JEAN-PIERRE SERRE
JOSEPH OESTERLÉ (réd.)

Nombre de classes, formules de masse, nombres de Tamagawa

Cours de Jean-Pierre Serre, tome 4 (1981-1982)
<http://www.numdam.org/item?id=CJPS_1982__4_>

Jean-Pierre SERRE

Collège de France

Nombres de classes, formules de masse, nombres de Tamagawa

Cours 1981-1982

Notes de Joseph OESTERLÉ

J.-P. Serre

Collège de France

Cours 1981–1982

Nombres de classes, formules de masse, nombres de Tamagawa

Notes de J. Oesterlé

—

Serre Cours n° 1 — Cours 1982 (notes de J. Oesterlé)

Gauss Disquisitiones 1801 :	quad. 2 var. 3 var.
Jacobi 1827	formules pour $r_4(n)$, $r_6(n)$, $r_8(n)$ ← f^{ts} ell.
Dirichlet 1838	$L(1)$, nbres de classes
Eisenstein 1847	"masse" $r_5(n)$
Smith 1867	↑ preuve.
Minkowski 1892	
Siegel	3 Articles Annals 1935-37
Tamagawa Kneser Weil	$\tau(O_n) = 1$. 1959

Gauss : lien entre $r_3(n)$ et nbre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$

$$(r_3(n) = \begin{cases} 12\, h(-n) \text{ si } n \not\equiv 3 \bmod 8 \\ 24\, h(-n) \text{ si } n \equiv 3 \bmod 8 \end{cases}$$

(n sans facteurs carrés, $n > 3$, $n \not\equiv -1 \bmod 8$)

Jacobi : $r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d \mid n \\ 4 \nmid d}} d. \iff \Theta^4 = 1 + 8 \left(\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \cdots \right)$

(où $\Theta = 1 + 2q + 2q^4 = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2}$)

Formules analogues pour Θ^6 et Θ^8.

Dirichlet : 1. $L(s, \chi) = \sum \chi(n) n^{-s}$

Calcul de $L(1, \chi)$

2. Applications au nbre de classes de formes binaires.

Cas imaginaire : $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ ($-D < 0$ disc).

$h(-D)$ = nbre de classes

$w(D)$ = nbre de rac. de l'unité du corps $= \begin{cases} 2 \text{ si } D \neq 3, 4 \\ 4 \text{ si } D = 4 \\ 6 \text{ si } D = 3 \end{cases}$

$\chi_D(p) = \left(\frac{-D}{p}\right)$ le caract. associé au corps.

$$\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \frac{h(-D)}{w_D} L(1, \chi_D)$$

$$h(-D)^{\text{normalisé}} = \frac{h(-D)}{w_D/2} = -\sum_{1 \le x < D} \chi_D(x) \frac{x}{D} = \frac{1}{2 - \chi_D(2)} \sum_{1 \le x < D/2} \chi_D(x).$$

Dirichlet en déduit $L(1, \chi_D) \neq 0$.

Cas particulier : $D = p$, $p \equiv 3 \bmod 4$.

$$h(-p) = \begin{cases} R - N & p \equiv 7 \bmod 8 \\ 1/3\ (R - N) & p \equiv 3 \bmod 8 \end{cases}$$

où R = nbre des résidus quad. entre 1 et $\frac{p}{2}$

N = " "non" " entre " " ".

Corollaire $R > N$.

Eisenstein : "Masse". Soit $n \geq 3$. On veut compter les formes dans un genre. Eisenstein introduit le poids d'une forme quadr. définie : c'est $\frac{1}{\text{poids de la forme}}$

La masse d'un ens. fini de formes (par ex. un genre) est la somme des inverses des poids de ces formes

Eisenstein donne (sans dém.) des formules pour la masse d'un genre à au moins 3 variables, et des formules pour $r_5(n)$

Exemple : $r_5(n) = -80 \sum_{1 \leq x < n/2} \chi_n(x)$ pour $n > 1$ sans fact. carré, $n \equiv 1 \bmod 8$.

Smith fournit les dém. des résultats d'Eisenstein
En 1881, l'acad. met au concours la dém. des résultats d'Eisenstein
En 1883, l'acad. partage le prix entre Smith-Minkowski.

Siegel trois articles I, II, III
I : formes ≥ 0 sur $\mathbb{Q}$
II : formes indéfinies sur $\mathbb{Q}$
III : formes quad ≥ 0 sur K tot^t réel
+ énoncé sans dém. pour la dém de II.

Le article I :
Théorème de Siegel : Repré. d'une forme quadratique par une autre
(Par forme quad. on entend un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini, muni d'une forme quad. à valeurs dans $\mathbb{Z}$
Soit (Λ, Q) une telle forme et (L, T) une autre déf ≥ 0 (sur $\mathbb{Q}$).

Une repré de L par Λ est un hom. (injectif) isométrique de (L,T) dans (Λ, Q).
En terme de matrice, soient Q, T mat. sym et X celle de i.
Alors on veut $T = {}^tX Q X \underset{\text{déf}}{=} Q[X]$.

Pour Q et T donnés, Card $\{X \,/\, T = Q[X]\}$ est fini. Soit $N(Q,T)$ ce nombre. Posons $w(Q) = \text{card}(\text{Aut}(Q))$
(en fait $w(Q) = N(Q,Q)$)

Le genre de Q :
La classe de Q est l'ens. des Q' isom. à Q (i.e. telles que $\exists X$, $Q' = {}^tXQX$, $X \in GL_n(\mathbb{Z})$)
Le genre de Q est formé des Q' isom à Q sur $\mathbb{R}$ et tous les $\mathbb{Z}_p$.
(i.e tous les $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$.)
Un genre est formé d'un nbre fini de classes $Q_1, \dots, Q_k$ classes de Q

La masse d'un genre est la masse d'un syst. de repré. des formes du genre de Q :
$M_Q = \text{masse}(Q) = \sum \frac{1}{w(Q_i)}$

déf : $N_{\text{moyen}}(Q,T) = \dfrac{\sum_i \frac{N(Q_i, T)}{w_{Q_i}}}{M_Q}$

Siegel calcule $N_{\text{moyen}}(Q,T)$ à l'aide de cond. locales.
Pour que $N_{\text{moyen}}(Q,T)$ soit non nul, il faut que T soit repré. par Q sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}_p$ pour tout p.

Les conditions locales ci-dessus entraînent $N_{\text{moyen}}(Q,T) \neq 0$.

Exemples : pour $n \leq 8$, les $x_1^2 + \dots + x_n^2$ sont seuls dans leur genre. Pour prouver $n \not\equiv -1 \pmod 8 \Rightarrow$ n somme de trois carrés, il suffit de le faire par congruences, ce qui est trivial.

Formule de Siegel

$$N_{\text{moyen}}(Q,T) = c \prod_{p,\infty} \delta_p(Q,T)$$

- où Q forme quadratique déf >0, de rang m
  T " " " " " n

  $m \geq n$.

- On a $c = \begin{cases} 2 \text{ si } m=n=1 \\ 1/2 \text{ si } m = n+1 \\ 1 \text{ autrement} \end{cases}$

- Définition des $\overset{\text{densités}}{\delta_p(Q,T)}$:

  Le cas $p=\infty$. On s'intéresse à $Q[X]=T$ avec $X \in M_{mn}(\mathbb{R})$
  l'application $Q : X \to Q[X]$ de $\mathbb{R}^{mn}$ dans $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$
  (= matrice sym. de rang n)

  a une "densité" au point T définie par

  $\lim_{\substack{U \to \{T\} \\ U \text{ ouvert}}} \dfrac{\text{mes } Q^{-1}(U)}{\text{mes } U}$ pour U vois de T. On appelle cette

  densité $\delta_\infty(Q,T)$ si $n \neq m$.

  Si $n=m$ on pose $\delta_\infty(Q,T) = \dfrac{1}{2} \lim \dfrac{\text{mes } Q^{-1}(U)}{\text{mes}(U)}$.

- δ_p : on déf p-adiquement que pour $p=\infty$
  Autre déf. possible :

  Si $q = p^\alpha$ posons $d_q(Q,T) = \dfrac{\text{Card}\,\{X \bmod q \;/\; Q[X] \equiv T \bmod q\}_X}{q^{mn - \frac{n(n+1)}{2}}} \begin{cases} 1 \text{ si } n\neq \\ 1/2 \text{ si } n= \end{cases}$

  Pour α grand, $d_q(Q,T)$ est indépendant de α, de valeur limite δ

  Le produit $\prod_{p,\infty} \delta_p(Q,T)$ converge (pas absolument, mais pour p ordonnés de façon croissante).

Cas particulier : $Q=T$:
$N_{\text{moyen}}(Q,T) = \dfrac{1}{w(Q)} \dfrac{\text{Card}(O(Q))}{M_Q} = \dfrac{1}{M_Q}$.

On a donc $\dfrac{1}{M_Q} = \begin{cases} 2 \text{ si } n=1 \\ 1 \text{ si } n \neq 1 \end{cases} \prod_{p,\infty} \delta_p(Q,Q)$

Corollaire (Siegel III) si K tot^t réel de degré r, disc D, alors
$\zeta_K(2k) = \pi^{2kr} D^{1/2} \alpha$ avec α rationnel.

Coroll $\zeta_K(1-2k)$ rat.

En effet les $\prod \delta_p$ font intervenir des f^ts zêta.

Tamagawa et Kneser expriment la formule de Siegel en terme de volumes adéliques.

Soit $\tau(SO_n) = \mathrm{Vol}(SO_m(A_K)/SO_m(K))$ (fini sauf si $m=2$ et Q indéfinie).

Le th. de Siegel équivaut à $\tau(SO_m) = 2$ ($\Leftrightarrow \tau(O_m) = 1$)

(Plus précisément $\tau(O_m) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{M_Q} = \prod \delta_p$)

Or Siegel a déjà prouvé que ce cas particulier entraîne le cas général

par ex: $\{x \mid Q(x) = a\}$ est un esp. homogène O_m/O_{m-n} et la formule de Siegel résulte de $\tau(O_m) = \tau(O_{m-n}) = 1$)

Conjecture de Weil: ~~Le nombre de Tamagawa d'un gr. semi-simple simplement connexe est égal à 1.~~

Ceci est en tout cas démontré:

- pour les groupes classiques
- D_4 trialitaire?
- G_2, F_4
- certaines formes de E_6, E_7
- formes quasi-déployées.

} corps de nbres (et corps de fcts?)

En particulier $\tau(SL_n) = 1$: ceci est en rapport avec le thm de Minkowski-Hlawka): 1/ Soit C un ens. mesurable quarrable borné de $\mathbb{R}^n$ et $\delta > \mathrm{Vol}(C)$. Alors il existe un réseau Λ de $\mathbb{R}^n$, de volume δ, tel que $\Lambda - \{0\} \cap C = \emptyset$
2/ Si C est étoilé symétrique ($x \in C \Rightarrow tx \in C$ pour $|t| \leq 1$)

Même énoncé avec $\delta > \frac{\mathrm{Vol}(C)}{2\zeta(n)}$

Cela résulte d'une formule de moyenne (où on prendra $\delta = 1$):
Soit φ sur $\mathbb{R}^n$, Jordan-intégrable, et Λ réseau. Posons

$$\varphi(\Lambda) = \sum_{x \in \Lambda - \{0\}} \varphi(x)$$

Alors $\underset{\substack{\text{réseau } \Lambda \text{ de} \\ \text{covolume } 1}}{\text{Moyenne}} \varphi(\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx$

(les réseaux de vol. 1 forment un esp. homog. sur $SL_n(\mathbb{R})$ avec $SL_n(\mathbb{Z})$ comme groupe de stabilité, et $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ a une mes. invariante)

Si on travaille sur un corps de fonctions de deg. de transc. 1 sur un corps fini, $K = k(X)$ (X c. alg. $k = \mathbb{F}_q$), la forme $\tau(SL_n) = 1$ se traduit par une formule de masse pour les fibrés vectoriels E sur X de rang et classe de Chern (ie dét) donnés.

(*) $$\sum_{\substack{E \text{ fibré de rang } n \\ \text{de dét}^t \text{ donné} \\ \text{à isom près}}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(E)|} = \frac{1}{q-1} q^{(n^2-1)(g-1)} \zeta_X(2) \zeta_X(n)$$

(où $q = |k|$, g genre de X.

On a des formules pour le nbre moyen de sections d'un tel fibré E

(les nombres ci-dessus sont infinis)

Supposons L de degré impair de rang 2

Les fibrés stables sont classifiés par une var. de module M et et $|\mathrm{Aut}\, E| = q-1$ pour un tel fibré.

On a donc $(*) = \frac{1}{q-1} \left(\# M(\mathbb{F}_q) \right) +$ masse des fibrés instables

et le second terme a une formule explicite, d'où une formule explicite pour $\# M(\mathbb{F}_q)$ en terme de q, de g et des v. propres des end. de Frobenius pour $\mathrm{Jac}(X)$.

On trouve $\quad q^{nN} + q^{n(N-1)} - \sum \pi_\alpha^n q^{-} \cdots$

Donc $\dim M = N$, M est absolument connexe et on connaît les nbres de Betti de M (car M est non singulière et propre)

$$B_0 = 1 \quad B_1 = 0, \; B_2 = 1, \; B_3 = g, \ldots$$

Cela donne les nombres de Betti complexes de M qu'on ne connaît pas.

Une moyenne de repr. d'un certain pour f

$$\sum \frac{1}{w_{Q_i}} \Theta_{Q_i} = \text{série d'Eis.}$$

$$\Theta_Q = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eis}}}{EQ} + \underset{\text{parab.}}{\Psi Q}$$

J. P. Serre cours n°2

Références : Milnor - Husemoller
Eichler Quad. Formen
O'Meara
Cassels : Rational Quad. Forms / $\mathbb{Q}$
Tamagawa : Weil IAS
Siegel : Lectures on the An. th. of Q. Forms.

Tamagawa : Ono (Tores - Gps semi-simples)
Sansuc (Journal de Crelle)
Langlands
Lai (Compositio Math, 1980) : $\tau = 1$ pour les groupes quasi-déployés simpl. connexes.
Bloch : Inv. Math 1980
Harder : corps de fonctions, invention, Annals
Mars : ($\tau = 1$ gps exceptionnels : Bull SMF
Mars : 1970 : Méthode du cercle adélique.
Lachaud : Paris VII : problème de Waring adélique
Igusa : Forms of higher degree (Tata Institute) 78)
N. Bourbaki : F. R. V

Intégration : cas local.

Soit K corps ultramétrique localement compact.
O_K entiers
v val. normalisée
π uniformisante
k corps résiduel $\quad q = p^a = \mathrm{Card}(k)$
$\| \|$ la val. abs. normalisée : $\quad \|x\| = q^{-v(x)}$
$\left(\text{si } x \in O_K,\ \|x\| = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(O_K / x O_K)}\right)$

Soit μ une mesure de Haar sur K
$\|x\| = \mu(x O_K)/\mu(O_K) = \mu(xU)/\mu(U)$ pour tout sous-groupe ouvert compact U de O_K.
On a $d(ax) = \|a\| dx$ (en posant $\mu = dx$).

- Mesure standard sur K : $\mu(O_K) = 1$.
- Mesure attachée à un caractère additif non trivial ψ de K :
($\psi : K \to \mathbb{C}^*$ continu)
Si ψ_0 est un car. add. $\neq 1$ de K, tout car. add. de K est de la forme $\alpha \longmapsto \psi(\lambda\alpha)$ avec $\lambda \in K$.
Autrement dit $K^\wedge$ est un K-espace vectoriel de dim. 1)
(car $\hat{K} = K$)

construction de car. additif :
$K = \mathbb{Q}_p$: ψ de noyau $\mathbb{Z}_p$ défini par
$(m \in \mathbb{Z},\ v \in \mathbb{Z}_p,\ n \in \mathbb{N})\quad \psi\left(\frac{m}{p^n} + v\right) = e^{2\pi i\, m/p^n}$.)
K ext finie de $\mathbb{Q}_p$: $\psi \circ t$ (par ex. t = trace) avec t appl. lin. $\neq 0$: $K \to \mathbb{Q}_p$.

