JACQUES CHAPELON

Sur les relations entre les nombres des classes de formes quadratiques binaires de déterminant négatif

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1914
<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1914__2__1_0>

N° D'ORDRE :
1540.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. JACQUES **CHAPELON**.

1re THÈSE. — SUR LES RELATIONS ENTRE LES NOMBRES DES CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES BINAIRES DE DÉTERMINANT NÉGATIF.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le Mai 1914, devant la Commission d'examen.

MM. PICARD, *Président.*
PAINLEVE, HUMBERT, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1914

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
Doyen	P. APPELL, professeur.	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Doyen honoraire	G. DARBOUX	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires	CH. WOLF.	
	RIBAN.	
Professeurs	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	Physique.
	BOUSSINESQ	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	YVES DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	GASTON BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VELAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	P. JANET	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVÉ	Mécanique rationnelle.
	HAUG	Géologie.
	HOUSSAY	Zoologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
	M^me^ P. CURIE	Physique générale.
	CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie.
	EMILE BOREL	Théorie des fonctions.
	MARCHIS	Aviation.
	JEAN PERRIN	Chimie physique.
	G. PRUVOT	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	MATRUCHOT	Botanique.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CL. GUICHARD	Mathématiques générales.
	MOLLIARD	Physiologie végétale.
	N	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	N	Histologie.
Professeurs adjoints	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC	Physique.
	MICHEL	Minéralogie.
	HÉROUARD	Zoologie.
	LÉON BERTRAND	Géologie.
	RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	COTTON	Physique.
	LESPIEAU	Chimie.
	GENTIL	Pétrographie.
	SAGNAC	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
Secrétaire	D. TOMBECK.	

54263 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A MA MÈRE.

A MON MAITRE

MONSIEUR GEORGES HUMBERT.

Hommage respectueux
de son élève reconnaissant.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES

RELATIONS ENTRE LES NOMBRES

DES

CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES BINAIRES

DE DÉTERMINANT NÉGATIF.

INTRODUCTION.

1. *Notations.* — Je désignerai par $F(N)$ le nombre des classes de formes quadratiques binaires $(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ à coefficients entiers, positives, de l'ordre *propre*, c'est-à-dire dont les coefficients extrêmes ne sont pas pairs à la fois, et de déterminant $b^2 - ac = -N$ ou de discriminant $ac - b^2 = N$.

$F_1(N)$ est un nombre analogue, mais relatif aux formes de l'ordre *impropre*, c'est-à-dire aux formes dont les coefficients extrêmes sont pairs à la fois.

Rien n'est supposé sur la *primitivité* de ces formes.

Une classe équivalente à $a(x^2 + y^2)$ sera comptée pour $\frac{1}{2}$, une classe équivalente à $a(2x^2 + 2xy + 2y^2)$, pour $\frac{1}{3}$.

Je poserai encore

$$\begin{aligned} J(N) &= F(N) + 3F_1(N), \\ E(N) &= F(N) - F_1(N), \\ G(N) &= F(N) + F_1(N), \end{aligned}$$

et, avec les conventions en usage,

$$F(0) = 0, \qquad F_1(0) = -\frac{1}{12};$$

d'où

$$J(0) = -\frac{1}{4}, \qquad E(0) = \frac{1}{12}, \qquad G(0) = -\frac{1}{12}.$$

On peut remarquer que $G(N)$ est le nombre total des classes de formes de discriminant N.

J'aurai à considérer des sommes telles que

$$\Sigma F(N - \sigma^2),$$

N étant un nombre entier positif. La sommation s'étend sur σ, choisi parmi les nombres entiers rendant $N - \sigma^2$ positif.

Si les nombres σ sont tous congrus $(\mathrm{mod}\, p)$, on dira que la somme correspondante est une somme d'*ordre* p.

Ce Mémoire a pour objet l'étude de sommes du *cinquième* ordre.

2. *Historique*. — Legendre [1], le premier, étudia un sujet connexe au nôtre et découvrit que le nombre des décompositions d'un entier en trois carrés est lié au nombre des classes de formes quadratiques ayant cet entier pour discriminant. Mais c'est Gauss [2] qui établit le résultat de Legendre.

Jacobi montra avec quelle fécondité ses fonctions Θ s'appliquent à la recherche des nombres de représentations d'un entier par certaines formes quaternaires. On sait qu'il fut ainsi conduit à son célèbre théo-

---

[1] *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, année 1785 (Paris, 1788), p. 531 et suiv. *Voir* aussi *Théorie des Nombres*, 3e édition, vol. I, 3e Partie.

[2] *Disquisitiones Arithmeticæ*, Braunschweig, 1801, art. 291 et suiv.

rème sur les représentations du quadruple d'un nombre impair par une somme de quatre carrés impairs (¹), puis, à diverses propositions sur les décompositions d'un nombre en deux, quatre, six ou huit carrés. Sa méthode consiste à développer en série de puissances (²) des combinaisons convenables de fonctions Θ, puis à égaler les coefficients des mêmes puissances de l'argument.

Dans le cas de la représentation d'un nombre par quatre carrés, Jacobi, par une transposition habile, donna à sa démonstration une forme purement arithmétique. Trente ans plus tard, Kronecker, puis Liouville, imitèrent ce procédé pour présenter, sous une apparence arithmétique, des propositions d'abord obtenues au moyen des fonctions Θ.

Jacobi paraît avoir pressenti que les recherches de Legendre et de Gauss prendraient, grâce aux fonctions elliptiques, une extension considérable; cependant, c'est seulement Kronecker qui réalisa cette prévision en 1857 (³), non pas, à vrai dire, au moyen des fonctions Θ, mais en considérant les modules singuliers de la théorie de la multiplication complexe des fonctions elliptiques.

Voici les huit sommes (⁴) qu'obtint Kronecker :

I. $\qquad \Sigma F(4N - \sigma^2),$

II. $\qquad \Sigma F(2m - \sigma^2),$

III. $\qquad \Sigma(-1)^\sigma F(2m - \sigma^2)$

(¹) *Note sur la décomposition d'un nombre en quatre carrés* (*Journal de Crelle*, t. 3, 1828, p. 191; *Fundamenta Nova*, t. I, p. 40 à 42, 65, 66; *Journal de Crelle*, t. 12, 1834, p. 167).

(²) Pour la définition des fonctions Θ, *voir* le n° 18 du présent Mémoire. L'argument auquel il est fait allusion est q.

(³) *Monatsberichte der Koniglichpreussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 29 octobre 1857, traduit par Houel, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. 3, 1858 : *Sur les fonctions elliptiques et la théorie des nombres*, par M. Kronecker.

(⁴) *Ueber die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativer Determinante* (*Journal de Crelle*, t. 57, 1859, p. 248). Ce Mémoire fut traduit en français par Hoüel et publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. V, 1860.

et

IV. $\qquad \Sigma\, G(m-\sigma^2),$

V. $\qquad \Sigma\, F(m-\sigma^2),$

VI. $\qquad \Sigma(-1)^\sigma F(m-\sigma^2),$

VII. $\qquad \Sigma(-1)^\sigma F[r-(4\sigma)^2],$

VIII. $\qquad \Sigma(-1)^{\frac{s-\sigma^2}{16}}\left[2\,F\left(\frac{s-\sigma^2}{16}\right)-3\,G\left(\frac{s-\sigma^2}{16}\right)\right].$

Les sommes sont étendues à toutes les valeurs, entières, positives ou nulles de σ, rendant les parenthèses positives et entières :

n est un nombre entier quelconque,
m un entier impair,
r un entier de la forme $8k-1$,
s un entier de la forme $8k+1$.

Ce sont donc des sommes d'ordre *un* et *quatre*.

Kronecker indiquait aussi l'équation

$$12\,\Sigma\, E(n)q^n = (1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^3,$$

qui est l'expression analytique du résultat de Legendre.

En 1860, Joubert [1] démontra quelques-unes des formules de Kronecker, toujours grâce à la multiplication complexe.

En 1861-1862, Hermite [2], reprenant les méthodes de Jacobi, donne des développements nouveaux de combinaisons de fonctions Θ, notamment de $\frac{\vartheta_i \vartheta_k}{\vartheta_l}$, i étant, ou non, différent de k.

---

(1) *Sur la théorie des fonctions elliptiques et son application à la théorie des nombres* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 50, 1860, p. 774, 832, 907, 1044, 1095 et 1145).

(2) *Lettre adressée à M. Liouville sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'Arithmétique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 53, 1861, p. 214, ou *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. VII, 1862, p. 25, ou encore *Œuvres*, publiées par M. Émile Picard, t. II, 1908, p. 109). — *Sur les théorèmes de M. Kronecker relatifs aux formes quadratiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 55, 1862, p. 11-85; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. IX, 1864, p. 145, ou *Œuvres*, t. II, 1908, p. 241).

Ces développements lui permirent, de façon tout à fait élémentaire, mais très ingénieuse et très subtile, d'introduire des nombres de classes, ou même, plus simplement, des nombres de formes quadratiques réduites. La démonstration des formules de Kronecker était ainsi ramenée à l'application des méthodes de Jacobi, convenablement étendues. Hermite donnait d'ailleurs, lui aussi, un théorème sur les décompositions en trois carrés, par l'équation

$$\Sigma F(8N+3)\, q^{\frac{8N+3}{4}} = (\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \ldots)^3.$$

A peu près à la même époque, Liouville [1] avait été conduit, en arithmétisant certaines considérations analytiques, à des relations arithmétiques très générales contenant des fonctions arbitraires. En appliquant à ses travaux le très élégant artifice d'Hermite, Liouville parvint à la démonstration purement arithmétique des formules de Kronecker.

Ce dernier, cependant, annonça en 1862 [2] qu'il avait, de son côté, imaginé la méthode d'Hermite, et il montra, par de nouvelles applications, combien est étroit le lien qui unit les fonctions Θ aux relations entre les nombres des classes de formes quadratiques. Il déclara en outre être en possession d'un procédé arithmétique de démonstration de ses formules, inspiré également des idées de Jacobi. A dire vrai, il ne publiait pas son raisonnement, mais en amorçait un autre, bien différent, sans toutefois lever la difficulté principale.

Kronecker avait énoncé ses résultats sans démonstration. Stephen Smith développa ces dernières dans le sixième de ses intéressants

---

(1) *Note de M. Liouville*, à la suite de la *lettre d'Hermite* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, 2e série, 1862).

Voir aussi, dans le même Recueil, les Tomes III à VIII (2e série), où Liouville donne de très nombreux et très intéressants résultats arithmétiques, mais, en général, sans démonstration.

(2) *Monatsberichte der Kgl. pr. Akad. der Wissenschaften zu Berlin*, mai 1862, p. 309.

Reports (1), en partant de la multiplication complexe. De plus, il résuma les résultats obtenus dans ce domaine en 1865.

En 1867, 1868 et 1869, Liouville (2) persévérant vraisemblablement dans ses méthodes d'arithmétique, donna, sans démonstration, diverses sommes du type de Kronecker et des ordres 3 et 5, et aussi des sommes de types nouveaux, tels que

$$\Sigma i^2 \mathrm{F}(\ m - \ i^2),$$
$$\Sigma \ \mathrm{F}(2m - 3i^2).$$

En 1875, Kronecker (3) revint encore sur ses formules et approfondit la manière dont ses théorèmes se relient aux fonctions Θ. Il laissait entendre que le sujet était épuisé, mais cependant, en 1879-1880 et 1883, M. Gierster (4), partant des théories de M. F. Klein sur les correspondances modulaires, étendit considérablement le domaine des formules du type de Kronecker, en montrant qu'à chaque nombre premier correspond un groupe de formules de l'ordre correspondant.

Il exposa notamment les résultats suivants, rattachés à la fonction de l'Icosaèdre :

« Soient d et a des entiers qui satisfont à l'équation $da = n$ et de plus $d > \sqrt{n}$, d'où $a < \sqrt{n}$. Si δ est un diviseur quelconque de n, on

(1) *Report of the thirty-fifth meeting of the British Association for the advancement of Science. — Report on the theory of Numbers* (Birmingham, 1865; London, 1866), ou *Papers* (Oxford, 1894), p. 289.

(2) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XII, p. 98; t. XIII, p. 2, et t. XIV, p. 2, 7, 8. *Voir* aussi 2e série, t. III à VIII.

(3) *Monatsberichte Ak. zu Berlin*, 19 avril 1875, p. 223.

(4) *Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante* (*Göttinger Nachrichten*, 4 juin 1879). — *Sitzungsberichte der Münchener Akademie.* Sitzung vom 7 Februar 1880; *Mathematische Annalen,* XVII Band, 1880, p. 71 et 73; XXI et XXII, 1883.

pose (¹)

$$\Psi_{+1}(n) = \Sigma\left[d + \left(\frac{a}{5}\right)a\right],$$

$$\Psi_{-1}(n) = \Sigma\left[d - \left(\frac{a}{5}\right)a\right],$$

$$\sigma(n) = -\Sigma\left[\left(\frac{a}{5}\right) + \left(\frac{d}{5}\right)\right] a$$

$$\Phi(n) = \Sigma\delta,$$

$$\Psi(n) = \Sigma(d - a).$$

» De plus, $H(n)$ est le nombre des classes de formes

$$Px^2 + 2Qxy + Ry^2$$

à coefficients entiers, non équivalentes, de déterminant

$$Q^2 - PR = -n,$$

dont les coefficients extrêmes P, R sont tous deux pairs. On compte $2\rho x^2 + 2\rho y^2$ pour $\frac{1}{2}$, et $2\rho x^2 + 2\rho xy + 2\rho y^2$ pour $\frac{1}{3}$.

» $H_1(n)$ est le nombre des classes de formes définies de la même manière que pour $H(n)$, mais en prenant seulement celles susceptibles de représenter des nombres résidus quadratiques de 5, $H_{-1}(n)$ est le nombre des mêmes classes de formes susceptibles de représenter des nombres non résidus quadratiques de 5, de sorte qu'on a toujours (²)

$$H_1(n) = H_{-1}(n).$$

» D'ailleurs

$$H_1(0) = H_{-1}(0) = 0,$$

$$H(0) = -\frac{1}{12}$$

(¹) La définition des fonctions $\Psi_{+1}(n)$ et $\Psi_{-1}(n)$ est insuffisante, car elle n'envisage pas le cas de n carré. Nous donnons (nº 16) la définition complète d'après MM. Klein et Fricke.

On trouvera d'ailleurs les formules de M. Gierster dans les *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* de MM. Félix Klein et Robert Fricke (Teubner, 1890-1892), 2 ter Band., p. 231, 232, 233 et p. 202 et suiv. et leur démonstration, par application des équations modulaires de l'Icosaèdre.

(²) $H_1(n)$ et $H_{-1}(n)$ n'existent que si n est résidu de 5. Voir d'ailleurs la Note placée à la fin de ce Mémoire.

et

$$H(l) = \Phi(l) = \Psi(l) = 0,$$

si l n'est pas entier.

» k_0 représente tous les nombres $0, \pm 5, \pm 10, \ldots$, dont la valeur absolue est $\leqq \sqrt{4n}$.

» k_{+1} représente tous les résidus quadratiques (mod 5), c'est-à-dire les nombres $1, 4, 6, 9, \ldots$, qui sont $\leqq \sqrt{4n}$.

» k_{-1} représente tous les non résidus (mod 5), c'est-à-dire les nombres $2, 3, 7, 8, \ldots$, qui sont $\leqq \sqrt{4n}$.

» k représente tous les nombres $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$, qui sont, en valeur absolue, $\leqq \sqrt{4n}$.

» Dans ces conditions, on a les relations suivantes :

I (¹). $n \equiv \pm 1 \pmod 5$;

(1) $$2\Sigma\, H(4n - k_0^2) = \Phi(n) + 2\Psi(n) - 2\Psi_{\mp 1}(n),$$

(2) $$60\Sigma\left(\frac{4n - k_{\mp 1}^2}{25}\right) = 6\Psi_{\mp 1}(n) - 5\Phi(n),$$

(3) $$5\Sigma\, H_1(4n - k_{\mp 1}^2) = 5\Sigma\, H_{-1}(4n - k_{\mp 1}^2) = \Psi_{\mp 1}(n),$$

(4) $$3\Sigma\, H(4n - k_{\pm 1}^2) = \Phi(n).$$

II (²). $n \equiv \pm 2 \pmod 5$:

(1) $$3\Sigma\, H(4n - k_0^2) = \Phi(n),$$

(2) $$2\Sigma\, H(4n - k_{\mp 1}^2) = \Psi(n),$$

(3) $$3\Sigma\, H(4n - k_{\pm 1}^2) = \Phi(n).$$

III. $n \equiv 0 \pmod 5 = 5^\mu m$, où $m \not\equiv 0 \pmod 5$:

(1) $$\Sigma\, H_{+1}(4n - k_0^2) = \Phi(m) + 2\Phi\left(\frac{n}{25}\right) + 2\Psi\left(\frac{n}{25}\right),$$

(2) $$\frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{k}{5}\right) H(4n - k^2) = \sigma(n).$$

(¹) Le second membre de la relation I (1) s'écrit encore, en vertu de la relation

$$\Phi(n) + \Psi(n) = \Psi_{\mp 1}(n) + \Psi_{\pm 1}(n),$$

$$- \Phi(n) + 2\Psi_{\mp 1}(n),$$

et non

$$- 2\Phi(n) + 4\Psi_{\mp 1}(n)$$

comme l'indiquent MM. Klein et Fricke (*loc. cit.*, p. 232).

(²) Pour la relation II(1) et pour les deux relations III, MM. Klein et Fricke indiquent des seconds membres deux fois trop forts.

» Les sommations de gauche s'étendent aux nombres k_0, k_{+1}, k_{-1} et k, et les signes inférieurs se correspondent, ainsi que les signes supérieurs. $\left(\frac{k}{5}\right)$ est le symbole de Legendre. »

M. Gierster énonçait également [1] des formules se rapportant au 3^e^, au 7^e^, au 11^e^ et au 13^e^ ordre, mais c'est M. Hürwitz [2] qui démontra celles du 7^e^, du 11^e^ et du 13^e^ ordre, et qui donna la théorie générale complète pour un ordre quelconque premier.

Stieltjes [3], en 1883, revenant aux méthodes d'Hermite, établit diverses formules de Liouville et donna d'autres expressions d'un type encore différent, par exemple

$$\Sigma(-1)^{\frac{s-1}{2}} s\,F(4N-2s^2).$$

Hermite [4], en 1884 et 1887, compléta ses Mémoires de 1861-1862 et précisa sa méthode de démonstration des formules de Kronecker. Il indiqua divers développements intéressants, notamment ceux de $\frac{1}{\vartheta_k^2(x)}$, $\frac{1}{\vartheta_k(x)\vartheta_l(x)}$ et $\frac{1}{\vartheta_k^2(x)\vartheta_l^2(x)}$; ces derniers sont d'ailleurs dus à M. Appell.

En 1885, M. Hürwitz [5], partant des formules de Kronecker, en

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. XVII, p. 82 (pour le 7^e^ ordre); t. XXI, 1883, p. 49; t. XXII, 1883, p. 198, 203, 206.

(2) *Leipziger Berichten*, 15 décembre 1884; *Mathematische Annalen*, t. XXV, 1885, p. 157, ou encore KLEIN et FRICKE, Ouvrage cité, 4^e^ et 6^e^ Parties.

(3) *Sur un théorème de Liouville* (*C. R. Acad. Sc.*), t. 97, p. 1358 et 1415. — *Voir* aussi *Correspondance*, p. 58 et 62.

(4) *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XXIX, 1884; reproduit dans les *Acta mathematica*, t. V, ou *Œuvres*, t. IV (en préparation). — *Remarques arithmétiques sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques* (*Journal de Crelle*, t. 100).

Il faut encore citer : BIEHLER, *Sur les développements en série des fonctions doublement périodiques de troisième espèce*, 1879, Paris, Mémoire qui contient des formules intéressantes. — APPELL, *Sur les fonctions doublement périodiques de troisième espèce* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e^ série, t. I, 1884); et du même auteur : *Développements en série des fonctions doublement périodiques de troisième espèce* (même Recueil, 3^e^ série, t. II, 1885).

(5) *Ueber die Anzahl der Classen quadratischer Formen von negativer Determinante* (*Journal de Crelle*, t. 99).

tire, par des transformations de fonctions Θ, les expressions de diverses sommes du type de Kronecker et relatives aux ordres 4 et 8.

En 1900 et 1901, M. Karel Petr publie trois Mémoires [1] où il indique encore de nouveaux développements en série et notamment les développements fondamentaux retrouvés en 1907 par M. Georges Humbert. Il en déduit diverses formules rentrant dans les types de Stieltjes ou de Liouville, et d'autres d'un genre plus nouveau.

Enfin, en 1907, M. Georges Humbert [2] démontre de très nombreuses formules des types de Kronecker, Liouville et Stieltjes. Il retrouve et complète les formules de M. Gierster relatives aux sommes d'ordre *trois* et donne, sur le même sujet, des formules plus profondes que celles de M. Gierster. Il montre enfin la merveilleuse fécondité des méthodes d'Hermite, en établissant des développements d'un genre tout à fait nouveau, où s'introduisent diverses fonctions arithmétiques liées aux *minima* et aux *carrés des minima* des classes de même déterminant. Il peut ainsi calculer des sommes doubles de la forme

$$\sum_x \sum_y (-1)^{x+y} F(N - x^2 - y^2)$$

et d'autres sommes plus compliquées encore.

3. On voit, d'après ce rapide exposé, que deux méthodes bien distinctes permettent d'établir et d'étendre les formules de Kronecker. L'une, surtout utilisée par les mathématiciens allemands, conduit à des relations très générales quant à l'*ordre,* mais peu nombreuses. L'autre, celle d'Hermite et des mathématiciens français, semble apte à donner un grand nombre de relations pour un même ordre, mais cette fécondité même paraît devoir entraver son application à un ordre tant soit peu élevé.

---

(1) *Académie des Sciences de Bohême,* 1900-1901.

(2) *Formules relatives aux nombres de classes des formes quadratiques binaires et positives* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 6e série, t. III, 1907).

4. Je me suis proposé, dans ce travail, de retrouver et de compléter les formules du cinquième ordre données par M. Gierster et rappelées plus haut, en appliquant exclusivement les méthodes d'Hermite et les procédés déjà employés par M. G. Humbert pour le troisième ordre.

Voici le plan de ce Mémoire :

Dans un premier Chapitre, j'établis diverses relations entre certaines fonctions des diviseurs d'un nombre. Les fonctions de diviseurs qui se présentent dans nos recherches et dans celles des mathématiciens allemands sont, en effet, très variées. Il était indispensable, pour pouvoir simplifier et comparer les formules, de ramener toutes ces fonctions à un certain nombre de types.

Dans un second Chapitre, je rappelle des théorèmes élémentaires sur les fonctions Θ, diverses formules d'Hermite, et enfin les formules fondamentales de MM. Karel Petr et Georges Humbert.

Dans un troisième Chapitre, je démontre certaines relations liées à la transformation du cinquième ordre des fonctions Θ.

Dans un quatrième Chapitre, j'applique ces relations à la recherche de divers nombres de représentations d'un nombre entier par certaines formes quaternaires. Je n'insiste cependant pas sur ce sujet, me bornant à chercher les relations qui doivent être utiles dans la suite. Un résumé, placé à la fin du Chapitre, donne d'ailleurs les principaux résultats obtenus.

Le cinquième Chapitre contient la recherche des sommes

$$\Sigma F(N-\sigma^2) \qquad \text{et} \qquad \Sigma F_1(N-\sigma^2)$$

relatives au *cinquième* ordre. Il me suffit, pour cela, d'appliquer une méthode très analogue à celle que M. Humbert a donnée pour le troisième ordre.

Enfin, je termine par un sixième Chapitre où, grâce aux relations établies dans le quatrième, je simplifie les expressions trouvées pour les sommes cherchées, ce qui me permet de retrouver les formules de M. Gierster, puis d'obtenir des formules définitives dont les seconds membres ne dépendent que de fonctions des diviseurs de N et des nombres de représentations de N par quatre carrés dont au moins un, ou deux, ou trois, sont multiples de 5. Ces expressions se trouvent d'ailleurs rassemblées aux numéros **148** et **149**.

Il me reste à adresser mes remerciements à M. G. Humbert pour les précieux conseils qu'il m'a inlassablement prodigués au cours de ces recherches : le meilleur de ce travail lui appartient sans conteste. Je suis heureux de pouvoir lui témoigner ici toute mon affectueuse reconnaissance.

CHAPITRE I.

THÉORÈMES SUR LES DIVISEURS D'UN NOMBRE.

5. *Notations.* — Je poserai, N étant entier,

$$N = 2^{\mu} N' = 5^{\nu} N'' = 2^{\mu} 5^{\nu} N''',$$

en supposant mises en évidence les plus hautes puissances de 2 et de 5 contenues dans N.

d' sera un diviseur *quelconque* de N ;
d_1 et d, deux diviseurs *conjugués* ($N = d_1 d$ avec $d_1 \gtreqless d$) ;
d_1^p et d^i, deux diviseurs conjugués, le premier *pair*, le second *impair* et tels que $d_1^p > d^i$;
d_1^i et d^p, deux diviseurs conjugués, le premier *impair*, le second *pair* et tels que $d_1^i > d^p$;
θ' sera un diviseur quelconque de N''' ;
δ', un diviseur quelconque de $\frac{N}{2}$ (si $\mu \geqq 1$), à conjugué impair ;
d'_i, un diviseur quelconque, mais *impair*, de N, ou, par suite, un diviseur quelconque de N'.

J'aurai à envisager diverses fonctions de ces diviseurs, et notamment les suivantes, où les sommations sont étendues à toutes les valeurs des variables d', d_1 et d, définies plus haut :

$$\Sigma d' = \mathfrak{A}, \qquad \Sigma d'\left(\frac{d'}{5}\right) = \mathfrak{B}, \qquad \Sigma d'\left(\frac{d'}{5}\right)^2 = \mathfrak{C},$$

$$\Sigma(-1)^{d'} d' = \mathfrak{A}_1, \qquad \Sigma(-1)^{d'} d'\left(\frac{d'}{5}\right) = \mathfrak{B}_1, \qquad \Sigma(-1)^{d'} d'\left(\frac{d'}{5}\right)^2 = \mathfrak{C}_1,$$

$$\Sigma(d_1 - d) = \mathfrak{P}, \qquad \Sigma(d_1 - d)\left(\frac{d_1 + d}{5}\right) = \mathfrak{Q}, \qquad \Sigma(d_1 - d)\left(\frac{d_1 + d}{5}\right)^2 = \mathfrak{R},$$

$$\Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d) = \mathfrak{P}_1, \qquad \Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d)\left(\frac{d_1 + d}{5}\right) = \mathfrak{Q}_1, \qquad \Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d)\left(\frac{d_1 + d}{5}\right)^2 = \mathfrak{R}_1.$$

Le signe $\left(\frac{\Delta}{5}\right)$ est le symbole de Legendre :

$$\left(\frac{\Delta}{5}\right) = +1 \quad \text{si} \quad \Delta \equiv \pm 1 \pmod 5,$$

$$\left(\frac{\Delta}{5}\right) = -1 \quad \text{si} \quad \Delta \equiv \pm 2 \pmod 5,$$

$$\left(\frac{\Delta}{5}\right) = 0 \quad \text{si} \quad \Delta \equiv 0 \pmod 5.$$

Ces douze fonctions sont des fonctions de N; mais, en général, je supprimerai l'indication de la variable, quand aucune ambiguïté ne sera à craindre.

J'introduirai encore les fonctions

$$\Sigma \theta' = \mathrm{U}, \qquad \Sigma \theta'\left(\frac{\theta'}{5}\right) = \mathrm{V}.$$

Toutes ces fonctions arithmétiques ne sont pas indépendantes. Je vais montrer, pour commencer, que les six fonctions $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$ se ramènent à U, V, μ et ν.

6. *Calcul de* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\Sigma d'_\iota$, $\Sigma d'_\iota\left(\frac{d'_\iota}{5}\right)$, $\Sigma d'_\iota\left(\frac{d'_\iota}{5}\right)^2$. — On a évidemment

$$(1) \qquad \Sigma d'_\iota = \Sigma\theta' + 5\Sigma\theta' + \ldots + 5^\nu \Sigma\theta' = \frac{5^{\nu+1} - 1}{4}\mathrm{U},$$

$$(2) \qquad \Sigma d' = \Sigma d'_\iota + 2\Sigma d'_\iota + \ldots + 2^\mu \Sigma d'_\iota = \frac{(2^{\mu+1} - 1)(5^{\nu+1} - 1)}{4}\mathrm{U} = \mathfrak{A};$$

de même

$$(3)\qquad \Sigma(-1)^d d' = -\Sigma d'_\iota + 2\Sigma d'_\iota + \ldots + 2^\mu \Sigma d'_\iota = \Sigma d' - 2\Sigma d'_\iota$$
$$= \frac{(2^{\mu+1}-3)(5^{\nu+1}-1)}{4}\mathrm{U} = \mathfrak{A}_1,$$

puis

$$(4)\qquad \Sigma d'_\iota\left(\frac{d'_\iota}{5}\right) = \mathrm{V},$$

$$(5)\qquad \Sigma d'\left(\frac{d'}{5}\right) = \Sigma d'_\iota\left(\frac{d'_\iota}{5}\right) - 2\Sigma d'_\iota\left(\frac{d'_\iota}{5}\right) + \ldots + (-1)^\mu 2^\mu \Sigma d'_\iota\left(\frac{d'_\iota}{5}\right) = \frac{1-(-2)^{\mu+1}}{3}\mathrm{V} = \mathfrak{B},$$

$$(6)\qquad \Sigma(-1)^{d'} d'\left(\frac{d'}{5}\right) = -2\mathrm{V} + \frac{1-(-2)^{\mu+1}}{3}\mathrm{V} = -\frac{5+(-2)^{\mu+1}}{3}\mathrm{V} = \mathfrak{B}_1.$$

Enfin

$$(7)\qquad \Sigma d'_\iota\left(\frac{d_\iota}{5}\right)^2 = \mathrm{U},$$

$$(8)\qquad \Sigma d'\left(\frac{d'}{5}\right)^2 = (2^{\mu+1}-1)\mathrm{U} = \mathfrak{C},$$

$$(9)\qquad \Sigma(-1)^d d'\left(\frac{d'}{5}\right)^2 = (2^{\mu+1}-1)\mathrm{U} - 2\mathrm{U} = (2^{\mu+1}-3)\mathrm{U} = \mathfrak{C}_1.$$

7. On en déduit, immédiatement, les relations suivantes :

$$\mathfrak{A}(2\mathrm{N}) = \frac{5}{2}\mathfrak{A} - \frac{1}{2}\mathfrak{A}_1,\qquad \mathfrak{A}(4\mathrm{N}) = \frac{11}{2}\mathfrak{A} - \frac{3}{2}\mathfrak{A}_1,$$
$$\mathfrak{A}_1(2\mathrm{N}) = \frac{3}{2}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_1,\qquad \mathfrak{A}_1(4\mathrm{N}) = \frac{9}{2}\mathfrak{A} - \frac{1}{2}\mathfrak{A}_1,$$
$$\mathfrak{B}(4\mathrm{N}) = \frac{7}{2}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{B}_1,$$
$$\mathfrak{B}_1(4\mathrm{N}) = \frac{5}{2}\mathfrak{B} + \frac{3}{2}\mathfrak{B}_1.$$
$$\mathfrak{C}(2\mathrm{N}) = \frac{5}{2}\mathfrak{C} - \frac{1}{2}\mathfrak{C}_1,\qquad \mathfrak{C}(4\mathrm{N}) = \frac{11}{2}\mathfrak{C} - \frac{3}{2}\mathfrak{C}_1,$$
$$\mathfrak{C}_1(2\mathrm{N}) = \frac{3}{2}\mathfrak{C} + \frac{1}{2}\mathfrak{C}_1,\qquad \mathfrak{C}_1(4\mathrm{N}) = \frac{9}{2}\mathfrak{C} - \frac{1}{2}\mathfrak{C}_1,$$

On voit que, si N est impair,

$$\mathfrak{A}(2\mathrm{N}) = 3\mathfrak{A}(\mathrm{N}),\qquad \mathfrak{A}(4\mathrm{N}) = 7\mathfrak{A}(\mathrm{N}),\qquad \mathfrak{B}(4\mathrm{N}) = 3\mathfrak{B}(\mathrm{N}),$$
$$\mathfrak{A}_1(2\mathrm{N}) = \mathfrak{A}(\mathrm{N}),\qquad \mathfrak{A}_1(4\mathrm{N}) = 5\mathfrak{A}(\mathrm{N}),\qquad \mathfrak{B}_1(4\mathrm{N}) = \mathfrak{B}(\mathrm{N}).$$

Donc, si N est double d'un nombre impair,

$$\mathfrak{A} = 3\mathfrak{A}_1.$$

On trouve encore, pourvu que $\nu \geqq 1$, μ étant quelconque,

$$\mathfrak{A}\left(\frac{N}{25}\right) = \frac{\mathfrak{A} - 6\mathfrak{C}}{25},$$

$$\mathfrak{A}_1\left(\frac{N}{25}\right) = \frac{\mathfrak{A}_1 - 6\mathfrak{C}_1}{25}.$$

8. *Calcul de* $\Sigma\delta'$, $\Sigma\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right)$, $\Sigma\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right)^2$:

$$\Sigma\delta' = 2^{\mu-1}\Sigma d'_i = 2^{\mu-1}\frac{5^{\nu+1}-1}{4}U = 2^{\mu-3}(5^{\nu+1}-1)U. \tag{10}$$

$$\Sigma\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right) = (-2)^{\mu-1}V, \tag{11}$$

$$\Sigma\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right)^2 = 2^{\mu-1}U. \tag{12}$$

9. *Relation entre* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ et $\Sigma(d_1^p - d^i)$. — $\Sigma(d_1 - d)$ est égal à la somme des différences des diviseurs conjugués dont l'un est pair, l'autre impair, si N n'est pas multiple de 4, et augmentée de la somme des différences des diviseurs conjugués pairs, c'est-à-dire du double de la somme des différences des diviseurs conjugués de $\frac{N}{4}$, si N est multiple de 4.

Donc

$$\Sigma(d_1 - d) = \Sigma(d_1^p - d^i) + \Sigma(d_1^i - d^p) + 2\,\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right).$$

De même

$$\Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d) = \Sigma d_1^p - d^i) - \Sigma(d_1^i - d^p) + 2\,\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right);$$

d'où

$$2\,\Sigma(d_1^i - d^p) = \Sigma(d_1 - d) - \Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d) = \mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1.$$

Or, $\Sigma(d_1^p - d^i) - \Sigma(d_1^i - d^p)$ est évidemment égal à la somme des diviseurs pairs, à conjugués impairs, moins la somme des diviseurs impairs.

Donc

$$\Sigma(d_1^p - d^i) - \Sigma(d_1^i - d^p) = 2^\mu \Sigma d'_i - \Sigma d'_i = \frac{(2^\mu - 1)(5^{\nu+1} - 1)}{4} \mathrm{U}.$$

Par suite

$$(13) \qquad 2\Sigma(d_1^p - d^i) = \mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 + \frac{(2^\mu - 1)(5^{\nu+1} - 1)}{2} \mathrm{U} = \mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_1.$$

10. *Remarques.* — 1° En égalant les deux valeurs de

$$\Sigma(d_1^p - d^i) - \Sigma(d_1^i - d^p)$$

qu'on vient de trouver, on obtient

$$(14) \qquad \mathfrak{P}_1(\mathrm{N}) = \frac{(2^\mu - 1)(5^{\nu+1} - 1)}{4} \mathrm{U} + 2\mathfrak{P}\left(\frac{\mathrm{N}}{4}\right),$$

ou encore

$$(15) \qquad \mathfrak{P}_1(4\mathrm{N}) = \frac{(2^{\mu+2} - 1)(5^{\nu+1} - 1)}{4} \mathrm{U} + 2\mathfrak{P}(\mathrm{N}),$$

ce qui s'écrit encore

$$(15\ bis) \qquad \frac{1}{2}\mathfrak{P}_1(4\mathrm{N}) = \mathfrak{P} + \frac{5}{4}\mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathfrak{A}_1.$$

2° Si N est le double d'un nombre impair

$$\Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d) = \Sigma(-1)^{d_1} d_1 + \Sigma(-1)^d d,$$

puisque si d_1 est pair, d est impair, et réciproquement.

Donc

$$(16) \qquad \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{A}_1 \qquad (\mathrm{N} = 4\rho + 2).$$

La formule (14) contient d'ailleurs cette dernière, en faisant naturellement $\mathfrak{P}\left(\frac{2\rho + 1}{2}\right) = 0$.

3° Dans la formule (14) μ est supposé essentiellement différent de zéro. Mais μ peut être égal à 1. Alors, dans ce cas, $\frac{\mathrm{N}}{4}$ n'est pas entier et l'on conviendra de prendre $\mathfrak{P}\left(\frac{\mathrm{N}}{4}\right) = 0$.

4° Si N est impair, on a évidemment

$$\mathfrak{P}_1 = -\mathfrak{P}. \tag{17}$$

Les deux formules (14) et (17) permettent, dans tous les cas, de ramener la fonction $\mathfrak{P}_1$ à la fonction $\mathfrak{P}$.

On peut les réunir en écrivant

$$\mathfrak{P}_1(\mathrm{N}) = \left[\frac{(2^\mu - 1)(5^{\nu+1} - 1)}{4}\,\mathrm{U}(\mathrm{N}) + 2\,\mathfrak{P}\left(\frac{\mathrm{N}}{4}\right)\right] - \frac{1-(-1)^{\mathrm{N}}}{2}\,\mathfrak{P}(\mathrm{N}). \tag{18}$$

11. *Relation entre* $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}_1$ *et* $\Sigma(d_1^p - d^i)\left(\frac{d_1^p + d^i}{5}\right)$. — 1° Si $\mathrm{N} \equiv \pm 4 \pmod{10}$, on trouve

$$\Sigma(d_1^p - d^i)\left(\frac{d_1^p + d^i}{5}\right) = \pm\,\Sigma(d_1^p - d^i)\left(\frac{d_1^p + d^i}{5}\right)^2. \tag{19}$$

Les signes supérieurs et les signes inférieurs se correspondent (*voir* n° **13**).

2° Si $\mathrm{N} \equiv \pm 2 \pmod{10}$,

$$\Sigma(d_1^p - d^i)\left(\frac{d_1^p + d^i}{5}\right) = \mp\,\Sigma(d_1^p - d^i)\left(\frac{d_1^p + d^i}{5}\right)^2 = \mp\,\Sigma(d_1^p - d^i). \tag{20}$$

Les signes supérieurs et les signes inférieurs se correspondent (*voir* n° **9**).

3° Supposons enfin $\mathrm{N} \equiv 0 \pmod{10}$.

Un raisonnement analogue à celui du n° **9** conduit à évaluer la différence

$$\begin{aligned}
&\Sigma(d_1^p - d^i)\left(\frac{d_1^p + d^i}{5}\right) - \Sigma(d_1^i - d^p)\left(\frac{d_1^i + d^p}{5}\right)\\
&= \Sigma\, d_1^p\left(\frac{d_1^p + d^i}{5}\right) + \Sigma\, d^p\left(\frac{d_1^i + d^p}{5}\right) - \Sigma\, d^i\left(\frac{d_1^p + d_i}{5}\right) - \Sigma\, d_1^i\left(\frac{d_1^i + d^p}{5}\right)\\
&= 2^\mu\,\Sigma\, d_i'\left(\frac{d_1 + d}{5}\right) - \Sigma\, d_i'\left(\frac{d_1 + d}{5}\right).
\end{aligned}$$

Précisons les notations de ces deux dernières sommes : un des nombres d_1, d est pair, l'autre impair, Dans la première somme, le nombre pair est $2^\mu d'_\iota$; dans la seconde, le nombre impair est d'_ι. D'ailleurs d_1 et d sont des diviseurs conjugués et d'_ι est un diviseur impair de N. Il peut se faire que d'_ι soit multiple de 5. Il est alors multiple de 5^ν, sans quoi, son conjugué étant aussi multiple de 5, le symbole $\left(\frac{d_1+d}{5}\right)$ est nul. La première somme se décompose donc en deux, selon que d'_ι est, ou non, multiple de 5 :

$$2^\mu.5^\nu\Sigma\theta'\left(\frac{d_1+d}{5}\right)+2^\mu\Sigma\theta'\left(\frac{d_1+d}{5}\right).$$

Il s'agit d'évaluer $\left(\frac{d_1+d}{5}\right)$. Or, si d'_ι est multiple de 5, il est clair qu'on peut supprimer au numérateur du symbole de Legendre le terme $2^\mu d'_\iota$: il reste ainsi le terme ϑ qui est tel que $\vartheta\theta' = \text{N}'''$.

Donc

$$\left(\frac{d_1+d}{5}\right)=\left(\frac{\vartheta}{5}\right)=\left(\frac{\text{N}'''}{5}\right)\left(\frac{\theta'}{5}\right).$$

Si maintenant d'_ι n'est pas multiple de 5, on peut supprimer dans la somme d_1+d le terme qui n'est pas $2^\mu d'_\iota$: il reste ainsi le terme $2^\mu d'_\iota = 2^\mu\theta'$.

Donc

$$\left(\frac{d_1+d}{5}\right)=\left(\frac{2^\mu\theta'}{5}\right)=(-1)^\mu\left(\frac{\theta'}{5}\right).$$

En définitive

$$2^\mu\Sigma d'_\iota\left(\frac{d_1+d}{5}\right)=2^\mu.5^\nu\left(\frac{\text{N}'''}{5}\right)\Sigma\theta'\left(\frac{\theta'}{5}\right)+2^\mu(-1)^\mu\Sigma\theta'\left(\frac{\theta'}{5}\right).$$

et de même

$$\Sigma d'_\iota\left(\frac{d_1+d}{5}\right)=5^\nu(-1)^\mu\left(\frac{\text{N}'''}{5}\right)\Sigma\theta'\left(\frac{\theta'}{5}\right)+\Sigma\theta'\left(\frac{\theta'}{5}\right).$$

Par suite

$$\Sigma(d_1^p-d^\iota)\left(\frac{d_1^p+d_\iota}{5}\right)-\Sigma(d_1^\iota-d^p)\left(\frac{d_1^\iota+d^p}{5}\right)=\left[1+(-1)^\mu\left(\frac{\text{N}'''}{5}\right)5^\nu\right][(-2)^\mu-1]\text{V}.$$

On en déduit alors, sans difficultés, en procédant comme au n° **9**, que

$$(21) \qquad 2\Sigma(d_1^p - d^\iota)\left(\frac{d_1^p + d^\iota}{5}\right) = \mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}_1 + 2\left[1 + (-1)^\mu \left(\frac{N'''}{5}\right) 5^\nu\right][(-2)^\mu - 1]V$$
$$= \mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}_1 + \frac{3}{2}\left[1 + (-1)^\mu . 5^\nu \left(\frac{N'''}{5}\right)\right][\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1].$$

12. *Remarque.* — On trouve, comme au n° **10**,

$$(22) \qquad \mathfrak{Q}_1(N) = [-1 + (\quad 2)^\mu]\left[1 + (-1)^\mu \left(\frac{N'''}{5}\right) 5^\nu\right] V + 2\,\mathfrak{Q}\left(\frac{N}{4}\right),$$

qui s'applique encore si N est multiple impair de 2. Mais si N est impair [$N \equiv 5 \pmod{10}$],

$$(23) \qquad \mathfrak{Q}_1 = -\,\mathfrak{Q},$$

ν est supposé différent de zéro.

13. *Relation entre* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$ *et* $\Sigma(d_1^p - d^\iota)\left(\frac{d_1^p + d^\iota}{5}\right)^2$. — Les raisonnements sont, en tous points, analogues à ceux des n^os **9** et **11**. On trouve :

1° $N \equiv 0 \pmod{10}$:

$$(24) \qquad 2\,\Sigma(d_1^p - d^\iota)\left(\frac{d_1^p + d^\iota}{5}\right)^2 = \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_1 + 2(2^\mu - 1)(5^\nu + 1)U$$
$$= \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_1 + \frac{2}{5}\mathfrak{A} + \frac{2}{5}\mathfrak{A}_1 + \frac{3}{5}\mathfrak{C} + \frac{3}{5}\mathfrak{C}_1.$$

2° $N \equiv \pm 4 \pmod{10}$.

On est conduit à évaluer la différence

$$\Sigma(d_1^p - d^\iota)\left(\frac{d_1^p + d^\iota}{5}\right)^2 - \Sigma(d_1^\iota - d^p)\left(\frac{d_1^\iota + d^p}{5}\right)^2.$$

La seule difficulté est de calculer $\left(\frac{d_1^p + d^\iota}{5}\right)^2$ et $\left(\frac{d_1^\iota + d^p}{5}\right)^2$.

Supposons par exemple $N \equiv 4 \pmod{10}$.

On voit facilement que si $\left(\frac{d^\iota}{5}\right) = 1$,

$$\left(\frac{d_1^p + d^\iota}{5}\right) = 0$$

et réciproquement.

Il en résulte que la différence à calculer n'est autre que

$$\frac{1}{2}2^{\mu}\Sigma d'^{i}\left[1-\left(\frac{d'^{i}}{5}\right)\right]-\frac{1}{2}\Sigma d'^{i}\left[1-\left(\frac{d'^{i}}{5}\right)\right],$$

et l'on trouve en définitive :

$$(25)\qquad 2\Sigma(d_1^{p}-d^{i})\left(\frac{d_1^{p}+d^{i}}{5}\right)^2 = \mathfrak{R}-\mathfrak{R}_1+(2^{\mu}-1)\mathrm{U}\mp[(-2)^{\mu}-1]\mathrm{V}$$
$$= \mathfrak{R}-\mathfrak{R}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{A}+\frac{1}{4}\mathfrak{A}_1\mp\frac{3}{4}\mathfrak{B}\mp\frac{3}{4}\mathfrak{B}_1;$$

les signes inférieurs et les signes supérieurs se correspondent.

