JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. DELSARTE

Sur les ds^2 binaires et le problème d'Einstein

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 13 (1934), p. 19-67.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1934_9_13__19_0>

Sur les ds^2 binaires et le problème d'Einstein ;

PAR J. DELSARTE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

INTRODUCTION.

Nous nous sommes proposé, dans ce Mémoire, d'étudier le problème d'Einstein pour une classe particulière de ds^2 que nous appelons ds^2 binaires. Ils sont de la forme suivante :

$$dS^2 = \varphi^2\, ds^2 + f^2\, d\sigma^2 ;$$

ds^2 est un ds^2 quelconque à p variables, $d\sigma^2$ est un ds^2 quelconque à q variables, f est une fonction des seules variables figurant dans ds^2 et φ une fonction des seules variables figurant dans $d\sigma^2$, enfin, dans le cas de la relativité, $p + q = 4$. Il était bien naturel de porter une attention particulière sur ces ds^2, puisque les seules solutions connues du problème d'Einstein conduisent à des ds^2 de ce type.

Nous nous bornerons, dans ce qui suit, au problème intérieur dans l'hypothèse du fluide parfait, en indiquant éventuellement quelques conséquences relatives au cas extérieur ou au cas intérieur schématisé. Voici les résultats obtenus :

A. Si aucune des fonctions f et φ ne se réduit à une constante, on montre que le problème n'admet pas de solution, pour $p + q$ assez petit, en particulier pour $p + q = 4$.

B. Supposons donc que f, par exemple, soit égal à l'unité. Différents cas sont alors possibles :

1° L'évolution de la matière se fait dans le sens du ds^2, c'est-à-dire que les lignes d'univers sont entièrement contenues dans les multiplicités obtenues en laissant constantes les variables qui figurent dans $d\sigma^2$. Suivant les valeurs de p et q, les circonstances qui se présentent sont assez diverses :

α. $p=1$, $q=3$. — Il n'y a pas d'autre solution, dans le cas schématique, que l'univers minkowskien, la densité de matière étant nulle. Dans le cas isobare, qui correspond à l'introduction d'une constante cosmique, on retrouve l'univers courbe d'Einstein. Dans le cas général, on montre que la densité, la pression, la courbure scalaire du $d\sigma^2$ ne dépendent que de ρ: il semble difficile d'en dire davantage, même dans le cas du fluide incompressible (§ 9, Chap. I).

β. $p=2$, $q=2$. — Il n'y a aucune solution.

γ. $p=3$, $q=1$. — ρ est alors nécessairement constant et le ds^2 est réductible, la densité et la pression sont constantes dans tout l'espace. Le ds^2 à trois variables est celui d'un espace à courbures principales constantes qui, dans certains cas, se réduit à un espace symétrique de M. Cartan. *De toutes manières, les solutions ne dépendent que de constantes arbitraires* (§ 8, Chap. I).

2° L'évolution de la matière se fait dans le sens du $d\sigma^2$.

α. $p=1$, $q=3$. — C'est le cas des ds^2 statiques quelconques, ou des ds^2 non statiques à symétrie axiale. Le problème semble difficile: bien qu'ayant obtenu quelques solutions particulières, nous ne nous en occupons pas ici.

β. $p=2$, $q=2$. — La plus grande partie de ce Mémoire est consacrée au problème correspondant. Nous avons pu obtenir la solution complète dans le cas intérieur schématisé et dans le cas du fluide incompressible. Les ds^2, ainsi déterminés, s'explicitent à l'aide de deux fonctions arbitraires d'une variable. Ce résultat permet d'aborder, pour cette catégorie de ds^2, le problème de l'évolution relativiste. D'une manière précise, et au point de vue physique, ils correspondent au cas où les données initiales présentent la symétrie sphérique. Cette symétrie se conserve dans le cours de l'évolution de l'univers, et le but du Chapitre II est d'examiner l'influence de ces conditions initiales sur les circonstances ultérieures du phénomène. Les résultats sont d'ailleurs assez peu encourageants; on est conduit à discuter certaines équations différentielles du premier ordre et du second degré, présentant des singularités assez spéciales; en gros on peut dire que, suivant que les conditions initiales remplissent, ou non, certaines inégalités, il y a mouvement continu ou diffusion indéfinie de la matière (§ 4, 5, 6, Chap. I).

γ. $p=3$, $q=1$. — Le cas schématique donne, comme unique solution, le ds^2 de Friedmann et Lemaitre; on obtient des ds^2 de types voisins dans le cas d'un fluide parfait : le ds^2 à trois variables est toujours à courbure constante, la fonction φ, ici d'une seule variable, est déterminée par une équation du second ordre dont la forme dépend de celle de l'équation d'état. Les ds^2 ainsi formés dépendent de trois constantes arbitraires.

Les Mémoires qui traitent de la détermination des ds^2 satisfaisant aux équations d'Einstein étant très nombreux, nous nous permettrons de renvoyer le lecteur, pour tout ce qui concerne la bibliographie, aux Ouvrages suivants :

Mémorial des Sciences mathématiques : Fascicule 25, *Les équations de la gravifique einsteinienne*, par G. Darmois.

Fascicule 46, *Le problème de Schwarzschild*, par J. Haag.

CHAPITRE I.

LES ds^2 BINAIRES.

1. Il est tout à fait naturel de commencer par traiter le problème de l'évolution relativiste dans le cas où les données initiales présentent une certaine symétrie. Il est permis d'espérer que cette symétrie se conservera dans l'évolution ultérieure de l'univers. Dans les cas les plus simples le ds^2 pourra se mettre sous une forme réduite que nous allons définir et étudier. Supposons que l'espace ait $n=p+q$ dimensions, le cas de la relativité correspondant à $n=4$, et qu'on puisse trouver deux systèmes de coordonnées

$$u^1, \quad u^2, \quad \ldots, \quad u^p,$$
$$v^1, \quad v^2, \quad \ldots, \quad v^q,$$

tels que le ds^2 de l'espace prenne la forme suivante :

$$dS^2 = \varphi^2 ds^2 + f^2 d\sigma^2,$$

ds^2 étant un ds^2 à p variables,

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j,$$

où les g_{ij} ne dépendent que des u, et $d\sigma^2$ étant un ds^2 à q variables,

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dv^\alpha\, dv^\beta,$$

où les $\gamma_{\alpha\beta}$ ne dépendent que des v ; enfin f est une fonction des u seuls, et φ une fonction des v seuls. dS^2 sera appelé un ds^2 binaire.

Dans la suite, on désignera par $i, j, k, \ldots$ des indices variant de 1 à p, et par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des indices variant de $p+1$ à n. Toute fonction des seules variables u sera désignée par une minuscule latine, toute fonction des seules variables v sera désignée par une minuscule grecque. Une fonction des deux systèmes de variables sera désignée par une majuscule.

Nous donnons ci-dessous les éléments et les résultats du calcul des composantes du tenseur de courbure pour un tel ds^2. Les valeurs des symboles de Christoffel de première espèce sont :

$$\Gamma_{ij,k} = \varphi^2 g_{ij,k};$$

$$\Gamma_{\alpha i,j} = \varphi g_{ij} \varphi_\alpha, \qquad \Gamma_{ij,\beta} = -\varphi g_{ij} \varphi_\beta, \qquad \Gamma_{i\gamma,j} = \varphi g_{ij} \varphi_\gamma,$$

$$\Gamma_{\alpha i,\beta} = f \gamma_{\alpha\beta} f_i, \qquad \Gamma_{\alpha\gamma,i} = -f \gamma_{\alpha\gamma} f_i, \qquad \Gamma_{i\gamma,\beta} = f \gamma_{\beta\gamma} f_i,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = f^2 \gamma_{\alpha\beta,\gamma}.$$

On a désigné par $g_{ij,k}$, $\gamma_{\alpha\beta,\gamma}$ les valeurs de ces symboles pour ds^2 et $d\sigma^2$, on a employé la notation habituelle de dérivation covariante pour les composantes covariantes des gradients de f et φ relativement à ds^2 et $d\sigma^2$. Les valeurs des symboles de seconde espèce sont :

$$\Gamma_i{}^k{}_j = g_i{}^k{}_j, \qquad \Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma = \gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma,$$

$$\Gamma_\alpha{}^i{}_k = 0, \qquad \Gamma_\alpha{}^i{}_i = \frac{\varphi_\alpha}{\varphi}, \qquad \Gamma_i{}^\beta{}_k = -g_{ik} \frac{\varphi}{f^2} \varphi^\beta, \qquad \Gamma_i{}^j{}_\gamma = 0, \qquad \Gamma_i{}^i{}_\gamma = \frac{\varphi_\gamma}{\varphi},$$

$$\Gamma_\alpha{}^\beta{}_i = 0, \qquad \Gamma_\alpha{}^\alpha{}_i = \frac{f_i}{f}, \qquad \Gamma_\alpha{}^i{}_\gamma = -\gamma_{\alpha\gamma} \frac{f}{\varphi^2} f^i, \qquad \Gamma_i{}^\beta{}_\gamma = 0, \qquad \Gamma_i{}^\beta{}_\beta = \frac{f_i}{f},$$

avec la notation habituelle de dérivation contravariante pour les fonctions f et φ relativement à ds^2 et à $d\sigma^2$ respectivement. Voici enfin le tableau des composantes du tenseur de courbure à quatre indices. On s'est borné à noter les composantes utiles pour le calcul des composantes du tenseur de courbure contracté à deux indices :

$$R_i{}^j{}_{kl} = r_i{}^j{}_{kl} \qquad (j \neq k;\ j \neq l).$$

$$R_i{}^j{}_{jl} = r_i{}^j{}_{jl} + \frac{1}{f^2} g_{il} \sum_\alpha \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} \qquad (j \neq l).$$

$$R_i{}^j{}_{kj} = r_i{}^j{}_{kj} - \frac{1}{f^2} g_{ik} \sum_\alpha \varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} \qquad (j \neq k).$$

$$R_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} = \rho_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} \qquad (\beta \neq \gamma;\ \beta \neq \delta).$$

$$R_\alpha{}^\beta{}_{\beta\delta} = \rho_\alpha{}^\beta{}_{\beta\delta} + \frac{1}{\varphi^2}\gamma_{\alpha\delta} \sum_i f_{,i} f^{,i} \qquad (\beta \neq \delta).$$

$$R_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\beta} = \rho_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\beta} - \frac{1}{\varphi^2}\gamma_{\alpha\gamma} \sum_i f_{,i} f^{,i} \qquad (\beta \neq \gamma).$$

$$R_\alpha{}^j{}_{kl} = 0 \qquad (j \neq k;\ j \neq l).$$

$$R_\alpha{}^j{}_{kj} = \frac{1}{f\varphi} f_{,k}\varphi_{,\alpha} \qquad (j \neq k).$$

$$R_i{}^\beta{}_{\gamma\delta} = 0 \qquad (\beta \neq \gamma;\ \beta \neq \delta).$$

$$R_i{}^\beta{}_{\gamma\beta} = \frac{1}{f\varphi} f_{,i}\varphi_{,\gamma} \qquad (\beta \neq \gamma).$$

$$R_i{}^j{}_{\gamma l} = -g_{il}\frac{1}{f\varphi} f^{,j}\varphi_{,\gamma} \qquad (j \neq l).$$

$$R_i{}^j{}_{\gamma j} = \frac{1}{f\varphi} f_{,i}\varphi_{,\gamma} - g_{ij}\frac{1}{f\varphi} f^{,j}\varphi_{,\gamma}.$$

$$R_\alpha{}^\beta{}_{k\delta} = -\gamma_{\alpha\delta}\frac{1}{f\varphi}\varphi^{,\beta} f_{,k} \qquad (\beta \neq \delta).$$

$$R_\alpha{}^\beta{}_{k\beta} = \frac{1}{f\varphi}\varphi_{,\alpha} f_{,k} - \gamma_{\alpha\beta}\frac{1}{f\varphi}\varphi^{,\beta} f_{,k}.$$

$$R_i{}^\beta{}_{\gamma l} = g_{il}\frac{\varphi}{f^2}\varphi^{,\beta}{}_{,\gamma} \qquad (\beta \neq \gamma).$$

$$R_i{}^\beta{}_{\beta l} = \frac{1}{f} f_{,il} - g_{il}\frac{\varphi}{f^2}\varphi^{,\beta}{}_{,\beta}.$$

$$R_\alpha{}^j{}_{k\delta} = \gamma_{\alpha\delta}\frac{f}{\varphi^2} f^{,j}{}_{,k} \qquad (j \neq k).$$

$$R_\alpha{}^j{}_{j\delta} = \frac{1}{\varphi}\varphi_{,\alpha\delta} + \gamma_{\alpha\delta}\frac{f}{\varphi^2} f^{,j}{}_{,j}.$$

Dans ce tableau $r_{i\ kl}^{\ j}$ et $\rho_{\alpha\ \gamma\delta}^{\ \beta}$ désignent les composantes du tenseur de courbure à quatre indices pour ds^2 et $d\sigma^2$. On a utilisé la notation classique pour la dérivation covariante et contravariante du second ordre.