K de car. p : $K = k((T))$

$\alpha = \alpha(T)$

Tous les caractères sont de la forme

$\psi(\alpha) = \lambda_k(\mathrm{Res}\,(\alpha(T)\,\omega(T)))$ où $\omega = f(T)\,dT$ est une forme différentielle, où λ_k est un car. additif non trivial de k.

(on peut prendre $\lambda_k = e^{2\pi i (\mathrm{Tr}_{k/\mathbb{F}_p}(x))}$)

Le choix de $\psi \neq 1$ permet de définir un isom. de K sur $\hat{K}$.
Il existe une mesure μ unique dont la mesure duale $\hat{\mu}$ s'identifie via cet isomorphisme à μ.
(μ est la mesure autoduale relativement à ψ).

Comment trouver une mesure duale ?

a) Soit G gr. loc^t compact, U sous-gr. ouvert compact de G.
Alors $G^\wedge \supset U^\perp$

On a $U^\perp \simeq (G/U)^\wedge$ compact

$(G^\wedge/U^\perp) \simeq U^\wedge$ discret

Donc $U^\perp$ est ouvert compact.
Si μ et $\mu^\wedge$ sont des mesures duales sur G et $G^\wedge$, on a
$$\mu(U)\,\mu^\wedge(U^\wedge) = 1.$$

b) Soit G gr. loc^t compact, Γ discret cocompact $\subset G$. Alors $G^\wedge \supset \Gamma^\perp$ discret cocompact.

μ et $\hat{\mu}$ sont duales si
$$\mu(G/\Gamma)\,\mu^\wedge(G^\wedge/\Gamma^\perp) = 1.$$

Nous noterons μ_ψ la mes. autoduale associée à ψ.
Caractérisation de μ_ψ :

Soit U sous-gr. ouv. compact de K, $U^\perp = \{x \mid \psi(ux) = 1 \ \forall u \in U\}$.
On a $\mu_\psi(U)\,\mu_\psi(U^\perp) = 1$.

Si $U = O_K$; si $\psi(O_K)^\perp = O_K$, μ_ψ est la mesure standard.

<u>Intégration sur les K-variétés</u>

Soit m entier ≥ 0, X variété K-analytique (lisse) partout de dimension m.
Soit ω une forme différentielle de degré m sur X.
On lui associe mod $\omega = \|\omega\|$

(si $\omega = f(x)\,dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ dans un syst. de coord. locales,
$\|\omega\| = \|f(x)\|\,dx_1\,dx_2 \dots dx_m$.

au changt de coord.

Vérification 1) cas où y_i fct lin. des x_i : on se ramène à $y_i \mapsto a_i x_i$

2) cas où $y_i = x_i$ + série commençant d'ordre ≥ 2 au vois. de 0.
$\left(\sum_{|\alpha|\geq 2} a_\alpha x^\alpha \quad a_\alpha \in O_K \right.$
$\left. a_\alpha \to 0\right)$.

Alors $x \to y$ est une bij. entre $O_K \times \dots \times O_K$ et $O_K \times \dots \times O_K$ et définit une bij. mod π^n pour tout n.

Alors $x \hookrightarrow y$

3) cas général.

Soit T_X^* le fibré cotangent, $\Omega^m = \det T_X^*$ est un fibré vectoriel de rang 1, à groupe structural K^*.
Par le changement de groupe $K^* \to \mathbb{R}_+^* \subset GL(1,\mathbb{R})$, on en déduit un fibré réel de rang 1, $\mathcal{D}$, le fibré des densités. Les sections de $\mathcal{D}$ donnent les mesures sur X.

(dans le cas réel, $\mathcal{D} = \Omega^m \otimes Or(X)$)
(dans le cas complexe cela correspond à la construction qui à $f(z)dz$ associe la mesure "$|f(z)|^2 dz\, d\bar{z}$")

Supposons X compacte et ω forme diff. de rang maximum.
Calculons $\int \omega$

<u>1er cas</u>: ω est partout différente de 0.
<u>Localement</u> $\omega = f(x)dx_1 \ldots dx_n$ avec $\|f\|$ loc^t constante sur une boule B.
$\|f\|$ constante sur les classes modulo $\pi^n B$, pour n assez grand.

$$\int_X \|\omega\| = \sum_{\text{boules mod } \pi^n} \int \|\omega\| \quad \text{(somme finie)}$$
$$= \sum_{\text{finie}} q^{\lambda_i} \quad (\lambda_i \in \mathbb{Z}).$$

Cette intégrale est donc un nombre rationnel de la forme $\frac{a}{p^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ (ie $\in \mathbb{Z}[1/q]$).
Considérons l'image de $\int_X \|\omega\|$ dans $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$.

<u>Proposition</u>: <u>L'image de</u> $\int_X \|\omega\|$ <u>dans</u> $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ <u>ne dépend pas de</u> ω, <u>mais seulement de</u> X. Notons cet invariant $\mathrm{inv}(X)$.
Si X et X' sont des variétés compactes non vides de dim m, on a $\mathrm{inv}(X) = \mathrm{inv}(X') \iff X$ isomorphe à X'.

Si Λ est un groupe abélien dans lequel la mult. par p est inversible (ie un $\mathbb{Z}[1/p]$-module)
Soit ω une forme différentielle et $f : X \to \Lambda$ localement constante. On peut définir $\int_X f \|\omega\|$

(si $X = \bigcup_{\text{finie}} X_i$ avec $f = \lambda_i$ sur X_i, on pose
$$\int_X f \|\omega\| = \sum \underset{\Lambda}{\underset{\uparrow}{\lambda_i}}\ \underset{\mathbb{Z}[1/q]}{\underset{\uparrow}{\mathrm{vol}(X_i)}}$$
$$= \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda\, \mathrm{vol}(X_\lambda))$$

<u>2e cas</u>: cas général (ω peut s'annuler).

<u>Théorème</u> (Igusa): <u>Si</u> K <u>est de car. 0</u>, X <u>compacte</u>, ω <u>forme différentielle</u>, $\int_X \|\omega\| \in \mathbb{Q}$ (vrai en car. p si on a la résol. des sing).

(Corollaire: on peut intégrer les fonctions loc^t constantes à valeurs dans les $\mathbb{Q}$ espaces vectoriels).

La question étant locale, on peut choisir $f(x)$ sur $\mathcal{O}_B \times \dots \times \mathcal{O}_B$ analytique avec coeff. tendant vers 0.

Soit $X_n = \{x \,/\, v(f(x)) = n\}$.
$X_\infty = \{x \,/\, f(x) = 0\}$

Supposons $f \not\equiv 0$.
$\mathrm{Vol}(X_\infty) = 0$.

$$\boxed{\int_B \|f(x)\|\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^n} \mathrm{Vol}(X_n)}$$

X_n est ouvert et fermé, réunion de classes mod (π^{n+1})
(donc Vol est avec des puiss de q au dénom.).

Théor (Igusa): $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Vol}(X_n)\, T^n$ est une fonction rationnelle de T
car $K=0$ (à coeff. dans $\mathbb{Z}[1/q]$)

$$\int \|\omega\| = R(1/q)$$

(sommation rationnelle :

$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$ est dit rat. sommable si
$\sum u_i T^i$ est une fract. rat. $R(T)$ sans pôle en $T=1$)
On dira que la "somme rationnelle" est $R(1)$.

Le cas $\omega = f(x)\, dx_1 \dots dx_n$ où f est à voisinement monom
$(f(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ loc^t) se calcule explicitement.)

$$\left(\int_{\mathcal{O}_K} \|x\|^\alpha\, dx = \frac{q^\alpha}{1 + q + \dots + q^\alpha}\right)$$

J.-P. Serre

Th. d'Igusa :

K local car. 0 $\quad f \in \mathcal{O}_K[x_1, \dots x_N]$

$a_n = \mathrm{Card}\{x / f(x) \equiv 0 \mod \pi^n\}$ $\quad \sum a_n T^n$ fr. rat. de T.

Sur $\mathbb{F}_q$, il existe $\varphi(X_1, \dots X_d)$ de degré d, $\varphi(x_1, \dots x_d) \neq 0$ si $x_i \in \mathbb{F}_q$ non tous nuls. Soit $\Phi(X_1, \dots X_d)$ un relèvement dans $\mathcal{O}_K$. Alors

$$|\Phi(x_1, \dots, x_d)| = (\sup |x_i|)^d.$$

Corollaire : dans le thm d'Igusa, on peut remplacer f par une famille finie de $(f_i)_{1 \leq i \leq d}$, par $f = \Phi(f_1, \dots, f_d)$.

Applications de mod ω.

1. Mesure de Haar.
2. Formule d'intégration de H. Weyl.
3. Formule de masse pour compter les ext. de K de degré donné. C.C. R 286, 1978).

1. Soit G un gr. de Lie sur K. Soit ω une forme différentielle de degré maximum n non nulle sur G invariante à gauche (resp. à droite). Alors mod(ω) est une mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur G.

(ω est déterminée par une forme linéaire sur $\Lambda^n \mathfrak{g}$)

Si $g \in G$, soit $\mathrm{Ad}(g) : x \to gxg^{-1}$

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

On dira que G est L-unimodulaire si

$\cdot \ \forall g \in G, \ \det(\mathrm{Ad}(g)) = 1$

$\Leftrightarrow$ la représ. adj de G sur dét $\mathfrak{g}$ est triviale

$\Leftrightarrow$ il existe une forme ω de degré maximum biinvariante (resp. inv. d'un côté) (resp. toutes)

Remarque :

G unimodulaire $\Leftrightarrow \forall g \in G$, $\|\det \mathrm{Ad}\, g\| = 1$

Donc L unimodulaire $\Rightarrow$ modulaire.

G compact $\Rightarrow$ G unimodulaire
G compact $\not\Rightarrow$ G L-unimodulaire

G réductif $\Rightarrow$ G L-unimodulaire.

Soit $X = G/H$ un espace homogène. Si G et H sont unimodulaires, il y a une mesure invariante sur G/H. Elle est déterminée par la donnée d'une mesure de Haar μ_G sur G et d'une μ_H sur H par la formule : $\mu_{G/H} = \mu_G / \mu_H$

$$\left(\int_G \Phi(x)\, \mu_G(x) = \int_{G/H} \left(\int_H \Phi(xh)\, \mu_H(h) \right) \mu_{G/H}(x) \right)$$

Si G et H sont L-unimodulaires, on peut faire ceci avec des formes différentielles au lieu de mesures.

2. Formule de Hermann Weyl

a) Rappel sur $K = \mathbb{R}$.

Soit G un groupe de Lie réel compact et connexe, T un tore maximal de G.

Soit Φ une fonction sur G, dx une mesure de Haar sur G, dt une mesure sur T, dy la mesure sur G/T associée sur G/T (donc caractérisée par $\mathrm{Vol}(G) = \mathrm{Vol}(T)\ \mathrm{Vol}(G/T)$)

Alors

$$\int_G \Phi(x)\, dx = \frac{1}{|W|} \int_T |D(t)| \left(\int_{y \in G/T} \Phi(yty^{-1})\, dy \right) dt$$

où $|W|$ = cardinal du groupe de Weil

où $D(t) = \prod (1 - \alpha_i(t))$ où les α_i sont les racines

b) Soit K local (cf Harish Chandra, LN 162, lemme 42).

Soit $\underline{G}$ un groupe alg. réductif connexe $/K$ et $G = \underline{G}(K)$ les points K-rationnels de $\underline{G}$. Soit $\underline{H}$ un sous-groupe de Cartan de $\underline{G}$ et $H = \underline{H}(K)$. Alors $\underline{H}$ est un tore.

On s'intéresse à la réunion des conjugués de H par G.

Soit $x \in G$. $\mathrm{Ad}\, x$ agit sur $\mathrm{Lie}(G)$

Soit $n = \dim G$ $\quad l = \mathrm{rang}\, G = \dim H$ $\quad m = n - l$

Val. propres de $\mathrm{Ad}\, x = \{1$ avec mult $\geq l$

On dit que x est régulier si la val. propre 1 de $\mathrm{Ad}(x)$ est de mult. l. On pose alors $D(x) = \prod_{i=1}^{m} (1 - \alpha_i(x))$ (si x non régulier, on peut poser $D(x) = 0$)

(ex: $x \in GL_l$ est régulier $\Leftrightarrow$ val. propres distinctes)

Autre caractérisation de régulier:

x régulier $\Leftrightarrow$ x appartient à un et un seul sous-groupe (à valeurs sur K ou sur $\overline{K}$) de Cartan : c'est la comp. neutre du centralisateur de x.

Soit $G^{\text{rég}}$ = l'ens. des éléments réguliers de G et $H^{\text{rég}} = \{$ens. des él^{ts} réguliers dans G de $H^{\text{rég}}\}$

Soit $G_H^{\text{rég}}$ = image de $H^{\text{rég}} \times G/H \to G^{\text{rég}}$

$= \{$pts réguliers de G conj. sur K à un pt de $H\}$.

$G_H^{\text{rég}}$ est ouvert dans $G^{\text{rég}}$, $H^{\text{rég}} \times G/H \to G_H^{\text{rég}}$ est un revêtement étale de groupe de Galois $W_H = N_G(H)/H$.

Soient ω_G, ω_H, $\omega_{G/H} = \omega_G/\omega_H$ des formes différentielles non nulles définies invariantes $\neq 0$ sur G, H, G/H.

Soit $\pi : H^{reg} \times G/H \longrightarrow G^{reg}$. On a

(A) $$\pi^*(\omega_G) = D_H\, \omega_H \otimes \omega_{G/H}.$$

Soient $\mu_G, \mu_H, \mu_{G/H}$ les mesures associées, qui sont compatibles. On a

$$\pi^*(\mu_G) = \|D_H\|\ \mu_H\ \mu_{G/H}$$

Pour toute Φ intégrable sur G

Corollaire: $$\int_{G_H^{reg}} \Phi(x)\, \mu_G(x) = \frac{1}{W_H} \int_H \|D_H(h)\| \left(\int_{G/H} \Phi(yhy^{-1})\, \mu_{G/H}(y)\right) \mu_H(h)$$

Corollaire: Si G/H compact, et Φ fonct. centrale, intégrable, on a

$$\int_{G_H^{reg}} \Phi(x) \mu_G(x) = \frac{1}{W_H} \int_H \|D_H(h)\|\, \Phi(h)\, \mu_H(h) \cdot \mathrm{Vol}(G/H)$$

Thm (Hermann-Weyl et Harish-Chandra)

Soient (H_α) les différents sous-groupes de Cartan à conj. près (il y en a un nbre fini si car $k_* = 0$, dém. sinon).

Alors $$\int_G \Phi(x)\, \mu_G(x) = \sum_\alpha \int_{G_{H_\alpha}^{reg}} \Phi(x)\, \mu_G(x)$$

Dém: le fait que le revêt. soit étale résulte de (A).

$(h, y) \longrightarrow (nhn^{-1}, yn^{-1})$ est une opération sur $H^{reg} \times G/H$ de W_H compatible avec π qui en fait un revêt. gal. (car l'action est libre et transitive sur les fibres

Dém. de A en un point (h_0, y_0). On se ramène au cas où $y_0 = 0$.

On a $T_{h_0}(H) = \mathfrak{h}$, $\quad T_1(G/H) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

$T_{h_0}(G) \simeq \mathfrak{g}$ par transl. à droite.