14. *Remarques.* — 1° Supposons $N\equiv 0 \pmod{10}$, on trouve, comme aux n^{os} **10** et **12**,

$$(26)\qquad \mathfrak{R}_1(\mathrm{N})=[2^{\mu}-1][5^{\nu}+1]\mathrm{U}+2\mathfrak{R}\left(\frac{\mathrm{N}}{4}\right).$$

formule encore valable si N est multiple impair de 2. Mais si N est impair $[N\equiv 5 \pmod{10}]$, il faut écrire

$$(27)\qquad \mathfrak{R}_1=-\mathfrak{R},$$

ν est supposé différent de zéro.

2° Si ensuite $N\equiv \pm 4 \pmod{10}$, on trouve

$$(28)\qquad \mathfrak{R}_1(\mathrm{N})=\frac{2^{\mu}-1}{2}\mathrm{U}\mp\frac{(-2)^{\mu}-1}{2}\mathrm{V}+2\mathfrak{R}\left(\frac{\mathrm{N}}{4}\right);$$

mais si N est impair $[N\equiv \pm 1 \pmod{10}]$, il faudra écrire

$$(29)\qquad \mathfrak{R}_1(\mathrm{N})=-\mathfrak{R}(\mathrm{N}).$$

3° Les formules (14), (17), (22), (23), (26), (27), (28), (29) permettent, dans tous les cas, de ramener les fonctions $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{R}_1$, aux fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, U, V et à μ et ν.

15. *Calcul de* $\mathfrak{P}\left(\frac{\mathrm{N}}{25}\right)$. — Supposons $N\equiv 0 \pmod 5$:

$$\Sigma(d_1-d)-\Sigma(d_1-d)\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2=\Sigma(d_1-d)\left[1-\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2\right].$$

Le crochet est nul, à moins que

$$d_1 + d \equiv 0 \pmod 5,$$

ce qui n'est possible que si

$$d_1 \equiv 0 \quad \text{et} \quad d \equiv 0 \pmod 5.$$

Donc

$$d_1 = 5t_1, \qquad d = 5t$$

et

$$N = d_1 d = 25 t t_1,$$

t et t_1 sont donc deux diviseurs conjugués de $\frac{N}{25}$; donc

$$\mathfrak{p} - \mathfrak{n} = 5\,\mathfrak{p}\left(\frac{N}{25}\right), \tag{30}$$

et cette formule s'applique encore dans le cas où N est multiple de 5 et non de 25, parce qu'alors

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{n}.$$

Elle s'applique aussi dans le cas où $N \equiv \pm 2 \pmod 5$, mais non dans celui où $N \equiv \pm 1 \pmod 5$.

16. Les mathématiciens allemands envisagent diverses fonctions des diviseurs dont je vais chercher les expressions.

D'abord

$$\Phi(N) = \Sigma(d_1 + d) = \mathfrak{A},$$
$$\Psi(N) = \Sigma(d_1 - d) = \mathfrak{p}.$$

Puis dans le cas $N \equiv \pm 1 \pmod 5$,

$$\Psi_{+1}(N) = \Sigma d_1 + \sum\left(\frac{d}{5}\right)d + \frac{1}{2}\varepsilon_n\sqrt{N}\left[1 + \left(\frac{\sqrt{N}}{5}\right)\right],$$
$$\Psi_{-1}(N) = \Sigma d_1 - \sum\left(\frac{d}{5}\right)d + \frac{1}{2}\varepsilon_n\sqrt{N}\left[1 - \left(\frac{\sqrt{N}}{5}\right)\right];$$

$\varepsilon_n = 0$ si N n'est pas carré ; $\varepsilon_n = 1$ si N est carré.

On en déduit tout de suite

$$\Psi_{+1}(N) + \Psi_{-1}(N) = \Phi(N) + \Psi(N) = \mathfrak{A} + \mathfrak{p},$$

puis

$$\Psi_{+1}(\mathrm{N}) - \Psi_{-1}(\mathrm{N}) = 2\sum\left(\frac{d}{5}\right)d + \varepsilon_n\sqrt{\mathrm{N}}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{N}}}{5}\right).$$

Supposons $\mathrm{N} \equiv 1 \pmod 5$. On constate alors aisément que

$$\left(\frac{d'}{5}\right) = 2\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2 - 1,$$

d' étant indifféremment d_1 ou d $(d_1 \neq d)$.

Donc

$$\sum\left(\frac{d_1}{5}\right)d_1 - \Sigma\left(\frac{d}{5}\right)d = \Sigma\, d_1\left[2\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2 - 1\right] - \Sigma\, d\left[2\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2 - 1\right]$$
$$= 2\,\Sigma(d_1-d)\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2 - \Sigma(d_1-d),$$

$$(a) \qquad \sum\left(\frac{d}{5}\right)d = \sum\left(\frac{d_1}{5}\right)d_1 - 2\,\Sigma(d_1-d)\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2 + \Sigma(d_1-d),$$

puis

$$(b) \qquad 2\sum\left(\frac{d}{5}\right)d = \sum\left(\frac{d'}{5}\right)d' - 2\,\Sigma(d_1-d)\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2 + \Sigma(d_1-d);$$

mais dans (a) d_1 est différent de d. On ne passe dônc de (a) à (b) que si N n'est pas carré.

Si N est carré, on a évidemment

$$\sum\left(\frac{d'}{5}\right)d' = \sum\left(\frac{d_1}{5}\right)d_1 + \sum\left(\frac{d}{5}\right)d + \left(\frac{\sqrt{\mathrm{N}}}{5}\right)\sqrt{\mathrm{N}}.$$

Donc, en définitive, pour être tout à fait générale, la formule (b) devra être remplacée par

$$2\sum\left(\frac{d}{5}\right)d + \varepsilon_n\sqrt{\mathrm{N}}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{N}}}{5}\right) = \sum\left(\frac{d'}{5}\right)d' - 2\,\Sigma(d_1-d)\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2 + \Sigma(d_1-d),$$

formule qui permet d'exprimer $\Psi_{+1}(\mathrm{N}) - \Psi_{-1}(\mathrm{N})$ au moyen de nos fonctions.

On en déduit aisément

$$(31) \qquad \left\{\begin{aligned} \Psi_{+1}(\mathrm{N}) &= \frac{1}{2}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{B} + \mathfrak{p} - \mathfrak{n}, \\ \Psi_{-1}(\mathrm{N}) &= \frac{1}{2}\mathfrak{A} - \frac{1}{2}\mathfrak{B} \qquad + \mathfrak{n}, \end{aligned}\right. \qquad [\mathrm{N} \equiv 1 \pmod 5],$$

de même

$$(32)\qquad \begin{cases} \Psi_{+1}(\mathrm{N}) = \frac{1}{2}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{B} \phantom{+\mathfrak{P}} + \mathfrak{R}, \\ \Psi_{-1}(\mathrm{N}) = \frac{1}{2}\mathfrak{A} - \frac{1}{2}\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{R}, \end{cases} \qquad [\mathrm{N} \equiv -1 \pmod 5)].$$

Puis, si $\mathrm{N} \equiv 0 \pmod 5$,

$$(33)\qquad \Phi(\mathrm{N}''') = \mathfrak{C}.$$

17. Analysons enfin la fonction $\sigma(\mathrm{N})$ de M. Gierster

$$\sigma(\mathrm{N}) = -\sum\left[\left(\frac{d}{5}\right) + \left(\frac{d_1}{5}\right)\right] d.$$

Supposons $\mathrm{N} \equiv 0 \pmod 5$.

Adjoignons à σ la fonction σ_1

$$\sigma_1(\mathrm{N}) = -\sum\left[\left(\frac{d}{5}\right) + \left(\frac{d_1}{5}\right)\right] d_1$$

et calculons

$$\sigma_1(\mathrm{N}) + \sigma(\mathrm{N}),$$
$$\sigma_1(\mathrm{N}) - \sigma(\mathrm{N}).$$

Il est d'abord aisé de constater que

$$\left(\frac{d_1}{5}\right) + \left(\frac{d}{5}\right) = \left(\frac{d+d_1}{5}\right);$$

donc

$$\sigma_1(\mathrm{N}) + \sigma(\mathrm{N}) = -\Sigma(d_1 + d)\left(\frac{d+d_1}{5}\right),$$

$$\sigma_1(\mathrm{N}) - \sigma(\mathrm{N}) = -\Sigma(d_1 - d)\left(\frac{d+d_1}{5}\right).$$

Il faut donc calculer

$$\Sigma(d+d_1)\left(\frac{d+d_1}{5}\right).$$

Un des nombres d ou d_1 admet en facteur 5^ν. Ainsi, un des nombres d ou d_1 est ϑ', l'autre est de la forme $5^\nu\vartheta'$.

Donc

$$\Sigma(d+d_1)\left(\frac{d+d_1}{5}\right) = \Sigma\,\vartheta''\left(\frac{d+d_1}{5}\right) + 5^\nu\Sigma\,\vartheta'''\left(\frac{d+d_1}{5}\right),$$

ϑ'' et ϑ''' étant deux diviseurs conjugués de N''.

Dans la première parenthèse du second membre, un des nombres d, d_1 est ϑ'', l'autre est $5^\nu \vartheta'''$.

Cette parenthèse est donc

$$\left(\frac{\vartheta''}{5}\right).$$

Dans la seconde parenthèse $\left(\frac{d+d_1}{5}\right)$, un des nombres d, d_1 est ϑ'', l'autre est $5^\nu \vartheta'''$. Cette seconde parenthèse est donc encore

$$\left(\frac{\vartheta''}{5}\right);$$

or

$$\left(\frac{\vartheta''}{5}\right)\left(\frac{\vartheta'''}{5}\right)=\left(\frac{N''}{5}\right).$$

Donc, la seconde parenthèse s'écrit $\left(\frac{N''}{5}\right)\left(\frac{\vartheta'''}{5}\right)$, de sorte que

$$\Sigma(d_1+d)\left(\frac{d+d_1}{5}\right)=\Sigma\,\vartheta''\left(\frac{\vartheta''}{5}\right)+5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\Sigma\,\vartheta'''\left(\frac{\vartheta'''}{5}\right)=\left[1+5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\Sigma\, d'\left(\frac{d'}{5}\right);$$

donc

$$2\,\sigma(N)=-\left[1+5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\Sigma\, d'\left(\frac{d'}{5}\right)+\Sigma(d_1-d)\left(\frac{d_1+d}{5}\right),$$

$$\sigma(N)=-\frac{1}{2}\left[1+5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}+\frac{1}{2}\mathfrak{C} \tag{34}$$

ou

$$\sigma(N)=\frac{1}{6}\left[1+5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\left[(-2)^{\mu+1}-1\right]V+\frac{1}{2}\mathfrak{C}. \tag{35}$$

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE.

18. J'adopterai, en ce qui concerne les fonctions Θ, les notations d'Hermite et de M. G. Humbert, de préférence à celles de MM. Weber, Jordan, Halphen ou Tannery. J'ai, en effet, trouvé quelque avantage à distinguer, par des lettres différentes, les développements où entrent des exposants qui sont des carrés impairs, de ceux où entrent des exposants qui sont des carrés quelconques.

Je poserai donc

$$\Theta_1(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2} e^{2mix} = 1 + 2\sum_{1}^{+\infty} q^{m^2}\cos 2mx = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2}\cos 2mx,$$

$$\Theta(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2}(-1)^m e^{2mix}$$

$$= 1 + 2\sum_{1}^{+\infty} q^{m^2}(-1)^m \cos 2mx = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{m^2}\cos 2mx,$$

$$H_1(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{(2m+1)ix}$$

$$= 2\sum_{0}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \cos(2m+1)x = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \cos(2m+1)x,$$

$$H(x) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m e^{(2m+1)ix}$$

$$= 2\sum_{0}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} (-1)^m \sin(2m+1)x = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \sin(2m+1)x.$$

Voici d'ailleurs, empruntée en partie à un Tableau de M. Lucien Lévy, la correspondance entre les notations de divers auteurs :

Jordan, Lévy.	Schwartz, Halphen.	Tannery et Molk.	Weber.	Humbert.
$\theta(z)$	$\vartheta_1(x)$	$\vartheta_1(x)$	$\vartheta_{11}(v)$	$H(x)$
$\theta_1(z)$	$\vartheta_2(x)$	$\vartheta_2(x)$	$\vartheta_{10}(v)$	$H_1(x)$
$\theta_2(z)$	$\vartheta_0(x)$	$\vartheta_4(x)$	$\vartheta_{01}(v)$	$\Theta(x)$
$\theta_3(z)$	$\vartheta_3(x)$	$\vartheta_3(x)$	$\vartheta_{00}(v)$	$\Theta_1(x)$

$$z = 2\omega x, \qquad x = \pi v.$$

19. En remplaçant x par o dans $\Theta_1(x)$, $\Theta(x)$, $H_1(x)$, on obtient trois fonctions de q :

$$\theta_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2},$$

$$\theta = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{m^2},$$

$$\eta_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}.$$

D'ailleurs

$$q = e^{i\pi\tau}.$$

Nous poserons

$$\eta = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{\frac{(6m+1)^2}{12}},$$

et l'on a la relation

$$\eta_1 \theta_1 \theta = 2\eta^3$$

et

$$\eta_1 \theta_1 \theta = \eta'$$

avec

$$\eta' = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m (2m+1) q^{\frac{(2m-1)^2}{4}}.$$

20. Les propriétés fondamentales de périodicité sont données par les formules

$$\begin{aligned}
\Theta_1(x+\pi) &= \Theta_1(x), & \Theta_1(x+\pi\tau) &= e^{-2ix}q^{-1}\,\Theta_1(x),\\
\Theta(x+\pi) &= \Theta(x), & \Theta(x+\pi\tau) &= -e^{-2ix}q^{-1}\,\Theta(x),\\
H_1(x+\pi) &= -H_1(x), & H_1(x+\pi\tau) &= e^{-2ix}q^{-1}\,H_1(x),\\
H(x+\pi) &= -H(x), & H(x+\pi\tau) &= -e^{-2ix}q^{-1}\,H(x).
\end{aligned}$$

L'addition d'une demi-période conduit aux formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\Theta_1\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \Theta(x), & \Theta_1\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right) &= e^{-ix}q^{-\frac{1}{4}}\,H_1(x),\\
\Theta\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \Theta_1(x), & \Theta\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right) &= i\,e^{-ix}q^{-\frac{1}{4}}\,H(x),\\
H_1\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -H(x), & H_1\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right) &= e^{-ix}q^{-\frac{1}{4}}\,\Theta_1(x),\\
H\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= H_1(x), & H\left(x+\frac{\pi\tau}{2}\right) &= i\,e^{-ix}q^{-\frac{1}{4}}\,\Theta(x)
\end{aligned}$$

et

$$\Theta_1\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}\right) = \quad i\,e^{-\iota x}\,q^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{H}(x),$$

$$\Theta\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}\right) = \quad e^{-\iota x}\,q^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{H}_1(x),$$

$$\mathrm{H}_1\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}\right) = -\,\iota\,e^{-\iota x}\,q^{-\frac{1}{4}}\,\Theta(x),$$

$$\mathrm{H}\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}\right) = \quad e^{-\iota x}\,q^{-\frac{1}{4}}\,\Theta_1(x).$$

Les zéros des fonctions Θ en résultent et sont donnés par le Tableau suivant :

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{H} & 0+m\pi+n\pi\tau, \\
\Theta_1 & \frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}+m\pi+n\pi\tau, \\
\Theta & \frac{\pi\tau}{2}+m\pi+n\pi\tau, \\
\mathrm{H}_1 & \frac{\pi}{2}+m\pi+n\pi\tau,
\end{array}$$

où m et n sont deux nombres entiers.

21. Les formules des transformations élémentaires d'ordre *un* donnent les transformations $\left|\tau,\ \tau+1\right|$ et $\left|\tau,\ -\frac{1}{\tau}\right|$:

$$\Theta_1(x,\ \tau+1) = \quad \Theta(x,\tau),$$

$$\Theta(x,\ \tau+1) = \quad \Theta_1(x,\tau),$$

$$\mathrm{H}_1(x,\ \tau+1) = e^{\frac{\iota\pi}{4}}\,\mathrm{H}_1(x,\tau),$$

$$\mathrm{H}(x,\ \tau+1) = e^{\frac{\iota\pi}{4}}\,\mathrm{H}(x,\tau);$$

puis

$$\Theta_1\left(\frac{x}{\tau},\ -\frac{1}{\tau}\right) = e^{\frac{\iota x^2}{\pi\tau}}\,i\sqrt{\iota\tau}\,\Theta_1(x,\tau),$$

$$\Theta\left(\frac{x}{\tau},\ -\frac{1}{\tau}\right) = e^{\frac{\iota x^2}{\pi\tau}}\,i\sqrt{\iota\tau}\,\mathrm{H}_1(x,\tau),$$

$$\mathrm{H}_1\left(\frac{x}{\tau},\ -\frac{1}{\tau}\right) = e^{\frac{\iota x^2}{\pi\tau}}\,i\sqrt{\iota\tau}\,\Theta(x,\tau),$$

$$\mathrm{H}\left(\frac{x}{\tau},\ -\frac{1}{\tau}\right) = e^{\frac{\iota x^2}{\pi\tau}}\,\sqrt{\iota\tau}\,\mathrm{H}(x,\tau).$$

22. Les formules de transformations élémentaires du *second* ordre donnent les transformations $\left|\tau, 2\tau\right|$ et $\left|\tau, \frac{\tau}{2}\right|$.

1° Transformation de Landen [1] :

$$\begin{aligned}
\theta(q^2)\ \Theta(2x, q^2) &= \Theta\Theta_1,\\
\theta(q^2)\ \mathrm{H}(2x, q^2) &= \mathrm{H}\mathrm{H}_1,\\
2\,\theta_1(q^2)\,\Theta_1(2x, q^2) &= \Theta_1^2 + \Theta^2,\\
2\,\theta_1(q^2)\,\mathrm{H}_1(2x, q^2) &= \mathrm{H}_1^2 - \mathrm{H}^2,\\
2\,\eta_1(q^2)\,\mathrm{H}_1(2x, q^2) &= \Theta_1^2 - \Theta^2,\\
2\,\eta_1(q^2)\,\Theta_1(2x, q^2) &= \mathrm{H}_1^2 + \mathrm{H}^2;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
\Theta_1^2 &= \theta_1(q^2)\,\Theta_1(2x, q^2) + \eta_1(q^2)\,\mathrm{H}_1(2x, q^2),\\
\Theta^2 &= \theta_1(q^2)\,\Theta_1(2x, q^2) - \eta_1(q^2)\,\mathrm{H}_1(2x, q^2),\\
\mathrm{H}_1^2 &= \eta_1(q^2)\,\Theta_1(2x, q^2) + \theta_1(q^2)\,\mathrm{H}_1(2x, q^2),\\
\mathrm{H}^2 &= \eta_1(q^2)\,\Theta_1(2x, q^2) - \theta_1(q^2)\,\mathrm{H}_1(2x, q^2).
\end{aligned}$$

2° Transformation de Gauss :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\eta_1\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\ \mathrm{H}\left(x, \frac{\tau}{2}\right) &= \mathrm{H}\Theta,\\
\frac{1}{2}\eta_1\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{H}_1\left(x, \frac{\tau}{2}\right) &= \mathrm{H}_1\Theta_1,\\
\theta_1\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\ \Theta\left(x, \frac{\tau}{2}\right) &= \Theta^2 + \mathrm{H}^2,\\
\theta_1\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\ \Theta_1\left(x, \frac{\tau}{2}\right) &= \Theta_1^2 + \mathrm{H}_1^2,\\
\theta\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\ \Theta_1\left(x, \frac{\tau}{2}\right) &= \Theta^2 - \mathrm{H}^2,\\
\theta\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\ \Theta\left(x, \frac{\tau}{2}\right) &= \Theta_1^2 - \mathrm{H}_1^2.
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
2\,\Theta_1^2 &= \theta_1(\sqrt{q})\,\Theta_1(x, \sqrt{q}) + \theta(\sqrt{q})\,\Theta(x, \sqrt{q}),\\
2\,\Theta^2 &= \theta(\sqrt{q})\,\Theta_1(x, \sqrt{q}) + \theta_1(\sqrt{q})\,\Theta(x, \sqrt{q}),\\
2\,\mathrm{H}_1^2 &= \theta_1(\sqrt{q})\,\Theta_1(x, \sqrt{q}) - \theta(\sqrt{q})\,\Theta(x, \sqrt{q}),\\
2\,\mathrm{H}^2 &= -\theta(\sqrt{q})\,\Theta_1(x, \sqrt{q}) + \theta_1(\sqrt{q})\,\Theta(x, \sqrt{q}).
\end{aligned}$$

---

[1] Pour simplifier les écritures, quand une des fonctions Θ portera sur les arguments x et q ou x et τ, nous supprimerons toute indication de variable.

3° On obtient encore d'autres formules en changeant dans les formules précédentes τ en $\tau+1$, ce qui donne

$$\frac{1}{2}\eta_1(i\sqrt{q})\ \mathrm{H}(x, i\sqrt{q}) = e^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{H}\ \Theta_1,$$

$$\frac{1}{2}\eta_1(i\sqrt{q})\,\mathrm{H}_1(x, i\sqrt{q}) = e^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{H}_1\Theta,$$

$$\theta_1(i\sqrt{q})\ \Theta_1(x, i\sqrt{q}) = i\Theta_1^2 + \mathrm{H}^2,$$

$$\theta_1(i\sqrt{q})\ \Theta(x, i\sqrt{q}) = \mathrm{H}_1^2 - i\Theta^2,$$

$$\theta(i\sqrt{q})\ \Theta(x, i\sqrt{q}) = \Theta_1^2 - i\mathrm{H}^2,$$

$$\theta(i\sqrt{q})\ \Theta_1(x, i\sqrt{q}) = \Theta^2 + i\mathrm{H}_1^2.$$

23 Les formules suivantes résultent de ce qui précède :

$$\theta\theta_1 = \theta^2(q^2),$$

$$\eta_1^2 = 2\,\theta_1(q^2)\,\eta_1(q^2),$$

$$\theta_1^2 + \theta^2 = 2\,\theta_1^2(q^2),$$

$$\theta_1^2 - \theta^2 = 2\,\eta_1^2(q^2).$$

24. *Relation entre les carrés des fonctions* Θ :

$$-\theta^2\mathrm{H}^2 = \theta_1^2\mathrm{H}_1^2 - \eta_1^2\Theta_1^2,$$

$$-\theta^2\mathrm{H}_1^2 = \theta_1^2\mathrm{H}^2 - \eta_1^2\Theta^2,$$

$$\theta^2\,\Theta^2 = \theta_1^2\,\Theta_1^2 - \eta_1^2\mathrm{H}_1^2,$$

$$\eta_1^2\,\mathrm{H}^2 = \theta_1^2\,\Theta^2 - \theta^2\,\Theta_1^2.$$

25. *Formules d'addition des fonctions* Θ. — Weber donne les formules (*Elliptische Functionen*, Braunschweig, 1891, p. 56-57) :

(1) $$\theta_1^2\ \Theta_1(u+v)\ \Theta_1(u-v) = \Theta_1^2(u)\ \Theta_1^2(v) + \mathrm{H}^2(u)\,\mathrm{H}^2(v),$$

(2) $$\theta^2\ \Theta(u+v)\ \Theta(u-v) = \Theta^2(u)\ \Theta^2(v) - \mathrm{H}^2(u)\,\mathrm{H}^2(v),$$

(3) $$\eta_1^2\ \mathrm{H}_1(u+v)\,\mathrm{H}_1(u-v) = \mathrm{H}_1^2(u)\ \mathrm{H}_1^2(v) - \mathrm{H}^2(u)\,\mathrm{H}^2(v),$$

(4) $$\theta^2\ \mathrm{H}(u+v)\ \mathrm{H}(u-v) = \mathrm{H}^2(u)\ \Theta^2(v) - \Theta^2(u)\,\mathrm{H}^2(v),$$

et en combinant avec les relations entre les carrés des fonctions Θ :

$$(5)\qquad \theta_1^2\, \mathrm{H}(u+v)\, \mathrm{H}(u-v) = \mathrm{H}^2(u)\, \Theta_1^2(v) - \mathrm{H}^2(v)\, \Theta_1^2(u),$$

puis

$$(6)\qquad \theta_1 \eta_1\, \Theta(u+v)\, \mathrm{H}(u-v) = \Theta(u)\, \mathrm{H}(u)\, \Theta_1(v)\, \mathrm{H}_1(v) - \Theta_1(u)\, \mathrm{H}_1(u)\, \Theta(v)\, \mathrm{H}(v),$$

$$(7)\qquad \theta\, \eta_1\, \Theta(u+v)\, \mathrm{H}_1(u-v) = \Theta(u)\, \mathrm{H}_1(u)\, \Theta(v)\, \mathrm{H}_1(v) + \Theta_1(u)\, \mathrm{H}(u)\, \Theta_1(v)\, \mathrm{H}(v),$$

$$(8)\qquad \theta_1\, \theta\, \Theta_1(u+v)\, \Theta(u-v) = \Theta_1(u)\, \Theta(u)\, \Theta_1(v)\, \Theta(v) - \mathrm{H}_1(u)\, \mathrm{H}(u)\, \mathrm{H}_1(v)\, \mathrm{H}(v),$$

$$(9)\qquad \theta_1 \eta_1\, \mathrm{H}_1(u-v)\, \Theta_1(u+v) = \Theta_1(u)\, \mathrm{H}_1(u)\, \Theta_1(v)\, \mathrm{H}_1(v) - \Theta(u)\, \mathrm{H}(u)\, \Theta(v)\, \mathrm{H}(v),$$

$$(10)\qquad \theta\, \eta_1\, \mathrm{H}_1(u+v)\, \Theta(u-v) = \Theta(u)\, \mathrm{H}_1(u)\, \Theta(v)\, \mathrm{H}_1(v) - \Theta_1(u)\, \mathrm{H}(u)\, \Theta_1(v)\, \mathrm{H}(v),$$

$$(11)\qquad \theta_1 \eta_1\, \mathrm{H}_1(u+v)\, \Theta_1(u-v) = \Theta_1(u)\, \mathrm{H}_1(u)\, \Theta_1(v)\, \mathrm{H}_1(v) - \Theta(u)\, \mathrm{H}(u)\, \Theta(v)\, \mathrm{H}(v),$$

$$(12)\qquad \theta_1\, \theta\, \Theta(u+v)\, \Theta_1(u-v) = \Theta_1(u)\, \Theta(u)\, \Theta(v)\, \Theta_1(v) + \mathrm{H}_1(u)\, \mathrm{H}(u)\, \mathrm{H}_1(v)\, \mathrm{H}(v).$$

26. *Développements fondamentaux.* — Nous emploierons encore les formules suivantes d'Hermite (*OEuvres*, t. II, p. 245) :

$$(13)\qquad \eta_1^2\, \theta_1^2\, \frac{\mathrm{H}^2}{\Theta^2} = 8\sum_1^\infty \frac{m\, q^m}{1-q^{2m}} - 8\sum_1^\infty \frac{m\, q^m}{1-q^{2m}} \cos 2mx,$$

$$(14)\qquad \theta^2\, \theta_1^2\, \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}_1^2} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + 8\sum_1^\infty (-1)^m \frac{m\, q^{2m}}{1-q^{2m}}(1-\cos 2mx),$$

et les *développements fondamentaux* de MM. G. Humbert (*Journal de Mathématiques*, 6^e série, t. III, 1907, p. 353, 354 et 423) et K. Petr (*Académie des Sciences de Bohême*, 1900-1901) :

$$(15)\qquad \begin{aligned} \theta\theta_1 \frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{H}_1^2} \Theta\Theta_1 = {} & \frac{1}{\cos^2 x} + 4\,\Theta(2x, q^2) \sum_0^\infty (-1)^\nu q^{2\nu} \mathrm{J}(\nu) \\ & - 8\sum_2^\infty (-1)^m q^{2m^2}\left[-2q^{-2} + \ldots + (-1)^m 2m\, q^{-2m^2}\right] \cos 4mx \\ & + 8\sum_1^\infty (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left[q^{-\frac{1}{2}} + \ldots + (-1)^{m-1}(2m-1)\, q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right] \cos(4m+2)x \end{aligned}$$

et

$$(16)\qquad \begin{aligned} \eta_1 \theta_1 \frac{\mathrm{H}^2}{\Theta^2} \mathrm{H}_1 \Theta_1 = {} & 2\,\mathrm{H}_1(x, \sqrt{q}) \sum_0^\infty q^{\frac{8\nu+7}{8}} \mathrm{F}(8\nu+7) \\ & - 4\sum_1^\infty q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\left[(2m-1)\, q^{-\frac{(2m-1)^2}{8}} + (2m-5)\, q^{-\frac{(2m-5)^2}{8}} + \ldots\right] \cos(2m+1)x. \end{aligned}$$

Rappelons pour terminer la *relation d'Hermite*

(17) $$\eta_1^3 = 8\sum_0^\infty q^{\frac{8\nu+3}{4}} F(8\nu+3),$$

l'*équation de Kronecker*

(18) $$\theta_1^3 = 12\sum_0^\infty q^N E(N)$$

et enfin les équations d'Hermite

(19) $$\eta_1^2\theta_1 = 4\sum_0^\infty q^{\frac{2N+1}{2}} F(4N+2),$$

(20) $$\eta_1^2\theta = 4\sum_0^\infty (-1)^N q^{\frac{2N+1}{2}} F(4N+2).$$

CHAPITRE III.

FORMULES FONDAMENTALES DE LA TRANSFORMATION DU CINQUIÈME ORDRE DES FONCTIONS Θ.

I. — Préliminaires.

27. Les fonctions

$$\Theta(u)\,\Theta(u+j)\,\Theta(u-j)\,\Theta(u+2j)\,\Theta(u-2j),$$

où Θ représente un des quatre symboles H, Θ, H_1, Θ_1, et où j est un cinquième de période, sont des fonctions Θ du cinquième ordre, dont les zéros sont en évidence.

On forme d'ailleurs très simplement des fonctions Θ ayant pour zéros et pour multiplicateurs respectivement les zéros et les multiplicateurs de chacun de ces produits de fonctions.

On obtient ainsi les six équations suivantes où les C sont des constantes en u :

$$\begin{aligned}
\Theta(5u, 5\tau) &= C_1\,\Theta(u)\quad \Theta\left(u+\frac{\pi}{5}\right)\\
&\quad\times\Theta\left(u-\frac{\pi}{5}\right)\quad \Theta\left(u+\frac{2\pi}{5}\right)\quad \Theta\left(u-\frac{2\pi}{5}\right),\\
\Theta\left(u, \frac{\tau-4}{5}\right) &= C_2\,\Theta(u)\quad \Theta\left(u+\frac{\pi}{5}+\frac{\pi\tau}{5}\right)\\
&\quad\times\Theta\left(u-\frac{\pi}{5}-\frac{\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u+\frac{2\pi}{5}+\frac{2\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u-\frac{2\pi}{5}-\frac{2\pi\tau}{5}\right),\\
\Theta\left(u, \frac{\tau+4}{5}\right) &= C_3\,\Theta(u)\quad \Theta\left(u+\frac{\pi}{5}-\frac{\pi\tau}{5}\right)\\
&\quad\times\Theta\left(u-\frac{\pi}{5}+\frac{\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u+\frac{2\pi}{5}-\frac{2\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u-\frac{2\pi}{5}+\frac{2\pi\tau}{5}\right),\\
\Theta\left(u, \frac{\tau-8}{5}\right) &= C_4\,\Theta(u)\quad \Theta\left(u+\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi\tau}{5}\right)\\
&\quad\times\Theta\left(u-\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u-\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u+\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi\tau}{5}\right),\\
\Theta\left(u, \frac{\tau+8}{5}\right) &= C_5\,\Theta(u)\quad \Theta\left(u+\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi\tau}{5}\right)\\
&\quad\times\Theta\left(u-\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u-\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u+\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi\tau}{5}\right),\\
\Theta\left(u, \frac{\tau}{5}\right) &= C_6\,\Theta(u)\quad \Theta\left(u+\frac{\pi\tau}{5}\right)\\
&\quad\times\Theta\left(u-\frac{\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u+\frac{2\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u-\frac{2\pi\tau}{5}\right).
\end{aligned}$$

Nous ne nous occuperons que de la première et de la sixième équation, les autres ne donnant pas des résultats nouveaux, en ce qui concerne notre recherche. Nous montrerons même qu'on pourrait se passer des formules obtenues à l'aide de la sixième équation.

II. — Premier groupe.

28. On aura donc, par ce qui précède,

$$(1)\qquad H(u)\,H\left(u+\frac{\pi}{5}\right)H\left(u-\frac{\pi}{5}\right)H\left(u+\frac{2\pi}{5}\right)H\left(u-\frac{2\pi}{5}\right)=C_1\,H(5u, 5\tau).$$

Changeons u en $u+\frac{\pi\tau}{2}$.

On a comme multiplicateur du premier membre

$$i^5 e^{-5iu} q^{-\frac{5}{4}}.$$

D'ailleurs les H se changent en Θ.

Le second membre devient

$$\mathrm{H}\left(5u + \frac{5\pi\tau}{2}, 5\tau\right).$$

Posons

$$\begin{aligned} 5u &= u', \\ 5\tau &= \tau', \\ \mathrm{H}\left(u' + \frac{\pi\tau'}{2}\right) &= i e^{-iu'} e^{-\frac{i\pi\tau'}{4}} \Theta(u', \tau'); \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{H}\left(5u + \frac{5\pi\tau}{2}, 5\tau\right) = i e^{-5iu} e^{-5\frac{i\pi\tau}{4}} \Theta(5u, 5\tau),$$

de sorte que

$$(3) \qquad \Theta(u)\Theta\left(u+\frac{\pi}{5}\right)\Theta\left(u-\frac{\pi}{5}\right)\Theta\left(u+\frac{2\pi}{5}\right)\Theta\left(u-\frac{2\pi}{5}\right) = \mathrm{C}_1\,\Theta(5u, 5\tau).$$

Changeons dans les équations (1) et (3), u en $u+\frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$(2) \qquad \mathrm{H}_1(u)\mathrm{H}_1\left(u+\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{H}_1\left(u-\frac{\pi}{5}\right)\mathrm{H}_1\left(u+\frac{2\pi}{5}\right)\mathrm{H}_1\left(u-\frac{2\pi}{5}\right) = \mathrm{C}_1\,\mathrm{H}_1(5u, 5\tau),$$

$$(4) \qquad \Theta_1(u)\Theta_1\left(u+\frac{\pi}{5}\right)\Theta_1\left(u-\frac{\pi}{5}\right)\Theta_1\left(u+\frac{2\pi}{5}\right)\Theta_1\left(u-\frac{2\pi}{5}\right) = \mathrm{C}_1\,\Theta_1(5u, 5\tau).$$

29. *Notations*. — Nous poserons, dans tout ce qui suivra,

$$\begin{aligned} \mathrm{H}\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \mathrm{x}, & \mathrm{H}\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= \mathrm{x}_1; \\ \mathrm{H}_1\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \mathrm{y}, & \mathrm{H}_1\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= \mathrm{y}_1; \\ \Theta\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \mathrm{z}, & \Theta\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= \mathrm{z}_1; \\ \Theta_1\left(\frac{\pi}{5}\right) &= \mathrm{t}, & \Theta_1\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= \mathrm{t}_1; \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \Theta(0, q^5) &= \theta(q^5) = \overline{\theta}, \\ \mathrm{H}_1(0, q^5) &= \eta_1(q^5) = \overline{\eta}_1, \\ \Theta_1(0, q^5) &= \theta_1(q^5) = \overline{\theta}_1; \end{aligned}$$

donc

$$\bar{\eta}_1 \bar{\theta}_1 \bar{\theta} = 2\eta^3(q^5) = 2\bar{\eta}^3$$

avec

$$\bar{\eta} = \eta(q^5) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m q^{\frac{5(6m+1)^2}{12}};$$

de même

$$\bar{\eta}' = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m (2m+1) q^{\frac{5(2m+1)^2}{4}}.$$

30. Rappelons encore les expressions suivantes :

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1),$$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1),$$

$$\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

31. Les formules suivantes nous seront utiles :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}\left(\frac{3\pi}{5}\right) &= \mathrm{H}\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\mathrm{H}\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \mathrm{H}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \mathrm{x}_1,\\
\mathrm{H}_1\left(\frac{3\pi}{5}\right) &= \mathrm{H}_1\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\mathrm{H}_1\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = -\mathrm{H}_1\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\mathrm{y}_1,\\
\Theta\left(\frac{3\pi}{5}\right) &= \Theta\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \Theta\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \mathrm{z}_1,\\
\Theta_1\left(\frac{3\pi}{5}\right) &= \mathrm{t}_1,
\end{aligned}$$

32. Nous aurons besoin des parties principales (en q) des x, y, z, t. En voici le Tableau :

p. pale	$\mathrm{x} = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi}{5}$,	p. pale	$\mathrm{x}_1 = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{2\pi}{5}$;
»	$\mathrm{y} = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi}{5}$,	»	$\mathrm{y}_1 = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{2\pi}{5}$;
»	$\mathrm{z} = 1$,	»	$\mathrm{z}_1 = 1$;
»	$\mathrm{t} = 1$.	»	$\mathrm{t}_1 = 1$;

d'où

$$\begin{aligned} &\text{p. pale } \mathrm{xx}_1 = \sqrt{5}\, q^{\frac{1}{2}}, \\ &\quad\text{»} \quad \mathrm{yy}_1 = q^{\frac{1}{2}}, \\ &\quad\text{»} \quad \mathrm{zz}_1 = 1, \\ &\quad\text{»} \quad \mathrm{tt}_1 = 1. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} &\text{p. pale } \bar{\theta} = 1, \\ &\quad\text{»} \quad \bar{\eta}_1 = 2\, q^{\frac{5}{4}}, \\ &\quad\text{»} \quad \bar{\theta}_1 = 1, \\ &\quad\text{»} \quad \bar{\eta} = q^{\frac{5}{12}}. \end{aligned}$$

33. *Calcul de* C_1. — Égalons les parties principales (en u) des deux membres des équations (1), (2), (3), (4), on obtient :

(5) $$5\, C_1 \bar{\eta}' = \eta_1 \theta_1 \theta\, \mathrm{x}^2 \mathrm{x}_1^2,$$

(6) $$C_1 \bar{\eta}_1 = \eta_1 \mathrm{y}^2 \mathrm{y}_1^2,$$

(7) $$C_1 \bar{\theta} = \theta \mathrm{z}^2 \mathrm{z}_1^2,$$

(8) $$C_1 \bar{\theta}_1 = \theta_1 \mathrm{t}^2 \mathrm{t}_1^2;$$

d'où

$$C_1^3 \bar{\eta}_1 \bar{\theta}_1 \bar{\theta} = \eta_1 \theta_1 \theta (\mathrm{yzty}_1 \mathrm{z}_1 \mathrm{t}_1)^2,$$

(9) $$C_1^2 = 5\left(\frac{\mathrm{yz\,ty}_1\mathrm{z}_1\mathrm{t}_1}{\mathrm{xx}_1}\right)^2.$$

En faisant d'ailleurs $u = \frac{\pi}{5}$, $v = -2\frac{\pi}{5}$, dans la formule (6) du Chapitre II, on trouve

$$\eta_1 \theta_1 \theta \mathrm{x}_1 = 2\,\mathrm{xyzt}.$$

En faisant $u = \frac{2\pi}{5}$, $v = -\frac{\pi}{5}$, dans la même formule, et en remarquant que

$$\mathrm{H}\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \mathrm{H}\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\mathrm{H}\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \mathrm{H}\left(\frac{\pi}{5}\right),$$

$$\eta_1 \theta_1 \theta \mathrm{x} = 2\,\mathrm{x}_1 \mathrm{y}_1 \mathrm{z}_1 \mathrm{t}_1;$$

donc

$$(\eta_1\theta_1\theta)^2 = 4\,\mathrm{y}\mathrm{y}_1\mathrm{z}\mathrm{z}_1\mathrm{t}\mathrm{t}_1;$$

d'où, par (9),

$$\mathrm{C}_1^2 = \frac{5}{16}\,\frac{(\eta_1\theta_1\theta)^4}{\mathrm{x}^2\mathrm{x}_1^2}. \tag{10}$$

D'ailleurs (5) donne

$$\mathrm{C}_1 = \frac{\eta^3}{5\bar{\eta}^3}\,\mathrm{x}^2\mathrm{x}_1^2,$$

et en prenant les parties principales en q :

$$\text{p. pale } \mathrm{C}_1 = \frac{5\,q^{\frac{3}{12}}q}{5\,q^{\frac{15}{12}}} = 1.$$

L'équation (10) donne alors

$$\mathrm{C}_1 = \frac{\sqrt{5}}{4}\,\frac{\eta_1^2\theta_1^2\theta^2}{\mathrm{x}\mathrm{x}_1}.$$

On vérifie le signe en prenant la partie principale du second membre qui est

$$\frac{\sqrt{5}}{4}\,\frac{4\,q^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{5}\,q^{\frac{1}{2}}} = 1.$$

Ensuite

$$(\mathrm{x}\mathrm{x}_1)^3 = \bar{\eta}^3\eta^3\,5\sqrt{5},$$

d'où

$$\mathrm{x}\mathrm{x}_1 = \alpha\sqrt{5}\,\bar{\eta}\eta,$$

α étant une racine cubique de l'unité. En prenant les parties principales des deux membres, on trouve que cette racine est 1.

Donc enfin

$$\mathrm{C}_1 = \frac{\sqrt{5}}{4}\times 4\,\frac{\eta^6}{\sqrt{5}\,\bar{\eta}\eta} = \frac{\eta^5}{\bar{\eta}}.$$

34. *Formules fondamentales.* — Cette valeur de C_1, portée dans les équations (5), (6), (7), (8), donne, en déterminant les signes au moyen des parties principales,

$$
(\mathrm{I})\qquad\left\{\begin{aligned}
xx_1 &= \bar{\eta}\eta\sqrt{5},\\
yy_1 &= \bar{\eta}\eta\sqrt{\frac{\theta\theta_1}{\bar{\theta}\bar{\theta}_1}},\\
zz_1 &= \bar{\eta}\eta\sqrt{\frac{\eta_1\theta_1}{\bar{\eta}_1\bar{\theta}_1}},\\
tt_1 &= \bar{\eta}\eta\sqrt{\frac{\eta_1\theta}{\bar{\eta}_1\bar{\theta}}}.
\end{aligned}\right.
$$

35. *Nouvelles formules.* — Il s'agit de calculer

$$
\frac{x^2}{z^2}-\frac{x_1^2}{z_1^2},\qquad
\frac{x^2}{y^2}-\frac{x_1^2}{y_1^2},\qquad
\frac{x^2}{t^2}-\frac{x_1^2}{t_1^2},
$$

Faisons $u=\frac{2\pi}{5}$, $v=\frac{\pi}{5}$, dans les formules (1), (2), (3), (4), (5) du Chapitre II.

On trouve

$$\theta_1^2\ tt_1 = t^2t_1^2 + x^2x_1^2, \tag{11}$$

$$\theta^2\ zz_1 = z^2z_1^2 - x^2x_1^2, \tag{12}$$

$$-\eta_1^2\ yy_1 = y^2y_1^2 - x^2x_1^2, \tag{13}$$

$$-\theta^2\ xx_1 = x^2z_1^2 - x_1^2z^2, \tag{14}$$

$$-\theta_1^2\ xx_1 = x^2t_1^2 - t^2x_1^2. \tag{15}$$

En divisant membre à membre (14) et (12), on en déduit

$$
\frac{xx_1}{zz_1} = -\frac{x^2z_1^2-x_1^2z^2}{z^2z_1^2-x^2x_1^2} = -\frac{\dfrac{x^2}{z^2}-\dfrac{x_1^2}{z_1^2}}{1-\left(\dfrac{xx_1}{zz_1}\right)^2},
$$

d'où

$$
\frac{x^2}{z^2}-\frac{x_1^2}{z_1^2} = -\frac{xx_1}{zz_1}\left[1-\left(\frac{xx_1}{zz_1}\right)^2\right];
$$

donc

$$\frac{x^2}{z^2}-\frac{x_1^2}{z_1^2}=-\sqrt{5}\,\frac{\sqrt{\bar\eta_1\bar\theta_1}}{(\eta_1\theta_1)^{\frac{3}{2}}}\left[\eta_1\theta_1-5\bar\eta_1\bar\theta_1\right],$$

et enfin

$$(\mathrm{II})\quad\left\{\begin{aligned}
&\eta_1^2\theta_1^2\left(\frac{x^2}{z^2}-\frac{x_1^2}{z_1^2}\right)=-\sqrt{5}\sqrt{\eta_1\theta_1}\,\sqrt{\bar\eta_1\bar\theta_1}\left[\eta_1\theta_1-5\bar\eta_1\bar\theta_1\right],\\
&\text{de même}\\
&\eta_1^2\theta^2\left(\frac{x^2}{t^2}-\frac{x_1^2}{t_1^2}\right)=-\sqrt{5}\sqrt{\eta_1\theta}\,\sqrt{\bar\eta_1\bar\theta}\left[\eta_1\theta+5\bar\eta_1\bar\theta\right],\\
&\theta_1^2\theta^2\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{x_1^2}{y_1^2}\right)=\sqrt{5}\sqrt{\theta_1\theta}\,\sqrt{\bar\theta_1\bar\theta}\left[\theta_1\theta-5\bar\theta_1\bar\theta\right].
\end{aligned}\right.$$

36. Nous allons maintenant obtenir de nouvelles expressions pour tt_1, zz_1, yy_1.

Faisons $u=\frac{\pi}{5}$, $v=\frac{2\pi}{5}$, dans les formules (7), (8), (9), (10), (11) et (12) du Chapitre II.