Les expressions des composantes du tenseur de courbure contracté à deux indices résultent des formules précédentes. Nous désignerons dans la suite par $\Delta_2\varphi$ et $D_2 f$ les laplaciens des fonctions φ et f calculés respectivement par rapport à $d\sigma^2$ et ds^2; de même $\Delta_1\varphi$ et $D_1 f$ seront les carrés scalaires des gradients de φ et f relativement à chacun de ces deux ds^2. On a alors

$$R_{ij} = r_{ij} - \frac{q}{f} f_{,ij} - \frac{g_{ij}}{f^2}[\varphi\Delta_2\varphi - (p-1)\Delta_1\varphi],$$

$$R_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} - \frac{p}{\varphi}\varphi_{,\alpha\beta} - \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\varphi^2}[f D_2 f - (q-1) D_1 f],$$

$$R_{i\beta} = R_{\beta i} = (p+q-2)\frac{f_{,i}\varphi_{,\beta}}{f\varphi}.$$

2. Formons maintenant les équations d'Einstein. Nous supposerons que le tenseur matériel ne contient que les termes relatifs à l'inertie et à la pression de la matière. On désignera par G la densité de matière, par P la pression, par V_i, U_α, V^i, U^α les composantes covariantes et contravariantes de la vitesse unitaire généralisée, les composantes V étant relatives aux p lignes coordonnées le long desquelles seule une variable u varie, et les composantes U étant relatives aux q lignes coordonnées le long desquelles, seule une variable v varie. Dans ces conditions, on a le système d'équations suivant :

$$\text{(I)} \qquad \varphi^2\sum_{ij} g_{ij}V^iV^j - f^2\sum_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = 1.$$

$$\text{(II)} \qquad r_{ij} - \frac{q}{f} f_{,ij} - \frac{g_{ij}}{f^2}[\varphi\Delta_2\varphi - (p-1)\Delta_1\varphi] = k\left[\varphi^2 g_{ij}\frac{G-2P}{p+q-2} - GV_iV_j\right],$$

$$\text{(III)} \qquad \rho_{\alpha\beta} - \frac{p}{\varphi}\varphi_{,\alpha\beta} - \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{\varphi^2}[f D_2 f - (q-1) D_1 f] = k\left[f^2\gamma_{\alpha\beta}\frac{G-2P}{p+q-2} - GU_\alpha U_\beta\right]$$

et

$$(\text{IV}) \qquad (p+q-2)\frac{f_i \varphi_\beta}{f\varphi} = -kGV_i U_\beta.$$

auquel on doit joindre une équation d'état entre G et P,

$$\Phi(P, G) = 0.$$

La simplicité des équations du groupe (IV) permet ici d'aborder le problème. Il y a plusieurs cas à distinguer; l'un des membres de ces équations peut être identiquement nul; c'est ce qui arrivera dans le cas de l'univers vide ($G=0$) et aussi si l'une ou l'autre des fonctions f, φ se réduit à une constante; ces cas sont de beaucoup les plus importants, comme nous le verrons. Traitons, pour être complet, le cas, qui semble le cas général, où aucune de ces circonstances ne se produit. On a alors nécessairement

$$V_i = A f_i, \qquad U_\alpha = B\varphi_\alpha$$

avec

$$(p+q-2) + kGABf\varphi = 0.$$

L'équation (1) donne alors

$$\frac{A^2}{\varphi^2} D_1 f + \frac{B^2}{f^2}\Delta_1\varphi = 1,$$

ce qui permet de poser

$$A = \frac{\varphi \sin\Omega}{\sqrt{D_1 f}}, \qquad B = \frac{f\cos\Omega}{\sqrt{\Delta_1\varphi}},$$

$$kG = -(p+q-2)\frac{\sqrt{D_1 f \Delta_1\varphi}}{f^2\varphi^2 \sin\Omega\cos\Omega}.$$

Pour aller plus loin, il est nécessaire de faire une hypothèse sur la forme de l'équation d'état. Les deux cas limites, qui sont en même temps les plus importants et les plus simples, sont le cas de l'absence de fluide et le cas du fluide parfait incompressible. Les équations d'état sont, dans ces deux cas,

$$P = 0 \qquad \text{et} \qquad P = G - G_0.$$

Résumons le calcul dans le cas de l'absence de fluide, appelé aussi cas schématique. P disparaît des équations, une condensation évidente des équations des deuxième et troisième groupes donne, compte tenu de l'expression de G,

$$r - \frac{q}{f} D_2 f - \frac{p}{f^2}[\varphi \Delta_2 \varphi + (p-1)\Delta_1 \varphi]$$
$$= \frac{1}{f^2}[(q-2)\operatorname{tang}\Omega - p\cot\Omega]\sqrt{D_1 f \Delta_1 \varphi},$$

$$\rho - \frac{p}{\varphi}\Delta_2\varphi - \frac{q}{\varphi^2}[f D_2 f + (q-1) D_1 f]$$
$$= \frac{1}{\varphi^2}[(p-2)\cot\Omega - q\operatorname{tang}\Omega]\sqrt{D_1 f \Delta_1 \varphi};$$

posons pour un instant

$$\sqrt{D_1 f} = l, \qquad f^2 r - q f D_2 f = a l^2, \qquad q[f D_2 f + (q-1) D_1 f] = b l^2,$$
$$\sqrt{\Delta_1 \varphi} = \lambda, \qquad \varphi^2 \rho - p \varphi \Delta_2 \varphi = \alpha \lambda^2, \qquad p[\varphi \Delta_2 \varphi + (p-1)\Delta_1 \varphi] = \beta \lambda^2,$$

on trouve, en résolvant par rapport à tangΩ et cotΩ,

$$\operatorname{tang}\Omega = \dot a \frac{l}{\lambda} + \dot\alpha \frac{\lambda}{l}, \qquad \cot\Omega = \dot b \frac{l}{\lambda} + \dot\beta \frac{\lambda}{l}$$

avec

$$\dot a = \frac{pb - (p-2)a}{2(p+q-2)}, \qquad \dot b = \frac{(q-2)b - qa}{2(p+q-2)},$$
$$\dot\alpha = \frac{(p-2)\beta - p\alpha}{2(p+q-2)}, \qquad \dot\beta = \frac{q\beta - (q-2)\alpha}{2(p+q-2)};$$

on a par suite

$$(\dot a l^2 + \dot\alpha \lambda^2)(\dot b l^2 + \dot\beta \lambda^2) = l^2 \lambda^2$$

et comme $\dot a$, $\dot b$, l ne dépendent que des variables u et $\dot\alpha$, $\dot\beta$, λ des variables v, on voit que deux cas seulement sont possibles :

$$(i) \qquad \dot\alpha = \dot b = 0, \qquad \dot a = \operatorname{tang}\theta, \qquad \dot\beta = \cot\theta,$$

$$(ii) \qquad \dot a = \dot\beta = 0, \qquad \dot b = \operatorname{tang}\theta, \qquad \dot\alpha = \cot\theta,$$

formules dans lesquelles θ désigne un angle constant. Il est facile ensuite de remonter au système initial; on constate naturellement que les variables u et v se séparent et l'on trouve, dans le cas (i), les formules et équations suivantes :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
G = -\dfrac{1}{k}(p+q-2)\,\dfrac{\sin^2\theta\,D_1 f + \cos^2\theta\,\Delta_1\varphi}{f^2\varphi^2\sin\theta\cos\theta}, \\[2ex]
V_i = \dfrac{\varphi\sin\theta}{[\sin^2\theta\,D_1 f + \cos^2\theta\,\Delta_1\varphi]^{\frac{1}{2}}}\,f_{,i}, \qquad U_\alpha = \dfrac{f\cos\theta}{[\sin^2\theta\,D_1 f + \cos^2\theta\,\Delta_1\varphi]^{\frac{1}{2}}}\,\varphi_{,\alpha}; \\[1ex]
\hline \\
r_{ij} = \dfrac{q}{f}f_{,ij} + \dfrac{p+q-2}{f^2}\tan\theta\left[f_{,i}f_{,j} - g_{ij}\dfrac{D_1 f}{p+q-2}\right], \\[2ex]
\rho_{\alpha\beta} = \dfrac{p}{\varphi}\varphi_{,\alpha\beta} + \dfrac{p+q-2}{\varphi^2}\cot\theta\left[\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \gamma_{\alpha\beta}\dfrac{\Delta_1\varphi}{p+q-2}\right]; \\[2ex]
f\,D_2 f + (q-1+\tan\theta)\,D_1 f = 0, \\[1ex]
\varphi\,\Delta_2\varphi + (p-1+\cot\theta)\,\Delta_1\varphi = 0.
\end{array}
\right. \tag{A}
$$

Le cas (ii) donne le système plus restrictif :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
G = -\dfrac{1}{k}(p+q-2)\,\dfrac{A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta}{f^2\varphi^2\sin\theta\cos\theta}; \\[2ex]
V_i = \dfrac{B}{A}\,\dfrac{\varphi\cos\theta}{[A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta]^{\frac{1}{2}}}\,f_{,i}, \qquad U_\alpha = \dfrac{A}{B}\,\dfrac{f\sin\theta}{[A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta]^{\frac{1}{2}}}\,\varphi_{,\alpha}; \\[1ex]
\hline \\
D_1 f = A^2, \qquad \Delta_1\varphi = B^2; \\[1ex]
r_{ij} = \dfrac{q}{f}f_{,ij} + (p+q-2)\dfrac{B^2}{A^2}\cot\theta\,\dfrac{f_{,i}f_{,j}}{f^2} \\[2ex]
\qquad - \dfrac{g_{ij}}{f^2}\left[A^2\tan\theta + \dfrac{p+q-2}{p}B^2\cot\theta\right]; \\[2ex]
\rho_{\alpha\beta} = \dfrac{p}{\varphi}\varphi_{,\alpha\beta} + (p+q-2)\dfrac{A^2}{B^2}\tan\theta\,\dfrac{\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}}{\varphi^2} \\[2ex]
\qquad - \dfrac{\gamma_{\alpha\beta}}{\varphi^2}\left[B^2\cot\theta + \dfrac{p+q-2}{q}A^2\tan\theta\right]; \\[2ex]
f\,D_2 f + \left[q-1+\dfrac{p-2}{q}\tan\theta\right]A^2 = 0. \\[2ex]
\varphi\,\Delta_2\varphi + \left[p-1+\dfrac{q-2}{p}\cot\theta\right]B^2 = 0.
\end{array}
\right. \tag{B}
$$

Une méthode entièrement analogue permet d'examiner le cas du fluide parfait d'équation d'état

$$P = G - G_0,$$

où la constante G_0 est essentiellement différente de zéro. On constate bien facilement qu'il est impossible de satisfaire aux équations obtenues, à moins de supposer que l'une des fonctions f ou φ se réduit à une constante; cas que nous examinerons en détail ultérieurement.

La forme des systèmes d'équations (A) et (B) obtenus ci-dessus permet d'apercevoir la raison pour laquelle les cas correspondants n'ont pas d'intérêt physique; il est clair en effet, d'après ces systèmes, que les dérivées premières des coefficients du ds^2 déterminent complètement la répartition des masses et les vitesses dans chaque configuration de l'univers; en particulier, à l'instant initial, les vitesses initiales et la répartition des masses ne pourront pas être prises indépendamment des valeurs des coefficients du ds^2. Cette circonstance permet de prévoir que les solutions des systèmes (A) et (B) seront assez particulières. C'est bien ce qu'on vérifie, en fait, lorsque p et q sont assez petits pour qu'on puisse effectuer l'intégration. Une analyse trop longue pour que nous la reproduisions ici permet d'affirmer que les systèmes précédents n'ont aucune solution pour les valeurs suivantes de p et q :

$$p=q=2; \qquad p=3,\ q=1; \qquad p=3,\ q=2; \qquad p=3,\ q=3.$$

Il n'y a donc aucune solution dans le cas de la relativité ($p+q=4$). Nous passerons donc immédiatement aux cas que nous avons réservés au début de ce paragraphe.

3. Examinons d'abord le cas de l'absence de matière. G et P sont nuls, les équations du groupe (IV) entraînent

$$f_{,\alpha}\varphi_{,\beta}=0.$$

L'une des fonctions f ou φ se réduit donc à une constante; supposons par exemple $f=1$, il vient

$$r_{00}=g_{00}[\varphi\Delta_2\varphi+(p-1)\Delta_1\varphi],$$

$$\varphi_{\alpha\beta}-\frac{p}{\varphi}\varphi_{,\alpha,\beta}=0,$$

ce qui implique, en désignant par A une constante, l'ensemble des relations suivantes :

$$
(\mathrm{C})\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{G} = 0, \qquad f = 1;\\
&r_{ij} - \Lambda g_{ij} = 0, \qquad \rho_{\alpha\beta} - \frac{p}{\varphi}\varphi_{,\alpha,\beta} = 0,\\
&\varphi\Delta_2\varphi - (p-1)\Delta_1\varphi = \Lambda.
\end{aligned}
\right.
$$

On voit que lorsque $p = 2$ ou 3, ds^2 est à courbure constante.

Supposons maintenant qu'il y ait de la matière, mais que f, par exemple, se réduise à l'unité. Les équations du groupe (IV) entraînent

$$V_i U_\beta = 0,$$

d'où deux hypothèses, tous les V_i sont nuls, ou tous les U_β sont nuls.

I. Tous les V_i sont nuls. Il vient alors

$$r_{ij} - g_{ij}[\varphi\Delta_2\varphi - (p-1)\Delta_1\varphi] = k\varphi^2 g_{ij}\frac{\mathrm{G}-2\mathrm{P}}{p-q-2},$$

$$\rho_{\alpha\beta} - \frac{p}{\varphi}\varphi_{,\alpha,\beta} = k\left[\gamma_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{G}-2\mathrm{P}}{p+q-2} - \mathrm{G}U_\alpha U_\beta\right],$$

$$\sum_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = 1,$$

et par deux condensations évidentes

$$r - p[\varphi\Delta_2\varphi - (p-1)\Delta_1\varphi] = kp\varphi^2\frac{\mathrm{G}-2\mathrm{P}}{p-q-2},$$

$$\rho - \frac{p}{\varphi}\Delta_2\varphi = k\left[q\frac{\mathrm{G}-2\mathrm{P}}{p-q-2} - \mathrm{G}\right].$$

La dernière équation montre qu'il existe une combinaison linéaire à coefficients constants de G et P qui ne dépend que des variables υ; comme G et P sont liés par l'équation d'état, on voit qu'ils ne dépendent l'un et l'autre que des variables υ. Reprenant alors les équations en r_{ij} écrites sous la forme

$$r_{ij} = g_{ij}\left[\varphi\Delta_2\varphi - (p-1)\Delta_1\varphi - k\varphi^2\frac{\mathrm{G}-2\mathrm{P}}{p-q-2}\right],$$

le crochet ne dépend que des υ, il doit donc se réduire à une constante Λ : finalement on a le système de formules et d'équations suivant :

$$
(\mathrm{D}) \quad \left\{
\begin{aligned}
& r_{ij} = A g_{ij},\\
& \rho\Delta_2\rho + (p-1)\Delta_1\rho + k\rho^2\frac{G-2P}{p+q-2} = A,\\
& A_i = 0,\\
& \rho_{\alpha\beta} - \frac{p}{2}\varphi_{\alpha,\beta} = k\left[\gamma_{\alpha\beta}\frac{G-2P}{p+q-2} - GU_\alpha U_\beta\right],\\
& \sum_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = 1.
\end{aligned}
\right.
$$

Ici encore, pour $p = 2$ ou 3, ds^2 est à courbure constante.

