Jean-Pierre Serre
R. Rouquier (réd.)

Représentations linéaires sur des anneaux locaux, d'après Carayol

Cours de Jean-Pierre Serre, tome 14 (1993)
<http://www.numdam.org/item?id=CJPS_1993__14_>

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES SUR DES ANNEAUX LOCAUX, D'APRÈS CARAYOL

EXPOSÉ DE JEAN-PIERRE SERRE, LE 8 OCTOBRE 1993

Rédaction de R. Rouquier

Soit A un anneau commutatif local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$.

Soit R une A-algèbre (associative, à élément unité). Soit n un entier positif. On note $M_n(A)$ la A-algèbre des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans A.

1. Caractérisation d'une représentation par son caractère

Soit ρ une représentation A-linéaire de R dans $M_n(A)$. Soit $\bar{\rho}$ la représentation résiduelle :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\bar{\rho}"'] & M_n(A) \arrow[d] \\ & M_n(k) \end{tikzcd}$$

On fait l'hypothèse que $\bar{\rho}$ est *absolument irréductible*, c'est-à-dire que $\bar{\rho}$ est surjective [1, Chapitre VIII, §13, n° 4], ou encore, en utilisant le lemme de Nakayama, que ρ est surjective.

Théorème 1. *Soit ρ' une représentation de R dans $M_n(A)$. Si ρ et ρ' ont même caractère, alors ρ et ρ' sont isomorphes.*

Preuve. Montrons tout d'abord le résultat pour $A = k$.

• On sait que $\operatorname{Tr}\rho = \operatorname{Tr}\rho'$ donc $\operatorname{Tr}\rho = \operatorname{Tr}\rho'_{ss}$ où ρ'_{ss} est la semi-simplifiée de ρ'. Si la caractéristique de k est nulle, alors deux représentations semi-simples de même caractère sont isomorphes, donc ρ est isomorphe à ρ'_{ss}. Puisque ρ est absolument irréductible, ρ'_{ss} l'est aussi, donc $\rho' \simeq \rho'_{ss} \simeq \rho$.

• Supposons k de caractéristique $p > 0$. Soit $\bar{\rho}'_{ss}$ la semi-simplifiée de l'extension $\bar{\rho}'$ de la représentation ρ' à une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. Si ψ et ψ' sont deux représentations semi-simples sur $\bar{k}$ de même caractère, alors pour toute représentation irréductible θ sur $\bar{k}$, on a $m_{\theta,\psi} \equiv m_{\theta,\psi'} \mod p$ (on désigne par $m_{\theta,\psi}$ la multiplicité de θ dans ψ). Ici, on obtient $m_{\bar{\rho},\bar{\rho}'_{ss}} \equiv 1 \mod p$, d'où $m_{\bar{\rho},\bar{\rho}'_{ss}} \geq 1$ et finalement $\bar{\rho}'_{ss} \simeq \bar{\rho}$ puisque ces deux représentations ont même dimension. Comme précédemment, on conclut donc que $\bar{\rho}' \simeq \bar{\rho}$ et donc que $\rho' \simeq \rho$.

• On suppose maintenant A quelconque. On sait par ce qui précède que $\tilde{\rho} \simeq \tilde{\rho}'$ et quitte à remplacer ρ' par une représentation isomorphe, on peut supposer $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}'$.

Soit $f : R \xrightarrow{(\rho,\rho')} \Sigma \times \Sigma'$ où $\Sigma = \Sigma' = M_n(A)$ et soit $S = f(R)$. Les deux projections de S sur Σ et Σ' sont surjectives.

Le «lemme de Goursat» permet d'identifier un tel S (cf. le lemme 6 en appendice). D'après ce lemme, à S sont associés un idéal bilatère N de Σ, un idéal bilatère N' de Σ' et un A-isomorphisme $\varphi : \Sigma/N \to \Sigma'/N'$, dont S est le «graphe», c'est-à-dire,

$$S = \{(x, x') \in \Sigma \times \Sigma' \mid \varphi(xN) = x'N'\}.$$

Si B est un anneau, les idéaux bilatères de $M_n(B)$ sont de la forme $\mathfrak{A}M_n(B)$ pour $\mathfrak{A}$ idéal de B (cf. par exemple [1, Chapitre VIII, §5, exercice 7]). Ainsi, il existe $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ idéaux de A tels que $N = \mathfrak{A}M_n(A)$ et $N' = \mathfrak{A}'M_n(A)$. Par conséquent, $\Sigma/N = M_n(A/\mathfrak{A})$ et $\Sigma'/N' = M_n(A/\mathfrak{A}')$. Puisque ces deux A-algèbres sont isomorphes, leurs annulateurs, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$, sont égaux.