On trouve

$$\begin{aligned}
\theta\,\eta_1 z_1 y &= zz_1yy_1+tt_1xx_1,\\
-\theta\,\eta_1 z\,y_1 &= zz_1yy_1-tt_1xx_1,\\
\theta_1\,\theta\,t\,z_1 &= tt_1\,zz_1+yy_1xx_1,\\
\theta_1\,\theta\,z\,t_1 &= tt_1\,zz_1-yy_1xx_1,\\
\theta_1\eta_1\,t\,y_1 &= -tt_1yy_1+zz_1xx_1,\\
\theta_1\eta_1\,t_1 y &= tt_1yy_1+zz_1xx_1;
\end{aligned}$$

d'où

$$\theta\eta_1=y_1z+\frac{tt_1xx_1}{yz_1}=y_1z\left[1+\frac{tt_1xx_1}{yy_1zz_1}\right];$$

donc

$$(\mathrm{III})\quad\left\{\begin{aligned}
&\eta_1\theta_1\theta=y_1z\,\left[\theta_1+\sqrt{5}\,\bar\theta_1\right],\\
&\text{de même}\\
&\eta_1\theta_1\theta=y\,z_1\left[-\theta_1+\sqrt{5}\,\bar\theta_1\right],\\
&\eta_1\theta_1\theta=y\,t_1\left[-\theta+\sqrt{5}\,\bar\theta\right],\\
&\eta_1\theta_1\theta=y_1\,t\left[\theta+\sqrt{5}\,\bar\theta\right],\\
&\eta_1\theta_1\theta=z_1\,t\left[\eta_1-\sqrt{5}\,\bar\eta_1\right],\\
&\eta_1\theta_1\theta=t_1z\left[\eta_1+\sqrt{5}\,\bar\eta_1\right];
\end{aligned}\right.$$

d'où, en multipliant membre à membre les deux premières équations du groupe III,

$$\eta_1^2\theta_1^2\theta^2 = yy_1zz_1[5\bar{\theta}_1^2 - \theta_1^2] = \frac{\eta_1^2\theta_1^2\theta^2}{4tt_1}[5\bar{\theta}_1^2 - \theta_1^2],$$

d'où

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} 4yy_1 = -5\bar{\eta}_1^2 + \eta_1^2, \\ 4\,tt_1 = \quad 5\bar{\theta}_1^2 - \theta_1^2, \\ 4\,zz_1 = \quad 5\bar{\theta}^2 - \theta^2. \end{cases}$$

37. Divisons membre à membre la première et la quatrième des équations (III), on en déduit

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} \dfrac{z}{t} = \dfrac{\theta + \sqrt{5}\,\bar{\theta}}{\theta_1 + \sqrt{5}\,\bar{\theta}_1}, & \text{de même} \quad \dfrac{z_1}{t_1} = \dfrac{-\theta + \sqrt{5}\,\bar{\theta}}{-\theta_1 + \sqrt{5}\,\bar{\theta}_1}; \\ \dfrac{y}{t} = \dfrac{\eta_1 - \sqrt{5}\,\bar{\eta}_1}{-\theta_1 + \sqrt{5}\,\bar{\theta}_1}, & \quad » \quad \dfrac{y_1}{t_1} = \dfrac{\eta_1 + \sqrt{5}\,\bar{\eta}_1}{\theta_1 + \sqrt{5}\,\bar{\theta}_1}; \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{\eta_1 + \sqrt{5}\,\bar{\eta}_1}{-\theta + \sqrt{5}\,\bar{\theta}}, & \quad » \quad \dfrac{y_1}{z_1} = \dfrac{\eta_1 - \sqrt{5}\,\bar{\eta}_1}{\theta + \sqrt{5}\,\bar{\theta}}; \end{cases}$$

38. En éliminant y, z, t entre ces dernières équations, on obtient la relation remarquable

$$\text{(VI)} \qquad \frac{\bar{\theta}_1}{\theta_1} - \frac{\bar{\eta}_1}{\eta_1} - \frac{\bar{\theta}}{\theta} + 5\,\frac{\bar{\eta}_1\bar{\theta}_1\bar{\theta}}{\eta_1\theta_1\theta} = 0.$$

On peut obtenir d'autres relations entre $\eta_1, \theta_1, \theta, \bar{\eta}_1, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}$.

Nous avons trouvé :

$$\theta_1\theta t_1 z = tt_1zz_1 - xx_1yy_1,$$

$$\theta_1\theta t\, z_1 = tt_1zz_1 + xx_1yy_1,$$

d'où

$$\theta_1\theta(t_1z + tz_1) = 2tt_1zz_1$$

et

$$\theta_1\theta\left(\frac{t}{z} + \frac{t_1}{z_1}\right) = 2tt_1,$$

et, en remplaçant $\frac{t}{z}$ et $\frac{t_1}{z_1}$ par les valeurs (V),

$$\theta_1\theta\left[\frac{\sqrt{5}\,\bar{\theta}_1 + \theta_1}{\sqrt{5}\,\bar{\theta} + \theta} + \frac{\sqrt{5}\,\bar{\theta}_1 - \theta_1}{\sqrt{5}\,\bar{\theta} - \theta}\right] = \frac{1}{2}[5\bar{\theta}_1^2 - \theta^2]$$

ou

$$4\theta\theta_1[5\bar\theta_1\bar\theta-\theta_1\theta]=[5\bar\theta_1^2-\theta_1^2][5\bar\theta^2-\theta^2];$$

de même

$$-\theta\eta_1 yz_1=-zyz_1y_1-tt_1xx_1,$$
$$\theta\eta_1 zy_1=-zyz_1y_1+tt_1xx_1,$$
$$\theta\eta_1\left(\frac{y}{z}-\frac{y_1}{z_1}\right)=2yy_1,$$

ou

$$4\theta\eta_1[5\bar\theta\bar\eta_1+\theta\eta_1]=-[5\bar\eta_1^2-\eta_1^2][5\bar\theta^2-\theta^2].$$

Enfin

$$\theta_1\eta_1 yt_1=tyt_1y_1+zz_1xx_1,$$
$$\theta_1\eta_1 ty_1=-tt_1yy_1+zz_1xx_1,$$
$$\theta_1\eta_1(yt_1-ty_1)=2tt_1yy_1,$$
$$\theta_1\eta_1\left(\frac{y}{t}-\frac{y_1}{t_1}\right)=2yy_1,$$

d'où

$$4\theta_1\eta_1[5\bar\theta_1\bar\eta_1-\theta_1\eta_1]=(5\bar\eta_1^2-\eta_1^2)(5\bar\theta_1^2-\theta_1^2),$$

équations qui s'écrivent encore :

$$\text{(VII)}\qquad\left\{\begin{aligned}
&4\bar\eta_1\bar\theta_1\eta_1\theta_1+\bar\theta_1^2\eta_1^2+\bar\eta_1^2\theta_1^2=\eta_1^2\theta_1^2+5\bar\eta_1^2\bar\theta_1^2,\\
&4\bar\theta_1\bar\theta\,\theta_1\theta+\bar\theta_1^2\theta^2+\bar\theta^2\theta_1^2=\theta_1^2\theta^2+5\bar\theta_1^2\bar\theta^2,\\
-&4\bar\eta_1\bar\theta\,\eta_1\theta+\bar\theta^2\eta_1^2+\bar\eta_1^2\theta^2=\eta_1^2\theta^2+5\bar\eta_1^2\bar\theta^2.
\end{aligned}\right.$$

39. Calculons enfin les trois sommes

$$\frac{x^2}{z^2}+\frac{x_1^2}{z_1^2},$$
$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{x_1^2}{y_1^2},$$
$$\frac{x^2}{t^2}+\frac{x_1^2}{t_1^2}.$$

En vertu des diverses formules qui précèdent, on obtient

$$\begin{aligned}
\eta_1^4\theta_1^4\left[\left(\frac{x^2}{z^2}-\frac{x_1^2}{z_1^2}\right)^2+\frac{4x^2x_1^2}{z^2z_1^2}\right]&=5\eta_1\theta_1\bar\eta_1\bar\theta_1[\eta_1\theta_1-5\bar\eta_1\bar\theta_1]^2+20\bar\eta_1\bar\theta_1\eta_1^3\theta_1^3\\
&=25\eta_1\theta_1\bar\eta_1\bar\theta_1[\eta_1^2\theta_1^2-2\eta_1\theta_1\bar\eta_1\bar\theta_1+5\bar\eta_1^2\bar\theta_1^2]
\end{aligned}$$

et, au moyen des formules (VII),

$$\eta_1^4\theta_1^4\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{x_1^2}{z_1^2}\right)^2 = 25\eta_1\theta_1\bar{\eta}_1\bar{\theta}_1[4\bar{\eta}_1\bar{\theta}_1\eta_1\theta_1+\bar{\theta}_1^2\eta_1^2+\bar{\eta}_1^2\theta_2^2-2\eta_1\theta_1\bar{\eta}_1\bar{\theta}_1]$$
$$= 25\eta_1\theta_1\bar{\eta}_1\bar{\theta}_1[\bar{\theta}_1\eta_1+\bar{\eta}_1\theta_1]^2;$$

d'où enfin

(VIII) $$\eta_1^2\theta_1^2\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{x_1^2}{z_1^2}\right) = 5\sqrt{\eta_1\theta_1}\sqrt{\bar{\eta}_1\bar{\theta}_1}(\bar{\theta}_1\eta_1+\bar{\eta}_1\theta_1);$$

de même

$$\theta_1^4\theta^4\left[\left(\frac{x_1^2}{y_1^2}-\frac{x^2}{y^2}\right)^2+\frac{4x^2x_1^2}{y^2y_1^2}\right] = 5\theta_1\theta\bar{\theta}_1\bar{\theta}(\theta_1\theta-5\bar{\theta}_1\bar{\theta})^2+20\theta_1^3\theta^3\bar{\theta}_1\bar{\theta}$$
$$= 25\theta_1\theta\bar{\theta}_1\bar{\theta}[\theta_1^2\theta^2-2\theta_1\theta\bar{\theta}_1\bar{\theta}+5\bar{\theta}_1^2\bar{\theta}^2]$$
$$= 25\theta_1\theta\bar{\theta}_1\bar{\theta}(\bar{\theta}_1\theta+\theta\bar{\theta}_1)^2,$$

(VIII) $$\theta_1^2\theta^2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{x_1^2}{y_1^2}\right) = 5\sqrt{\theta_1\theta}\sqrt{\bar{\theta}_1\bar{\theta}}(\bar{\theta}_1\theta+\bar{\theta}\theta_1)$$

et enfin

(VIII) $$\eta_1^2\theta^2\left(\frac{x^2}{t^2}+\frac{x_1^2}{t_1^2}\right) = 5\sqrt{\eta_1\theta}\sqrt{\bar{\eta}_1\bar{\theta}}(\eta_1\bar{\theta}-\bar{\eta}_1\theta).$$

On vérifie naturellement les signes en prenant les parties principales.

40. Nous avons trouvé les formules

$$\theta_1^2 tt_1 = t_1^2t^2+x_1^2x^2,$$
$$\theta^2 zz_1 = z_1^2z^2-x_1^2x^2;$$

d'où

$$\theta_1^2tt_1+\theta^2zz_1 = t_1^2t^2+z_1^2z^2,$$

c'est-à-dire

$$4\theta_1^2(5\bar{\theta}_1^2-\theta_1^2)+4\theta^2(5\bar{\theta}^2-\theta^2) = (5\bar{\theta}_1^2-\theta_1^2)^2+(5\bar{\theta}^2-\theta^2)^2$$

et, après réduction,

(IX) $$6(\bar{\theta}_1^2\theta_1^2+\bar{\theta}^2\theta^2) = \theta_1^4+\theta^4+5\bar{\theta}_1^4+5\bar{\theta}^4.$$

Un calcul analogue donne

(IX) $$6(\bar{\theta}^2\theta^2-\bar{\eta}_1^2\eta_1^2) = \theta^4-\eta_1^4+5\bar{\theta}^4-5\bar{\eta}_1^4$$

et

(IX) $$6(\bar{\eta}_1^2\eta_1^2+\bar{\theta}_1^2\theta_1^2)=\eta_1^4+\theta_1^4+5\bar{\eta}_1^4+5\bar{\theta}_1^4.$$

41. On a
$$\theta\eta_1(z_1y+yz_1)=2t t_1 x x_1,$$
d'où
$$\theta\eta_1\left(\frac{y}{z}+\frac{y_1}{z_1}\right)=\frac{2t t_1 x x_1}{z z_1},$$
puis (nº **37**)
$$2\theta\eta_1\sqrt{5}[\bar{\eta}_1\theta+\theta\bar{\eta}_1]=8t t_1 x x_1=8\frac{t^2 t_1^2 x x_1}{t t_1}=8\bar{\theta}_1\frac{\eta_1^2\theta^2\theta_1\sqrt{5}}{5\bar{\theta}_1^2-\theta_1^2};$$
donc enfin

(X) $$\left\{\begin{aligned}&[\bar{\eta}_1\theta+\bar{\theta}\eta_1][5\bar{\theta}_1^2-\theta_1^2]=4\bar{\theta}_1\eta_1\theta_1\theta,\\&[\eta_1\bar{\theta}_1-\bar{\eta}_1\theta_1][5\bar{\theta}^2-\theta^2]=4\bar{\theta}\bar{\eta}_1\theta_1\theta,\\&[\bar{\theta}_1\theta-\bar{\theta}\theta_1][5\bar{\eta}_1^2-\eta_1^2]=4\bar{\eta}_1\eta_1\theta_1\theta.\end{aligned}\right.$$

III. — Deuxième groupe.

42. On obtient, en partant de l'équation
$$\Theta(u)\Theta\left(u+\frac{\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u-\frac{\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u+\frac{2\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u-\frac{2\pi\tau}{5}\right)=C'\Theta\left(u,\frac{\tau}{5}\right),$$
des relations entièrement analogues aux précédentes.

Nous exposerons plus succinctement les calculs qui y conduisent.

On part d'abord de

(1') $$H(u)H\left(u+\frac{\pi\tau}{5}\right)H\left(u-\frac{\pi\tau}{5}\right)H\left(u+\frac{2\pi\tau}{5}\right)H\left(u-\frac{2\pi\tau}{5}\right)=C'H\left(u,\frac{\tau}{5}\right).$$

Changeons u en $u+\frac{\pi\tau}{2}$.

Le premier membre a comme multiplicateur $i^5e^{-5iu}q^{-\frac{5}{4}}$.

Le second membre devient
$$H\left(u+\frac{\pi\tau}{2},\frac{\tau}{5}\right)=H\left[u+5\frac{\pi}{2}\left(\frac{\tau}{5}\right),\frac{\tau}{5}\right]=ie^{-5iu}e^{-5i\frac{\pi\tau}{4}}\Theta\left(u,\frac{\tau}{5}\right)$$
de sorte que

(3') $$\Theta(u)\Theta\left(u+\frac{\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u-\frac{\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u+\frac{2\pi\tau}{5}\right)\Theta\left(u-\frac{2\pi\tau}{5}\right)=C'\Theta\left(u,\frac{\tau}{5}\right)$$

et

$$(4') \qquad \Theta_1(u)\Theta_1\left(u+\frac{\pi\tau}{5}\right)\Theta_1\left(u-\frac{\pi\tau}{5}\right)\Theta_1\left(u-\frac{2\pi\tau}{5}\right)\Theta_1\left(u+\frac{2\pi\tau}{5}\right)=\mathrm{C}'\Theta_1\left(u,\frac{\tau}{5}\right),$$

$$(2') \qquad \mathrm{H}_1(u)\mathrm{H}_1\left(u+\frac{\pi\tau}{5}\right)\mathrm{H}_1\left(u-\frac{\pi\tau}{5}\right)\mathrm{H}_1\left(u-\frac{2\pi\tau}{5}\right)\mathrm{H}_1\left(u+\frac{2\pi\tau}{5}\right)=\mathrm{C}'\mathrm{H}_1\left(u,\frac{\tau}{5}\right).$$

43. *Notations.* — Nous poserons

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}\left(\frac{\pi\tau}{5}\right)=\mathrm{x}', &\qquad &\mathrm{H}\left(\frac{2\pi\tau}{5}\right)=\mathrm{x}'_1,\\
&\mathrm{H}_1\left(\frac{\pi\tau}{5}\right)=\mathrm{y}', &&\mathrm{H}_1\left(\frac{2\pi\tau}{5}\right)=\mathrm{y}'_1,\\
&\Theta\left(\frac{\pi\tau}{5}\right)=\mathrm{z}', &&\Theta\left(\frac{2\pi\tau}{5}\right)=\mathrm{z}'_1,\\
&\Theta_1\left(\frac{\pi\tau}{5}\right)=\mathrm{t}', &&\Theta_1\left(\frac{2\pi\tau}{5}\right)=\mathrm{t}'_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_1\left(0,\frac{\tau}{5}\right)&=\eta_1\left(q^{\frac15}\right)=\overline{\eta}'_1,\\
\Theta_1\left(0,\frac{\tau}{5}\right)&=\theta_1\left(q^{\frac15}\right)=\overline{\theta}'_1,\\
\Theta\left(0,\frac{\tau}{5}\right)&=\theta\left(q^{\frac15}\right)=\overline{\theta}',\\
&\eta\left(q^{\frac15}\right)=\overline{\eta}'.
\end{aligned}$$

Les formules suivantes nous seront utiles :

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}\left(\frac{3\pi\tau}{5}\right)&=\mathrm{H}\left(\pi\tau-\frac{2\pi\tau}{5}\right)=-e^{4i\frac{\pi\tau}{5}}q^{-1}\mathrm{H}\left(-\frac{2\pi\tau}{5}\right)=q^{-\frac15}\mathrm{x}'_1,\\
\mathrm{H}_1\left(\frac{3\pi\tau}{5}\right)&=\mathrm{H}_1\left(\pi\tau-\frac{2\pi\tau}{5}\right)= \qquad\qquad\qquad {}^{-\frac15}\mathrm{y}'_1,\\
\Theta\left(\frac{3\pi\tau}{5}\right)&= \qquad\qquad\qquad -q^{-\frac15}\mathrm{z}'_1,\\
\Theta_1\left(\frac{3\pi\tau}{5}\right)&= \qquad\qquad\qquad q^{-\frac15}\mathrm{t}'_1.
\end{aligned}$$

Parties principales :

$$\begin{aligned}
&\text{p. pale } \mathrm{x}'=iq^{\frac{1}{20}}, &\qquad &\text{p. pale } \mathrm{x}'_1=iq^{-\frac{3}{20}},\\
&\quad\text{»}\quad \mathrm{y}'=q^{\frac{1}{20}}, &&\quad\text{»}\quad \mathrm{y}'_1=q^{-\frac{3}{20}},\\
&\quad\text{»}\quad \mathrm{z}'=1, &&\quad\text{»}\quad \mathrm{z}'_1=1,\\
&\quad\text{»}\quad \mathrm{t}'=1, &&\quad\text{»}\quad \mathrm{t}'_1=1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\text{p. pale } x'x'_1 &= -q^{-\frac{1}{10}},\\
\text{»} \quad y'y'_1 &= q^{-\frac{1}{10}},\\
\text{»} \quad z'z'_1 &= 1,\\
\text{»} \quad t't'_1 &= 1,\\
\text{»} \quad \bar{\eta}' &= q^{\frac{1}{60}},\\
\text{»} \quad \bar{\eta}'_1 &= 2q^{\frac{1}{20}}.
\end{aligned}$$

44. *Calcul de* C'. — On obtient aisément les équations

$$\eta_1\theta_1\theta x'_1 = 2x'y'z't',$$

$$q^{-\frac{3}{5}}\eta_1\theta_1\theta x' = 2x'_1y'_1z'_1t'_1;$$

en remarquant que

$$H\left(\frac{4\pi\tau}{5}\right) = H\left(\pi\tau - \frac{\pi\tau}{5}\right) = -e^{+2i\frac{\pi\tau}{5}}q^{-1}H\left(-\frac{\pi\tau}{5}\right) = x\,q^{-\frac{3}{5}},$$

il en résulte

$$q^{-\frac{3}{5}}(\eta_1\theta_1\theta)^2 = 4y'z't'y'_1z'_1t'_1;$$

d'ailleurs

$$\begin{aligned}
C'\bar{\eta}'_1\bar{\theta}'_1\bar{\theta}' &= \eta_1\theta_1\theta x'^2x_1'^2,\\
C'\bar{\eta}'_1 &= \eta_1 y'^2 y_1'^2,\\
C'\bar{\theta}' &= \theta z'^2 z_1'^2,\\
C'\bar{\theta}'_1 &= \theta_1 t'^2 t_1'^2,\\
C'^3\bar{\eta}'_1\bar{\theta}'_1\bar{\theta}' &= \eta_1\theta_1\theta(y'z't'y'_1z'_1t'_1)^2,\\
C'^2 &= \left(\frac{y'z't'y'_1z'_1t'_1}{x'x'_1}\right)^2,\\
C'^2 &= \frac{(\eta_1\theta_1\theta)^4}{16x'^2x_1'^2}q^{-\frac{6}{5}}.
\end{aligned}$$

Mais

$$C' = \frac{\eta^3}{\bar{\eta}'^3}x'^2x_1'^2$$

et, en prenant les parties principales,

$$\text{p. pale } C' = 1;$$

donc

$$C' = -\frac{(\eta_1\theta_1\theta)^2}{4x'x'_1}q^{-\frac{3}{5}},$$

d'où

$$(x'x'_1)^3 = -\bar{\eta}'^3\eta^3 q^{-\frac{3}{5}}$$

$$x'x'_1 = -\bar{\eta}'\eta q^{-\frac{1}{5}}$$

et

$$C' = \frac{\eta^5}{\bar{\eta}'} q^{-\frac{2}{5}}.$$

45. *Formules fondamentales :*

$$(\mathrm{I}')\qquad \left\{\begin{aligned} x'x'_1 &= -\bar{\eta}'\eta\, q^{-\frac{1}{5}}, \\ y'y'_1 &= \quad \bar{\eta}'\eta\, q^{-\frac{1}{5}}\sqrt{\frac{\theta\theta_1}{\bar{\theta}'\bar{\theta}'_1}}, \\ z'z'_1 &= \quad \bar{\eta}'\eta\, q^{-\frac{1}{5}}\sqrt{\frac{\eta_1\theta_1}{\bar{\eta}'_1\bar{\theta}'_1}}, \\ t't'_1 &= \quad \bar{\eta}'\eta\, q^{\frac{1}{5}}\sqrt{\frac{\eta_1\theta}{\bar{\eta}'_1\bar{\theta}'}}, \end{aligned}\right.$$

46. *Nouvelles formules.* — Il s'agit de calculer

$$\frac{x'^2}{z'^2} - \frac{x_1'^2}{z_1'^2},$$

$$\frac{x'^2}{y'^2} - \frac{x_1'^2}{y_1'^2},$$

$$\frac{x'^2}{t'^2} - \frac{x_1'^2}{t_1'^2}.$$

On obtient aisément les relations

$$-\theta^2 q^{-\frac{1}{5}} z'z'_1 = z'^2 z_1'^2 - x'^2 x_1'^2,$$

$$\theta_1^2 q^{-\frac{1}{5}} t't'_1 = t'^2 t_1'^2 + x'^2 x_1'^2,$$

$$\eta_1^2 q^{-\frac{1}{5}} y'y'_1 = y'^2 y_1'^2 - x'^2 x_1'^2,$$

$$\theta^2 q^{-\frac{1}{5}} x'x'_1 = x_1'^2 z'^2 - x'^2 z_1'^2,$$

$$\theta_1^2 q^{-\frac{1}{5}} x'x'_1 = x_1'^2 t'^2 - x'^2 t_1'^2,$$

$$\eta_1^2 q^{-\frac{1}{5}} x'x'_1 = x_1'^2 y'^2 - x'^2 y_1'^2;$$

d'où

$$\frac{x_1'^2}{z_1'^2} - \frac{x'^2}{z'^2} = -\frac{x'x_1'}{z'z_1'}\left[1 - \left(\frac{x'x_1'}{z'z_1'}\right)^2\right],$$

$$\frac{x_1'^2}{t_1'^2} - \frac{x'^2}{t'^2} = \frac{x'x_1'}{t't_1'}\left[1 + \left(\frac{x'x_1'}{t't_1'}\right)^2\right],$$

$$\frac{x_1'^2}{y_1'^2} - \frac{x'^2}{y'^2} = \frac{x'x_1'}{y'y_1'}\left[1 - \left(\frac{x'x_1'}{y'y_1'}\right)^2\right];$$

$$(\text{II}')\quad \left\{\begin{aligned} \eta_1^2\theta_1^2\left(\frac{x_1'^2}{z_1'^2} - \frac{x'^2}{z'^2}\right) &= \sqrt{\eta_1\theta_1}\,\sqrt{\bar\eta_1'\bar\theta_1'}\,[\eta_1\theta_1 - \bar\eta_1'\bar\theta_1'],\\ \eta_1^2\theta^2\left(\frac{x_1'^2}{t_1^2} - \frac{x'^2}{t'^2}\right) &= -\sqrt{\eta_1\theta}\,\sqrt{\bar\eta_1'\bar\theta'}\,[\eta_1\theta + \bar\eta_1'\bar\theta'],\\ \theta_1^2\theta^2\left(\frac{x_1'^2}{y_1'^2} - \frac{x'^2}{y'^2}\right) &= -\sqrt{\theta_1\theta}\,\sqrt{\bar\theta_1'\bar\theta'}\,[\theta_1\theta - \bar\theta_1'\bar\theta'],\end{aligned}\right.$$

47. Toujours par des procédés analogues à ceux employés pour le premier groupe, on trouve les formules

$$-\theta\,\eta_1\,q^{-\frac{1}{5}}z_1'y' = z_1'z'y_1'y' + t't_1'x'x_1',$$

$$\theta\,\eta_1\,q^{-\frac{1}{5}}z'y_1' = z'z_1'y'y_1' - t't_1'x'x_1',$$

$$\theta_1\theta\,q^{-\frac{1}{5}}z't_1' = z'z_1't't_1' - x'x_1'y'y_1',$$

$$-\theta_1\theta\,q^{-\frac{1}{5}}z_1't' = z'z_1't't_1' + x'x_1'y'y_1',$$

$$\theta_1\eta_1\,q^{-\frac{1}{5}}y_1't' = t't_1'y'y_1' - z'z_1'x'x_1',$$

$$\theta_1\eta_1\,q^{-\frac{1}{5}}y't_1' = t't_1'y'y_1' + z'z_1'x'x_1';$$

d'où

$$(\text{III}')\quad \left\{\begin{aligned} -\eta_1\theta_1\theta\,q^{-\frac{1}{5}} &= y_1'z'[\theta_1 - \bar\theta_1'],\\ \eta_1\theta_1\theta\,q^{-\frac{1}{5}} &= y'z_1'[\theta_1 + \bar\theta_1'],\\ \eta_1\theta_1\theta\,q^{-\frac{1}{5}} &= z_1't'[\eta_1 + \bar\eta_1'],\\ -\eta_1\theta_1\theta\,q^{-\frac{1}{5}} &= z't_1'[\eta_1 - \bar\eta_1'],\\ \eta_1\theta_1\theta\,q^{-\frac{1}{5}} &= y't_1'[\theta + \bar\theta'],\\ \eta_1\theta_1\theta\,q^{-\frac{1}{5}} &= y_1't'[\theta - \bar\theta'];\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(\text{IV}')\quad \left\{\begin{aligned} 4\,t't_1' &= -q^{-\frac{1}{5}}[\theta_1^2 - \bar\theta_1'^2],\\ 4\,y'y_1' &= -q^{-\frac{1}{5}}[\eta_1^2 - \bar\eta_1'^2],\\ 4\,zz_1 &= q^{-\frac{1}{5}}[\theta^2 - \bar\theta'^2].\end{aligned}\right.$$

48. Puis

$$
(\mathrm{V}')\qquad
\left|\begin{array}{ll}
-\dfrac{z'}{t'} = \dfrac{\theta - \bar\theta'}{\theta_1 - \bar\theta'_1}, & \dfrac{z'_1}{t'_1} = \dfrac{\theta + \bar\theta'}{\theta_1 + \bar\theta'_1}; \\[2ex]
\dfrac{y'}{t'} = \dfrac{\eta_1 + \bar\eta'_1}{\theta_1 + \bar\theta'_1}, & \dfrac{y'_1}{t'_1} = \dfrac{\eta_1 - \bar\eta'_1}{\theta_1 - \bar\theta'_1}; \\[2ex]
-\dfrac{y'}{z'} = \dfrac{\eta_1 - \bar\eta'_1}{\theta + \bar\theta'}, & \dfrac{y'_1}{z'_1} = \dfrac{\eta_1 + \bar\eta'_1}{\theta - \bar\theta'}.
\end{array}\right.
$$

49. D'où

$$
(\mathrm{VI}')\qquad -\frac{\bar\theta'_1}{\theta_1} + \frac{\bar\eta'_1}{\eta_1} + \frac{\bar\theta'}{\theta} - \frac{\bar\eta'_1\bar\theta'_1\theta'}{\eta_1\theta_1\theta} = 0.
$$

Ensuite

$$
q^{-\frac{1}{5}}\theta\eta_1(y'_1 z' - z'_1 y') = 2z'z'_1 y'y'_1,
$$

d'où

$$
q^{-\frac{1}{5}}\theta\eta_1\left(\frac{y'_1}{z'_1} - \frac{y'}{z'}\right) = 2y'y'_1,
$$

$$
2\theta\eta_1\left[\frac{\eta_1 + \bar\eta'_1}{\theta - \bar\theta'} + \frac{\eta_1 - \bar\eta'_1}{\theta + \bar\theta'}\right] = -(\eta_1^2 - \bar\eta_1'^2),
$$

$$
4\theta\eta_1[\eta_1\theta + \bar\eta'_1\bar\theta'] = -[\eta_1^2 - \bar\eta_1'^2][\theta^2 - \bar\theta'^2];
$$

de même

$$
q^{-\frac{1}{5}}\theta_1\theta[z't'_1 - z'_1 t'] = 2z'z'_1 t't'_1,
$$

$$
-2\theta_1\theta\left[\frac{\theta - \bar\theta'}{\theta_1 - \bar\theta'_1} + \frac{\theta + \bar\theta'}{\theta_1 + \bar\theta'_1}\right] = \theta^2 - \bar\theta'^2,
$$

$$
-4\theta_1\theta[\theta\theta_1 - \bar\theta'\bar\theta'_1] = [\theta^2 - \bar\theta'^2][\theta_1^2 - \bar\theta_1'^2].
$$

Enfin

$$
q^{-\frac{1}{5}}\eta_1\theta_1[y'_1 t' + y' t'_1] = 2tt'y'y'_1,
$$

$$
2\eta_1\theta_1\left[\frac{\eta_1 - \bar\eta'_1}{\theta_1 - \bar\theta'_1} + \frac{\eta_1 + \bar\eta'_1}{\theta_1 + \bar\theta'_1}\right] = -[\eta_1^2 - \bar\eta_1'^2],
$$

$$
4\eta_1\theta_1[\eta_1\theta_1 - \bar\theta'_1\bar\eta'_1] = -[\eta_1^2 - \bar\eta_1'^2][\theta_1^2 - \bar\theta_1'^2].
$$

Ces trois équations s'écrivent encore

$$
(\mathrm{VII}')\qquad
\left\{\begin{array}{l}
5\theta^2\eta_1^2 + \bar\eta_1'^2\bar\theta'^2 = -4\theta\,\eta_1\bar\theta'\,\bar\eta'_1 + \eta_1^2\bar\theta'^2 + \bar\eta_1'^2\theta^2, \\
5\theta^2\theta_1^2 + \bar\theta_1'^2\,\bar\theta'^2 = 4\theta_1\theta\,\bar\theta'_1\bar\theta' + \theta_1^2\bar\theta'^2 + \bar\theta_1'^2\theta^2, \\
5\eta_1^2\theta_1^2 + \bar\eta_1'^2\bar\theta_1'^2 = 4\eta_1\theta_1\bar\theta'_1\bar\eta'_1 + \eta_1^2\bar\theta_1'^2 + \bar\eta_1'^2\theta_1^2.
\end{array}\right.
$$

50. Nous calculerons enfin les sommes

$$
\frac{x'^2}{z'^2} + \frac{x_1'^2}{z_1'^2}, \qquad \frac{x'^2}{y'^2} + \frac{x_1'^2}{y_1'^2}, \qquad \frac{x'^2}{t'^2} + \frac{x_1'^2}{t_1'^2}.
$$

Pour cela, nous partons de

$$\eta_1^4\,\theta_1^4\left[\left(\frac{x_1'^2}{z_1'^2}-\frac{x'^2}{z'^2}\right)^2+4\left(\frac{x'x_1'}{z'z_1'}\right)^2\right]=\eta_1\theta_1\bar\eta_1'\bar\theta_1'\left[\eta_1\theta_1-\bar\eta_1'\bar\theta_1'\right]^2+4\eta_1^3\theta_1^3\bar\eta_1'\bar\theta_1'$$
$$=\eta_1\theta_1\bar\eta_1'\bar\theta_1'\left[5\eta_1^2\theta_1^2+\bar\eta_1'^2\bar\theta_1'^2-2\eta_1\theta_1\bar\eta_1'\bar\theta_1'\right],$$

d'où

$$(\text{VIII}')\quad\left\{\begin{aligned}
\eta_1^2\theta_1^2\left[\frac{x_1'^2}{z_1'^2}+\frac{x'^2}{z'^2}\right]&=-\sqrt{\eta_1\theta_1}\sqrt{\bar\eta_1'\bar\theta_1'}\left[\theta_1\bar\eta_1'+\eta_1\bar\theta_1'\right],\\
\eta_1^2\theta^2\left[\frac{x_1'^2}{t_1'^2}+\frac{x'^2}{t'^2}\right]&=-\sqrt{\eta_1\theta}\;\sqrt{\bar\eta_1'\bar\theta'}\left[\theta\,\bar\eta_1'-\eta_1\bar\theta'\right],\\
\theta_1^2\theta^2\left[\frac{x_1'^2}{y_1'^2}+\frac{x'^2}{y'^2}\right]&=-\sqrt{\theta_1\theta}\;\sqrt{\bar\theta_1'\bar\theta'}\left[\theta_1\bar\theta'+\theta\bar\theta_1'\right].
\end{aligned}\right.$$

51. Nous avons trouvé les formules

$$q^{-\frac{1}{5}}\theta_1^2\,t't_1'=t'^2t_1'^2+x'^2x_1'^2,$$
$$-q^{-\frac{1}{5}}\theta^2z'z_1'=z'^2z_1'^2-x'^2x_1'^2,$$

d'où

$$q^{-\frac{1}{5}}\theta_1^2\,t't_1'-q^{-\frac{1}{5}}\theta^2z'z_1'=t'^2t_1'^2+z'^2z_1'^2;$$

d'où, en remplaçant $t't_1'$, $z'z_1'$ par des valeurs déjà trouvées et simplifiant,

$$(\text{IX}')\quad\left\{\begin{aligned}
6\theta^2\bar\theta'^2+6\theta_1^2\bar\theta_1'^2&=5\theta^4+5\theta_1^4+\bar\theta_1'^4+\bar\theta_1'^4,\\
6\theta^2\bar\theta'^2-6\eta_1^2\bar\eta_1'^2&=5\theta^4-5\eta_1^4+\bar\theta'^4-\bar\eta_1'^4,\\
6\theta_1^2\bar\theta_1'^2+6\eta_1^2\bar\eta_1'^2&=5\eta_1^4+5\theta_1^4+\bar\theta_1'^4+\bar\eta_1'^4.
\end{aligned}\right.$$

52. On a enfin

$$q^{-\frac{1}{5}}\theta\eta_1(y'z_1'+y_1'z')=-2t't_1'x'x_1',$$
$$q^{-\frac{1}{5}}\theta\eta_1\left(\frac{y'}{z'}+\frac{y_1'}{z_1'}\right)=-2\frac{t't_1'x'x_1'}{z'z_1'},$$

ou

$$q^{-\frac{1}{5}}\theta\eta_1\left[-\frac{\eta_1-\bar\eta_1'}{\theta+\bar\theta'}+\frac{\eta_1+\bar\eta_1'}{\theta-\bar\theta'}\right]=-2\frac{t't_1'x'x_1'}{z'z_1'}$$

et enfin

$$(\text{X}')\quad\left\{\begin{aligned}
-\left[\theta_1^2-\bar\theta_1'^2\right]\left[\theta\bar\eta_1'+\eta_1\bar\theta'\right]&=4\bar\theta_1'\eta_1\theta_1\theta,\\
-\left[\eta_1^2-\bar\eta_1'^2\right]\left[\theta\bar\theta_1'-\theta_1\bar\theta'\right]&=4\bar\eta_1'\eta_1\theta_1\theta,\\
-\left[\theta^2-\bar\theta'^2\right]\left[\eta_1\bar\theta'-\bar\theta\eta_1'\right]&=4\bar\theta'\eta_1\theta_1\theta.
\end{aligned}\right.$$

CHAPITRE IV.

REPRÉSENTATIONS D'UN NOMBRE PAR DIVERSES FORMES QUATERNAIRES.

I. — Notations.

53. Nous étudierons dans ce Chapitre les nombres des représentations d'un entier par les formes quaternaires énumérées ci-dessous.

N est un nombre entier. Les lettres placées à droite de chaque forme représentent indifféremment cette forme et le nombre total de représentations du premier membre pour cette forme. Ainsi $\mathcal{S}_1$ désigne la forme quaternaire $10x^2+25y^2+5z^2+2t^2$, ou bien le nombre des solutions de l'équation

$$2N = 10x^2+25y^2+5z^2+2t^2.$$

Il est clair que ce nombre est une fonction de N : $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1(N)$.

x, y, z, t sont des nombres entiers quelconques, positifs, négatifs ou nuls. Enfin, deux décompositions ne sont considérés comme identiques que si elles le sont *terme à terme*.

54.

$$N = x^2+y^2+z^2+5t^2, \qquad \mathfrak{n}_1$$
$$N = x^2+y^2+5z^2+5t^2, \qquad \mathfrak{n}_2$$
$$N = x^2+5y^2+5z^2+5t^2, \qquad \mathfrak{n}_3$$
$$N = x^2+y^2+z^2+t^2, \qquad \mathcal{N}_0$$
$$N = x^2+y^2+z^2+25t^2, \qquad \mathcal{N}_1$$
$$N = x^2+y^2+25z^2+25t^2, \qquad \mathcal{N}_2$$
$$N = x^2+25y^2+25z^2+25t^2, \qquad \mathcal{N}_3$$
$$N = 25x^2+25y^2+25z^2+25t^2. \qquad \mathcal{N}_4$$
$$4N = (2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2+5(2t+1)^2, \qquad \mathfrak{M}_1$$
$$4N = (2x+1)^2+(2y+1)^2+5(2z+1)^2+5(2t+1)^2, \qquad \mathfrak{M}_2$$
$$4N = (2x+1)^2+5(2y+1)^2+5(2z+1)^2+5(2t+1)^2 \qquad \mathfrak{M}_3$$

et

$$
\begin{array}{lr}
4\mathrm{N} = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2 + (2t+1)^2, & \mathcal{M}_0 \\
4\mathrm{N} = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2 + 25(2t+1)^2, & \mathcal{M}_1 \\
4\mathrm{N} = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + 25(2z+1)^2 + 25(2t+1)^2, & \mathcal{M}_2 \\
4\mathrm{N} = (2x+1)^2 + 25(2y+1)^2 + 25(2z+1)^2 + 25(2t+1)^2, & \mathcal{M}_3 \\
4\mathrm{N} = 25(2x+1)^2 + 25(2y+1)^2 + 25(2z+1)^2 + 25(2t+1)^2. & \mathcal{M}_4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
\mathrm{N} = 5x^2 + y^2 + z^2 + 25t^2, & \mathcal{P}_1 \\
\mathrm{N} = 5x^2 + y^2 + 25z^2 + 25t^2. & \mathcal{P}_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
4\mathrm{N} = 5(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2 + 25(2t+1)^2, & \mathcal{B}_1 \\
4\mathrm{N} = 5(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + 25(2z+1)^2 + 25(2t+1)^2. & \mathcal{B}_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
2\mathrm{N} = 10x^2 + y^2 + 5z^2 + 2t^2, & \mathcal{S} \\
2\mathrm{N} = 10x^2 + 25y^2 + 5z^2 + 2t^2. & \mathcal{S}_1 \\
2\mathrm{N} = 10x^2 + y^2 + 5z^2 + 50t^2. & \mathcal{S}_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr}
4\mathrm{N} = (2x+1)^2 + 5(2y+1)^2 + 10z^2 + 2t^2, & \mathcal{E} \\
4\mathrm{N} = 25(2x+1)^2 + 5(2y+1)^2 + 10z^2 + 2t^2, & \mathcal{E}_1 \\
4\mathrm{N} = (2x+1)^2 + 5(2y+1)^2 + 10z^2 + 50t^2. & \mathcal{E}_2
\end{array}
$$

55. Nous démontrerons plus tard que les décompositions $\mathcal{S}$ se classent en deux catégories : celle des décompositions $\mathcal{S}_1$ (ou $\mathcal{S}_2$) et celle des décompositions $\mathcal{H}$, de sorte que

$$
\left.\begin{array}{ll}
\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{H}, & \text{si } \mathrm{N} \equiv \pm 1 \\
\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 + \mathcal{H}, & \text{si } \mathrm{N} \equiv \pm 2
\end{array}\right\} \pmod 5.
$$

$\mathcal{H}$ est le nombre des décompositions $\mathcal{S}$

$$2\mathrm{N} = 10x^2 + y^2 + 5z^2 + 2t^2,$$

où ni y, ni t n'est divisible par 5.

On montrera aussi qu'on peut poser

$$
\left.\begin{array}{ll}
\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{J}, & \text{si } \mathrm{N} \equiv \pm 2 \\
\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 + \mathcal{J}, & \text{si } \mathrm{N} \equiv \pm 1
\end{array}\right\} \pmod 5,
$$

et $\mathcal{J}$ est le nombre des décompositions $\mathcal{E}$.

$$4\mathrm{N} = (2x+1)^2 + 5(2y+1)^2 + 10z^2 + 2t^2,$$

où ni $2x+1$, ni t n'est divisible par 5.

56. Nous rencontrerons dans la suite, des représentations d'un caractère un peu différent. Prenons les représentations $\mathcal{M}_\alpha$ (ou $\mathcal{N}_\alpha$) et telles que les carrés non précédés de 25 ne soient pas divisibles par 25. Adjoignons à ces représentations $\mathcal{M}_\alpha$ (ou $\mathcal{N}_\alpha$) particulières, celles obtenues en permutant les quatre termes de toutes les manières possibles, de manière à obtenir des décompositions différentes. Toutes ces représentations et leur nombre seront désignées par la lettre $\mathcal{M}_\alpha$ (ou $\mathcal{N}_\alpha$) correspondante, mais affectée d'un accent.

Ainsi $\mathcal{M}'_2$, par exemple, sera le nombre des représentations de $4\mathrm{N}$ par les formes

$$\begin{array}{r}
(2x+1)^2+(2y+1)^2+25(2z+1)^2+25(2t+1)^2,\\
(2x+1)^2+25(2y+1)^2+(2z+1)^2+25(2t+1)^2,\\
25(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2+25(2t+1)^2,\\
(2x+1)^2+25(2y+1)^2+25(2z+1)^2+(2t+1)^2,\\
25(2x+1)^2+(2y+1)^2+25(2z+1)^2+(2t+1)^2,\\
25(2x+1)^2+25(2y+1)^2+(2z+1)^2+(2t+1)^2,
\end{array}$$

où les carrés non précédés de 25 ne sont pas divisibles par 25.

Nous écrirons

$$4\mathrm{N}=(2x+1)^2+(2y+1)^2+25(2z+1)^2+25(2t+1)^2 \qquad \mathcal{M}'_2$$

en sous-entendant les cinq autres formes écrites ci-dessus, etc.

57. Les analogies formelles des décompositions $\mathcal{S}$ et $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$ et $\boldsymbol{\mathfrak{N}}$ font pressentir qu'il existe certaines relations entre ces nombres de ces décompositions. Dans ce qui suit, nous étudierons quelques-unes de ces relations.

II. — Étude des $\mathcal{N}$ et des $\mathcal{M}$.

58. *Relations entre les $\mathcal{N}$ et les $\mathcal{N}'$.* — On peut partager les décompositions $\mathcal{N}_3$ en deux classes, selon que le carré non précédé de 25 est, ou non, divisible par 25. Le nombre des décompositions pour lesquelles ce carré est divisible par 25 est $\mathfrak{N}'_4$. Le nombre des décompositions pour lesquelles ce carré n'est pas divisible par 25 est $\frac{\mathfrak{N}'_3}{4}$, car, à toute décomposition $\mathfrak{N}_3$ jouissant de cette propriété, correspondent visiblement quatre décompositions $\mathfrak{N}'_3$, obtenues en prenant le carré non divisible par 25, successivement pour 1er, 2e, 3e et 4e terme.

On a donc

$$\mathfrak{N}_3 = \frac{\mathfrak{N}'_3}{4} + \mathfrak{N}'_4. \tag{1}$$

Les décompositions $\mathfrak{N}_2$ se répartissent de même en trois classes : 1° celles où les deux carrés non précédés de 25 sont tous deux divisibles par 25; 2° celles où un seul de ces deux carrés est divisible par 25; 3° celles où aucun des deux carrés n'est divisible par 25. La substitution des $\mathfrak{N}'$ aux $\mathfrak{N}$ conduit ainsi à l'équation

$$\mathfrak{N}_2 = \frac{\mathfrak{N}'_2}{6} + \frac{\mathfrak{N}'_3}{2} + \mathfrak{N}'_4. \tag{2}$$

Les décompositions $\mathfrak{N}_1$ se répartissent en quatre classes : 1° celles où les trois carrés non précédés de 25 sont tous trois divisibles par 25; 2° celles où deux de ces carrés sont divisibles par 25; 3° celles où un de ces carrés est divisible par 25; 4° celles où aucun de ces carrés n'est divisible par 25. On en déduit

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{\mathfrak{N}'_1}{4} + \frac{\mathfrak{N}'_2}{2} + \frac{3}{4}\mathfrak{N}'_3 + \mathfrak{N}'_4. \tag{3}$$

Enfin les décompositions $\mathfrak{N}_0$ se répartissent en cinq classes, selon que quatre, trois, deux, un, ou zéro des carrés sont divisibles par 25. Il en résulte

$$\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}'_0 + \mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2 + \mathfrak{N}'_3 + \mathfrak{N}'_4. \tag{4}$$

D'ailleurs $\mathfrak{N}_0$ est connu : c'est le nombre des représentations d'un nombre par une somme de quatre carrés, donc huit fois la somme des diviseurs impairs de N si N est impair et 24 fois la même somme si N est pair.