II. Examinons maintenant l'hypothèse $f = 1$, $U_\alpha = 0$, on a d'abord les équations

$$r_{ij} - g_{ij}[\rho\Delta_2\rho + (p-1)\Delta_1\rho] = k\left[\rho^2 g_{ij}\frac{G-2P}{p+q-2} - GV_iV_j\right],$$

$$\rho_{\alpha\beta} - \frac{p}{2}\varphi_{\alpha,\beta} = k\gamma_{\alpha\beta}\frac{G-2P}{p+q-2},$$

$$\rho^2\sum_{ij} g_{ij}V^iV^j = 1,$$

on déduit, comme plus haut, des équations en $\rho_{\alpha\beta}$, que G et P ne dépendent que des variables v. La condensation des équations en r_{ij} donne

$$r = p[\rho\Delta_2\rho + (p-1)\Delta_1\rho] + k\rho^2\frac{(2-q)G - 2pP}{p+q-2},$$

ce qui implique, A désignant une constante,

$$A = \rho\Delta_2\rho + (p-1)\Delta_1\rho + k\rho^2\frac{(2-q)G-2pP}{p(p+q-2)},$$
$$r = pA,$$

et en reportant dans l'expression des r_{ij},

$$r_{ii} = g_{ii}A + k\rho^2 g_{ii}\frac{G}{p} - kGV_iV_i,$$

puis, pour i différent de j et $p > 2$,

$$r_{ij} = -kGV_iV_j,$$

on voit que les rapports mutuels des V^i ne dépendent que des variables u et l'on est conduit à poser

$$V^i = H_i S,$$

H dépendant *a priori* des u et des v; la substitution dans l'expression du carré de la longueur de la vitesse unitaire, donne

$$V^i = \frac{1}{\varphi} v^i$$

avec

$$\sum_{ij} g_{ij} v^i v^j = 1.$$

Il vient ensuite

$$r_{ij} - g_{ij} A = k G \varphi^2 \left[\frac{1}{p} g_{ij} - v_i v_j \right];$$

ce qui exige que $G\varphi^2$ soit constant; en définitive, A et B désignant deux constantes, on a le tableau de formules et d'équations suivant :

$$(\mathrm{E}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \sum_{ij} g_{ij} v^i v^j = 1, \\ r_{ij} - g_{ij} A = k B \left[\frac{1}{p} g_{ij} - v_i v_j \right], \\ V_i = \varphi v_i, \\ \varphi \Delta_2 \varphi + (p-1) \Delta_1 \varphi = A - k \varphi^2 \frac{(q-2)G - 2pP}{p(p+q-2)}, \\ \varphi_{\alpha\beta} - \frac{p}{\varphi} \varphi_\alpha \varphi_\beta = k \gamma_{\alpha\beta} \frac{G - 2P}{p+q-2}, \\ G = \frac{B}{\varphi^2}, \qquad \Phi(G, P) = 0, \qquad U_\beta = 0. \end{array} \right.$$

Passons maintenant aux deux cas laissés de côté plus haut, lorsque $p = 1$ ou 2. Pour $p = 2$, l'équation en r_{ij} montre, à cause de $r_{ij} = \frac{1}{2} r g_{ij}$, que g_{ij} est proportionnel à $V_i V_j$, g serait donc nul, ce qui est impossible. Il n'y a donc aucune solution pour cette valeur de p. Pour $p = 1$, enfin, on peut supposer $g_{11} = 1$ et par suite $V_1 = \varphi$, l'équation en r_{ij} donne $A = 0$ et l'on a le tableau suivant :

$$(\mathrm{E}') \quad \left\{ \begin{array}{c} g_{11} = 1, \qquad V_1 = \varphi, \qquad U_\beta = 0, \qquad \Phi(G, P) = 0, \\ \frac{1}{\varphi} \Delta_2 \varphi = k \frac{(q-2)G - 2P}{q-1}, \\ \varphi_{\alpha\beta} - \frac{1}{\varphi} \varphi_\alpha \varphi_\beta = k \gamma_{\alpha\beta} \frac{G - 2P}{q-1}. \end{array} \right.$$

4. Nous allons maintenant étudier les systèmes (C), (D), (E), (E'); nous commencerons dans ce paragraphe et les suivants, par la discussion de (C) et (D), obtenant ainsi les résultats les plus importants de ce travail.

Le système (C) est un cas particulier de (D). On passe, en effet, du second au premier en faisant $P = G = 0$. Examinons donc le système (D). En relativité p et q ne dépassent pas la valeur 3, de sorte que les équations

$$r_{ij} = \Lambda g_{ij}$$

expriment toujours que ds^2 est à courbure constante. Les formules du système (D), définissant $d\sigma^2$ et φ, comprennent une équation scalaire

$$(1) \qquad \varphi\,\Delta_2\varphi - (p-1)\,\Delta_1\varphi + k\varphi^2\,\frac{G-2P}{p-q-2} = \Lambda;$$

puis des équations en $\varphi_{\alpha\beta}$ dont la condensation donne une seconde équation scalaire

$$(2) \qquad \varphi - \frac{p}{\varphi}\,\Delta_2\varphi = k\,\frac{(2-p)G - 2qP}{p-q-2}.$$

L'élimination de G et P entre (1), (2) et l'équation d'état

$$(3) \qquad \Phi(P, G) = 0$$

donne une équation indépendante de la matière. On peut effectivement la former dans deux cas simples : celui qu'on appelle schématique, et qui conduit, avec $P = 0$, à la relation

$$(4) \qquad \varphi - \frac{2(p-1)}{\varphi}\,\Delta_2\varphi - \frac{(p-1)(p-2)}{\varphi^2}\,\Delta_1\varphi - (p-2)\,\frac{\Lambda}{\varphi^2} = 0$$

et celui du fluide parfait incompressible, avec $P = G - G_0$, qui donne de même

$$(4') \qquad \varphi - 2\,\frac{(q-1)}{\varphi}\,\Delta_2\varphi - \frac{(p-1)(p-2q-2)}{\varphi^2}\,\Delta_1\varphi - (p-2q-2)\,\frac{\Lambda}{\varphi^2} + 2kG_0 = 0.$$

Notons un résultat curieux ; l'équation (4) signifie, comme on s'en convainc sans peine, que le dS^2

$$\varphi^2\,ds^2 + d\sigma^2;$$

où ds'^2 est à courbure constante A et à $p-1$ dimensions est à courbure scalaire nulle.

Quoi qu'il en soit, on peut toujours tirer $G - 2P$ de l'équation (1) et reporter sa valeur dans les équations en $\rho_{\alpha\beta}$, où l'on devra aussi substituer l'expression de $\frac{\Delta_2\varphi}{\varphi}$, d'après (4) ou (4'). On éliminera ensuite la densité et les composantes de la vitesse, entre les équations ainsi obtenues, par des combinaisons quadratiques évidentes; ce calcul donnera de nouvelles relations indépendantes de la matière.

Disons d'abord un mot du cas de $p=3$, $q=1$. φ devient alors fonction de la seule variable σ, assujettie, avec G et P, aux équations (1), (2) et (3), dans lesquelles on doit faire $\rho=0$. L'élimination de G et P conduit à une équation différentielle du second ordre pour φ, plus ou moins compliquée, suivant la forme de l'équation d'état. Le calcul est facile dans le cas intérieur schématisé, on retrouve ainsi le dS^2 de Friedmann et Lemaître. Il peut se faire aussi pour quelques autres formes simples de la relation entre G et P. Nous n'insisterons pas sur ces dS^2 qui ne dépendent que de trois constantes arbitraires.

Passons maintenant au cas de $p=2$, $q=2$, les éliminations indiquées plus haut conduisent alors à deux équations seulement, assez compliquées, il est vrai, mais qu'on peut aborder dans le cas schématique et le cas du fluide incompressible. Les dS^2 correspondants ayant un sens physique précis, nous traitons en détail la question dans ce qui suit.

Jusqu'à nouvel ordre, nous écrirons en regard les équations relatives au cas schématique et au cas du fluide incompressible, nous les affecterons d'un même numéro, accentué, pour les équations concernant le second problème.

Nous avons ainsi :

$$(4)\qquad \rho - 2\frac{\Delta_2\varphi}{\varphi} = 0,$$

$$(5)\qquad \rho_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\rho\, g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{\varphi}\Delta_2\varphi - \frac{1}{\varphi^2}\Delta_1\varphi - \frac{\Lambda}{\varphi^2}\right] = -kGU_\alpha U_\beta,$$

$$(6)\qquad \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = 1;$$

et

$$(4') \qquad \rho - \frac{2}{\varphi}\Delta_2\varphi - \frac{4}{\varphi^2}\Delta_1\varphi - \frac{4\Lambda}{\varphi^2} + 2kG_u = 0,$$

$$(5') \qquad \rho_{\alpha\beta} - \frac{2}{\varphi}\varphi_{,\alpha,\beta} + \gamma_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{\varphi}\Delta_2\varphi + \frac{1}{\varphi^2}\Delta_1\varphi - \frac{\Lambda}{\varphi^2}\right] = -kGU_\alpha U_\beta,$$

$$(6') \qquad \sum_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = 1;$$

substituant $\frac{1}{\varphi}\Delta_2\varphi$,

$$(7) \qquad \rho_{\alpha\beta} - \frac{2}{\varphi}\varphi_{,\alpha,\beta} + \frac{1}{4}\rho\gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}\frac{1}{\varphi^2}[\Delta_1\varphi - \Lambda] = -kGU_\alpha U_\beta,$$

$$(7') \qquad \frac{2}{\varphi}\varphi_{,\alpha,\beta} - \gamma_{\alpha\beta}\left[\frac{1}{\varphi^2}\Delta_1\varphi - \frac{\Lambda}{\varphi^2} - kG_u\right] = kGU_\alpha U_\beta;$$

dans (7') on a tenu compte de la relation $\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\rho\gamma_{\alpha\beta}$, valable pour $q = 2$. Pour continuer le calcul, il est commode de rapporter $d\sigma^2$ à ses lignes de longueur nulle, et de poser

$$d\sigma^2 = 2e^\lambda\, d\xi\, d\eta \qquad (\xi = v^1,\ \eta = v^2).$$

On a alors

$$\begin{array}{ll|l|l}
\gamma_1{}^1{}_1 = \dfrac{\partial\lambda}{\partial\xi}, & \gamma_1{}^2{}_1 = 0; & \varphi_{,1,1} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} - \dfrac{\partial\lambda}{\partial\xi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}, & \rho = -2e^{-\lambda}\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial\xi\,\partial\eta}, \\
\gamma_1{}^1{}_2 = 0, & \gamma_1{}^2{}_2 = 0; & \varphi_{,1,2} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}, & \Delta_1\varphi = 2e^{-\lambda}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \\
\gamma_2{}^1{}_2 = 0, & \gamma_2{}^2{}_2 = \dfrac{\partial\lambda}{\partial\eta}; & \varphi_{,2,2} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} - \dfrac{\partial\lambda}{\partial\eta}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}; & \Delta_2\varphi = 2e^{-\lambda}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta},
\end{array}$$

et les systèmes précédents deviennent

$$(4) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{1}{4}\varphi\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0,$$

$$(5\text{-}1) \qquad 2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} - \frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right] = kG\varphi(U_1)^2,$$

$$(5\text{-}2) \qquad 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta} - 2\varphi\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{\Lambda e^\lambda}{2\varphi^2}\right] = kG\varphi U_1U_2,$$

$$(5\text{-}3) \qquad 2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} - \frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right] = kG\varphi(U_2)^2,$$

$$(6) \qquad 2e^\lambda U^1U^2 = 1;$$

(5-2) s'écrit aussi, compte tenu de (4),

$$(5\text{-}4)\qquad 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{2}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda e^{\lambda}}{\varphi^2}=-k\mathrm{G}\varphi\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2;$$

on a de même pour les équations accentuées

$$(7'\text{-}1)\qquad 2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]=k\mathrm{G}\varphi(\mathrm{U}_1)^2,$$

$$(7'\text{-}2)\qquad 2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda e^{\lambda}}{2\varphi^2}-\frac{1}{2}k\mathrm{G}_0e^{\lambda}\varphi\right]=k\mathrm{G}\varphi\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2,$$

$$(7'\text{-}3)\qquad 2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]=k\mathrm{G}\varphi(\mathrm{U}_2)^2.$$

Éliminons maintenant G et les U_α entre les équations (5-1), (5-3), (5-4) d'une part; (7'-1), (7'-2), (7'-3) de l'autre; on obtient dans les deux cas une équation de Monge-Ampère par rapport à φ, dont les coefficients dépendent d'ailleurs de la fonction λ, également inconnue :

$$\begin{aligned}(8)\quad &\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2\\ &\quad-\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{2}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda e^{\lambda}}{2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}\right]+\dots\\ &\qquad\qquad+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}-\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda e^{\lambda}}{\varphi^2}\right]-\frac{\Lambda^2e^{2\lambda}}{4\varphi^2}=0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8')\quad &\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2\\ &\quad-\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{2}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda e^{\lambda}}{2}-\frac{k\mathrm{G}_0}{2}e^{\lambda}\varphi^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}\right]+\dots\\ &+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}-\frac{1}{\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-k\mathrm{G}_0e^{\lambda}-\frac{\Lambda e^{\lambda}}{\varphi^2}\right]-e^{2\lambda}\left[\frac{k\mathrm{G}_0}{2}\varphi-\frac{\Lambda}{2\varphi}\right]^2=0.\end{aligned}$$

On a donc, pour $p=q=2$, deux équations indépendantes de la matière : (4) et (8) dans un cas, (4') et (8') dans l'autre; il y a deux fonctions inconnues φ et λ. Le problème se réduit à l'intégration du système formé par ces deux équations. Il est remarquable qu'on puisse, comme nous le verrons, obtenir des formules d'intégration complète avec des fonctions arbitraires. Les systèmes en question sont évidemment assez compliqués, et il ne paraît pas aisé d'expliquer pourquoi la méthode que nous allons indiquer réussit. En fait, nous nous servirons des équations en G, U_2, une fois certaines remarques faites sur les équations de Monge-Ampère écrites ci-dessus ([1]).