On a

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathfrak{h} & \to & \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h} & \to & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} & \to & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow D & & \downarrow \gamma\ 1-\mathrm{Ad}\,h_0 & & \\ 0 & \to & \mathfrak{h} & \to & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} & \to & 0 \end{array}$$

Fixons $y = y_0 = 1$. Alors $\pi_{|H \times \{1\}} = \mathrm{Id}$. Donc $a = 1$.

Fixons $h = h_0$. Alors $\pi_{|h_0 \times G/H}$ composé avec l'excl à droite par h_0^{-1} est :

$y \longrightarrow y h_0 y^{-1} h_0^{-1}$, dont l'applic. tangente est

$u \longmapsto u - \mathrm{Ad}\, h_0(u)$

$g/h \longrightarrow g$.

3). <u>Formule de masse pour les ext. séparables tot^t ramifiées de K de degré l donné.</u>

Soit $\bar{K}$ une clot. sep de K, L les sous-ext sép. tot ramifiées de K de degré l sur K. L'ensemble de ces L sera noté Σ_l.

À tout L ext de K attribuons le poids $\dfrac{1}{q^{c(L)}}$

où :

$$\begin{cases} \text{disc } L \text{ est l'idéal de } O_K \text{ disc} \\ \text{disc } L = \pi^{d(L)} O_K \\ \quad (d(L) = v_L(\text{différente de } L/K) = v_L(f'(x))\ \text{si } x \text{ unif.} \\ \text{de } K,\ f(x) = x^l + a_1 x^{l-1} + \dots + a_l = 0,\quad a_i \in O_K). \\ d(L) = l - 1 + c(l) \qquad (\text{avec } c(l) = \begin{cases} 0 \text{ si } L \text{ modérée} \\ > 0 \text{ si } L \text{ sauvage} \end{cases}) \end{cases}$$

<u>Théorème 1</u> $\displaystyle\sum_{L \in \Sigma_l} \underset{\frac{1}{q^{c(L)}}}{\text{poids}(L)} = l$. <u>De plus la somme est finie si</u> $\mathrm{car}\, K = 0$ <u>ou si</u> $\mathrm{car}\, K = p \neq 0$ <u>et</u> $p \nmid l$.

<u>Variante</u>: Soit S_l un ens. de représ des ext. sép. tot. ramifiées de K de degré l (à isom. près). Soit $w(L) =$ nbre de K-autom de L.

<u>Théorème 2</u> : $\displaystyle\sum_{L \in S_l} \frac{1}{w(L)\, q^{c(L)}} = 1.$

Soit D un corps gauche sur K de degré ℓ^2. Il contient toutes les ext. de K de degré ℓ.

Soit $G = D^\times$ le groupe mult. de D.

C'est le gr. mult. des points rat d'un gr. alg. $\underline{D}^*$, isomorphe à GL_ℓ sur $\overline{K}$.

Les sous gr. de Cartan de D^* déf$/K$ sont les él^{ts} inver. des sous-corps L de D, de degré ℓ, séparables sur K.

Soit v_D la valuation de D^* normalisée pour que $v_D(D^*) = \mathbb{Z}$. Pour $x \in K^*$, $v_D(x) = \ell\, v(x)$

Si $L \subset D$ tot^t ramifiée sur K, $v_D = v_L$

On a $v_D = v_K \circ Nrd_{D/K}$.

Soit $\Omega = \{x \in D^* / v_D(x) = 1\}$. C'est une classe multiplicative modulo $U_D = \{$unités de $D\}$. Choisissons la mesure de Haar sur $D^\times$ de sorte que $vol(U_D) = 1$ (d'où $Vol(\Omega) = 1$)

$\Omega^{rég} = D^{*\,rég} \cap \Omega$ est formé des $x \in \Omega$ séparables sur K.

(si $x \in \Omega$, $L_x = K(x)$ est de degré ℓ, tot ramifié sur K).

Soit S_ℓ des représ. des ext. tot. ramifiées séparables de degré ℓ et pour chaque $L \in S_\ell$, soit un plongement fixé de L dans D.

Soit $\Omega_L = \Omega \cap (\text{conj. de } L) = \{x \in \Omega \,/\, K(x) \simeq L\}$.

On a:

$$1 = \sum_{L \in S_\ell} vol(\Omega_L)$$

Tout revient à prouver que $vol\, \Omega_L = \dfrac{1}{w(L)\, q^{c(L)}}$

Appliquons la formule d'intégration de H. Weyl à la fonction caractéristique de Ω_L (qui est centrale)

On a $vol(\Omega_L) = \dfrac{1}{|W(H_L)|} \displaystyle\int_{L^*} \|D_H(h)\|\, \Phi(h)\, dh$

(où $H_L = \underline{L}^*$)

On a $W(H_L) = \mathrm{Aut}_K(L)$ (Skolem-Noether).

Donc $|W(H_L)| = W(L)$.

dh est choisie de sorte que $\mathrm{Vol}(D^*/L^*) = 1\}$.

On a calculer $\int_{\mathrm{Lig}(L)} \|D_H(h)\| \, dh$ et à prouver que cela vaut $\frac{1}{q^{c(L)}}$

Comme $D^*/L^* = U_D/U_L$, la mesure dh est à choisir de sorte que $\mathrm{Vol}(U_L) = 1$.

On va voir que sur $\mathrm{Lig}(L)$, $\|D_H(h)\|$ est constante égale à $\frac{1}{q^{c(L)}}$

Pour GL_ℓ, la fonction D est égale à $\prod_{i \neq j} (1 - \lambda_i/\lambda_j)$ où les λ_i sont les val. propres de x. Or $D^\times$ est isomorphe à GL_ℓ sur $\bar{K}$.

Si $x \in L^*$, les λ_i sont les $\sigma_i(x)$ où σ_i décrit les plongements de L dans $\bar{K}$.

Donc $D(x) = \prod_{i \neq j} \left(\frac{\sigma_j(x) - \sigma_i(x)}{\sigma_j(x)} \right) = \frac{\prod_j f'(\sigma_j(x))}{\left(\prod_j \sigma_j(x)\right)^{\ell-1}} = \frac{N(f'(x))}{N_{L/K}(x)}$

Or $\|N_{L/K}(x)\| = q^{-v_K(N_{L/K}(x))} = q^{-v_D(x)} = q^{-1}$

$\|N(f'(x))\| = q^{-v_K(\mathrm{Disc}(L))}$

Donc $\|D(x)\| = q^{\ell - 1 - v_K(\mathrm{Disc}(L))} = q^{\ell - 1 - d(L)} = q^{-c(L)}$

C.Q.F.D.

Remarques : 1) si $p \nmid \ell$, la formule* peut se démontrer directement trivialement.

2) Krasner a déterminé le nombre d'ext. de K avec $c(L)$ donné.

Si car $K = p$ et $c = c(L)$ tel que $p \nmid c$, on a comme nombre
$c\,(q-1)\, q^{[c/p]}$

$f = x^\ell + a_1 x^{\ell-1} + \dots + a_\ell$

Soit Eis_ℓ le pol. d'Eisenstein de degré ℓ. On a

$$\mathrm{Eis}_\ell \xrightarrow{\text{surj.}} S_\ell$$

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{Eis}_\ell) = \frac{1-q^{-1}}{q^\ell}$$

La fibre de L est donnée par le nif $L \to \mathrm{Eis}_\ell$. (qui est étale)

1 Intégration dans le cas lisse

Soit $\underline{X}$ un schéma lisse partout de dimension m sur Spec O_K

Alors $X = \underline{X}(O_K)$ = pts entiers de $\underline{X}$ est une variété K-analytique

compacte lisse de dimension m.

On a une mesure canonique sur X:

Soit $X_n = X(O_K/\pi^n O_K)$ $\quad (n \geq 1)$

On a $X = \varprojlim X_n$.

De la lissité résulte que $X_n \to X_{n-1}$ sont surjectives, avec fibres ayant q^m éléments.

Soit μ_n la mesure sur X_n caractérisée par $\mu_n(1 \text{ point}) = q^{-mn}$.

La projection $X_n \to X_{n-1}$ transforme μ_n en μ_{n-1} et la limite projective définit une mesure μ sur X, caractérisée par la propriété suivante:

Toute fibre $X \to X_n$ a pour mesure q^{-nm}

En particulier $\mu(X) = q^{-m} \operatorname{Card}(X_1)$

Exemple: 1) $X = SL_2$

Le nombre de pts mod π est $(q^2-1)q = q^3(1-\frac{1}{q^2})$ et $\mu(SL_2(O)) = 1 - \frac{1}{q^2}$

2) Pour tout groupe semi-simple, $\mu = 1 + O(\frac{1}{q^2})$

La mesure μ est liée aux mesures associées aux formes différentielles

Soit α forme différentielle sur X, de degré m. Pour tout $x \in X$, $T_x(X)$ contient le O_K-réseau $T_x(\underline{X})$, et donc pour tout x, Ω_x^m contient un O_K-réseau canonique, ce qui permet de parler de $\|\alpha\|_x \in \mathbb{R}$.

Théorème : $\operatorname{mod}(\alpha) = \|\alpha\| \mu$.

(Localement pour la top étale, un schéma lisse est la même chose qu'un esp. affine)

Corollaire : si α est une forme différentielle sur $\mathcal{O}_K$, dont la réduction $\tilde{\alpha}$ modulo π est partout non nulle sur $\underline{X} \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ (ce qui entraîne $\|\alpha\|_x = 1$ pour tout x), alors $\mathrm{mod}(\tilde{\alpha})$ est la mesure canonique μ.

Désintégration d'une mesure (Intégration sur les fibres — d'un pt de vue ailleurs, sommes exponentielles).

1. Cas général.

Soit $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme analytique de variétés analytiques lisses de dim. n et r respectivement.

Soient α_X, α_Y des formes différentielles de degré maximum sur X et Y, α_Y étant partout non nulle.

Hypothèse : f est une submersion.

Pour tout $y \in Y$, $X_y = f^{-1}(y)$ est une sous-variété fermée de X. Sur chaque fibre X_y, on a une forme différentielle $\theta_y = \alpha_X / \alpha_Y$ ainsi définie

Soit $x \in X$: il existe au voisinage de x une forme β de degré $n-r$ telle que $\alpha_X = \beta \wedge f^*\alpha_Y$ au voisinage de x. Alors $\theta_y = \beta \mid X_y$ au voisinage de x (si $y = f(x)$).

Autre déf. possible : si $y = f(x)$ on a

$$0 \to T_x X_y \to T_x X \to T_{f(x)} Y \to 0 .$$

Il en résulte $\det (T_x X)^* = \det(T_x(X_y))^* \otimes \det(T_{f(x)} Y)^*$

on a $\underset{\alpha_X}{\uparrow}$ $\underset{\alpha_Y}{\uparrow}$

d'où l'élément θ unique tel que $\alpha_X = \theta \otimes \alpha_Y$ au point x.

Théorème de Fubini : Si Φ est intégrable sur X, on a

$$\int_{x\in X} \Phi(x)\, \|\alpha_X(x)\| = \int_Y \left(\int_{x\in X_y} \Phi(x) \|\theta_y(x)\| \right) \|\alpha_Y(y)\|$$

(où $\|\ \|$ désigne mod).

On a $\alpha_X = \int_{y\in Y} \|\theta_y\| \ \ \|\alpha_Y(y)\|$

Si α_X et α_Y sont partout non nuls, idem pour θ_y et si Φ est loc^t constante à support compact, alors

$$y \mapsto \left(\int_{x\in X_y} \Phi(x) \|\theta_y(x)\|\right) \stackrel{\text{déf.}}{=} F(y) \text{ est loc}^t \text{ constante à}$$

support compact.

Le cas où X est compact et Y aussi (et α_X et α_Y partout non nulles)

Soit $F(y) = \int \|\theta_y\|$: c'est une fonction localement constante de y

Soit U un voisinage ouvert compact de y_0 sur lequel F est constant. Alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert compact de X et on a

$\text{mes}\, f^{-1}(U) = F(y_0)\ \text{mes}\, U$.

Autrement dit :

Proposition : $F(y_0) = \dfrac{\text{mes}\, f^{-1}(U)}{\text{mes}\, U}$ pour tout U assez petit.

Exemple : $X = \mathcal{O}_K^m \qquad Y = \mathcal{O}_K^r \qquad \alpha_X = dx_1 \ldots dx_m \quad \alpha_Y = dx_1 \ldots dx_r$

$f = (f_1, \ldots, f_r)$ polynômes à coeff. dans $\mathcal{O}_K$ avec matrice jacobienne de rang r en tout point.

Soit $y_0 = (y_1^0, \ldots, y_r^0) \in Y \qquad$ Soit $U = \{ y \equiv y_0 \mod \pi^n \}$.

$$f^{-1}(U) = \{ x \mid f_i(x) \equiv y_i^0 \mod \pi^n \}$$

Soit $a_n(y^0) = \text{Card}\{$solutions mod π^n de $f(x) - y^0 \equiv 0 \mod \pi^n\}$

On a $\text{mes}\, f^{-1}(U) = a_n(y^0)\, q^{-mn}$

$\text{mes}\, U = q^{-rn}$

Par suite $F(y^0) = q^{-(n-r)r} \alpha_n(y^0)$ pour r grand.

(Remarque : si le jacobien est partout inversible, r grand signifie en fait $r \geq 1$; si on connaît un majorant des val. abs. du jacobien, on peut préciser r grand).

Cas avec singularité

Soit $Y = K$; $\alpha_Y = dy$

X = variété compacte de dimension m, α_X partout non nulle.

On ne suppose plus que f est une submersion en x.

Appelons point critique de f un $x \in X$ tel que $df(x) \neq 0$
valeur critique $f(x)$ si x est critique.

L'ensemble des valeurs critiques est un compact C de K

L'ensemble des points " " " " X_c de X

$X - f^{-1}(C) \longrightarrow K - C$ est une submersion.

Sur $K - C$ on a une fonction $F : K - C \longrightarrow \mathbb{R}$, loc^t constante

Théorème (Sard) : Si Car $K = 0$, C est fini

(Sur les points lisses de X_c, $df = 0$ et donc f est loc^t constante

En car p c'est faux : ex : $\mathcal{O}_K \times \dots \times \mathcal{O}_K \longrightarrow K$
$(x_1, \dots x_p) \mapsto x_1^p + \pi x_2^p + \dots + \pi^{p-1} x_p^p$

a différentielle nulle et image $\mathcal{O}_K$.

Supposons K de car. 0 et 0 seule valeur critique (c'est loisible par Baird). Supposons que le germe de f est ≠ 0 en tout point.

Les trois fonctions F, F*, Z

1. $F(y) =$ mesure $(X_y) = \lim\limits_{U \to y} \dfrac{\text{mes}\, f^{-1}(U)}{\text{mes}(U)}$

(F à val. réelles ≥ 0, définie sur $K - \{0\}$, loc^t constante, à support borné, dans L^1 ; on a $\int_{K-\{0\}} F(y) = \text{mes}\,(X)$.

2. $F^*(t) = \int_K F(y)\,\psi(ty)\,dy = \int_X \psi(t f(x))\,dx$

3. Soit ω un caractère continu de K^* ; il est caractérisé par sa restriction χ à U_K et sa valeur $T \in \mathbb{C}^*$ sur l'uniformisante.

Soit $\omega = \omega_{\chi, T}$

Si $|T| \leq 1$, $F(y)\,\omega(y)$ est sommable et on pose

$$Z(\omega) = \int_{K-\{0\}} F(y)\,\omega(y) = \int_{X - f^{-1}(0)} \omega(f(x))\,dx$$

Théorème : Pour χ fixé, $Z_\chi(T)$ est une fonction rationnelle de T et égale à 0 pour presque tout χ.

Variante de 3

Tout $t \in K^*$ se décompose en $u\pi^e$ avec $u \in U_K$, $e \in \mathbb{Z}$. e sera appelé la partie polaire. Un secteur angulaire sera un $\Omega\pi^{\mathbb{Z}}$ où Ω est un ouvert fermé de U_K.