Avec nos notations (*voir* n° **5**)

$$(5)\qquad \mathcal{M}_0 = 4[2+(-1)^N](\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1) = 2[2+(-1)^N](5^{\nu+1}-1)\mathrm{U},$$

$\mathcal{M}'_4$ n'existe que si N est divisible par 25. Dans ce cas,

$$(6)\qquad \mathcal{M}'_4 = \mathcal{M}_0\left(\frac{N}{25}\right) = 2[2+(-1)^N](5^{\nu-1}-1)\mathrm{U} = 4[2+(-1)^N]\left[\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1-6(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_1)}{25}\right].$$

59. *Relations entre les $\mathcal{M}$ et les $\mathcal{M}'$.* — Un raisonnement analogue conduit aux relations suivantes :

$$(7)\qquad \mathcal{M}_3 = \frac{\mathcal{M}'_3}{4} + \mathcal{M}'_4,$$

$$(8)\qquad \mathcal{M}_2 = \frac{\mathcal{M}'_2}{6} + \frac{\mathcal{M}'_3}{2} + \mathcal{M}'_4,$$

$$(9)\qquad \mathcal{M}_1 = \frac{\mathcal{M}'_1}{4} + \frac{\mathcal{M}'_2}{2} + \frac{3}{4}\mathcal{M}'_3 + \mathcal{M}'_4,$$

$$(10)\qquad \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}'_0 + \mathcal{M}'_1 + \mathcal{M}'_2 + \mathcal{M}'_3 + \mathcal{M}'_4.$$

Dans les décompositions ($\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$), N ne peut être qu'impair, puisque un carré impair est multiple de $8+1$. $\mathcal{M}_0$ est d'ailleurs connu : c'est le nombre de représentations du quadruple d'un nombre impair par une somme de quatre carrés impairs, donc 16 fois la somme des diviseurs du nombre.

Ainsi, avec nos notations,

$$(11)\qquad \mathcal{M}_0 = 16\mathfrak{A} = 4(5^{\nu+1}-1)\mathrm{U},$$

de même

$$(12)\qquad \mathcal{M}'_4 = \mathcal{M}_0\left(\frac{N}{25}\right) = 4(5^{\nu-1}-1)\mathrm{U} = \frac{16}{25}(\mathfrak{A}-6\mathfrak{C}).$$

60. Relativement au module 5, un carré est congru à 0, 1 ou -1. Or, il y a *quinze* combinaisons complètes des trois quantités 0, 1, -1, prises quatre à quatre. Ces quinze combinaisons se groupent en cinq classes, de telle manière que la somme des nombres d'une combinaison soit congrue à l'un des nombres 0, 1, 2, 3 ou 4, selon la classe considérée.

Voici ces cinq classes avec les valeurs correspondantes de N (mod 5) pour les décompositions $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$:

$\mathcal{N}$.	$\mathcal{M}$.				
		1	1	1	1
$N \equiv -1 \pmod{5}$	$N \equiv 1 \pmod{5}$	1	-1	-1	0
		-1	0	0	0
		-1	-1	-1	-1
$N \equiv 1$	$N \equiv -1$	1	-1	1	0
		1	0	0	0
		1	1	0	0
$N \equiv 2$	$N \equiv -2$	1	1	1	-1
		-1	-1	-1	0
		1	1	1	0
$N \equiv -2$	$N \equiv 2$	1	-1	-1	-1
		-1	-1	0	0
		0	0	0	0
$N \equiv 0$	$N \equiv 0$	1	1	-1	-1
		1	-1	0	0

On en déduit immédiatement que, parmi les cinq quantités $\mathcal{N}'_0$, $\mathcal{N}'_1$, $\mathcal{N}'_2$, $\mathcal{N}'_3$, $\mathcal{N}'_4$, deux au moins sont nulles.

De même, des cinq quantités $\mathcal{M}'_0$, $\mathcal{M}'_1$, $\mathcal{M}'_2$, $\mathcal{M}'_3$, $\mathcal{M}'_4$, deux au moins sont nulles.

61. Supposons N *impair* et cherchons les relations qui unisssent les nombres $\mathcal{M}'_\alpha$ aux nombres $\mathcal{N}'_\alpha$.

Soit donc

$$N = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

une décomposition $\mathcal{N}_0$.

On peut lui faire correspondre deux décompositions $\mathcal{M}_0$, savoir

$$(13)\quad 4N = (y+z+t-x)^2 + (x+z+t-y)^2 + (x+y+t-z)^2 + (\ \ x+y+z-t)^2.$$

$$(14)\quad 4N = (y+z-t-x)^2 + (x+z-t-y)^2 + (x+y-t-z)^2 + (-x-y-z-t)^2.$$

En effet, N étant impair, un ou trois des nombres x, y, z, t sont impairs. Donc, toutes les quantités

$$\pm x \pm y \pm z \pm t$$

sont impaires.

Deux décompositions (13) provenant de groupes (x, y, z, t), (x', y', z', t') différents sont différentes, car les équations

$$\begin{aligned}
y + z + t - x &= y' + z' + t' - x',\\
x + z + t - y &= x' + z' + t' - y',\\
x + y + t - z &= x' + y' + t' - z',\\
x + y + z - t &= x' + y' + z' - t'
\end{aligned}$$

n'admettent que la solution

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = t'.$$

De même, deux décompositions (14) provenant de lettres (x, y, z, t) et $(x' y' z' t')$ différents sont différentes.

Enfin, une décomposition (13) ne peut être identique, terme à terme, à une décomposition (14), car les équations

$$\begin{aligned}
y + z + t - x &= y' + z' - t' - x',\\
x + z + t - y &= x' + z' - t' - y',\\
x + y + t - z &= x' + y' - t' - z',\\
x + y + z - t &= -x' - y' - z' - t'
\end{aligned}$$

donnent

$$\begin{aligned}
-2x &= y' + z' + t' - x',\\
-2y &= x' + z' + t' - y',\\
-2z &= x' + y' + t' - z',\\
2t &= x' + y' + z' - t'.
\end{aligned}$$

Ces équations sont arithmétiquement impossibles, car les seconds membres sont précisément les quatre termes de la décomposition (13) provenant du groupe (x', y', z', t'). Or, nous avons vu que ces quatre termes sont des nombres impairs.

Les décompositions (13), (14) sont donc toutes différentes, et comme ce sont des $\mathfrak{M}_0$ on en déduirait

$$2\,\mathfrak{N}_0 \leqq \mathfrak{M}_0,$$

si l'on ne savait, par ailleurs, en vertu des formules (5) et (11), N étant impair, que

$$2\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{M}_0.$$

Nous pouvons donc déduire de cette égalité que le procédé qui fait obtenir deux décompositions $\mathfrak{M}_0$ au moyen d'une décomposition $\mathfrak{N}_0$, par les formules (13) et (14), donne *toutes* les décompositions $\mathfrak{M}_0$.

62. Supposons $N \equiv 1 \pmod{10}$.

Le Tableau du n° **60** montre que

$$\mathfrak{M}'_2 = \mathfrak{N}'_2 = 0.$$

Soit une décomposition $\mathfrak{N}'_1$

$$N = x^2 + y^2 + z^2 + (5t)^2.$$

Le Tableau du n° **60** montre que les trois nombres (ou une de leurs permutations)

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2$$

sont respectivement congrus (mod 5) aux trois nombres

$$1, \quad -1, \quad 1.$$

Par suite, x, y, z sont toujours (mod 5) une des 24 combinaisons

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 1.$$

Effectuons maintenant sur l'ensemble des $\mathfrak{N}'_1$ la transformation (13), (14).

On constate [1] que les décompositions obtenues sont des $\mathfrak{M}'_1$, et par suite, des $\mathfrak{M}'_1$ différentes. Mais on ne sait pas si ce sont *tous* les $\mathfrak{M}'_1$.

Donc

$$2\mathfrak{N}'_1 = \alpha\mathfrak{M}'_1 \tag{15}$$

---

[1] Il semble que 192 vérifications soient nécessaires, mais elles se réduisent à 8.

avec

$$\alpha \leqq 1.$$

Partons maintenant d'une décomposition $\mathcal{N}'_3$,

$$(\mathcal{N}'_3) \qquad N = x^2 + (5y)^2 + (5z)^2 + (5t)^2.$$

Le Tableau du n° **60** montre que x^2 ne peut qu'être congru à 1 (mod 5); donc

$$x \equiv \pm 1 \pmod 5.$$

Donc, la transformation du n° **61** fait correspondre deux $\mathcal{M}'_0$ différentes à chaque $\mathcal{N}'_3$. Mais comme on n'est pas sûr d'avoir tous les $\mathcal{M}'_0$, nous écrirons

$$(16) \qquad 2\,\mathcal{N}'_3 = \beta\,\mathcal{M}'_0,$$

avec

$$\beta \leqq 1.$$

Prenons enfin une décomposition $\mathcal{N}'_0$,

$$N = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

Le Tableau du n° **60** montre que

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad t^2$$

ne peuvent avoir que les valeurs

$$-1, \quad -1, \quad -1, \quad -1 \pmod 5;$$

donc

$$x, \quad y, \quad z, \quad t$$

ont les valeurs

$$\pm 2, \quad \pm 2, \quad \pm 2, \quad \pm 2 \pmod 5.$$

On vérifie ([1]) alors que la transformation du n° **61** conduit, par la formule (13), à des $\mathcal{M}'_3$ et à des $\mathcal{M}'_0$, par la formule (14), également à des $\mathcal{M}'_0$ et à des $\mathcal{M}'_3$ et cela de telle manière que, si le groupe (x, y, z, t) donne par (13) une $\mathcal{M}'_3$, il donne par (14) une $\mathcal{M}'_0$ et que, s'il donne

---

([1]) 6 vérifications suffisent.

par (13) une $\mathfrak{M}'_0$, il donne par (14) une $\mathfrak{M}'_3$. Ces $\mathfrak{M}'_0$ et $\mathfrak{M}'_3$ sont d'ailleurs différentes, mais on n'est pas sûr d'avoir tous les $\mathfrak{M}'_3$ et tous les les $\mathfrak{M}'_0$.

Donc

$$2\,\mathfrak{N}'_0 = \gamma\,\mathfrak{M}'_3 + \delta\,\mathfrak{M}'_0, \tag{17}$$

avec

$$\gamma \leqq 1$$
$$\delta \leqq 1.$$

Comme une décomposition $\mathfrak{N}'$ ne peut être qu'une $\mathfrak{N}'_1$, une $\mathfrak{N}'_3$ ou une $\mathfrak{N}'_0$ et que les formules (13), (14) permettent de passer des $\mathfrak{N}'$ à *tous* les $\mathfrak{M}'$, il en résulte que l'opération que nous venons de faire nous a certainement donné *tous* les $\mathfrak{M}'$, puisque nous avons opéré sur tous les $\mathfrak{N}'$. Par suite, nous avons obtenu *tous* les $\mathfrak{M}'_1$, *tous* les $\mathfrak{M}'_3$ et *tous* les $\mathfrak{M}'_0$.

Dès lors, la considération des formules (15), (16) et (17) montre qu'on n'obtient les $\mathfrak{M}'_1$ que par l'opération qui a conduit à la formule (15). On les a donc *tous* par cette opération et $\alpha = 1$.

De même, on a tous les $\mathfrak{M}'_3$ par l'opération qui a conduit à la formule (17) et par suite $\gamma = 1$.

Enfin, on n'a les $\mathfrak{M}'_0$ que par les opérations qui ont conduit aux formules (16) et (17) et comme on ne peut les obtenir en tout qu'une fois et qu'on les a tous obtenus, les $\mathfrak{M}'_0$ qui figurent formule (16) diffèrent de ceux qui figurent formule (17). Donc

$$\beta + \delta = 1.$$

Par suite,

$$2\,\mathfrak{N}'_1 = \mathfrak{M}'_1,$$
$$2\,\mathfrak{N}'_3 + 2\,\mathfrak{N}'_0 = \mathfrak{M}'_0 + \mathfrak{M}'_3,$$
$$\mathfrak{N}'_0 = \mathfrak{M}'_3.$$

On sait d'ailleurs que

$$\mathfrak{N}'_2 = \mathfrak{M}'_2 = 0,$$
$$\mathfrak{N}'_4 = \mathfrak{M}'_4 = 0$$

et par suite, par l'équation (4),

$$\mathfrak{N}'_0 + \mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_3 = 8\mathfrak{A}.$$

Enfin, les équations (1) et (2) donnent

$$2\,\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_2.$$

Les autres cas où N est impair se traitent par des raisonnements tout à fait analogues que nous ne reproduirons pas. Nous nous bornerons à indiquer les résultats.

63. $N \equiv \pm 1 \pmod{10}$:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{N}'_0 = \mathfrak{M}'_3,\\
2\,\mathfrak{N}'_1 = \mathfrak{M}'_1,\\
2\,\mathfrak{N}'_3 = \mathfrak{M}'_0 - \mathfrak{M}'_3,\\
\mathfrak{N}'_2 = \mathfrak{M}'_2 = 0,\\
\mathfrak{N}'_4 = \mathfrak{M}'_4 = 0,\\
\mathfrak{N}'_0 + \mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_3 = 8\,\mathfrak{A},\\
2\,\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{N}_2.
\end{gathered}$$

$N \equiv \pm 3 \pmod{10}$:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{N}'_0 = \mathfrak{M}'_1,\\
2\,\mathfrak{N}'_1 = \mathfrak{M}'_0 - \mathfrak{M}'_1,\\
2\,\mathfrak{N}'_2 = \mathfrak{M}'_2,\\
\mathfrak{N}'_3 = \mathfrak{M}'_3 = 0,\\
\mathfrak{N}'_4 = \mathfrak{M}'_4 = 0,\\
\mathfrak{N}'_0 + \mathfrak{N}'_1 + \mathfrak{N}'_2 = 8\,\mathfrak{A},\\
\mathfrak{N}_3 = 0.
\end{gathered}$$

$N \equiv 5 \pmod{10}$:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{N}'_0 = \mathfrak{M}'_2,\\
2\,\mathfrak{N}'_2 = \mathfrak{M}'_2 - \mathfrak{M}'_0,\\
\mathfrak{M}'_3 = \mathfrak{N}'_3 = \mathfrak{N}'_1 = \mathfrak{M}'_1 = 0,\\
\mathfrak{N}'_0 + \mathfrak{N}'_2 + 8\,\frac{\mathfrak{A} - 6\,\mathfrak{C}}{25} = 8\,\mathfrak{A},\\
\mathfrak{N}_3 = \frac{8}{25}(\mathfrak{A} - 6\,\mathfrak{C}) = 2(5^{\nu-1} - 1)\,\mathrm{U},\\
\mathfrak{N}_2 = \frac{\mathfrak{N}'_2}{6} + \frac{8}{25}(\mathfrak{A} - 6\,\mathfrak{C}) = \frac{\mathfrak{N}'_2}{6} + 2(5^{\nu-1} - 1)\,\mathrm{U},\\
\mathfrak{N}_1 = \frac{\mathfrak{N}'_2}{2} + \frac{8}{25}(\mathfrak{A} - 6\,\mathfrak{C}) = \frac{\mathfrak{N}'_2}{2} + 2(5^{\nu-1} - 1)\,\mathrm{U},\\
3\,\mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_1 = \frac{16}{25}(\mathfrak{A} - 6\,\mathfrak{C}) = 4(5^{\nu-1} - 1)\,\mathrm{U}.
\end{gathered}$$

64. Supposons N *pair*.

Alors les $\mathfrak{M}_\alpha$ n'existent plus.

Soit une décomposition

$$N = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \qquad \mathfrak{M}_0.$$

Appliquons encore les formules (13) et (14) et proposons-nous de rechercher ce qu'elles donnent.

N étant pair, zéro, deux ou quatre des quantités x, y, z, t sont impaires et par suite les quantités

$$\pm x \pm y \pm z \pm t$$

sont paires.

Donc les décompositions (13) et (14) sont des $\mathfrak{M}$. On peut écrire

$$(18)\quad N = \left(\frac{y+z+t-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+z+t-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y+t-z}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y+z-t}{2}\right)^2,$$

$$(19)\quad N = \left(\frac{y+z-t-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+z-t-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y-t-z}{2}\right)^2 + \left(\frac{-x-y-z-t}{2}\right)^2.$$

Les décompositions (18) sont toutes distinctes. Les décompositions (19) sont également toutes distinctes.

Il en résulte qu'une décomposition (18) est identique à une certaine décomposition (19) et inversement.

Il sera donc inutile d'envisager simultanément les deux transformations (18), (19). Une seule suffira : la transformation (18), par exemple.

65. Supposons $N \equiv 6 \pmod{10}$.

Soit une décomposition

$$N = x^2 + (5y)^2 + (5z)^2 + (5t)^2, \qquad \mathfrak{M}'_3.$$

x ne peut être congru qu'à $\pm 1 \pmod 5$.

Par suite, la décomposition (18) sera une $\mathfrak{M}'_0$. Mais rien ne dit qu'on obtienne ainsi tous les $\mathfrak{M}'_0$. En tout cas, les $\mathfrak{M}'_0$ obtenus seront tous différents (n° **61**).

Nous écrirons donc

$$\mathfrak{N}'_3 = \alpha\,\mathfrak{N}'_0 \tag{20}$$

avec

$$\alpha \leqq 1$$

et nous appellerons (X, Y, Z, T) la décomposition $\mathfrak{N}'_0$ déduite par (18) de la décomposition (x, y, z, t) qui est une $\mathfrak{N}'_3$.

Partons maintenant d'une $\mathfrak{N}'_1$. On trouve de même

$$\mathfrak{N}'_1 = \beta\,\mathfrak{N}'_1. \tag{21}$$

Donc $\beta = 1$, puisque $\mathfrak{N}'_1$ n'est pas nul, quel que soit N.

Partons enfin d'une $\mathfrak{N}'_0$. Alors la transformation (18) donne tantôt une $\mathfrak{N}'_3$, tantôt une $\mathfrak{N}'_0$:

$$\mathfrak{N}'_0 = \gamma\,\mathfrak{N}'_3 + \delta\,\mathfrak{N}'_0 \tag{22}$$

avec

$$\gamma \leqq 1, \qquad \delta \leqq 1.$$

Soit (X′, Y′, Z′, T′) la décomposition $\mathfrak{N}'_0$ déduite ainsi de la décomposition (x, y, z, t) qui est une $\mathfrak{N}'_0$.

En réunissant ces trois opérations, on doit avoir obtenu tous les $\mathfrak{N}'$, puisque $\mathfrak{N}'_2$ et $\mathfrak{N}'_4$ sont nuls. On doit d'ailleurs les avoir obtenues ainsi une fois seulement.

Comme on n'obtient les $\mathfrak{N}'_3$ que dans la troisième opération, on les obtient toutes ainsi. Donc $\gamma = 1$.

Par suite, les équations (20) et (22) donnent

$$\alpha + \delta = 1.$$

Je dis que

$$\alpha = \delta.$$

En effet, je vais prouver qu'à toute décomposition (X, Y, Z, T) correspond une décomposition (X′, Y′, Z′, T′) et réciproquement. Dès lors, les décompositions $\mathfrak{N}'_0$ obtenues par l'opération qui a conduit à l'équation (22) et les décompositions $\mathfrak{N}'_0$ obtenues par l'opération qui a conduit à l'équation (20) se correspondant chacune à chacune, il faudra que

$$\alpha \mathfrak{M}'_0 = \delta \mathfrak{M}'_0,$$

d'où

$$\alpha = \delta.$$

Je dis que, si (X, Y, Z, T) est déduit par (18) d'une décomposition $\mathfrak{M}'_3$, (— X, — Y, — Z, T) ne peut être déduit d'une $\mathfrak{M}'_3$ par (18). Donc (— X, — Y, — Z, T) sera déduit d'un $\mathfrak{M}'_0$ par (18).

En effet, il suffit de montrer qu'il est impossible que

$$\begin{aligned}
y + z + t - x &= -(y' + z' + t' - x'),\\
x + z + t - y &= -(x' + z' + t' - y'),\\
x + y + t - z &= -(x' + y' + t' - z'),\\
x + y + z - t &= x' + y' + z' - t'.
\end{aligned}$$

On en déduirait, en effet,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{y' + z' - x' - t'}{2},\\
y &= \frac{x' + z' - y' - t'}{2},\\
z &= \frac{x' + y' - t' - z'}{2},\\
t &= \frac{-x' - y' - z' - t'}{2}.
\end{aligned}$$

Or, les seconds membres sont justement les quatre termes de la transformation (19) appliquée à (x', y', z', t'). Or, (x', y', z', t') étant une $\mathfrak{M}'_3$, la décomposition (19) est évidemment une $\mathfrak{M}'_0$. (x, y, z, t) serait donc une $\mathfrak{M}'_0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc (— X, — Y, — Z, T) sera déduit d'une $\mathfrak{M}'_0$ par (18) : c'est une (X′, Y′, Z′, T′).

Considérons inversement une (X′, Y′, Z′, T′), provenant d'une $\mathfrak{M}'_0$ par (18). Je dis que la décomposition (— X′, — Y′, — Z′, T′) ne saurait en provenir.

Si, en effet, on avait

$$\begin{aligned}
y+z+t-x &= -(y'+z'+t'-x'),\\
x+z+t-y &= -(x'+z'+t'-y'),\\
x+y+t-z &= -(x'+y'+t'-z'),\\
x+y+z-t &= x'+y'+z'-t',
\end{aligned}$$

on en déduirait

$$\begin{aligned}
x &= \frac{y'+z'-x'-t'}{2},\\
y &= \frac{x'+z'-y'-t'}{2},\\
z &= \frac{x'+y'-t'-z'}{2},\\
t &= \frac{-x'-y'-z'-t'}{2}.
\end{aligned}$$

On vérifie aisément, (x', y', z', t') étant une $\mathcal{N}'_0$, que si

$$\left(-\frac{y'+z'+t'-x'}{2},\ -\frac{x'+z'+t'-y'}{2},\ -\frac{x'+y'+t'-z'}{2},\ \frac{x'+y'+z'-t'}{2}\right)$$

est aussi une $\mathcal{N}'_0$, il ne saurait en être de même de

$$\left(\frac{y'+z'-x'-t'}{2},\ \frac{x'+z'-y'-t'}{2},\ \frac{x'+y'-t'-z'}{2},\ \frac{-x'-y'-z'-t'}{2}\right)$$

ni par suite de (x, y, z, t), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc (X', Y', Z', T') et $(-X', -Y'. -Z', T')$ ne peuvent provenir simultanément des décompositions $\mathcal{N}'_0$: donc $(-X', -Y', -Z', T')$ est une (X, Y, Z, T).

Donc

$$\alpha = \delta,$$

et comme

$$\alpha + \delta = 1,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \qquad = \frac{1}{2};$$

il en résulte que

$$\mathcal{N}'_0 = 2\,\mathcal{N}'_3.$$

66. *Remarque.* — Appliquons la transformation (18) à la décomposition $\mathcal{N}'_3(x, y, z, t)$. On obtient une décomposition $\mathcal{N}'_0(X, Y, Z, T)$. Appliquons, au contraire, la transformation (19). Nous obtenons encore une décomposition $\mathcal{N}'_0(X', Y', Z', T')$.

Je dis que l'ensemble des $\mathcal{N}'_0(X, Y, Z, T)$ est différent de l'ensemble des $\mathcal{N}'_0(X', Y', Z', T')$. Il suffit pour cela de montrer que les équations

$$\begin{aligned} y+z+t-x &= y'+z'-t'-x', \\ x+z+t-y &= x'+z'-t'-y', \\ x+y+t-z &= x'+y'-t'-z', \\ x+y+z-t &= -x'-y'-z'-t' \end{aligned}$$

sont incompatibles.

On a vu qu'on en déduit

$$\begin{aligned} -2x &= y'+z'+t'-x', \\ -2y &= x'+z'+t'-y', \\ -2z &= x'+y'+t'-z', \\ 2t &= x'+y'+z'-t'; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} -x &= \frac{y'+z'+t'-x'}{2}, \\ -y &= \frac{x'+z'+t'-y'}{2}, \\ -z &= \frac{x'+y'+t'-z'}{2}, \\ t &= \frac{x'+y'+z'-t'}{2}. \end{aligned}$$

Or les seconds membres sont des $\mathcal{N}'_0$ puisque (x', y', z', t') est une $\mathcal{N}'_3$. On en déduirait alors que $(-x, -y, -z, t)$ est une $\mathcal{N}'_0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi, *l'ensemble des transformations* (18), (19), *appliquées à la totalité des* $\mathcal{N}'_3$, *donne la totalité des* $\mathcal{N}'_0$ *et ne donne qu'une seule fois chaque décomposition* $\mathcal{N}'_0$.

67. Ainsi

$$\mathcal{N}'_0 = 2\mathcal{N}'_3;$$

d'ailleurs

$$\mathcal{N}'_2 = 0.$$

On en déduit, par les équations (1), (2), (3) et (4),

$$\mathcal{N}_1 = 3\mathfrak{A} - 3\mathfrak{A}_1 = 6\,\mathrm{U},$$
$$\mathcal{N}_2 = 2\,\mathcal{N}_3.$$

Les autres cas de N pair se traitent par des raisonnements tout à fait analogues que nous ne reproduirons pas.

Nous nous bornerons à énoncer les résultats.

$N \equiv \pm 4 \pmod{10}$:

$$\mathcal{N}'_0 = 2\,\mathcal{N}'_3,$$
$$\mathcal{N}'_2 = 0,$$
$$\mathcal{N}_1 = 3\mathfrak{A} - 3\mathfrak{A}_1 = 6\,\mathrm{U},$$
$$\mathcal{N}_2 = 2\,\mathcal{N}_3.$$

$N \equiv \pm 2 \pmod{10}$:

$$\mathcal{N}'_0 = 2\,\mathcal{N}'_1,$$
$$\mathcal{N}'_3 = 0,$$
$$2\,\mathcal{N}_1 - 5\,\mathcal{N}_2 = 2\mathfrak{A} - 2\,\mathfrak{A} = 4\,\mathrm{U},$$
$$\mathcal{N}_3 = 0.$$

$N \equiv \pm 0 \pmod{10}$:

$$\mathcal{N}'_1 = \mathcal{N}'_3 = 0,$$
$$\mathcal{N}'_4 = \frac{12}{25}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1) - \frac{72}{25}(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1) = 6(5^{\nu-1} - 1)\,\mathrm{U},$$
$$\mathcal{N}'_0 = 2\,\mathcal{N}'_2;$$

or

$$\mathcal{N}'_0 + \mathcal{N}'_2 + \mathcal{N}'_4 = 12\mathfrak{A} - 12\mathfrak{A}_1 = 6(5^{\nu+1} - 1)\,\mathrm{U},$$

donc

$$\mathcal{N}'_0 = \frac{192}{25}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1) + \frac{48}{25}(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1) = 96.5^{\nu-1}\,\mathrm{U},$$
$$\mathcal{N}'_2 = \frac{96}{25}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1) - \frac{24}{25}(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1) = 48.5^{\nu-1}\,\mathrm{U},$$
$$\mathcal{N}_3 = \frac{12}{25}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1) - \frac{72}{25}(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1) = 6(5^{\nu-1} - 1)\,\mathrm{U},$$
$$\mathcal{N}_2 = \frac{28}{25}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1) - \frac{68}{25}(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1) = (14.5^{\nu-1} - 6)\,\mathrm{U},$$
$$\mathcal{N}_1 = \frac{12}{5}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1) - \frac{12}{5}(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1) = 6(5^{\nu} - 1)\,\mathrm{U},$$

68. *Relations entre* $\mathfrak{N}(\mathrm{N})$ *et* $\mathfrak{N}(4\mathrm{N})$. — 1° Cas de N *pair :*

On déduit immédiatement les décompositions

$$4\mathrm{N} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \qquad \mathfrak{N}'(4\mathrm{N}) \tag{23}$$

des décompositions

$$\mathrm{N} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2. \qquad \mathfrak{N}'(\mathrm{N}),$$

Résolvons, en effet, la congruence

$$0 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \pmod 8,$$

on ne trouve que les solutions

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 0+0+0+0, \\ &\equiv 0+0+4+4, \\ &\equiv 4+4+4+4. \end{aligned}$$

On voit donc que x, y, z, t sont pairs dans (23).

Donc

$$\begin{aligned} 4\mathrm{N} &= (2x')^2 + (2y')^2 + (2z')^2 + (2t')^2, \\ \mathrm{N} &= \quad x'^2 \quad + \quad y'^2 \quad + \quad z'^2 \quad + \quad t'^2; \end{aligned}$$

donc

$$\mathfrak{N}'_\alpha(4\mathrm{N}) = \mathfrak{N}'_\alpha(\mathrm{N}).$$

Enfin, les équations (1), (2), (3) et (4) donnent

$$\mathfrak{N}_\alpha(\mathrm{N}) = \mathfrak{N}_\alpha(4\mathrm{N}).$$

2° Cas de N *impair :*

Supposons $\mathrm{N} \equiv 1 \pmod{10}$.

Prenons l'équation

$$\mathrm{N} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \qquad \mathfrak{N}(\mathrm{N}), \tag{24}$$

puis

$$4\mathrm{N} = x'^2 + y'^2 + z'^2 + t'^2, \qquad \mathfrak{N}(4\mathrm{N}). \tag{25}$$

Remarquons que les $\mathfrak{N}(\mathrm{N})$ sont des $\mathfrak{N}(4\mathrm{N})$ particulières. Pour approfondir la question, revenons aux raisonnements des n^os^ **61** et **62**.

Considérons donc les trois équations

$$(26)\quad 4N = (2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2 + (2t)^2,$$
$$(27)\quad 4N = (y+z+t-x)^2 + (x+z+t-y)^2 + (x+y+t-z)^2 + (x+y+z-t)^2,$$
$$(28)\quad 4N = (y+z-t-x)^2 + (x+z-t-y)^2 + (x+y-t-z)^2 + (-x-y-z-t)^2.$$

Nous avons montré que les décompositions (27) et (28) sont *toutes* les décompositions $\mathfrak{M}$.

Il est d'ailleurs évident que les décompositions (26) représentent toutes les décompositions (25) où x', y', z' et t' sont pairs.

Supposons que dans (24) un carré et un seul soit multiple de 5. Alors (26) est une $\mathfrak{N}'_1(4N)$, ainsi d'ailleurs que (27) et (28), comme cela résulte du n° **62**.

Donc

$$(29)\qquad 3\,\mathfrak{N}'_1(N) = \alpha\,\mathfrak{N}'_1(4N),$$

car on n'a peut-être pas obtenu ainsi tous les $\mathfrak{N}'_1(4N)$;

$$\alpha \leqq 1.$$

Prenons les décompositions (24) où trois carrés et trois seulement sont multiples de 5.

On en déduit, (26) étant alors une $\mathfrak{N}'_3(4N)$ et (27), (28) étant des $\mathfrak{N}'_0(4N)$;

$$(30)\qquad \mathfrak{N}'_3(N) = \beta\,\mathfrak{N}'_3(4N),$$
$$(31)\qquad 2\,\mathfrak{N}'_3(N) = \gamma\,\mathfrak{N}'_0(4N)$$

avec

$$\beta \leqq 1, \qquad \gamma \leqq 1.$$

Enfin, supposons que dans (25) aucun des carrés ne soit nul (mod 5). Il en résulte

$$(32)\qquad 3\,\mathfrak{N}'_0(N) = \delta\,\mathfrak{N}'_0(4N) + \varepsilon\,\mathfrak{N}'_3(4N)$$

avec

$$\delta \leqq 1, \qquad \varepsilon \leqq 1.$$

Ces trois opérations donnent d'ailleurs *tous* les $\mathcal{N}'(4\text{N})$ et les donnent sans répétition.

Comme on n'a obtenu des $\mathcal{N}'_1(4\text{N})$ que dans la première opération, on les a *tous* obtenus ainsi.

Donc

$$\alpha = 1$$

et

$$\mathcal{N}'_1(4\text{N}) = 3\,\mathcal{N}'_1(\text{N}).$$

D'où, en prenant aux $\mathcal{N}$,

$$3[3\,\mathcal{N}_3(\text{N}) - \mathcal{N}_1(\text{N})] = 3\,\mathcal{N}_3(4\text{N}) - \mathcal{N}_1(4\text{N}).$$

La méthode s'applique aux autres cas. Nous ne donnerons que les résultats.

69. $\text{N} \equiv \pm 1 \pmod{5}$:

$$3[3\,\mathcal{N}_3(\text{N}) - \mathcal{N}_1(\text{N})] = 3\,\mathcal{N}_3(4\text{N}) - \mathcal{N}_1(4\text{N}),$$

$\text{N} \equiv \pm 3 \pmod{5}$:

$$3\,\mathcal{N}_2(\text{N}) = \mathcal{N}_2(4\text{N}).$$

D'ailleurs, si N est pair,

$$\mathcal{N}_1(\text{N}) = \mathcal{N}_1(4\text{N}),$$
$$\mathcal{N}_2(\text{N}) = \mathcal{N}_2(4\text{N}),$$
$$\mathcal{N}_3(\text{N}) = \mathcal{N}_3(4\text{N}).$$

III. — Relations entre les $\mathfrak{L}$ et les $\mathcal{M}$.

70. Supposons N *impair*.

Considérons l'équation

$$4\text{N} = 5x^2 + y^2 + z^2 + 25t^2, \qquad \mathfrak{L}_1(\text{N})$$

et résolvons la congruence

$$4 \equiv 5x^2 + y^2 + z^2 + 25t^2 \pmod{8}.$$

On ne trouve que les solutions

$$\begin{aligned} 4 &\equiv 0+0+4+0, \\ &\equiv 4+0+0+0, \\ &\equiv 4+4+4+0, \\ &\equiv 4+4+0+4, \\ &\equiv 0+4+4+4, \\ &\equiv 0+0+0+4, \end{aligned}$$

qui montrent que x, y, z, t ne peuvent qu'être pairs. On obtiendrait le même résultat pour

$$4N = 5x^2 + y^2 + 25z^2 + 25t^2, \qquad \mathcal{P}_2(4N).$$

Mais de

$$4N = 5(2x')^2 + (2y')^2 + (2z')^2 + 25(2t')^2$$

on tire

$$N = \;\; 5x'^2 \;\; + \;\; y'^2 \;\; + \;\; z'^2 \;\; + 25t'^2$$

et réciproquement.

Donc

$$\mathcal{P}_1(N) = \mathcal{P}_1(4N)$$

et de même

$$\mathcal{P}_2(N) = \mathcal{P}_2(4N).$$

Supposons N *pair*.

Résolvons la congruence

$$0 \equiv 5x^2 + y^2 + z^2 + 25t^2 \qquad (\text{mod } 8).$$

On ne trouve que les solutions (mod 8)

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 0+4+4+0, \\ &\equiv 0+4+0+4, \\ &\equiv 0+0+0+0, \\ &\equiv 4+0+4+0, \\ &\equiv 4+0+0+4, \\ &\equiv 5+1+1+1. \end{aligned}$$

Donc x, y, z, t sont, ou tous pairs, ou tous impairs.

Mais, s'ils sont tous impairs, la décomposition

$$4N = 5x^2 + y^2 + z^2 + 25t^2$$

est une $\mathcal{A}_1(N)$.

S'ils sont tous pairs, la décomposition

$$4N = 5(2x')^2 + (2y')^2 + (2z')^2 + 25(2t')^2$$

correspond à

$$N = 5x'^2 + y'^2 + z'^2 + 25t'^2$$

qui est une $\mathcal{P}_1(N)$.

Réciproquement, à l'ensemble des décompositions $\mathcal{P}_1(N)$, $\mathcal{Q}_1(N)$ correspond évidemment les décompositions $\mathcal{P}_1(4N)$

Donc

$$\mathcal{P}_1(4N) = \mathcal{P}_1(N) + \mathcal{Q}_1(N),$$

de même

$$\mathcal{P}_2(4N) = \mathcal{P}_2(N) + \mathcal{Q}_2(N).$$

71. Ainsi $N \equiv \pm 1 \pmod{10}$:

$$\mathcal{P}_2(N) = \mathcal{P}_2(4N);$$

$N \equiv \pm 3 \pmod{10}$:

$$\mathcal{P}_1(N) = \mathcal{P}_1(4N);$$

$N \equiv \pm 2 \pmod{10}$:

$$\mathcal{P}_1(N) + \mathcal{Q}_1(N) = \mathcal{P}_1(4N);$$

$N \equiv \pm 4 \pmod{10}$:

$$\mathcal{P}_2(N) + \mathcal{Q}_2(N) = \mathcal{P}_2(4N).$$

IV. — Étude des décompositions $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$.

72. *Calcul de* $\mathcal{C}$. — Partons de la formule rappelée au n° **26** :

$$\eta_1^2 \theta_1^2 \frac{H^2}{\Theta^2} = 8 \sum_1 m \frac{q^m}{1-q^{2m}} - 8 \sum_1 \frac{m q^m}{1-q^{2m}} \cos 2mx.$$

Remplaçons x par $\frac{\pi}{5}$, puis par $\frac{2\pi}{5}$ et ajoutons les deux équations obtenues. Les formules (VIII) (Chap. III) donnent

$$5\sqrt{\eta_1\theta_1}\sqrt{\bar\eta_1\bar\theta_1}\left[\bar\theta_1\eta_1 + \theta_1\bar\eta_1\right] = 16 \sum \frac{m q^m}{1-q^{2m}} - 8 \sum \frac{m q^m}{1-q^{2m}} \left[\cos\frac{4m\pi}{5} + \cos\frac{2m\pi}{5}\right]$$

ou (n° **23**)

$$\frac{5}{2}\eta_1\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\eta_1\left(q^{\frac{5}{2}}\right)\left[\overline{\theta}_1\eta_1+\theta_1\overline{\eta}_1\right]=16\sum\frac{m\,q^m}{1-q^{2m}}-4\sum\frac{m\,q^m}{1-q^{2m}}\left\{-1+5\left[1-\left(\frac{m}{5}\right)^2\right]\right\}$$
$$=20\sum m\left(\frac{m}{5}\right)^2\frac{q^m}{1-q^{2m}}.$$

Égalons les coefficients de q^{M} dans les deux membres.

Au premier membre, il faut poser :

$$8\mathrm{M}=(2x+1)^2+5(2y+1)^2+10(2z)^2\qquad+2(2t+1)^2,$$

puis

$$8\mathrm{M}=(2x+1)^2+5(2y+1)^2+10(2z+1)^2+2(2t)^2.$$

Supposons que, dans Θ, N soit pair. On voit tout de suite que Θ est la somme des deux nombres de décompositions précédentes, si l'on pose

$$\mathrm{N}=2\mathrm{M}.$$

Dans le second membre, il faut poser

$$\mathrm{M}=m(2\rho+1)$$

et le coefficient de q^{M} est

$$20\sum\left(\frac{m}{5}\right)^2 m,$$

m étant un diviseur de M à conjugué impair.

Cette somme est encore (n° **5**)

$$20\sum\left(\frac{\delta'}{5}\right)^2\delta'.$$

Ainsi

$$\frac{5}{2}\Theta=20\sum\left(\frac{\delta'}{5}\right)^2\delta';$$

donc (n° **8**)

$$\Theta=3\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_1=2^{\mu+2}\mathrm{U}.$$

On a supposé N pair. Si N est impair Θ est évidemment nul, car la congruence

$$4\equiv(2x+1)^2+5(2y+1)^2+10z^2+2t^2\qquad(\mathrm{mod}\ 8)$$

est impossible.

73. *Calcul de* $\mathcal{S}$. — Partons de la formule rappelée au n° **26** :

$$\theta^2\theta_1^2\frac{H^2}{H_1^2}=\frac{1}{\cos^2 x}-1+8\Sigma(-1)^m\frac{m\,q^{2m}}{1-q^{2m}}-8\Sigma(-1)^m\frac{m\,q^{2m}}{1-q^{2m}}\cos 2mx.$$

Faisons-y $x=\frac{\pi}{5}$, puis $x=\frac{2\pi}{5}$ et ajoutons.

Les formules (VIII) (Chap. III) donnent

$$\begin{aligned}5\sqrt{\theta_1\theta}\sqrt{\bar\theta_1\bar\theta}[\theta_1\bar\theta+\theta\bar\theta_1]=&\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{5}}+\frac{1}{\cos^2\frac{2\pi}{5}}\\&-2+16\Sigma(-1)^m\frac{m\,q^{2m}}{1-q^{2m}}\\&-8\Sigma(-1)^m\frac{m\,q^{2m}}{1-q^{2m}}\left(\cos 2m\frac{\pi}{5}+\cos 4m\frac{\pi}{5}\right)\end{aligned}$$

ou (n° **23**)

$$\begin{aligned}&5\,\theta(q^2)\,\theta(q^{10})[\theta_1\theta(q^5)+\theta\,\theta_1(q^5)]\\&=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{5}}+\frac{1}{\cos^2\frac{2\pi}{5}}-2+20\Sigma(-1)^m\left(\frac{m}{5}\right)^2\frac{m\,q^{2m}}{1-q^{2m}}.\end{aligned}$$

Égalons les coefficients de q^M dans les deux membres.

Il faut poser, au premier membre,

$$M=10x^2+2y^2+5z^2+t^2;$$

et, pour que le coefficient ne soit pas nul, il faut que t et z soient de même parité, c'est-à-dire M pair $=2N$.

Le coefficient est alors

$$2\Sigma(-1)^{x+y+z},$$

puisque z et t sont de même parité.

D'ailleurs

$$\begin{aligned}2N&\equiv 2x^2+2y^2+2t^2 &&(\text{mod } 4),\\ N&\equiv x+y+t &&(\text{mod } 2),\end{aligned}$$

et le coefficient devient

$$2\Sigma(-1)^N=2(-1)^N\mathcal{S}(N).$$

Au second membre, on posera

$$2N = M = 2\mu(1+\rho)$$

et le coefficient est

$$4\Sigma\mu(-1)^{\mu}\left(\frac{\mu}{5}\right)^2 = 4\Sigma d'(-1)^{d}\left(\frac{d'}{5}\right)^2.$$

Ainsi

$$\mathcal{S} = 2(-1)^{N}\Sigma(-1)^{d}\,d'\left(\frac{d'}{5}\right)^2 = 2(-1)^{N}\mathfrak{C}_1 = 2(-1)^{N}(2^{\mu+1}-3)\mathrm{U}.$$

74. *Relations entre les $\mathcal{S}$ et les $\mathfrak{S}$.* — Considérons les décompositions $\mathcal{S}(N)$, c'est-à-dire les représentations

$$2N = 10x^2 + y^2 + 5z^2 + 2t^2, \qquad \mathcal{S}$$
$$2N = 10x^2 + 25y^2 + 5z^2 + 2t^2, \qquad \mathcal{S}_1$$
$$2N = 10x^2 + y^2 + 5z^2 + 50t^2, \qquad \mathcal{S}_2$$

Considérons $y^2 + 2t^2$.

On ne peut avoir dans $\mathcal{S}$, pour y^2 et t^2, que les combinaisons (mod 5)

$$\left.\begin{array}{ccl}
1 & 1 & \left.\begin{array}{l}\\ \end{array}\right\} N \equiv -1 \\
0 & -1 & \\
-1 & -1 & \left.\begin{array}{l}\\ \end{array}\right\} N \equiv 1 \\
0 & 1 & \\
1 & -1 & \left.\begin{array}{l}\\ \end{array}\right\} N \equiv 2 \\
-1 & 0 & \\
-1 & 1 & \left.\begin{array}{l}\\ \end{array}\right\} N \equiv -2 \\
1 & 0 & \\
0 & 0 & N \equiv 0
\end{array}\right\} \pmod 5.$$

Ainsi donc, si $N \equiv \pm 1 \pmod 5$,

$$\mathcal{S}_2 = 0, \qquad \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{H};$$

si $N \equiv \pm 2$,

$$\mathcal{S}_1 = 0, \qquad \mathcal{S} = \mathcal{S}_2 + \mathcal{H};$$

si $N \equiv 0$,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2.$$

De même, si $N \equiv \pm 1 \pmod{5}$,

$$\mathcal{E}_1 = 0, \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 + \mathcal{I};$$

si $N \equiv \pm 2 \pmod{5}$,

$$\mathcal{E}_2 = 0, \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{I};$$

si $N \equiv 0 \pmod{5}$,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2.$$

75. *Expression de* $\mathcal{E}_\alpha(2N)$ ($\alpha = 1$ ou 2). — Supposons d'abord N *impair*, par exemple, congru à $3 \pmod{10}$.

Le nombre des décompositions $\mathcal{E}_2(2N)$ *est égal au double du nombre des décompositions* $\mathcal{S}(N)$ *où le nombre* t *n'est pas multiple de* 5.

Nous avons désigné ce dernier nombre par $\mathcal{H}(N)$ (nos **55** et **74**).