On constate tout d'abord, sans difficulté, que les discriminants de ces deux équations sont nuls, de sorte que, pour l'une comme pour l'autre, les deux systèmes de caractéristiques sont confondus. Les équations de ces caractéristiques doubles sont : pour (8),

$$d\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}d\xi-\frac{1}{\varphi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{A\,e^{\lambda}}{2}\right]d\eta=0,$$
$$d\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}d\eta-\frac{1}{\varphi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{A\,e^{\lambda}}{2}\right]d\xi=0,$$
$$d\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\eta=0;$$

et pour (8'),

$$d\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}d\xi+\left[\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{A\,e^{\lambda}}{2\varphi}-\frac{kG_0}{2}e^{\lambda}\varphi\right]d\eta=0,$$
$$d\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}d\eta-\left[\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{A\,e^{\lambda}}{2\varphi}-\frac{kG_0}{2}e^{\lambda}\varphi\right]d\xi=0,$$
$$d\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\eta=0.$$

On aperçoit aisément des combinaisons intégrables, dans un cas

$$\frac{d\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]}{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}}-\frac{d\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]}{\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}}-\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}d\xi-\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}d\eta$$
$$-\frac{1}{\varphi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\eta\right]-\frac{A}{2e^{-\lambda}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\eta\right]=0,$$

ce qui donne l'intégrale intermédiaire

$$\varphi\left[e^{-\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{A}{2}\right]=\text{const.}$$

([1]) Peut-être pourrait-on rattacher le procédé employé à une méthode indiquée par M. Cerf, dans sa Communication au Congrès international des Mathématiciens (Zurich, septembre 1932).

et dans l'autre cas

$$\frac{d\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]}{\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}}+\frac{d\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]}{\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}}-\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}d\xi-\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}d\eta+\frac{1}{\varphi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\eta\right]$$
$$+\frac{1}{e^{-\lambda}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}}\left[\frac{\Lambda}{2}-\frac{kG_0}{2}\varphi^2\right]\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}d\eta\right]=0,$$

ce qui donne l'intégrale intermédiaire

$$\varphi\left[e^{-\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda}{2}-\frac{kG_0}{6}\varphi^2\right]=\text{const.}$$

On sait que l'intégration de l'équation de Monge-Ampère nécessite la connaissance de deux intégrales intermédiaires, de sorte que nous devrions en rester là si nous ne pouvions tirer parti des équations en U_α.

a. Cas de l'absence de fluide. — Ce qui précède montre que la quantité

$$\varphi\left[e^{-\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda}{2}\right]$$

reste constante le long des caractéristiques. Multiplions le premier membre de (5-4) par $\frac{1}{2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}U_1$, et le premier membre de (5-1) par $\frac{1}{2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}U_2$, puis ajoutons, il vient

(9) $$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2-2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\Lambda e^{\lambda}}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]U_1$$
$$+\left[2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\right]U_2=0;$$

de même, multiplions le premier membre de (5-3) par $\frac{1}{2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}U_1$, et le premier membre de (5-4) par $\frac{1}{2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}U_2$, puis ajoutons, il vient

(10) $$\left[2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\right]U_1$$
$$+\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\Lambda}{2}e^{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]U_2=0$$

Enfin, ajoutons les équations (9) et (10) et multiplions le résultat par $e^{-\lambda}$, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\varphi\left[e^{-\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda}{2}\right]\right\}U_2+\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\varphi\left[e^{-\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda}{2}\right]\right\}U_1=0,$$

ou encore, à cause de

$$\frac{d\xi}{ds}=U^1=e^{-\lambda}U_2,\qquad \frac{d\eta}{ds}=U^2=e^{-\lambda}U_1,$$

$$\frac{d}{ds}\left\{\varphi\left[e^{-\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda}{2}\right]\right\}=0,$$

la dérivée étant prise le long d'une ligne de courant d'univers. L'intégrale intermédiaire reste donc constante le long des lignes de courant d'univers, ce qui prouve que celles-ci sont les caractéristiques doubles de l'équation de Monge-Ampère vérifiée par la fonction φ.

b. Cas du fluide parfait. — Ici, c'est la quantité

$$\varphi\left[e^{-\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda}{2}+\frac{kG_0}{6}\varphi^2\right]$$

qui reste constante le long des caractéristiques. Remarquons d'abord que la condition d'orthogonalité relative au $d\sigma^2$

$$2e^{\lambda}\,d\xi\,d\eta$$

est

$$d\xi\,\delta\eta+\delta\xi\,d\eta=0.$$

Si donc on envisage les trajectoires orthogonales des lignes de courant d'univers sur la multiplicité (ξ,η), et si l'on désigne par

$$\overline{U^1},\quad \overline{U^2},\quad \overline{U}_1,\quad \overline{U}_2,$$

les composantes contravariantes et covariantes du vecteur unitaire tangent à ces courbes en leurs différents points, on peut poser

$$U^1=i\overline{U}^1,\qquad U^2=-i\overline{U}^2,\qquad U_1=-i\overline{U}_1,\qquad U_2=i\overline{U}_2.$$

Substituons $\overline{U}_1$ et $\overline{U}_2$ à U_1 et U_2 dans les équations (7'-1), (7'-2), (7'-3). Multiplions le premier membre de (7'-1) par $\frac{1}{2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\overline{U}_2$ et le premier membre de (7'-2) par $\frac{1}{2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\overline{U}_1$, puis ajoutons, il vient

$$
(9')\quad \left[\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\right]\overline{U}_2
+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\Lambda e^{\lambda}}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{kG_0}{2}e^{\lambda}\varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right]\overline{U}_1=0;
$$

de même multiplions le premier membre de (7'-2) par $\frac{1}{2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\overline{U}_2$ et le premier membre de (7'-3) par $\frac{1}{2}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\overline{U}_1$, puis ajoutons, il vient

$$
(10')\quad \left[\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\right]\overline{U}_1
+\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\Lambda e^{\lambda}}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{kG_0}{2}e^{\lambda}\varphi^2\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]\overline{U}_2=0.
$$

Ajoutons enfin les équations (9') et (10') et multiplions le résultat par $e^{-\lambda}$, on trouve

$$
\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\varphi\left[e^{-\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda}{2}+\frac{kG_0}{6}\varphi^2\right]\right\}\overline{U}_2
+\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\varphi\left[e^{-\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda}{2}+\frac{kG_0}{6}\varphi^2\right]\right\}\overline{U}_1=0,
$$

qui s'écrit encore

$$
\frac{d}{ds}\left\{\varphi\left[e^{-\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{\Lambda}{2}+\frac{kG_0}{6}\varphi^2\right]\right\}=0;
$$

la dérivée étant prise le long d'une trajectoire orthogonale aux lignes de courant d'univers. Ces trajectoires orthogonales sont donc les caractéristiques doubles de l'équation Monge-Ampère (8').

Ces résultats vont nous permettre d'achever complètement l'intégration.

5. Nous allons profiter de ces circonstances simples pour mettre $d\sigma^2$ sous une forme canonique. Ce paragraphe sera consacré au cas schématique. On sait qu'alors les lignes de courant d'univers sont des géodésiques du dS^2. Ici elles sont contenues dans les multiplicités (υ^1, υ^2) et l'on constate facilement que ce sont aussi des géodésiques de ces multiplicités. Nous rapporterons donc $d\sigma^2$ aux lignes de courant et à leurs trajectoires orthogonales. Le paramètre μ sera l'arc des lignes de courant, et comme

$$\varphi[\Delta_1\varphi - \Lambda]$$

reste constant le long de ces lignes, nous prendrons cette expression comme second paramètre

$$\nu = \varphi[\Delta_1\varphi - \Lambda].$$

Le $d\sigma^2$ est de la forme de Gauss

$$d\sigma^2 = d\mu^2 + \psi^2\, d\nu^2 \qquad (u^1 = \mu,\ u^2 = \nu)$$

et ψ est une fonction à déterminer de μ et ν. On a

$$\gamma_1{}^1{}_1 = 0, \qquad \gamma_1{}^2{}_1 = 0; \qquad \varphi_{1,1} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2},$$

$$\gamma_1{}^1{}_2 = 0, \qquad \gamma_1{}^2{}_2 = \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}; \qquad \varphi_{1,2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\,\partial\nu} - \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu},$$

$$\gamma_2{}^1{}_2 = -\psi\frac{\partial\psi}{\partial\mu}; \qquad \gamma_2{}^2{}_2 = \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}; \qquad \varphi_{2,2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\nu^2} + \psi\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} - \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu};$$

$$\rho = -\frac{2}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2},$$

$$\Delta_1\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2,$$

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right];$$

de plus

$$\iota^1 = 1, \qquad \iota^2 = 0, \qquad \iota_1 = 1, \qquad \iota_2 = 0.$$

Reprenant la numérotation antérieure, le système à intégrer devient

$$(4) \qquad \frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right] + \frac{1}{\psi}\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} = 0.$$

$$(5\text{-}1) \qquad -\frac{2\varphi}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} + \frac{1}{\varphi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2\right] - \frac{\Lambda}{\varphi} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} + kG\varphi = 0,$$

$$(5\text{-}2) \qquad \frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{1}{\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right] = 0,$$

$$(5\text{-}3) \qquad -2\varphi\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} + \frac{\psi^2}{\varphi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 - \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2\right] - \frac{\Lambda\psi^2}{\varphi} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\nu^2} - 2\psi\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \frac{2}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0;$$

auquel on doit ajouter la nouvelle condition

$$(11)\qquad \varphi\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2\right] - \nu = 0.$$

Remarquons que moyennant (4), (5-3) s'écrit

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} + \frac{1}{\varphi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 - \Lambda\right] = 0;$$

dès lors une combinaison simple de (5-2) et (5-3) donne

$$2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2\right] + 2\frac{\varphi}{\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{1}{\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right] - \Lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\varphi\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2\right] - \Lambda\varphi\right\} = 0,$$

ce qui est compatible avec (11). (5-3) s'écrit encore, moyennant (11),

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} + \frac{\nu}{\varphi^2} = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 - \frac{\nu}{\varphi}\right] = 0.$$

Nous poserons donc

$$(12)\qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 = \frac{\nu}{\varphi} - [f(\nu)]^2 + \Lambda;$$

$$(13)\qquad \psi = \frac{1}{f(\nu)}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu},$$

$f(\nu)$ étant une fonction arbitraire. On peut alors calculer la densité G par (5-1). Ces formules permettent de vérifier (5-2), (5-3), (11), nous allons constater qu'elles vérifient (4). Un calcul facile donne

$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right] = \frac{f(\nu)f'(\nu)}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}},$$

$$\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right] = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} + \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\,\partial\nu},$$

et (4) s'écrit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\,\partial\nu}+f(\nu)f'(\nu)+\varphi\frac{\partial^3\varphi}{\partial\mu^2\,\partial\nu}=0.$$

Or, d'après (12),

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}=-\frac{\nu}{2\varphi^2},\qquad \frac{\partial^3\varphi}{\partial\mu^2\,\partial\nu}=-\frac{1}{2\varphi^2}+\frac{\nu}{\varphi^3}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\,\partial\nu}=\frac{1}{2\varphi}-\frac{\nu}{2\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}-f(\nu)f'(\nu);$$

et la vérification est immédiate. Les équations (12) et (13) résolvent donc complètement le système; il suffit d'intégrer en μ l'équation (12) — ce qui se fait par une quadrature élémentaire et introduit une seconde fonction arbitraire de ν — pour obtenir la valeur explicite de φ. Ajoutons que l'équation (5-1) donne, compte tenu des formules précédentes,

$$G=\frac{-1}{k\varphi^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}}, \tag{14}$$

et $d\sigma^2$ prend la forme

$$d\sigma^2=d\mu^2+\frac{1}{[f(\nu)]^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 d\nu^2.$$

Il y a intérêt, à certains égards, à faire un changement de variable sur ν seul. Posons

$$\dot\nu=g(\nu)$$

avec

$$g'(\nu)=\frac{1}{f(\nu)};$$

alors

$$\frac{1}{f(\nu)}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=\frac{-1}{kG\varphi^2},$$

et le coefficient de $d\nu^2$ dans $d\sigma^2$ a pour expression

$$\frac{1}{k^2G^2\varphi^4}.$$

Si $\nu=F(\dot\nu)$ et si l'on change $\dot\nu$ en ν, les conditions (12), (13), (14) deviennent

(12) $$\left(\frac{d\rho}{d\mu}\right)^2 = \frac{F(\nu)}{\rho} - [F'(\nu)]^2 + \Lambda,$$

(13) $$\psi^2 = \frac{1}{k^2 G^2 \rho^4},$$

(14) $$G = \frac{-F'(\nu)}{k\rho^2 \frac{d\rho}{d\nu}}.$$

Finalement on obtient le tableau suivant, qui résout la question :

(F)
$$u^1 = u, \qquad u^2 = v, \qquad V^1 = 0, \qquad V^2 = 0,$$
$$\upsilon^1 = \mu, \qquad \upsilon^2 = \nu, \qquad U^1 = 1, \qquad U^2 = 0;$$
$$G = \frac{-F'(\nu)}{k\rho^2 \frac{d\rho}{d\nu}};$$
$$dS^2 = d\mu^2 + \frac{1}{k^2 G^2 \rho^4} d\nu^2 + \rho^2 \left[du^2 + \cos^2(u\sqrt{\Lambda})\, dv^2\right] \quad \text{pour } \Lambda > 0,$$
$$dS^2 = d\mu^2 + \frac{1}{k^2 G^2 \rho^4} d\nu^2 + \rho^2 \left[du^2 + \operatorname{ch}^2(u\sqrt{-\Lambda})\, dv^2\right] \quad \text{pour } \Lambda < 0$$
avec
$$\left(\frac{d\rho}{d\mu}\right)^2 = \frac{F(\nu)}{\rho} - [F'(\nu)]^2 + \Lambda.$$