Soit $X_{\Omega,e} = \{x \mid f(x) \in \Omega\pi^e\}$ c'est un ouvert compact.

Soit $a(\Omega, e)$ la mesure de $X_{\Omega,e}$

Exemple : si $\Omega = U_K$, $X_{\Omega,e} = \{x \mid v(f(x)) = e\}$

<u>Théorème</u> : $\sum_{e \gg -\infty} a(\Omega, e)\, T^e$ est une fonction rationnelle $r_\Omega(T)$ (dépendant de façon additive de Ω)

Lien entre $r_\Omega(T)$ et $\begin{cases} Z_\chi & \text{d'une part} \\ F & \text{de l'autre} \end{cases}$

1. <u>Lien entre r_Ω et Z_χ</u> :

Soit $\chi \in \hat{U}_K$. On peut écrire $\chi = \sum_{u_i \in U/U'} \chi(u_i)\, 1_{\Omega_i}$

où $\Omega_i = u_i U'$ et U' sous gp. d'ind. fini de U.

On a $Z_\chi(T) = \int_X \omega(f(x))\, dx = \sum_{i,e} \int_{X_{\Omega_{i,e}}} \omega(f(x))\, dx$

Or sur $\Omega_{i,e}$ $\omega(f(x)) = \chi(u_i)\, T^e$, d'où

$$Z_\chi(T) = \sum_i r_{\Omega_i}(T)\, \chi(u_i)$$

$$r_{\Omega_i}(T) = \sum_{\chi \in \widehat{(U/U')}} \chi(u_j)^{-1} Z_\chi(T) \cdot \frac{1}{(U_K : U')}$$

$$r_{\Omega_i}(T) = \frac{\mathrm{Vol}(\Omega_j)}{1-q^{-1}} \sum_{\chi \in \widehat{(U/U')}} \chi(u_j)^{-1} Z_\chi(T)$$

Comme il n'y a qu'un nbre fini de Z_χ à priori non nuls, on a :

Si Ω est un voisinage assez petit d'un point u, on a

$$r_\Omega(T) = \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{1-q^{-1}} \sum_\chi \chi(u)^{-1} Z_\chi(T)$$

(autrement dit $\Omega \to r_\Omega(T)$ est une distribution de densité $\frac{1}{1-q^{-1}} \sum_\chi \chi(u)^{-1} Z_\chi(T)$ par rapport à la mesure usuelle).

2. <u>Lien entre $r_\Omega(T)$ et F</u>

Soit $t = u\pi^e$ Soit Ω voisinage petit de u

$$F(t) = \frac{\mathrm{Vol}(f^{-1}\Omega\pi^e)}{\mathrm{Vol}(\Omega\pi^e)} = \frac{a(\Omega, e)}{q^{-e}\,\mathrm{Vol}(\Omega)}$$

$$F(u\pi^e) = q^e \frac{a(\Omega, e)}{\mathrm{Vol}(\Omega)} = \frac{q^e}{1-q^{-1}} \left\{ \text{coeff de } T^e \text{ dans } \sum_\chi \chi(u^{-1})\, Z_\chi(T) \right\}$$

Soit $\tilde{X} \to X$ un éclatement de X tel que en chaque point de $\tilde{X}$,

$(f \circ h) = \sum N_i (z_i)$

$(h^* \alpha) = \sum \nu_i z_i$

Autrement dit localement, $f = z_1^{N_1} \cdots z_m^{N_m}$

$h^* \alpha = \prod z_i^{\nu_i - 1} dz_i$

Les pôles des $Z_\chi(T)$ sont de la forme q^λ avec

$N_i \lambda \equiv \nu_i \mod 2\pi i / \log q$.

J. P. Serre — Le 15/2/82

Soit X variété anal. compacte lisse de dim n, $f : X \to K$ une fonction anal, 0 seule valeur critique de f.

On se ramène facilement au cas où $X = O_K^n$ (Igusa traite le cas polynome)

Soit α différentielle de degré maximum sur X, partout non nulle

$$F(y) = \int_{X_y} |\theta_y| \qquad \begin{matrix}(y \in K - \{0\}) \\ (X_y = f^{-1}(y))\end{matrix}$$

où $\theta_y = \alpha_x / dy$

$$F^*(t) = \int_K \psi(ty) F(y)\, dy = \int_X \psi(t f(x)) \|\alpha(x)\|$$

On s'intéresse au comportement de F si $y \to 0$ et F^* si $t \to \infty$.

$$Z(\omega) = \int_X \omega(f(x)) \, \|\alpha(x)\|$$ défini par prolongement analytique. (ω car. de K)

(en fait $K^* \simeq U_K \times \pi^{\mathbb{Z}}$.
$\omega \Leftrightarrow (\chi, T)$ $\qquad \chi = \omega_{|U_K}$ $\quad T = \omega(\pi)$)

$Z(\omega)$ converge si $|T| \leq 1$ et, en car. 0, est une fraction rat. de T

Par résol. des sing, on se ramène au cas où

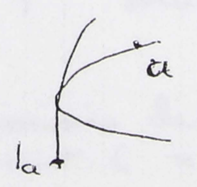
$$f = c\, z_1^{N_1} \cdots z_m^{N_m}$$
$$\alpha = c' (z_1^{\nu_1 - 1} dz_1 \wedge \cdots \wedge z_m^{\nu_m - 1} dz_m)$$

Donc $\operatorname{div}(f) = N_1(z_1) + \cdots + N_m(z_m)$
$\operatorname{div}(\alpha) = (\nu_1 - 1)(z_1) + \cdots + (\nu_m - 1)(z_m)$.

<u>Exemple</u>: $f = y^2 - x^3$ $\qquad \omega = dx\,dy$

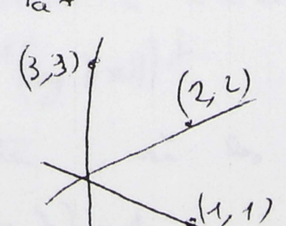
(N, ν)
$a \cdot (1,1)$

Après un éclatement

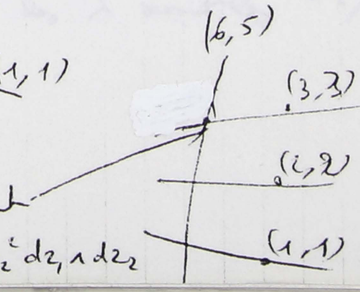


$b \cdot (2,2)$

deux



trois



en ce point on a
$f \sim z_1^6 z_2^3$ $\quad \omega \sim z_1^4 z_2^2 \, dz_1 \wedge dz_2$

On va supposer qu'on est en car. 0, ou en car. p, avec $p \nmid N_i$.

Théorème (Igusa) $Z_\chi(T)$ est une f^{ct} rat. de T, nulle pour presque tout χ, avec comme pôles au plus $T = \xi\, q^{\nu_i/N_i}$ ($\xi^{N_i} = 1$), la mult. d'un tel pôle étant $\leq$ nbre de couples (ν_i, N_i) avec (ν_i/N_i) donné passant par le même point, donc $\leq m = \dim X$.

Dans l'exemple, cette multiplicité est donc ≤ 1.

Par chang^t de variable, si l'un des N_i est $\neq 0$, on peut supposer c constante par chang^t de variable.
Pour ω aussi, car ω n'intervient que par $|\omega|$ on peut supposer ω constante.

$$\int \omega(c)\,\omega(z_1)^{N_1} \cdots \omega(z_m)^{N_m} \|z_1\|^{\nu_1 - 1} \cdots \|z_m\|^{\nu_m - 1}\, dz$$

Calcul de $\int_{O_K} \omega(z)\, dz$: c'est $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\pi^n U} \omega(z)\, dz$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} T^n \int_U \chi(u)\, |du|\; q^{-n} = \begin{cases} \dfrac{1-q^{-1}}{1-q^{-1}T} & \text{si } \chi = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par suite $\omega^{N_i}(z)\, \|z\|^{\nu_i - 1}$ correspond à (χ', T') avec

$$\chi' = \chi^{N_i}, \quad T' = T^{N_i} q^{-(\nu_i - 1)}$$

Donc $\int \omega(f(x))\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si l'un des } \chi^{N_i} \text{ est } \neq 1 \\ \omega(c) \prod_{i=1}^{m} \dfrac{1-q^{-1}}{\left(1 - q^{-\nu_i} T^{N_i}\right)} \end{cases}$

avec si $c = v q^{\rho}$, $\omega(c) = \chi(v) T^{\rho}$

Au voisinage d'un point où $f(x) \neq 0$. Alors f s'écrit localement $c(1 + \pi^M z_1)$
$\alpha = dz_1 \ldots dz_m$.

On a alors $Z\chi = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi_{|1+\pi^M O} \neq 1. \\ C^{te}\, T^{c^{te}} & \text{sinon.} \end{cases}$

Théorème : Pour x voisin de 0, $F(x)$ est comb. lin de fonctions du type suivant ($x = u\pi^e$)

$$\varphi(u)\, \|x\|^{\lambda - 1} (\log \|x\|)^j$$

où φ est loc^t constante, où les λ sont les $\nu_i/N_i + \dfrac{2\pi i}{\log q}\dfrac{a_i}{N_i}$

et j est $\leq$ (mult de λ) $- 1$.

Cela résulte de

$$F(u\pi^e) = \frac{q^e}{1-q^{-1}}\left\{\sum \text{coeff de } T^e \text{ ds } \sum_{\chi} \chi(u^{-1})\, Z_\chi(-T)\right\}$$

Exemple: Soit $\lambda_0 = \inf(\mathrm{Re}\,\lambda)$ et supposons qu'il y ait mult. 1. Alors

$$F(x) = O\left(\|x\|^{\lambda_0 - 1}\right) \quad \text{si } x \to 0.$$

Cas particulier: Les ν_i/N_i sont, pour chaque point > 1, sauf (au plus pour chaque pt) 1, qui est égal à 1.

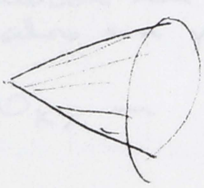
Alors $Z_\chi(T)$, $\chi = 1$ a un pole simple en $T = q$

Dans $|T| \leq q$, seul $Z_1(T)$ a un pôle (au plus) qui est $T = q$, avec mult. 1.

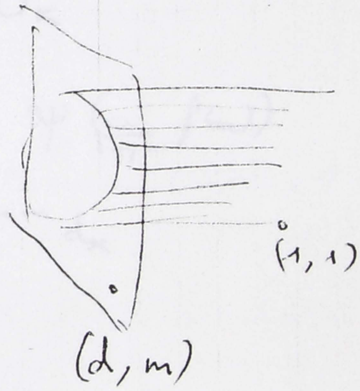
Dans ce cas F est continue au point 0 et sa valeur $F(0)$ est donnée par

$$F(0) = \int_{X_0^{\text{rég}}} \theta_0$$

Exemple: Soit f un polynôme homogène de degré d en m variables, "non singulier" (i.e. l'hypersurface $f = 0$ de P_{m-1} est lisse.



après éclatement $\longrightarrow$



On est dans le cas favorable si $m > d$.
Dans ce cas F est continue en 0 et $F(0)$ est le volume du cône pour la forme différentielle.

Exercice $y^2 - x^3 = 0$

a_n nbre de sol. mod p^n de $y^2 - x^3 \equiv 0 \bmod p^n$.

$$F(x) \simeq c' \cdot \|x\|^{-1/6}$$

$$p^{-2n} a_n = \mathrm{vol}(f \equiv 0 \bmod p^n) = \int_{p^n O_K} F(x)\,dx \simeq C'' p^{-n\,5/6}$$

$$a_n \simeq p^{n\,7/6}$$

$F \longrightarrow F^*$

F est comb. lin de $\chi(u)\, \|x\|^{\lambda - 1} (\log \|x\|)^j$

F^* " " " " $\chi^{-1}(x)\, \|x\|^{-\lambda} (\log \|x\|)^{j'}$ $\quad j' \leq j$.

Corollaire : F^* est comb. lin. finie de f^{ts} de ce type (avec mêmes λ_i et j's mult. du pôle) et F^* a un dév^t asympt. pour $x \to \infty$.

Si $\lambda = 1$ figure dans F, $\chi = 1$, $j = 0$ (ie 1 au vois. de 0), la transf. de Fourier correspondante intérieure s'annule au vois. de ∞)

En part. cas favorable $\nu_i > N_i$ sauf 1 $\to$ disparaît dans F^* et $\|F^*(x)\| = O(\|x\|^{-\inf_{\nu_i \neq N_i}(\nu_i/N_i)})$

Exemple : f homogène de d° d, en $m > d$ variables.

Les (N, ν) qui interviennent sont les (d, m) et $(1, 1)$

$\lambda = \frac{m}{d}$ $\quad \|F^*(x)\| \simeq c\,\|x\|^{-\frac{m}{d}}$

La fonction F^*

Supposons que $X = O_K \times \dots \times O_K$, $\quad \alpha = dx_1 \dots dx_m$

$f \in O_K[x_1, \dots x_m]$

ψ est trivial sur O_K, non trivial sur $\pi^{-1} O_K$

O_K est alors son propre orthogonal pour ψ.

Si $a \in O_K$, on pose $g(a, n) = \sum_{x \bmod \pi^n} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right)$

On a en fait $g(a, n) = \int \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) q^{+nm} dx$

$= q^{nm} F^*\left(\frac{a}{\pi^n}\right)$

L'est. triviale est $|g(a, n)| \leq q^{nm}$

Igusa donne $g(a, n) \leq C^{te}\, q^{nm} q^{-\frac{mn}{d}}$

De façon générale, $g(a, n) = O(q^{n(m-\lambda)})$

Soit $t \in O_K / \pi^n O_K$ et $a(t) = \text{Card}\{\text{sol. de } f(x) \equiv t \bmod \pi^n\}$ dans $(O_K/\pi^n O_K)$

On a :

$$g(b, n) = \sum_{t \in O_K/\pi^n O_K} a(t)\, \psi\left(\frac{bt}{\pi^n}\right)$$

$$a(t) = \sum_{b \in O_K/\pi^n O_K} \psi\left(-\frac{bt}{\pi^n}\right) g(b, n) \quad q^{-nm}$$

Supposons f homogène de degré d, et que pour tout $x_1, \dots, x_m$ dans O_K, non $\equiv (0, \dots, 0) \bmod \pi$, l'une des dérivées partielles

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est $\not\equiv 0 \bmod \pi$. Autrement dit la réduction mod π est non singulière sur le corps résiduel.

Pour $n \geq 2$ Soit a une unité

(*) $$g(a,n) = \sum_{x \bmod \pi^n} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right)$$

<u>Lemme</u> : si $n \geq 2$ $$\sum_{\substack{x \text{ rég} \\ \bmod \pi^n}} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) = 0$$

(x rég $\Leftrightarrow$ l'une des $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est $\not\equiv 0 \bmod \pi$).

En effet $$\sum_{y \bmod \pi} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x+\pi^{n-1}y)\right) = \sum_{y \bmod \pi} \psi\left(\frac{a(f(x)+\pi^{n-1}f'(x)y)}{\pi^n}\right)$$
$= 0$ pour x régulier)

Par suite dans (*) on a $$g(a,n) = \sum_{y \bmod \pi^{n-1}} \psi\left(\frac{a f(y)\pi^d}{\pi^n}\right)$$
$$= \begin{cases} q^{(d-1)m}\, g(a,n-d) & \text{si } n \geq d. \\ q^{m(n-1)} & \text{si } n \leq d \end{cases}$$

$g(a,n)$ dépend de $n \bmod d$. Le cas intéressant est $n \equiv 1 \bmod d$

$$g(a,1+kd) = q^{mk(d-1)}\, g(a,1)$$

Or $|g(a,1)| \leq (d-1)^m q^{m/2}$

d'où $$|g(a,n)| \leq (d-1)^m q^{m(kd-k+1/2)}$$
$$\leq (d-1)^m q^{m(n-k-1/2)}$$

Dans ce cas

$$|F^*(t)| \leq \|t\|^{-\frac{m}{d}} (d-1)^m q^{-m(1/2-1/d)}$$
$$\leq \|t\|^{-m/d}$$ sauf pour un nbre fini de q dépendant de d, m.

