$$\|\omega\|_A = \bigotimes_{v\in\Sigma} \frac{1}{(G:G^0)} \|\omega\|_v$$

$$\mu_A = c_K^{-n} \|\omega\|_A$$

$\tau(G)$ est bien défini et

$$\boxed{\tau(G) = \frac{\tau(G^0)}{(G:G^0)}}.$$

1) Si G est fini et déployé sur K $\qquad G(K_v) = G$

mesure $\frac{1}{(G:G_0)} \|\omega\|_v$ = masse $\frac{1}{|G|}$ en chaque pt

= mesure invariante de masse totale 1

$$G(A_K) = \prod_{v\in\Sigma} G(K_v) = G^\Sigma \qquad\qquad \tau(G^0) = 1$$

mesure totale de $G(A_K) = 1$

$G(K) = G$ diagonal dans G^Σ d'où

$$\tau(G) = \text{mes}\,(G(A_K)/G(K)) = \frac{1}{|G|}\cdot \text{mes}\, G(A_K) = \frac{1}{|G|}.$$

2) Cas général $\qquad 1 \to G^0 \to G \to F \to 1 \qquad$ d'où

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 \to & G^0(A_K) & \to & G(A_K) & \to & F(A_K) & \to 1 & & \text{loc. compact} \\ & \cup & & \cup & & \cup & & & \\ 1 \to & G^0(K) & \to & G(K) & \to & F & & & \end{array}$$

Les nombres se correspondent, d'où : $\tau(G) = \tau(G^\circ) . \tau(F)$.

En particulier $\tau(SO_n) = 2 \Leftrightarrow \tau(O_n) = 1$.

ⓒ G réductif connexe avec $\mathrm{Hom}_K(G, G_m) = 0$.

K corps de nbres (frepel). On choisit ω comme ci-dessus. Alors

$$\text{mes } G(O_v) = 1 + O\left(\frac{1}{Nv}\right) \quad \prod \text{pas convergent}$$

$$= 1 + \varepsilon_v$$

cependant $\prod_{Nv \nearrow} (1 + \varepsilon_v)$ converge.

Ex SO_2 forme $x^2 + y^2$

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1/p & \text{si } p \equiv 3 \mod 4 \\ -1/p & \text{si } p \equiv 1 \mod 4 \end{cases}$$

On définit : $\|\omega\|_A = \bigotimes_{Nv \nearrow} \|\omega\|_v$.

procédé de Weil Soit $E = \mathrm{Hom}_{\bar{K}}(G, G_m) \simeq \mathbb{Z}^r$

r = dim centre de G. On a une action de $Gal(\bar{K}/K)$ sur E, par hyp $E^{Gal} = 0$. On a

$$\text{mes } G(O_v) \underset{\text{p. tout } v}{=} \det_E \left(1 - \frac{\sigma_v}{Nv}\right) \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{Nv^2}\right)\right)$$

où σ_v est le Frobenius de v agissant sur $\mathbb{Q}\otimes E$.

mes $G(\mathcal{O}_v) = L_v(1)^{-1} \cdot (1+\varepsilon_v)$ $\qquad \varepsilon_v = O\left(\frac{1}{Nv^2}\right)$

où $L_E(s) = \prod L_v(s)$ $\qquad L_v(s) = \dfrac{1}{\det\left(1 - \frac{\sigma_v}{(Nv)^s}\right)}$.

On choisit une partie finie $S \supset \Sigma_\infty$ et pour $v \notin S$, on corrige $\|\omega\|_v$ par le facteur $L_v(1)$. On définit la mesure de Tamagawa comme

$$\boxed{c_K^{-n}\, L_S(1)^{-1} \bigotimes_{v\in S} \|\omega\|_v \bigotimes_{v\notin S} L_v(1)\, \|\omega\|_v}$$

où $L_S = \prod_{v\notin S} L_v(s)$. Ça ne dépend pas du choix de S.

Pour les corps de nombres, ça donne le même résultat que la méthode de Siegel car

$$\boxed{L_S(1) = \prod_{\substack{Nv \nearrow \\ v\notin S}} L_v(1)}$$

__Ex__ $\quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = L(1)$

$$= \left\{ \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\cdots \right\}^{-1}$$

Pour le montrer, on prend les log des deux côtés et on majore. On se ramène à

$$\prod_{p \geq p_0} \left(1 - \frac{\varepsilon_{i,p}}{N_p{}^s}\right) = L(s) \qquad |\varepsilon_{i,p}| = 1 \quad i = 1, \ldots, 1$$

$L(1)$ existe et $= \prod_{p?} \left(1 - \frac{\varepsilon_{i,p}}{p}\right)$

Condition : $\sum_{p \leq x} \varepsilon_{i,p} = O\left(\frac{x}{(\lg x)^2}\right)$ pour $x \to \infty$.

Il faut le th. des nbrs premiers avec un terme d'erreur

$$c \cdot \frac{x}{\lg x} + O\left(\frac{x}{(\lg x)^2}\right).$$

Ref : pour les caractères usuels Landau, Primzahlen.

(d) G non nec connexe, G° réductif, $\mathrm{Hom}_K(G^\circ, G_m) = 0$ et $G(K) \xrightarrow{\text{sur}} G/G^\circ$ se fait comme en (b).

On peut donc parler de τ pour O_2 pour forme quadr. à 2 variables qui ne représente pas 0. (sinon $SO_2 = G_m$).

$$\boxed{\tau = \mathrm{vol}\left(G(A_K)/G(K)\right)}.$$

Traductions

Soit G un groupe loc. compact (en pratique un $G(A_K)$) et Γ un s/g discret (en pratique $G(K)$), dx une mesure de Haar choisie sur G. On veut interpréter $\mathrm{vol}(G/\Gamma)$.

Soit Ω un s/g ouvert de G, I représentant des doubles dans $\Omega\backslash G/\Gamma$ $\qquad G = \coprod_{x \in I} \Omega x \Gamma$.

On note
$$\Gamma_x = \Omega \cap x\Gamma x^{-1} \simeq \Gamma \cap x^{-1}\Omega x$$

$$\boxed{\mathrm{vol}(G/\Gamma) = \sum_{x \in I} \mathrm{vol}(\Omega/\Gamma_x)}$$

Il faut peut-être supposer G unimodulaire. (mesure sur les espaces homogènes Bourbaki INT VII)

G/Γ = union disjointe des orbites de Ω ie les Ω/Γ_x.

Cas particulier : Ω est ouvert compact

Alors les Γ_x sont finis et $\mathrm{vol}(\Omega/\Gamma_x) = \dfrac{\mathrm{vol}(\Omega)}{|\Gamma_x|}$.

$$\boxed{\mathrm{vol}(G/\Gamma) = \mathrm{vol}(\Omega) \cdot \sum_{x \in I} \frac{1}{|\Gamma_x|}}$$

Ainsi apparaissent des "masses à la Eisenstein" $\sum \dfrac{1}{|\Gamma_x|}$.

introduites pour les formes quadratiques à 3 variables. Γ_x = g. des autom de la forme

Parenthèse sur les formules de masse.

Le simple E ensemble Γ groupe agissant sur E avec nbre fini d'orbites et stabilisateurs finis

$$\text{masse}(E;\Gamma) = \sum_{x \in E/\Gamma} \frac{1}{|\Gamma_x|} \qquad \Gamma_x = \text{stabil de } x$$

si $\Gamma' \subset \Gamma$ d'indice fini, on a

$$\boxed{\text{masse}(E;\Gamma') = (\Gamma:\Gamma') \cdot \text{masse}(E;\Gamma)}.$$

cas particulier : s'il existe un Γ' opérant librement, alors

$$\text{masse}(E;\Gamma') = |E/\Gamma'|$$

$$\text{masse}(E;\Gamma) = \frac{1}{(\Gamma:\Gamma')} |E/\Gamma'|.$$

En particulier si Γ est fini

$$\text{masse}(E;\Gamma) = \frac{|E|}{|\Gamma|}.$$

Exercice Masse des courbes elliptiques sur $\mathbb{F}_q$ avec poids $= \dfrac{1}{\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(E)}$

$$\boxed{\text{Masse totale} = q}$$

j invariant modulaire $\in \mathbb{F}_q$ dét la courbe "à isom près",

Masse c. ell. à j donné $= 1$

Plus généralement :

Lemme. Soit $\mathcal{G} = \hat{\mathbb{Z}}$ soit A un gr fini où $\mathcal{G}$ opère, alors $H^1(\mathcal{G}, A)$ est un ensemble fini. À $\alpha \in H^1(\mathcal{G}, A)$ on associe un groupe tordu A_α ; soit $m_\alpha = |H^0(\mathcal{G}, A_\alpha)|$. Alors

$$\sum_{\alpha \in H^1(\mathcal{G}, A)} \frac{1}{m_\alpha} = 1 .$$

Ici $\hat{\mathcal{G}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$

A = gr d'autom d'une courbe elliptique E sur $\mathbb{F}_q$ d'inv. j donné (sur $\overline{\mathbb{F}_q}$)

$\alpha \in H^1(\mathcal{G}, A) \longleftrightarrow \mathbb{F}_q$-formes de E, soit E_α

$\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(E_\alpha) = H^0(\mathcal{G}, A_\alpha)$.

dém du lemme. A est un gr. fini muni d'un autom σ

$H^1(\mathcal{G}, A)$: cocycles mod équivalence

cocycle $\Leftrightarrow$ $a \in A$

$a \sim a'$ $\Leftrightarrow$ il existe $b \in A$ avec $a' = b\, a\, \sigma(b^{-1})$.

$\Leftrightarrow$ a et a' dans la même orbite de A agissant sur A via $a \overset{\rho_b}{\longmapsto} b\, a\, \sigma(b^{-1})$

orbits $= H^1(\mathcal{G}, A)$

stab $H^0(\mathcal{G}, A_\alpha) = \{ b \,/\, b a \sigma(b^{-1}) \}$

On applique formule précédente pour $E = A$, $\Gamma = A$.

Ceci s'appliquera en général à une variété de modules

$\mathcal{M}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ = masse des var. alg sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ à $\mathbb{F}_q$ isom pds avec $\frac{1}{|\mathrm{Aut}|}$.

pourvu que Aut d'un objet soit fini sur $\overline{\mathbb{F}}_q$.

<u>Exercice</u>. E courbes elliptiques supersingulières sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$$\boxed{\sum \frac{1}{|\mathrm{Aut}\, E|} = \frac{p-1}{24}}.$$

En pratique on prendra $\Omega = \prod_{v \in S} G(K_v) \times \prod_{v \notin S} G(\mathcal{O}_v)$

et $\Omega \backslash G(A_K)/G(K) \simeq$ ens de "classes" dans un "genre".

15.11.82. <u>les genres</u>

G gr. loc. compact unimodulaire

Γ discret

Ω s/g. ouvert

$\Omega\backslash G/\Gamma$ doubles classes

Si Ω est compact $\quad vol(G/\Gamma) = vol(\Omega) . \sum\limits_{\substack{x \text{ repr} \\ \text{doubl class}}} \frac{1}{|\Gamma_x|}$

$\Gamma_x = \Omega \cap x\Gamma x^{-1}$

G gr alg. linéaire, V ev sur corps global K, $\dim_K V = n$

et $G \longrightarrow GL(V)$ à noyau fini (le plus souvent nul).

S ens. fini de places de K ; $S \neq \emptyset$; $S \supset \Sigma_\infty$.

O_S = anneau des S-entiers de K

Réseau de V = O_S-module $L \subset V$ de tf et rang n ;

donc L est O_S-projectif et $V \simeq L \otimes_{O_S} K$.

$G(A_K)$ = gr des points adéliques de G

$$\Omega_L = \prod_{v \in S} G(K_v) \times \prod_{v \notin S} G_L(O_v)$$

où $G_L(O_v) = \{ g \in G(K_v)$ qui stabilisent $L_v = O_v \otimes_{O_S} L \}$ (i.e. $gL_v = L_v$)

si L est libre, $G_L(O_v)$ = élements de G à coefficients dans O_v

et déterminant inversible dans O_v.

Soit M réseau de V. On dit que M est dans la même

<u>G-classe</u> de L s'il existe $\gamma \in G(K)$ tel que $\gamma M = L$

On dit que M est dans le même G-genre que L si, pour tout $v \notin S$, il existe $g_v \in G(K_v)$ tel que $g_v(M_v) = L_v$.