6. Passons maintenant au cas du fluide parfait. On rapportera encore la multiplicité (υ^1, υ^2) aux lignes de courant et à leurs trajectoires orthogonales. D'après le théorème d'Eisenhardt, les lignes de courant sont des lignes géodésiques d'un ds^2 conforme à celui de la multiplicité (υ^1, υ^2) à savoir du ds^2

$$d\sigma'^2 = e^{2\chi} d\sigma^2$$

avec

$$d\chi = \frac{dP}{G}.$$

On constate facilement, dans le cas du fluide incompressible, que

$$e^{2\chi} = \frac{G^2}{\bar{G}^2}.$$

Il résulte de là qu'en rapportant $d\sigma^2$ aux lignes de courant et à leurs trajectoires orthogonales, on a

$$ds^2 = \Psi^2\,d\mu^2 + X^2\,d\nu^2,$$

μ désignant l'arc conforme d'Eisenhardt, compté sur les lignes de courant, Ψ et X sont des fonctions de μ et ν à déterminer, et l'on a

$$\Psi^2 = e^{-2\chi} = \frac{G_\nu^2}{G^2}.$$

Les lignes $\nu =$ const. sont des lignes de courant, de sorte que

$$U^1 = \frac{1}{\Psi}, \qquad U^2 = 0, \qquad U_1 = \Psi, \qquad U_2 = 0;$$

enfin la quantité

$$\varphi\left[\Delta_1\varphi - \lambda - \frac{k}{3}G_0\varphi^2\right]$$

reste constante sur les lignes $\mu =$ const., et est donc de la forme $f(\mu)$; posant alors $x^1 = \mu$; $x^2 = \nu$, il vient

$$\begin{array}{ll|l}
\gamma^1_{11} = \dfrac{1}{\Psi}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\mu}, & \gamma^2_{11} = -\dfrac{\Psi}{X^2}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu}; & \varphi_{11} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} - \dfrac{1}{\Psi}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\mu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu} + \dfrac{\Psi}{X^2}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}, \\
\gamma^1_{12} = \dfrac{1}{\Psi}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu}, & \gamma^2_{12} = \dfrac{1}{X}\dfrac{\partial X}{\partial\mu}; & \varphi_{12} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\,\partial\nu} - \dfrac{1}{\Psi}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu} - \dfrac{1}{X}\dfrac{\partial X}{\partial\mu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}; \\
\gamma^1_{22} = -\dfrac{X}{\Psi^2}\dfrac{\partial X}{\partial\mu}, & \gamma^2_{22} = \dfrac{1}{X}\dfrac{\partial X}{\partial\nu}; & \varphi_{22} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\nu^2} + \dfrac{X}{\Psi^2}\dfrac{\partial X}{\partial\mu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu} - \dfrac{1}{X}\dfrac{\partial X}{\partial\mu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu},
\end{array}$$

$$\Delta_1\varphi = \frac{1}{\Psi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{X^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2,$$

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\Psi X}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{X}{\Psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{\Psi X}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{\Psi}{X}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right];$$

$$R = \frac{-1}{\Psi X}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\Psi}\frac{\partial X}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{X}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)\right],$$

moyennant quoi nous avons les équations suivantes, où l'on a repris la numérotation du paragraphe 4 :

$$(4') \qquad \begin{aligned}
&-\frac{1}{\Psi X}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\Psi}\frac{\partial X}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{X}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{\Psi X}\,\frac{2}{\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{X}{\Psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\Psi}{X}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)\right] + \cdots \\
&\quad - \frac{3}{\varphi^2}\left[\frac{1}{\Psi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{X^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2\right] + \frac{2\lambda}{\varphi^2} + kG_0 = 0
\end{aligned}$$

et

$$(7'\text{-}1)\qquad \frac{2}{\rho}\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial\mu^2}-\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\frac{\partial\rho}{\partial\mu}+\frac{\Psi}{X^2}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right]$$
$$-\frac{\Psi^2}{\rho^2}\left[\frac{1}{\Psi^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)^2+\frac{1}{X^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)^2-\Lambda-kG_0\rho^2\right]=kG\Psi^2,$$

$$(7'\text{-}2)\qquad \frac{2}{\rho}\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial\mu\,\partial\nu}-\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\frac{\partial\rho}{\partial\mu}-\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial\mu}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right]=0,$$

$$(7'\text{-}3)\qquad \frac{2}{\rho}\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial\nu^2}+\frac{X}{\Psi^2}\frac{\partial X}{\partial\mu}\frac{\partial\rho}{\partial\mu}-\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial\nu}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right]$$
$$-\frac{X^2}{\rho^2}\left[\frac{1}{\Psi^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)^2+\frac{1}{X^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)^2-\Lambda+kG_0\rho^2\right]=0,$$

$$(11')\qquad \Psi=\frac{G_0}{G},$$

$$(12')\qquad \rho\left[\frac{1}{\Psi^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)^2+\frac{1}{X^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)^2-\Lambda-\frac{kG_0}{3}\rho^2\right]=f(\mu),$$

il est commode de poser

$$\alpha=\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\rho}{\partial\mu},\qquad \beta=\frac{1}{X}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}.$$

(7'-2) s'écrit alors de deux façons équivalentes :

$$(13')\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\nu}=\frac{1}{\Psi}\frac{\partial X}{\partial\mu}\beta\qquad\text{ou}\qquad\frac{\partial\beta}{\partial\mu}=\frac{1}{X}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\alpha;$$

de même (7'-1) devient, compte tenu de (11') et (12'),

$$\frac{2}{\rho}\left[\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}+\frac{1}{X}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\beta\right]-\frac{\Psi}{\rho^2}\left[\frac{f(\mu)}{\rho}+\frac{2}{3}kG_0\rho^2\right]=kG_0$$

et (7'-3) prend la forme

$$\frac{2}{\rho}\left[\frac{\partial\beta}{\partial\nu}+\frac{1}{\Psi}\frac{\partial X}{\partial\mu}\alpha\right]+\frac{X}{\rho^2}\left[\frac{f(\mu)}{\rho}-\frac{2}{3}kG_0\rho^2\right]=0.$$

Si dans ces deux dernières équations, on remplace $\frac{1}{\Psi}\frac{\partial X}{\partial\mu}$ et $\frac{1}{X}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}$ par leurs valeurs tirées de (13'), on obtient

$$\frac{1}{\alpha\rho}\frac{\partial}{\partial\mu}[\alpha^2-\beta^2]-\frac{\Psi}{\rho^2}\left[\frac{f(\mu)}{\rho}-\frac{2}{3}kG_0\rho^2\right]=kG_0,$$
$$\frac{1}{\beta\rho}\frac{\partial}{\partial\nu}[\alpha^2-\beta^2]-\frac{X}{\rho^2}\left[\frac{f(\mu)}{\rho}-\frac{2}{3}kG_0\rho^2\right]=0.$$

D'autre part l'équation (12') donne, en introduisant x et $\mathfrak{z}$,

$$x^2 + \mathfrak{z}^2 = \frac{f(\mu)}{\rho} + X - \frac{kG_0}{3}\rho^2,$$

de sorte que (7'-1) et (7'-3) prennent encore la forme

$$\frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\mu}}\left[\frac{f'(\mu)}{\rho} - \frac{f(\mu)}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\mu} - \frac{2kG_0}{3}\rho\frac{d\rho}{d\mu}\right] + \frac{f(\mu)}{\rho} + \frac{2}{3}kG_0\rho^2 = \frac{kG_0\rho^2}{\Psi},$$

$$\frac{\rho}{\frac{d\rho}{ds}}\left[-\frac{f(\mu)}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds} - \frac{2kG_0}{3}\rho\frac{d\rho}{ds}\right] + \frac{f(\mu)}{\rho} + \frac{2}{3}kG_0\rho^2 = 0,$$

dont la seconde est vérifiée identiquement. La première donne successivement

$$\frac{f'(\mu)}{\frac{d\rho}{d\mu}} = \frac{kG_0\rho^2}{\Psi}, \qquad \Psi = \frac{kG_0\rho^2}{f'(\mu)}\frac{d\rho}{d\mu},$$

$$G = \frac{f'(\mu)}{k\rho^2}\frac{1}{\frac{d\rho}{d\mu}}, \qquad x = \frac{f'(\mu)}{kG_0\rho^2}, \qquad \frac{dx}{ds} = \frac{-2f'(\mu)}{kG_0\rho^3}\frac{d\rho}{ds}.$$

Mais d'après (13') et la valeur de $\mathfrak{z}$,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\Psi X}\frac{dX}{d\mu}\frac{d\rho}{ds};$$

il reste donc

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{d\mu} = \frac{-2}{\rho}\frac{d\rho}{d\mu}$$

et

$$X = \frac{\varphi(s)}{\rho^2},$$

en intégrant en μ. On a ensuite

$$\mathfrak{z} = \frac{\rho^2}{\varphi(s)}\frac{d\rho}{ds}.$$

Ces valeurs de x, $\mathfrak{z}$, Ψ, X vérifient bien les équations (13'), comme on le constate sans peine. En définitive, nous aboutissons aux formules

(14') $$\Psi = \frac{kG_0\rho^2}{f'(\mu)}\frac{\partial\rho}{\partial\mu},$$

(15') $$X = \frac{g(\nu)}{\rho^2},$$

(16') $$G = \frac{f'(\mu)}{k\rho^2}\frac{1}{\dfrac{\partial\rho}{\partial\mu}},$$

qui satisfont aux équations (7'-1), (7'-2), (7'-3), (11'); l'équation (12') donne la condition subsidiaire

(17') $$\frac{[f'(\mu)]^2}{k^2G_0^2\rho^4} - \frac{\rho^2}{[g(\nu)]^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)^2 = \frac{f(\mu)}{\rho} - \lambda - \frac{kG_0}{3}\rho^2;$$

reste à vérifier l'équation (4'). Le calcul est particulièrement fastidieux. On trouve d'abord, en tenant compte des diverses relations précédentes,

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{X}{\Psi}\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\Psi}{X}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right) = \frac{\Psi}{\beta}\left[\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} - \beta\frac{\partial\beta}{\partial\nu}\right] - \frac{X}{\alpha}\left[\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\mu} - \beta\frac{\partial\beta}{\partial\mu}\right]$$
$$= \frac{kG_0\, g(\nu)}{2\rho} - \Psi X\left[\frac{f(\mu)}{\rho^2} - \frac{2}{3}kG_0\rho\right]$$

et

$$\frac{1}{\Psi X\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{X}{\Psi}\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\Psi}{X}\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{\Psi^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)^2 - \frac{1}{X^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\nu}\right)^2\right] - \frac{2\lambda}{\rho^2} - kG_0 = \frac{f'(\mu)}{2\rho^2\dfrac{\partial\rho}{\partial\mu}} - \frac{f(\mu)}{\rho^2} - \frac{1}{3}kG_0.$$

Il faut ensuite évaluer la courbure scalaire du $d\sigma^2$ obtenu, c'est-à-dire la combinaison

$$\frac{1}{\Psi X}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\Psi}\frac{\partial X}{\partial\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{X}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)\right].$$

Pour simplifier ce dernier calcul, on peut supposer $g(\nu) = 1$, ce qui revient, d'après la valeur de X, à effectuer un changement de variables convenable sur ν seul. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{1}{\Psi}\frac{\partial X}{\partial\mu}\right] = \frac{-2f''(\mu)}{kG_0\rho^4} - \frac{10\, f'(\mu)}{kG_0\rho^5}\frac{\partial\rho}{\partial\mu}.$$

D'autre part, en dérivant par rapport à μ, la condition subsidiaire, et par rapport à ν, la valeur de ψ, on trouve

$$\frac{1}{X}\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\frac{d\rho}{d\nu} = \frac{kG_0}{2\rho} - \frac{f'(\mu)}{kG_0\rho^2} - \left[\frac{kG_0 f(\mu)}{2f'(\mu)}\frac{1}{\rho^2} - \frac{k^2G_0^2}{3f'(\mu)}\rho - \frac{2f'(\mu)}{kG_0\rho^3}\right]\frac{d\rho}{d\mu},$$

et en dérivant par rapport à ν,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{X}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right]\frac{d\rho}{d\nu} + \frac{1}{X}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\frac{d^2\rho}{d\nu^2}\\
&\quad = -\frac{kG_0}{2\rho^2}\frac{d\rho}{d\nu} + \frac{4f'(\mu)}{kG_0\rho^3}\frac{d\rho}{d\nu} - \dots\\
&\qquad - \left[\frac{kG_0 f(\mu)}{f'(\mu)}\frac{1}{\rho^3} - \frac{k^2G_0^2}{3f'(\mu)} - \frac{10f'(\mu)}{kG_0\rho^4}\right]\frac{d\rho}{d\mu}\frac{d\rho}{d\nu} \quad \dots\\
&\qquad - \left[\frac{kG_0 f(\mu)}{2f'(\mu)}\frac{1}{\rho^2} - \frac{k^2G_0^2}{3f'(\mu)}\rho - \frac{2f'(\mu)}{kG_0\rho^3}\right]\frac{d^2\rho}{d\mu\,d\nu}.
\end{aligned}$$

Or l'équation (17') donne, par dérivation en μ et ν,

$$\begin{aligned}
2\frac{d^2\rho}{d\nu^2} &= -\frac{8[f'(\mu)]^2}{k^2G_0^2\rho^5} - \frac{5f(\mu)}{\rho^3} - \frac{4X}{\rho^3} - \frac{2}{3}\frac{kG_0}{\rho^2},\\
2\frac{d\rho}{d\nu}\frac{d^2\rho}{d\mu\,d\nu} &= \left[\frac{8[f'(\mu)]^2}{k^2G_0^2\rho^5} - \frac{5f(\mu)}{\rho^3} - \frac{4X}{\rho^3} - \frac{1}{3}\frac{kG_0}{\rho^2}\right]\frac{d\rho}{d\mu}\\
&\quad + \frac{f'(\mu)}{\rho^2} + \frac{8f'(\mu)f''(\mu)}{k^2G_0^2\rho^4},
\end{aligned}$$

en substituant dans la précédente équation, on finit par obtenir, après un certain nombre de mises en facteur,

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{X}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right] = \frac{kG_0}{2\rho^2} - \frac{4f'(\mu)}{kG_0\rho^3} - \left[kG_0\frac{f(\mu)}{f'(\mu)}\frac{1}{\rho^3} - \frac{k^2G_0^2}{3f'(\mu)} - \frac{10f'(\mu)}{kG_0\rho^4}\right]\frac{d\rho}{d\mu},$$

puis

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{1}{\Psi}\frac{\partial X}{\partial\mu}\right] + \frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{1}{X}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right] = \frac{kG_0}{2\rho^2} - \left[kG_0\frac{f(\mu)}{f'(\mu)}\frac{1}{\rho^3} - \frac{k^2G_0^2}{3f'(\mu)}\right]\frac{d\rho}{d\mu}.$$

On constate finalement que le premier membre de (4') est identiquement nul.