Soient $\alpha \in \mathfrak{A}$, $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $X' = 0$. Alors, $(X, X') \in S$, puisque $X \equiv 0$ modulo $\mathfrak{A}$. Donc, on a $\operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr} X'$, d'où $\alpha = 0$. Par conséquent, $\mathfrak{A} = 0$ et S est le graphe d'un A-isomorphisme $\varphi : M_n(A) \to M_n(A)$.

D'après ([2, Chapitre II, §5, exercice 21]), tout B-automorphisme d'une algèbre de matrices sur un anneau local B est intérieur. Ainsi, l'automorphisme φ est intérieur, donc ρ et ρ' sont conjuguées, ce qui démontre le théorème 1. □

Corollaire 2. *Supposons A intègre et soit K le corps des fractions de A. Soient ρ et ρ' deux représentations linéaires $R \to M_n(A)$. Supposons la représentation résiduelle $\tilde{\rho}$ absolument irréductible. Si les extensions de ρ et ρ' à K sont isomorphes, alors ρ et ρ' sont isomorphes.*

2. Descente d'une représentation

Soit A' un sous-anneau local de A, d'idéal maximal $\mathfrak{m}' = A' \cap \mathfrak{m}$.

Rappelons la notion d'algèbre d'Azuyama sur un anneau commutatif ([2, Chapitre II, §5, exercice 14] ou [5, Chapitre III, §5.1]) :

Définition 3. *Soient B un anneau commutatif et Σ une B-algèbre. On dit que Σ est une algèbre d'Azumaya sur B si et seulement si*

(1) *le B-module Σ est fidèle et de présentation finie,*
(2) *pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de B, la $B/\mathfrak{m}$-algèbre $\Sigma/\mathfrak{m}\Sigma$ est centrale simple.*

Notons que si Σ est une algèbre d'Azumaya sur B, alors le B-module Σ est en fait projectif.

Suivant [5, Chapitre IV, §2], on note $\operatorname{Trd} : \Sigma \to B$ l'application *trace réduite.*

Lorsque B est un anneau local, Σ est une algèbre d'Azumaya sur B si et seulement si Σ est un B-module libre de type fini et $\Sigma/\mathfrak{m}\Sigma$ est une $B/\mathfrak{m}B$-algèbre centrale simple, $\mathfrak{m}$ désignant l'idéal maximal de B. En outre, il existe une extension fidèlement plate S de B telle que $S \otimes_B \Sigma$ soit une algèbre de matrices sur S (S est dite *neutralisante* pour Σ). On a alors $\mathrm{Trd}(x) = \mathrm{Tr}(1_S \otimes x)$ pour tout $x \in \Sigma$.

Soient maintenant Σ une algèbre d'Azumaya de rang n^2 sur A, et $\rho : R \to \Sigma$ un homomorphisme A-linéaire tel que $\tilde{\rho}$ soit absolument irréductible, *i.e.*, tel que $\tilde{\rho}(R) = \Sigma/\mathfrak{m}$ ou de manière équivalente, tel que $\rho(R) = \Sigma$.

Théorème 4. *Soit R' une A'-sous-algèbre de R telle que $R = AR'$. Si $\mathrm{Trd}\,\rho(x)$ appartient à A' pour tout $x \in R'$, alors, $\rho(R')$ est une A'-algèbre d'Azumaya de rang n^2 et $A \otimes_{A'} \rho(R') \to \Sigma$ est un isomorphisme.*

Avant de démontrer ce théorème, énonçons un corollaire immédiat :

Corollaire 5. *Supposons que toute algèbre d'Azumaya de rang n^2 sur A' soit triviale, c'est-à-dire isomorphe à $M_n(A')$. Soit $\rho : R \to M_n(A)$ une représentation telle que $\mathrm{Tr}\,\rho(x) \in A'$ pour tout $x \in R'$ et $\tilde{\rho}$ est absolument irréductible. Alors, il existe une représentation $\rho' : R' \to M_n(A')$ telle que ρ et ρ' soient conjuguées.*

Preuve. (*du théorème*) Soit $\Sigma' = \rho(R')$. Il suffit de prouver le théorème pour R et R' remplacés par Σ et Σ', et on suppose donc maintenant que R est une algèbre d'Azumaya de rang n^2 sur A.