Enoncé. L étant donné. Les classes du genre de L sont en correspondance bijective avec $\Omega_L \backslash G(A_K)/G(K)$.

$$M \in \text{genre de } L \longmapsto g = (\underset{v \in S}{1, \dots, 1}, \underset{v \notin S}{g_v})$$

Dem facile. Montrons la surjectivité. Soit g_v donné on veut $M_v = g_v^{-1} L_v$ presque partout $M_v = L_v$ L'existence de M résulte de l'existence de réseaux de localisés donnés ($S \neq \emptyset$).

Rem Si S est vide, on considère L fibré vectoriel de fibre générique V. Alors tout marche.

$$\Gamma_g = \Omega \cap g \Gamma g^{-1} \qquad g^{-1} \Gamma_g g = g^{-1} \Omega g \cap \Gamma$$

On note M_g le réseau tel que $(M_g)_v = g_v^{-1} L_v$. $\quad g \in G(A_K)$

Alors $g^{-1} \Gamma_g g = \{ \gamma \in G(K) ,\ \gamma M_g = M_g \}$

i.e $\gamma g_v^{-1} L_v = g_v^{-1} L_v$ pour tout $v \notin S$

i.e $g \gamma g^{-1} \in \Omega_L$

Variante

V esp vectoriel sur K $\qquad n = \dim V$

t_α ds tenseurs $\in \otimes^i V \otimes^j V'$, event puiss. sym.

Hyp $G \subset GL(V)$ $\quad G =$ fixateur ds tenseurs t_α.

Ex famille vide de t_α $\qquad GL_n$

f. alt non deg $\qquad Sp_n$

f. quadr. $\qquad O_n$

f. alt de degré n $\qquad SL_n$

En car 0 au moins tout groupe réductif peut-être ainsi défini.

On considère les couples (L, t) :

L module projectif sur $\mathcal{O}_S$ de rang n

$t = (t_\alpha)$ tenseurs de $K \otimes L$

tels que sur K $\quad (L, t) \simeq (V, t)$.

(L, t) et (L', t') sont dans la même <u>classe</u> s'ils sont isomorphes.

il existe un iso $L \xrightarrow{\sim} L'$ qui transporte $t \to t'$.

dans le même <u>genre</u> si vrai localement pour tout $v \notin S$,

$L_v \xrightarrow{\sim} L'_v$ qui transporte t en t'.

Classes du genre de $L \leftrightarrow$ doubles classes $\Omega_L \backslash G(A_K)/G(K)$

Remarque : On vérifie que si $G \to G/N$ est fini un point de $G/N(K_v)$ est entier si et seulement si le pt de $G(K_v)$ l'est.

Cas orthogonal

Ex. de calculs de volume (pour le gr. orthogonal).

$p \neq 2$ facile

$p = 2$ souvent faux dans la littérature (cf. Magnus 1938 et Cassels f. quad vrai si $n \leq 8$ et faux pour $n > 8$ $x_1^2 + \dots + x_n^2$

cf. Conway - Sloane (faux pour $n = 1$!)

Mesure invariante sur le gr. orthogonal (Siegel)

$K = \mathbb{Q}$ $L \simeq \mathbb{Z}^n$ muni d'une forme bil sym. à val dans $\mathbb{Q}$

[et disc $\neq 0$

le disc $\det(e_i . e_j)$ (e_i base) est bien défini.

Le cas le plus important est coefficient $\in \mathbb{Z}$ ("clan. entière")

ou coeff $\in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et valeurs de la f. quadr $\in \mathbb{Z}$. (ie coeff de la forme quadr $\in \mathbb{Z}$).

O_n : groupe orthogonal correspondant à f.

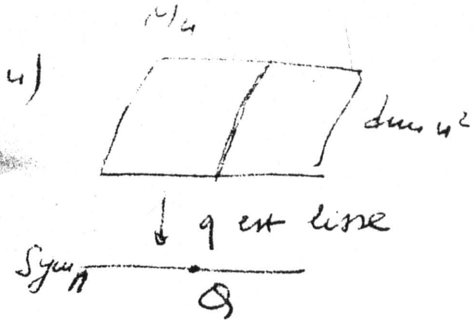
forme diff. invariante sur O_n : $e_1, \dots, e_n$ base de L

Q matrice sym. de la forme bilinéaire

$O_n = \{ A \in GL_n \; / \; {}^tA Q A = Q \}$ Siegel note $Q[A] = {}^tA Q A$

$M_n \xrightarrow{\ q\ } Sym_n$ (matrices sym de dim n)

$A \longmapsto {}^tAQA$



Alors $O_n = q^{-1}(Q)$.

On définit une forme différentielle sur la fibre $O_n = q^{-1}(Q)$ par division d'une forme sur M_n par une forme sur Sym_n.

Sur M_n $\quad \prod da_{ij} = \omega_1 \quad$ a_{ij} entrées des matrices

Sur Sym_n $\quad c_{ii}$ et c_{ij} $\ i<j \qquad \prod dc_{ii} \cdot \prod_{i<j} dc_{ij} = \omega_2$

$$\omega = \omega_1 / q^*\omega_2 .$$

Obtient une mesure au-dessus de chaque corps local qui donnera Tamagawa au facteur de convergence près.

Il faut vérifier que cette forme différentielle est invariante

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "A \mapsto gA"] \arrow[d, "q"'] & M_n \arrow[d, "q"] \\ Sym_n \arrow[r, equal] & Sym_n \end{tikzcd}$$

commute

$g \in O_n \quad {}^tg\, Q\, g = Q$

La forme diff sur M_n est invariante au signe près par $A \mapsto gA$ car $\det g = \pm 1$

donc aussi la forme définie plus haut est invariante à gauche

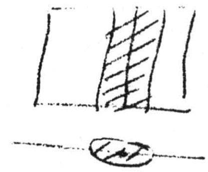
(donc à droite comme G est unimodulaire).

<u>Cas local</u>

p premier hyp coeff de $Q \in \mathbb{Z}_p$.

$G_L(\mathbb{Z}_p)$ = gr autom du $\mathbb{Z}_p$-réseau $\mathbb{Z}_p \otimes L = L_p$ muni de la forme Q

On veut calculer vol $G_L(\mathbb{Z}_p) = \delta_p$



On calcule = $\underline{\lim}$ $\dfrac{\text{vol voisinage tubulaire de la fibre}}{\text{vol disque}}$

δ_p = "densité p-adique" des solutions de l'équation ${}^tAQA = Q$

$$\delta_p = \lim_{n \to \infty} \delta_{p,m}$$

$$\boxed{\delta_{p,m} = \frac{\text{nbre de solutions mod } p^m \text{ de } {}^tAQA = Q \pmod{p^m}}{p^{m\, n(n-1)/2}}}$$

au dénominateur : nbre de points de l'espace affine de n dimension

Comme q est lisse $\delta_{p,m}$ est constant si m <u>est assez grand</u>.

<u>Rem</u> En général O_n n'est pas connexe, on a les deux composantes ici.

1er cas $p \neq 2$. $q_{ij} = e_i \cdot e_j \in \mathbb{Z}_p$ det q_{ij} unité p-adique

il y a « bonne réduction en p » $\delta_{p,m}$ est indépendant de $m \geq 1$

$$\delta_p = \frac{\text{ordre du g. orthogonal de la forme mod } p}{p^{n(n-1)/2}}$$

On calcule $SO_n(\mathbb{F}_p)$. On distingue

 n impair $= 2k+1$ $\boxed{\frac{1}{2}\delta_p = \prod_{i=1}^{k}(1-p^{-2i})}$

 n pair $= 2k$

On regarde les polynômes invariants par le g. de Weyl

Dans le 2ème cas g. de Weyl = permutation de k lettres

et chgts de signes en nbre pair

(1er cas = permutations + chgts de signe qq

polyn : $\sum x_i^2, \sum x_i^2 x_j^2, \dots$)

2e cas polyn $\sum x_i^2, \sum x_i^2 x_j^2, \dots \; x_1 \cdots x_k$ d'où

$$\boxed{\frac{1}{2}\delta_p = (1-\varepsilon p^{-k}) \prod_{i=1}^{k-1}(1-p^{-2i})}$$

ε signe venant des autom. du diagr.

cas déployé $\varepsilon = 1$ forme $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \dotplus \cdots \dotplus \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ disc $(-1)^k$

non déployé $\varepsilon = -1$

Soit $\Delta = \text{disc}.(-1)^k$ $\varepsilon = \left(\frac{\Delta}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta \text{ carré mod } p \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

Ref · calcul du nbre de pts ds groupes sur ls corps finis.

Rem de la forme $1+O\left(\frac{1}{p^2}\right)$ (sauf pour $n=2$) dbu convergence.

2°cas $p=2$ forme quadr. $x_1^2+\cdots+x_n^2$ $\quad Q=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$

On s'intéresse aux vecteurs de norme 1 $\quad x\cdot x=1$

$x=(x_1,\dots,x_n) \quad x_i\in\mathbb{Z}_2$

α_n = densité 2-adique ds solutions de $x\cdot x=1$

$$\alpha_n=\lim \alpha_{n,m} \qquad \alpha_{n,m}=\frac{\text{nbre de sol mod } 2^m \text{ de } \sum x_i^2=1 \text{ mod } 2^m}{2^{m(n-1)}}$$

il y a stabilité à partir de $m=3$ $\quad \alpha_n=\alpha_{n,3}$, ie mod 8

Rappel On regarde ls solutions de $f(x_1,\dots,x_n)=0$

Soient e et m_0 ds entiers avec $e\leq m_0$ et pour toute solution x de $f(x)\equiv 0 \mod \pi^{m_0}$ l'une ds dérivés partielles $f_i(x)$ est $\not\equiv 0 \mod \pi^e$. Alors il y a stabilité pour $m\geqslant m_0+e-1$.

Ici on peut prendre $e=2$, $m_0=2$. Il faut regarder mod 8

$$\alpha_n=\frac{\text{nbre de sol mod 8 de } \sum_{i=1}^{n} x_i^2\equiv 1 \text{ mod } 8}{8^{n-1}}$$

$$x^2 \text{ mod } 8=\begin{cases}0 & 2 \text{ fois}\\ 4 & 2 \text{ fois}\\ 8 & 4 \text{ fois}\end{cases}$$

142

On peut faire à la main ou avec les sommes de Gauss

ψ caractères de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $\qquad f(x) \equiv 0 \mod 8$

$$f \text{ car de } a = \frac{1}{8} \sum_{\psi} \overline{\psi(a)} \cdot \psi$$

$$\text{nbre de sol de } f(x) \equiv a = \frac{1}{8} \sum_{\psi} \overline{\psi(a)} \sum_{x} \psi(f(x))$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{\psi} \psi(a)^{-1} g(\psi)^4$$

$$g(\psi) = \sum_{x \bmod 8} \psi(x^2) \qquad \leftarrow f(x) = \sum x_i^2$$

$$g(\psi) = 2 + 2\psi(4) + 4\psi(1)$$

$$\psi(\alpha) = w^\alpha \quad \text{où } w^8 = 1$$

1) $\psi = 1 = w \Rightarrow g(\psi) = 8$ $\quad$ pour $\psi = 1$ $\quad$ d'où $\alpha_n = \dfrac{8^{4-1} +}{8^{4-1}} = 1 + \dots$

2) $w = -1$ $\quad \psi(1) = -1 \quad \psi(4) = 1 \quad g(\psi) = 0$

3) $w = i$ $\quad g(\psi) = 2 + 2w^4 + 4w = 4(1+i) = 4\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$

$-i$ $\quad$ ———— $\quad 4\sqrt{2} \cdot e^{-i\pi/4}$

4) w d'ordre 8 $\quad w^4 = -1 \qquad g(\psi) = 4w$

D'où

$$8 \text{ nbre de sol} = 8^n + \left\{ i^{-a} 4^n (1+i)^n + (-i)^{-a} 4^n (1-i)^n \right\}$$

$$+ \sum_{w \text{ ordre } 8} w^{-a} 4^n w^n$$

$$(1+i)^n = 2^{n/2} e^{ni\pi/4} \qquad z^{-a} = e^{\frac{\pi i}{2}(-a)}$$

$$8 \text{ nbre de sol} = 8^n + 2^{2n+n/2+1} \cos\frac{(n-2a)\pi}{4} + \begin{cases} 0 & \text{si } n \not\equiv a \pmod 4 \\ 4^{n+1}(-1)^{\frac{n-a}{4}} \end{cases}$$

$$\sum_{w \text{ ordre } 8} w^k = \begin{cases} 4 & k \equiv 0 \ (8) \\ -4 & k \equiv 4 \ (8) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le résultat dépend de n mod 8. pour $a = 1$:

$\{\text{nbre de sol mod } 8 \text{ de } \sum x_i^2 \equiv 1 \ (8)\} / 8^{n-1} = \alpha_n$

n mod 8	α_n
0	1
1	$1 + 2^{\frac{1-n}{2}} + 2^{2-n}$
2	$1 + 2^{1-\frac{n}{2}}$
3	$1 + 2^{\frac{1-n}{2}}$
4	1
5	$1 - 2^{\frac{1-n}{2}} - 2^{2-n} = (1-2^{\frac{3-n}{2}})(1+2^{\frac{1-n}{2}})$
6	$1 - 2^{1-\frac{n}{2}}$
7	$1 - 2^{\frac{1-n}{2}}$

Regardons $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$ sur les y tels que $\sum x_i y_i = 0$ $\quad (x\,x) = 1 \pmod 8$

On dira que x est de type I si cette forme est de type I i.e. prend une valeur $\not\equiv 0$ mod 2.