Ainsi

$$\mathcal{E}_2(2N) = 2\,\mathcal{H}(N).$$

Partons en effet de la décomposition (33)

$$(33) \qquad 2N = 10x^2 + y^2 + 5z^2 + 2t^2, \qquad \mathcal{H}(N).$$

On en déduit quatre décompositions :

$$(34) \quad 8N = (\ \ y + t + 5x)^2 + 2\left(\frac{y - 2t - 5z}{2}\right)^2 + 5(\ \ t - z - x)^2 + 10\left(\frac{y + z - 2x}{2}\right)^2,$$

$$(35) \quad 8N = (-y - t - 5x)^2 + 2\left(\frac{y - 2t - 5z}{2}\right)^2 + 5(\ \ t - z - x)^2 + 10\left(\frac{y + z - 2x}{2}\right)^2,$$

$$(36) \quad 8N = (\ \ y + t + 5x)^2 + 2\left(\frac{y - 2t - 5z}{2}\right)^2 + 5(-t + z + x)^2 + 10\left(\frac{y + z - 2x}{2}\right)^2,$$

$$(37) \quad 8N = (-y - t - 5x)^2 + 2\left(\frac{y - 2t - 5z}{2}\right)^2 + 5(-t + z + x)^2 + 10\left(\frac{y + z - 2x}{2}\right)^2.$$

Que peuvent être x, y, z, t assujettis à l'équation (33)?

x pourra être quelconque, mais y, z et t sont assujettis à la congruence

$$6 \equiv 5z^2 + y^2 + 2t^2 \pmod{10}.$$

De plus

$$t \not\equiv 0 \pmod{5}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} 6 &\equiv 0 + 4 + 2, \\ &\equiv 5 + 9 + 2; \end{aligned}$$

d'où les solutions

$$\begin{array}{lcll} z \equiv 0, 2, 4, 6, 8 & & z \equiv 1, 3, 5, 7, 9 & \\ y \equiv 2, 8 & \text{et} & y \equiv 3, 7 & \pmod{10}, \\ t \equiv 1, 4, 6, 9 & & t \equiv 1, 4, 6, 9 & \end{array}$$

dans lesquelles il faudra combiner de toutes les manières possibles les valeurs de z, y, t. On aura donc 80 solutions. Il suffit évidemment de se borner aux 16 solutions obtenues en combinant les valeurs de y et de t. On remarque, en effet, que si y est pair, z est un nombre pair quelconque et que si y est impair, z est un nombre impair quelconque. Les décompositions (34), (35), (36), (37) ont donc tous leurs termes entiers.

Précisons les parités de x, y, z, t.

Il faudra résoudre la congruence

$$2 \equiv 2x^2 + z^2 + y^2 + 2t^2 \pmod 4$$

qui a comme solutions

$$\begin{aligned} 2 &\equiv 0+0+0+2, \\ &\equiv 0+1+1+0, \\ &\equiv 2+1+1+2, \\ &\equiv 2+0+0+0; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{array}{lllll} x \equiv 0, & y \equiv 0, & z \equiv 0, & t \equiv 1 & \pmod 2; \\ x \equiv 0, & y \equiv 1, & z \equiv 1, & t \equiv 0 & \pmod 2; \\ x \equiv 1, & y \equiv 1, & z \equiv 1, & t \equiv 1 & \pmod 2; \\ x \equiv 1, & y \equiv 0, & z \equiv 0. & t \equiv 0 & \pmod 2. \end{array}$$

Dans tous les cas, les décompositions (34), (35), (36), (37) sont telles que les carrés, dont les coefficients sont 1 et 5, sont *impairs*.

Enfin, des deux nombres $y - 2t$ et $y + 2t$, il en est toujours un qui est multiple de 5.

Groupons les décompositions $\mathcal{H}$ quatre par quatre :

$$\begin{array}{rrcc} y & t & x & z \\ -y & t & x & z \\ y & -t & x & z \\ -y & -t & x & z \end{array}$$

C'est toujours possible puisque ni y, ni t ne peuvent être nuls.

Deux des quatre couples (y, t) donnent, pour la différence $y-2t$, un multiple de 5, savoir

$$(y, t) \quad \text{et} \quad (-y, -t),$$

ou bien

$$(-y, t) \quad \text{et} \quad (\ y, -t).$$

Pour ces deux couples, les décompositions (34), (35), (36), (37) sont des $\mathcal{S}_2(2\,\mathrm{N})$.

Je vais montrer que ces décompositions donnent le moyen d'obtenir les $\mathcal{S}_2(2\,\mathrm{N})$, sans répétition, ni omission. On pourra, dès lors, écrire

$$4\frac{\mathcal{H}}{2} = \mathcal{S}_2(2\,\mathrm{N}),$$

d'où

$$2\,\mathcal{H} = \mathcal{S}_2(2\,\mathrm{N}).$$

1° Deux décompositions (34) sont distinctes. Car les équations

$$\begin{aligned}
y + \ t + 5x &= y' + \ t' + 5x',\\
y - 2t - 5z &= y' - 2t' - 5z',\\
t - \ z - \ x &= t' - \ z' - \ x',\\
y + \ z - 2x &= y' + \ z' - 2x'
\end{aligned}$$

n'admettent que la solution

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = t'.$$

De même, deux décompositions (35) sont distinctes, etc.

2° Une décomposition (34) est différente d'une décomposition (35), par exemple.

Car les équations

$$\begin{aligned}
y + \ t + 5x &= -\ y' - \ t' - 5x'.\\
y - 2t - 5z &= \quad y' - 2t' - 5z',\\
t - \ z - \ x &= \quad t' - \ z' - x',\\
y + \ z - 2x &= \quad y' + \ z' - 2x',
\end{aligned}$$

donnent

$$4x = -(x' + y' + t'),$$

ce qui est impossible, puisque le second membre est *impair*.

La démonstration des autres cas ne présente pas de difficultés.

Les formules (34), (35), (36), (37) permettent donc de passer des décompositions $\mathcal{H}(\mathrm{N})$ à des décompositions $\mathcal{C}_2(2\mathrm{N})$, *toutes distinctes*.

3° On a bien toutes les décompositions $\mathcal{C}_2(2\mathrm{N})$.

Soit, en effet,

$$8\mathrm{N} = (2\mathrm{Y}+1)^2 + 2(5\mathrm{T})^2 + 5(2\mathrm{Z}+1)^2 + 10\mathrm{X}^2 \tag{38}$$

une décomposition $\mathcal{C}_2(2\mathrm{N})$. On l'a obtenue.

Il suffit de montrer qu'en posant

$$\left.\begin{aligned} y + \ t + 5x &= \varepsilon(2\mathrm{Y}+1) \\ y - 2t - 5z &= 10\mathrm{T} \\ t - z - x &= \eta(2\mathrm{Z}+1) \\ y + z - 2x &= 2\mathrm{X} \end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon = \pm 1,\ \eta = \pm 1),$$

on peut déterminer ε et η de manière que x, y, z, t aient des valeurs entières et que t ne soit pas divisible par 5.

On trouve :

$$8x = \varepsilon(2\mathrm{Y}+1) - \eta(2\mathrm{Z}+1) - 2\mathrm{X}, \tag{39}$$

$$4z = -5\mathrm{T} - \eta(2\mathrm{Z}+1) + \mathrm{X}, \tag{40}$$

$$4y = 5\mathrm{X} + 5\mathrm{T} + \varepsilon(2\mathrm{Y}+1), \tag{41}$$

$$8t = -10\mathrm{T} + 5\eta(2\mathrm{Z}+1) + \varepsilon(2\mathrm{Y}+1). \tag{42}$$

D'ailleurs, X, Y, Z, T sont assujettis à certaines conditions données par la résolution de la congruence

$$24 \equiv (2\mathrm{Y}+1)^2 + 2(5\mathrm{T})^2 + 5(2\mathrm{Z}+1)^2 + 10\mathrm{X}^2 \pmod{80}$$

qui n'a que les solutions

$$\begin{aligned} 24 &\equiv 9 + 0 + 5 + 10, \\ &\equiv 9 + 50 + 5 + 40, \\ &\equiv 9 + 40 + 45 + 10, \\ &\equiv 9 + 50 + 45 + 0, \\ &\equiv 49 + 40 + 5 + 10, \\ &\equiv 49 + 50 + 5 + 0, \\ &\equiv 49 + 0 + 45 + 10, \\ &\equiv 49 + 50 + 45 + 40; \end{aligned}$$

il en résulte que t n'est pas divisible par 5.

Posons

$$2Y+1=Y',$$
$$2Z+1=Z'.$$

On aura pour Y', Z', X, T les valeurs suivantes (mod 8) :

Y′	Z.	X.	T.
3 ou 5	1 ou 7	1, 3, 5 ou 7	0 ou 4
3 ou 5	1 ou 7	2 ou 6	1, 3, 5 ou 7
3 ou 5	3 ou 5	1, 3, 5 ou 7	2 ou 6
3 ou 5	3 ou 5	0 ou 4	1, 3, 5 ou 7
1 ou 7	1 ou 7	1, 3, 5 ou 7	2 ou 6
1 ou 7	1 ou 7	0 ou 4	1, 3, 5 ou 7
1 ou 7	3 ou 5	1, 3, 5 ou 7	0 ou 4
1 ou 7	3 ou 4	2 ou 6	1, 3, 5 ou 7

Mais, écrites en congruences, les équations (39) et (42) donnent les conditions

$$\varepsilon Y' - \eta Z' - 2X \equiv 0 \pmod{8}, \tag{43}$$
$$-10T + 5\eta Z' + \varepsilon Y' \equiv 0 \pmod{8}. \tag{44}$$

Supposons ces conditions remplies. On en déduit, en retranchant,

$$-10T + 6\eta Z' + 2X \equiv 0 \pmod{8}$$

ou

$$-5T + 3\eta Z' + X \equiv 0 \pmod{4},$$
$$-5T - \eta Z' + X \equiv 0 \pmod{4}; \tag{45}$$

donc, si les conditions (43) et (44) sont satisfaites, on pourra déduire z de l'équation (40).

On constate d'une manière analogue qu'en éliminant Z' entre (43) et (44), on trouve la congruence

$$5X + 5T + \varepsilon Y' \equiv 0 \pmod{4}. \tag{46}$$

qui montre qu'on pourra déduire y de (41).

Les congruences (45) et (46) s'écrivent encore

(47) $$\varepsilon Y' + X + T \equiv 0 \pmod 4$$

et

(48) $$\eta Z' + T - X \equiv 0 \pmod 4.$$

Elles permettent de calculer ε et η d'une manière *unique*, parce que X et T ne sont jamais de même parité et que Y' et Z' sont impairs.

Mais l'ensemble des congruences (47) et (48) n'est pas équivalent à l'ensemble des congruences (43), (44).

On peut seulement dire que l'ensemble des congruences (43) et (44) est équivalent à l'ensemble des congruences (43) et (48), par exemple. Il faudra donc encore, pour chaque couple ε, η, vérifier que la congruence (43) est satisfaite. C'est bien ce qui arrive.

Il en résulte que la totalité des $\mathcal{E}_2(2N)$ a été obtenue et, par suite, que

$$\mathcal{E}_2(2N) = 2\mathcal{H}.$$

Pour les autres valeurs de N impair et non multiple de 5, on a des résultats analogues que nous nous bornerons à énoncer.

76. $N \equiv \pm 3 \pmod{10}$:

$$\mathcal{E}_2(2N) = 2\mathcal{H}(N);$$

$N \equiv \pm 1 \pmod{10}$:

$$\mathcal{E}_1(2N) = 2\mathcal{H}(N).$$

77. *Expression de* $\mathcal{E}_\alpha(2N)$. — Cas de N *pair :*

Supposons, par exemple, $N \equiv 2 \pmod{10}$.

Alors, *le nombre des représentations* $\mathcal{E}_2(2N)$ *est égal au nombre des représentations* $\mathcal{E}(N)$, *où* $2x+1$ *n'est pas divisible par* 5.

En d'autres termes

$$\mathcal{I}(N) = \mathcal{C}_2(2N),$$

$\mathcal{I}(N)$ étant

$$(49) \qquad 4N = x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 2t^2,$$

où x et y sont impairs et où x n'est pas multiple de 5.

De l'équation (49) on déduit les quatre décompositions suivantes :

$$(50) \quad 8N = \left(\frac{x-2t+5y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x+t-5z}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{x-y+2z}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{-t-y-z}{2}\right)^2,$$

$$(51) \quad 8N = \left(\frac{x-2t-5y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x+t-5z}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{x+y+2z}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{-t+y-z}{2}\right)^2,$$

$$(52) \quad 8N = \left(-\frac{x+2t+5y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-t-5z}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{x-y+2z}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{t-y-z}{2}\right)^2,$$

$$(53) \quad 8N = \left(-\frac{x+2t-5y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-t-5z}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{x+y+2z}{2}\right)^2 + 10\left(\frac{t+y-z}{2}\right)^2,$$

Je dis qu'à toute décomposition (x, y, z, t) on peut faire correspondre une certaine de ces quatre dernières décompositions, de telle manière qu'elle soit une $\mathcal{C}_2(2N)$, c'est-à-dire une

$$8N = X^2 + 50T^2 + 5Y^2 + 10Z^2,$$

avec X et Y impairs.

L'équation (49) donne, puisque $N \equiv 2 \pmod{10}$,

$$8 \equiv x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 2t^2 \qquad (\mathrm{mod}\, 40),$$

qui n'admet que les solutions

$$\begin{aligned} 8 &\equiv 1 + 5 + 0 + 2 \\ &\equiv 1 + 5 + 10 + 32 \end{aligned} \qquad (\mathrm{mod}\, 40),$$

puisque x et y sont impairs et que x n'est pas multiple de 5.

Alors

$$x \equiv 1 \text{ ou } 9 \qquad (\mathrm{mod}\ 10),$$

$$y \quad \text{impair quelconque},$$

$$z \text{ pair quelconque} \qquad \text{si} \qquad t \equiv 1,9 \qquad (\mathrm{mod}\ 10).$$

$$z \text{ impair quelconque} \qquad \text{si} \qquad t \equiv 4, 6 \qquad (\mathrm{mod}\ 10).$$

Il en résulte donc que les décompositions (50), (51), (52) et (53) ont tous leurs termes entiers.

Si l'on forme toutes les valeurs de $x+t$ et de $x-t$, on constate qu'un et un seul de ces deux nombres est un multiple de 5. Il s'ensuit que le coefficient de 2 sera divisible par 5 dans deux des quatre décompositions envisagées; on ne retiendra donc que ces deux décompositions, savoir : (50) et (51) si (x, t) est $(\bmod 5)$ $(1, 4)$ ou $(4, 1)$, et au contraire (52) et (53) si (x, t) est $(\bmod 5)$ $(1, 1)$ ou $(4, 4)$.

Remarquons qu'il faut de plus que $x \pm 2t \mp 5y$ soit double d'un nombre impair. Comme le signe à prendre devant t vient d'être fixé, tout revient à trouver le signe à mettre devant $5y$. Or, y étant impair, $a-5y$ et $a+5y$ ne peuvent *à la fois* être le double d'un nombre pair, ni le double d'un nombre impair. Le signe à prendre devant y sera donc déterminé sans équivoque.

Les considérations qui précèdent donnent ainsi le moyen de choisir avec précision une des quatre décompositions (50), (51), (52), (53), et la décomposition obtenue aura, comme coefficient de 2, un multiple de 5 et, comme premier terme, un carré impair.

Mais, pour que la décomposition ainsi déterminée soit une $\mathcal{C}_2(2\mathrm{N})$, il faut, enfin, que le coefficient de 5 soit un carré impair. Or, si η et ε représentent ± 1, on a l'identité

$$\frac{x-\eta y+2z}{2} = \frac{x-2\varepsilon t+5\eta y}{2} - (3\eta y - \varepsilon t - z).$$

Or, la parenthèse est paire, car des trois nombres y, z et t, deux sont impairs, le troisième est pair. Mais $\frac{x-2\varepsilon t+5\eta y}{2}$ a été choisi impair. Donc $\frac{x-\eta y+2z}{2}$ est impair.

Ainsi, à toute décomposition $\mathcal{I}(\mathrm{N})$ on peut faire correspondre une décomposition $\mathcal{C}_2(2\mathrm{N})$ et une seule.

D'ailleurs, on vérifie que deux décompositions $\mathcal{C}_2(2\mathrm{N})$, représentées par deux des formes (50), (51), (52), (53), ne peuvent coïncider que si les décompositions (49), qui leur ont donné naissance, sont identiques.

Si nous montrons que, réciproquement, toute décomposition $\mathcal{C}_2(2N)$ est représentable, d'une manière *unique*, par une des quatre formes (50), (51), (52), (53), où (x, y, z, t) sont des solutions de (49) et où x, y sont impairs, x non divisible par 5, il en résultera qu'à toute décomposition $\mathcal{J}(N)$ correspond une décomposition $\mathcal{C}_2(2N)$ et une seule et réciproquement, et par suite que

$$\mathcal{C}_1(2N) = \mathcal{J}(N).$$

Soit donc

$$8N = X^2 + 50T^2 + 5Y^2 + 10Z^2$$

une décomposition $\mathcal{C}_2(2N)$ en supposant X et Y impairs.

La congruence

$$16 \equiv X^2 + 5Y^2 + 10Z^2 + 50T^2 \pmod{80}$$

n'admet que les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} 16 &\equiv 1 + 5 + 10 + 0 \\ &\equiv 1 + 5 + 40 + 50 \\ &\equiv 1 + 45 + 10 + 40 \\ &\equiv 1 + 45 + 0 + 50 \\ &\equiv 41 + 5 + 10 + 40 \\ &\equiv 41 + 5 + 0 + 50 \\ &\equiv 41 + 45 + 10 + 0 \\ &\equiv 41 + 45 + 40 + 50 \end{aligned} \pmod{80};$$

d'où, pour X, Y, Z, T, les valeurs suivantes (mod 8) :

X.	Y.	Z.	T.
1, 7	1, 7	1, 3, 5, 7	0, 4
1, 7	1, 7	2, 6	1, 3, 5, 7
1, 7	3, 5	1, 3, 5, 7	2, 6
1, 7	3, 5	0, 4	1, 3, 5, 7
3, 5	1, 7	1, 3, 5, 7	2, 6
3, 5	1, 7	0, 4	1, 3, 5, 7
3, 5	3, 5	1, 3, 5, 7	0, 4
3, 5	3, 5	2, 6	1, 3, 5, 7

Je dis qu'on peut trouver $x, y, z, t, \varepsilon, \eta$ ($\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$), tels que

$$Z = \frac{-\eta t - \varepsilon y - z}{2},$$

$$\varepsilon Y = \frac{x - \varepsilon y + 2z}{2},$$

$$\eta X = \frac{x - 2\eta t + 5\varepsilon y}{2},$$

$$5T = \frac{x + \eta t - 5z}{2}.$$

On en déduit, en effet,

$$(54) \qquad -4z = 5T - \varepsilon Y + Z,$$

$$(55) \qquad 4\varepsilon y = \eta X - \varepsilon Y - 2Z,$$

$$(56) \qquad 4\eta t = -5Z + 5T - \eta X,$$

$$(57) \qquad 4x = 10T + 5\varepsilon Y + \eta X.$$

Réduites à des congruences, ces équations deviennent :

$$(58) \qquad T + 3\varepsilon Y + Z \equiv 0 \pmod 4,$$

$$(59) \qquad \eta X + 7\varepsilon Y + 6Z \equiv 4 \pmod 8,$$

$$(60) \qquad 3Z + T + 3\eta X \equiv 0 \pmod 4,$$

$$(61) \qquad 2T + 5\varepsilon Y + \eta X \equiv 4 \pmod 8.$$

Ajoutons (58) et (61), il vient

$$(62) \qquad 3T + \eta X + Z \equiv 0 \pmod 4.$$

Nous déterminerons ε par la congruence

$$(58) \qquad \varepsilon Y \equiv T + Z \pmod 4$$

et η par la congruence

$$(62) \qquad \eta X \equiv T - Z \pmod 4.$$

ε et η étant ainsi choisis, ce qui ne se peut évidemment que d'une seule manière, car T et Z sont de parité différente et X et Y sont impairs, x, y, z, t en résultent également d'une seule manière.

Il faudra encore vérifier que, pour les valeurs de ε, η ainsi trouvées, la congruence (61) est satisfaite. C'est ce qui a lieu.

D'ailleurs, X n'étant pas multiple de 5, l'équation (57) montre que x ne peut l'être.

Donc la décomposition

$$8N = X^2 + 50T^2 + 5Y^2 + 10Z^2$$

donnera un système unique de valeurs de x, y, z, t satisfaisant à l'équation (49) avec x, y impairs, x non multiple de 5.

En définitive

$$\mathcal{J}(N) = \mathcal{C}_2(2N).$$

Les autres cas $[N \equiv 6, 4, 8 \pmod{10}]$ se traitent d'une manière analogue. On trouve

78. $N \equiv \pm 2 \pmod{10}$:

$$\mathcal{C}_2(2N) = \mathcal{J}(N);$$

$N \equiv \pm 4 \pmod{10}$:

$$\mathcal{C}_1(2N) = \mathcal{J}(N).$$

79. *Relation entre* $\mathcal{S}_\alpha(N)$ *et* $\mathcal{S}_\beta(2N)$, $\mathcal{H}(N)$ *et* $\mathcal{H}(2N)$. — **Cas de** N *impair :*

$\mathcal{S}_\beta(2N)$ est

$$4N = 10x^2 + y^2 + 5z^2 + 2t^2,$$

où y ou t est multiple de 5.

On en déduit la congruence

$$\begin{aligned} 4 &\equiv 2x^2 + y^2 + 5z^2 + 2t^2 \\ &\equiv 0 + 4 + 0 + 0 \\ &\equiv 2 + 0 + 0 + 2 \qquad \pmod 8; \\ &\equiv 0 + 0 + 4 + 0 \\ &\equiv 2 + 4 + 4 + 2 \end{aligned}$$

donc y et z sont toujours pairs.

Donc

$$4N = 10x^2 + 4y'^2 + 20z'^2 + 2t^2,$$
$$2N = 5x^2 + 2y'^2 + 10z'^2 + t^2,$$

qui est évidemment une $\mathcal{S}_\alpha(N)$.

Ainsi, à toute $\mathcal{S}_\beta(2N)$ correspond une $\mathcal{S}_\alpha(N)$, et inversement.

Donc

$$\mathcal{S}_\beta(2N) = \mathcal{S}_\alpha(N). \tag{63}$$

On a d'ailleurs

$$\mathcal{S}(N) = \mathcal{S}(2N), \tag{64}$$

car

$$\mathcal{S}(N) \;\; = 2\mathfrak{A},$$
$$\mathcal{S}(2N) = 2\,\mathfrak{C}_1(2N) = 3\,\mathfrak{C}(N) + \mathfrak{C}_1(N) = 2\,\mathfrak{A}(N),$$

puisque N est impair.

Retranchons membre à membre les équations (64) et (63), il vient

$$\mathcal{H}(2N) = \mathcal{H}(N).$$

80. $N \equiv \pm 1 \pmod{10}$:

$$\mathcal{S}_2(2N) = \mathcal{S}_1(N), \qquad \mathcal{H}(2N) = \mathcal{H}(N);$$

$N \equiv \pm 3 \pmod{10}$:

$$\mathcal{S}_1(2N) = \mathcal{S}_2(N), \qquad \mathcal{H}(2N) = \mathcal{H}(N).$$

81. *Relation entre* $\mathcal{S}_\alpha(N)$ *et* $\mathcal{S}_\beta(2N)$, $\mathcal{H}(N)$ *et* $\mathcal{H}(2N)$. — Cas de N *pair :*

Si N est pair, on a

$$\mathcal{H}(2N) = \mathcal{H}(N) + \mathfrak{F}(N);$$

$\mathcal{H}(2N)$ c'est

$$4N = 10x^2 + y^2 + 5z^2 + 2t^2,$$

où ni y, ni t n'est divisible par 5.

Résolvons la congruence

$$0 \equiv 10x^2 + y^2 + 5z^2 + 2t^2 \pmod{8}$$

ou

$$0 \equiv y^2 + 5z^2 + 2x^2 + 2t^2 \pmod{8},$$

on trouve

$$\begin{aligned} 0 &\equiv 0+0+0+0, \\ &\equiv 0+4+2+2, \\ &\equiv 1+5+2+0, \\ &\equiv 1+5+0+2, \\ &\equiv 4+4+0+0, \\ &\equiv 4+0+2+2. \end{aligned}$$

Les troisième et quatrième lignes correspondent à y, z impairs à la fois, c'est-à-dire à des $\mathcal{I}(N)$, les deux premières et les deux dernières à y, z pairs à la fois, c'est-à-dire à des décompositions

$$4N = 10x^2 + (2y')^2 + 5(2z')^2 + 2t^2$$

ou

$$2N = 5x^2 + 2y'^2 + 10z'^2 + t^2,$$

c'est-à-dire à des $\mathcal{H}(N)$, puisque ni $y = 2y'$, ni $t = 2t'$ n'est divisible par 5.

Inversement, il est évident que, du tableau des $\mathcal{I}(N)$ et des $\mathcal{H}(N)$, on pourra déduire le tableau des $\mathcal{H}(2N)$.

Donc

$$\mathcal{H}(2N) = \mathcal{I}(N) + \mathcal{H}(N). \tag{65}$$

On a trouvé

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(N) &= 3\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1 = 2^{\mu+2}U, \\ \mathcal{S}(N) &= 2\,\mathfrak{C}_1 = 2(2^{\mu+1} - 3)U, \qquad \text{puisque N est pair;} \\ \mathcal{S}(2N) &= 2\,\mathfrak{C}_1(2N) = 3\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_1 = 2(2^{\mu+2} - 3)U; \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{S}(2N) = \mathcal{S}(N) + \mathcal{C}(N). \tag{66}$$

En retranchant membre à membre les équations (65) et (66), on trouve

$$\mathcal{S}_\alpha(2N) = \mathcal{S}_\beta(N) + \mathcal{C}_\alpha(N). \tag{67}$$

82. $N \equiv \pm 2 \pmod{10}$:

$$\mathcal{S}_1(2N) = \mathcal{S}_2(N) + \mathcal{C}_1(N), \qquad \mathcal{H}(2N) = \mathcal{H}(N) + \mathcal{F}(N);$$

$N \equiv \pm 4 \pmod{10}$:

$$\mathcal{S}_2(2N) = \mathcal{S}_1(N) + \mathcal{C}_2(N), \qquad \mathcal{H}(2N) = \mathcal{H}(N) + \mathcal{F}(N).$$

83. *Relation entre* $\mathcal{S}_\alpha(N)$ *et* $\mathcal{S}_\alpha(4N)$. — Cas de N *impair :*

On a trouvé (n° **79**)

$$\mathcal{S}_\beta(2N) = \mathcal{S}_\alpha(N);$$

or (n° **81**)

$$\mathcal{S}_\alpha(4N) = \mathcal{S}_\beta(2N) + \mathcal{C}_\alpha(2N),$$

donc

$$\mathcal{S}_\alpha(4N) = \mathcal{S}_\alpha(N) \ \ + \mathcal{C}_\alpha(2N);$$

mais (n° **76**)

$$\mathcal{C}_\alpha(2N) = 2\,\mathcal{H}(N),$$

donc

$$\mathcal{S}_\alpha(4N) = \mathcal{S}_\alpha(N) + 2\,\mathcal{H}(N),$$
$$\mathcal{S}_\alpha(4N) + \mathcal{S}_\alpha(N) = 2\,\mathcal{S}(N) = 4\mathfrak{A}.$$

84. $N \equiv \pm 3 \pmod{10}$:

$$\mathcal{S}_2(4N) + \mathcal{S}_2(N) = 4\mathfrak{A};$$

$N \equiv \pm 1 \pmod{10}$:

$$\mathcal{S}_1(4N) + \mathcal{S}_1(N) = 4\mathfrak{A}.$$

85. *Relation entre* $\mathcal{S}_\alpha(N)$ *et* $\mathcal{S}_\alpha(4N)$. — Cas de N *pair :*

Nous venons de trouver, en supposant N impair,

$$\mathcal{S}_\alpha(4N) + \mathcal{S}_\alpha(\ N) = 4\mathfrak{A},$$

ou encore (n° **79**)

$$\mathcal{S}_\alpha(4N) + \mathcal{S}_\beta(2N) = 4\mathfrak{A},$$

ce qui s'écrit

$$\mathcal{S}(4N) - \mathcal{S}_\alpha(4N) + \mathcal{S}(2N) - \mathcal{S}_\beta(2N) = \mathcal{S}(4N) + \mathcal{S}(2N) - 4\mathfrak{A}.$$

Or

$$\mathcal{S}(4N) = 2\,\mathfrak{C}_1(4N) = 10\,\mathrm{U}(N) = 10\,\mathfrak{A}(N),$$
$$\mathcal{S}(2N) = 2\,\mathfrak{C}_1(2N) \qquad\qquad = \ 2\,\mathfrak{A}(N);$$

donc

$$\mathcal{H}(4N) + \mathcal{H}(2N) = 8\mathfrak{A}$$

ou encore

$$\mathcal{H}(4N) + \mathcal{H}(2N) = 2[\mathcal{S}_\alpha(4N) + \mathcal{S}_\beta(2N)].$$

Donc, si N est *pair* et *double d'un nombre impair*, non multiple de 5, on a

$$(68) \qquad \mathcal{H}(2N) + \mathcal{H}(N) = 2[\mathcal{S}_\alpha(2N) + \mathcal{S}_\beta(N)].$$

Je dis que cette relation subsiste, quel que soit N, pair.

Il suffira, pour l'établir, de montrer qu'en la supposant exacte pour une certaine valeur de N pair, elle l'est encore quand on remplace N par 2N.

Or, on a (n° **82**), si N est pair,

$$\mathcal{H}(2N) = \mathcal{F}(N) + \mathcal{H}(N),$$
$$\mathcal{S}_\alpha(2N) = \mathcal{S}_\beta(N) + \mathcal{C}_\alpha(N);$$

donc, en supposant (68) exacte, on en déduit

$$(69) \qquad \mathcal{F}(N) + 2\,\mathcal{H}(N) = 4\,\mathcal{S}_\beta(N) + 2\,\mathcal{C}_\alpha(N).$$

D'ailleurs

$$(70) \qquad \mathcal{S}_\beta(4N) = \mathcal{S}_\alpha(2N) + \mathcal{C}_\beta(2N)$$

ou

$$(71) \qquad \mathcal{S}_\beta(4N) = \mathcal{S}_\beta(N) + \mathcal{C}_\alpha(N) + \mathcal{C}_\beta(2N);$$

puis (n° **78**)

$$\mathcal{F}(N) = \mathcal{C} - \mathcal{C}_\alpha(N) = \mathcal{C}_\beta(2N),$$
$$\mathcal{H}(N) = \mathcal{S} - \mathcal{S}_\beta(N);$$

donc (69) devient

$$4\mathcal{F} + 2\mathcal{H} = 4\,\mathcal{S}_\beta + 2\,\mathcal{C}_\alpha + 3\,\mathcal{C}_\beta(2N)$$

ou

$$\begin{aligned} 4\mathcal{C} + 2\,\mathcal{S} &= 3[\mathcal{S}_\beta + \mathcal{C}_\alpha + \mathcal{C}_\beta(2N)] + 3\mathcal{S}_\beta + 3\mathcal{C}_\alpha \\ &= 3\,\mathcal{S}_\beta(4N) + 3\mathcal{S}_\beta + 3\,\mathcal{C}_\alpha; \end{aligned}$$

donc

$$(72) \qquad \mathcal{S}_\beta(4N) + \mathcal{S}_\beta(N) + \mathcal{C}_\alpha(N) = 4(2^{\mu+1} - 1)U,$$

car N n'est pas divisible par 5.

Mais, d'après (71),

$$\mathcal{S}_\beta(4N) = \mathcal{S}_\beta(N) + \mathcal{C}_\alpha(N) + \mathcal{C}_\beta(2N)$$

d'où

$$\mathcal{S}_\beta(4N) - \mathcal{S}_\beta(N) = \mathcal{C}_\alpha(N) + \mathcal{C}_\beta(2N) = \mathcal{C}_\alpha(N) + \mathcal{J}(N) = \mathcal{C}(N) = 2^{\mu+2}U.$$

D'ailleurs

$$\mathcal{S}(4N) = 2(2^{\mu+3} - 3)U,$$
$$\mathcal{S}(N) = 2(2^{\mu+1} - 3)U;$$

donc

$$\mathcal{S}(4N) - \mathcal{S}(N) = 3.2^{\mu+2}U = 3\,\mathcal{C}(N) = 3\,\mathcal{S}_\beta(4N) - 3\,\mathcal{S}_\beta(N),$$

puis

$$\mathcal{S}(4N) - \mathcal{S}_\beta(4N) - \mathcal{S}(N) + \mathcal{S}_\beta(N) = 2\,\mathcal{S}_\beta(4N) - 2\,\mathcal{S}_\beta(N),$$

ou

$$\mathcal{H}(4N) - \mathcal{H}(N) = 2\,\mathcal{S}_\beta(4N) - 2\,\mathcal{S}_\beta(N).$$

Mais, par hypothèse, (68) donne

$$\mathcal{H}(2N) + \mathcal{H}(N) = 2[\mathcal{S}_\alpha(2N) + \mathcal{S}_\beta(N)],$$

donc

$$\mathcal{H}(4N) + \mathcal{H}(2N) = 2[\mathcal{S}_\beta(4N) + \mathcal{S}_\alpha(2N)];$$

c'est précisément la relation (68) où l'on a remplacé N par **2**N.

Il en résulte que cette relation est générale, et aussi la relation (72) qu'on en a déduite.

Cette formule (72) s'applique même encore au cas où N est impair (non multiple de 5) puisque alors $\mathcal{C}_\beta(N) = 0$.

86. $N \equiv \pm 2 \pmod 5$:

$$\mathcal{S}_2(4N) + \mathcal{S}_2(N) + \mathcal{C}_1(N) = 4\mathfrak{A};$$

$N \equiv \pm 1 \pmod 5$:

$$\mathcal{S}_1(4N) + \mathcal{S}_1(N) + \mathcal{C}_2(N) = 4\mathfrak{A}.$$

V. — Calcul des nombres $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_3$.

87. Partons de la formule (n° **26**)

$$(73)\qquad \eta_1^2\theta_1^2\frac{H^2}{\Theta^2}=8\sum_1\frac{m\,q^m}{1-q^{2m}}-8\sum\frac{m\,q^m}{1-q^{2m}}\cos 2mx.$$

Faisons-y $x=\frac{\pi}{5}$, $x=\frac{2\pi}{5}$ et retranchons.

Par les formules II (Chap. III), le premier membre devient

$$\sqrt{5}\sqrt{\eta_1\theta_1}\sqrt{\bar\eta_1\bar\theta_1}[5\bar\eta_1\bar\theta_1-\eta_1\theta_1]=\frac{\sqrt{5}}{4}\eta_1\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\eta_1\left(q^{\frac{5}{2}}\right)\left[5\eta_1^2\left(q^{\frac{5}{2}}\right)-\eta_1^2\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

et le second membre est (n° **30**)

$$8\sum_1\frac{m\,q^m}{1-q^{2m}}\left(\cos 4m\frac{\pi}{5}-\cos 2m\frac{\pi}{5}\right)=-4\sqrt{5}\sum\frac{m\,q^m}{1-q^{2m}}\left(\frac{m}{5}\right).$$

Égalons les coefficients de q^M dans les deux membres. Au premier membre, il faut poser d'abord

$$M=\frac{(2x+1)^2}{8}+\frac{5(2y+1)^2}{8}+\frac{5(2z+1)^2}{8}+\frac{5(2t+1)^2}{8}$$

ou

$$8M=(2x+1)^2+5(2y+1)^2+5(2z+1)^2+5(2t+1)^2,$$

puis aussi

$$8M=(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2+5(2t+1)^2.$$

On a donc

$$\frac{\sqrt{5}}{4}[5\,\mathfrak{M}_3(2M)-\mathfrak{M}_1(2M)]=-4\sqrt{5}\sum m\left(\frac{m}{5}\right),$$

en posant

$$M=m(1+2\rho);$$

m est donc un diviseur quelconque de M, à conjugué impair.

Posons

$$N = 2M,$$

donc (nº 8)

$$(74) \qquad 5\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_1 = -16\sum \delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right) = -(-2)^{\mu+3}V = 10\mathfrak{D} + 2\mathfrak{D}_1.$$

88. Pour obtenir une autre relation entre $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_3$, partons encore de cette formule (73) et faisons-y $x = \frac{\pi\tau}{5}$.

On en déduit (Chap. III, formules II′ et VIII′)

$$\theta_1^2 \eta_1^2 \frac{X'^2}{Z'^2} = -\frac{1}{4}\eta_1\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\eta_1\left(q^{\frac{1}{10}}\right)\left[\eta_1\left(q^{\frac{1}{5}}\right)\theta_1 + \eta_1\theta_1\left(q^{\frac{1}{5}}\right) + \eta_1\theta_1 - \eta_1\left(q^{\frac{1}{5}}\right)\theta_1\left(q^{\frac{1}{5}}\right)\right]$$

$$= 8\sum \frac{m\,q^m}{1-q^{2m}} - 8\sum \frac{m\,q^m}{1-q^{2m}}\,\frac{q^{\frac{2m}{5}} + q^{-\frac{2m}{5}}}{2},$$

et l'on obtient une relation analogue en faisant $x = \frac{2\pi\tau}{5}$.

Le premier membre donne, comme coefficient de $q^{\frac{M}{5}}$, en posant toujours $N = 2M$,

$$-\frac{\mathfrak{S}}{4} - \frac{1}{8}\mathfrak{M}_3 + \frac{1}{8}\mathfrak{M}_1 \qquad \text{pour } x = \frac{\pi\tau}{5}$$

et

$$-\frac{\mathfrak{S}}{4} + \frac{1}{8}\mathfrak{M}_3 - \frac{1}{8}\mathfrak{M}_1 \qquad \text{pour } x = \frac{2\pi\tau}{5}.$$

Au second membre, pour $x = \frac{\pi\tau}{5}$, il faut poser

$$\frac{M}{5} = m' + 2m'\rho$$

ou

$$N = 2m'(10\rho + 5)$$

et prendre $8\Sigma m'$; puis

$$N = 2m''(10\rho + 5 \pm 2)$$
$$= 2m''(10\rho \pm 3)$$

et prendre $4\Sigma m''$; puis, pour $x = \frac{2\pi\tau}{5}$, il faut prendre encore $8\Sigma m'$.

et $4\Sigma m'''$ avec

$$N = 2m'''(10\rho \pm 1).$$

On aura donc

$$-\frac{\mathfrak{S}}{2} - \frac{1}{4}\mathfrak{M}_3 + \frac{1}{4}\mathfrak{M}_1 = 16\Sigma m' - 8\Sigma m'',$$

$$-\frac{\mathfrak{S}}{2} + \frac{1}{4}\mathfrak{M}_3 - \frac{1}{4}\mathfrak{M}_1 = 16\Sigma m' - 8\Sigma m''',$$

m', m'' et m''' étant des diviseurs de $\frac{N}{2}$, dont les conjugués (impairs) sont respectivement congrus à o, 2 ou 1 (mod 5).

1° Supposons $N \equiv 2 \pmod 5$.

Si l'on résout la congruence

$$xy \equiv 1 \quad (\text{mod } 5),$$

on ne trouve comme solutions (mod 5) que

$$\begin{array}{l} 1.1, \\ 2.3, \\ 3.2, \\ 4.4; \end{array}$$

donc

$$\Sigma m' = 0,$$

$$\Sigma m'' = \frac{1}{2}\Sigma\,\delta'\left[1 - \left(\frac{\delta'}{5}\right)\right],$$

$$\Sigma m''' = \frac{1}{2}\Sigma\,\delta'\left[1 + \left(\frac{\delta'}{5}\right)\right];$$

donc

$$-\mathfrak{S} - \frac{1}{2}\mathfrak{M}_3 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}_1 = -8\Sigma\delta' + 8\Sigma\,\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right),$$

$$-\mathfrak{S} + \frac{1}{2}\mathfrak{M}_3 - \frac{1}{2}\mathfrak{M}_1 = -8\Sigma\delta' - 8\Sigma\,\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right).$$

On en déduit immédiatement pour $\mathfrak{S}$ la valeur déjà trouvée (n° **72**) et pour $\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_1$ la valeur

(75) $$\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_1 = -16\Sigma\,\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right) = -(-2)^{\mu+3}V = 10\mathfrak{B} + 2\mathfrak{B}_1;$$

d'où, par (74),

$$\mathfrak{M}_3 = 0,$$

$$\mathfrak{M}_1 = 16\Sigma\,\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right) = -10\mathfrak{B} - 2\mathfrak{B}_1, \qquad [N \equiv 2 \pmod 5].$$

On trouve le même résultat si $N \equiv -2 \pmod 5$.

2° Supposons $N \equiv 1 \pmod 5$.

Résolvons la congruence

$$xy \equiv 3 \pmod 5,$$

on n'a que les solutions (mod 5)

$$\begin{array}{c} 1.3, \\ 2.4, \\ 3.1, \\ 4.2; \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} \Sigma m' &= 0, \\ \Sigma m'' &= \frac{1}{2}\Sigma\delta'\left[1+\left(\frac{\delta'}{5}\right)\right], \\ \Sigma m''' &= \frac{1}{2}\Sigma\delta'\left[1-\left(\frac{\delta'}{5}\right)\right]; \end{aligned}$$

d'où $\mathfrak{S}$ et

(76) $$\mathfrak{M}_3 - \mathfrak{M}_1 = +16\Sigma\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right) = -10\mathfrak{B} - 2\mathfrak{B}_1;$$

donc, par (74),

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_3 &= -\ \ 8\Sigma\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right) = \ \ 5\mathfrak{B} + \ \ \mathfrak{B}_1 \qquad [N \equiv 1 \pmod 5)]. \\ \mathfrak{M}_1 &= -24\Sigma\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right) = 15\mathfrak{B} + 3\mathfrak{B}_1. \end{aligned}$$

On trouve le même résultat si $N \equiv -1 \pmod 5$.

3° Supposons enfin $N \equiv 0 \pmod 5$.

Posons

$$N = 5^\nu N''.$$

$\Sigma m'$ est alors la somme des diviseurs à conjugués impairs de $\frac{N}{10}$: c'est, en appelant t' un diviseur à conjugué impair de $\frac{N}{2.5^\nu}$,

$$\Sigma m' = \Sigma t' + 5\Sigma t' + \ldots + 5^{\nu-1}\Sigma t' = \frac{5^\nu - 1}{4}\Sigma t' = \frac{5^\nu - 1}{4}2^{\mu-1}U;$$

de même

$$\begin{aligned} \Sigma m'' &= \frac{5^\nu}{2}\Sigma t'\left[1+\left(\frac{N''}{5}\right)\left(\frac{t'}{5}\right)\right] = \frac{5^\nu}{2}2^{\mu-1}U - \frac{5^\nu}{2}\left(\frac{N'''}{5}\right)2^{\mu-1}V, \\ \Sigma m''' &= \frac{5^\nu}{2}\Sigma t'\left[1-\left(\frac{N''}{5}\right)\left(\frac{t'}{5}\right)\right] = \frac{5^\nu}{2}2^{\mu-1}U + \frac{5^\nu}{2}\left(\frac{N'''}{5}\right)2^{\mu-1}V; \end{aligned}$$

d'où

$$\mathfrak{S} = -32\Sigma m' + 8\Sigma m'' + 8\Sigma m''' = 8.2^{\mu-1}\mathrm{U} = 2^{\mu+2}\mathrm{U};$$

c'est le résultat du n° **72**.

Ensuite

$$(77)\qquad -\frac{1}{2}\mathfrak{M}_3 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}_1 = -8\Sigma m'' + 8\Sigma m''' = 5^\nu\left(\frac{\mathrm{N}'''}{5}\right)2^{\mu+2}\mathrm{V}.$$

Cette formule est générale et comprend comme cas particuliers les formules (76) et (75).

89. En la combinant avec (74) on obtient

$$(78)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= 2^{\mu+1}\left[5^{\nu+1}\left(\frac{\mathrm{N}'''}{5}\right) - (-1)^{\mu+1}\right]\mathrm{V} = \frac{1}{2}\left[1 + 5^{\nu+1}\left(\frac{\mathrm{N}''}{5}\right)\right][5\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1],\\ \mathfrak{M}_3 &= 2^{\mu+1}\left[5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}'''}{5}\right) - (-1)^{\mu+1}\right]\mathrm{V} = \frac{1}{2}\left[1 + 5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}''}{5}\right)\right][5\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1]. \end{aligned}\right.$$

Rappelons que

$$\mathrm{N} = 5^\nu \mathrm{N}'' = 2^\mu 5^\nu \mathrm{N}'''$$

et que

$$\left(\frac{\mathrm{N}''}{5}\right) \neq 0.$$

90. Nous avons obtenu les formules (78) par des considérations purement analytiques.

On peut, en supposant connue la formule (74), en déduire les formules (78) par des considérations arithmétiques qui ne sont pas sans intérêt et que nous allons exposer succinctement.

1° D'abord, si $\mathrm{N} \equiv \pm 2 \pmod 5$, $4\mathrm{N}$ n'est pas résidu quadratique de 5 et la décomposition $\mathfrak{M}_3$ est impossible.

Donc

$$\mathfrak{M}_1 = 16\Sigma\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right),$$
$$\mathfrak{M}_3 = 0.$$

2° Supposons maintenant $\mathrm{N} \equiv \pm 1 \pmod 5$.

La décomposition $\mathfrak{M}_3$ est alors possible.

Soit

$$4N = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

On peut lui faire correspondre la décomposition

$$4N = x^2 + (2y + z)^2 + (y - 2z)^2 + 5t^2, \tag{79}$$

qui est une $\mathfrak{M}_1$.

Toutes ces décompositions (79) sont distinctes si l'on part de groupes (x, y, z, t) distincts.

Inversement, soit une décomposition

$$4N = X^2 + Y^2 + Z^2 + 5T^2 \qquad (\mathfrak{M}_1); \tag{80}$$

on peut lui adjoindre cinq autres décompositions $\mathfrak{M}_1$, savoir :

$$\left\{\begin{aligned} 4N &= X^2 + Z^2 + Y^2 + 5T^2,\\ 4N &= Y^2 + Z^2 + X^2 + 5T^2,\\ 4N &= Y^2 + X^2 + Z^2 + 5T^2,\\ 4N &= Z^2 + X^2 + Y^2 + 5T^2,\\ 4N &= Z^2 + Y^2 + X^2 + 5T^2. \end{aligned}\right. \tag{80 bis}$$

On suppose X^2, Y^2, Z^2 différents.