Jeudi 25
ZAGIER

Serre

le 22/2/82

Soit $f \in \mathcal{O}_K[x_1,\dots,x_m]$ avec 0 pour seule valeur critique

ν_t = nbre de solutions mod π^n de $f(x) \equiv t \mod \pi^n$.

$$g(a,n) = \sum_{x \bmod \pi^n} \psi\left(\frac{a}{\pi^n} f(x)\right) = q^{nm} F^*\left(\frac{a}{\pi^n}\right)$$

$$\nu_n(t) = \frac{1}{q^n} \sum_{a \bmod \pi^n} \psi\left(-\frac{at}{\pi^n}\right) g(a,n)$$

Soit $F(t) = \int_{f(x)=t} \theta_t \qquad \left(\theta_t = \frac{dx_1 \dots dx_m}{df}\right)$

$$F(t) = \frac{\nu_n(t)}{q^{n(m-1)}} \text{ si } n \text{ est assez grand.}$$

$$\nu_n(t) = q^{n(m-1)} \int F^*(y)\,\psi(-ty)\,dy$$

Stabilité

t fixé. Supposons qu'il existe e, n_0, $1 \leq e \leq n_0$ tels que $f(x) \equiv t \bmod \pi^{n_0}$, $df(x) \not\equiv 0 \bmod \pi^e$ (ie l'une des $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ n'est pas divisible par π^e). Alors

Proposition $\nu_n(t)\, q^{-n(m-1)}$ est constant (et égal à $F(t)$) pour $n \geq n_0+e-1$

(le cas lisse $e = n_0 = 1$: on a stabilité pour $n \geq 1$)

On se ramène par des arguments standards au cas où $f(x) = a + \pi^{\varepsilon} x$ avec $\varepsilon \leq e-1$.

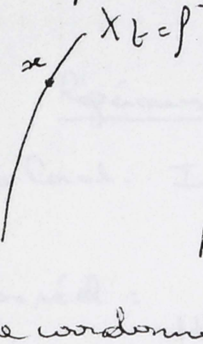
(Par exemple si f quadratique Q à disc. invers., sur $\mathbb{Z}_p$, on est dans le cas lisse si $n \geq 1$ lorsque $p \neq 2$
si $n \geq 3$ lorsque $p = 2$)

Soit $\tilde{\nu}_n(t)$ le nombre de solutions relevables dans $\mathcal{O}_K^m$. On a $\tilde{\nu}_n(t) \leq \nu_n(t)$ (avec égalité dans le cas lisse)

On a $v_n(t) = q^{n(m-1)} a$ si n tend vers ∞ et $a = \int_{f^{-1}(t)} \theta_t = F(t)$

On a $\tilde{v}_n(t) = q^{n(m-1)} \tilde{a}$ si n grand. et $\tilde{a} = \int_{f^{-1}(t)} |\tilde{\theta}_t|$

Description locale de θ_t et $\tilde{\theta}_t$.



Parmi les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en x, soit $\varepsilon = \inf \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)$,

atteint pour la valeur i.

Alors $x_1, \ldots \hat{x}_i, \ldots, x_m$ forment un système de coordonnées locale de X_t en x et on a comme expressions locales

$$\theta_t = \frac{dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_m}{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

$$|\theta_t| = q^{\varepsilon} dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n$$

$$|\tilde{\theta}_t| = dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n.$$

Exercice: Soit f une fonction de Morse, (ie que les pts critiques car $K \neq 2$ isolés avec hessien inversible), en m variables

Alors $|F^*(t)| = O(|t|^{-m/2})$ si $t \to \infty$

(ce qui équivaut à $|g(a,n)| = O(q^{nm/2})$ si $n \to \infty$)

(Indication: localement f s'écrit $\sum a_i x_i^2$, pour laquelle on peut calculer explicitement)

Sous-exercice: application aux sommes de Kloosterman)

Aspect distribution:

Soit Φ loc^t constante, $F_\Phi(t) = \int_{X_t} \phi(x) \theta_t$

$F^*_\Phi(t) =$ transformée de Fourier de F_Φ

$$= \int_X \Phi(x)\, \psi(t f(x))\, dx$$

$Z_\Phi(t) = \int_X \Phi(x)\, \omega(f(x))\, dx$ est une fonction rationnelle de T pour X fixé et Φ fixé, et dépend additivement de Φ

Il existe $b(T)$ pol. $\neq 0$ ne dépendant pas de Φ tel que

$$b(T)\, Z_\Phi(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(\Phi)\, T^n$$ où $a_n(\Phi)$ distribution en Φ

Références

Cas local : Igusa → lecture on forms of higher degree, Tata
Complex powers and as. exp. Crelle 268 et 278

Cas réel : Schwarz - distr.
Hörmander - Lojasiewicz Div. des distributions
Bernstein - Atiyah Pol. anal.
J. E Björk - Rings of diff. operators, North Hol 1979.

Le cas réel

Soit $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$ non nul avec 0 pour seule val. critique.
$\Phi \in \mathcal{D}$ ou $\Phi \in \mathcal{S}$ (si on prenait f analytique au lieu de polynomiale, il conviendrait de se restreindre aux $\Phi \in \mathcal{D}$).

On peut définir F_ϕ, F^*_ϕ, Z_ϕ comme précédemment.

On décompose $\mathbb{R}^* = \{\pm 1\} \times \mathbb{R}^*_+$

les caractères sont $t \mapsto \underset{\omega_s}{\overset{\|\text{déf}}{|t|^s}}$ et $t \mapsto \underset{\omega_s^\circ}{\overset{\|\text{déf}}{\mathrm{sgn}(t)|t|^s}}$

On a donc deux fonctions

$$Z_\Phi(s) = \int_X \Phi(x)\, \omega_s(f(x))\, dx = \int_X \Phi(x)\, |f(x)|^s\, dx.$$

$$Z^\circ_\Phi(s) = \int_X \Phi(x)\, \omega^\circ_s(f(x))\, dx$$

qui convergent pour $\mathrm{Re}\, s > 0$

Théorème (Bernstein - Atiyah, S. Gelfand) : $Z_\Phi(s)$ se prolonge en une f.t méromorphe avec au plus des pôles en $-\frac{1}{N}, -\frac{2}{N}, \dots$ etc..., N étant un entier > 0 (dépendant de f) ; la multiplicité est bornée par m.

(la dém se fait par résol. des singularités)

En fait ces résultats sont vrais dans deux cadres :

- X variété analytique, f analytique sur X, $\Phi \in \mathcal{D}(X)$

(alors pour Φ fixé, on a le rés. précédent, mais N dépend de Φ)
N ne dépend pas de Φ lorsque $Supp(\Phi)$ varie dans un compact fixe)

- X var. algébrique non singulière, f régulière sur X,
$\Phi \in \mathcal{S}(X)$

Bernstein a trouvé une démonstration plus élémentaire qui fournit facilement le prolongement analytique mais pas facilement la position des pôles (ce dernier point a été néanmoins mené à bout par Kashiwara)

Il existe un polynome $b(s) \neq 0$ tel que, si f polynome ≥ 0

$$b(s)\, f(x)^s = P(s, x, \tfrac{\partial}{\partial x})\, f(x)^{s+1}$$

(où $P(s, x, \frac{\partial}{\partial x})$ pol. en $\frac{\partial}{\partial x}$ à coeff pol. en s et x.)

On a alors

$$b(s)\, Z_\Phi(s) = \int \Phi(x)\, P(f(x)^{s+1})\, dx$$

Soit P' l'adjoint de P ($(\frac{\partial}{\partial x})' = -\frac{\partial}{\partial x}$ $\quad (f.D)' = D'.f)$)

On a

$$b(s)\, Z_\Phi(s) = \int P'(\Phi)\, f(x)^{s+1}\, dx$$
$$= Z_{P'(\Phi)}(s+1)$$

d'où évidemment le prolongement analytique. Si $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ sont les racines de b les seuls pôles possibles sont les $\alpha_j - i$ $\quad (i \geq 0)$

Exemple : $f(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$

$$P = \Delta = \sum \frac{\partial}{\partial x_i^2}$$

$$\Delta(f(x)^{s+1}) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(2x_i(s+1) f^s)$$
$$= \sum_i (2(s+1) f^s + 4s(s+1) x_i^2 f^{s-1})$$
$$= [2m(s+1) + 4s(s+1)]\, f^s$$
$$= (s+1)(4s + 2m)\, f^s$$

pôles : $-1, -2, \ldots$ et $-\frac{m}{2}, -\frac{m}{2}-1, \ldots$

<u>Exercice</u> : trouver le pol. de Bernstein pour $f = (y^2 - x^3)^2$

Liens avec la division des distributions par un polynôme ou une fct analytique. Soit f anal. réelle $\not\equiv 0$ et D distribution : Il existe Δ telle que $\Delta f = D$.

Théorème prouvé par Hörmander pour les polynômes puis par Lojasiewicz pour les fcts analytiques.

Lojasiewicz prouve aussi son inégalité : si f fct anal, $X = f^{-1}(0)$

$$c' \, d(x, X)^\rho \leq |f(x)| \leq c^{te} \, d(x, X)$$

avec c, c', ρ constante > 0 (sur tout compact)

Analogue ultramétrique (en toute caractéristique) : Greenberg - Schapacher.

Remarque : l'existence de $\frac{1}{f}$ se déduit du prolongement analytique des $Z_\Phi(s)$ si $f \geq 0$ (des Z_Φ et Z_Φ^0 sinon).

En effet soit $Z_\Phi(s)$ développé au voisinage de $s = -1$:

$$Z_\Phi(s) = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n(\Phi)}{(s+1)^n} + \Lambda_\Phi(s)$$ avec Λ_Φ holomorphe au voisin de $s = -1$ et $\Lambda_\Phi(-1) = 0$.

Considérons la distribution $\Phi \to a_0(\Phi)$: c'est une distribution qui est un inverse de f

On a

$$Z_{f\Phi}(s) = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n(f\Phi)}{(s+1)^n} + \Lambda_{f\Phi}(s) = Z_\Phi(s+1)$$

qui est holomorphe en $s = -1$ et sa valeur est $\langle 1, \Phi \rangle$. Donc

Pour $n > 0$, on a $a_n(f\Phi) = 0$

$$a_0(f\Phi) = 1.$$

<u>Remarque</u> : ceci fournit un inverse <u>canonique</u> de f.

Remarque : si P pol. la dist D telle que $DP = 1$ ainsi construite est tempérée. Soit D' la transformée de Fourier de D

On a $D' * P' = \delta$ (Dirac)

Si on veut résoudre $P' f = g$, on a

$$f = D' * g.$$

On a $F^*_\Phi(t) = \int \Phi(x)\, e^{2\pi i t f(x)}\, dx$

$$F^*_\Phi(t) \underset{\text{asympt.}}{=\!=} \sum a_{k,m}(\Phi)\, t^{-\lambda_k} (\log t)^{m_k - 1} \qquad (t \to \infty)$$

(où les $-\lambda_k$ sont les pôles), m_k = mult de λ_k

Pour F_Φ on a un résultat analogue si $t \to 0$.

Serre

K corps global, $\Sigma = \Sigma_\infty \cup \Sigma_f$ places de K

($\Sigma_f = \{$val. discrètes de $K\}$ $\Sigma_\infty = \{$plongts de K dans $\mathbb{C}$ mod. conj.$\}$

$K_v = \hat{K}_v$ complété de K en v $\hat{O}_v$ entiers de K_v si $v \in \Sigma_f$.

(parfois on posera $O_v = \hat{O}_v$, parfois $O_v = K \cap \hat{O}_v$; le contexte décide)

<u>Notations</u> $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ esp. loct compact, $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda - S_0}$ sous-esp ouverts compact
fini

$\coprod (X_\lambda, O_\lambda) = X$ le produit restreint, égal (topologiquement)

à $\varinjlim \left(\prod_{\lambda \in S} X_\lambda \times \prod_{\lambda \in \Lambda - S} A_\lambda \right)$ (pour S fini, $S_0 \subset S \subset \Lambda$)

$\| \text{déf}$
X_S

$A_K = \coprod (\hat{K}_v, \hat{O}_v)$ est un anneau loc compact métrisable.

$I_K =$ élts inversibles de $A_K = \coprod (\hat{K}_v^\times, \hat{O}_v^\times)$
(avec la top induite par
$x \mapsto (x, \frac{1}{x}) \in A_K \times A_K$

<u>Norme des idèles</u> : $Nx = \prod \|x\|_v$ (avec $\|\pi\|_v = \frac{1}{q_v}$ si $v \in \Sigma_f$
$\|x\|_{\mathbb{R}} = |x|$
$\|x\|_{\mathbb{C}} = |x|^2$)

<u>Exercice</u> 1) Si $x \in A_K - I_K$, $\prod \|x\|_v = 0$

2) Si $a_n \in I_K$, $a_n \to a \in A_K$ et $Na_n \to \lambda \neq 0$,

alors $a \in I_K$ et $a_n \to a$ dans I_K.

(en particulier $a \mapsto (a, Na)$ est strict.)
$I_K \to A_K \times \mathbb{R}_+$

Histoire : Idèles (1936) : Chevalley, C.R.
(1936) Weil C.R (Gröβencharaktere.
Adèles (1938) lettre de Weil à Hasse (dém. du thm de Riemann Roch)

Chevalley (1940) : corps de classes.
Artin Whaples (1945) : formule du produit et conséquences.
Tate 1950)
Iwasawa 1950 | Analyse sur les adèles. Eq fct. des fonctions L
Weil 1950

Références : Weil : Basic Number Th.
Cassels Fröhlich
Artin Tate

Th. 1. $K \to A_K$ est discret et cocompact.

1) Corps de nbre. Soit $\hat{K}_\infty = \prod_{v \in \Sigma_\infty} K_v$

$$\left(\hat{K}_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{O}_v\right)/O_K \approx A_K/K.$$

(en fait $0 \to O_K \to \hat{K}_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{O}_v \to A_K/K \to 0$.

$$0 \to \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{O}_v \to \left(\hat{K}_\infty \times \prod_{v\in\Sigma_f} \hat{O}_v\right)/O_K \to \hat{K}_\infty/O_K \to 0$$ montre la compacité.

Un dom fond. est $\Omega_\infty \times \prod_{v \in \Sigma_f} \hat{O}_v$ où Ω_∞ dom fond de $\hat{K}_\infty/O_K$.

2) Corps de fonctions

$$0 \to \mathbb{F}_q \to \prod_{v \in O_\Sigma} \hat{O}_v \to A/K \to V \to 0$$

où V est un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dim g.

On a $V = H^1(C, \underline{O}_C)$ si C est une courbe projective lisse modèle de K. C'est donc le dual de l'espace des formes différentielles de 1^{re} espèce sur C.

On a $A_K/\prod_{v \in O_\Sigma} \hat{O}_v = \oplus(\hat{K}_v/\hat{O}_v) = \oplus(K/O_v)$

Considérons sur C la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \underline{O}_C \to K \to K/\underline{O}_C \to 0$$ et écrivons

la suite exacte de cohomologie: faisceau flasque

$$0 \to k \to K \to \coprod_v K/O_v \to H^1(C, \underline{O}_C) \to 0$$

donne l'identification de V à $H^1(C, \underline{O}_C)$

Volume de A_K/K

1. Mesure naturelle: $\prod_v \mu_v$

($\mu_v(\hat{O}_v) = 1$ si v fini

$\mu_v = dx$ si $K = \mathbb{R}$

$\mu_v = 2dx\,dy$ si $K = \mathbb{C}$)

$$\mu(A_K/K) = \begin{cases} |d_K|^{1/2} & \text{si } K \text{ corps de nombres} \\ q^{g-1} & \text{si } K \text{ corps de fct.} \end{cases}$$

Se déduit sur les suites exactes ci-dessus.