Critère x de type I $\Leftrightarrow$ l'une des coord de x est $\equiv 0 \ (2)$

dem mod 2 $\sum y_i^2 \equiv \sum y_i$ revient à $\sum x_i y_i \equiv 0 \ (2)$

si ts les $x_i \equiv 1 \ (2)$ c'est fichu sinon c'est bon. □

x de type II : ts les coord $\equiv 1 \ (2)$ Alors $\sum x_i^2 \equiv 1 + \cdots + 1 \equiv n \ (8)$
$= 1$

n'existe que si $n \equiv 1 \ (8)$

nbre de tels : 4^n

contribution à la densité : $\dfrac{4^n}{8^{n-1}} = 2^{2n-3n+3} = 2^{3-n}$

α'_n = densité du type I $= \alpha_n - 2^{3-n} = 1 + 2^{\frac{1-n}{2}} - 2^{2-n}$

$= \left(1 + 2^{\frac{3-n}{2}}\right)\left(1 - 2^{\frac{1-n}{2}}\right)$

Ex $n = 9$ $\alpha_9 = 137/2^7$ 137 est premier

$\alpha'_9 = 135/2^7 = 5.3^3/2^7$

On vérifie qu'il y a stabilité pour les vecteurs de type I.

Lemme Pour qu'un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mod 2^α $\alpha \geq 3$ soit tel que $x.x = 1$ et x de type I, il faut et il suffit qu'il soit transformé par un automorphisme mod 2^α de ~~[illegible]~~ forme bilinéaire $\sum x_i y_i$ du vecteur $(1, 0, \ldots, 0)$

i.e. ${}^tA.A \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$

deux $\Rightarrow$ clair.

$\Leftarrow$ par ici je n'y suis pas arrivé. On peut supposer $x_1 \equiv 0 \mod 2$

On explicite la symétrie qui transforme l'un en l'autre

$$u = e_1 - x \qquad \text{sym par rapport à } u$$

$$s_u(y) = y - 2\,\frac{(u\cdot y)}{(u\cdot u)}\,u \qquad \text{sur un corps}$$

$$= y - \lambda\,(u\cdot y)\,u \qquad \text{avec } \lambda\,(u\cdot u) = 2$$

sous cette forme c'est entier i.e a un sens sur un anneau

en particulier $\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z}$. Alors $y \longmapsto y - \lambda(u\cdot y)\,u$ est

un auto du produit scalaire et transforme u en $-u$,

et c'est involutif.

Ici $u = (1-x_1, -x_2, \ldots, -x_4)$

$$u\cdot u = 1 - 2x_1 + x_1^2 + \cdots + x_4^2 = 2(1-x_1)$$

on prend $\lambda = \dfrac{1}{1-x_1}$ $\qquad x_1 \equiv 0\ (2)$

Alors $s_u(e_1) = x$.

22.11.82

Table n mod 4	α'_n ~~[illegible]~~
$n = 4k-1$	$1 - \varepsilon\, 2^{1-2k}$
$n = 4k$	1
$= 4k+1$	$(1+\varepsilon\, 2^{1-2k})(1-\varepsilon\, 2^{-2k})$
$= 4k+2$	$(1+\varepsilon\, 2^{-2k})$

$\varepsilon = (-1)^k$

Si $\delta_2 = \mathrm{vol}\ O_n(\mathbb{Z}_2)$, ona $\boxed{\delta_2(n) = \alpha_1 \alpha'_2 \cdots \alpha'_n}$.

En effet on doit compter le nbre d'automs de $f = \sum x_i^2 \bmod 2^\nu$

$s(1,0,\ldots,0) = x$ $\quad x \cdot x = 1$. Si $n \geq 2$ x est de type I (forme orthogonale impaire). Donc.

nbre d'autom $=$ nbre de vecteurs de type I $\times$ nbre d'autom pour $n-1$ variables

$(O_n/O_{n-1} = S_{n-1})$. $\quad$ Rappel $\alpha_1 = 4$. (densité de $x^2=1 \bmod 8$)

Noter $\quad \alpha'_{4k-1} \cdots \alpha'_{4k+2} = (1-2^{2-4k})(1-2^{-4k})$.

Supposons $n \geq 3$ $\quad \delta_2 = 8 \cdot (\alpha'_3 \cdots \alpha'_6)(\alpha'_7 \cdots \alpha'_{10})(\cdots$ $\quad$ Donc

$$\delta_2 = 8 \prod (1-2^{-2j}) \cdot \begin{cases} 1 - \varepsilon_a 2^{1-2a} & n = 4a-1 \\ 1 - \varepsilon_a 2^{1-2a} & n = 4a \\ (1-2^{2-4a})(1-\varepsilon_a 2^{-2a}) & n = 4a+1 \\ (1-2^{2-4a})(1-2^{-4a}) & n = 4a+2 \end{cases}$$

où $\quad \varepsilon_a = (-1)^a$,

Pour $p \neq 2$, on a

$$\frac{1}{2}\delta_p = \prod_{1 \leq j \leq \left[\frac{n}{2}\right]} \zeta_p(2j)^{-1} \times \begin{cases} \zeta_p(n/2)^{-1} & n \equiv 0 \ (4) \\ L_p(n/2)^{-1} & n \equiv 2 \ (4) \\ \zeta_p\left(\frac{n-1}{2}\right)^{-1} & n \equiv 1 \ (2) \end{cases}$$

$$\zeta_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$$

L relative au caractère de conducteur 4.

Il y a lieu d'écrire δ_2 en terme de ζ_2 et de L_2.

On aura
$$\Omega = \Omega_\infty \times \Omega_f$$
$$\Omega_\infty = O_n(\mathbb{R})$$
$$\Omega_f = \prod_p O_n(\mathbb{Z}_p)$$
$$vol(\Omega_f) = \prod_p \left(\tfrac{1}{2}\delta_p\right).$$

On trouve :

$$vol(\Omega_f) = \frac{4}{\lambda_2} \prod_{1 \leq i < \frac{n}{2}} \zeta(2i)^{-1} \times \begin{cases} \zeta(n/2)^{-1} & n \equiv 0 \ (4) \\ L(n/2)^{-1} & n \equiv 2 \ (4) \\ 1 & n \equiv 1,3 \ (4) \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} 1 + \varepsilon\, 2^{1-2a} & n = 4a-1 \\ (1-2^{-2a})(1+\varepsilon\, 2^{1-2a}) & n = 4a \\ 1+\varepsilon\, 2^{-2a} & n = 4a+1 \\ 1 & n = 4a+2 \end{cases} \qquad \varepsilon = (-1)^a.$$

<u>Calcul de vol</u> (Ω_∞) :

1) Volume de la <u>boule unité</u> de $\mathbb{R}^n$ $= \pi^{n/2} / \Gamma(1+\frac{n}{2})$

cf Bourbaki, Intégration V, p 102 (pour $dx_1 \dots dx_n$).

2) Aire de S_{n-1} (pour l'élément d'aire invariant usuel mesure $dx_1 \dots dx_{n-1}$ sur le plan tangent) s'obtient en dérivant ce qui précède :

$$\frac{n\,\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} = 2\,\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

Mais la mesure à la Siegel est

$$\underset{\sum x_i^2}{\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}} \qquad \frac{dx_1 \dots dx_n}{df} = \tfrac{1}{2} \cdot \text{élément d'aire usuel}.$$

2') Aire de S_{n-1} (pour la mesure de Siegel) : $\pi^{n/2} / \Gamma(\frac{n}{2})$.

[C'est [illegible] $1/L_\infty(n/2)$?] .

On utilise $O_n / O_{n-1} = S_{n-1}$ et récurrence.

Lie $O_n = \{A,\ {}^tA + A = 0\} = \{(a_{ij}) / a_{ji} = -a_{ij}\}_{\text{etc}}$

a_{ij} coordonnées $i<j$

mesure invariante $= \prod_{i<j} da_{ij}$ à l'origine

C'est compatible avec la mesure standard de S_{n-1} :

$$\left(1+\varepsilon(a_{ij})\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}=(1,\varepsilon a_{21},\ldots,\varepsilon a_{n1})$$

D'où pour la mesure usuelle :

$$\mathrm{vol}_{nat}(O_n)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2\pi^{i/2}}{\Gamma(i/2)}$$

Ce n'est pas le volume de Siegel qui est lié à l'application

$A\mapsto {}^tA.A$ matrice sym mesure $\prod da_{ij}\,/\,d({}^tA.A)$

$$=\prod da_{ij}\Big/\prod_{i\leq j}d(a_{ij}+a_{ji})$$

$$=2^{-n}\prod_{i<j}da_{ij}\qquad\text{[car } 2da_{ii} \text{ pour } i=j\text{]}$$

D'où

$$\boxed{\delta_\infty=\prod_{i=1}^{n}\frac{\pi^{i/2}}{\Gamma(i/2)}}\qquad\qquad \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)}=1$$

On regroupe deux termes consécutifs grâce à la formule :

$$\frac{\pi^{x/2}}{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\pi^{x+1/2}}{\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)}=\frac{(2\pi)^x}{2\,\Gamma(x)}\qquad\text{(Legendre)}$$

d'où

$$\delta_\infty=\prod_{i=1}^{k}\frac{(2\pi)^{2i}}{2\,\Gamma(2i)}\qquad n=2k+1$$

$$=\prod_{i=1}^{k-1}\frac{(2\pi)^{2i}}{2\,\Gamma(2i)}\cdot\frac{\pi^{k}}{\Gamma(k)}\qquad n=2k.$$

$$\mathrm{vol}(\Omega_\infty) = \tfrac{1}{2}\, \rho_\infty$$

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \tfrac{1}{2}\, \rho_\infty \times \mathrm{vol}(\Omega_f)$$

D'après la formule d'Euler :

$$\zeta(2i) = \frac{|b_{2i}|}{2i} \cdot \frac{(2\pi)^{2i}}{2\,\Gamma(2i)}$$

$$L(m) = 2^{-1-m}\, |E_{m-1}|\, \frac{\pi^m}{\Gamma(m)}$$

où $$\frac{2}{e^z + e^{-z}} = \sum_{m=0}^{\infty} E_m\, z^m/m!$$

$E_0 = 1$, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$, $E_6 = -61$, $E_8 = -50521$ (Abramowitz)

On a $$L(1-m) = \pm \frac{E_m}{2} .$$

« Les Bernoullis ont des dénominateurs car ζ a un pôle, les nbres d'Euler n'en ont pas car L est holomorphe ».