Pour que la décomposition (80) coïncide avec la décomposition (79), il suffit que

$$x = X,$$
$$2y + z = Y, \tag{81}$$
$$y - 2z = Z, \tag{82}$$
$$t = T.$$

On en déduit

$$\left\{\begin{aligned} 5y &= 2Y + Z,\\ 5z &= Y - 2Z, \end{aligned}\right. \tag{83}$$

donc

$$2Y + Z \equiv 0 \pmod 5. \tag{84}$$

On déduit d'ailleurs de la congruence (84)

$$4Y + 2Z \equiv 0 \pmod 5$$

ou

$$Y - 2Z \equiv 0 \pmod 5,$$

qui prouve que la condition (84) est suffisante pour que le système (83) soit résoluble.

Si $N \equiv 4 \pmod{10}$, l'équation (80) implique la congruence

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 5T^2 \equiv 16 \pmod{40},$$

d'où

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \equiv 1 \pmod 5,$$

qui n'admet que les solutions

$$\left.\begin{array}{l} 0+0+1 \\ 0+1+0 \\ 1+0+0 \\ 1+1+4 \\ 1+4+1 \\ 4+1+1 \end{array}\right\} \pmod 5;$$

d'où, pour X, Y, Z (mod 5), les valeurs

$$\begin{array}{rrr} 0 & 0 & \pm 1, \\ 0 & \pm 1 & 0, \\ \pm 1 & 0 & 0, \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 2, \\ \pm 1 & \pm 2 & \pm 1, \\ \pm 2 & \pm 2 & \pm 1. \end{array}$$

On vérifie alors, pour chacune de ces solutions, que parmi les nombres

$$\begin{array}{ll} 2Y + Z, & \\ 2Z + Y, & \qquad (\quad) \\ 2Z + X, & \\ 2X + Z, & \\ 2X + Y, & \qquad (\quad) \\ 2Y + X, & \end{array}$$

qui représentent la combinaison $2Y + Z$ pour l'équation (80) et les cinq équations (80 *bis*), il y en a toujours *deux* congrus à zéro (mod 5) et quatre qui ne le sont pas.

On peut donc associer les décompositions $\mathfrak{M}_1$ par groupes de six, tels que deux d'entre elles soient représentables par la forme (79) et tels que les quatre autres ne le soient pas.

Si l'on supposait $X^2 = Y^2$, on associerait à

$$4N = X^2 + X^2 + Z^2 + 5T^2$$

les décompositions

$$4N = X^2 + Z^2 + X^2 + 5T^2,$$
$$4N = Z^2 + X^2 + X^2 + 5T^2,$$

et l'on verrait que, parmi les quantités

$$2X + Z,$$
$$2Z + X,$$
$$3X,$$

une seule est congrue à zéro (mod 5).

Enfin, le cas $X^2 = Y^2 = Z^2$ est évidemment impossible à cause des formes de X^2, Y^2, Z^2.

On peut donc dire, en définitive, qu'aux décompositions $\mathfrak{M}_3$ on peut faire correspondre un tiers des décompositions $\mathfrak{M}_1$.

Le cas de $N \equiv -4 \pmod{10}$ se traite de même et conduit à la même conclusion.

Donc

$$\mathfrak{M}_1 = 3\mathfrak{M}_3. \tag{81}$$

La comparaison des équations (81) et (74) donne alors

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= -24\Sigma\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right) \\ \mathfrak{M}_3 &= -8\Sigma\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right) \end{aligned}\right\} \quad [N \equiv \pm 1 \pmod 5].$$

Enfin, les deux cas

$$N \equiv \pm 1 \quad \text{et} \quad N \equiv \pm 3 \quad \pmod{10}$$

se réunissent en un seul en écrivant

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= -4\left[1+5\left(\frac{N}{5}\right)\right]\Sigma\,\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right) \\ \mathfrak{M}_3 &= -4\left[1+\left(\frac{N}{5}\right)\right]\Sigma\,\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right) \end{aligned} \qquad [N \not\equiv 0 \pmod 5].$$

91. Supposons maintenant $N \equiv 0 \pmod 5$.

Posons

$$N = 5^{\nu}N'' \quad \text{avec} \quad N'' \not\equiv 0 \pmod 5$$

et

$$N = 5N_1;$$

alors si

$$20N_1 = (2x+1)^2 + 5(2y+1)^2 + 5(2z+1)^2 + 5(2t+1)^2,$$

il faut que

$$2x+1 \equiv 0 \pmod 5,$$

donc

$$4N_1 = 5(2x'+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2 + (2t+1)^2.$$

Donc

$$\mathfrak{M}_1\left(\frac{N}{5}\right) = \mathfrak{M}_3(N). \tag{82}$$

Posons, en général,

$$\mathfrak{M}_3(5^n N'') = u_n,$$
$$\mathfrak{M}_1(5^n N'') = v_n$$

et

$$a = 4\Sigma\,\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right).$$

δ' est un diviseur à conjugué impair de $\frac{N}{2}$ ou de $\frac{N}{10}$, $\cdots$ ou de $\frac{N''}{2}$.

On peut écrire les équations

$$u_n = v_{n-1},$$
$$5u_n - v_n = -4a,$$

système qui se résout aisément.

On en déduit

$$5v_{n-1} - v_n = -4a.$$

Posons

$$F(x) = v_0 + v_1 x + \ldots + v_n x^n + \ldots.$$

On en déduit

$$(5x-1)\,F(x) = -v_0 - 4a\frac{x}{1-x}.$$

Or v_0 est connu : c'est (n° **90**)

$$\mathfrak{M}_1(N'') = -4\left[1+5\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\Sigma\,\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right).$$

Donc

$$F(x) = \frac{-a\left[1+5\left(\frac{N''}{5}\right)\right]+5ax\left[1+\left(\frac{N''}{5}\right)\right]}{(1-x)(1-5x)} = -\frac{a}{1-x} - \frac{5a\left(\frac{N''}{5}\right)}{1-5x};$$

donc

$$v_n = -4\left[1+5^{n+1}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\Sigma\,\delta'\left(\frac{\delta'}{5}\right);$$

donc enfin

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2}\left[1+5^{\nu+1}\left(\frac{N''}{5}\right)\right][5\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1],$$

$$\mathfrak{M}_3 = \frac{1}{2}\left[1+5^{\nu}\ \ \left(\frac{N''}{5}\right)\right][5\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1],$$

ce sont précisément les équations (78).

VI. — Calcul des nombres $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{N}_3$.

92. Partons de la formule (n° **26**)

$$(83)\qquad \theta^2\theta_1^2\frac{H^2}{H_1^2} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + 8\sum_1 (-1)^m\frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}} - 8\sum_1 (-1)^m\frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}}\cos 2mx.$$

Faisons-y $x=\frac{2\pi}{5}$, puis $x=\frac{\pi}{5}$, et retranchons.

Les formules II (Chap. III) permettent de transformer le premier membre qui devient

$$\sqrt{5}\sqrt{\theta\theta_1}\sqrt{\bar{\bar\theta}\bar{\bar\theta}_1}\,[5\bar{\bar\theta}\bar{\bar\theta}_1 - \theta\theta_1] = \sqrt{5}\,\theta(q^2)\,\theta(q^{10})\,[5\,\theta^2(q^{10}) - \theta^2(q^2)].$$

Le second membre est

$$\frac{1}{\cos^2\frac{2\pi}{5}} - \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{5}} - 8\Sigma(-1)^m\frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}}\left[\cos\frac{4m\pi}{5} - \cos\frac{2m\pi}{5}\right]$$

$$= a + 4\sqrt{5}\sum\frac{m(-1)^m q^{2m}}{1-q^{2m}}\left(\frac{m}{5}\right),$$

a étant une constante.

En égalant les coefficients de q^{2N} dans les deux membres, on voit qu'il faut poser au premier membre

$$N = x^2 + 5y^2 + z^2 + t^2, \qquad \mathfrak{N}_1$$
$$N = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2, \qquad \mathfrak{N}_3$$

et le coefficient est

$$\sqrt{5}(5\mathfrak{N}_3 - \mathfrak{N}_1)(-1)^N.$$

Le second membre donne, en posant

$$N = m(1+\rho),$$
$$4\sqrt{5}\,\Sigma(-1)^m m\left(\frac{m}{5}\right) = 4\sqrt{5}\,\Sigma(-1)^{d'} d'\left(\frac{d'}{5}\right),$$

puisque m représente visiblement un diviseur quelconque de N.

Il en résulte

$$(84) \qquad 5\mathfrak{N}_3 - \mathfrak{N}_1 = (-1)^N 4\mathfrak{D}.$$

93. Pour obtenir une autre relation, partons encore de la formule (83) et faisons-y $x = \frac{\pi\tau}{5}$.

On en déduit [formules (II') et (VIII'), Chap. III]

$$\theta^2\theta_1^2\frac{X'^2}{Y'^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\overline{\theta_1\theta}}\sqrt{\overline{\theta'_1\theta'}}\left[\theta_1\overline{\theta'} + \theta\overline{\theta'_1} - \theta_1\theta + \overline{\theta'_1}\overline{\theta'}\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\theta(q^2)\,\theta\left(q^{\frac{2}{5}}\right)\left[\theta_1\theta\left(q^{\frac{1}{5}}\right) + \theta\theta_1\left(q^{\frac{1}{5}}\right) - \theta^2(q^2) + \theta^2\left(q^{\frac{2}{5}}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\cos^2\frac{\pi\tau}{5}} - 1 + 8\sum_1(-1)^m\frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}} - 8\sum_1(-1)^m\frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}}\,\frac{q^{\frac{2m}{5}} + q^{-\frac{2m}{5}}}{2},$$

et l'on obtient une expression analogue en faisant $x = \frac{2\pi\tau}{5}$.

Egalons les coefficients de $q^{\frac{2N}{5}}$.

Au premier membre, on trouve aisément

$$(-1)^N\left(-\mathfrak{S} - \frac{\mathfrak{N}_1}{2} + \frac{\mathfrak{N}_3}{2}\right) \qquad \text{pour} \qquad x = \frac{\pi\tau}{5}$$

et

$$(-1)^N\left(-\mathfrak{S} + \frac{\mathfrak{N}_1}{2} - \frac{\mathfrak{N}_3}{2}\right) \qquad \text{pour} \qquad x = \frac{2\pi\tau}{5}.$$

Au second membre, pour $x = \frac{\pi\tau}{5}$, il faut poser

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi\tau}{5}} = 4\,\Sigma(-1)^{N-1}\,N q^{\frac{2N}{5}},$$

puis, dans

$$8\Sigma(-1)^m \frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}},$$

il faut poser

$$\frac{2N}{5} = 2m' + 2m'\rho$$

ou

$$N = m'(5\rho + 5)$$

et prendre

$$8\,\Sigma(-1)^{m'} m';$$

puis, dans

$$-8\,\Sigma(-1)^m \frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}} \frac{q^{\frac{2}{5}} + q^{-\frac{2}{5}}}{2},$$

il faut poser

$$\frac{2N}{5} = 2m'' + 2m''\rho \pm 2\frac{m''}{5}$$

ou

$$N = m''(5\rho + 5 \pm 1)$$

et prendre

$$-4\,\Sigma(-1)^{m''} m''.$$

Pour $x = \frac{2\pi\tau}{5}$, il faudra encore prendre

$$8\,\Sigma(-1)^{m'} m',$$

puis poser

$$N = m'''(5\rho + 5 \pm 2)$$

et prendre

$$-4\,\Sigma(-1)^{m'''} m'''.$$

On en déduira

$$(85)\quad (-1)^N\left(-\mathfrak{S} - \frac{\mathfrak{A}_1}{2} + \frac{\mathfrak{A}_3}{2}\right) = 4(-1)^{N-1}N + 8\,\Sigma(-1)^{m'} m' - 4\,\Sigma(-1)^{m''} m'',$$

$$(86)\quad (-1)^N\left(-\mathfrak{S} + \frac{\mathfrak{A}_1}{2} - \frac{\mathfrak{A}_3}{2}\right) = 4\left[\frac{N}{2}\right](-1)^{\frac{N}{2}-1} + 8\,\Sigma(-1)^{m'} m' - 4\,\Sigma(-1)^{m'''} m''',$$

où $\left[\frac{N}{2}\right]$ représente o si N est impair et $\frac{N}{2}$ si N est pair.

Posons

$$N = m_1''(5\rho \pm 1) = m_1'''(5\rho \pm 2).$$

On a évidemment

$$\Sigma(-1)^{m_1''}m_1'' = (-1)^{\mathrm{N}}\mathrm{N} + \Sigma(-1)^{m''}m'',$$

puisque en écrivant

$$\mathrm{N} = m''(5\rho + 5 \pm 1),$$

on supprime la décomposition

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}.1,$$

qui existe quand on pose

$$\mathrm{N} = m_1''(5\rho \pm 1).$$

Alors l'équation (85) s'écrit

$$(87)\qquad (-1)^{\mathrm{N}}\left(-\mathfrak{S} - \frac{\mathfrak{N}_1}{2} + \frac{\mathfrak{N}_3}{2}\right) = 8\,\Sigma(-1)^{m'}m' - 4\,\Sigma(-1)^{m_1''}m_1'',$$

où m' est un diviseur de N dont le conjugué est divisible par 5 et où m_1'' est un diviseur de N dont le conjugué est résidu quadratique de 5.

Dans l'équation (86) envisageons deux cas :

Si N est impair, on peut écrire

$$\Sigma(-1)^{m'''}m''' = \Sigma(-1)^{m_1'''}m_1''',$$

puisque poser

$$\mathrm{N} = m'''(5\rho + 5 \pm 2)$$

revient à éliminer la décomposition impossible

$$\mathrm{N} = m_1'''.2.$$

Si N est pair, soit $2\,\mathrm{N}'$, on a

$$4(-1)^{\frac{\mathrm{N}}{2}}\left[\frac{\mathrm{N}}{2}\right] = 4(-1)^{\mathrm{N}'}\mathrm{N}';$$

c'est précisément le terme qui manque dans $4\Sigma(-1)^{m'''}m'''$ pour faire $4\Sigma(-1)^{m_1'''}m_1'''$.

Ainsi, l'équation (86) peut s'écrire dans tous les cas

$$(88)\qquad (-1)^{\mathrm{N}}\left(-\mathfrak{S} + \frac{\mathfrak{N}_1}{2} - \frac{\mathfrak{N}_3}{2}\right) = 8\,\Sigma(-1)^{m'}m' - 4\,\Sigma(-1)^{m_1'''}m_1''',$$

où m' est un diviseur de N dont le conjugué est multiple de 5 et où m'''_1 est un diviseur de N dont le conjugué n'est pas résidu quadratique de 5.

1° Supposons $N \equiv \pm 2 \pmod 5$, il en résulte

$$\begin{aligned}
&\Sigma(-1)^{m'} m' = 0,\\
&\Sigma(-1)^{m''_1} m''_1 = \frac{1}{2}\Sigma d'(-1)^d \left[1 - \left(\frac{d'}{5}\right)\right],\\
&\Sigma(-1)^{m'''_1} m'''_1 = \frac{1}{2}\Sigma d'(-1)^d \left[1 + \left(\frac{d'}{5}\right)\right];
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
(-1)^N\left(-\mathfrak{S} + \frac{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_3}{2}\right) &= -2\mathfrak{A}_1 - 2\mathfrak{B}_1,\\
(-1)^N\left(-\mathfrak{S} - \frac{\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_3}{2}\right) &= -2\mathfrak{A}_1 + 2\mathfrak{B}_1;
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathfrak{S} = 2(-1)^N \mathfrak{A}_1 \qquad (cf.\ \text{n}^\circ\ \mathbf{73})$$

et :

(89) $$\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_3 = -(-1)^N 4\mathfrak{B}_1;$$

d'où, en comparant avec (84),

$$\mathfrak{N}_3 = 0$$

et

$$\mathfrak{N}_1 = -(-1)^N 4\mathfrak{B}_1 \qquad [N \equiv \pm 2 \pmod 5].$$

2° Supposons $N \equiv \pm 1 \pmod 5$, alors

$$\begin{aligned}
&\Sigma(-1)^{m'} = 0,\\
&\Sigma(-1)^{m''_1} m''_1 = \frac{1}{2}\Sigma d'(-1)^d \left[1 + \left(\frac{d'}{5}\right)\right],\\
&\Sigma(-1)^{m'''_1} m'''_1 = \frac{1}{2}\Sigma d'(-1)^d \left[1 - \left(\frac{d'}{5}\right)\right];
\end{aligned}$$

d'où $\mathfrak{S}$ et

(90) $$\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_3 = (-1)^N . 4\mathfrak{B}_1$$

et, par suite,

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{N}_1 &= 6(-1)^N \mathfrak{B}_1\\
\mathfrak{N}_3 &= 2(-1)^N \mathfrak{B}_1
\end{aligned}\right\} \quad [N \equiv \pm 1 \pmod 5].$$

3° Supposons enfin $N \equiv 0 \pmod 5$.

Posons $N = 5^\nu N''$ et soit δ' un diviseur quelconque de N'' :

$$\Sigma(-1)^{m'} m' = \mathfrak{A}_1\left(\frac{N}{5}\right) = \Sigma(-1)^{\delta'}\delta' + 5\Sigma(-1)^{\delta'}\delta' + \ldots$$
$$+ 5^{\nu-1}\Sigma(-1)^{\delta}\delta' = \frac{5^\nu - 1}{4}\Sigma(-1)^{\delta'}\delta' = \frac{5^\nu - 1}{4}(2^{\mu+1} - 3)U;$$

de même

$$\Sigma(-1)^{m''_1} m''_1 = \frac{5^\nu}{2}\Sigma\delta'\left[1 + \left(\frac{N''}{5}\right)\left(\frac{\delta'}{5}\right)\right](-1)^{\delta'}$$
$$= \frac{5^\nu}{2}(2^{\mu+1} - 3)U - \frac{5^\nu}{2}(-1)^\mu\left(\frac{N'''}{5}\right)\left[\frac{5 + (-2)^{\mu+1}}{3}\right]V,$$
$$\Sigma(-1)^{m'''_1} m'''_1 = \frac{5^\nu}{2}\Sigma\delta'\left[1 - \left(\frac{N''}{5}\right)\left(\frac{\delta'}{5}\right)\right](-1)^{\delta'}$$
$$= \frac{5^\nu}{2}(2^{\mu+1} - 3)U + \frac{5^\nu}{2}(-1)^\mu\left(\frac{N'''}{5}\right)\left[\frac{5 + (-2)^{\mu+1}}{3}\right]V;$$

d'où

$$-(-1)^N . 2S = 16\Sigma(-1)^{m'} m' - 4\Sigma(-1)^{m''_1} m''_1 - 4\Sigma(-1)^{m'''_1} m'''_1 = -4(2^{\mu+1} - 3)U;$$

c'est le résultat du n° **73**.

Ensuite

$$(-1)^N(\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_3) = 4\Sigma(-1)^{m''_1} m''_1 - 4\Sigma(-1)^{m'''_1} m'''_1 = -4 . 5^\nu(-1)^\mu\left(\frac{N'''}{5}\right)\frac{5 + (-2)^{\mu+1}}{3}V$$

ou

$$\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_3 = 4(-1)^N . 5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\mathfrak{B}_1. \tag{91}$$

Cette formule (91) est générale et comprend comme cas particuliers les formules (89) et (90).

On en déduit, en la combinant avec (84),

$$\begin{cases} \mathfrak{N}_1 = (-1)^N\left[1 + 5^{\nu+1}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1, \\ \mathfrak{N}_3 = (-1)^N\left[1 + 5^{\nu}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1. \end{cases} \tag{92}$$

Rappelons que

$$N = 5^\nu N'', \qquad \left(\frac{N''}{5}\right) \neq 0.$$

94. Nous avons obtenu les formules (92) par des considérations purement analytiques.

On peut, en supposant connue la formule (84), en déduire les formules (92) par des considérations arithmétiques entièrement analogues à celles du n° **90**.

1° On voit immédiatement que, si $N \equiv \pm 2 \pmod 5$, la décomposition $\mathfrak{N}_3$ est impossible et la formule (84) donne

$$\mathfrak{N}_1 = -4(-1)^N \mathfrak{B}_1;$$

2° Si $N \equiv \pm 1 \pmod 5$, à

$$N = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2$$

faisons correspondre

$$N = x^2 + (2y+z)^2 + (y-2z)^2 + 5t^2. \tag{93}$$

Les décompositions (93) sont toutes distinctes et ce sont des $\mathfrak{N}_1$.

Réciproquement, soit

$$N = X^2 + Y^2 + Z^2 + 5T^2$$

une décomposition $\mathfrak{N}_1$.

On peut lui adjoindre cinq décompositions analogues, et l'on trouve aisément que, pour que cette décomposition puisse être donnée par (93), il faut que

$$Y + 2Z \equiv 0 \pmod 5,$$

et, en suivant presque mot pour mot le raisonnement du n° **90**, on trouve qu'aux décompositions $\mathfrak{N}_3$ ne correspondent par (93) qu'un tiers des décompositions $\mathfrak{N}_1$, de sorte que

$$\mathfrak{N}_1 = 3\mathfrak{N}_3; \tag{94}$$

d'où, par la formule (84),

$$\mathfrak{N}_1 = 6(-1)^N \mathfrak{B}_1,$$
$$\mathfrak{N}_3 = 2(-1)^N \mathfrak{B}_1.$$

On encore, en réunissant les deux cas,

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= (-1)^N \left[1 + 5\left(\frac{N}{5}\right)\right] \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{N}_3 &= (-1)^N \left[1 + \left(\frac{N}{5}\right)\right] \mathfrak{B}_1 \end{aligned}\right\} \quad [N \not\equiv 0 \pmod 5].$$

3° Si $N \equiv 0 \pmod 5$, on posera

$$N = 5^{\nu} N'' = 5 N_1,$$

et, si

$$N = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2,$$

on en déduira

$$N_1 = 5x'^2 + y^2 + z^2 + t^2;$$

d'où

$$\mathfrak{N}_1\left(\frac{N}{5}\right) = \mathfrak{N}_3(N).$$

Puis, en posant

$$\mathfrak{N}_3(5^n N'') = u_n,$$
$$\mathfrak{N}_1(5^n N'') = v_n,$$

on trouve que la fonction génératrice $F(x)$ de v_n est

$$F(x) = \frac{(-1)^N \mathfrak{B}_1}{1-x} + \frac{(-1)^N \left(\frac{N''}{5}\right) \mathfrak{B}_1}{1-5x},$$

d'où

$$v_n = (-1)^N \left[1 + 5^{n+1}\left(\frac{N''}{5}\right)\right] \mathfrak{B}_1;$$

donc enfin

$$\mathfrak{N}_1 = (-1)^N \left[1 + 5^{\nu+1}\left(\frac{N''}{5}\right)\right] \mathfrak{B}_1,$$

$$\mathfrak{N}_3 = (-1)^N \left[1 + 5^{\nu} \left(\frac{N''}{5}\right)\right] \mathfrak{B}_1;$$

ce sont les équations (92).

95. *Calcul de* $\mathfrak{N}_2(N)$, *cas de* N *pair*. — Partons de l'équation (VII) (Chap. III)

$$\theta_1^2 \theta^2 + 5 \bar{\theta}_1^2 \bar{\theta}^2 = 4 \bar{\theta}_1 \bar{\theta} \theta_1 \theta + \bar{\theta}_1^2 \theta^2 + \theta^2 \theta_1^2.$$

Les coefficients de q^{2N+1} sont visiblement nuls.

Égalons les coefficients de q^{2N}.

Il faut poser

$$\begin{array}{ll} N = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2, & \mathfrak{N}_2(N), \\ 2N = x'^2 + y'^2 + 5z'^2 + 5t'^2, & \mathfrak{N}_2(2N), \\ N = x''^2 + y''^2 + z''^2 + t''^2, & \mathcal{N}_0, \\ \dfrac{N}{5} = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 + t'''^2, & \mathcal{N}_0\left(\dfrac{N}{5}\right), \end{array}$$

et l'on a

$$4\Sigma(-1)^{x+y+z+t}+\Sigma(-1)^{x'+y'}+\Sigma(-1)^{z'+t'}=\Sigma(-1)^{x''+y''+z''+t''}+5\Sigma(-1)^{x'''+y'''+z'''+t'''}$$

ou

$$(95)\qquad (-1)^{N}.4\mathfrak{N}_2+2\Sigma(-1)^{x'+y'}=(-1)^{N}\mathfrak{M}_0+5(-1)^{N}\mathfrak{M}_0\left(\frac{N}{5}\right).$$

Supposons d'abord N *pair*, alors si x' et y' étaient de parité contraire, z' et t' seraient aussi de parité contraire et $2N$ serait $4\nu+2$, ce qui n'est pas, puisque N est pair. Donc, x' et y' sont de même parité.

Mais alors

$$N=\frac{x'^2+y'^2+5z'^2+5t'^2}{2}=\left(\frac{x'+y'}{2}\right)^2+\left(\frac{x'-y'}{2}\right)^2+5\left(\frac{z'+t'}{2}\right)^2+5\left(\frac{z'-t'}{2}\right)^2,$$

de sorte que

$$\Sigma(-1)^{x'+y'}=\mathfrak{N}_2(N).$$

Ainsi

$$6\mathfrak{N}_2(N)=\mathfrak{M}_0+5\mathfrak{M}_0\left(\frac{N}{5}\right).$$

Mais

$$\mathfrak{M}_0=6(5^{\nu+1}-1)U,$$

$$\mathfrak{M}_0\left(\frac{N}{5}\right)=6(5^{\nu}-1)U,$$

$$\mathfrak{N}_2(N)=2(5^{\nu+1}-3)U=4(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1)-2(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_1).$$

Si N est *impair*, l'équation (95) se réduit à une identité sans intérêt.

96. *Remarque.* — J. Liouville a donné, sans démonstration, l'expression de $\mathfrak{N}_2(N)$ (N pair) dans le *Journal de Mathématiques*, (2ᵉ série, t. X).

Eisenstein a donné l'expression de $\mathfrak{N}_1(N)$ dans le cas où N est impair, non divisible par 5 (*Journal de Crelle*, t. 35, p. 134), Liouville, dans le *Journal de Mathématiques* (2ᵉ série, t. IX) a donné des formules générales. Dans le même Volume, il donne aussi des formules pour le calcul de $\mathfrak{N}_3(N)$, mais toujours sans démonstration.

VII. — Relations diverses.

97. D'après un théorème d'Hermite ([1]), le nombre de décomposition d'un nombre P, congru à 3 (mod 8) en une somme de trois carrés dont les racines soient positives, est le nombre des classes des formes, primitives ou non, du discriminant P, de l'ordre propre.

Il en résulte que l'équation

$$\mathfrak{M}_1(\mathrm{N}) = \frac{1}{2}\left[1 + 5^{\nu+1}\left(\frac{\mathrm{N}''}{5}\right)\right][5\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1].$$

peut s'interpréter ainsi :

$$\sum_{x \geqq 0} \mathrm{F}[4\mathrm{N} - 5(2x+1)^2] = \frac{1}{32}\left[1 + 5^{\nu+1}\left(\frac{\mathrm{N}''}{5}\right)\right][5\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1] = 2^{\mu-3}\left[5^{\nu+1}\left(\frac{\mathrm{N}''}{5}\right) - (-1)^{\mu-3}\right]\mathrm{V},$$

N étant *pair*.

C'est un cas particulier d'une formule de Liouville, donnée sans démonstration dans le *Journal de Mathématiques* (2e série, t. XII, p. 98).

De même l'équation

$$\mathfrak{M}_3(\mathrm{N}) = \frac{1}{2}\left[1 + 5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}'}{5}\right)\right][5\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1]$$

s'interprète ainsi :

$$\sum_{x \geqq 0} \mathrm{F}\left[\frac{4\mathrm{N} - (2x+1)^2}{5}\right] = \frac{1}{32}\left[1 + 5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}''}{5}\right)\right][5\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1] = 2^{\mu-3}\left[5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}''}{5}\right) - (-1)^{\mu-3}\right]\mathrm{V}.$$

98. Prenons l'équation (VI) (Chap. III)

$$\frac{\bar{\theta}_1}{\theta_1} - \frac{\bar{\eta}_1}{\eta_1} - \frac{\bar{\theta}}{\theta} + 5\frac{\bar{\eta}_1\bar{\theta}_1\bar{\theta}}{\eta_1\theta_1\theta} = 0,$$

ou encore

$$5\bar{\eta}_1\bar{\theta}_1\bar{\theta}\,\eta_1 + \bar{\theta}_1\eta_1^2\theta - \bar{\theta}\,\eta_1^2\theta_1 - \bar{\eta}_1\theta_1\eta_1\theta = 0;$$

([1]) Lettre adressée à M. Liouville sur la théorie des fonctions elliptiques et ses application à l'Arithmétique (*Œuvres*, t. II, p. 122).

d'où [formules (19) et (20), Chap. II]

$$5\eta_1\eta'(q^5) - \eta_1(q^5)\eta'(q) + 4\theta_1(q^5)\Sigma q^{\frac{2\nu+1}{2}} F(4\nu+2)(-1)^\nu - 4\theta(q^5)\Sigma q^{\frac{2\nu+1}{2}} F(4\nu+2) = 0.$$

Cherchons les coefficients de $q^{N'+\frac{1}{2}}$ dans les deux membres. Il faut que N' soit impair, car les termes où N' est pair se détruisent.

Il faudra donc poser

$$2\left(2N+1+\frac{1}{2}\right) = 4N+3 = 2\nu+1+10m^2,$$

et le coefficient est

$$4\Sigma F[8N+6-20m^2][(-1)^\nu - (-1)^m] = -8\Sigma(-1)^m \Sigma F(8N+6-20m^2).$$

Dans les deux premiers termes, on posera

$$2N + \frac{3}{2} = \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{5(2y+1)^2}{2}$$

ou

$$8N+6 = (2x+1)^2 + 5(2y+1)^2,$$

avec

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0,$$

et le coefficient est

$$20\Sigma(-1)^y(2y+1) - 4\Sigma(2x+1)(-1)^x;$$

donc enfin

$$2\Sigma(-1)^m F[8N+6-20m^2] = \Sigma[5(2y+1)(-1)^y - (2x+1)(-1)^x],$$

ou encore, en changeant de notation,

$$(96) \qquad 2\Sigma(-1)^m F[4N+2-20m^2] = \Sigma\, 5(2y+1)(-1)^y - (2x+1)(-1)^x,$$

avec

$$4N+2 = (2x+1)^2 + 5(2y+1);$$

$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad m \gtreqless 0.$$

Le second membre de (96) n'est d'ailleurs différent de zéro que si

$$N \equiv 1 \text{ ou } 3 \qquad (\text{mod } 10).$$

99. Prenons enfin l'équation (X) (Chap. III)

$$(\overline{\theta}_1\theta - \overline{\theta}\theta_1)(5\overline{\eta}_1^2 - \eta_1^2) = 4\overline{\eta}_1\eta_1\theta_1\theta;$$

en utilisant

$$\frac{\overline{\theta}_1}{\theta_1} - \frac{\overline{\eta}_1}{\eta_1} - \frac{\overline{\theta}}{\theta} + 5\frac{\overline{\eta}_1\overline{\theta}_1\overline{\theta}}{\eta_1\theta_1\theta} = 0,$$

il vient

$$\overline{\eta}_1\eta_1\theta_1\theta - \eta_1\overline{\eta}_1\overline{\theta}_1\overline{\theta} = \overline{\eta}_1^2\overline{\theta}_1\theta - \overline{\eta}_1^2\overline{\theta}\theta_1;$$

égalons les coefficients de $q^{N'+\frac{1}{2}}$.

Il faut nécessairement que N′ soit impair, sans quoi, les coefficients sont nuls dans les deux membres.

Au second membre, on remplacera $\overline{\eta}_1^2\overline{\theta}_1$ et $\overline{\eta}_1^2\overline{\theta}$ par leurs valeurs, comme au n° **98** et l'on trouve comme coefficient du second membre

$$8\Sigma F\left(\frac{8N+6-4m^2}{5}\right)(-1)^m.$$

Au premier membre, il faut encore poser

$$8N+6 = 5(2y+1)^2 + (2x+1)^2,$$
$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0;$$

donc

$$2\Sigma(-1)^m F\left(\frac{8N+6-4m^2}{5}\right) = \Sigma[(2x+1)(-1)^x - (2y+1)(-1)^y],$$

le symbole $F(\Delta)$ étant remplacé par o si Δ n'est pas entier.

On peut encore écrire

$$(97) \qquad 2\Sigma(-1)^m F\left(\frac{4N+2-4m^2}{5}\right) = \Sigma[(2x+1)(-1)^x - (2y+1)(-1)^y],$$

avec

$$4N+2 = (2x+1)^2 + 5(2y+1)^2,$$
$$x \geqq 0, \qquad y \geqq 0, \qquad m \gtreqless 0$$

et l'on voit encore que la formule n'a d'intérêt que si

$$N \equiv 1 \text{ ou } 3 \pmod{10}.$$

La comparaison des formules (96) et (97) donne

$$(98) \qquad \sum(-1)^m\left\{F[4N+2-20m^2] + F\left[\frac{4N+2-4m^2}{5}\right]\right\} = 2\Sigma(2y+1)(-1)^y$$

et

$$(99)\quad \sum(-1)^m \left\{ F[4N+2-20m^2] + 5F\left[\frac{4N+2-4m^2}{5}\right] \right\} = 2\Sigma(2x+1)(-1)^x.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces considérations qui sortent un peu de notre sujet.

100. *Résumé.* — Rappelons que nous avons posé

$$N = 5^\nu N'' = 2^\mu . 5^\nu N''' \qquad \text{avec} \qquad \left(\frac{N''}{5}\right) \not\equiv 0.$$

Alors

$$\mathcal{N}_0 = 4[2+(-1)^N](\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1) = 2[2+(-1)^N](5^{\nu+1}-1)U,$$
$$\mathcal{M}_0 = 16\mathfrak{A} = 4(5^{\nu+1}-1)U,$$
$$\mathcal{O} = 3\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1 = 2^{\mu+2}U,$$
$$\mathcal{S} = 2(-1)^N\mathfrak{C}_1 = 2(-1)^N(2^{\mu+1}-3)U,$$
$$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2}\left[1+5^{\nu+1}\left(\frac{N''}{5}\right)\right](5\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1) = 2^{\mu+1}\left[5^{\nu+1}\left(\frac{N'''}{5}\right)-(-1)^{\mu+1}\right]V,$$
$$\mathfrak{M}_2 = \frac{1}{2}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{N''}{5}\right)\right](5\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1) = 2^{\mu+1}\left[5^{\nu}\left(\frac{N'''}{5}\right)-(-1)^{\mu+1}\right]V,$$
$$\mathfrak{U}_1 = (-1)^N\left[1+5^{\nu+1}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1 = -(-1)^N\frac{\left[1+5^{\nu+1}(-1)^\mu\left(\frac{N'''}{5}\right)\right][5+(-2)^{\mu+1}]}{3}V,$$
$$\mathfrak{U}_3 = (-1)^N\left[1+5^{\nu}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1 = -(-1)^N\frac{\left[1+5^{\nu}(-1)^\mu\left(\frac{N'''}{5}\right)\right][5+(-2)^{\mu+1}]}{3}V,$$
$$\mathfrak{U}_2 = 4(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1) - 2(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_1) = 2(5^{\nu+1}-3)U \qquad (\text{N pair seulement}).$$

De plus, si $N \equiv \pm 1 \pmod{10}$,

$$2\mathcal{N}_3 = \mathcal{N}_2,$$
$$\mathcal{O}_1(2N) = 2\mathcal{H},$$
$$\mathcal{S}_2(2N) = \mathcal{S}_1,$$
$$\mathcal{P}_2(4N) = \mathcal{P}_2,$$
$$3\mathcal{N}_3(4N) - \mathcal{N}_1(4N) = 3(3\mathcal{N}_3 - \mathcal{N}_1),$$
$$\mathcal{S}_1(4N) + \mathcal{S}_1(N) = 4\mathfrak{A},$$
$$4\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_1(25N) = 56\mathfrak{A} \qquad (\textit{voir } \text{n}^\text{o}\ \textbf{115});$$

si $N \equiv \pm 3 \pmod{10}$,

$$\mathcal{N}_3 = 0,$$
$$\mathcal{E}_2(2N) = 2\mathcal{K},$$
$$\mathcal{S}_1(2N) = \mathcal{S}_2,$$
$$\mathcal{P}_1(4N) = \mathcal{P}_1,$$
$$\mathcal{N}_2(4N) = 3\mathcal{N}_2,$$
$$\mathcal{S}_2(4N) + \mathcal{S}_2 = 4\mathfrak{A},$$
$$3(5\mathcal{N}_2 - 2\mathcal{N}_1) + \mathcal{N}_1(25N) = \mathfrak{A} \qquad (\textit{voir } \text{n}^\circ\ \mathbf{115});$$

si $N \equiv 5 \pmod{10}$,

$$3\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1 = \frac{16}{25}(\mathfrak{A} - 6\mathfrak{C}) = 4(5^{\nu-1} - 1)\mathbf{U},$$
$$\mathcal{N}_3 = \frac{8}{25}(\mathfrak{A} - 6\mathfrak{C}) = 2(5^{\nu-1} - 1)\mathbf{U};$$

si $N \equiv \pm 4 \pmod{10}$,

$$\mathcal{N}_1 = 3\mathfrak{A} - 3\mathfrak{A}_1 = 6\mathbf{U},$$
$$\mathcal{N}_2 = 2\mathcal{N}_3,$$
$$\mathcal{E}_1(2N) = \mathcal{F},$$
$$\mathcal{S}_2(2N) = \mathcal{S}_1 + \mathcal{E}_2,$$
$$\mathcal{N}_1(4N) = \mathcal{N}_1,$$
$$\mathcal{N}_2(4N) = \mathcal{N}_2,$$
$$\mathcal{P}_2(4N) = \mathcal{P}_2 + \mathcal{V}_2,$$
$$\mathcal{S}_1(4N) + \mathcal{S}_1 + \mathcal{E}_2 = 4\mathfrak{A};$$

si $N \equiv \pm 2 \pmod{10}$,

$$2\mathcal{N}_1 - 5\mathcal{N}_2 = 2\mathfrak{A} - 2\mathfrak{A}_1 = 4\mathbf{U},$$
$$\mathcal{N}_3 = 0.$$
$$\mathcal{E}_2(2N) = \mathcal{F},$$
$$\mathcal{S}_1(2N) = \mathcal{S}_2 + \mathcal{E}_1,$$
$$\mathcal{N}_1(4N) = \mathcal{N}_1,$$
$$\mathcal{P}_1(4N) = \mathcal{P}_1 + \mathcal{V}_1,$$
$$\mathcal{S}_2(4N) + \mathcal{S}_1 + \mathcal{E}_1 = 4\mathfrak{A};$$

si $N \equiv 0 \pmod{10}$,

$$\mathcal{N}_1 = \frac{12}{5}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1) - \frac{12}{5}(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1) = 6(5^{\nu} - 1)\mathbf{U},$$
$$\mathcal{N}_2 = \frac{28}{25}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1) - \frac{68}{25}(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1) = 2(7.5^{\nu-1} - 3)\mathbf{U},$$
$$\mathcal{N}_3 = \frac{12}{25}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1) - \frac{72}{25}(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_1) = 6(5^{\nu-1} - 1)\mathbf{U}.$$

Relations entre les nombres de classes :

$$\sum_{x\geqq 0} F[4N-5(2x+1)^2] = \frac{1}{32}\left[1+5^{\nu+1}\left(\frac{N''}{5}\right)\right](5\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1) = 2^{\mu-3}\left[5^{\nu+1}\left(\frac{N'''}{5}\right)-(-1)^{\mu-3}\right]V,$$

$$\sum_{x\geqq 0} F\left[\frac{4N-(2x+1)^2}{5}\right] = \frac{1}{32}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{N''}{5}\right)\right](5\mathfrak{B}+\mathfrak{B}_1) = 2^{\mu-3}\left[5^{\nu}\left(\frac{N'''}{5}\right)-(-1)^{\mu-3}\right]V$$

et

$$\sum_{x \lesseqgtr 0}(-1)^x\left\{F[4N+2-20x^2] + F\left[\frac{4N+2-4x^2}{5}\right]\right\} = 2\Sigma(2\eta+1)(-1)^\eta,$$

$$\sum_{x \lesseqgtr 0}(-1)^x\left\{F[4N+2-20x^2] + 5F\left[\frac{4N+2-4x^2}{5}\right]\right\} = 2\Sigma(2\xi+1)(-1)^\xi,$$

avec

$$4N+2=(2\xi+1)^2+5(2\eta+1)^2 \qquad (\xi\geqq 0,\ \eta\geqq 0).$$

A ces formules il convient d'adjoindre celles du n° **147**.

La signification des lettres est donnée aux n°s **54** et **55** pour les décompositions en carrés et au n° **5** pour les sommes de diviseurs.

CHAPITRE V.

APPLICATION AU CALCUL DES NOMBRES DE CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES BINAIRES.

I. — Expressions des sommes $\sum F(8M+4-x^2)$.

101. Partons de la relation d'Hermite [Chapitre II, formule (17)]

$$\eta_1^3(\sqrt{q}) = 8\sum_0 q^{\frac{8\nu+3}{8}} F(8\nu+3). \tag{1}$$

Multiplions les deux membres par

$$\sum q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}.$$

On trouve, en supposant N impair,

$$8\sum F[4N-(2x+1)^2]=\mathfrak{M}_0=16\mathfrak{A}. \tag{2}$$

Multiplions maintenant les deux membres de (1) par

$$\sum q^{\frac{(10m\pm1)^2}{8}},$$

puis par

$$\sum q^{\frac{(10m\pm3)^2}{8}},$$

puis par

$$\sum q^{\frac{(10m+5)^2}{8}}.$$

On obtient alors les résultats désirés si l'on tient compte des relations du Chapitre IV.

Supposons par exemple $N\equiv 1 \pmod{10}$, et égalons les coefficients de $q^{\frac{N}{2}}$ aux deux membres : il faut poser, dans le premier membre

$$\frac{N}{2}=\frac{(2x+1)^2}{8}+\frac{(2y+1)^2}{8}+\frac{(2z+1)^2}{8}+\frac{(10m\pm1)^2}{8}.$$

et prendre le nombre de ces représentations, ou encore des représentations

$$4N=(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2+(10m\pm1)^2. \tag{3}$$

Or, le Tableau du nº **60** montre que les décompositions (3) ne peuvent être que des décompositions $\mathfrak{M}'_0$ et $\mathfrak{M}'_1$. Il y aura d'ailleurs *toutes* les décompositions $\mathfrak{M}'_0$ et, parmi les décompositions $\mathfrak{M}'_1$, uniquement celles pour lesquelles le quatrième carré est congru à 1 (mod 10), c'est-à-dire évidemment $\frac{1}{4}$ des décompositions $\mathfrak{M}'_1$.

Le coefficient $q^{\frac{N}{2}}$ au premier membre est donc

$$\mathfrak{M}'_0+\frac{1}{4}\mathfrak{M}'_1.$$

Au second membre il faut poser

$$\frac{N}{2}=\frac{8\nu+3}{8}+\frac{(10m\pm1)^2}{8}$$

d'où

$$8\nu + 3 = 4N - (10m \pm 1)^2$$

et le coefficient de $q^{\frac{N}{2}}$ est

$$8\Sigma F[4N - (10m \pm 1)^2],$$

donc

$$8\Sigma F[4N - (10m \pm 1)^2] = \mathfrak{M}'_0 + \frac{1}{4}\mathfrak{M}'_3.$$

Le second membre se transforme au moyen du n° **63**

$$\mathfrak{M}'_0 + \frac{1}{4}\mathfrak{M}'_1 = \mathfrak{N}'_3 - \frac{\mathfrak{N}'_1}{2} + 8\mathfrak{A} = 10\mathfrak{N}_3 - 2\mathfrak{N}_1 + 8\mathfrak{A},$$

donc en définitive

$$\Sigma F[4N - (10\sigma \pm 1)^2] = \frac{5}{4}\mathfrak{N}_3 - \frac{1}{4}\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Remarquons de plus que

$$4N - (2x + 1)^2 \equiv 3 \pmod 8,$$

puisque N est impair.

Mais on sait que

$$F(\Delta) = 3F_1(\Delta)$$

si

$$\Delta \equiv 3 \pmod 8.$$

On aura donc, par la méthode qui précède, les sommes

$$\Sigma F[4N - (2x + 1)^2]$$

et les sommes

$$\Sigma F_1[4N - (2x + 1)^2].$$

Les quatorze autres cas se traitent de la même manière. Nous nous contenterons de donner les résultats.

102. 1° $N \equiv 1 \pmod{10}$

$$\Sigma F[4N - (10\sigma \pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N - (10\sigma \pm 1)^2] = \frac{5}{4}\mathfrak{N}_3 - \frac{1}{4}\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{A},$$

$$\Sigma F[4N - (10\sigma \pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N - (10\sigma \pm 3)^2] = -\frac{5}{4}\mathfrak{N}_3 + \frac{3}{8}\mathfrak{N}_1 + \frac{1}{4}\mathfrak{A},$$

$$\Sigma F[4N - (10\sigma + 5)^2] = 3\Sigma F_1[4N - (10\sigma + 5)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{N}_1 + \frac{3}{4}\mathfrak{A}.$$

2° $N \equiv -1 \pmod{10}$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = -\frac{5}{4}\mathfrak{N}_3 + \frac{3}{8}\mathfrak{N}_1 + \frac{1}{4}\mathfrak{A},$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \frac{5}{4}\mathfrak{N}_3 - \frac{1}{4}\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{A},$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma+ 5)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma+ 5)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{N}_1 + \frac{3}{4}\mathfrak{A}.$$

3° $N \equiv 3 \pmod{10}$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = -\frac{15}{16}\mathfrak{N}_2 + \frac{3}{8}\mathfrak{N}_1 + \frac{3}{4}\mathfrak{A},$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = -\frac{1}{4}\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{A},$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma+ 5)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma+ 5)^2] = \frac{15}{16}\mathfrak{N}_2 - \frac{1}{8}\mathfrak{N}_1 + \frac{1}{4}\mathfrak{A}.$$

4° $N \equiv -3 \pmod{10}$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = -\frac{1}{4}\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{A},$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = -\frac{15}{16}\mathfrak{N}_2 + \frac{3}{8}\mathfrak{N}_1 + \frac{3}{4}\mathfrak{A},$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma+ 5)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma+ 5)^2] = \frac{15}{16}\mathfrak{N}_2 - \frac{1}{8}\mathfrak{N}_1 + \frac{1}{4}\mathfrak{A}.$$

5° $N \equiv 5$ (mod 1σ)

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \frac{\mathfrak{N}_1}{16} + \frac{7}{10}\mathfrak{A} + \frac{3}{10}\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{N}_1}{16} + \frac{7.5^{\nu}+1}{8}U,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \frac{\mathfrak{N}_1}{16} + \frac{7}{10}\mathfrak{A} + \frac{3}{10}\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{N}_1}{16} + \frac{7.5^{\nu}+1}{8}U,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma+5)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2] = -\frac{\mathfrak{N}_1}{8} + \frac{3}{5}\mathfrak{A} - \frac{3}{5}\mathfrak{C} = -\frac{\mathfrak{N}_1}{8} + \frac{3}{4}(5^{\nu}-1)U.$$

Dans ces formules, σ prend toutes les valeurs entières, positives, négatives ou nulles, rendant les crochets positifs.