Le tableau suivant donne donc tous les éléments de la solution.

dans le cas du fluide incompressible :

$$u^1 = u, \qquad u^2 = v, \qquad V^1 = 0, \qquad V^2 = 0,$$

$$\varphi^1 = \mu, \qquad \varphi^2 = \nu, \qquad U^1 = \frac{f'(\mu)}{kG_0\rho^2}\,\frac{1}{\dfrac{d\rho}{d\mu}}, \qquad U^2 = 0;$$

$$G = \frac{f'(\mu)}{k\rho^2}\,\frac{1}{\dfrac{d\rho}{d\mu}}, \qquad P = G - G_0;$$

(G) $$dS^2 = \frac{k^2G_0^2\rho^4}{[f'(\mu)]^2}\left(\frac{d\rho}{d\mu}\right)^2 d\mu^2 - \frac{1}{\rho^4}\,d\nu^2 - \rho^2\left[du^2 + \cos^2(u\sqrt{A})\,dv^2\right]$$

(pour $A > 0$).

$$dS^2 = \frac{k^2G_0^2\rho^4}{[f'(\mu)]^2}\left(\frac{d\rho}{d\mu}\right)^2 d\mu^2 - \frac{1}{\rho^4}\,d\nu^2 + \rho^2\left[du^2 + \operatorname{ch}^2(u\sqrt{-A})\,dv^2\right]$$

(pour $A < 0$)

avec la condition subsidiaire

$$\frac{[f'(\mu)]^2}{k^2G_0^2\rho^4} + \rho^4\left(\frac{d\rho}{d\nu}\right)^2 = \frac{f(\mu)}{\rho} + A - \frac{kG_0}{3}\rho^2.$$

La condition subsidiaire est plus compliquée que dans le cas schématique: l'intégration en ν introduit une nouvelle fonction arbitraire de μ, mais exige une quadrature hyperelliptique de genre 2.

7. Nous allons maintenant étudier le cas de l'univers vide. Les équations (4), (5-1), (5-3), (5-4), (6) du paragraphe **4** montrent, lorsqu'on y fait $G = P = 0$, et qu'on effectue les combinaisons indiquées en (a) que les dérivées partielles en ξ et η de l'intégrale intermédiaire

$$\rho\left[e^{-\lambda}\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\,\frac{\partial\rho}{\partial\eta} - \frac{A}{2}\right]$$

sont nulles, de sorte que, cette fois, cette quantité reste constante sur la multiplicité (φ^1, φ^2); on ne peut donc plus la prendre comme variable ainsi qu'on l'a fait au paragraphe **5**, et il faut employer une autre méthode. Désignons par h la valeur constante de

$$\varphi[\Delta_1\varphi - \Lambda]$$

et posons

$$d\mu = \left[\frac{\varphi}{\Lambda\varphi + h}\right]^{\frac{1}{2}} d\varphi;$$

on a

$$\Delta_1\mu = \left(\frac{d\mu}{d\varphi}\right)^2 \Delta_1\varphi = 1.$$

Les lignes $\mu =$ const. (ou $\varphi =$ const.) constituent donc une famille de courbes parallèles sur la multiplicité (ν^1, ν^2). Rapportant alors cette multiplicité aux courbes $\mu =$ const. et aux géodésiques trajectoires orthogonales, on a

$$d\sigma^2 = d\mu^2 + \psi^2\, d\nu^2,$$

puis le système (avec la numérotation du paragraphe 4)

$$(4) \qquad \frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right] - \frac{1}{\psi}\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} = 0,$$

$$(5\text{-}1) \qquad -\frac{2\varphi}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} + \frac{1}{\varphi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 - \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2\right] - \frac{\Lambda}{\varphi} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} = 0,$$

$$(5\text{-}2) \qquad \frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{1}{\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right] = 0,$$

$$(5\text{-}3) \qquad 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} + \frac{1}{\varphi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{\psi^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 - \Lambda\right] = 0,$$

$$(11) \qquad d\mu = \left[\frac{\varphi}{\Lambda\varphi + h}\right]^{\frac{1}{2}} d\varphi.$$

L'équation (11) donne

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = \left[\frac{\Lambda\varphi + h}{\varphi}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0,$$

$$\frac{1}{\varphi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 - \Lambda\right] = \frac{h}{\varphi^2}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2} = -\frac{h}{2\varphi^2}.$$

(5-2) et (5-3) sont donc bien vérifiées moyennant (11). (4) et (5-1) donnent ensuite

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\psi\left(\frac{\Lambda\varphi + h}{\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - \varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} = 0,$$

$$-\frac{2\varphi}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\mu^2} + \frac{2h}{\varphi^2} = 0.$$

ou en prenant ρ pour variable, au lieu de μ,

$$(A\rho + h)\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{2A\rho + h}{2\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{h}{2\rho^2}\psi = 0,$$

$$(A\rho + h)\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} - \frac{h}{2\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{h}{\rho^2}\psi = 0.$$

Il est facile de constater que ces équations ont une intégrale commune qu'on peut prendre égale à

$$\psi = \left|\frac{A\rho + h}{\rho}\right|^{\frac{1}{2}};$$

en choisissant convenablement la variable ν. Dans le cas de l'univers vide le dS^2 de l'espace a donc, suivant le signe de A, l'une ou l'autre des formes

$$\text{(II)}\quad \boxed{\begin{array}{l} dS^2 = \dfrac{\rho}{A\rho + h}d\rho^2 + \dfrac{A\rho + h}{\rho}d\nu^2 + \rho^2\left[du^2 + \cos^2(u\sqrt{A})\,dv^2\right], \\ dS^2 = \dfrac{\rho}{A\rho + h}d\rho^2 + \dfrac{A\rho + h}{\rho}d\nu^2 + \rho^2\left[du^2 + \operatorname{ch}^2(u\sqrt{-A})\,dv^2\right]. \end{array}}$$

On retrouve, comme il convient, le ds^2 de Schwarzschild, aux notations près.

8. Nous allons maintenant nous occuper du système d'équations (E) du paragraphe **3**. Ce système se divise en deux systèmes partiels, un système écrit en lettres latines, concernant ds^2, et un système écrit en lettres grecques, concernant $d\sigma^2$. Examinons d'abord ce dernier qui s'écrit :

$$\rho\Delta_2\rho + (p-1)\Delta_1\rho = A + k\rho^2\frac{(q-2)G + 2pP}{p(p+q+2)},$$

$$\rho_{\alpha\beta} - \frac{p}{\rho}\rho_{,\alpha,\beta} = k\gamma_{\alpha\beta}\frac{G - 2P}{p+q-2},$$

$$G = \frac{B}{\rho^2}, \qquad \Phi(G, P) = 0, \qquad U_\alpha = 0.$$

Quelle que soit l'équation d'état, en éliminant G et P entre ces équations, on aboutira à un système de la forme

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{p}{\varphi}\varphi_{,\alpha,\beta} + \gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{F}(\varphi),$$

$$\Delta_2\varphi + \frac{p-1}{\varphi}\Delta_1\varphi = \mathrm{G}(\varphi).$$

Appliquons le théorème de conservation; la condensation des équations en $\rho_{\alpha\beta}$ donne

$$\rho = \frac{p}{\varphi}\Delta_2\varphi + q\,\mathrm{F}(\varphi)$$

et le tenseur conservatif d'Einstein a pour composantes covariantes

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{p}{\varphi}\left[\varphi_{,\alpha,\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\,\Delta_2\varphi\right] + \left(1 - \frac{q}{2}\right)\gamma_{\alpha\beta}\,\mathrm{F}(\varphi).$$

Il vient ensuite par dérivation covariante

$$\sigma^{\alpha}{}_{\beta,\alpha} = -\frac{p}{\varphi^2}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,}{}^{\alpha}{}_{,\beta} + \frac{p}{\varphi}\varphi_{,}{}^{\alpha}{}_{,\beta,\alpha} - \frac{p}{2}\gamma^{\alpha}{}_{\beta}\left(\frac{\Delta_2\varphi}{\varphi}\right)_{,\alpha} + \left(1 - \frac{q}{2}\right)\gamma^{\alpha}{}_{\beta}\,\mathrm{F}'(\varphi)\,\varphi_{,\alpha}.$$

Condensons; notons d'abord les relations

$$\sum_{\alpha}\varphi_{,\alpha}\,\varphi_{,}{}^{\alpha}{}_{,\beta} = \frac{1}{2}(\Delta_1\varphi)_{,\beta},$$

$$\sum_{\alpha}\varphi_{,}{}^{\alpha}{}_{,\beta,\alpha} = (\Delta_2\varphi)_{,\beta} + \sum_{\alpha}\varphi_{,}{}^{\alpha}\rho_{\alpha\beta} = (\Delta_2\varphi)_{,\beta} + \frac{p}{2\varphi}(\Delta_1\varphi)_{,\beta} + \mathrm{F}(\varphi)\varphi_{,\beta},$$

d'après le système lui-même; on obtient, toutes réductions faites, les relations de conservation

$$0 = \frac{p}{2\varphi}(\Delta_2\varphi)_{,\beta} + \frac{p}{2\varphi^2}\Delta_2\varphi\,\varphi_{,\beta} + \frac{p^2-p}{2\varphi^2}(\Delta_1\varphi)_{,\beta}$$
$$+ \left[p\,\frac{\mathrm{F}(\varphi)}{\varphi} + \left(1 - \frac{q}{2}\right)\mathrm{F}'(\varphi)\right]\varphi_{,\beta}.$$

Tenons compte maintenant de la valeur de $\Delta_2\varphi$ donnée par le système

$$\Delta_2\varphi = -\frac{p-1}{\varphi}\Delta_1\varphi + \mathrm{G}(\varphi),$$

$$(\Delta_2\varphi)_{,\beta} = -\frac{(p-1)}{\varphi}(\Delta_1\varphi)_{,\beta} + \frac{p-1}{\varphi^2}\Delta_1\varphi.\varphi_{,\beta} + \mathrm{G}'(\varphi).\varphi_{,\beta};$$

en substituant, on trouve finalement

$$\left[\frac{p}{2\varphi}G'(\varphi)+\frac{p}{2\varphi^2}G(\varphi)+p\frac{F(\varphi)}{\varphi}+\left(1-\frac{q}{2}\right)F'(\varphi)\right]\varphi_{\beta}=0.$$

Il en résulte que la fonction φ doit se réduire à une constante, à moins que $F(\varphi)$ et $G(\varphi)$ ne rendent le crochet identiquement nul. Un calcul facile montre, dans le cas présent, que celà ne peut avoir lieu que si l'équation d'état est de la forme

$$P=\frac{1}{2}(G-G_0).$$

Sans nous inquiéter de la signification physique que peut présenter cette dernière, ni de l'état de la matière auquel elle correspond éventuellement, nous supposerons qu'il n'en est pas ainsi; φ se réduit alors à une constante qu'on peut supposer égale à l'unité; la pression et la densité de matière sont aussi des constantes que nous désignerons encore par P et G. Le système d'équations écrit en lettres grecques se réduit alors à

$$\varphi_{\alpha\beta}=k\gamma_{\alpha\beta}\frac{G-2P}{p+q-2},$$

on a de plus

$$\Lambda=k\frac{(2-q)G-2pP}{p(p+q-2)},$$

formule qui définit, en fonction de G et P, la constante Λ qui figure dans le système écrit en lettres latines. Les conclusions précédentes subsistent dans le cas de la relativité, qui exige, ainsi qu'on l'a vu à la fin du paragraphe 3, $q=1$, $p=3$, mais il est de plus nécessaire que $\varphi_{\alpha\beta}$, ici φ_{11} soit nul, ce qui exige

$$G=2P.$$

Supposons que les valeurs de la pression, et de la densité de matière, valeurs constantes, satisfaisant à l'équation d'état et à cette dernière relation, existent et correspondent à un état possible de la matière. Écrivons alors les équations définissant ds^2 et les V^i; on a d'abord, d'après la relation entre G et P,

$$\Lambda=-\frac{2kP}{3}.$$

Le système écrit en lettres latines devient alors

$$r_{ij} = -kGX_iX_j,$$
$$\sum_{ij} g_{ij}X^iX^j = 1.$$

Les espaces à trois dimensions correspondants ont leurs courbures principales constantes :

$$\omega_1 = \omega_2 = -kP, \qquad \omega_3 = kP.$$

La quadrique de Riemann est un hyperboloïde de révolution à une nappe ayant pour méridienne une hyperbole équilatère, la congruence principale relative aux axes de ces hyperboloïdes est géodésique, elle est constituée par les lignes de courant d'univers. La détermination de ces espaces à courbures principales constantes semble assez difficile. Outre un espace symétrique très particulier (¹), il existe d'autres solutions dépendant d'un certain nombre de fonctions de deux variables.

9. En terminant ce chapitre, disons un mot du système (E'). Dans le cas de la relativité, la seule hypothèse possible est $p = 1$, $q = 3$: les équations sont alors pour la fonction φ et le $d\sigma^2$:

$$\frac{\Delta_2\varphi}{\varphi} = k\frac{G+2P}{2}, \qquad \Phi(G, P) = 0.$$
$$\rho_{\alpha\beta} - \frac{1}{\varphi}\varphi_{,\alpha,\beta} = k\gamma_{\alpha\beta}\frac{G-2P}{2}$$

On peut éliminer G et P, on peut en particulier mettre $k\frac{G-2P}{2}$ sous la forme

$$F\left[\frac{\Delta_2\varphi}{\varphi}\right].$$

(¹) Au sujet de ces espaces symétriques, consulter en particulier le Mémoire fondamental de M. Cartan : *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 54, 1926, p. 214).

d'où le système indépendant de la matière

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{\varphi}\varphi_{,\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta} F\left[\frac{\Delta_2\varphi}{\varphi}\right].$$

L'application du théorème de conservation se fait comme au paragraphe précédent et conduit aux équations

$$\frac{1}{\varphi}[\varphi\Delta_2\varphi]_{,\beta} - \varphi^2\left[\frac{1}{\varphi^2}F\left(\frac{\Delta_2\varphi}{\varphi}\right)\right]_{,\beta} = 0.$$

Dans le cas général, on déduit de celles-ci que P, G, la courbure scalaire φ de $d\sigma^2$, ainsi que $\Delta_2\varphi$ sont fonction de φ seul : il semble difficile d'en dire plus : cependant, si l'équation d'état se réduit à $P = \text{const.}$, ce qui correspond à l'introduction d'une constante cosmique, on a

$$F\left[\frac{\Delta_2\varphi}{\varphi}\right] = \frac{\Delta_2\varphi}{\varphi} - \text{const.},$$

l'expression du théorème de conservation se simplifie, et montre que φ doit rester constant ; $d\sigma^2$ est alors à courbure constante. On retombe sur l'univers courbe d'Einstein. Plus particulièrement encore dans le cas schématique, G est nécessairement nul, et le dS^2 minkowskien.