Donc pour $n \geqslant 3$ (et même $n = 2$ en fait)

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} = \frac{\lambda_2}{2} \prod_{i=1}^{k} \frac{|b_{2i}|}{2i} \qquad n = 2k+1$$

$$= \frac{2^{k+\varepsilon}}{2^{2k+1}\, k!}\, |b_2 b_4 \cdots b_{2k}|$$

$n = 2k \quad \equiv 0 \quad (4)$

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} = \frac{(1-2^{-k})(1+\varepsilon 2^{1-k})}{2k!} \left| b_k \cdot b_2 b_4 \cdots b_{2k-2} \right|$$

$$\varepsilon = 1 \qquad n \equiv 0 \ (8)$$

$$-1 \qquad n \equiv 4 \ (8)$$

$n = 2k \qquad k$ impair

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} = \frac{1}{2^{1+2k}(k-1)!} \left| E_{k-1} \cdot b_2 \cdots b_{2k-2} \right|$$

Rappelons $\quad \tau \cdot \dfrac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} = M$

<u>Exemple</u> $\quad n = 3 \quad k = 1 \quad |b_2| = 1/6$

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} = \frac{2-1}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}$$

Admettons $\tau = 1$ pour O_n $(n \geq 2)$, d'où

$$M_{n=3} = \frac{1}{48} = \frac{1}{2^3 . 3!}$$

forme $x^2+y^2+z^2$ $\quad$ 6 vecteurs unitaires $\quad$ $\mathrm{Aut}\ (\mathbb{Z}/2)^n \cdot S_n$

$\dfrac{1}{48} = \dfrac{1}{\mathrm{Aut}(x^2+ [illegible])}$ $\quad$ Donc il n'y a pas d'autre forme [illegible]

Pour $n = 3$, c'est élémentaire : par la réduction d'Hermite, on montre que si f est une forme quad déf > 0 de disc Δ il existe $x \neq 0$ à coordonnées entières tel que

$$x.x \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} . \Delta^{1/n} .$$

Si $n \leq 5$ $\quad \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \leq \frac{16}{9} \leq 2$ $\quad$ d'où $x.x = 1$

et récurrence : les formes quadratiques du genre de Σx_i^2 sont isomorphes à Σx_i^2 si $n \leq 5$.

Inversement on en déduit $\tau = 1$ pour O_3 et la forme standard $x^2+y^2+z^2$

Rem. f quad $f(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{Z}$.

Rem Siegel utilise ce calcul pour $n=3$ dans la dem générale par réc de $\tau = 1$

Table (Conway - Sloane)

$n = 1$	$1/2$
2	$1/8$
3	$1/48$
.	
.	
8	$1/10321920 = 1/2^8 . 8!$

donc pour $n \leq 8$ il n'y a pas d'autre forme quadratique dans le genre que la forme standard.

$$n = 9 \qquad \frac{17}{2786918400} = \frac{16+1}{2^9 . 2.3.4} \; \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{30}$$

$$= \frac{17}{2^{16}.3^5.5^2.7}$$

ce n'est pas $\frac{1}{2^n n!}$. En effet il y a 2 formes "évidentes".

$$\sum_{i=1}^{9} x_i^2 \qquad \text{Aut} \quad 2^9 . 9!$$

$$x_9^2 + \Phi(x_1, \dots, x_8) \quad , \; \Phi \text{ forme paire attachée à } E_8 .$$

Aut : $2.|W(E_8)|$

$$\frac{1}{2^9.9!} + \frac{1}{2|W(E_8)|} = \frac{1}{2^{16}.3^4.5.7} + \frac{1}{2^{15}.3^5.5^2.7} = \frac{3.5+2}{2^{16}.3^5.5^2.7}$$

donc il n'y a pas d'autre forme quadratique dans ce genre.

Conway-Sloane ont fait la liste des formes quadratiques du type I pour $n \leq 23$.

<u>Remarque</u> Considérons les formes quadr. déf >0 de disc. 1 (cf cours d'arithm chap 5). Il y en a de deux types :

I f prend au moins une val. impaire (ie l'un des a_{ii} est impair)

II val. pairs $n \equiv 0 \ (8)$

Celles du type I forment un genre (localmt $\sim \sum x_i^2$) et celles du type II un autre.

$\Updownarrow$

c'est ennuyeux en 2.

<u>Déf</u> On suppose $n \geq 5$. Sur les p-adiques la forme représente 0

donc $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus g_{n-2}$

et loc^t en 2-adique : $x_1^2 + h_{n-1}$

<u>Théorème</u> Si $a \in \mathbb{Q}$ est représenté par une forme f sur $\mathbb{R}$ et les $\mathbb{Z}_p$, alors il est représenté sur $\mathbb{Z}$ par une forme f' du même genre que f.

(Ex $x^2 + xy + 6y^2$
$2x^2 + xy + 3y^2$ même genre.)

On en déduit qu'il y a dans le genre une forme qui représente 1 avec un vecteur de type I. $f' = x^2 + f_{n-1}$.

<u>Rem</u> (Oesterlé) On peut peut être raisonner localement sur $\mathbb{Q}_i$.

Pour $n = 2k+1$

$$\underline{M} = \frac{1+\varepsilon 2^{-k}}{2} \prod_{i=1}^{k} |\zeta(1-2i)|$$

d'où par récurrence sur k $\zeta(1-2i) \in \mathbb{Q}$! (bien connu de Q)

Mais sur un corps de nbres, on aurait pu faire la même chose il y a quelques pbs embêtants mais le facteur en une telle place finie est un nombre rationnel. Sur un corps totalement réel on trouverait :

$$\underline{M} = \tau \times \prod_{i=1}^{k} \zeta_K(1-2i) \times (\text{nbre rat})$$

Siegel a montré $\tau = 1$, donc $\boxed{\zeta_K(1-2i) \in \mathbb{Q} \quad (i \geq 1)}$

C'est la dém de Siegel

Les groupes orthogonaux pairs font intervenir une fonction L, d'où par ŝ argument :

$$L(-2i, \chi) \in \mathbb{Q} \quad \text{où } \chi \text{ est un caract quadr tot imag de } K$$

Maintenant on dispose de deux types de dém :

1) formes modulaires $\zeta(1-2i)$ = terme cst d'un dév à terme rationnel.

2) Shintani.

La méthode de Siegel donne une information sur les dénominateurs possibles.

Ex $n = 3$ $\quad M = (\text{facteur correctif}) \times \zeta(-1)$

$$= \sum \frac{1}{|\mathrm{Aut}\, L|}$$

L est un réseau de dim 3 $\quad \mathrm{Aut}\, L = $ s/g fini de $GL(3, \mathbb{Z})$

les seuls premiers qui peuvent intervenir sont 2 et 3.

Rem (Igusa) Dans la formule de masse pour le type I, la puissance de 2 en dénominateur, soit 2^α, est la plus grande puissance de 2 divisant l'ordre d'un $\mathrm{Aut}\, L$.

Question. Y-a-t-il un seul réseau L dont le $\mathrm{Aut}\, L$ est divisible par 2^α ? (c'est alors forcément $\sum x_i^2$).

Il y a une formule de masse pour les formes de type II ($n \equiv 0\ (8)$)

Mais on peut montrer a priori

$$M_{\mathrm{I}} / M_{\mathrm{II}} = c/2$$

où $c = $ nbre de vecteurs isotropes $\neq 0$ de $f : x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n \pmod 2$

$$= (2^k - 1)(2^{k-1} + 1)$$

En effet les deux genres correspondent à la même forme sur le corps. $M_I = \tau/(\text{vol}\,\Omega_I)$ dans Ω_I et Ω_{II} commensurable

$M_{II} = \tau/(\text{vol}\,\Omega_{II})$

$$M_I/M_{II} = \text{vol}(\Omega_{II})/\text{vol}(\Omega_I).$$

Ici à L de type II et x isotrope dans $L/2L$ $(x \neq 0)$ on associe de façon unique un réseau L_x de type I

De plus tout réseau de type I est obtenu ainsi de deux façons.

Démonstration du lemme de stabilité

$\cdot\ f(x) = f(x_1, \dots, x_N)$ à coeff dans un anneau de val. discrète à corps résiduel fini à q éléments, unif π

Soit $x_0 \bmod \pi^{h_0}$ tel que $f(x_0) \equiv 0 \bmod \pi^{h_0}$

et que l'une des $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \not\equiv 0 \bmod \pi^e$ $e \leq h_0$.

Alors les sol de $f(x) \equiv 0\ (\pi^n)$ $n \geq h_0 + e - 1$ $x \equiv x_0\ (\pi^{h_0})$

Alors le nbre de sol mod π^n est de la forme cste $\times\ q^{n(N-1)}$

$f = a_0 + a_1 x + \cdot$ ops $x_0 = (0, \cdot, 0)$

$a_1 x = a_{11} x_1 + \quad + a_{1N} x_N$

$v(a_{11}) = \varepsilon$ $\varepsilon < e \leq h_0$

$v(a_{1i}) \geq \varepsilon$

$x = \pi^{h_0} t$ $a_0 + \underbrace{a_1 \pi^{h_0}}_{h_0 + \varepsilon} t + \cdot$ div par π^{2h_0}

si $a_0 \not\equiv 0 \bmod \pi^{h_0 + \varepsilon}$ pas de sol $\to$ stable.

si $a_0 = \pi^{h_0 + \varepsilon} b_0$ $f = \pi^{h_0 + \varepsilon}\left(b_0 + \frac{a_1}{\pi^\varepsilon} t + \cdot \qquad \right)$

coeff div par π

$f \equiv 0 \quad (\pi^4)$

$f/\pi^{k_0+2} \equiv 0 \quad (\pi^{4-k_0+\varepsilon})$ maintenant ça a bonne réduction

stabilité évidente.

Ref Igusa : forms of higher degree p. 110.

29.11.82.

Rabiots :

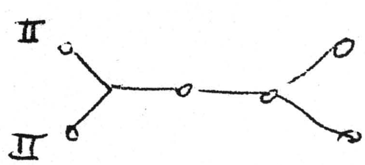
1) La théorie de Bruhat-Tits explique les calculs de volume.

le type II correspond à certains type de sommets de l'immeuble

le type I correspond à milieu d'arête entre deux tels sommets

d'où type I → 2 type II associé

pour à partir du type II choisir un type I il faut choisir un vecteur isotrope de la forme quadratique (quadrique).



2) Ch. Ko. marche pour type I Acta Arithm. (1939)

lemme 2. la formule est correcte, avec référence à Magnus signalant l'inexactitude de Magnus et pas de démo.

La formule de Siegel

Préliminaires

<u>Lemme</u> (13) a_{ij} sym. $\in \mathbb{Z}_p$

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad t \in \mathbb{Z}_p \neq 0$$

La densité des solutions de $f(x) \equiv t \pmod{p^\alpha}$ est stable pour $\alpha \geq 1 + 2\, v_p(2t)$.

<u>dém</u>. Cas particulier de l'énoncé général de stabilité

$f(x) - t \equiv 0 \,(\pi^{n_0}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$ pas div par π^e si $n_0 \geq e$ et alors stabilité à partir de $n_0 + e - 1$

$e = n_0 = v_p(2t) + 1$

$$2f = \sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 2t \pmod{p^\alpha}$$

donc l'un des $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ n'est pas divisible par p^e. ∎

<u>Lemme 16</u> (Siegel v. I, p. 343 – 7³). Si $p \neq 2$, $\det(a_{ij}) = \Delta$ inversible dans $\mathbb{Z}_p$, $t = u p^l$ $l \geq 0$, u unité p-adique

$$\delta_\alpha(t) = \frac{1}{p^{\alpha(n-1)}} \{\text{nbre de sol mod } p^\alpha \text{ de } f(x) \equiv t \mod p^\alpha\}.$$

Alors a) on a stabilité pour $\alpha > l$

b) soit $\delta(t)$ la valeur stable $\delta_x(t)$ pour x grand

$$\varepsilon = \pm 1 = \left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\Delta}{p}\right) \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

$$\varepsilon = \pm 1 = \left(\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\Delta u}{p}\right) \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

$$\delta(t) = (1 - \varepsilon p^{-\frac{n}{2}})(1 + \varepsilon r + \dots + \varepsilon^{\ell} r^{\ell}) \qquad n \text{ pair}$$

$$\delta(t) = (1 - p^{1-n})(1 + r + \quad + r^{\frac{\ell-1}{2}}) \qquad n \text{ impair } \ell \text{ impair}$$

$$= (1 - p^{1-n})\left(1 + r + \cdot\ + r^{\frac{\ell}{2}-1} + \frac{r^{\ell/2}}{1 - \varepsilon p^{\frac{1-n}{2}}}\right) \quad n \text{ impair } \ell \text{ pair}$$

où $\quad r = p^{1-\frac{n}{2}} \quad n$ pair

$\qquad\quad p^{2-n} \quad n$ impair

pour $\ell = 0 \qquad \delta(t) = \dfrac{1 - p^{1-n}}{1 - \varepsilon p^{\frac{1-n}{2}}} = 1 + \varepsilon p^{\frac{1-n}{2}} \qquad n$ impair.