On peut remarquer, comme vérification, que la somme des seconds membres de chaque groupe donne $2\mathfrak{A}$, conformément à la formule (2),

II. — Expressions des sommes $\sum \mathrm{F}\left(\frac{8\mathrm{M} \pm 4 - x^2}{25}\right)$.

103. Partons encore de la relation d'Hermite

$$\eta_1^3\left(q^{\frac{1}{2}}\right) = 8\sum_0 q^{\frac{8\nu+3}{8}} \mathrm{F}(8\nu + 3).$$

Multiplions les deux membres par

$$\sum q^{\frac{(2t+1)^2}{8} \pm \frac{2t+1}{10}},$$

et égalons les coefficients de $q^{\frac{\mathrm{M}}{5}}$. Il faut poser, pour le premier membre

$$\frac{\mathrm{M}}{5} = \frac{(2x+1)^2}{8} + \frac{(2y+1)^2}{8} + \frac{(2z+1)^2}{8} + \frac{(2t+1)^2}{8} \pm \frac{2t+1}{10}$$

ou

$$40\mathrm{M} + 4 = [5(2x+1)]^2 + [5(2y+1)]^2 + [5(2z+1)]^2 + [5(2t+1) \pm 2]^2$$

ou

$$40\mathrm{M} + 4 = 25(2x+1)^2 + 25(2y+1)^2 + 25(2z+1)^2 + (10t' \pm 3)^2$$

et, en posant $\mathrm{N} = 10\mathrm{M} + 1$, on voit qu'il faudra prendre le quart des décompositions $\mathfrak{M}'_3$.

Au second membre, il faut poser

$$\frac{\mathrm{M}}{5} = \frac{8\nu+3}{8} + \frac{(2t+1)^2}{8} \pm \frac{2t+1}{10},$$

d'où

$$8\nu + 3 = \frac{40\mathrm{M} + 4 - (10t \pm 3)^2}{25} = \frac{4\mathrm{N} - (10t \pm 3)^2}{25}.$$

Ainsi

$$8\sum \mathrm{F}\left[\frac{4\mathrm{N} - (10t \pm 3)^2}{25}\right] = \frac{\mathfrak{M}'_3}{4} = \frac{8\mathfrak{A} - \mathfrak{N}'_1 - \mathfrak{N}'_3}{4} = \frac{8\mathfrak{A} + 8\mathfrak{N}_3 - 4\mathfrak{N}_1}{4}$$

avec $\mathrm{N} \equiv 1 \pmod{10}$.

En multipliant les deux membres de (1) par

$$\sum q^{\frac{(2t+1)^2}{8} \pm 3\frac{2t+1}{10}},$$

on trouve par des calculs analogues

$$8\sum F\left[\frac{4N-(10t\pm 1)^2}{25}\right]=\frac{8\mathfrak{A}+8\mathfrak{N}_3-4\mathfrak{N}_1}{4}$$

avec

$$N\equiv -1 \qquad (\text{mod}\, 10).$$

104. Ainsi

1° $N\equiv 1$ (mod 10)

$$\sum F\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right]=3\sum F_1\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right]=\frac{1}{4}\mathfrak{N}_3-\frac{1}{8}\mathfrak{N}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{A}.$$

2° $N\equiv -1$ (mod 10)

$$\sum F\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 1)^2}{25}\right]=3\sum F_1\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right]=\frac{1}{4}\mathfrak{N}_3-\frac{1}{8}\mathfrak{N}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{A}.$$

σ prend toutes les valeurs entières, positives, négatives ou nulles, rendant positif et entier le crochet. Pour les autres valeurs de σ, il faut remplacer les F correspondants par zéro.

III. — Expressions des sommes $\sum F(8M-x^2)$.

105. Nous partirons de l'équation de MM. Petr et Humbert (16) (Chapitre II)

$$\eta_1\theta_1 H_1\Theta_1\frac{H^2}{\Theta^2}=2H_1(x,\sqrt{q})\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}}F(8\nu+7)$$
$$-4\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\left[(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{8}}+(2m-5)q^{-\frac{(2m-5)^2}{8}}+\ldots\right]\cos(2m+1)x.$$

Remplaçons-y x successivement par $\frac{\pi}{5}$, puis $\frac{2\pi}{5}$, multiplions la seconde équation par λ et ajoutons membre à membre. Le premier membre devient, en vertu des formules

$$\mathrm{H}_1\Theta_1 = \frac{1}{2}\eta_1\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{H}_1\left(x, q^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$\eta_1\,\theta_1 = \frac{1}{2}\eta_1^2\left(q^{\frac{1}{2}}\right):$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\eta_1^3\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{\pi}{5}, \sqrt{q}\right)\frac{\mathrm{X}^2}{\mathrm{Z}^2} + \frac{\lambda}{4}\eta_1^3\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{2\pi}{5}, \sqrt{q}\right)\frac{\mathrm{X}_1^2}{\mathrm{Z}_1^2}\\
= {} & \frac{1}{4}\eta_1^3\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\left[\mathrm{H}_1\left(\frac{\pi}{5}, \sqrt{q}\right)\frac{\mathrm{X}^2}{\mathrm{Z}^2} + \lambda\,\mathrm{H}_1\left(\frac{2\pi}{5}, \sqrt{q}\right)\frac{\mathrm{X}_1^2}{\mathrm{Z}_1^2}\right]\\
= {} & \frac{1}{8}\eta_1^3\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\mathrm{X}^2}{\mathrm{Z}^2} + \frac{\mathrm{X}_1^2}{\mathrm{Z}_1^2}\right)\left[\mathrm{H}_1\left(\frac{\pi}{5}, \sqrt{q}\right) + \lambda\,\mathrm{H}_1\left(\frac{2\pi}{5}, \sqrt{q}\right)\right]\\
& + \frac{1}{8}\eta_1^3\left(q^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\mathrm{X}^2}{\mathrm{Z}^2} - \frac{\mathrm{X}_1^2}{\mathrm{Z}_1^2}\right)\left[\mathrm{H}_1\left(\frac{\pi}{5}, \sqrt{q}\right) - \lambda\,\mathrm{H}_1\left(\frac{2\pi}{5}, \sqrt{q}\right)\right];
\end{aligned}$$

d'où, par (II) et (VIII) (Chapitre III),

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{4}\eta_1\left(q^{\frac{5}{2}}\right)[\theta_1(q^5)\eta_1 + \eta_1(q^5)\theta_1]\left[\mathrm{H}_1\left(\frac{\pi}{5}, \sqrt{q}\right) + \lambda\,\mathrm{H}_1\left(\frac{2\pi}{5}, \sqrt{q}\right)\right]\\
&- \frac{\sqrt{5}}{4}\eta_1\left(q^{\frac{5}{2}}\right)[\eta_1\theta_1 - 5\,\eta_1(q^5)\,\theta_1(q^5)]\left[\mathrm{H}_1\left(\frac{\pi}{5}, \sqrt{q}\right) - \lambda\,\mathrm{H}_1\left(\frac{2\pi}{5}, \sqrt{q}\right)\right]
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&\frac{5}{4}\eta_1\left(q^{\frac{5}{2}}\right)[\theta_1(q^5)\eta_1 + \eta_1(q^5)\,\theta_1]\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\left[\cos(2m+1)\frac{\pi}{5} + \lambda\cos(4m+2)\frac{\pi}{5}\right]\right\}\\
&- \frac{\sqrt{5}}{8}\eta_1\left(q^{\frac{5}{2}}\right)\left[\eta_1^2\left(q^{\frac{1}{2}}\right) - 5\,\eta_1^2\left(q^{\frac{5}{2}}\right)\right]\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\left[\cos(2m+1)\frac{\pi}{5} - \lambda\cos(4m+2)\frac{\pi}{5}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Calculons $\cos(2m+1)\frac{\pi}{5}$ et $\cos(4m+2)\frac{\pi}{5}$.

Si $m \equiv 0 \pmod 5$, on a (n° **30**)

$$\cos(2m+1)\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1);$$

Si $m \equiv 1$

$$\cos(2m+1)\frac{\pi}{5} = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1);$$

Si $m \equiv 2$

$$\cos(2m+1)\frac{\pi}{5} = -1;$$

Si $m \equiv 3$

$$\cos(2m+1)\frac{\pi}{5} = -\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1);$$

Si $m \equiv 4$

$$\cos(2m+1)\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1);$$

donc, quel que soit m,

$$2\cos(2m+1)\frac{\pi}{5} = \frac{5}{2}\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{5}\right)\frac{\sqrt{5}}{2} - 2;$$

de même,

$$2\cos(4m+2)\frac{\pi}{5} = -\frac{5}{2}\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{5}\right)\frac{\sqrt{5}}{2} + 2.$$

Donc

$$\cos(2m+1)\frac{\pi}{5} + \lambda\cos(4m+2)\frac{\pi}{5} = \frac{5}{4}\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2(1-\lambda) + \frac{\sqrt{5}}{4}(1+\lambda)\left(\frac{2m+1}{5}\right) - 1 + \lambda,$$

$$\cos(2m+1)\frac{\pi}{5} - \lambda\cos(4m+2)\frac{\pi}{5} = \frac{5}{4}\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2(1+\lambda) + \frac{\sqrt{5}}{4}(1-\lambda)\left(\frac{2m+1}{5}\right) - 1 - \lambda.$$

Égalons les coefficients de q^{M} dans les deux membres.

Dans la première ligne du premier membre, il faudra poser

$$\frac{5(2x+1)^2}{8} + 5y^2 + \frac{(2z+1)^2}{4} + \frac{(2t+1)^2}{8} = \mathrm{M}$$

et

$$\frac{5(2x+1)^2}{8} + \frac{5(2y+1)^2}{4} + z^2 + \frac{(2t+1)^2}{8} = \mathrm{M}$$

ou

$$8\mathrm{M} = 5(2t+1)^2 + 40y^2 + 2(2z+1)^2 + (2x+1)^2$$

et

$$8\mathrm{M} = 5(2t+1)^2 + 10(2y+1)^2 + 8z^2 + (2x+1)^2;$$

donc, indifféremment,

$$8\mathrm{M} = 5(2t+1)^2 + 10y^2 + 2z^2 + (2x+1)^2$$

et, en posant $\mathrm{N} = 2\mathrm{M}$,

$$4\mathrm{N} = 5(2t+1)^2 + 10y^2 + 2z^2 + (2x+1)^2.$$

On reconnaît les décompositions Θ.

Le coefficient correspondant sera

$$(5)\qquad \sum \frac{5}{4}\left[\frac{5}{4}\left(\frac{2x+1}{5}\right)^2(1-\lambda)+\frac{\sqrt{5}}{4}(1+\lambda)\left(\frac{2x+1}{5}\right)-1+\lambda\right].$$

Dans la seconde ligne du premier membre, il faudra poser

$$4N = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2 + 5(2t+1)^2$$

et

$$4N = 5(2x'+1)^2 + 5(2y'+1)^2 + 5(2z'+1)^2 + (2t'+1)^2.$$

On reconnaît les décompositions $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_3$.

Il faudra prendre

$$(6)\qquad -\frac{\sqrt{5}}{8}\sum\left[\frac{5}{4}(1+\lambda)\left(\frac{2z+1}{5}\right)^2+\frac{\sqrt{5}}{4}(1-\lambda)\left(\frac{2z+1}{5}\right)-1-\lambda\right]$$

$$(7)\qquad +\frac{5\sqrt{5}}{8}\sum\left[\frac{5}{4}(1+\lambda)\left(\frac{2t'+1}{5}\right)^2+\frac{\sqrt{5}}{4}(1-\lambda)\left(\frac{2t'+1}{5}\right)-1-\lambda\right].$$

Le *second membre* est

$$2H_1\left(\frac{\pi}{5}, \sqrt{q}\right)\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}}F(8\nu+7) + 2\lambda H_1\left(\frac{2\pi}{5}, \sqrt{q}\right)\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}}F(8\nu+7)$$

$$-4\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{4}}\left[(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{8}}+(2m-5)q^{-\frac{(2m-5)^2}{8}}+\ldots\right]$$

$$\times\left[\frac{5}{4}\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2(1-\lambda)+\frac{\sqrt{5}}{4}(1+\lambda)\left(\frac{2m+1}{5}\right)-1+\lambda\right].$$

On posera donc

$$\frac{N}{2} = \frac{8\nu+7}{8} + \frac{(2m+1)^2}{8},$$

et la première ligne donnera

$$(8)\qquad 2\sum F[4N-(2m+1)^2]\left[\frac{5}{4}(1-\lambda)\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2+\frac{\sqrt{5}}{4}(1+\lambda)\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2-1+\lambda\right].$$

Dans la seconde partie il faudra poser

$$\frac{N}{2} = \frac{(2m+1)^2}{8} - \frac{[2m-(4\mu+1)]^2}{8},$$

d'où

$$N = (2m - 2\mu)(2\mu + 1) = d_1^p d^t;$$

d'ailleurs

$$2m - 2\mu > 2\mu + 1,$$

car cette inégalité revient à

$$2m - 1 > 4\mu,$$

qui est évidemment remplie.

Donc

$$d_1^p > d^t \qquad (\textit{voir } \text{n}^\circ\ \mathbf{5}).$$

Enfin

$$2m + 1 = d_1^p + d^t$$

et

$$2m - (4\mu + 1) = d_1^p - d^t.$$

Donc le coefficient de $q^{\frac{N}{2}}$ dans la seconde partie est

$$(9) \qquad -4\sum (d_1^p - d^t)\left[\frac{5}{4}(1-\lambda)\left(\frac{d_1^p + d^t}{5}\right)^2 + \frac{\sqrt{5}}{4}(1+\lambda)\left(\frac{d_1^p + d^t}{5}\right) - 1 + \lambda\right].$$

Pour préciser ces résultats, il convient de distinguer divers cas.

106. 1° $N \equiv +2 \pmod{10}$.

Premier membre. — Alors

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{F};$$

$\mathfrak{S}_1$ étant le nombre des décompositions $\mathfrak{S}$ où $2x + 1 \equiv 0 \pmod 5$ et $\mathfrak{F}$ étant le nombre des décompositions $\mathfrak{S}$ où $(2x+1)^2 \equiv 1 \pmod 5$.

Le coefficient correspondant (5) est alors

$$(10) \qquad \frac{5}{4}\left[\frac{5}{4}\mathfrak{F}(1-\lambda) + \frac{\sqrt{5}}{4}(1+\lambda)\underline{\mathfrak{F}} - (1-\lambda)\mathfrak{S}\right].$$

Posons

$$\lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \lambda_1.$$

Alors (10) devient

$$\frac{5(\sqrt{5}+1)}{8}\mathfrak{S}.$$

Posons

$$\lambda = -\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \lambda_2,$$

(10) devient alors

$$-\frac{5}{2}\mathfrak{S}_1\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}.$$

Passons au terme correspondant à la décomposition $\mathfrak{M}_1$.

Remarquons que

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2 \equiv 3 \pmod 5;$$

d'où, pour

$$(2x+1)^2, \quad (y+1)^2, \quad (2z+1)^2,$$

les valeurs (mod 5)

$$\begin{array}{ccc} 1, & 1, & 1, \\ 0, & -1, & -1. \end{array}$$

Le nombre des décompositions correspondant à la seconde ligne est ce que nous avons appelé $\mathfrak{B}_1$.

Le nombre des décompositions correspondant à la première ligne est alors

$$\mathfrak{M}_1 - 3\mathfrak{B}_1.$$

Le terme (6) devient alors

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{5}}{8}\Big\{&\frac{5}{4}(1+\lambda)[(\mathfrak{M}_1-3\mathfrak{B}_1)+2\mathfrak{B}_1] \\ &+\frac{\sqrt{5}}{4}(1-\lambda)[(\mathfrak{M}_1-3\mathfrak{B}_1)-2\mathfrak{B}_1]-(1+\lambda)[3\mathfrak{B}_1+(\mathfrak{M}_1-3\mathfrak{B}_1)]\Big\} \\ = -\frac{\sqrt{5}}{8}&(\mathfrak{M}_1-5\mathfrak{B}_1)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}\lambda\right). \end{aligned}$$

Si donc $\lambda = \lambda_1$, le terme est zéro ; si $\lambda = \lambda_2$, il est

$$\frac{\sqrt{5}}{16}(1+\sqrt{5})(\mathfrak{M}_1-5\mathfrak{B}_1).$$

Enfin, comme $4N$ n'est pas résidu quadratique de 5,

$$\mathfrak{M}_3 = 0.$$

Donc, le terme (7) est toujours nul.

Second membre. — On l'a immédiatement.

Pour $\lambda = \lambda_1$, c'est

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{5}-1}\,2\sum F[4N-(2m+1)^2]\left[-\frac{5}{2}\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2+\frac{5}{2}\left(\frac{2m+1}{5}\right)+2\right]\\ &\qquad -\frac{4}{\sqrt{5}-1}\sum (d_1^p-d^1)\left[-\frac{5}{2}\left(\frac{d_1^p+d^1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\left(\frac{d_1^p+d^1}{2}\right)+2\right].\end{aligned}$$

Pour $\lambda = \lambda_2$, c'est

$$\begin{aligned}&\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\sum F[4N-(2m+1)^2]\left[\frac{5}{2}\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{2m+1}{5}\right)-2\right]\\ &\qquad -\frac{4}{\sqrt{5}-1}\sum (d_1^p-d^1)\left[\frac{5}{2}\left(\frac{d_1^p+d^1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{d_1^p+d^1}{2}\right)-2\right];\end{aligned}$$

d'ailleurs

$$d_1^p + d^1 \equiv \pm 2 \pmod{5},$$

donc

$$\left(\frac{d_1^p+d^1}{5}\right) = -1.$$

Enfin, en égalant les deux membres on trouve, pour $\lambda = \lambda_1$,

$$\begin{aligned}(11)\qquad &2\Sigma F[4N-(10h+5)^2]\\ &+2\Sigma F[4N-(10h\pm 1)^2]-3\Sigma F[4N-(10h\pm 3)^2]=\frac{5}{4}\mathfrak{C}-6\Sigma(d_1^p-d^1)\end{aligned}$$

et, pour $\lambda = \lambda_2$,

$$(12)\qquad -2\Sigma F[4N-(10h+5)^2]+\Sigma F[4N-(10h\pm 3)^2]=-\frac{5}{4}\mathfrak{C}_1-\frac{1}{8}(\mathfrak{M}_1-5\mathfrak{N}_1).$$

On connaît d'ailleurs une troisième relation entre

$$\Sigma F[4N-(10h-5)^2],\qquad \Sigma F(4N-(10h\pm 1)^2]\qquad \text{et}\qquad \Sigma F[4N-(10h\pm 3)^2],$$

c'est la relation de Kronecker

$$\Sigma F[4N-(2x+1)^2] = 2\Sigma(d_1^p-d^1)$$

qui s'écrit

$$\begin{aligned}(13)\qquad &\Sigma F[4N-(10h+5)^2]\\ &+\Sigma F[4N-(10h\pm 3)^2]+\Sigma F[4N-(10h\pm 1)^2]=2\Sigma(d_1^p-d^1).\end{aligned}$$

En résolvant enfin les équations (11), (12) et (13), par rapport à

$$\Sigma\, F[4N-(10h+5)^2], \qquad \Sigma\, F[4N-(10h\pm 1)^2] \qquad \text{et} \qquad \Sigma\, F[4N-(10h\pm 3)^2],$$

remplaçant $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}$ et $\Sigma d_1^p - d^i$ par leurs valeurs, on trouve

$$\begin{aligned}
\Sigma\, F[4N-(10h\pm 1)^2] &= \frac{9}{8}\mathfrak{A} - \frac{3}{8}\mathfrak{A}_1 + \frac{5}{8}\mathfrak{B} + \frac{1}{8}\mathfrak{B}_1 - \frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{W}_1) \\
&= 3.2^{\mu-1}U - (-2)^{\mu-1}V \quad - \frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{W}_1), \\
\Sigma\, F[4N-(10h\pm 3)^2] &= -\frac{1}{4}\mathfrak{A} + \frac{3}{4}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 \\
&= \mathfrak{P} - U - 2\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right), \\
\Sigma\, F[4N-(10h+5)^2] &= -\frac{3}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{8}\mathfrak{A}_1 - \frac{5}{8}\mathfrak{B} - \frac{1}{8}\mathfrak{B}_1 + \frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{W}_1) \\
&= -2^{\mu-1}U + (-2)^{\mu-1}V + \frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{W}_1).
\end{aligned}$$

107. 2° $N \equiv -2 \pmod{10}$

On posera alors

$$\lambda = \frac{-\sqrt{5}+1}{-\sqrt{5}-1} = \lambda_3,$$

puis

$$\lambda = -\frac{-\sqrt{5}+1}{-\sqrt{5}-1} = \lambda_4.$$

Les raisonnements sont complètement analogues à ceux du n° **106** et conduisent aux valeurs suivantes du premier membre :

Pour $\lambda = \lambda_3$

$$\frac{5(-\sqrt{5}+1)}{8}\mathfrak{S};$$

Pour $\lambda = \lambda_4$

$$-\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}+1}[10\mathfrak{S}_1 + 5\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{M}_1].$$

Le second membre se calcule tout aussi aisément et l'on trouve en définitive

$$\Sigma F[4N-(10h\pm 1)^2] = -\frac{1}{4}\mathfrak{A}+\frac{3}{4}\mathfrak{A}_1+\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1$$

$$= \mathfrak{P} - U - 2\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F[4N-(10h\pm 3)^2] = \frac{9}{8}\mathfrak{A}-\frac{3}{8}\mathfrak{A}_1-\frac{5}{8}\mathfrak{B}-\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1-\frac{5}{16}(2\mathfrak{C}_1+\mathfrak{W}_1)$$

$$= 3.2^{\mu-1}U+(-2)^{\mu-1}V-\frac{5}{16}(2\mathfrak{C}_1+\mathfrak{W}_1),$$

$$\Sigma F[4N-(10h+5)^2] = -\frac{3}{8}\mathfrak{A}+\frac{1}{8}\mathfrak{A}_1+\frac{5}{8}\mathfrak{B}+\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1+\frac{5}{16}(2\mathfrak{C}_1+\mathfrak{W}_1)$$

$$= -2^{\mu-1}U-(-2)^{\mu-1}V+\frac{5}{16}(2\mathfrak{C}_1+\mathfrak{W}_1).$$

108. 3° Supposons $N \equiv \pm 4 \pmod{10}$.
Nous poserons $N \equiv 4\varepsilon \pmod{10}$.

Premier membre. — Alors

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{F},$$

et l'on voit (n° **74**) que $\mathfrak{C}_2$ représente le nombre des décompositions $\mathfrak{C}$ où $(2x+1)^2 \equiv \varepsilon \pmod{10}$ et que $\mathfrak{F}$ représente le nombre des décompositions $\mathfrak{C}$ où $(2x+1)^2 \equiv -\varepsilon \pmod{10}$.

Le coefficient (5) correspondant est alors

$$\frac{5}{4}\left[\frac{5}{4}\mathfrak{C}(1-\lambda)+\frac{\varepsilon\sqrt{5}}{4}(1+\lambda)(\mathfrak{C}_2-\mathfrak{F})-(1-\lambda)\mathfrak{C}\right];$$

d'où, pour $\lambda = 1$,

$$\frac{5}{8}\varepsilon\sqrt{5}(2\mathfrak{C}_2-\mathfrak{C})$$

et, pour $\lambda = -1$,

$$\frac{5}{8}\mathfrak{C}.$$

Passons aux termes provenant de la décomposition $\mathfrak{M}_1$.
Remarquons que

$$(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2 \equiv \varepsilon;$$

d'où, pour $(2x+1)^2$, $(2y+1)^2$, $(2z+1)^2$, les valeurs (mod 5) :

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon, & 0, & 0, \\ \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon. \end{array}$$

Le nombre des décompositions correspondant à la première ligne est ce que nous avons appelé $\mathfrak{B}_2$.

Le nombre des décompositions correspondant à la seconde ligne est alors

$$\mathfrak{M}_1 - 3\mathfrak{B}_2.$$

Le terme (6) devient alors

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{5}}{8}\Bigg\{ & \frac{5}{4}(1+\lambda)[(\mathfrak{M}_1 - 3\mathfrak{B}_2) + \mathfrak{B}_2] \\ & + \frac{\varepsilon\sqrt{5}}{4}(1-\lambda)\left[\mathfrak{B}_2 + \frac{\mathfrak{M}_1 - 3\mathfrak{B}_2}{3}\right] - (1+\lambda)[3\mathfrak{B}_2 + (\mathfrak{M}_1 - 3\mathfrak{B}_2)]\Bigg\} \end{aligned}$$

et, pour $\lambda = 1$,

$$-\frac{\sqrt{5}}{8}\left(\frac{\mathfrak{M}_1}{2} - 5\mathfrak{B}_2\right);$$

pour $\lambda = -1$

$$-\frac{5}{48}\varepsilon\mathfrak{M}_1.$$

Passons au terme provenant de la décomposition $\mathfrak{M}_3$. (7) donne

$$\frac{5\sqrt{5}}{8}\left[\frac{5}{4}(1+\lambda) + \frac{\varepsilon\sqrt{5}}{4}(1-\lambda) - (1+\lambda)\right]\mathfrak{M}_3;$$

donc, pour $\lambda = 1$,

$$-\frac{5\sqrt{5}}{16}\mathfrak{M}_3$$

et, pour $\lambda = -1$,

$$\frac{25}{16}\varepsilon\mathfrak{M}_3.$$

Donc en tout, pour le premier membre :

Pour $\lambda = 1$

$$\frac{5\sqrt{5}}{16}[2\varepsilon(2\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}) - (\mathfrak{M}_1 - 10\mathfrak{B}_2) - \mathfrak{M}_3],$$

et, pour $\lambda = -1$,

$$\frac{5}{8}\mathfrak{S} - \frac{5}{48}\varepsilon\mathfrak{M}_1 + \frac{25}{16}\varepsilon\mathfrak{M}_3.$$

Deuxième membre. — Les calculs n'offrent aucune difficulté et l'on trouve :

Pour $\lambda = 1$

$$2\sum\left(\frac{2m+1}{5}\right)\frac{\sqrt{5}}{2}F[4N-(2m+1)^2] - 4\frac{\sqrt{5}}{2}\sum(d_1^p - d^i)\left(\frac{d_1^p + d^i}{5}\right)$$

et, pour $\lambda = -1$,

$$2\sum\left[-2+\frac{5}{2}\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2\right]F[4N-(2m+1)^2] + 4\sum\left[2-\frac{5}{2}\left(\frac{d_1^p + d^i}{5}\right)^2\right](d_1^p - d^i).$$

Aux deux relations obtenues en égalant les deux membres pour $\lambda = 1$, puis pour $\lambda = -1$, on adjoindra la relation de Kronecker, rappelée au n° **106** et l'on pourra alors résoudre les trois équations obtenues, par rapport aux trois sommes

$$\Sigma F[4N-(10m \pm 1)^2], \quad \Sigma F[4N-(10m \pm 3)^2], \quad \Sigma F[4N-(10m+5)^2].$$

Nous écrirons les résultats en distinguant les deux cas $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$.

109. 1° $N \equiv 4 \pmod{10}$

$$\begin{aligned}\Sigma F[4N-(10h \pm 1)^2] &= -\frac{1}{2}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_1 + \frac{3}{16}\mathfrak{B} - \frac{9}{16}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_1 + \frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_2 + \mathcal{B}_2)\\ &= -\frac{2^\mu + 1}{2}U + \frac{1-(-2)^{\mu-1}}{2}V + \mathfrak{R} - 2\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right) + \frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_2 + \mathcal{B}_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F[4N-(10h \pm 3)^2] &= \frac{9}{8}\mathfrak{A} - \frac{3}{8}\mathfrak{A}_1 + \frac{5}{16}\mathfrak{B} + \frac{1}{16}\mathfrak{B}_1 - \frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_2 + \mathcal{B}_2)\\ &= 3.2^{\mu-1}U + (-2)^{\mu-2}V - \frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_2 + \mathcal{B}_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F[4N-(10h+5)^2] &= -\frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{3}{8}\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{R} + \mathfrak{R}_1\\ &= -\frac{1}{2}U - \frac{(-2)^\mu + 1}{2}V + \mathfrak{P} - 2\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right) - \mathfrak{R} + 2\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right).\end{aligned}$$

2° $N \equiv -4 \pmod{10}$

$$\Sigma F[4N-(10h \pm 1)^2] = \frac{9}{8}\mathfrak{A} - \frac{3}{8}\mathfrak{A}_1 - \frac{5}{16}\mathfrak{B} - \frac{1}{16}\mathfrak{B}_1 - \frac{5}{16}(2\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{D}_2)$$

$$= 3.2^{\mu-1}U - (-2)^{\mu-2}V - \frac{5}{16}(2\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{D}_2),$$

$$\Sigma F[4N-(10h \pm 3)^2] = -\frac{1}{2}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_1 - \frac{3}{16}\mathfrak{B} + \frac{9}{16}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{N} - \mathfrak{N}_1 + \frac{5}{16}(2\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{D}_2)$$

$$= -\frac{2^\mu + 1}{2}U - \frac{1-(-2)^{\mu-1}}{2}V + \mathfrak{N} - 2\mathfrak{N}\left(\frac{N}{4}\right) + \frac{5}{16}(2\mathfrak{C}_2 - \mathfrak{D}_2),$$

$$\Sigma F[4N-(10h+5)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{3}{8}\mathfrak{A}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{B} - \frac{1}{2}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{N} + \mathfrak{N}_1$$

$$= -\frac{1}{2}U + \frac{(-2)^\mu + 1}{2}V + \mathfrak{P} - 2\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right) - \mathfrak{N} + 2\mathfrak{N}\left(\frac{N}{4}\right).$$

110. Supposons enfin $N \equiv 0 \pmod{10}$.

Premier membre. — On a vu (n° **74**) que dans ce cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$. Donc

$$2x + 1 \equiv 0,$$

et le coefficient (5) sera :

Pour $\lambda = 1$

$$0;$$

Pour $\lambda = -1$

$$-\frac{5}{2}\mathfrak{C}$$

Passons au terme (6).

On aura, dans la décomposition $\mathfrak{M}_1$,

$$(2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2 \equiv 0 \pmod{10};$$

d'où (n° **91**) pour $(2x+1)^2$, $(2y+1)^2$, $(2z+1)^2$ les valeurs

$$\begin{array}{ccc} 0, & 0, & 0, \\ 1, & -1, & 0, \end{array}$$

A la première ligne correspondent les décompositions

$$4N = 25(2x+1)^2 + 25(2y+1)^2 + 25(2z+1)^2 + 5(2t+1)^2$$

ou, puisque $N \equiv 0 \pmod 5$,

$$4\frac{N}{5} = 5(2x+1)^2 + 5(2y+1)^2 + 5(2z+1)^2 + (2t+1)^2,$$

c'est-à-dire les décompositions

$$\mathfrak{M}_3\left(\frac{N}{5}\right).$$

Quant à la seconde ligne, il lui correspond évidemment les décompositions $\mathfrak{L}_1$, et l'on a

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_3\left(\frac{N}{5}\right) + 3\mathfrak{L}_1,$$

donc, pour $\lambda = 1$, (6) devient

$$\sum -\frac{\sqrt{5}}{8}\left[\frac{5}{2}\left(\frac{2z+1}{5}\right)^2 - 2\right] = -\frac{\sqrt{5}}{8}\left[\frac{5}{2}2\mathfrak{L}_1 - 2\mathfrak{M}_1\right] = \frac{\sqrt{5}}{24}\left[\mathfrak{M}_1 + 5\mathfrak{M}_3\left(\frac{N}{5}\right)\right];$$

pour $\lambda = -1$, le coefficient est évidemment o.

Enfin, en dernier lieu, prenons le terme provenant de la décomposition $\mathfrak{M}_3$.

On a nécessairement

$$(2t+1)^2 \equiv 0,$$

donc

$$2t+1 \equiv 0.$$

Pour $\lambda = 1$ on a donc le terme

$$-\frac{5\sqrt{5}}{8}2\mathfrak{M}_1\left(\frac{N}{5}\right)$$

et, pour $\lambda = -1$, on a

$$0.$$

Ainsi, on a en tout pour le premier membre :

Si $\lambda = 1$

$$\frac{\sqrt{5}}{24}\left[\mathfrak{M}_1 + 5\mathfrak{M}_3\left(\frac{N}{5}\right) - 30\,\mathfrak{M}_1\left(\frac{N}{5}\right)\right] = -\frac{\sqrt{5}}{2}\left[1 + 5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\right](5\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1);$$

si $\lambda = -1$

$$-\frac{5}{2}\mathfrak{S}.$$

Second membre. — On trouve comme second membre les expressions calculées au n° **108** et l'on en déduit, en adjoignant toujours aux deux relations obtenues pour $\lambda = 1$ et pour $\lambda = -1$ la relation de Kronecker

$$\begin{aligned}
\Sigma\, F[4N-(10h\pm 1)^2] &= \frac{1}{5}\mathfrak{A} + \frac{1}{5}\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{2}\left[1+5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[1+5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1 - \frac{9}{20}\mathfrak{C} + \frac{11}{20}\mathfrak{C}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{O} - \frac{1}{2}\mathfrak{O}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{N} - \frac{1}{2}\mathfrak{N}_1 \\
&= \left[\frac{(2^\mu-1)(5^\nu-1)}{2} - 1\right]U \\
&\quad - \frac{1+5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)}{2}[1+(-2)^\mu]V + \frac{\mathfrak{O}+\mathfrak{N}}{2} + \mathfrak{O}\left(\frac{N}{4}\right) - \mathfrak{N}\left(\frac{N}{4}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma\, F[4N-(10h\pm 3)^2] &= \frac{1}{5}\mathfrak{A} + \frac{1}{5}\mathfrak{A}_1 + \frac{1}{2}\left[1+5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[1+5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1 - \frac{9}{20}\mathfrak{C} + \frac{11}{20}\mathfrak{C}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{O} + \frac{1}{2}\mathfrak{O}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{N} - \frac{1}{2}\mathfrak{N}_1 \\
&= \left[\frac{(2^\mu-1)(5^\nu-1)}{2} - 1\right]U \\
&\quad + \frac{1+5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)}{2}[1+(-2)^\mu]V - \frac{\mathfrak{O}-\mathfrak{N}}{2} - \mathfrak{O}\left(\frac{N}{4}\right) - \mathfrak{N}\left(\frac{N}{4}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma\, F[4N-(10h+5)^2] &= \frac{1}{10}\mathfrak{A} + \frac{1}{10}\mathfrak{A}_1 + \frac{9}{10}\mathfrak{C} - \frac{11}{10}\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{N} + \mathfrak{N}_1 \\
&= \left[\frac{(2^\mu-1)(5^\nu+3)}{4} + 2\right]U + \mathfrak{P} - \mathfrak{N} - 2\left[\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right) - \mathfrak{N}\left(\frac{N}{4}\right)\right].
\end{aligned}$$

Rappelons enfin que

$$N = 5^\nu N'' \quad \text{avec} \quad N'' \not\equiv 0 \pmod 5, \qquad \mu \neq 0, \qquad \nu \neq 0.$$

111. *Remarque.* — Si N est pair,

$$4N-(2x+1)^2 \equiv 7 \pmod 8,$$

donc

$$F[4N-(2x+1)^2] = F_1[4N-(2x+1)^2].$$

On voit donc que les seconds membres des formules finales des n^{os} **106**, **107**, **109** et **110** représentent également les

$$\Sigma F_1[4N-(10k\pm\alpha)^2].$$

Si donc on adjoint à ces formules celle du n° **102**, on a, dans tous les cas, les expressions des sommes

$$\Sigma F(4N-x^2) \quad \text{et} \quad \Sigma F_1(4N-x^2),$$

où x est un nombre de la forme $10k\pm 1$, $10k\pm 3$ ou $10k+5$.

IV. — Expressions des sommes $\sum F\left(\frac{8M-x^2}{25}\right)$.

112. Partons encore de l'équation

$$\eta_1\theta_1 H_1\Theta_1\frac{H^2}{\Theta_1^2} = 2H_1(x,\sqrt{q})\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}}F(8\nu+7)$$
$$-4\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\left[(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{8}}+\ldots\right]\cos(2m+1)x,$$

et faisons $x=\frac{\pi\tau}{5}$.

Il s'introduit le rapport $\frac{X'^2}{Z'^2}$, donc par (II') et (VIII'), Chapitre III, le premier membre devient

$$(14)\quad \begin{cases} -\frac{1}{4}H_1\left(\frac{\pi\tau}{5}, q^{\frac{1}{2}}\right)\eta_1\left(q^{\frac{1}{10}}\right)\eta_1\theta_1\left(q^{\frac{1}{5}}\right) \\ -\frac{1}{4}H_1\left(\frac{\pi\tau}{5}, q^{\frac{1}{2}}\right)\eta_1\left(q^{\frac{1}{10}}\right)\theta_1\eta_1\left(q^{\frac{1}{5}}\right) \\ -\frac{1}{8}H_1\left(\frac{\pi\tau}{5}, q^{\frac{1}{2}}\right)\eta_1\left(q^{\frac{1}{10}}\right)\eta_1^2\left(q^{\frac{1}{2}}\right) \\ +\frac{1}{8}H_1\left(\frac{\pi\tau}{5}, q^{\frac{1}{2}}\right)\eta_1^3\left(q^{\frac{1}{10}}\right). \end{cases}$$

Cherchons le coefficient de $q^{\frac{M}{5}}$ au premier membre.

Il faut poser, pour la première ligne,

$$\frac{M}{5}=\frac{(2x+1)^2}{40}+\frac{y^2}{5}+(2z+1)^2+\frac{(2t+1)^2}{8}\pm\frac{2t+1}{5}$$

ou

$$(15)\qquad 40\,M + 16 = 5(2x+1)^2 + 10(2y)^2 + 2(10z+5)^2 + (10t \pm 1)^2.$$

Puis, pour la seconde ligne

$$\frac{M}{5} = \frac{(2x+1)^2}{40} + \frac{(2y+1)^2}{20} + z^2 + \frac{(2t+1)^2}{8} \pm \frac{2t+1}{5}$$

ou

$$(16)\qquad 40\,M + 16 = 5(2x+1)^2 + 10(2y+1)^2 + 2(10z)^2 + (10t \pm 1)^2.$$

Résolvons la congruence,

$$16 \equiv 5(2x+1)^2 + 10y^2 + 2z^2 + (2t+1)^2 \pmod{40},$$

on trouve

$$\begin{aligned}
16 &\equiv 5 + 0 + 2.1 + 9,\\
16 &\equiv 5 + 0 + 2.25 + 1,\\
16 &\equiv 5 + 10 + 2.16 + 9,\\
16 &\equiv 5 + 10 + 2.0 + 1.
\end{aligned}$$

Il en résulte que l'ensemble des représentations (15) et (16) constitue ce que nous avons appelé $\mathfrak{C}_2(10\,M + 4)$.

Le coefficient correspondant est $-\frac{1}{8}\,\mathfrak{C}_2(10\,M + 4)$.

Passons au troisième des termes (13).

Il faudra, poser

$$\frac{M}{5} = \frac{(2x+1)^2}{40} + \frac{(2y+1)^2}{8} + \frac{(2z+1)^2}{8} + \frac{(2t+1)^2}{8} \pm \frac{2t+1}{5}$$

ou

$$(17)\qquad 40\,M + 16 = 5(2x+1)^2 + 25(2y+1)^2 + 25(2z+1)^2 + (10t \pm 1)^2.$$

Les décompositions (17) sont évidemment ce que nous avons appelé

$$\mathfrak{B}_2(10\,M + 4),$$

et le coefficient correspondant est

$$-\frac{1}{16}\,\mathfrak{B}_2(10\,M + 4).$$

Il faudra poser, pour le quatrième terme (14)

$$\frac{M}{5} = \frac{(2x-1)^2}{40} + \frac{(2y+1)^2}{40} + \frac{(2z+1)^2}{40} + \frac{(2t+1)^2}{8} \pm \frac{2t+1}{5}$$

ou

$$40M + 16 = 5(2x+1)^2 + 5(2y+1)^2 + 5(2z+1)^2 + (10t \pm 1)^2.$$

Donc, le terme correspondant est

$$\frac{1}{16}\mathfrak{U}_3(10M+4).$$

On a donc en tout, au premier membre, en posant $10M + 4 = N$,

$$-\frac{1}{8}\mathfrak{C}_2 - \frac{1}{16}\mathfrak{B}_2 + \frac{1}{16}\mathfrak{U}_3.$$

Passons au second membre.

On a d'abord le terme

$$2H_1\left(\frac{\pi\tau}{5}, \sqrt{q}\right)\sum_0 q^{\frac{8\nu+7}{8}} F(8\nu+7) = 2\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} \frac{q^{\frac{2m+1}{5}} + q^{-\frac{2m+1}{5}}}{2} \sum F(8\nu+7)\, q^{\frac{8\nu+7}{8}}$$

On posera donc

$$\frac{M}{5} = \frac{(2m+1)^2}{8} + \frac{2m+1}{5} + \frac{8\nu+7}{8}$$

ou

$$8\nu + 7 = \frac{40M + 16 - (10m \pm 1)^2}{25},$$

et le terme correspondant sera

$$\sum F\left[\frac{4N - (10m \pm 1)^2}{25}\right].$$

Ensuite

$$-4\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\left[(2m-1)\, q^{-\frac{(2m-1)^2}{8}} + (2m-5)\, q^{-\frac{(2m-5)^2}{8}} + \dots\right]\cos(2m+1)\frac{\pi\tau}{5}$$

$$= -4\sum_1 q^{\frac{(2m+1)^2}{8}} \frac{q^{\frac{2m+1}{5}} + q^{-\frac{2m+1}{5}}}{2}\left[(2m-1)\, q^{-\frac{(2m-1)^2}{8}} + \dots\right].$$

On posera donc

$$\frac{M}{5} = \frac{(2m+1)^2}{8} - \frac{2m-(4\mu+1)^2}{8} \pm \frac{2m+1}{5}$$

ou

$$40M + 16 = (10m + 5 \pm 4)^2 - [10m - 5(4\mu + 1)]^2$$

$$(18) \qquad 10M + 4 = (10m - 10\mu \pm 2)(10\mu + 5 \pm 2) = d_1^p d^i$$

et d'ailleurs

$$d_1^p > d^i,$$

car

$$10m - 10\mu \pm 2 > 10\mu + 5 \pm 2$$

revient à

$$2m > 4\mu + 1.$$

Remarquons que la congruence

$$4 \equiv xy \qquad (\text{mod } 10)$$

n'admet que les solutions

$4 \equiv 1.4,$	d'où	$x + y \equiv 5$	(mod 10),
$\equiv 3.8,$	»	$x + y \equiv 1$	(mod 10),
$\equiv 7.2,$	»	$x + y \equiv -1$	(mod 10),
$\equiv 9.6,$	»	$x + y \equiv 5$	(mod 10).

Et, comme dans (18), d_1^p et d^i ne représentent pas des diviseurs quelconques (mod 10), mais seulement des diviseurs $\equiv \pm 2$ (mod 10), on voit qu'on pourra lever cette dernière restriction en prenant pour d_1^p et d^i des diviseurs quelconques, mais en remplaçant d_1^p et d^i par

$$d_1^p\left(\frac{d_1^p + d^i}{5}\right),$$

$$d^i\left(\frac{d_1^p + d^i}{5}\right).$$

Dès lors, la somme

$$-2\Sigma[2m - (4\mu + 1)]$$

devient

$$-\frac{2}{5}\Sigma(d_1^p - d^i)\left(\frac{d_1^p + d^i}{5}\right).$$

Nous sommes ainsi en possession de tous les éléments du calcul. En passant à nos notations, on obtient aisément, N étant congru à 4, (mod 10)

$$\sum F\left[\frac{4N-(10m\pm 1)^2}{25}\right] = \frac{1}{20}\mathfrak{A}+\frac{1}{20}\mathfrak{A}_1+\frac{13}{80}\mathfrak{B}-\frac{7}{80}\mathfrak{B}_1-\frac{1}{5}\mathfrak{N}+\frac{1}{5}\mathfrak{N}_1-\frac{1}{16}(2\mathfrak{S}_2+\mathfrak{M}_2)$$
$$=\frac{3(2^{\mu}-1)}{10}U+\frac{3+(-2)^{\mu-1}}{10}V$$
$$-\frac{1}{5}\mathfrak{N}+\frac{2}{5}\mathfrak{N}\left(\frac{N}{4}\right)-\frac{1}{16}(2\mathfrak{S}_2+\mathfrak{M}_2).$$

113. Si dans la première équation du n° **112** on remplaçait x par $\frac{2\pi\tau}{5}$, on serait conduit à des calculs identiques, à quelques changements de signes près.