Dans le chapitre qui suit, nous étudions le problème de l'évolution relativiste à partir de conditions initiales données, pour les dS^2 obtenus plus haut, dans les paragraphes **4**, **5**, **6**.

CHAPITRE II.

L'ÉVOLUTION SPHÉRIQUE.

Supposons que par des mesures effectuées dans tout l'univers, on définisse en chaque point un temps physique purement local et relatif. Ce temps, qui n'a aucune signification cosmique, nous servira simplement à préciser l'instant initial. On pourra, à cet instant, déterminer les valeurs des dix potentiels d'Einstein en fonction des variables d'espace. Nous dirons que le ds^2 de l'univers présente la symétrie sphérique si, en choisissant convenablement les variables d'espace, il prend la forme

$$dS^2 = \gamma_{11}\, dx^2 + 2\gamma_{12}\, dx\, d\mathfrak{z} + \gamma_{22}\, d\mathfrak{z}^2 - \rho^2\, ds^2,$$

où $d\mathfrak{z}$ est la différentielle du temps local, γ_{ij} et ρ étant des fonctions de x seul, ds^2, un ds^2 à deux variables u et v à courbure totale constante positive; x, u, v sont donc les variables d'espace. Conformément aux habitudes prises en relativité restreinte, ce dS^2 sera à un carré positif pour trois négatifs, l'intervalle d'univers étant réel le long d'une ligne de position constante, et imaginaire le long d'une ligne de temps constant : de sorte que

$$\gamma_{22} > 0, \qquad \gamma_{11} < 0, \qquad \gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2 < 0.$$

Imaginons maintenant que nous enregistrions également, pour $\mathfrak{z} = 0$, la répartition des densités et la distribution des vitesses, et que nous constations que ces nouvelles données présentent encore la symétrie sphérique, c'est-à-dire que densités et vitesses ne dépendent que de x et non des coordonnées u et v.

Nous admettrons que cette symétrie des données se conserve dans le cours de l'évolution de l'univers, et qu'à tout instant le dS^2 est de la forme

$$dS^2 = d\sigma^2 - \rho^2\, ds^2,$$

où $d\sigma$ et ρ ne dépendent que de x et $\mathfrak{z}$: si l'on peut satisfaire aux équations d'Einstein et aux conditions initiales par un tel dS^2, on doit considérer cette hypothèse comme légitime. Supposons donc qu'il en soit ainsi; il est clair qu'il suffira de connaître ce qui se passe sur une multiplicité deux fois étendue, $u =$ const., $v =$ const., pour savoir, par là même, comment évolue la matière dans tout l'univers : cela tient à ce que tout l'espace est constitué par la double infinité de ces multiplicités, toutes identiques les unes aux autres et engendrée respectivement par une simple infinité de lignes d'univers. On pourra donc représenter parfaitement l'évolution cherchée sur une carte à deux dimensions de l'une quelconque de ces multiplicités. Sur une telle carte, l'instant initial sera figuré par une ligne $\mathfrak{z} = 0$ qui supportera les données initiales. En général, cette ligne se partagera en plusieurs arcs AB, CD, ... supportant de la matière, séparés les uns des autres par des arcs vides BC, ... Notons que la ligne $\mathfrak{z} = 0$ n'est pas indéfinie dans les deux sens, mais qu'elle est bornée d'un côté par un point d'arrêt correspondant à la valeur o de la fonction ρ. Cette dernière est, en effet, la variable physique jouant le rôle du rayon vecteur issu du centre de l'univers, elle est essentiellement positive, et sur une multiplicité $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, la ligne $\rho = 0$ doit faire frontière. De chacun des arcs portant de la matière, est issue une demi-bande indéfinie, limitée par deux lignes d'univers et jouant le rôle de tube d'univers dans lequel évolue la matière. Ces tubes sont séparés les uns des autres par des régions vides qui peuvent, d'ailleurs, s'amincir et disparaître ultérieurement par suite du choc de deux tubes voisins.

Physiquement, le phénomène que nous étudions est le suivant. A l'instant initial, l'espace est formé d'anneaux sphériques concentriques, constitués par des couches concentriques homogènes, séparés les uns des autres par des régions vides. On imprime aux différentes molécules de ces anneaux des vitesses radiales ne dépendant que du rayon, on demande l'évolution ultérieure connaissant le dS^2 initial?

Le long de la ligne $\mathfrak{Z} = 0$, nous prendrons comme variable l'intervalle réel défini par

$$d\sigma^2 = -\gamma_{11}\, dx^2;$$

γ_{11}, γ_{12}, γ_{22}, ρ, G, U^1, U^2 sont donc donnés en fonction de σ. Le point d'arrêt o sera l'origine des σ, comptés positivement le long de cette ligne, dans le sens des ρ croissants, on a donc

$$\rho > 0, \qquad \frac{d\rho}{d\sigma} > 0;$$

la densité de matière est positive sur les arcs AB, CD, ... nulle sur les arcs BC, ..., et présente, en général, des discontinuités en A, B, C, D, ...: le quotient

$$V = \frac{U^1}{U^2} = \frac{dx}{d\mathfrak{Z}},$$

des composantes contravariantes de la vitesse unitaire généralisée n'est autre que la vitesse métrique; les lignes d'univers issues des différents points des arcs AB, CD, ..., etc., dans la direction définie par les composantes de la vitesse unitaire, doivent porter des intervalles réels, ce qui exige

$$\gamma_{11}V^2 - 2\gamma_{12}V - \gamma_{22} > 0.$$

La vitesse métrique est donc comprise entre deux limites de signes contraires le long de l'arc AB, par exemple, elle est, par suite, bornée supérieurement en valeur absolue sur chacun des arcs de la ligne $\beta = 0$ portant de la matière.

Désignons par θ l'angle imaginaire de la ligne d'univers issue de chaque point de AB et de cet arc. On a

$$\cos^2\theta = \frac{1}{\gamma_{11}} \frac{(\gamma_{11}V + \gamma_{12})^2}{\gamma_{11}V^2 + 2\gamma_{12}V + \gamma_{22}},$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{\gamma_{11}} \frac{\gamma}{\gamma_{11}V^2 - 2\gamma_{12}V + \gamma_{22}};$$

$\cos^2\theta$ est donc négatif, $\sin^2\theta$ est supérieur à l'unité; désignant par τ un argument réel, il est clair qu'on peut poser

$$\theta = \frac{\pi}{2} - i\tau$$

avec

$$\cos\theta = i \operatorname{sh}\tau, \qquad \sin\theta = \operatorname{ch}\tau.$$

Passons maintenant à la forme canonique du dS^2. Dans le cas intérieur schématisé, il faut faire usage des formules du tableau (F) du chapitre précédent; dans le cas du fluide parfait incompressible, le tableau (G) donne toutes les formules nécessaires. Nous nous bornerons ici à l'examen du cas schématique, l'étude de l'autre cas n'est pas impraticable, mais la présence de l'intégrale hyperelliptique, qui figure dans les formules du tableau (G), ainsi que d'autres circonstances dont nous dirons un mot à la fin de ce chapitre, compliquent sensiblement la discussion.

Il faut faire quelques changements dans les formules canoniques du chapitre précédent avant de pouvoir aborder le calcul. Il est nécessaire, en effet, de mettre les dS^2 obtenus sous la forme relativiste à trois carrés négatifs pour un positif.

La courbure totale A qui figure dans les formules de (F) est maintenant une donnée de la question; c'est la courbure totale positive du ds^2 sphérique qui entre dans le dS^2 initial. On peut supposer cette courbure totale égale à l'unité; dans le dS^2 initial, cela revient simplement à changer d'unité de longueur pour mesurer le rayon vecteur ρ. Dans le dS^2 canonique, il suffit de multiplier u et v par $\frac{1}{\sqrt{A}}$, ρ par $\sqrt{A}$, ν par A, F par $\sqrt{A^3}$; rien n'est changé aux formules canoniques, comme on le constate immédiatement. Nous supposerons, dorénavant, cette opération effectuée. Pour passer à la forme relativiste, il suffit maintenant de changer ν en $i\nu$, ρ en $i\rho$, F en iF, il vient alors

$$dS^2 = d\mu^2 - \frac{d\nu^2}{k^2G^2\rho^4} - \rho^2(du^2 - \cos^2 u\, dv^2),$$

$$\left(\frac{d\rho}{d\nu}\right)^2 = -\frac{F(\nu)}{\rho} - [F(\nu)]^2 - 1, \qquad G = \frac{-F'(\nu)}{k\rho^2\frac{d\rho}{d\nu}},$$

en tenant compte de $A = 1$. Les lignes d'univers sont les courbes $\nu = \text{const.}$, la variable μ, qui mesure le déplacement de la matière, joue le rôle d'un temps cosmique ou absolu.

Nous ferons la carte de la multiplicité (α, β) sur un plan rapporté aux coordonnées cartésiennes (μ, ν). Les lignes d'univers auront pour images des parallèles à l'axe des μ: le premier point est de déterminer l'image de la ligne $\beta = 0$ sur cette carte. Considérons un arc AB de cette ligne portant de la matière et sur lequel la densité G ne s'annule pas. μ et ν sont fonction de σ sur cet arc, et l'on a

$$\Delta_1\mu = 1, \qquad \Delta_1\nu = -k^2G^2\rho^4,$$

d'où l'on tire, en désignant par ds l'élément d'intervalle le long de cet arc,

$$\left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 = \cos^2\zeta, \qquad \left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2 = -k^2G^2\rho^4\sin^2\zeta,$$

puis

$$\left(\frac{d\mu}{d\sigma}\right)^2 = -\cos^2\zeta = \text{sh}^2\sigma, \qquad \left(\frac{d\nu}{d\sigma}\right)^2 = k^2G^2\rho^4\,\text{ch}^2\sigma;$$

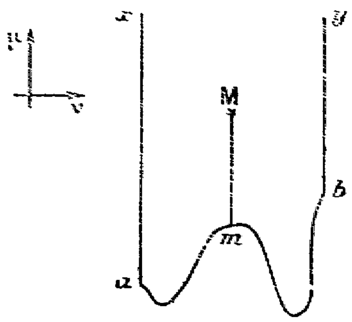
$\frac{d\mu}{d\sigma}$ et $\frac{d\nu}{d\sigma}$ sont donc bien réels sur AB comme il convient: on peut les supposer respectivement du signe de

$$\text{sh}\,\sigma, \quad kG\rho^2\,\text{ch}\,\sigma,$$

comme G, ρ, $ch\,\sigma$ ne s'annulent pas sur AB, $\frac{d\nu}{d\sigma}$ reste positif et ν est une fonction croissante de σ. μ, au contraire, pourra avoir des maxima et des minima. Les valeurs de μ et de ν, obtenues par quadrature, à des constantes additives près, permettent de placer la ligne $\beta = 0$ dans le plan image $(\mu\nu)$. Le tube d'univers, issu de AB, a pour image la demi-bande $xaby$ issue de ab et parallèle à l'axe des μ. L'arc ab peut présenter des tangentes horizontales, il n'a pas de tangentes verticales et est rencontré en un seul point par une parallèle à l'axe des μ.

Si l'on connaissait la valeur de la fonction $F(\nu)$ sur AB, on aurait immédiatement les valeurs de φ dans le tube $xaby$; soit, en effet, M un point intérieur au domaine $xaby$ (voir *fig.* 1); menons par M une

Fig. 1.



parallèle à l'axe des μ, qui rencontre l'arc ab en m, intégrons la condition subsidiaire à ν constant le long du segment mM. Cette condition s'écrit, après extraction de la racine,

$$d\mu = \pm \left\{ \frac{\varphi}{\{[F'(\nu)]^2 - 1\}\{\varphi - F(\nu)\}} \right\}^{\frac{1}{2}} d\varphi,$$

il n'y a aucun doute sur le signe à prendre devant le radical; au voisinage du point m, en effet, on a, en dérivant totalement par rapport à μ, le long de la ligne d'univers,

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{d\mu} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\frac{d\beta}{d\mu} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11}V^2 + 2\gamma_{12}V + \gamma_{22}}}\left[V\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right],$$

car $d\mu$ est l'élément d'intervalle compté positivement dans le sens des ζ croissants. Il vient encore

$$\frac{d\rho}{d\mu} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11}V^2 + 2\gamma_{12}V + \gamma_{22}}}\frac{d\rho}{d\zeta};$$

en introduisant la dérivée totale de ρ par rapport au temps local, le long de mM. On voit que $\frac{d\rho}{d\zeta}$ et $\frac{d\rho}{d\mu}$ sont de même signe, et ce signe est bien déterminé. A l'instant initial en m, $\frac{d\rho}{d\zeta}$ est positif ou négatif, suivant que les molécules, ayant pour image ce point, sont lancées dans le sens des ζ croissants ou décroissants. Dès lors, on peut effectuer la quadrature donnant $\mu_M - \mu_m$ en suivant par continuité le signe du radical, selon une méthode classique. On voit bien que tous les éléments du dS^2 et du déplacement de la matière seront déterminés dans le tube $xaby$ quand on connaîtra les valeurs prises par $F(\nu)$ sur ab.

ν étant une fonction monotone croissante de la variable σ, on peut poser

$$F(\nu) = x(\sigma).$$

Lorsque l'on connaîtra $x(\sigma)$, on aura, par élimination, l'expression unique et bien déterminée de $F(\nu)$.