<u>Corollaire 1</u>. t unité $\Rightarrow \delta(t) = 1 + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$ dès que $n \geqslant \cancel{4}$.

<u>Corollaire 2</u>. $\delta(t) = 1 + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$ pour $n \geqslant 5$ (avec un O "absolu")

On pourrait probablement le déduire de la méthode d'Igusa, en désingularisant.

dém du lemme

1) cas $l=0$ (t unité) stabilité pour $\alpha \geq 1$

A calculer $\delta_1(t)$ sol de $f(x)=t$ $t\neq 0$ dans $\mathbb{F}_p$

= nbre de point sur une quadrique affine / esp aff de n dim

$$\begin{cases} 1 - \varepsilon p^{-n/2} & n \text{ pair} \\ 1 + \varepsilon p^{\frac{1-n}{2}} & n \text{ impair} \end{cases}$$

Ecrire une quadrique comme espace homogène du groupe orthogonal

un groupe orthogonal d'ordre pair fait intervenir un signe, donc

il y en a tjs 1 soit pour le grand groupe soit pour le petit.

On peut aussi utiliser la cohomologie des quadriques.

2) densité $\delta_1(0)$ des vecteurs isotropes

On compte les autres densité totale $= p = p^n/p^{n-1}$

$$\delta_1(0) = p - \sum_{t\neq 0} \delta_1(t)$$

$$= p - (p-1)(1-\varepsilon p^{-\frac{n}{2}}) \qquad n \text{ pair}$$

$$= 1 + (p-1)\,\varepsilon p^{-n/2}$$

$$= 1 - \varepsilon p^{-n/2} + \varepsilon p^{1-n/2}$$

$$\delta_1(0) = p-(p-1) = 1 \qquad n \text{ impair}$$

(les signes dépendent de t et se compensent) densité $\delta'_1(0)$ des vecteurs isotropes non nuls

$$\delta'_1(0) = \delta_1(0) - p^{1-n} .$$

$$\delta'_1(0) = \left(1 - \varepsilon p^{-\frac{n}{2}}\right)\left(1 + \varepsilon p^{1-\frac{n}{2}}\right) \qquad n \text{ pair}$$

$$1 - p^{1-n} \qquad n \text{ impair}.$$

3) densité de $f(x) \equiv u p^{\ell} \pmod{p^{\alpha}}$ $\alpha > \ell > 0$.

Nous dirons x primitif si $p \nmid x$

imprimitif sinon

Si x primitif l'un des $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est inversible, donc

$\delta_{\alpha}^{\text{prim}}(t)$ est stable pour $\alpha = 1$. Et pour $\alpha = 1$ l'équation

est $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ $\delta_{\alpha}^{\text{prim}}(t) = \delta'_1(0)$.

Si $x = py$ $\quad p^2 f(y) \equiv u p^{\ell} \pmod{p^{\alpha}}$

$$\delta_{\alpha}^{\text{non pr}}(t) = 0 \quad \text{si } \ell = 1$$

sinon on $f(y) \equiv u p^{\ell - 2} \bmod p^{\alpha - 2}$ d'où récurrence.

On trouve :

$$\delta_{\alpha}(t) = \delta'_1(0) + p^{2-n} \delta_{\alpha - 2}(t/p^2)$$

On démontre les formules par récurrence sur ℓ.

Remarque Le calcul marche pour un anneau de val discrète à corps résiduel $\mathbb{F}_q$ (car $\neq 2$) : remplacer p par q et $\left(\frac{x}{p}\right)$ par "$x^{\frac{q-1}{2}}$" $\in \{\pm 1\}$.

Ref Milnor - Husemoller . Formes quadratiques.

Siegel utilise des sommes de Gauss.

Préliminaire adélique

La dem de Siegel a deux parties : I. "Arithm" II "Analyse"

I. On montre que la formule est vraie à un facteur près (le nbre de Tamagawa) ça se voit mieux adéliquement.

II. On montre que ce facteur $= 1$ par des eval. asymptotiques.

Le jeu des 2 groupes :

G, g groupes loc. compacts (dénombrable à l'infini) unimodulaires et (ou unimodularisé) : mesure de Haar choisies. $G \supset g$

$\Gamma \supset \gamma$ des s/g discrets $\Gamma \subset G$, $\gamma \subset g$ avec $\mathrm{vol}(g/\gamma) < \infty$ (ceci $\Rightarrow g$ unimodulaire) $\Gamma \cap g = \gamma$

$Y = G/g \supset \Gamma/\gamma$ muni de la mesure dG/dg

G et g seront adéliques, Γ et γ les pts rationnels.

<u>Lemme</u> (Weil Adeles and alg groups - p. 29.30) Soit φ fonction ≥ 0 sommable sur $Y = G/g$. Alors

$$\mathrm{vol}(g/\gamma)\int_Y \varphi(y)\,dy = \int_{t\in G/\Gamma} \Big\{\sum_{y\in\Gamma/\gamma} \varphi(ty)\Big\}\,dt$$

<u>dem</u>

$$\begin{array}{c} G/\gamma \\ \downarrow \\ G/g \end{array} \quad \text{fibre } g/\gamma \quad \text{de vol fini}$$

$$\mathrm{vol}(g/\gamma)\int_Y \varphi(y)\,dy = \int_{G/\gamma} \varphi(x)\,dx \,. \qquad \begin{array}{ccc} & G/\gamma & \\ \swarrow & & \searrow \\ G/g & & G/\Gamma. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} G/\gamma \\ \downarrow \\ G/\Gamma \end{array}$$ prendre Σ sur les fibres et intégrer sur la base. ▣

<u>Remarque</u> Si φ est continue à support compact, $\sum_{y\in\Gamma/\gamma} \varphi(ty)$ est fini.

En effet la formule entraîne que Γ/γ est discret dans G/g. Cela vient de $\mathrm{vol}(g/\gamma)$ fini.

Soit $\Omega \subset G$ un s/g <u>ouvert</u> <u>compact</u>. (ça ne s'appliquera qu'aux formes définies, sinon il faut prendre Ω ouvert.) tel que φ soit invariante par Ω $\quad \varphi(\omega y) = \varphi(y) \quad \omega\in\Omega, y\in Y$

Soit I un syst de représentants des doubles classes dans $\Omega\backslash G/\Gamma$.

$$G = \coprod_{x \in I} \Omega x \Gamma \qquad \Gamma_x = \Omega \cap x \Gamma x^{-1} .$$

$$\mathrm{vol}(G/\Gamma) = \mathrm{vol}(\Omega) \sum_{x \in I} \frac{1}{|\Gamma_x|} .$$

Soit
$$N_x(\varphi) = \sum_{y \in \Gamma/\gamma} \varphi(xy) .$$

$$N(\varphi) = \left(\sum_{x \in I} N_x(\varphi)/|\Gamma_x| \right) \Big/ \left(\sum 1/|\Gamma_x| \right) .$$

Formule

$$\boxed{N(\varphi) = \frac{\mathrm{vol}(g/\gamma)}{\mathrm{vol}(G/\Gamma)} \int_{\varphi} \varphi(y)\, dy}$$

dém. D'après le lemme, il faut montrer

$$\int_{G/\Gamma} \left\{ \sum_{y \in \Gamma/\gamma} \varphi(ty) \right\} dt = \mathrm{vol}(G/\Gamma) . N(\varphi) .$$

G/Γ est réunion des orbites de Ω

$$G/\Gamma = \coprod_{x \in I} (\Omega/\Gamma_x).x$$

$$\int_{(\Omega/\Gamma_x).x} \left\{ \sum_{y \in \Gamma/\gamma} \varphi(ty) \right\} dt = \mathrm{vol}(\Omega/\Gamma_x) . \left\{ \sum_{y \in \Gamma/\gamma} \varphi(xy) \right\} = \frac{\mathrm{vol}(\Omega)}{|\Gamma_x|} . N_x(\varphi)$$

$t = \omega . x \quad \omega \in \Omega/\Gamma_x \qquad \varphi \ \Omega$ invariante.

de plus $\quad \mathrm{vol}(G/\Gamma) = \mathrm{vol}(\Omega) \cdot \sum_{x \in I} \frac{1}{|\Gamma_x|}$, d'où la formule $\square$

Formes quadratiques positives non dégénérées sur $\mathbb{Q}$

(a_{ij}) sym. $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ $\det \neq 0$ et > 0.

On s'intéresse aux <u>représentations d'une forme par une autre</u>.

M réseau de rang m muni d'une telle forme (matrice $S)_{m \times m}$

L réseau de rang $n \leq m$ muni d'une telle forme (matrice $T)_{n \times n}$

Une "représentation de L par M" est un plongement $y : L \to M$ compatible avec les formes. (matrice $m \times n$)

i.e $\boxed{T = S[y] = {}^t y S y}$. $\qquad m \geq n \geq 1$.

<u>Cas intéressants</u> • $S = T$ $m = n$ automorphismes de S

• $n = 1$ $T = (t)$ y : vecteur à m composantes.

$S[y] = t$ s'écrit $\sum a_{ij} y_i y_j = t$ représentation d'un entier par une forme quadratique.

On note $N(S,T) = N(L,M)$ = nombre des $y : L \to M$.

La formule donne la moyenne de ces valeurs sur les classes d'un genre.

$M_x \ (x \in I)$ représentants du genre de M

$\Gamma_x \simeq \mathrm{Aut}(M_x)$

masse du genre de $M = \sum \frac{1}{|\Gamma_x|}$

$$\boxed{\tilde{N}(L,M) = \frac{\sum_{x\in I} N(L,M_x)/|\Gamma_x|}{\sum 1/|\Gamma_x|}}.$$

Si $L = M$, l'un des $M_x \simeq M$ $\quad N(L,M_x) \neq 0$ si $M_x \not\simeq L$ donc

$\tilde{N}(L,M) = \frac{1}{\text{masse du genre}}$. On aura donc une formule pour la masse du genre.

Posons $c_n = 1$ pour tout $n \geqslant 0$ sauf $n = 1$ $\quad c_1 = \frac{1}{2}$

(on verra que $c_n = \tau(O_n)$).

<u>Th (Siegel)</u> $$\boxed{\tilde{N}(L,M) = \frac{c_{m-n}}{c_m} \prod_{p,\infty} \delta_p(L,M)} \quad . \qquad m \geqslant 1$$

$p\nearrow$

$\delta_p(L,M)$ = densité en p des repr de L dans M.

$\frac{c_{m-n}}{c_m} = 1$ sauf si $\quad m = 1 = n \quad \boxed{2}$

$\qquad m \geqslant 2, \ n = m-1 \quad \boxed{1/2}$

Le produit infini est convergent en $\nearrow$, parfois abs convergent.

$p \neq \infty$: On considère les y à coeff dans $\mathbb{Z}_p$ tels que $S[y] = T$

et on prend la densité p-adique des solutions de cette équation

$$\delta_p(S,T) = \lambda \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\text{nbre des } y \bmod p^\alpha \quad S[y] \equiv T \ (p^\alpha)}{p^{\alpha\left(\frac{m(m-1)}{2} - \frac{(m-n)(m-n-1)}{2}\right)}}$$

$\lambda = 1 /$ nbre de composantes connexes de la variété des y.

$= 1$ sauf cas exceptionnel $\quad m = n \geq 1 \quad$ (gr. orthogonal)

∞ : analogue $\qquad y \longmapsto S[y] = {}^t y S y$

$$\mathrm{Aff}^{mn} \xrightarrow{S} \mathrm{Sym}^m \left(= \mathrm{Aff}^{\frac{m(m+1)}{2}}\right)$$

T

on prend: $\boxed{\lim_{U} \frac{\mathrm{vol}\, S^{-1}(U)}{\mathrm{vol}(U)} \cdot \lambda = \delta_\infty}$ $\qquad$ vol usuels.