Caractères additifs.

$\psi : A_K \to S_1$ s'écrit $\prod \psi_v$ où les ψ_v sont des caract. additifs de $\hat{K}_v$ presque tous triviaux sur $\hat{O}_v$.

Thm : il existe $\psi_0 : A_K/K \to S_1$ non trivial.
Tout tel caractère est de la forme $x \mapsto \psi(\lambda x)$ ($\lambda \in K^*$)
Tous les ψ_v sont non triviaux.

Le dual de A_K/K est donc un K-e.v. de dim 1.
A_K est son propre dual.

Construction explicite de tels ψ :

- corps de fonctions : soit $\psi_0 : \mathbb{F}_q \to S^1$.
Soit $\omega \in \Omega^1 K$ une forme différentielle $\neq 0$ rationnelle
Posons
$$\psi_{\omega,v}(x) = \psi_0 \left(\mathrm{Tr}_{\text{corps résid}/\mathbb{F}_q} \operatorname{Res}_v(\omega x) \right)$$
$\psi_\omega = \prod \psi_{\omega,v}$ est trivial sur K d'après le th. des résidus.

- corps de nombres :
Pour $K = \mathbb{Q}$: $\psi_p : \mathbb{Q}_p \to S^1$ trivial sur $\mathbb{Z}_p$; $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$
$x \mapsto e^{2i\pi x}$ si $x \in \mathbb{Z}[1/p]$
$K = \mathbb{R}$: $\psi_\infty \; x \mapsto e^{-2i\pi x}$

$\psi = \prod \psi_p$ est trivial sur $\mathbb{Q}$.

K quelconque : $A_K = A_\mathbb{Q} \otimes K$ $\qquad \psi_K = \psi_\mathbb{Q} \circ (1 \otimes \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}})$

ψ identifie A_K à son dual. L'orthogonal $K^\perp$ de K contient K et est un K-esp. vectoriel. Or $K^\perp/K$ est discret ds A_K/K compact, donc fini. Donc $K^\perp = K$.

2. Mesure canonique (ou de Tamagawa)

Soit ψ un car. additif. Alors $A_K \simeq (A_K)'$ dual de Pontryagin.
Soit μ_c la mesure autoduale. Elle est caractérisée par $\mu_c(A_K/K) = 1$.

On a $\mu_{nat} = \left\{ \begin{matrix} |d_K|^{1/2} \\ q^{g-1} \end{matrix} \right\} \mu_c$

Ceci pouvait se retrouver :

$\mu_c = \bigotimes \mu_{v,\psi_v}$

Or $\mu_{v,\psi_v} = \begin{cases} dx & \text{si } \hat{K}_v = \mathbb{R} \\ 2dx\,dy & \text{si } \hat{K}_v = \mathbb{C} \\ \|d_{\hat{K}_v}\|^{-1/2} \mu_v & \text{si } \hat{K}_v \text{ corps local} \end{cases}$

pour les corps de nombres

Pour les corps de fcts, $g - 1 = \frac{1}{2} \deg(\omega)$.

Points adéliques des variétés algébriques.

Soit K corps global, X variété alg / K quasi-projective

Points adéliques de X

1) Déf de Weil.

$X_{Weil}(A_K) = \prod_v (X(K_v), X^{\circ}_{\varphi, v})$

Or $X^{\circ}_{\varphi,v}$ = "pts $\hat{O}_v$-entiers par rapport à φ"

où φ est la donnée suivante :

On écrit $X = \bigcup_{\text{finie}} U_i$ où U_i ouverts affines et $\varphi_i : U_i \hookrightarrow Aff$

$x \in X(\hat{K}_v)$ est dit entier / φ si $\exists i$, $x \in U_i(K_v)$ et $\varphi_i(x)$ a ses coordonnées dans $\hat{O}_v$.

$X^{\circ}_{\varphi,v}$ est un ouvert compact de $X(\hat{K_v})$.

De plus si on remplace φ par φ', $X^{\circ}_{\varphi,v} = X^{\circ}_{\varphi',v}$ pour presque tout v.

Exemples : 1) Si X est une variété affine, définie par des éq (∂) dans Aff^n, $X(A_K) = \{(x_v) /$ pour presque tout v $x_v \in \hat{O}_v^n$ et pour tout v, x_v satisfait les éq. ∂$\}$
$= \{x \in A_K^n /$ x satisfait ∂$\}$.

2) Si X est une var. projective, $X(A_K) = \prod X(K_v)$

2. Déf de Weil modifiée

Soit S un ens. fini de place tel que X s'obtienne par chang^t de base à partir d'un schéma X_0 sur $O_{K,S}$ où $O_{K,S}$ sont les S-entiers

Posons $X^{mod}_{Weil}(A_K) = \prod_v (X(\hat{K}_v), X_0(\hat{O}_v))$

3. Déf de Grothendieck

X est un schéma sur K

$X_{Groth}(A_K)$ = pts de X à valeurs dans A_K
$= \{$morphisme de Spec $A_K \to X\}$.

Soit $\hat{A}_{K,S} = \prod_{v \in S} \hat{K}_v \times \prod_{v \notin S} \hat{O}_v$ et choisissons X_0 sur O_S. ($S \supset S_0$)

$X(A_K) = X^0(A_K) = \varinjlim X_0(A_{K,S})$ car X_0 est de prés. finie

$= \varinjlim \left[\prod_{v \in S} X(\hat{K}_v) \times \prod_{v \notin S} X(\hat{O}_v) \right]$

Si $X \subset X'$ est fermé, $X(A_K)$ est fermé dans $X'(A_K)$

Si $X \subset X'$ est ouvert, $X(A_K)$ n'est pas en général ouvert dans $X'(A_K)$

Si $X \supset Y$, Y fermé dans X,

Un point $x \in X(\hat{A}_K)$ appartient à $X - Y\,(\hat{A}_K)$ si et seulement si :

1) $\forall v \in \Sigma$, $x_v \notin Y(\hat{K}_v)$

2) Pour presque tout v, $\tilde{x}_v \notin \tilde{Y}_v$ ($\sim$ étant la réduction dans le corps résiduel ($k(v)$) relativement à un choix de X_0)

Prop 1 Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques. Si f propre au sens de la géom algébrique, f_A est propre au sens de la topologie.

Tout f propre est le composé d'une injection fermée et d'une projection $P_n \times Y \to Y$. (car X quasi-projectif) d'où la proposition.

Prop 2 : Si f a des sections locales (ie il existe un rec. ouvert de Y au dessus desquels f a des sections) alors f_A est surjectif

En effet si V_i est un rec. ouvert fermé de V il existe pour tout $x \in V(A_K)$ une partition finie Σ_i de Σ avec $x \in \prod V_i(A_i)$, d'où le résultat.

Prop 3. Si $X \to Y$ lisse à fibres géom. irréd de dim d. fixés, l'application $X(A_K) \to Y(A_K)$ est ouverte

Il faut prouver

1) Pour tout v, $X(\hat{K}_v) \to Y(\hat{K}_v)$ ouvert (Trivial)

2) $X^0(\hat{O}_v) \to Y^0(\hat{O}_v)$ surjectif pour presque tout v

Or pour presque tout v, $\tilde{X}_{v,y}$ est abs irréductible de dim d.

Or si Z_t est une famille "limitée" de var. alg. abs irréd de dim d, sur des corps finis k_t, on a

$$|Z_t(k_t) - |k_t|^d| \leq A\,|k_t|^{d-1/2}$$ où A est une constante.

Donc si $|k_t| \geq A^2$, $Z_t(k_t) \neq 0$.

Serie

Soient $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ localement compacts, (O_λ) ouverts compacts des X_λ pour presque tout λ, μ_λ mesure ≥ 0 sur X_λ avec $\prod \mu_\lambda(O_\lambda)$ convergent. Alors $\mu = \otimes \mu_\lambda$ est bien défini sur $\prod X_\lambda = X$ et caractérisé par:

Si φ_λ cont. à supp. compact sur X_λ, avec $\varphi_\lambda = 1_{O_\lambda}$ pour presque tout λ, et si $\varphi = \prod \varphi_\lambda$, $\int \varphi\mu = \prod_\lambda \int \varphi_\lambda \mu_\lambda$.

Soit X une var. alg. lisse partout de dim d sur un corps global K, ω une forme différentielle sur X, définie sur K global. partout non nulle (il n'y en a pas toujours). Pour toute place v on a une mesure $\mu_{\omega,v} = \|\omega\|_v$ sur $X(\hat{K}_v)$. Pour presque tout v, $X(\hat{O}_v)$ est défini

Supposons $X_A \neq \emptyset$ et soit q_v le cardinal du corps résiduel de $\hat{O}_v$, $\tilde{X}_v$ la réduction de X mod v. On a vu que

$$\mu_v(\hat{O}_v) = q_v^{-d} \operatorname{Card}(\tilde{X}_v) \text{ pour presque tout } v.$$

Posons $c_v = \mu_v(\hat{O}_v)$

1er cas $\prod c_v$ est absolument convergent. Alors $\mu_\omega = \otimes \mu_{\omega,v}$ est bien défini sur X_A. On a $\mu_{a\omega} = \mu_\omega$. Sur un groupe algébrique on choisit ω invariante à gauche et μ_ω est alors indépendant de ω.

Exemple $\begin{cases} G_a = \mathrm{Aff}^1 & c_v = 1 \quad \text{produit convergent} \\ G_m & c_v = 1 - \frac{1}{q_v} \quad \text{"} \quad \text{divergent.} \end{cases}$

Exercice: Si X est une courbe, $\prod c_v$ convergent $\Leftrightarrow X \simeq \mathrm{Aff}^1$.

Supposons qu'on ait $X = \bar{X} - D$ où $\bar{X}$ var. proj. lisse abst irréductible et D fermé $\neq \bar{X}$. Supposons que toute classe de cohomologie de $\bar{X}$ de d° 2 est algébrique sur K (par exemple réalisé si $\bar{X}$ est une variété rationnelle).

Alors Π converge $\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} H^1(\overline{X}) = 0$ (i.e. il n'existe pas d'application non constante de $\overline{X}$ dans une var. abél.)

(2) La représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ dans $NS(\overline{X})$ est isomorphe à la représ. de permutation sur les comp. irreductibles de D de codimension 1.

Exemples 1) X courbe $= \overline{X} - \{P_1, \dots P_h\}$

Alors (1) $\Leftrightarrow$ genre 0

(2) $\Leftrightarrow h = 1$ car $NS = \mathbb{Z}$ avec représ. triviale.

2) Si $H^1(X) = H^2(X)$ il y a convergence

3) tore $\neq 1 \Rightarrow$ pas convergence

4) semi-simple $\Rightarrow$ convergence

$G = SL_n$ $\quad c_{\mathbb{F}_q} = \prod_{m=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{q^m}\right)$ sur $\mathbb{F}_q$

Si G est réductif connexe sur $\mathbb{F}_q$, $c = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{h_m} (1 - \varepsilon_{i,m} q^{-m})$ où les $\varepsilon_{i,m}$ sont des racines de l'unité. En fait $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ agit sur le diagramme de Dynkin. Soit W le groupe de Weyl agissant comme groupe d'automorphismes sur $\mathbb{Q}^l$ ($l = \mathrm{rang}\, G$), H_m les éléments primitifs de d° m dans les polynomes invariants, $h_m = \dim H_m$, $\varepsilon_{i,m}$ les valeurs propres de l'aut. de Frobenius.

Cas semi-simple: pas de pol. inv. de d° 1, d'où produit convergent.

Ordonnons les v par normes Nv croissantes et soit G un tore$/K$. Il y a semi convergence si et seulement si G est anisotrope (i.e. $\widehat{G}(K) = \{0\}$)

Exemple: $SO(2)$ pour la forme $x^2 + y^2$ $\quad c_p = 1 - \left(\frac{-1}{p}\right)$

Supposons que G soit extension de groupes semi-simples et d'unipotents. On choisit une forme inv. sur G (G est unimodulaire), partout non nulle, et la mesure associée sur G_A et on pose $\mathrm{Tam}(G) = c^{-d}\mu(G_A/G_K)$ avec $c = \mathrm{Vol}(A_K/K)$

(si X est une variété quasi-affine, $X(K)$ est discret et fermé dans $X(A_K)$) et $d = \dim G$.

<u>Thm</u> (Borel) <u>si</u> K est <u>un corps de nombres</u>, $\mathrm{Tam}(G)$ <u>fini</u>.

(Remarque : l'hypothèse G est. de ∞ par des unipotents équivaut à G linéaire, connexe, $\mathrm{Hom}_{\overline{K}}(G, G_m) \neq 0$). Sur un corps de fonction, les unipotent sont tordables. Question : A-t-on $\tau(G) = 1$ pour G unipotent ?)

Soit K_1/K une ext finie de corps, X_1 une var. alg sur K_1 de dim d.
On définit $R_{K_1/K} X_1 = X$ sur K. Si X_1 est lisse, $\dim X = d.[K_1 : K]$.
On a $X_1(K_1) = X(K)$, $X_1(A_{K_1}) = X(A_K)$. Si G_1 est un groupe alg$/K_1$, $\mathrm{Tam}(G_1) = \mathrm{Tam}(G)$.

<u>Conjecture</u> (Weil) <u>Si</u> G ~~semi-simple~~ simplement connexe, $\mathrm{Tam}(G) = 1$.
Cela a été démontré dans beaucoup de cas. Supposons que K soit un corps de nbres. On connait la conjecture
- Si G est quasi-déployé (ie il existe un Borel défini sur K)
- Pour les groupes classiques.

Si C est un sous groupe central de G et G semi-simple simplement connexe, $\mathrm{Tam}(G/C) = \mathrm{Tam}(G)\,\dfrac{h^0(\check{C})}{h^1(\check{C})}$ où $\check{C} = \mathrm{Hom}(C, G_m)$

$h^0(\check{C}) = \mathrm{Card}(\mathrm{Hom}_K(C, G_m))$ $\quad h^1(\check{C}) = \mathrm{Card}(\mathrm{Ker}\ H^1(K, \check{C}) \to \prod_v H^1(K_v, \check{C}))$

Exemple : $C = \mu_n$, $\check{C} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $h^0 = n$ $h^1 = 0$, $\mathrm{Tam}(G/C) = n\,\mathrm{Tam}(G)$
$\mathrm{Tam}(SO_n) = 2\ \mathrm{Tam}(\mathrm{Spin}\ n)$.
La conjecture de Weil implique que si G_1 et G_2 sont déduits l'un de l'autre par torsion intérieure, $\mathrm{Tam}\ G_1 = \mathrm{Tam}\ G_2$.

Traduction : Soit G muni de μ biinvariante, $\Gamma \subset G$ discret, Ω sous-groupe ouvert de G. Alors Ω opère sur G/Γ avec orbites ouvertes. Soit $I = \Omega \backslash G/\Gamma$ et pour $i \in I$, $g_i \in G$ un représentant.

On a $\mathrm{Vol}(G/\Gamma) = \sum_i \mathrm{Vol}(\Omega g_i \Gamma/\Gamma)$, posons $\Gamma_i = \Omega \cap g_i \Gamma g_i^{-1}$.

Alors $\mathrm{Vol}(G/\Gamma) = \sum_i \mathrm{Vol}(\Omega/\Gamma_i)$

En particulier si Ω est compact $\quad \mathrm{Vol}(G/\Gamma) = \mathrm{Vol}\,\Omega \sum \frac{1}{|\Gamma_i|}$

Exemple. Soit S un ens. fini de places contenant les places archimédiennes. Dans $G_{\mathbb{A}}$ on peut prendre $\Omega = \prod_{v \in S} G(K_v) \times \prod_{v \notin S} G(\hat{O}_v)$.