On peut trouver une A-base $\{e_i\}_{1\leq i\leq n^2}$ de R avec $e_i \in R'$. Soit $x \in \Sigma'$, $x = \sum_{i=1}^{n^2} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in A$. Montrons que les λ_i sont dans A'.

Soit j tel que $1 \leq j \leq n$. On a $\mathrm{Trd}(xe_j) = \sum \lambda_i \mathrm{Trd}(e_ie_j)$, $\mathrm{Trd}(xe_j) \in A'$ et $\mathrm{Trd}(e_ie_j) \in A'$. Or, la matrice $(\mathrm{Trd}(e_ie_j))$ a un déterminant qui n'est pas dans $\mathfrak{m}$, puisque non nul après réduction modulo $\mathfrak{m}$; comme $\mathfrak{m} \cap A' = \mathfrak{m}'$, ce déterminant est inversible dans A'. Par conséquent, les λ_i, solutions uniques d'un système d'équations linéaires dans A', sont dans A'.

Ainsi, $\{e_i\}$ est une A'-base de R'. Donc, $A \otimes_{A'} R' \to R$ est un isomorphisme et R' est une A'-algèbre d'Azumaya (car $R'/\mathfrak{m}'R'$, devenant une algèbre centrale simple après extension des scalaires à $A/\mathfrak{m}$, est une algèbre centrale simple) de rang n^2. $\square$

Remarque. Si G est un groupe (ou plus généralement un monoïde), les résultats ci-dessus s'appliquent à l'algèbre $R = A[G]$ de G sur A, ainsi qu'à sa sous-algèbre $R' = A'[G]$.

APPENDICE

LEMME DE GOURSAT

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des groupes ou celle des anneaux ou celle des algèbres ou celle des algèbres de Lie. Soient M un objet de $\mathcal{C}$ et N un sous-objet de M. On dira que N est un sous-objet *distingué* de M si le quotient M/N existe (cette notion correspond à celle de sous-groupe distingué, d'idéal, d'idéal de Lie, lorsque $\mathcal{C}$ est respectivement la catégorie des groupes, des anneaux ou des algèbres de Lie).

Le lemme suivant (dont la démonstration est immédiate) décrit, dans un produit de deux objets, les sous-objets pour lesquels les deux projections sont surjectives (cf. [4, p. 47]).

Soient N et N' deux sous-objets distingués de Σ et Σ' et $\varphi : \Sigma/N \to \Sigma'/N'$ un isomorphisme. Soient $f : \Sigma \to \Sigma/N$ et $f' : \Sigma' \to \Sigma'/N'$ les surjections canoniques. Soit S le sous-objet de $\Sigma \times \Sigma'$ donné par

$$S = \{x \in \Sigma \times \Sigma' | \varphi \circ f \circ \mathrm{pr}_{\Sigma}(x) = f' \circ \mathrm{pr}_{\Sigma'}(x)\},$$

où $\mathrm{pr}_{\Sigma} : \Sigma \times \Sigma' \to \Sigma$ et $\mathrm{pr}_{\Sigma'} : \Sigma \times \Sigma' \to \Sigma'$ sont les projections canoniques.

Lemme 6. *La construction précédente définit une bijection entre :*

- *les triplets (N, N', φ) où N et N' sont des sous-objets distingués de Σ et Σ' et $\varphi : \Sigma/N \to \Sigma'/N'$ est un isomorphisme,*
- *les sous-objets S de $\Sigma \times \Sigma'$ tels que les projections sur Σ et Σ', $(\mathrm{pr}_{\Sigma})_{|S}$ et $(\mathrm{pr}_{\Sigma'})_{|S}$, sont surjectives.*

BIBLIOGRAPHIE

1. N. Bourbaki, "Algèbre", Chapitre VIII, Hermann 1958.
2. N. Bourbaki, "Algèbre commutative", Chapitres I à IV, Masson 1985.
3. H. Carayol, *Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet*, Contemporary mathematics **165**, Amer. Math. Soc., 213-237 (1994).
4. E. Goursat, *Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace*, Ann. Sci. ENS **VI**, 9-102 (1889).
5. M.-A. Knus et M. Ojanguren, "Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya", Lecture Notes 389, Springer Verlag 1974.