Pour les formes différentielles $\quad \omega = \prod dy_{ij} \Big/ \prod_{i \leq j} da_{ij} \quad$ sur la fibre

$$\delta_p = \lambda \int \|\omega\|_p \quad . \quad \delta_\infty = \lambda \int \|\omega\|_\infty .$$

<u>Th</u>. <u>Si</u>, <u>pour tout</u> p <u>et pour</u> $\mathbb{R}$, <u>il existe un plongement</u> $\mathbb{Z}_p \otimes L \to \mathbb{Z}_p \otimes M$ <u>et</u> $\mathbb{R} \otimes L \to \mathbb{R} \otimes M$ (automatique ici car déf >0), <u>alors il existe</u> <u>un</u> M_x <u>dans le genre de</u> M <u>et un plongement</u> $L \to M_x$.

dém. Par les th. standards sur les f. quad. sur $\mathbb{Q}$, il existe un plongement $j_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}\otimes L \to \mathbb{Q}\otimes M$.
(dans Weil on n'a pas besoin de savoir ça d'avance).

$$L \underset{j_{\mathbb{Q}}}{\subset} V = \mathbb{Q}\otimes M$$

On bouge M dans son genre. Pour $g = (g_p) \in O(A)$ adélique on attache le réseau M_g tel que $(M_g)_p = g_p \cdot M_p$.

$M_g \in$ genre de M et on les trouve tous ainsi.

Or pour tout p $j_p : L_p \to M_p$ existe.

Soit $S = \{p \,/\, L_p \not\subset M_p\}$ ens. fini. Pour $p \in S$, on dispose de j_p; par le th de Witt sur $\mathbb{Q}_p$, j_p se prolonge en un automorphisme g_p^{-1} de $\mathbb{Q}_p\otimes M$. Alors $g_p M_p \supset L_p$ car $M_p \supset g_p^{-1} L_p = j_p L_p$.

Il reste à jouer le jeu des deux groupes:

$G = O_m(A)$ $\qquad \Omega = O_m(\mathbb{R}) \times \prod_p O_m(\mathbb{Z}_p)$
relatif au réseau M

$g = O_{m-n}(A)$

$\Gamma = O_m(\mathbb{Q})$ $\qquad Y = G/g$ = espace des y (adéliques) sol de $S[y] = T$

$\gamma = O_{m-n}(\mathbb{Q})$ $\qquad \varphi$ = fonction caract: 1 si $L_p \subset M_p$ pour tout p
0 sinon.

5.12.82. Démonstration (par Siegel) de la formule de Siegel

/$\mathbb{Q}$ f. quadratiques positives non dégénérées.

L, M modules quadratiques rangs $n \leq m$

$N(L,M)$ = nbre de $g : L \to M$ (comp avec f. quad.)

$\tilde{N}(L,M)$ = moyenne des $N(L, M_x)$ $M_x \in$ genre de M.

Formule "cas général"

$(S_{m,n})$
$$\tilde{N}(L,M) = \prod_{p,\infty} \delta_p(L,M)$$

plus précisément
$$\tilde{N}(L,M) = \frac{c_{m-n}}{c_n} \prod_{p,\infty} \delta_p(L,M)$$

$c_n = 1$ si $n \neq 1$

$= 1/2$ si $n = 1$

1ère étape
$$\boxed{\tilde{N}(L,M) = \frac{\tau(O_W)}{\tau(O_V)} \prod_{p,\infty} \delta_p(L,M)} \quad (*)$$

où $V = \mathbb{Q} \otimes M$, O_V = gr orthogonal de V, τ = Tamagawa

On suppose : il existe un plongement $L \to M_x$ i.e. $\tilde{N}(L,M) \neq 0$.

(sinon on a vu que l'un de $\delta_p(L,M) = 0$).

Soit $\mathbb{Q} \otimes L \to \mathbb{Q} \otimes M$ choisi, W orthogonal de $\mathbb{Q} \otimes L$ dans V,

O_W groupe orthogonal de W.

On donne $G, g, \Gamma, \gamma, \Omega, \varphi$

G = gr. adélique de O_V

g = gr. adélique de O_W (pour $y_0 : L \to M$ fixé, quitte à changer M en M_x)

La variété des $y : L \to M$ est un espace homogène $O_V/O_W = Y$.

G/g = points adéliques de Y. (vrai car il y a des sections locales pour la fibration) [de Witt]

$$\Omega = O_V(\mathbb{R}) \times \prod_p O_V(\mathbb{Z}_p)$$

stab. du réseau $\mathbb{Z}_p \otimes M$.

φ fonction sur Y

$\varphi((y_p)) = 1$ ssi $y_p L_p \subset M_p$; en d'autres termes

$\varphi(y) = 1$ si y est un « pour entier »

0 sinon.

Γ, γ points rationnels sur $\mathbb{Q}$ de O_V et O_W.

$$N_x(\varphi) = N(L, M_x) = \sum_{\substack{y \in \Gamma/\gamma \\ \| \\ Y(\mathbb{Q})}} \varphi(xy)$$

= nbre des $y : \mathbb{Q} \otimes L \to \mathbb{Q} \otimes M$ tels que $x_p y_p L_p \subset M_p$, i.e. $y_p L_p \subset x_p^{-1} M_p$

= nbre des y appliquant L dans M_x.

Fin de la traduction et de la 1ère étape.

2^e étape A démontrer (S_n) $\tau(O_V) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dim V = 1 \\ 1/2 & \text{si } \dim V \neq 1 \end{cases}$ $n = \dim V$

Soit $T_n = \{S_{n-1} \Rightarrow S_n\}$. S_1 est trivial $\tau(O_1) = 1$

Pour démontrer T_n, on applique (*) avec $\dim L = 1$, $\dim M = n$

$L \simeq \mathbb{Z}$ f à 1 variable tx^2.

$N(t, M)$ = nbre de $x \in M$ tq $x \cdot x = t$

$\tilde{N}(t, M)$ = moyenne de $N(t, M)$

La formule (*) s'écrit :

$$\boxed{\tilde{N}(t, M) = c \prod_{p, \infty} \delta_p(t, M)}$$

avec, $c = \frac{1}{\tau(O_V)}$ si $n \neq 2$

$= \frac{1}{2\tau(O_V)}$ si $n = 2$

Avec c a priori dépendant de O_V.

<u>Idée</u> : la formule en sommant sur t donne le nbre de points dans une boule donc asympt. le volume de la boule.

Il faut contrôler la variation de $\delta_p(t, M)$.

<u>Construction auxiliaire</u> Δ = disc. M

On choisit $t_0 > 0$, représenté par M i.e. $N(t_0, M) > 0$.

On choisit un entier $P > 0$ divisible par $\Delta(2t_0)^3$. On prendra $t \equiv t_0 \pmod{P}$. Alors :

- si $p \nmid P$, avec $p \neq 2$, $p \nmid \Delta$; cas du lemme 15 de Siegel (p. 343) donne une formule explicite pour $\delta_p(t)$.

- si $p \mid P$ et si e_p est l'exposant de p dans P, $\delta_p(t)$ est "stable" pour les p^α, $\alpha \geq e$ (lemme 13 de Siegel), d'où

$$\prod_{p \mid P} \delta_p(t) = \prod_{p \mid P} \delta_p(t_0) = \frac{\text{nbre de sol de } x.x \equiv t_0 \mod P}{P^{n-1}} =: \frac{\beta(P)}{P^{n-1}}$$

$(n \geq 2)$

$\delta_\infty(t, M)$:

où ~~ω_n = volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$~~ $= \pi^{n/2} \Gamma(1+\frac{n}{2})$

vol des x, $x.x \leq u$ (u réel >0) $= \omega_n \Delta^{-1/2} u^{n/2}$

(le vérifier pour $\Delta = 1$, $u = 1$ $\mapsto$ sphère de rayon 1 ; et homogénéité)

$$\delta_\infty(t, M) = \frac{d}{dt}\left(\omega_n \Delta^{-1/2} t^{n/2}\right)$$

$$= \frac{n}{2} \omega_n \Delta^{-1/2} t^{n/2 - 1}$$

On s'intéresse aux représentations de $t \equiv t_0 \pmod P$ dans le réseau M. Soit $I \subset M/PM$ l'ens des x, $x.x \equiv t_0 \mod P$

$|I| = \beta(P)$. Remontons I en une partie de M.

Un x t.q. $x x = t$ ($\equiv t_0 \mod P$) est de la forme $x_0 + Py$, $x_0 \in I$, $y \in M$,

i.e. $x \in x_0 + PM$.

Considérons :

$$f_M(T) = \sum_{\substack{t \leq T \\ t \equiv t_0 \ (\mathrm{mod}\ P)}} N(t, M) \qquad \text{et } \tilde{f} = \sum_{\substack{t \leq T \\ t \equiv t_0 \ \mathrm{mod}\ P}} \tilde{N} \qquad T \nearrow \infty$$

On va montrer $\sim$ cste $T^{n/2}$ de deux façons.

1°) Directement :

$$f_M(T) = \sum_{x_0 \in I} \sum_{\substack{x \in x_0 + PM \\ x.x \leq T}} 1 = |I| . \frac{\omega_n \Delta^{-1/2} T^{n/2}}{P^n} + o(T^{n/2})$$

$$\tilde{f} \sim \prod_{p \mid P} \delta_p \times \omega_n \Delta^{-1/2} P^{-1} T^{n/2} \qquad T \to \infty$$

car $|I| = P^{n-1} \cdot \prod_{p \mid P} \delta_p(t)$

2°) $$\tilde{f} = c \sum_{\substack{t \equiv t_0 (\mathrm{mod}\ P) \\ t \leq T}} \frac{n}{2} \omega_n \Delta^{-1/2} t^{n/2 - 1} . \prod_{p \mid P} \delta_p(t_0) . \prod_{p \nmid P} \delta_p(t)$$

D'où en comparant :

$$\boxed{c \sum_{\substack{t \equiv t_0 (\mathrm{mod} P) \\ t \leq T}} t^{n/2 - 1} . \prod_{p \nmid P} \delta_p(t) \sim \frac{2}{P . n} T^{n/2}}$$

Démonstration de T_n $\quad n=2,3,4 \quad n \geq 5$.

$\boxed{n \geq 5}$ Alors car du lemme 16 $\quad \delta_p = 1 + O(1/p^2)$

cste absolue

Soit $\varepsilon > 0$

si P est assez grand : $\quad 1-\varepsilon \leq \prod_{p \nmid P} \delta_p(t) \leq 1+\varepsilon$

d'où

pour tout t.

$$\sum_{\substack{t \equiv t_0 (P) \\ t \leq T}} t^{n/2-1} = \frac{1}{P}\frac{2}{n} T^{n/2} + o(T^{n/2})$$

d'où $\quad \frac{c}{P}\frac{2}{n} = \frac{2}{Pn} \Rightarrow \boxed{c = 1}$ (modulo S_n $n \leq 4$).

Rem On n'utilise pas la valeur précise des $\delta_p(t)$.

$\boxed{n = 4}$ Soit $\chi(p) = \left(\frac{\Delta}{p}\right)$ $\quad \Delta = \text{disc}$ $\quad$ symbole de Legendre

lemme 15 $\quad \delta_p(t) = (1 - \chi(p)p^{-2}) \sum_{p^\alpha | t} \frac{\chi(p^\alpha)}{p^\alpha} \quad (p \nmid P)$

$$\prod_{p \nmid P} \delta_p(t) = L_P(2)^{-1} \cdot \sum_{\substack{d | t \\ (d,P)=1}} \frac{\chi(d)}{d}.$$

où $\quad L_P(s) = \prod_{p \nmid P} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$

Notons $\displaystyle \Sigma_T = \sum_{\substack{t \equiv t_0 \ (P) \\ t \leq T}} t \sum_{\substack{d \mid t \\ (d,P)=1}} \chi(d)/d$

A évaluer pour $T \to \infty$. Notons $t = dd'$.

$$\Sigma_T = \sum_{\substack{d,d' \\ dd' \equiv t_0 (P) \\ (d,P)=1 \\ dd' \leq T}} d' \chi(d) = \sum_{\substack{d \\ (d,P)=1}} \chi(d) . \sum_{\substack{d' \equiv t_0 d^{-1} (P) \\ d' \leq T/d}} d'$$

$$\sum_{\substack{d' \equiv t_0 d^{-1} (P) \\ d' \leq T/d}} d' = \frac{1}{2P} \left(\frac{T}{d}\right)^2 + O\left(\frac{T}{d}\right).$$

$$\Sigma_T = \sum_{\substack{(d,P)=1 \\ d \leq T}} \chi(d) \frac{1}{2P} \frac{T^2}{d^2} + O\left(\sum_{d \leq T} \frac{T}{d}\right)$$

$$= \frac{T^2}{2P} \left(L_P(2) + o(1)\right) + O(T \log T)$$

$$\sim \frac{T^2}{2P} L_P(2).$$

D'où $\displaystyle c\, L_P(2)^{-1} \frac{T^2}{2P} L_P(2) = c \frac{T^2}{2P}$. Donc $\boxed{c = 1}$.