Cas particulier : $SL_n/\mathbb{Q}$. $\quad \Omega = SL_n(\mathbb{R}) \times \prod_p (SL_n(\mathbb{Z}_p))$

Le th. d'approximation forte dit $\quad \Omega \backslash SL_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})/SL_n(\mathbb{Q}) = \{1\}$

d'où $\mathrm{Tam}(SL_n) = \mathrm{Vol}\left(SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})\right) \times \prod_p \left(\prod_{n=2}^{n} 1 - \frac{1}{p^n}\right)$

$$= \zeta(2)^{-1} \cdots \zeta(n)^{-1}\, \mathrm{Vol}\left(SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})\right).$$

Serre

Théorème de Minkowski:

Soit Λ un réseau de $\mathbb{R}^n$, S un convexe symétrique de volume $\mathrm{Vol}\, S > 2^n \,\mathrm{Vol}(\Lambda)$ (où $\mathrm{vol}(\Lambda) = \mathrm{Vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)$). Alors $S \cap \Lambda \neq \{0\}$.

Théorème de Minkowski Hlawka

a) Soit S un ensemble mesurable. Il existe un réseau Λ de vol δ donné tel que $S \cap \Lambda \subset \{0\}$ dès que $\delta > \mathrm{vol}(S)$.

b) Si S est étoilé symétrique, on a la même conclusion si $\delta > \dfrac{\mathrm{vol}(S)}{2\zeta(n)}$

En général, pour tout S, on définit la "constante critique de S" comme

$$\delta(S) = \inf_{\Lambda \cap S \subset \{0\}} \mathrm{vol}\,\Lambda \quad \text{et} \quad Q(S) = \frac{\mathrm{Vol}(S)}{\delta(S)}$$

Le théorème de Minkowski dit $Q(S) \leq 2^n$ si S convexe

Minkowski Hlawka dit $Q(S) \geq 1$ si S mesurable
(Schmidt a prouvé $Q(S) \geq \frac{15}{16}$)

$Q(S) \geq 2\zeta(n)$ si S étoilé symétrique

Soit M_δ l'espace des réseaux de volume δ $(\delta > 0)$ de $\mathbb{R}^n$ et supposons $n \geq 2$. M_δ est un espace homogène sous le groupe $G = SL_n(\mathbb{R})$. Si on choisit comme réseau type $\delta^{1/n}\mathbb{Z}^n$, le stabilisateur de ce réseau est $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$.

Sur $M_\delta \simeq G/\Gamma$, il existe donc ~~des~~ mesures G-invariantes.

Nous choisirons les mesures suivantes:

. Sur GL_n, $\dfrac{\prod dx_{ij}}{\det x_{ij}}$

. Sur SL_n celle pour laquelle la suite $0 \to SL_n \to GL_n \to G_m \to 0$ est de Haar (avec $G_m \simeq GL_1$ muni de $\frac{dt}{t}$).
(avec [illegible])

Autre méthode: $\mathfrak{sl}_n$ a une base canonique $e_{ij}, e_{ii} - e_{11}$ et on prend la mesure de Haar déterminée par l'une des formes différentielles invariantes ω telle que $\omega_{(e)}(e_{ij}, e_{ii} - e_{11}) = \pm 1$.

Autre méthode : SL_n provient d'un schéma sur $\mathbb{Z}$, d'où sl_n a une $\mathbb{Z}$-base canonique et par suite il y a sur SL_n une mesure canonique (φ constr. près.)

Sur M_δ on met la mesure quotient de celle de $SL_n(\mathbb{R})$ par celle de $SL_n(\mathbb{Z})$.

Soit φ une fonction sur $\mathbb{R}^n$ intégrable à support compact.

Posons $\sum(\varphi,\Lambda) = \sum_{\substack{x\in\Lambda \\ x\neq 0}} \varphi(x)$ et $\sum^{prim}(\varphi,\Lambda) = \sum_{\substack{x\in\Lambda \\ x \text{ primitif}}} \varphi(x)$

Théorème (Siegel-Hlawka)

1) $c_n = vol(G/\Gamma) = \zeta(2)\ldots\zeta(n)$ $\quad (\Leftrightarrow \tau(SL_n) = 1$ pour $K=\mathbb{Q})$

2) $\displaystyle \frac{1}{c_n}\int_{\Lambda\in M_\delta} \sum(\varphi,\Lambda)\,d\Lambda = \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx$

3) $\displaystyle \frac{1}{c_n}\int_{\Lambda\in M_\delta} \sum^{prim}(\varphi,\Lambda)\,d\Lambda = \frac{1}{\delta\,\zeta(n)}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx.$

Soit $\varphi = 1_S$. On a $\dfrac{Vol(S)}{\delta}$ = Moyenne $(Card(\Lambda^{-\{0\}}\cap S))$

Si $\delta > Vol S$, il existe donc Λ avec $Card(\Lambda - \{0\}\cap S)$

Si S étoilé sym et $S\cap(\Lambda-\{0\}) \neq \phi$, $\quad Card(S\cap\Lambda-\{0\}) \geq 2$.

d'où la $2^{ème}$ assertion de Minkowski Hlawka.

Soit σ une fonction sur $\overset{\Lambda_0=}{\mathbb{Z}^n}$ combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques σ_m des $m\Lambda_0$. Si $\sigma = \sum \lambda_m\sigma_m$, on pose $\int\sigma = \sum \frac{\lambda_m}{m^n}$

Par transport σ définit une fonction sur tout réseau Λ

Posons $\sum(\varphi,\sigma,\Lambda) = \sum_{\substack{x\neq 0 \\ x\in\Lambda}} \varphi(x)\sigma_\Lambda(x)$.

On a

(1) $$\frac{1}{c_n}\int_{\Lambda\in M_\delta} \sum(\varphi,\sigma,\Lambda)\,d\Lambda = \frac{1}{\delta}\int\sigma\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx.$$

Considérons les couples (σ, N), N entier ≥ 1, $\sigma \geq 0$ tels que

(*) Pour toute famille x_i de pts de $\mathbb{R}^n$ avec $\sum \sigma(x_i) < 1$ il existe un réseau $L \subset \mathbb{R}^n$ d'indice $\leq N$ ne contenant aucun x_i

(exemple $\sigma = 1$, $N = 1$).

À un tel couple (σ, N) associons $c_{(\sigma,N)} = N \int \sigma$.

Thm (Schmidt) : Si $\delta > c_{(\sigma,N)} \operatorname{Vol}(S)$, il existe un réseau de vol $\leq \delta$ qui ne rencontre pas S. Autrement dit $Q(S) \geq \frac{1}{c_{\sigma,N}}$.

Dém : Utilisons (1) avec $\delta' = \frac{\delta}{N}$. On a

$$\underset{M \leq \delta'}{\text{Moyenne}} \Big(\sum_{\substack{x_i \neq 0 \\ x_i \in S \cap \Lambda}} \sigma(x_i) \Big) = \frac{c_{(\sigma,N)}}{\delta} \operatorname{Vol}(S). \quad \text{Si } \delta > c_{(\sigma,N)} \operatorname{Vol}(S)$$

il existe Λ de covolume $\frac{\delta}{N}$ tel que $\sum_{\substack{x_i \in S\cap\Lambda \\ x_i \neq 0}} \sigma(x_i) < 1$, et on peut trouver un sous-réseau de Λ d'indice $\leq N$ (donc de vol $\leq \delta$) évitant les x_i.

Exemples 1) $\Lambda = \mathbb{Z}^n$, $\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in 6\Lambda \\ 3/4 & \text{si } x \in 3\Lambda, x \notin 2\Lambda \\ 1/4 & \text{si } x \notin 3\Lambda \end{cases}$, $N = 3$.

$$\left(= 1/4 + 1/2 \; 1_{3\Lambda} + 1/4 \; 1_{6\Lambda} \right)$$

En effet ou bien on a un x_i du type 2 : 2Λ convient

ou bien on a pas de x_i du type 2, et au plus 3 de type 3.

Dans $\mathbb{F}_3^2$, si 3 points sont donnés on peut les éviter par un hyperplan d'où un réseau d'indice 3 dans Λ qui convient.

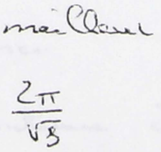
Or $\int \sigma = 1/4 + 1/2 \, \frac{1}{3^n} + 1/4 \, \frac{1}{6^n}$.

Pour $n = 2$ on a $1/4 + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{4 \cdot 36} = \frac{36 + 8 + 1}{4 \cdot 36} = \frac{5}{16}$

$C_\sigma = \frac{15}{16}$. (ie $Q(S) \geq 1{,}07\ldots$)

2) Pour le disque D, le meilleur réseau possible est le réseau hexagonal. $Q(D) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Pour le demi disque D', $Q(D') = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

Pour la demi couronne D''  $Q(D'') = 3/4 \, \frac{\pi}{\sqrt{3}} \simeq 1{,}37$

Record (Mme Ellerenshaw) : $1{,}31$.

Démonstration du thm de Minkowski Hlawka.

Soient $\begin{matrix} & G_1 & \\ & \cup \quad \cup & \\ G_2 & & G_3 \\ & \cup \quad \cup & \\ & G_4 & \end{matrix}$ des groupes unimodulaires munis de mesures

Supposons φ fonction sommable sur G/G_3 et G_3/G_4 de vol fini

$$\mathrm{Vol}(G_3/G_4)\int_{G_1/G_3}\varphi(x)\,dx = \int_{G_1/G_2}\left(\int_{G_2/G_4}\varphi(gx)\,dx\right)dg.$$

Exemple : $G = Sl_n(\mathbb{R})$

$\Gamma = Sl_n(\mathbb{Z})$

$H =$ stabilisateur de e_1 $= \begin{pmatrix} 1 & * \cdots * \\ 0 & Sl_{n-1} \end{pmatrix}$

$\gamma =$ stabilisateur de e_1 dans Γ.

$H \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times Sl_{n-1}$ $\qquad \gamma = \mathbb{Z}^{n-1} \times Sl_{n-1}(\mathbb{Z})$

$G/H \simeq \mathbb{R}^n - \{0\}$.

On a si φ fonction sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, (avec $G_1 = G$, $H = G_3$, $G_2 = \gamma$, $G_4 = \Gamma$)

$$c_{n-1}\int\varphi = \mathrm{Vol}(H/\gamma)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi = \int_{G/\Gamma}\left(\int_{\Gamma/\gamma}\varphi(gx)\,dx\right)dg = \int_{G/\Gamma}\sum{}^{\mathrm{prim}}(\varphi,\Lambda)\,d\Lambda$$

(moyennant le fait que les mesures s'accouplent).

Donc $\displaystyle\int_{M_\delta}\sum{}^{\mathrm{prim}}(\varphi,\Lambda)\,d\Lambda = \frac{c_{n-1}}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx$

Il reste à vérifier que $c_n = c_{n-1}\,\zeta(n)$

On a $\displaystyle\int_{M_\delta}\sum(\varphi,\Lambda)\,d\Lambda = \zeta(n)\frac{c_{n-1}}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx.$

car $\displaystyle\sum(\varphi,\Lambda) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum{}^{\mathrm{prim}}(\varphi, m\Lambda)$

$\displaystyle = \sum_{m=1}^{\infty}\sum{}^{\mathrm{prim}}(\varphi(mx),\Lambda)$ $\quad$ d'où $\displaystyle\int\Sigma(\varphi,\Lambda)d\Lambda = \frac{c_{n-1}}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{m=1}^{\infty}\varphi(mx)\,dx$

(*) $\displaystyle = c_{n-1}\frac{\zeta(n)}{\delta}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx.$

Deux méthodes pour terminer

1ère : celle de Siegel : Soit φ continue à support compact. pour tout $\Lambda\in M_\delta$, $\displaystyle t^n\sum_{x\in t\Lambda}\varphi(x) \to \int\varphi(x)\,dx$ si $t\to 0$.

$$\sum_{x\in\Lambda} t^n\varphi(tx) \to \frac{1}{\delta}\int\varphi(x)\,dx$$

Par Fubini, $\displaystyle c_n\,\frac{1}{\delta}\int\varphi(x)\,dx = \frac{\zeta(n)}{\delta}c_{n-1}\int\varphi(x)\,dx$

résulte de (*), d'où $\displaystyle c_n = \frac{\zeta(n)c_{n-1}}{\delta}$

La justification de Fubini est un peu compliquée.

$2^{\text{ème}}$ méthode (Formule sommatoire de Poisson)

$$\Sigma^c(\varphi,\Lambda) = \sum_{x\in\Lambda}\varphi(x) = \varphi(0) + \Sigma(\varphi,\Lambda)$$

$$\int_{\mathfrak{M}^\phi_\Lambda} \Sigma^c(\varphi,\Lambda) = c_n\varphi(0) + \zeta(n)c_{n-1}\hat{\varphi}(0)$$

Or $\displaystyle\sum_{x\in\Lambda}\varphi(x) = \sum_{y\in\Lambda'}\hat{\varphi}(y)$ (où Λ' réseau dual de Λ)

Or $\Lambda \to \Lambda'$ respecte la mesure de Haar.

Donc $\quad c_n\varphi(0) + \zeta(n)c_{n-1}\hat{\varphi}(0) = c_n\hat{\varphi}(0) + \zeta(n)c_{n-1}\varphi(0)$

CQFD.

Plus généralement : si G est un groupe réductif, Aut G (aut. de groupes algébriques) opère par ± 1 sur det $L(G)$, donc trivialement sur la mesure de Haar.

Passage au cas global : K corps global, $n \geq 2$; $\tau(SL_n) = 1$.

Soit $V = K^n$ $\quad V_{\mathbb{A}}$ = pts adéliques de V $= \mathbb{A}_K \times \dots \times \mathbb{A}_K$.

Soit φ une fonction de Schwarz Bruhat sur $V_{\mathbb{A}}$.

$$\hat{\varphi}(0) = \int_{V_{\mathbb{A}}}\varphi(x)\,dx \qquad (dx \text{ mes. de Tam. } \tau_{G_a} = 1)$$

Soit $V' = V - \{0\}$, $G = SL_n$, H = stabil. e_1.

On a $\displaystyle\int_{V'_{\mathbb{A}}}\varphi(x)\,dx = \int_{V_{\mathbb{A}}}\varphi(x)\,dx$.

Posons $c_n = \mathrm{Tam}(SL_n)$

$$c_{n-1}\int_{V_{\mathbb{A}}}\varphi(x)\,dx = \int_{G_{\mathbb{A}}/G_K}\Big(\sum_{g\in G_K/H_K}\varphi(xg)\Big)\,dx$$

Or $\displaystyle\varphi(0) + \sum_{g\in G_K/H_K}\varphi(xg) = \hat{\varphi}(0) + \sum_{g\in G_K/H_K}\varphi({}^t x^{-1}g)$

$$\varphi(0)c_n + c_{n-1}\hat{\varphi}(0) = c_n\hat{\varphi}(0) + c_{n-1}\varphi(0)$$

d'où $c_n = c_{n-1}$. $\quad$ Or $c_1 = 1$.

(Remarque : la dém. entraîne la finitude de c_n)

Serre.

Soit C une courbe, sur $\mathbb{F}_q = k$, $K = k(C)$ (C proj. lisse abs^t irréd/k).

E un fibré de rang $n \geq 2$ sur C, L un fibré de rang 1 sur C.

$w_E = |\mathrm{Aut}\, E|$ (qui est fini)

On s'intéresse aux fibrés E sur C de rang n et dét ($= \Lambda^n E$) égal à L. Notons $M_{L,n}$ l'ens. de ces fibrés.