Prenons donc $x(\sigma)$ comme inconnue. Il vient, par la condition subsidiaire,

$$\left(\frac{d\rho}{d\mu}\right)^2 = -\frac{x(\sigma)}{\rho} - [x'(\sigma)]^2\left(\frac{d\sigma}{d\nu}\right)^2 - 1 = -\frac{x(\sigma)}{\rho} - \frac{[x'(\sigma)]^2}{k^2G^2\rho^4\,\mathrm{ch}^2\tau} - 1,$$

et par l'expression de la densité

$$\frac{d\rho}{d\nu}\frac{d\nu}{d\sigma} = \frac{F'(\nu)}{k\rho^2G}\frac{d\nu}{d\sigma} = \frac{x'(\sigma)}{k\rho^2G}.$$

Or, le long de ab,

$$\frac{d\rho}{d\mu}\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{d\rho}{d\sigma} - \frac{\partial\rho}{\partial\nu}\frac{d\nu}{d\sigma},$$

substituant, élevant au carré et simplifiant, on trouve l'équation

$$\frac{[x'(\sigma)]^2}{k^2G^2\rho^4\,\mathrm{ch}^2\tau} - \frac{2}{k\rho^2G}\frac{d\rho}{d\sigma}x'(\sigma) + \left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 + \mathrm{sh}^2\tau - \frac{\mathrm{sh}^2\tau}{\rho}x(\sigma) = 0.$$

Il y a avantage à prendre pour variable indépendante ρ au lieu de σ, ce qui n'offre pas de difficulté, puisque l'une de ces quantités est fonction monotone de l'autre. L'équation précédente prend alors la forme

$$(1)\quad \frac{1}{\mathrm{ch}^2\tau}\left(\frac{d\alpha}{d\rho}\right)^2 - 2k\rho^2 G\frac{d\alpha}{d\rho} - k^2\rho^4 G^2\left[1 - \mathrm{sh}^2\tau\left(1-\frac{\alpha}{\rho}\right)\left(\frac{d\sigma}{d\rho}\right)^2\right] = 0.$$

Elle est du premier ordre et du second degré par rapport à la fonction inconnue $\alpha(\rho)$. Le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales a pour équation dans le plan α, ρ :

$$\rho^3 G\,\mathrm{th}^2\tau\left[\rho^4\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 - 1(\rho - \alpha)\right] = 0.$$

On peut toujours supposer que l'argument τ ne s'annule pas sur ab, en décomposant, s'il y a lieu, cet arc en plusieurs arcs partiels auxquels on pourra appliquer ce qui va suivre.

Considérons d'abord un tube d'univers tel que $x\,ab\,y$, contigu à deux régions vides dans lesquelles règnent des champs de Schwarzschild donnés par les formules (H) du chapitre précédent. Dans chacune de ces régions, les quantités

$$\rho[\Delta_1\rho - 1]$$

sont constantes et égales respectivement aux rayons gravitationnels h_1 et h_2 des dS^2 correspondants. [On doit naturellement tenir compte, dans les formules du tableau (H), du changement de ρ en $i\rho$, qui entraîne un changement de h en ih]. De plus, la valeur constante de $\rho[\Delta_1\rho + 1]$, dans la région vide contiguë à ax, par exemple, est égale à la valeur de $-$ F(ν) sur la ligne d'univers ax. Supposons, en particulier, que le tube d'univers envisagé soit le premier que l'on rencontre à partir du centre, de sorte qu'il n'y ait pas de matière sur l'arc OA de la ligne $\beta = 0$. Il est facile de voir que le rayon gravitationnel du dS^2 de la région vide contiguë à ax, est alors nécessairement nul; en effet, cette région contient la ligne de Ou, lieu des centres de l'univers sur la multiplicité ($\mu\nu$), ligne sur laquelle ρ est nul; par suite, la constante

$$\rho[\Delta_1\rho - 1]$$

est bien nulle dans cette région et sur ax. Le dS^2 correspondant se réduit à

$$d\nu^2 - d\rho^2 - \rho^2[du^2 + \cos^2 u\, dv^2];$$

il est minkowskien. Le domaine $uOax$ correspond au développement d'une cavité centrale vide de matière et où règne un champ minkowskien.

$F(\nu) = \alpha(\sigma)$ est donc nulle sur ac. C'est là une condition initiale pour l'équation (1) en $\alpha(\sigma)$ ou $\alpha(\rho)$. En la résolvant, on déterminera l'évolution de la matière dans le tube $xaby$, ainsi que la valeur de $F(\nu)$ sur by. On aura donc le rayon gravitationnel de la région vide contiguë à by, et par là même la valeur de $F(\nu)$ sur la ligne du courant cz qui sépare cette seconde région vide du second tube d'univers $zcdt$, et ainsi de suite. Le problème est donc déterminé; les conditions initiales et aux limites suffisent pour construire une solution. Reste maintenant à discuter l'existence de cette solution et à examiner si elle remplit les conditions de continuité et d'uniformité qu'on exige habituellement des fonctions de la physique mathématique.

Montrons tout d'abord qu'une solution de l'équation (1) rend positive la quantité

$$\left([F'(\nu)]^2 - 1\right)\rho - F(\nu),$$

qui figure sous un radical carré, dans l'expression de $\frac{d\mu}{d\rho}$. Cette quantité s'écrit encore, en introduisant la fonction α,

$$\left[\frac{1}{k^2 G^2 \rho^4 \operatorname{ch}^2 \tau}\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 \left(\frac{d\alpha}{d\rho}\right)^2 - 1\right]\rho - \alpha;$$

elle est certainement positive si $1 + \frac{\alpha}{\rho}$ est négatif, dans le cas contraire, en substituant

$$\pm k G \rho^2 \operatorname{ch} \tau \frac{d\sigma}{d\rho}\left[1 + \frac{\alpha}{\rho}\right]^{\frac{1}{2}}$$

à $\frac{d\alpha}{d\rho}$, dans le premier membre de l'équation (1), on trouve un carré parfait; de plus, si cette dernière, considérée comme une équation du second degré en $\frac{d\alpha}{d\rho}$ a des racines réelles, $1 + \frac{\alpha}{\rho}$ est certainement inférieur à $\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 ch^2 \tau$. La réunion de ces faits permet d'affirmer qu'on ne rencontrera jamais de difficulté dans le calcul de $\frac{d\mu}{d\rho}$.

Ce point étant établi, discutons la réalité des solutions de l'équation (1). α doit prendre en a la valeur $-h$, opposée au rayon gravitationnel de la région vide contiguë à ax. Il est nécessaire, pour qu'il existe des intégrales réelles prenant cette valeur initiale, que $-h$ soit inférieur à

$$\rho\left[\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 - 1\right]$$

au point a, et il y aura deux telles intégrales issues de ce point, holomorphes au voisinage. En particulier, si ax est contigu au vide central minkowskien, $\frac{d\rho}{d\sigma}$ devra être supérieur à l'unité au point a. Mais on n'a là que des conditions nécessaires; rien ne prouve, en effet, que les intégrales ainsi déterminées puissent être prolongées sur tout l'arc ab. Dans le plan (α, ρ), les courbes correspondantes peuvent, en effet, rencontrer la ligne des rebroussements. Pour examiner ce qui se passe, faisons un changement de fonction inconnue. Désignons par U une primitive quelconque de $k\rho^2 G \operatorname{ch}^2\tau$, et posons

$$\alpha = U + X,$$

en désignant par X la nouvelle fonction inconnue. L'équation (1) devient

$$\left(\frac{dX}{d\rho}\right)^2 = k^2 G^2 \rho^4 \left[1 - \left(1 + \frac{U + X}{\rho}\right)\left(\frac{d\sigma}{d\rho}\right)^2\right] \operatorname{ch}^2\tau \operatorname{sh}^2\tau,$$

la ligne des rebroussements a pour équation, dans le plan (ρ, X),

$$X = -U + \rho\left[\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 - 1\right]$$

et en tous les points de cette ligne, la tangente de rebroussement est horizontale (parallèle à l'axe des ρ). De plus, les courbes intégrales n'ont jamais de tangente verticale. Ceci nous permet d'affirmer que si la fonction

$$-U + \rho\left[\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 - 1\right]$$

est croissante, les deux courbes intégrales issues du point a ne rencontrent pas la courbe des rebroussements, on peut alors prolonger ces deux courbes sur toute la largeur du tube $xaby$. C'est le cas de la figure 2, tracée dans le plan (φX). Si, au contraire, la fonction

$$-U+\varphi\left[\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2-1\right]$$

est décroissante, on ne peut rien dire; cependant, il est clair, comme le montrent les figures 3, 4, 5, qu'on pourra toujours assigner une

Fig. 2.

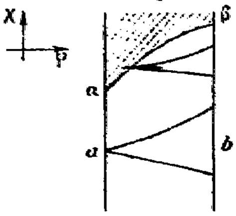


Fig. 3.

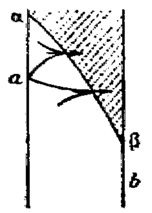


Fig. 4.

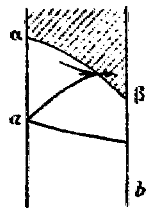
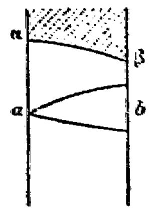


Fig. 5.



limite inférieure de la longueur du segment $a\alpha$, à partir de laquelle l'une au moins des deux courbes intégrales issues de a sera prolongeable sur toute la largeur ab du tube d'univers. On peut donc dire que, dès que la quantité

$$\varphi\left[\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2-1\right]+h$$

sera suffisamment grande au point a, l'équation (1) aura au moins une intégrale déterminée sur tout l'arc AB de la ligne $\beta=0$, prenant la valeur $-h$ au point A. Elle pourra même en avoir deux sans que rien permette de choisir l'une plutôt que l'autre, tout au moins en se bornant à la considération du tube $\alpha ab\gamma$.

Ces considérations ne s'appliquent plus à un arc AB portant de la matière si le point initial A est confondu avec le centre O de l'univers.

Il se développe toujours une cavité centrale minkowskienne, à moins que la vitesse initiale imprimée aux molécules centrales ne soit nulle, et dans tous les cas, la fonction α doit encore prendre la valeur o au point a. Mais cette fois, ce point est singulier pour l'équation (1). C'est, en effet, un point multiple de la courbe des rebroussements par lequel passe une branche triple de cette courbe qui est l'axe des α et une branche simple d'équation

$$\alpha=\varphi\left[\left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2-1\right].$$

La tangente initiale est déterminée, c'est l'axe des φ, elle doit être dirigée dans la région de réalité des courbes intégrales, ce qui exige encore

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} > 1.$$

Il y a lieu de se demander s'il n'y a pas une infinité d'intégrales passant par l'origine; il n'en est rien; on peut s'en rendre compte rapidement sur un cas simple, celui de l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x^2\frac{dy}{dx} - x^3(ax + by) = 0,$$

où a et b sont deux constantes, $a < 1$. Prenons comme nouvelle inconnue z définie par

$$z^2 - 2z + a - b\frac{y}{x} = 0,$$

l'équation en z est du premier ordre et du premier degré : elle s'écrit

$$2x(z-1)\frac{dz}{dx} + z^2 - (bx^2 - 2)z - a = 0;$$

le point singulier $(x = 0, y = 0)$ se dédouble en deux cols; comme on le constate sans difficulté; deux intégrales seulement de l'équation en y passent par l'origine et sont holomorphes en ce point. Les circonstances sont voisines pour l'équation en α. Ici encore, suivant que certaines conditions d'inégalité sont, ou non, remplies, il y aura zéro, une, deux intégrales de l'équation prolongeables sur toute la largeur du tube.

Toute cette discussion se simplifie beaucoup lorsqu'il y a repos initial. Alors τ est nul, et

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = k\varphi^2 G;$$

une simple quadrature détermine la fonction α prenant la valeur $-h$ au point a, il n'y a plus aucune difficulté.

Nous n'insisterons pas sur le cas où τ s'annule en certains points de ab. Il peut naître des secteurs vides entre deux lignes de courant issues de ces points, ou bien il peut y avoir choc initial.

Nous bornerons donc ici cette discussion sommaire de l'évolution sphérique dans le cas schématique. Les circonstances sont, on le voit, loin d'être simples. On peut dire, pour résumer, que les conditions initiales les plus naturelles déterminent formellement le phénomène ; mais pour que ce dernier soit partout défini et uniforme, ces conditions doivent remplir certaines inégalités. Il peut exister alors une ou deux solutions.

Les résultats sont encore bien plus étranges dans le cas du fluide parfait incompressible. On peut encore, comme dans le cas précédent, déterminer l'image de la ligne $\mathfrak{z} = 0$ dans la carte $(\mu\nu)$, on a encore une courbe rencontrée en un seul point par une parallèle à l'axe des μ, mais peut-être en plusieurs par une parallèle à l'axe des ν. La principale difficulté est, ici, que les caractéristiques du problème sont ces dernières parallèles, images des trajectoires orthogonales des lignes d'univers. Pour déterminer le phénomène en un point de la région $xaby$, on doit, cette fois, intégrer la condition subsidiaire le long d'une droite qui rencontre, en général, en plusieurs points la ligne $\mathfrak{z} = 0$. Il en résulte que l'évolution est par essence même non uniforme. Chaque arc de ab, monotone par rapport à ν, engendre une portion de tube d'univers, ces tubes pourront se prolonger les uns dans les autres sans se prolonger mutuellement. Il y aura, en quelque sorte, des ondes d'évolution relativiste, non compatibles, se copénétrant par un véritable phénomène de diffusion.

Quelles conséquences doit-on tirer de ces résultats au point de vue de la mécanique relativiste ? Évidemment, nos conclusions sont peu encourageantes. La non-uniformité des solutions, en particulier, choque nos esprits que la mécanique newtonienne avait habitués à un déterminisme quasi absolu. Il semble qu'on ne puisse éviter la diffusion indéfinie de la matière qui en est la conséquence, qu'en imposant aux éléments initiaux de satisfaire à certaines conditions d'inégalité. Rien ne prouve, d'ailleurs, que ces inégalités ne deviennent pas contradictoires pour des systèmes un peu compliqués.

Nous nous excusons, en terminant, d'avoir un peu insisté, dans ce dernier chapitre, sur certains points qui peuvent paraître élémentaires. Il nous a cependant semblé utile d'indiquer, d'une manière précise, les grandes lignes de la discussion d'un problème d'évolution relativiste, le plus simple qu'on puisse imaginer d'ailleurs.