$\boxed{n=3}$ Remarque Si $n \geq 3$ et si 2 formes quadratiques M, M' de rang n ont même discriminant (mod carrés) et si S_{n-1} est vrai, alors $c = c'$.

(mê disc $\Leftrightarrow$ qe algébrique = forme tordue intérieure de l'autre).

On choisit le même t_0, P pour les deux formes : on veut $q(x) = q'(x)$; $q(x) - q'(y)$ est une forme à 6 variables indéfinie, elle représente 0. d'où t_0.

On peut prendre $P = A(2t_0)^3$.

Les formules donnant δ_p ne dépendent que de t et P, d'où c'est gagné.

Question : Comprendre cette invariance de τ par torsion en général ?

Remarque 2 Si n est impair, c'est vrai sans hyp de discriminant car $\mathrm{disc}(\lambda f) = \lambda\, \mathrm{disc}(f) \in \mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$

Or $O(\lambda f) = O(f)$.

Donc il suffit de prouver $\tau = 1$ pour la forme standard $x^2+y^2+z^2$. On a calculé la masse du genre $= \dfrac{1}{2^3 . 3!}$

et il n'y a qu'une forme dans ce genre. D'où $\tau = 1$.

Variante : Appliquer la formule de Siegel pour $t=1$ $x^2+y^2+z^2$

nbre de rep de 1 (mod 8) est 6. Calculer δ_∞, δ_2, δ_p $p \neq 2$

$1+4+4$ 48
$1+0+0$ 48 $\}$ $96/64 = 3/2$ pour δ_2 mod 8

$$\delta_\infty = 2\pi \quad (= \delta_\infty(1))$$

$$\delta_2 = 3/2$$

$$\delta_p = 1 + \frac{\chi(p)}{p}$$

$$\delta = c \cdot (2\pi) \cdot 3/2 \prod_{p \neq 2} 1 + \frac{\chi(p)}{p} \qquad \prod_{p \neq 2} \frac{1 - 1/p^2}{1 - \frac{\chi(p)}{p}}$$

$$= c \cdot (2\pi) \cdot 3/2 \; \frac{6}{\pi^2} \; \frac{4}{3} \; L(1, \chi) \cdot \frac{\pi}{4} = c \cdot 6 \qquad \Rightarrow c = 1$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

<u>Rem</u> Sur un corps de nombres ça ne marche pas car dépend de

et exemple $x^2 + y^2 + z^2$.

$\boxed{n=2}$

$$\delta_p(t) = \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) \sum_{p^\alpha \mid t} \chi(p^\alpha) \qquad \chi(p) = \left(\frac{-\Delta}{p}\right).$$

$$\Sigma = \left(L_P(1, \chi)^{-1} + o(1)\right) \cdot \sum_{\substack{t \equiv t_0 (P) \\ d \mid t, (d, P) = 1 \\ t \leq T}} \chi(d)$$

Notons $\Sigma_1 = \sum_{\substack{dd' \equiv t_0 (P) \\ (d, P) = 1 \\ dd' \leq T}} \chi(d)$

$t \equiv t_0 \bmod P$

$8 \Delta t_0^3 \mid P$ $\Big|$ $\Rightarrow t_0 \mid t$ donc t_0 divise d' $\qquad d\delta \equiv 1 \pmod{P/t_0}$

$d' = t_0 \delta$

si P est assez divisible, P/t_0 est multiple du conducteur de χ

alors $\chi(d) = \chi(\delta)$. (car $d\delta \equiv 1 \mod P/t_0$)

$$\Sigma_1 = \sum_{d \leq T^{1/2}} + \sum_{T^{1/2} < d \leq T} = \Sigma_2 + \Sigma_3$$

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{d \leq T^{1/2} \\ (d,P)=1}} \chi(d) . \underbrace{\sum_{\substack{\delta \leq T/dt_0 \\ \delta \equiv d^{-1} (\mathrm{mod}\ P/t_0)}} 1}_{T/Pd + O(1)}$$

$$= \frac{T}{P} \sum_{\substack{d \leq T^{1/2} \\ (d,P)=1}} \chi(d)/d + O(T^{1/2}) \sim \boxed{\frac{T}{P} L_P(1)}$$

$$\Sigma_3 = \sum_{\substack{\delta \leq T^{1/2} t_0 \\ (\delta,P)=1}} \chi(\delta) \sum_{\substack{T^{1/2} < d \leq T/\delta t_0 \\ d \equiv \frac{1}{\delta} (\mathrm{mod}\ Pt_0)}} 1$$

$d\delta t_0 = t \leq T$

$d > T^{1/2}$

$$\Sigma_3 = \sum_{\delta} \chi(\delta) . \left(\frac{T}{\delta p} - T^{1/2} + O(1) \right)$$

$$= \frac{T}{p} \left(L(1,\chi) + o(1) \right) - T^{1/2} \underbrace{\sum_{\delta \leq} \chi(\delta)}_{= O(1) \text{ car se détruit périodiquement}} + O(T^{1/2})$$

$$\sim \boxed{\frac{T}{P} L_p(1)}$$

Donc $\boxed{c = 1/2}$

3.12.82

Exemple : Sommes de 5 carrés

$r_5(n) = \# \; x_i \in \mathbb{Z} \; (i = 1, \ldots, 5) \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = n$

On suppose n sans facteurs carrés, >0 et $\equiv 1 \pmod 4$, $\boxed{n > 1}$

Il y a une seule forme dans le genre, donc.

$$r_5(n) = \prod_{p, \infty} \delta_p(n) .$$

$$\delta_\infty(n) = \frac{4}{3} \pi^2 n^{3/2}$$

$n \equiv 1 \, (8)$ $\quad 0+0+0+0+1$

$0+0+\cancel{4}+4+1$

$4+4+4+4+1$

d'où $\delta_2(n) = \begin{cases} 5/8 & \text{si } n \equiv 1 \, (8) \\ 7/8 & \text{si } n \equiv 5 \, (8) \end{cases}$

$n \equiv 5 \, (8)$

$$\delta_p(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{p^4} & \text{si } p \mid n \\ \left(1 - \dfrac{1}{p^4}\right) \Big/ \left(1 - \chi_n(p) p^{-2}\right) & \text{si } p \nmid n \end{cases} \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

χ_n : caractère quadratique attaché au corps $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$

$\chi_n(x) = \prod_{p \mid n} \left(\frac{x}{p}\right)$ $\quad$ conducteur n $\quad$ (car $n \equiv 1 \, (4)$)

On fait le produit :

$\boxed{n > 1}$

$$\boxed{r_5(n) = \alpha \, \frac{n^{3/2}}{\pi^2} \, L(\chi_n, 2) \quad \text{où} \quad \alpha = \begin{cases} 160 & n \equiv 1 \, (8) \\ 140 & n \equiv 5 \, (8) \end{cases}}$$

Sommations

$$L(\chi_n, 2) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_n(m)/m^2 = \frac{\pi^2}{n^{1/2}} S$$

formule générale $\displaystyle \sum \frac{e^{imx}}{m^k} = \text{cste } B_k(x) \qquad 0<x<1.$

où $\displaystyle S = \sum_{1 \leq x \leq n-1} \chi_n(x) B_2\left(\frac{x}{n}\right) \qquad B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$

donc $\boxed{r_5(n) = \alpha n S}$

<u>Calcul de S</u> : $\displaystyle \sum_{1 \leq x \leq n-1} \chi_n(x) = 0$

$\displaystyle \sum \chi_n(x) \cdot x = 0 \qquad$ car $\chi_n(-1) = 1$.

donc $\displaystyle S = \frac{1}{n^2} \sum_x \chi_n(x) x^2$

On remplace par une ½-sommation. Posons :

$$\tau_k = \sum_{1 \leq t < \frac{n}{2}} \chi_n(t) t^k \qquad \chi_n(2) = \varepsilon = \pm 1$$

On a $\tau_0 = 0$ (par symétrie). On calcule $n^2 S$ de deux façons différentes : tout x s'écrit $2t$ ou $n-2t$ donc

$$n^2 S = 4\varepsilon\tau_2 + \varepsilon \sum \chi(t)(n^2 - 4tn + 4t^2)$$

$$\boxed{n^2 S = 8\varepsilon\tau_2 - 4\varepsilon n \tau_1}$$

Pour n suivit t ou $n-t$, donc

$$\boxed{n^2 S = 2\sigma_2 - 2n\sigma_1}$$

On élimine σ_2 :

$$nS = \frac{4\varepsilon\sigma_1}{1-4\varepsilon} \qquad \varepsilon = \chi_n(2) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1 \ (8) \\ -1 & \text{si } n \equiv 5 \ (8) \end{cases}$$

D'où :

$$r_5(n) = \begin{cases} 60 \cdot \frac{4}{-3}\sigma_1 = & \boxed{-80 \sum_{1 \le t < n/2} \chi_n(t)\, t \qquad n \equiv 1 \ (8)} \\ 140 \cdot \frac{-4}{5}\sigma_1 = & \boxed{-112 \sum_{1 \le t < n/2} \chi_n(t)\, t \qquad n \equiv 5 \ (8)} \end{cases}$$

__Remarque__ Le jeu des deux groupes se trouve déjà dans la théorie classique Disquisitiones Gauss pour calculer $r_3(n)$ à l'aide d'une masse pour 3-1 variables.

__Représentations primitives de n par un réseau M__

$x \in M \quad x.x = n \qquad x$ primitif (ie non $\in \bigcup_{q \geq 2} qM$)

$N^{\text{prim}}(n, M)$ = nbre de repr. de n primitive dans le genre de M

$\delta_p^{\text{prim}}(n, M) = \ldots$

La formule de Siegel est vraie pour N^{prim} et δ_p^{prim}.

C'est une conséquence de la formule de Siegel

Supposons $n = p^2 n'$ n' sans facteur carré

$$N^{\text{prim}}(n) = \mathcal{N}(n) - \mathcal{N}(n/p^2)$$

$$\delta_q^{\text{prim}}(n) = \delta_q(n) \quad \text{si } q \neq p$$

$$\delta_p^{\text{prim}}(n) = \delta_p(n) - \frac{1}{p^{m-2}} \delta_p(n/p^2) \qquad m = \dim M$$

$$\delta_\infty(n/p^2) = \frac{1}{p^{m-2}} \delta_\infty(n) \qquad m = \dim M \,.$$

d'où

$$N^{\text{prim}}(n) = \prod_{q \neq p, \infty} \delta_q(n) \left\{ \delta_\infty(n)\, \delta_p(n) - \frac{1}{p^{m-2}} \delta_\infty(n)\, \delta_p(n/p^2) \right\}$$

$$= \prod \delta_p^{\text{prim}}(n) \times \delta_\infty(n) \,.$$

<u>Lien avec les fonctions modulaires</u> (Siegel I)

Si M est un réseau

$$\theta_M = \sum_{x \in M} e^{\pi i (x.x) z} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}(n, M)\, e^{\pi i n z}$$

$\mathrm{Im}(z) > 0$. C'est une forme modulaire de poids $k = \frac{\dim M}{2}$,

Soit $\mathfrak{M}$ le genre de M $= \{M_1, \ldots, M_h\}$ $w_i = \# \operatorname{Aut} M_i$

$$\theta_{\mathfrak{M}} = \text{moyenne des } \theta_M = \frac{\sum \theta_{M_i} / w_i}{\sum 1/w_i}$$

$$\Theta_{\mathcal{M}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\prod_{p,\infty} \delta_p(n, M) \Big) e^{\pi i n z} \qquad m = \dim M \geq 3$$

Pour $m \geq 5$, on écrit avec des sommes de Gauss. Siegel arrive à une formule explicite qui montre que $\Theta_{\mathcal{M}}$ est une série d'Eisenstein. Il dit que ça marche pour $m = 4$. (sur un groupe de congruence convenable, Mod = Eis ⊕ Parab orthogonal pour produit scalaire de Petersson)

<u>Assertion</u> $\Theta_{\mathcal{M}}$ est une (combin. lin de) série d'Eisenstein.

<u>dém</u> $m \geq 5$ Siegel

$m = 4$ Siegel le dit

$m = 1$ $\quad \sum q^{n^2}$

Dans la définition naturelle des séries d'Eisenstein $\sum \frac{1}{(cz+d)^k}$ ça ne converge pas, méthode de Hecke faire un prolongt analytique sur $\sum \frac{1}{(cz+d)^k / (cz+d)^s}$.