Théorème 1 (Harder). — $\displaystyle\sum_{\substack{\det E \simeq L \\ \mathrm{rg}\, E = n}} \frac{1}{w_E} = \frac{1}{q-1} \zeta_C(2) \dots \zeta_C(n)\, q^{(n^2-1)(g-1)}$

où ζ_C est la fonction zêta du corps K (ou de la courbe C), i.e

$\zeta_C(s) = \prod_v \left(1 - \frac{1}{N_v^s}\right)^{-1}$ où v décrit les places de K (ces v correspondent aux pts fermés P du k-schéma C et $Nv = q^{\deg P}$)

On a $\zeta_C(s) = Z_C(T)$ avec $T = q^{-s}$

$$Z_C(T) = \prod_P \frac{1}{1 - T^{\deg P}} = \frac{\prod_{\alpha=1}^{2g}(1 - \omega_\alpha T)}{(1-T)(1-qT)} \qquad (|w_\alpha| = q^{1/2}) \qquad \omega_{2g+1-\alpha} = \frac{q}{\omega_\alpha}$$

Le membre de droite du thm de Harder s'écrit

$$\frac{1}{q-1} Z_C(q^{-2}) \dots Z_C(q^{-n})$$

Posons $\displaystyle M = \sum_{\substack{\det E \simeq L \\ \mathrm{rg}\, E = n}} \frac{1}{w_E}$

Si on regarde les couples (E, φ) où E fibré vect et $\varphi : \det E \to L$ isomorphisme, (E,φ) à isom près et w_E' désigne $\mathrm{Aut}(E, \varphi)$,

alors $\displaystyle M' = \sum_{\substack{E,\varphi \\ \text{à isom près}}} \frac{1}{w_E'}$ est égal à $(q-1)M$.

Soit E un fibré : sa contribution à M et à M' sont les mêmes.

Théorème de Moyenne : Soit pour E un fibré, $s(E)$ le nombre de sections de $E \neq 0$, i.e $q^{h^0(E)} - 1$

$$\frac{1}{M} \sum_{\substack{\det E \simeq L \\ \mathrm{rg}\, E = n}} \frac{1}{w_E} s(E) = q^{c + n(1-g)} \qquad c = \deg L$$

si $s'(E) = \mathrm{Card}\{$ sections de E non nulle en tout $x \in C\}$.

<u>Th 2'</u> : Moyenne de $s'(E) = q^{c+n(1-g)} / \zeta_C(n)$

<u>Corollaire</u> Si $c+n(1-g) \leq 0$, ie $c \leq n(g-1)$, il existe E fibré de rang n, avec $\det E \simeq L$ et $H^0(E) = \{0\}$.

(en effet si E a une section $\neq 0$, il en a $q-1$.

Si $q \neq 2$, $q-1 > 1$

Si $q=2$, on conclut en remarquant que certains fibrés, par exemple $L(n) \oplus O(-n)$ ont plus d'une section).

Nous allons prouver le thm 1 sous la forme

$$M^1 = \zeta_C(2) \ldots \zeta_C(n) q^{(n^2-1)(g-1)}$$

On a $\mathrm{Tam}_K SL_n = 1$.

A $\begin{matrix} v \\ \| \\ p \end{matrix}$ on associe $\begin{matrix} O_v \\ \| \\ O_p \end{matrix} \subset K$ et par complétion $\begin{matrix} \hat{O}_v \\ \| \\ \hat{O}_p \end{matrix} \subset \hat{K}_v$

Soit $G = SL_n(A)$. $\Gamma = G(K)$

I repr. de $\Omega \backslash G / \Gamma$

$$G/\Gamma = \bigcup_{x \in I} \Omega x \Gamma / \Gamma$$

$$\mathrm{Vol}\, G/\Gamma = \sum_{x \in I} \mathrm{Vol}\left(\Omega / \Omega \cap x \Gamma x^{-1}\right)$$

Posons $\Gamma_x = \Omega \cap x \Gamma x^{-1}$

On va choisir Ω tel que $\mathrm{vol}\, \Omega = \prod_{2 \leq i \leq n} \zeta_C(i)^{-1}$

I = ens. des classes (E, φ)

$\Gamma_x = \mathrm{Aut}(E, \varphi)$ si $x \leftrightarrow (E, \varphi)$

Le faisceau E peut être identifié à un sous-faisceau du faisceau constant $K \times \ldots \times K$, localement libre, presque partout localement isomorphe à $O_p \times \ldots \times O_p$.

Choisissons un E de rang n et $\det L$ fixé.

$$E = (E_p) \qquad E_p \subset K^n \qquad \det E_p = L_p$$
$E_p = O_p^n$ pour presque tout p.

Les O_p réseaux de K^n correspondent bijectivement aux $\hat{O}_p$-réseaux de K_p^n.

$G = SL_n(A)$ opère sur $A \times \dots \times A$.

Soit $\Omega = \{ g \in G \,/\, g_p$ stabilise $\hat{E}_p \} = \prod_p SL(\hat{E}_p)$

(en fait SL_E est un fibré en groupe sur C et on a pris les pts entiers de ce fibré en groupes)

<u>Lemme</u> $\quad \mathrm{Vol}\,\Omega = \prod_{i=2}^{n} \dfrac{1}{\zeta_c(i)} \times q^{(n^2-1)(1-g)}$

Le terme $q^{(n^2-1)(1-g)}$ vient de la correction à Tamagawa

$(\mu(A_K/K) = q^{g-1}, \quad \dim SL_n = n^2-1)$

Soit $0 \to \mathrm{End}_0 E \longrightarrow \mathrm{End}\, E \xrightarrow{\text{trace}} 1 \to 0$

$\det \mathrm{End}\, E = \det \mathrm{End}_0(E)$

Or $\det(E_1 \otimes E_2) = \det E_1^{n_2} \otimes \det E_2^{n_1}$

Appliquant ceci à $E_1 = E \quad E_2 = E^\vee$, on a

$$\det(\mathrm{End}\, E) = \det E^{\otimes n} \otimes \det E^{\otimes -n} = 1.$$

Une forme mult. alternée sur $\mathrm{End}_0 E$ $(n=2)$ est

$$\phi(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}\, \mathrm{Tr}(u_1 u_2 u_3 - u_1 u_3 u_2)$$

Le fibré des formes différentielles est trivial. On peut donc choisir ω forme différentielle section partout non nulle de Ω^{n^2-1} Lie SL_E.

On a donc $\displaystyle\int_{\Omega_p} |\omega_p| = \mathrm{Card}\,\Omega_p \text{ sur corps rés} \Big/ q_p^{n^2-1}$

d'où le volume de Ω.

x $g \in SL_n(\mathbb{A})$, $\{g - E_p\} \Longleftrightarrow E_{g,p} \subset \mathcal{K}_g \subset \mathbb{A}$.

$\det E_{g,p} = L_p$ $\qquad \det E_g \simeq L$.

E_g ne dépend que de g mod Ω à gauche.

et de $G(K)$ g mod à droite.

Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^n)$, on a

$$\int \varphi(x)\,dx = \int_{G/\Gamma} \sum_{x \in K^n - \{0\}} \varphi(gx)\, dg$$

où Γ_1 fixateur de $(1, 0, \ldots 0) = e_1$

Appliquons cette formule avec

$\varphi = \prod \varphi_p \qquad \varphi_p = 1_{E_p \times \ldots \times E_p}$

Un fibré E est identifié à une collection de E_p

Une section de E est $K^n \cap \prod \hat{E}_p$.

$\sum_{x \in K^n - \{0\}} \varphi(gx)$ est le nombre de sections non nulles

du fibré E_g, d'où le thm 2.

<u>Définition</u> (Mumford) : E stable $\Longleftrightarrow$ $\forall F$, sous-fibré de E de

rang $\in [1, n-1]$, $\dfrac{c(F)}{\text{rang} F} < \dfrac{c(E)}{\text{rang} E}$ (avec $c(E) = \deg(\det E) \in \mathbb{Z}$)

(Exemple : $n = 2$: $c(F) < \frac{1}{2} c(E) \Longleftrightarrow c(F) < c(E/F)$).

Soit $\det E \simeq L$ fixé et $(\deg L, n) = 1$. (cas intéressant $n = 2$, $\deg L = 1$)

<u>Thm</u> : Les fibrés stables de $\mathcal{M}_{L,n}$ sont "paramétrés" par une variété de modules projective lisse, de dimension $(n^2-1)(g-1)$

(Terminologie : soit $N(E) = \sup_{F \neq 0, E} \dfrac{c(F)}{\dim F}$

$N(E) < \dfrac{c(E)}{n}$ stable

$=$ semi-stable

$>$ instable.

(cf Newstead au Tata pour des résultats sur ces variétés et surtout des références)

Exemple : 1) cette variété est connexe (unirationnelle ?)

2) Soit $n=2$, $\deg L=1$, $g=2$ alors $\dim M=3$.

Une courbe de genre 2 est ramifiée de d° 2 en 6 pts sur une courbe proj : $y^2=\prod_{i=1}^{6}(x-x_i)$

Si Q_1, Q_2 quadriques de $\mathbb{P}_5$, l'éq. de degré 6 du pinceau aQ_1+bQ_2 qui donne les quadriques ayant un pt double fournit C pour un bon choix de Q_1, Q_2 ; on a

$$C \hookrightarrow M^3 = \mathrm{inters}(Q_1, Q_2)$$

Le M^3 est de dim 3. Le pol. de Poincaré est $1+T^2+4T^3+T^4+T^6$.

Harder décompose M en $M_{\text{stable}} + M_{\text{instable}}$

Si E stable, $\mathrm{Aut}\, E = \mathbb{F}_q^\times$, de contribution $\frac{1}{q-1}$.

Donc $M_{\text{stable}} = \frac{1}{q-1}\left(\underline{\mathrm{Card}\, \mathcal{M}_{\mathrm{mod}}(\mathbb{F}_q)}\right) = \frac{|M(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$

$$M^1 = M^1_{\text{stable}} + M^1_{\text{instable}}.$$

$$|\mathcal{M}_{\mathrm{mod}}(\mathbb{F}_q)| = M^1 - M^1_{\text{instable}}$$

$$= q^{(n^2-1)(g-1)}\,\zeta_C(2)\ldots\zeta_C(n) - M^1_{\text{instable}}.$$

Calcul de M^1_{instable} dans le cas $n=2$ $(\deg L=1)$

$$M^1_{\text{instable}} = \frac{h\, q^g}{(q-1)(q^2-1)} \quad \text{où } h = |\mathrm{Jac}(\mathbb{F}_q)|$$

(si $Z(T)=\frac{\prod(1-\omega_\alpha T)}{(1-T)(1-qT)}$, les ω_α sont les v. p. de Frob. sur la Jacobienne et $h=\prod(1-\omega_\alpha)$. On a $h\sim q^g$

Donc $M_{\text{instable}} \sim q^{g-3}$ négligeable devant $|M(\mathbb{F}_q)| \sim q^{3(g-1)}$

Si E instable, il existe F de rang $1 \subset E$, $\deg \det E = 1$,

$m = \deg F > 0$ (donc ≥ 1)

$$0 \to F \to E \to \overset{F'}{E/F} \to 0.$$

$$\begin{array}{llll} \deg\det : & m & 1 & 1-m \end{array}$$

$F \otimes F' \simeq L$. Donc $F' \simeq F^{\vee} \otimes L$.

Pour F fixé, F' est donc fixé. Une extension de F' par F est donnée par $H^1(C, \mathrm{Hom}(F', F)) = H^1(C, F^2 \otimes L)$

Deux couples (F, x), $(x \in H^1(C, F^2 \otimes L))$
(F_1, x_1)
donnent le m résultat $\Longleftrightarrow$ $F = F_1$, $x_1 = \lambda x$.

$$M^1_{inst} = \sum_{F \text{ de } d^\circ m \geq 1} \Big(\sum_{\substack{x \in H^1 \\ \text{mod homothéties}}} \frac{1}{w_{E_x}} \Big)$$

Si $x = 0$, $\quad w_{E_0} = (q-1)(q-1)\,\mathrm{Card}(\mathrm{Hom}(F', F)\ \text{déf.}/k)$
$$= (q-1)^2\, q^{h_0(\mathrm{Hom}\, F'/F)}$$

Si $x \neq 0$, $\quad w_{E,x} = (q-1)\, q^{h_0}$

Donc
$$M^*_{inst} = \sum_{F \text{ de } d^\circ m \geq 1} \Big((q-1)^{-2} q^{-h_0} + \frac{(q^{h_1}-1)}{(q-1)q^{h_0}} \cdot \frac{1}{q-1} \Big)$$
$$= \sum_{F \text{ de } d^\circ m \geq 1} \frac{1}{(q-1)^2}\, q^{h_1 - h_0} \qquad \text{or } h_1 - h_0 = g - 2m$$

$$M^1_{inst} = \sum_F \frac{1}{(q-1)}\, q^{g-2m} = \frac{h q^g}{q-1} \sum_{m=1}^{\infty}{}' q^{-2m} = \frac{h q^g}{(q-1)(q^2-1)}$$

<u>Bott - Atiyah trouvent des résultats analogues</u>

$$|\mathfrak{M}_{mod}(\mathbb{F}_q)| = q^{3(g-1)} \zeta_C(2) - \frac{h q^g}{(1-q)(1-q^2)}$$
$$= q^{3(g-1)} \frac{\prod(1-\omega_\alpha q^{-2})}{(1-q^{-2})(1-q^{-1})} - \frac{\prod(1-\omega_\alpha)\, q^g}{(1-q)(1-q^2)}$$

On a donc $|\mathfrak{M}_{mod}(\mathbb{F}_q)|$ et de même $|\mathfrak{M}_{mod}(\mathbb{F}_{q^\nu})|$

$$M(\mathbb{F}_{q^\nu}) = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i \sum_{\lambda=1}^{B_i} (\pi_\lambda)^\nu = \Phi(q^\nu, \omega_\alpha^\nu) \quad \text{avec } |\pi_{i\lambda}| = q^{i/2}$$

On peut donc trouver les $\pi_{i\lambda}$ et les B_i.

Soit $P_{\mathfrak{M}}(T)$ le pol. de Poincaré de $\mathfrak{M}$.
$$P_{\mathfrak{M}}(T) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i T^i.$$

On a $P_{\mathfrak{M}}(T) = \Phi(T^2, -T)$

En effet $\Phi(q, \omega_\alpha) = q^{3g-3} \dfrac{\prod(1-\omega_\alpha q^{-2}) - q^{g}\prod(1-\omega_\alpha)}{(1-q^{-1})(1-q^{-2})}$

$$\Phi(T^2, -T) = \frac{T^{6g-6}(1+T^{-3})^{2g} - T^{4g-6}(1+T)^{2g}}{(1-T^{-4})(1-T^{-2})}$$

$$= \frac{(T^3+1)^{2g} - T^{2g}(1+T)^{2g}}{(1-T^2)(1-T^4)}$$

$g = 2$:
$$\frac{(1+T^3)^4 - T^4(1+T)^4}{(1-T^2)(1-T^4)} = \frac{1+4T^3+6T^6+4T^9+T^{12} - T^4-4T^5-6T^6-4T^7-T^8}{(1-T^2)(1-T^4)}$$

$$= \frac{1+4T^3-T^4-4T^5-4T^7-T^8+4T^9+T^{12}}{(1-T^2)(1-T^4)}$$

$$= \frac{1+4T^3-4T^5-T^8}{1-T^2} = 1+T^2+T^4+T^6+4T^3.$$

$M(\mathbb{F}_q) = q^3 + q^2 - \left(\sum_{\alpha=1}^{4} \omega_\alpha\right) q + O(q^2)$ suffit déjà à déterminer ; les valeurs propres en dim 3 sont $q\omega_\alpha$. Le motif en degré 3 est donc $C(-1)$

On sait par d'autres résultats que ces variétés sont simplement connexes.