Une série d'Eisenstein est déterminée par le comportement aux points, $\frac{a}{b}$ ($\in \mathbb{Q}$) qui ne dépend que de $\mathcal{M}$
les Θ_M ont un comportement en

Th Minkowski (O'Meara Am J 1957) les informations locales déterminent le genre.

Donc Assertion $\Leftrightarrow$ $\Theta_{\mathcal{M}}$ est l'unique série d'Eisenstein ayant le comportement voulu aux pointes.

Ceci donnerait une autre dém du th. principal

$$N(t,\mathcal{M}) = cx \quad \text{(ce qu'il doit être)}$$

à montrer $c = 1$.

$$\mathrm{Eis} = 1 + \Sigma \ \ldots$$

$$\Theta_{\mathcal{M}} = 1 + c\,\Sigma \ \ldots$$

si les deux sont des formes modulaires $\Rightarrow c = 1$ (une cste ne peut pas être une forme modulaire).

Soit M = réseau du genre de $\mathcal{M}$. Alors

$$\boxed{\Theta_M = \Theta_{\mathcal{M}} + \varphi_M} \qquad \varphi_M \text{ forme parabolique}$$

L'assertion est : moyenne des $\varphi_M = \Sigma\, \varphi_{M_i}/w_i = 0$.

$$N(n,M) = \prod \delta_p(n) + \text{(coeff de } n \text{ dans une forme parabolique)}$$

Les gens ont calculé :

$r_k(n)$ = nbre de rep de n en k carrés   Hardy

$$r_{24}(n) = \frac{16}{691}\, \sigma_{11}^{*}(n) + \frac{128}{691}\left((-1)^{n-1}\, 259\, \tau(n) - 512\, \tau(n/2)\right)$$

soit $\tau_{11}^*(n) = \begin{cases} \sum_{d|n} d^{11} & \text{si } n \text{ impair} \\ \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ pair}}} d^{11} - \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ impair}}} d^{11} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

$1 + \frac{16}{691} \sum_1^\infty \tau_{11}^*(n) q^n$ est une série d'Eisenstein (combinaison de $E_{12}(2z)$, $E_{12}(z)$, $E_{12}(4z)$) ; le terme parabolique provient de $\Delta(z)$.

<u>Th</u> (Tartakowski 1927). <u>Si dim $M \geq 5$</u>, <u>presque tous les entiers</u> (ie tous sauf un nbre fini) $n \geq 0$ <u>représentables localement par M</u> <u>sont représentés par M</u>.

<u>dém</u> $N(n, M) = \prod \delta_p(n)$ + coeff de n dans une f parab.

si $m = \dim M$ poids $k = m/2$

les coeff d'une forme parabolique de poids k sont $O(n^{k/2})$

[pour k ~~[illegible]~~ et gr de congruence, $O(n^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon})$, Deligne ; cette borne est fausse pour $k = 3/2$ $\eta^3 = \cdots n q^{n^2} \cdots$

il se pourrait que la borne ne soit fausse que pour 1/2 et 3/2 où il y a des formes à coeff très "lacunaires" Gelbart. Piat Shapiro]

Ici $\delta_p(n) = \text{cste} \times n^{m/2 - 1}$ $\frac{m}{2} - 1 > m$ (car $m > 4$)

Il existe une constante c_M telle que

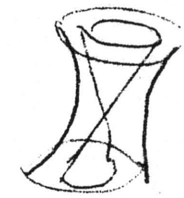
Lemme $m \geqslant 5$ $\prod_{p \text{ fini}} \delta_p(n)$ est

soit 0 si l'un des facteurs est nul.

soit $\geqslant c_M$ (avec $c_M > 0$)

dem tous les formes locales

$m \geqslant 5$ la forme locale représente 0, on en déduit que les δ_p ne sont pas trop petits.



A 4 variables le lemme est faux :

$\square$

$$x^2+y^2+25(z^2+t^2)$$

elle représente tout localement

en 2 $\sim x^2+y^2+z^2+t^2$ $\qquad$ 25 = carré d'une unité mod 8

idem en $p \neq 5$ $\qquad$ 25 = carré d'une unité mod p

en 5 $\sim x^2+y^2 \sim xy$

Cependant globalement les 3.2^m $m \geqslant 1$ ne sont pas représentés : on le vérifie pour $3, 3.2, 3.2^2, 3.2^3$.

Rec $\quad 3.2^m = x^2+y^2+25(z^2+t^2) \quad m \geqslant 3$

$$\equiv 0 \mod 8$$

$\Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2+t^2 \equiv 0 \ (8)$

$\Rightarrow \quad 2 \mid (x,y,z,t)$ $\qquad$ gagné.

Variante pour dim $M = 4$. Même énoncé, mais avec représentable primitivement à la place de représentable

Remarque Pour 2 variables c'est faux.

Pour 3 variables ? Il y a des cas positifs (Linnik) l'hyp de Riemann sert. En général c'est faux ?

dim pour $M = 4$ $\frac{m}{2} - 1$ n'est pas $> \frac{m}{4}$.

1) on utilise une meilleure borne pour le coeff a_n des formes de poids 2 $|a_n| = O(n^{1/2+\varepsilon})$ Weil

2) le lemme est faux $\prod \delta_p^{\text{prim}}(n)$ n'est pas $\geq$ cste.

mais $\prod \delta_p^{\text{prim}}(n) \geq \frac{c_\varepsilon}{n^\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ avec c_ε convenable

ça vient de $\prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Une méthode pour prouver la formule de Siegel jamais écrite, mais qui devrait donner "l'arithmétique".

Eichler: Quad. Formen und Orth. Gruppen

On peut décrire l'opération des op. de Hecke sur les Θ_M

$\Theta_M | T_p$ pour dim M paire

$| T_{p^2}$ ———— impaire

Ex Thompson, Broué

dési 1   pris p k modulables

→ fonctions Θ sur $SL_2(\mathbb{Z})$ de poids $4k$.

A montrer $\Theta_M \overset{?}{=} \mathrm{Eis}_{4k}$

$pM \subset M' \subset M$ tq M'/pM soit tot. isotrope maximal dans M/pM. Sur M' $x.x$ est div par p,

$(M', \frac{1}{p} x.x)$ est du même genre. De plus

$$\Theta_M | T_p = c(p) \sum_{M' \text{ de ce type}} \Theta_{M'}$$

$c(p) = \text{cste}$ on peut la calculer sur les termes cstes

On fait la sommation sur le genre, ça donne

$$\boxed{\Theta_M | T_p = d(p)\, \Theta_M} \qquad d(p) = 1 + p^{4k-1} \ ?$$

= val. propre de T_p sur Eisenstein

Θ_M est fonction propre de T_p avec une gde val. propre, donc est une série d'Eisenstein (et pas une f. parabolique).

Ça devrait marcher dans le cas général, on a le choix des p

On peut se borner à T_{p^2} (on reste dans le genre)

pas de poids ⟺ multiplicité 1 en théorie des représentations.

Formes indéfinies (sur $\mathbb{R}$)

Siegel II pas tout à fait sûr des formules.

M indéfinie $\Gamma_M = \mathrm{Aut}(M) \underset{\text{discret}}{\subset} O(\mathbb{R}\otimes M) = G_{\mathbb{R}}$

1) $\mathrm{vol}(G_{\mathbb{R}}/\Gamma_M)$ va remplacer $|\Gamma_M|$. Si $\mathcal{M}$ au un genre

$$\mu = \mu(\mathcal{M}) = \sum_{M \in \mathcal{M}} \mathrm{vol}(G_{\mathbb{R}}/\Gamma_M)$$

2) il y a une infinité de représentations $L \to M$) (

$$\alpha(L,M) = \sum_{\substack{y : L \to M \\ \text{modulo } \Gamma_M}} \mathrm{vol}(g_{\mathbb{R}}/\gamma_y)$$

$g_{\mathbb{R}}$ = s/g de $G_{\mathbb{R}}$ fixant yL

$\gamma_y = \Gamma_M \cap g_{\mathbb{R}}$

$$\alpha(L,\mathcal{M}) = \sum_{M \in \mathcal{M}} \alpha(L,M)$$

Formule

$$\frac{\alpha(L,\mathcal{M})}{\mu(\mathcal{M})} = c \prod_{p \neq \infty} \delta_p(L,\mathcal{M})$$

$p \uparrow$ converge

$\delta_p(L,\mathcal{M})$ = densités locales

$c = 1$ sauf si $\dim L = \dim M > 1$ ou si $\dim M = \dim L + 1$ où $c = 1/2$.

Cas particulier $L = M$ donne

$$\frac{1}{\mu(M)} = \prod \delta_p(M, M)$$

On rejette 2 cas $*$ $\dim M = 2$ $\operatorname{disc} M = -$carré

$*$ ~~dim~~ $M - \dim L = 2$, $\operatorname{disc} M \cdot \operatorname{disc} L = -$carré

qui font apparaître des groupes multiplicatifs.
Le $\prod_p$ divergerait

On choisit la mesure sur $G_{\mathbb{R}}/g_{\mathbb{R}}$ comme étant la mesure naturelle de la variété des g.

La démonstration adélique de $\tau = 1$ ou 2

Formule de Siegel-Weil et application à $\tau = 2$ pour SO par réc. sur la dim. On vérifie directement dim 2, 3, 4

2 : tore 3 : forme de PGL_2 (quaternion)
4 : forme de $PSL_2 \times PSL_2$ "

On suppose dim ≥ 5.

X esp affine de dim $m \geq 5$ / corps global de car $\neq 2$

Φ sur $X_{\mathbb{A}}$ (adélisé) du type Schwartz-Bruhat ($\prod$ def. loc)

$$\int_{G_{\mathbb{A}}/G_K} \Big(\sum_{\xi \in X_K} \Phi(g\xi) \Big) dg = \tau(G)\Phi(0) + 2 \sum_{\lambda \in K} \int_{U(\lambda)_{\mathbb{A}}} \Phi(x) \|\theta_\lambda\|$$

$G = SO$
$$= \tau(G)\Phi(0) + 2\hat{\Phi}(0) + 2 \sum_{\mu \neq 0} \int \Phi(x)\psi(\mu f(x))\,dx$$

f = forme quadr.
ψ = car. additif.

On en déduit $\tau(G) = 2$ car $\tau(G)\Phi(0) + 2\hat{\Phi}(0)$ doit être invariant par Fourier : le membre de gauche l'est (formule de Poisson), et aussi :

$$\int \Phi(x)\psi(\mu f(x))\,dx = \int \hat{\Phi}(x)\psi\Big(-\frac{1}{\mu} f(x)\Big)\,dx$$

par Plancherel à cause $\psi(\mu f(x))$ est transf. de Fourier de $\psi(-\frac{1}{\mu} f(x))$
($e^{-\pi x^2 \lambda}$ et $e^{-\pi x^2/\lambda}$)

ceux des égalités :

la première : on isole $\xi = 0$ qui donne $\tau(G)\,\phi(0)$

les autres donnent le reste avec $U(\lambda) = \{x . x = \lambda\}$ sphère
 $f(x)$

$$X_A \xrightarrow{f} A$$

$$\theta_\lambda = \text{"}\frac{dx}{df}\text{"} = \prod_v \| \theta_\lambda \|_v$$ = mesure de Tamagawa de la variété $U(\lambda)$

facteur local nécessaire

la deuxième : les fibres $U(\lambda)$ sont des espaces homogènes pour

si $\lambda = 0$ gr pas réductif on calcule quand même.

On utilise que stab (Tamagawa) d'un pt de $U(\lambda)$ est connu $= 2$.

On montre :

$$\sum_\lambda \int_{U(\lambda)_A} \phi(x)\, |\theta_\lambda|_A = \sum_{\mu \in K} \int_{X_A} \phi(x)\, \psi(\mu f(x))\, dx$$

(formule de Poisson généralisée)

Notons $F_\phi(\lambda) = \int \phi(x)\, |\theta_\lambda|$

$$F^*_\phi(\mu) = \int_{X_A} \phi(x)\, \psi(\mu f(x))\, dx$$

Il faut montrer : $\sum_{\lambda} F_{\Phi}(\lambda) = \sum_{\mu \in K} F\hat{\Phi}(\mu)$

cf <u>Igusa</u> Forms of Higher degree (Tata).

<u>Weil</u> Acta Math. 113.