Nous nous bornerons à donner le résultat

$$\sum F\left[\frac{4N-(10m\pm 3)^2}{25}\right] = \frac{1}{20}\mathfrak{A}+\frac{1}{20}\mathfrak{A}_1-\frac{13}{80}\mathfrak{B}+\frac{7}{80}\mathfrak{B}_1-\frac{1}{5}\mathfrak{N}+\frac{1}{5}\mathfrak{N}_1-\frac{1}{16}(2\mathfrak{S}_2-\mathfrak{M}_2)$$
$$=\frac{3(2^{\mu}-1)}{10}U-\frac{3+(-2)^{\mu-1}}{10}V$$
$$-\frac{1}{5}\mathfrak{N}+\frac{2}{5}\mathfrak{N}\left(\frac{N}{4}\right)-\frac{1}{16}(2\mathfrak{S}_2-\mathfrak{M}_2)$$

avec

$$N\equiv 6 \pmod{10}.$$

Remarquons pour terminer que, dans ces deux dernières formules, les crochets des premiers membres étant congrus à 7 (mod 8), les seconds membres représentent également les $\Sigma F_1\left[\frac{4N-(10m\pm a)^2}{25}\right]$.

114. *Digression arithmétique.* — Soit $h(\Delta)$ le nombre des classes des formes proprement primitives de discriminant Δ. Cherchons le nombre des classes de formes propres de discriminant Δ. Soit $\Delta=a^2\Delta'$, a étant un nombre impair.

A la forme proprement primitive (α, β, γ) de discriminant Δ', correspond la forme $(a\alpha, a\beta, a\gamma)$ de discriminant Δ et réciproquement.

Il en résulte que

$$F(\Delta)=h(\Delta)+\sum_a h\left(\frac{\Delta}{a^2}\right),$$

a^2 étant un carré contenu dans Δ.

Or, on a la formule [1]

(19) $$h(\Delta) = h(\Delta')\,\mathrm{S}\prod_r \left[1 - \left(\frac{-\Delta'}{r}\right)\frac{1}{r}\right],$$

en posant

$$\Delta = \Delta' \mathrm{S}^2.$$

On suppose que Δ' ne contient pas au carré un des facteurs premiers de Δ et que r est un facteur premier impair de S.

Ceci posé, proposons-nous de trouver une relation entre $\mathrm{F}(25\,\Delta)$, $\mathrm{F}(\Delta)$ et $\mathrm{F}\left(\frac{\Delta}{25}\right)$.

Soit $5^{2\mu}$ la plus haute puissance de 5^2 dans Δ, de sorte que

$$\Delta = \Delta_1 . 5^{2\mu}.$$

Δ_1 pouvant être divisible par 5, mais pas par 25.

On a évidemment

$$\mathrm{F}(5^{2\mu}\Delta_1) = h(5^{2\mu}\Delta_1) + h(5^{2\mu-2}\Delta_1) + \ldots + h(\Delta_1)$$
$$+\sum_a \left[h\left(5^{2\mu}\frac{\Delta_1}{a^2}\right) + h\left(5^{2\mu-2}\frac{\Delta_1}{a^2}\right) + \ldots + h\left(\frac{\Delta_1}{a^2}\right)\right].$$

Or

(19) $$h(5^{2\mu}\Delta_1) = 5^\mu h(\Delta_1)\left[1 - \left(\frac{\Delta_1}{5}\right)\frac{1}{5}\right],$$

car $\left(\frac{-1}{5}\right) = 1$; donc

$$\mathrm{F}(5^{2\mu}\Delta_1) = h(\Delta_1)\left[1 - \left(\frac{\Delta_1}{5}\right)\frac{1}{5}\right][5^\mu + 5^{\mu-1} + \ldots + 5] + h(\Delta_1)$$
$$+\sum_a h\left(\frac{\Delta_1}{a^2}\right)\left[1 - \left(\frac{\Delta_1}{5}\right)\frac{1}{5}\right][5^\mu + \ldots + 5] + \sum h\left(\frac{\Delta_1}{a^2}\right)$$
$$= \frac{5^{\mu+1} - 5}{4}\left[1 - \left(\frac{\Delta_1}{5}\right)\frac{1}{5}\right]\left[h(\Delta_1) + \sum_a h\left(\frac{\Delta_1}{a^2}\right)\right] + h(\Delta\ ) + \sum_a h\left(\frac{\Delta_1}{a^2}\right),$$

donc enfin

(20) $$\mathrm{F}(5^{2\mu}\Delta_1) = \frac{5^{\mu+1} - 5}{4}\left[1 - \left(\frac{\Delta_1}{5}\right)\frac{1}{5}\right]\mathrm{F}(\Delta_1) + \mathrm{F}(\Delta_1).$$

Supposons $\mu \geqq 2$.

---

(1) P.-G. Lejeune-Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4e édition, Braunschweig, 1894, § 100.

Alors, de même

$$(21)\qquad F(5^{2\mu-2}\Delta_1) = \frac{5^{\mu}-5}{4}\cdot\left[1-\left(\frac{\Delta_1}{5}\right)\frac{1}{5}\right]F(\Delta_1)+F(\Delta_1)$$

et

$$(22)\qquad F(5^{2\mu-4}\Delta_1) = \frac{5^{\mu-1}-5}{4}\left[1-\left(\frac{\Delta_1}{5}\right)\frac{1}{5}\right]F(\Delta_1)+F(\Delta_1);$$

d'où, en éliminant μ et $F(\Delta_1)$ entre les équations (19), (20) et (21),

$$F(5^{2\mu}\Delta_1) = 6\,F(5^{2\mu-2}\Delta_1) - 5\,F(5^{2\mu-4}\Delta_1).$$

Puis, en changeant de notations

$$(23)\qquad F(25\Delta) = 6\,F(\Delta) - 5\,F\left(\frac{\Delta}{25}\right),$$

formule qui n'est valable que si $\Delta \equiv 0 \pmod{25}$.

Si cette condition n'est pas remplie, il faudra prendre la formule (20) qui donne alors aisément

$$(24)\qquad F(25\Delta) = \left[6-\left(\frac{\Delta}{5}\right)\right]F(\Delta).$$

On peut d'ailleurs réunir les équations (23) et (24) en une seule en écrivant

$$(25)\qquad F(25\Delta) = \left[6-\left(\frac{\Delta}{5}\right)\right]F(\Delta) - 5\,F\left(\frac{\Delta}{25}\right).$$

115. La formule (25) permet de vérifier les équations des n^{os} **106**, **107** et **108** et de démontrer celles des n^{os} **112** et **113**.

La formule (25) donne en effet l'identité

$$F[25(4N-r^2)] = \left[6-\left(\frac{4N-r^2}{5}\right)\right]F(4N-r^2) - 5\,F\left(\frac{4N-r^2}{25}\right),$$

où $r \equiv \pm 1$ ou ± 3, ou $5 \pmod{10}$.

Supposons $N \equiv +2 \pmod{10}$.

Si $r \equiv \pm 1 \pmod{10}$,

$$\left(\frac{4N-r^2}{5}\right) = -1;$$

si $r \equiv \pm 3 \pmod{10}$,

$$\left(\frac{4N - r^2}{5}\right) = 1;$$

si $r \equiv 5 \pmod{10}$,

$$\left(\frac{4N - r^2}{5}\right) = -1;$$

On a donc

$$7\Sigma F[4N - (10h \pm 1)^2] + 5\Sigma F[4N - (10h \pm 3)^2] + 7\Sigma F[4N - (10h + 5)^2] = \Sigma F[4(25N) - (10h + 5)^2].$$

Les trois termes du premier membre sont connus (n° **106**) et le second membre est donné par la dernière équation du n° **110**. On remarquera que, dans le cas de $N \equiv 2 \pmod{10}$,

$$\mathfrak{A}(25N) = \frac{(2^{\mu+1} - 1)(5^3 - 1)}{4} U = (2^{\mu+1} - 1).31\,U = 31\,\mathfrak{A}(N)$$

et de même

$$\mathfrak{A}_1(25N) = 31\,\mathfrak{A}_1(N).$$

Puis (n° **15**)

$$\mathfrak{p}\,(25N) - \mathfrak{n}\,(25N) = 5\,\mathfrak{p}\,(N),$$
$$\mathfrak{p}_1(25N) - \mathfrak{n}_1(25N) = 5\,\mathfrak{p}_1(N).$$

Le cas de $N \equiv -2$ se traite de même.

Si nous supposons $N \equiv \pm 4 \pmod{10}$, le terme $F\left(\frac{4N - r^2}{25}\right)$ n'est plus nul et la formule (25) permet alors de calculer les sommes

$$\Sigma F\left[\frac{4N - (10m \pm 1)^2}{25}\right]$$

et

$$\Sigma F\left[\frac{4N - (10m \pm 3)^2}{25}\right]$$

sans passer par l'intermédiaire des formules du paragraphe **3** (Chap. III).

Enfin les formules du n° **102**, traitées par le même procédé, donnent des relations nouvelles entre les $\mathfrak{N}$.

Si $N \equiv \pm 3 \pmod{10}$

$$3(5\,\mathfrak{N}_2 - 2\,\mathfrak{N}_1) = -\,\mathfrak{N}_1(25N) + 44\,\mathfrak{A};$$

si $N \equiv \pm 1 \pmod{10}$

$$\mathfrak{N}_1 = -\frac{\mathfrak{N}_1(25N)}{4} + 14\mathfrak{A}.$$

Nous n'insisterons pas sur ce sujet.

V. — Expressions des sommes $\sum E(N - x^2)$.

116. Partons de la formule de Kronecker [Chap. II, formule (18)]

$$(26) \qquad \theta_1^3(q) = 12\sum_0 q^n\, E(n)$$

et multiplions les deux membres par

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2}.$$

On obtient ainsi

$$12\sum E(N - m^2) = 4[2 + (-1)^N](\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_1),$$

d'après un résultat classique sur le nombre des décompositions d'un nombre en une somme de quatre carrés.

Multiplions maintenant les deux membres de (26) par

$$\sum q^{(5m\pm 1)^2},$$

puis par

$$\sum q^{(5m\pm 2)^2},$$

puis par

$$\sum q^{(5m)^2}.$$

On obtient alors les résultats désirés, si l'on tient compte des relations du Chapitre IV.

Supposons par exemple $N \equiv 6 \pmod{10}$ et égalons les coefficients de q^N dans les deux membres.

Il faut poser au premier membre

$$(27) \qquad N = x^2 + y^2 + z^2 + (5m \pm 1)^2$$

et prendre le nombre de ces représentations.

Or, le Tableau du n° **60** montre que les décompositions (27) ne peuvent être que des décompositions $\mathfrak{N}'_1$ ou $\mathfrak{N}'_3$.

Il n'y aura d'ailleurs à compter que le quart des décompositions $\mathfrak{N}'_3$: celles où le premier carré n'est pas divisible par 5. De même, il est à peu près évident qu'il n'y aura à prendre que la moitié des décompositions $\mathfrak{N}'_1$.

Donc

$$12\Sigma E[N-(5m\pm 1)^2] = \frac{\mathfrak{N}'_3}{4} + \frac{\mathfrak{N}'_1}{2} = 2\mathfrak{N}_1 - 5\mathfrak{N}_3 = -5\mathfrak{N}_3 + 6\mathfrak{A} - 6\mathfrak{A}_1.$$

Les quatorze autres cas se traitant de la même manière, nous nous bornerons à donner les résultats.

117. 1° $N \equiv 1 \pmod{10}$:

$$\begin{aligned} 12\Sigma E[N-(5m\pm 1)^2] &= 2\mathfrak{N}_1 - 5\mathfrak{N}_3, \\ 12\Sigma E[N-(5m\pm 2)^2] &= -3\mathfrak{N}_1 + 5\mathfrak{N}_3 + 8\mathfrak{A}, \\ 12\Sigma E[N-(5m)^2] &= \mathfrak{N}_1; \end{aligned}$$

2° $N \equiv -1 \pmod{10}$:

$$\begin{aligned} 12\Sigma E[N-(5m\pm 1)^2] &= -3\mathfrak{N}_1 + 5\mathfrak{N}_3 + 8\mathfrak{A}, \\ 12\Sigma E[N-(5m\pm 2)^2] &= 2\mathfrak{N}_1 - 5\mathfrak{N}_3, \\ 12\Sigma E[N-(5m)^2] &= \mathfrak{N}_1; \end{aligned}$$

3° $N \equiv 3 \pmod{10}$:

$$\begin{aligned} 12\Sigma E[N-(5m\pm 1)^2] &= 2\mathfrak{N}_1 - \frac{15}{2}\mathfrak{N}_2 + 2\mathfrak{A}, \\ 12\Sigma E[N-(5m\pm 2)^2] &= -3\mathfrak{N}_1 + \frac{15}{2}\mathfrak{N}_2 + 6\mathfrak{A}, \\ 12\Sigma E[N-(5m)^2] &= \mathfrak{N}_1; \end{aligned}$$

4° $N \equiv -3 \pmod{10}$:

$$\begin{aligned} 12\Sigma E[N-(5m\pm 1)^2] &= -3\mathfrak{N}_1 + \frac{15}{2}\mathfrak{N}_2 + 6\mathfrak{A}, \\ 12\Sigma E[N-(5m\pm 2)^2] &= 2\mathfrak{N}_1 - \frac{15}{2}\mathfrak{N}_2 + 2\mathfrak{A}, \\ 12\Sigma E[N-(5m)^2] &= \mathfrak{N}_1; \end{aligned}$$

5° $N \equiv 5 \pmod{10}$:

$$
\begin{aligned}
12\Sigma E[N-(5m\pm 1)^2] &= -\frac{\mathcal{N}_1}{2}+4\mathfrak{A},\\
12\Sigma E[N-(5m\pm 2)^2] &= -\frac{\mathcal{N}_1}{2}+4\mathfrak{A},\\
12\Sigma E[N-(5m)^2] &= \mathcal{N}_1;
\end{aligned}
$$

6° $N \equiv 4 \pmod{10}$:

$$
\begin{aligned}
12\Sigma E[N-(5m\pm 1)^2] &= 5\mathcal{N}_3+3\mathfrak{A}-3\mathfrak{A}_1 = 5\mathcal{N}_3+6U,\\
12\Sigma E[N-(5m\pm 2)^2] &= -5\mathcal{N}_3+6\mathfrak{A}-6\mathfrak{A}_1 = -5\mathcal{N}_3+12U,\\
12\Sigma E[N-(5m)^2] &= +3\mathfrak{A}-3\mathfrak{A}_1 = 6U;
\end{aligned}
$$

7° $N \equiv -4 \pmod{10}$:

$$
\begin{aligned}
12\Sigma E[N-(5m\pm 1)^2] &= -5\mathcal{N}_3+6\mathfrak{A}-6\mathfrak{A}_1 = -5\mathcal{N}_3+12U,\\
12\Sigma E[N-(5m\pm 2)^2] &= 5\mathcal{N}_3+3\mathfrak{A}-3\mathfrak{A}_1 = 5\mathcal{N}_3+6U,\\
12\Sigma E[N-(5m)^2] &= +3\mathfrak{A}-3\mathfrak{A}_1 = 6U;
\end{aligned}
$$

8° $N \equiv 2 \pmod{10}$:

$$
\begin{aligned}
12\Sigma E[N-(5m\pm 1)^2] &= 6\mathfrak{A}-6\mathfrak{A}_1 = 12U,\\
12\Sigma E[N-(5m\pm 2)^2] &= -\frac{5}{2}\mathcal{N}_2+5\mathfrak{A}-5\mathfrak{A}_1 = -\frac{5}{2}\mathcal{N}_2+10U,\\
12\Sigma E[N-(5m)^2] &= \frac{5}{2}\mathcal{N}_2+\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1 = \frac{5}{2}\mathcal{N}_2+2U;
\end{aligned}
$$

9° $N \equiv -2 \pmod{10}$:

$$
\begin{aligned}
12\Sigma E[N-(5m\pm 1)^2] &= -\frac{5}{2}\mathcal{N}_2+5\mathfrak{A}-5\mathfrak{A}_1 = -\frac{5}{2}\mathcal{N}_2+10U,\\
12\Sigma E[N-(5m\pm 2)^2] &= 6\mathfrak{A}-6\mathfrak{A}_1 = 12U,\\
12\Sigma E[N-(5m)^2] &= \frac{5}{2}\mathcal{N}_2+\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_1 = \frac{5}{2}\mathcal{N}_2+2U;
\end{aligned}
$$

10° $N \equiv 0 \pmod{10}$:

$$
\begin{aligned}
12\Sigma E[N-(5m\pm 1)^2] &= \frac{24}{5}\mathfrak{A}-\frac{24}{5}\mathfrak{A}_1+\frac{6}{5}\mathfrak{C}-\frac{6}{5}\mathfrak{C}_1 = 12.5^{\nu}U,\\
12\Sigma E[N-(5m\pm 1)^2] &= \frac{24}{5}\mathfrak{A}-\frac{24}{5}\mathfrak{A}_1+\frac{6}{5}\mathfrak{C}-\frac{6}{5}\mathfrak{C}_1 = 12.5^{\nu}U,\\
12\Sigma E[N-(5m)^2] &= \frac{12}{5}\mathfrak{A}-\frac{12}{5}\mathfrak{A}_1-\frac{12}{5}\mathfrak{C}+\frac{12}{5}\mathfrak{C}_1 = 6(5^{\nu}-1)U.
\end{aligned}
$$

VI. — Expressions des sommes $\sum E\left(\frac{N-x^2}{25}\right)$.

118. Partons encore de la relation de Kronecker

$$\theta_1^3(q) = 12\Sigma q^n E(n). \tag{26}$$

Multiplions les deux membres par

$$\Sigma q^{t^2 \pm \frac{2}{5}t}$$

et égalons les coefficients de $q^{\frac{M}{5}}$. Il faut poser, pour le premier membre,

$$\frac{M}{5} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \pm \frac{2t}{5}$$

ou

$$5M + 1 = 25x^2 + 25y^2 + 25z^2 + (5t \pm 1)^2,$$

et en posant $5M + 1 = N$, on voit qu'il faudra prendre le quart des décompositions $\mathfrak{N}'_3$.

Au second membre, il faut poser

$$\frac{M}{5} = n + t^2 \pm \frac{2t}{5},$$

d'où

$$n = \frac{5M + 1 - (5t \pm 1)^2}{25}$$

et, par suite,

$$12\sum E\left[\frac{5M + 1 - (5t \pm 1)^2}{25}\right] = \frac{1}{4}\mathfrak{N}'_3 = \mathfrak{N}_3.$$

En multipliant les deux membres de (26) par

$$\Sigma q^{t^2 \pm 4\frac{t}{5}},$$

on trouverait aussi

$$12\sum E\left[\frac{5M + 4 - (5t \pm 2)^2}{25}\right] = \mathfrak{N}_3.$$

119. Ainsi

1° $N \equiv 1 \pmod 5$

$$12\sum E\left[\frac{N - (5t \pm 1)^2}{25}\right] = \mathfrak{N}_3;$$

2° $N \equiv -1 \pmod 5$)

$$12\sum E\left[\frac{N-(5t\pm 2)^2}{25}\right] = \mathfrak{N}_3.$$

VII. — Expressions des sommes $\sum J(N - x^2)$.

120. Nous partirons de l'équation de MM. Petr et Humbert [formule (15), Chap. II]

$$\theta\theta_1\Theta\Theta_1\frac{H^2}{H_1^2} = \frac{1}{\cos^2 x} + 4\,\Theta(2x, q^2)\,\Sigma(-1)^\nu q^{2\nu} J(2\nu)$$
$$-8\sum_2 (-1)^m q^{2m^2}[-2q^{-2}+\ldots+(-1)^m 2mq^{-2m^2}]\cos 4mx$$
$$+8\sum_1 (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{8}}\left[q^{-\frac{1}{2}}+\ldots+(-1)^m(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right]\cos(4m+2)x.$$

Remplaçons-y successivement x par $\frac{\pi}{5}$, puis $\frac{2\pi}{5}$, multiplions la seconde équation par λ et ajoutons membre à membre. Le premier membre devient, en vertu des formules

$$\Theta\Theta_1 = \theta(q^2)\,\Theta(2x, q^2),$$
$$\theta(q^2) = \sqrt{\theta\theta_1},$$
$$\theta\theta_1\sqrt{\theta\theta_1}\left[\Theta\left(\frac{2\pi}{5}, q^2\right)\frac{X^2}{Y^2} + \lambda\,\Theta\left(\frac{4\pi}{5}, q^2\right)\frac{X_1^2}{Y_1^2}\right]$$
$$= \frac{\theta\theta_1\sqrt{\theta\theta_1}}{2}\left\{\left[\Theta\left(\frac{2\pi}{5}, q^2\right)+\lambda\,\Theta\left(\frac{4\pi}{5}, q^2\right)\right]\left(\frac{X^2}{Y^2}+\frac{X_1^2}{Y_1^2}\right)\right.$$
$$\left.+\left[\Theta\left(\frac{2\pi}{5}, q^2\right)-\lambda\,\Theta\left(\frac{4\pi}{5}, q^2\right)\right]\left(\frac{X^2}{Y^2}-\frac{X_1^2}{Y_1^2}\right)\right\},$$

d'où, par (II) et (VIII) (Chap. III),

$$\frac{5}{2}\theta(q^{10})[\theta\,\theta_1(q^5)+\theta_1\,\theta(q^5)]\sum_{-\infty} q^{2m^2}(-1)^m\left(\cos\frac{4m\pi}{5}+\lambda\cos\frac{8m\pi}{5}\right)$$
$$+\sqrt{5}\,\theta(q^{10})[\theta_1\theta-5\,\theta_1(q^5)\,\theta(q^5)]\sum_{-\infty} q^{2m^2}(-1)^m\left(\cos\frac{4m\pi}{5}-\lambda\cos\frac{8m\pi}{5}\right).$$

Calculons $\cos\frac{4m\pi}{5}$ et $\cos 8m\frac{\pi}{5}$.

On trouve aisément

$$\cos\frac{4m\pi}{5} = -\frac{5}{4}\left(\frac{m}{5}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{m}{5}\right) + 1,$$

$$\cos 8m\frac{\pi}{5} = -\frac{5}{4}\left(\frac{m}{5}\right)^2 + \frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{m}{5}\right) + 1.$$

Donc

$$\cos\frac{4m\pi}{5} + \lambda\cos\frac{8m\pi}{5} = 1 + \lambda - \frac{\sqrt{5}}{4}(1-\lambda)\left(\frac{m}{5}\right) - \frac{5}{4}(1+\lambda)\left(\frac{m}{5}\right)^2,$$

$$\cos\frac{4m\pi}{5} - \lambda\cos\frac{8m\pi}{5} = 1 - \lambda - \frac{\sqrt{5}}{4}(1+\lambda)\left(\frac{m}{5}\right) - \frac{5}{4}(1-\lambda)\left(\frac{m}{5}\right)^2.$$

Égalons les coefficients de q^{2N} dans les deux membres.

Dans les deux premiers termes du premier membre, il faudra poser

$$2N = 10x^2 + y^2 + 5z^2 + 2t^2$$

et le coefficient correspondant sera

$$(27)\qquad \frac{5}{2}(-1)^{x+y+t}\left(\cos\frac{4t\pi}{5} + \lambda\cos\frac{8t\pi}{5}\right) + \frac{5}{2}(-1)^{x+z+t}\left(\cos 4t\frac{\pi}{5} + \lambda\cos 8t\frac{\pi}{5}\right).$$

Il est clair que y et z doivent être de même parité.

Donc, le coefficient est

$$5\,\Sigma(-1^{x+y+t}\left(\cos\frac{4t\pi}{5} + \lambda\cos\frac{8t\pi}{5}\right).$$

Mais on a le Tableau suivant (mod 2) :

x	y	t	λ	$x+y+t$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Donc

$$(-1)^{x+y+t} = (-1)^{\mathrm{N}},$$

et le coefficient cherché est

$$(28)\qquad 5(-1)^{\mathrm{N}}\Sigma\left[1+\lambda-\frac{\sqrt{5}}{4}(1-\lambda)\left(\frac{t}{5}\right)-\frac{5}{4}(1+\lambda)\left(\frac{t}{5}\right)^2\right].$$

Dans le troisième terme du premier membre, il faudra poser

$$\mathrm{N} = 5x^2+y^2+z^2+t^2 \qquad \mathfrak{n}_1$$

et prendre

$$(29)\qquad \frac{\sqrt{5}}{2}\Sigma(-1)^{x+y+z+t}\left[\cos 4t\frac{\pi}{5}-\lambda\cos 8t\frac{\pi}{5}\right]$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}(-1)^{\mathrm{N}}\sum\left[1-\lambda-\frac{\sqrt{5}}{4}(1+\lambda)\left(\frac{t}{5}\right)-\frac{5}{4}(1-\lambda)\left(\frac{t}{5}\right)^2\right].$$

Puis dans le quatrième terme

$$\mathrm{N} = 5x^2+5y^2+5z^2+t^2 \qquad \mathfrak{n}_2$$

et l'on prendra

$$(30)\qquad -\frac{5\sqrt{5}}{2}\Sigma(-1)^{x+y+z+t}\left[\cos 4t\frac{\pi}{5}-\cos 8t\frac{\pi}{5}\right]$$
$$=-\frac{5\sqrt{5}}{2}(-1)^{N}\sum\left[1-\lambda-\frac{\sqrt{5}}{4}(1+\lambda)\left(\frac{t}{5}\right)-\frac{5}{4}(1-\lambda)\left(\frac{t}{5}\right)^2\right].$$

Le *second membre* est

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{5}}+\frac{\lambda}{\cos^2\frac{2\pi}{5}}+\Sigma(-1)^{\nu}q^{2\nu}J(\nu)\,\Sigma(-1)^{m}q^{2m^2}\left(\cos\frac{4m\pi}{5}+\lambda\cos 8m\frac{\pi}{5}\right)$$
$$-8\sum_{2}(-1)^{m}q^{2m^2}[-2q^{-2}+\ldots+(-1)^{m}2mq^{-2m^2}]\left(\cos 4m\frac{\pi}{5}+\lambda\cos 8m\frac{\pi}{5}\right)$$
$$+8\sum_{1}(-1)^{m}q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left[q^{-2}+\ldots+(-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m+1)^2}{2}}\right]$$
$$\times\left[\cos(4m+2)\frac{\pi}{5}+\lambda\cos(8m+4)\frac{\pi}{5}\right].$$

On trouve aisément

$$\cos(4m+2)\frac{\pi}{5}=-\frac{5}{4}\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2+\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{2m+1}{5}\right)+1,$$
$$\cos(8m+4)\frac{\pi}{5}=-\frac{5}{4}\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2-\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{2m+1}{5}\right)+1:$$

les deux premiers termes sont sans intérêt.

Dans le troisième, on posera

$$2N=2\nu+2m^2$$

ou

$$\nu=N-m^2,$$

et le coefficient de q^{2N} sera, en remarquant que

$$(-1)^{\nu+m}=(-1)^{\nu+m^2}=(-1)^{N},$$
$$4(-1)^{N}\Sigma J(N-m^2)\left[1+\lambda-\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{m}{5}\right)(1-\lambda)-\frac{5}{4}\left(\frac{m}{5}\right)^2(1+\lambda)\right].$$

Dans la seconde ligne, il faudra poser

$$2N=2m^2-2\mu^2,$$
$$N=m^2-\mu^2=(m-\mu)(m+\mu)=\delta\delta_1$$

et prendre

$$-8\Sigma(-1)^{m+\mu}2\mu\left[(1+\lambda)-\frac{5}{4}\left(\frac{m}{5}\right)^2(1+\lambda)+\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{m}{5}\right)(1-\lambda)\right]$$

$$=-8\Sigma(-1)^{\delta_1}(\delta_1-\delta)\left[1+\lambda+\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{\delta_1+\delta}{5}\right)(1-\lambda)-\frac{5}{4}\left(\frac{\delta_1+\delta}{5}\right)^2(1+\lambda)\right];$$

ici, δ_1 et δ sont de même parité.

Dans la troisième somme, il faut poser

$$2N=\frac{(2m+1)^2}{2}-\frac{(2\mu-1)^2}{2}$$

ou

$$N=(m-\mu+1)(m+\mu)=\delta'\delta_1$$

et prendre

$$8\Sigma(-1)^{m+\mu-1}(2\mu-1)\left[1+\lambda+\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{2m+1}{5}\right)(1-\lambda)-\frac{5}{4}\left(\frac{2m+1}{5}\right)^2\right].$$

Or

$$2m+1=\delta'+\delta'_1,$$

$$m+\mu-1=\delta'_1-1.$$

La somme s'écrira donc

$$-8\Sigma(-1)^{\delta_1}(\delta'_1-\delta')\left[(1+\lambda)+\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\frac{\delta'+\delta'_1}{5}\right)(1-\lambda)-\frac{5}{4}\left(\frac{\delta'+\delta'_1}{5}\right)^2(1+\lambda)\right];$$

ici δ' et δ'_1 sont de parité différente.

En réunissant ces deux sommes, on pourra écrire

$$-8\Sigma(-1)^{d_1}(d_1-d)\left[(1+\lambda)+\frac{\sqrt{5}}{4}(1-\lambda)\left(\frac{d_1+d}{5}\right)-\frac{5}{4}(1+\lambda)\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2\right],$$

d_1 et d ayant la signification habituelle (n° **5**).

Pour préciser ces résultats, nous distinguerons divers cas.

121. 1° $N\equiv 2 \pmod 5$.

Premier membre. — Alors

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}_2+\mathcal{K},$$

$\mathcal{S}_2$ étant le nombre des décompositions

$$2N = 10x^2 + y^2 + 5z^2 + 2t^2,$$

où t est multiple de 5, et $\mathcal{H}$ celui des décompositions $\mathcal{S}$ où

$$t^2 \equiv -1 \pmod 5).$$

Le coefficient correspondant (28) est alors :

$$5(-1)^N\left[(1+\lambda)\mathcal{S} + \frac{\sqrt{5}}{4}(1-\lambda)\mathcal{H} - \frac{5}{4}(1+\lambda)\mathcal{S}\right].$$

Si $\lambda = -\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \lambda_5$, (28) devient

$$5(-1)^N \frac{2}{\sqrt{5}+1}\mathcal{S};$$

Si $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \lambda_6$, (28) devient

$$\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}(-1)^N 2\mathcal{S}_2.$$

Passons aux termes relatifs à la décomposition $\mathfrak{N}$.

Remarquons que

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2 \pmod 5),$$

d'où pour

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2,$$

les combinaisons

$$\begin{array}{ccc} 1, & 1, & 0, \\ -1, & -1, & -1. \end{array}$$

Le nombre des décompositions correspondant à la première ligne est ce que nous avons appelé $\mathfrak{P}_1$.

Le nombre des décompositions correspondant à la seconde ligne est alors

$$\mathfrak{N}_1 - 3\mathfrak{P}_1.$$

Le terme (29) devient alors

$$\frac{\sqrt{5}}{2}(-1)^N\left\{(1-\lambda)\mathfrak{N}_1 - \frac{\sqrt{5}}{4}(1+\lambda)[2\mathfrak{P}_1 - (\mathfrak{N}_1 - 3\mathfrak{P}_1)] - \frac{5}{4}(1-\lambda)[2\mathfrak{P}_1 + (\mathfrak{N}_1 - 3\mathfrak{P}_1)]\right\},$$

et si $\lambda = \lambda_5$,
$$0;$$
si $\lambda = \lambda_6$,
$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}(-1)^N(\mathfrak{U}_1 - 5\mathfrak{P}_1).$$

Enfin, N n'étant pas résidu quadratique de 5, la décomposition $\mathfrak{U}_3$ est impossible.

On a donc comme coefficient de q^{2N} au premier membre :

Si $\lambda = \lambda_5$,
$$\frac{10(-1)^N}{\sqrt{5}+1}\mathfrak{S};$$
Si $\lambda = \lambda_6$,
$$\frac{10(-1)^N\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}\mathfrak{S}_2 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}(-1)^N[\mathfrak{U}_1 - 5\mathfrak{P}_1]$$

Second membre. — On l'a immédiatement.

Pour $\lambda = \lambda_5$, c'est
$$\begin{aligned}\frac{4(-1)^N}{\sqrt{5}+1}\Big\{&J(N-m^2)\left[2 - \frac{5}{2}\left(\frac{m}{5}\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{m}{5}\right)^2\right] \\ &- 8\Sigma(-1)^{d_1}(d_1-d)\left[2 - \frac{5}{2}\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2 + \frac{5}{2}\left(\frac{d_1+d}{5}\right)\right]\Big\}.\end{aligned}$$

Pour $\lambda = \lambda_6$, c'est
$$\begin{aligned}\frac{4(-1)^N\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}\Big\{&J(N-m^2)\left[2 - \frac{5}{2}\left(\frac{m}{5}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{5}\right)\right] \\ &- 8\Sigma(-1)^{d_1}(d_1-d)\left[2 - \frac{5}{2}\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d_1+d}{5}\right)\right]\Big\}.\end{aligned}$$

En remplaçant les nombres de décompositions connus par leurs valeurs et en remarquant que
$$\left(\frac{d_1+d}{5}\right) = \left(\frac{\pm 3}{5}\right) = -1,$$
il vient
$$(-1)^N\{2J(N-25m^2) - 3\Sigma J[N-(5m\pm 1)^2] + 2\Sigma J[N-(5m\pm 2)^2]\} = 5\mathfrak{A}_1 - 6\mathfrak{p}_1,$$
puis
$$(-1)^N\{2\Sigma J(N-25m^2) - \Sigma J[N-(5m\pm 1)^2]\} = -\mathfrak{B}_1 - 2\mathfrak{p}_1 + \frac{5}{4}(-1)^N(2\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{P}_1),$$

équations auxquelles on peut adjoindre la relation de Kronecker :

$$(-1)^N \{ 2\Sigma J(N-25m^2) + \Sigma J[N-(5m\pm 1)^2] + \Sigma J[N-(5m\pm 2)^2] \} = 2\mathfrak{P}_1.$$

On a donc trois équations pour calculer les trois sommes

$$\Sigma J(N-25m^2),\quad \Sigma J[N-(5m\pm 1)^2],\quad \Sigma J[N-(5m\pm 2)^2].$$

On trouve

$$\begin{aligned}
(-1)^N\Sigma J[N-(5m\pm 1)^2] &= -\mathfrak{A}_1 && + 2\mathfrak{P}_1,\\
(-1)^N\Sigma J[N-(5m\pm 2)^2] &= \frac{3}{2}\mathfrak{A}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{B}_1 && -\frac{5}{8}(-1)^N(2\mathcal{S}_2 - \mathfrak{L}_1),\\
(-1)^N\Sigma J[N-25m^2] &= -\frac{1}{2}\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{B}_1 && +\frac{5}{8}(-1)^N(2\mathcal{S}_2 - \mathfrak{L}_1).
\end{aligned}$$

122. 2° $N \equiv -2 \pmod 5$.

On posera alors

$$\lambda = -\frac{-\sqrt{5}-1}{-\sqrt{5}+1} = \lambda_7,$$

$$\lambda = \frac{-\sqrt{5}-1}{-\sqrt{5}+1} = \lambda_8.$$

Les raisonnements sont tout à fait analogues à ceux du n° **121** et conduisent aux valeurs suivantes du premier membre ;

Pour $\lambda = \lambda_7$,

$$\frac{10(-1)^N}{-\sqrt{5}+1}\mathcal{S};$$

Pour $\lambda = \lambda_8$,

$$-\frac{10(-1)^N\sqrt{5}}{-\sqrt{5}+1}\mathcal{S}_2 - \frac{-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}+1}(-1)^N(\mathfrak{U}_1 - 5\mathfrak{L}_1).$$

Le second membre se calcule tout aussi aisément et l'on trouve, en définitive :

$$\begin{aligned}
(-1)^N\Sigma J[N-(5m\pm 1)^2] &= \frac{3}{2}\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{B}_1 && -\frac{5}{8}(-1)^N(2\mathcal{S}_2 + \mathfrak{L}_1),\\
(-1)^N\Sigma J[N-(5m\pm 2)^2] &= -\mathfrak{A}_1 && + 2\mathfrak{P}_1,\\
(-1)^N\Sigma J[N-(5m)^2] &= -\frac{1}{2}\mathfrak{A}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{B}_1 && +\frac{5}{8}(-1)^N(2\mathcal{S}_2 + \mathfrak{L}_1).
\end{aligned}$$

123. Supposons $N \equiv \pm 1 \pmod 5$.

Nous poserons

$$N \equiv \varepsilon \pmod 5.$$

Premier membre. — Alors

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{K},$$

et l'on voit que $\mathcal{S}_1$ représente le nombre de décompositions $\mathcal{S}$

$$2N = 10x^2 + y^2 + 5z^2 + 2t^2,$$

où

$$y \equiv 0 \pmod 5,$$

et $\mathcal{K}$ le nombre des décompositions $\mathcal{S}$ où $y^2 \equiv -\varepsilon \pmod 5$.

Le coefficient (28) correspondant est alors : pour $\lambda = 1$

$$-\frac{5}{2}(-1)^N \mathcal{S}$$

et, pour $\lambda = -1$,

$$-\frac{5}{2}\varepsilon\sqrt{5}(-1)^N(2\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}).$$

Passons au terme provenant de la décomposition $\mathfrak{U}_1$.

On voit tout de suite qu'on n'a, pour les nombres

$$y^2, \quad z^2, \quad t^2,$$

que les combinaisons

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon, & 0, & 0; \\ \varepsilon, & -\varepsilon, & \varepsilon; \end{array}$$

à la première ligne correspondent les décompositions $\mathfrak{P}_2$; à la seconde ligne correspondent $\mathfrak{U}_1 - 3\mathfrak{P}_2$ décompositions.

Ceci posé, pour $\lambda = 1$, on trouve comme valeur de (29)

$$-(-1)^N \frac{5}{12}\varepsilon\mathfrak{U}_1$$

et, pour $\lambda = -1$,

$$-(-1)^N \frac{5}{4}(10\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{U}_1).$$

Passons enfin au terme provenant de la décomposition $\mathfrak{U}_3$, t^2 ne pourra être congru qu'à $1 \pmod 5$.

On a donc, pour $\lambda = 1$,

$$(-1)^N \frac{5}{4} \varepsilon \mathfrak{U}_3;$$

pour $\lambda = -1$,

$$\frac{\sqrt{5}}{4}(-1)^N \mathfrak{U}_3.$$

En définitive, le premier membre est, pour $\lambda = 1$,

$$-\frac{5}{2}(-1)^N \mathcal{S} - \frac{5}{12}\varepsilon(-1)^N \mathfrak{U}_1 + \frac{25}{4}\varepsilon(-1)^N \mathfrak{U}_3;$$

pour $\lambda = -1$,

$$-\frac{5}{2}\sqrt{5}\,(-1)^N \varepsilon(2\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}) - \frac{\sqrt{5}}{4}(-1)^N(10\mathcal{Q}_2 - \mathfrak{U}_1) + \frac{5\sqrt{5}}{4}(-1)^N \mathfrak{U}_3.$$

Deuxième membre. — Il se calcule sans difficulté et l'on trouve, pour $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned} &8(-1)^N \Sigma J[N - 25m^2] - 2(-1)^N \Sigma J[N - (5m \pm 1)^2] \\ &\quad - 2(-1)^N \Sigma J[N - (5m \pm 2)^2] - 8\Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d)\left[2 - \frac{5}{2}\left(\frac{d_1 + d}{5}\right)^2\right] \end{aligned}$$

et, pour $\lambda = -1$,

$$\begin{aligned} &-2\sqrt{5}(-1)^N \{\Sigma J[N - (5m \pm 1)^2] - \Sigma J[N - (5m \pm 1)^2]\} \\ &= -4\Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d)\left(\frac{d_1 + d}{5}\right)\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Aux deux relations ainsi obtenues on adjoindra la relation de Kronecker rappelée au n° **121** et l'on pourra alors résoudre les équations par rapport aux trois sommes

$$\Sigma J[N - (5m \pm 1)^2], \quad \Sigma J(N - (5m \pm 2)^2], \quad \Sigma J[N - (5m)^2].$$

Nous écrirons les résultats en séparant les cas $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$.

124. 1° $N \equiv 1 \pmod 5$:

$$\begin{aligned} (-1)^N \Sigma J[N - (5m \pm 1)^2] &= -\mathfrak{A}_1 - \frac{3}{4}\mathfrak{B}_1 + 2\mathfrak{R}_1 + (-1)^N \frac{5}{8}(2\mathcal{S}_1 - \mathcal{Q}_2), \\ (-1)^N \Sigma J[N - (5m \pm 2)^2] &= \frac{3}{2}\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{4}\mathfrak{B}_1 - (-1)^N \frac{5}{8}(2\mathcal{S}_1 - \mathcal{Q}_2), \\ (-1)^N \Sigma J[N - (5m)^2] &= -\frac{1}{2}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{R}_1 + 2\mathfrak{P}_1 - 2\mathfrak{R}_1. \end{aligned}$$

2° $N \equiv -1 \pmod 5$:

$$(-1)^N \Sigma J[N-(5m\pm 1)^2] = \frac{3}{2}\mathfrak{A}_1 + \frac{1}{4}\mathfrak{B}_1 \qquad -(-1)^N \frac{5}{8}(2\mathcal{S}_1 + \mathfrak{L}_2),$$

$$(-1)^N \Sigma J[N-(5m\pm 2)^2] = -\mathfrak{A}_1 + \frac{3}{4}\mathfrak{B}_1 \quad + 2\mathfrak{N}_1 + (-1)^N \frac{5}{8}(2\mathcal{S}_1 + \mathfrak{L}_2),$$

$$(-1)^N \Sigma J[N-(5m)^2] \qquad = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1 + 2\mathfrak{P}_1 - 2\mathfrak{N}_1.$$

125. Supposons enfin $N \equiv 0 \pmod 5$.

On a vu (n° **74**) que, dans ce cas, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$.

Donc $t \equiv 0$ et le coefficient (28) sera, pour $\lambda = 1$,

$$10(-1)^N \mathcal{S};$$

pour $\lambda = -1$,

$$0.$$

Passons au terme (29).

On aura, dans la décomposition ($\mathfrak{N}_1$),

$$y^2 + z^2 + t^2 \equiv 0 \pmod 5,$$

d'où (n° **60**), pour

$$y^2, \quad z^2, \quad t^2,$$

les valeurs (mod 5)

$$\begin{array}{ccc} 0, & 0, & 0, \\ 1, & -1, & 0. \end{array}$$

A la première ligne correspondent les décompositions

$$4N = 25x^2 + 25y^2 + 25z^2 + 5t^2,$$

ou, puisque $N \equiv 0 \pmod 5$,

$$4\frac{N}{5} = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + t^2,$$

c'est-à-dire les décompositions $\mathfrak{N}_3\left(\frac{N}{5}\right)$.

Quant à la seconde ligne, il lui correspond évidemment les décompositions $\mathfrak{L}_1$, et l'on a

$$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_3\left(\frac{N}{5}\right) + 3\mathfrak{L}_1;$$

donc, pour $\lambda = 1$, (29) devient

$$0;$$

pour $\lambda = -1$,

$$(-1)^N \frac{\sqrt{5}}{6}\left[\mathfrak{U}_1 + 5\,\mathfrak{U}_3\left(\frac{N}{5}\right)\right].$$

Enfin, en dernier lieu, prenons le terme provenant de la décomposition $\mathfrak{U}_3$.

On a nécessairement $t \equiv 0$.

Pour $\lambda = 1$, (30) devient

$$0;$$

pour $\lambda = -1$,

$$-5\sqrt{5}[\mathfrak{U}_3(N)].$$

Donc, en tout, pour $\lambda = 1$,

$$20\,\mathfrak{B}_1;$$

pour $\lambda = -1$

$$-4\sqrt{5}\left[1 + 5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1.$$

Second membre. — On trouve, pour $\lambda = 1$,

$$4(-1)^N \Sigma\, J(N - m^2)\left[2 - \frac{5}{2}\left(\frac{m}{5}\right)^2\right] - 8\,\Sigma(-1)^{d_1}(\dot{d}_1 - d)\left[2 - \frac{5}{2}\left(\frac{d_1 + d}{5}\right)^2\right]$$

et, pour $\lambda = -1$,

$$-2\sqrt{5}(-1)^N \Sigma\, J(N - m^2)\left(\frac{m}{5}\right) - 4\,\Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d)\sqrt{5}\left(\frac{d_1 + d}{5}\right),$$

d'où, en tenant compte de la relation de Kronecker,

$$\begin{aligned}
(-1)^N \Sigma\, J[N - (5h \pm 1)^2] &= \left[1 + 5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{C}_1 - \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{R}_1,\\
(-1)^N \Sigma\, J[N - (5h \pm 2)^2] &= -\left[1 + 5^\nu\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{R}_1,\\
(-1)^N \Sigma\, J[N - 25h^2] &= 2\,\mathfrak{C}_1 + 2\,\mathfrak{P}_1 - 2\,\mathfrak{R}_1.
\end{aligned}$$

Rappelons que $N = 5^\nu N''$ avec $N'' \not\equiv 0 \pmod{5}$.

VIII. — Expressions des sommes $\sum J\left(\frac{N-x^2}{25}\right)$.

126. Partons encore de l'équation

$$\theta\theta_1\Theta_1\Theta\frac{H^2}{H_1^2}=\frac{1}{\cos^2 x}+4\,\Theta(2x,q^2)\,\Sigma(-1)^\nu J(2\nu)$$
$$-8\sum_2(-1)^m q^{2m^2}[-2q^{-2}+\ldots+(-1)^m 2mq^{-2m^2}]\cos 4mx$$
$$+8\sum_1(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left[q^{-\frac{1}{2}}+\ldots+(-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right][\cos(4m+2)]x$$

et faisons-y $x=\frac{\pi\tau}{5}$.

Il s'introduit le rapport $\frac{X'^2}{Y'^2}$, donc, par (II') et (VIII') (Chap. III), le premier membre devient

$$\frac{1}{2}\theta\left(q^{\frac{2}{5}}\right)\Theta\left(\frac{2\pi\tau}{5},q^2\right)\left[\theta^2(q^2)-\theta^2\left(q^{\frac{2}{5}}\right)-\theta_1\theta\left(q^{\frac{1}{5}}\right)-\theta\theta_1\left(q^{\frac{1}{5}}\right)\right];$$

cherchons le coefficient de $q^{\frac{2M}{5}}$.

Remarquons que

$$\Theta\left(\frac{2\pi\tau}{5},q^2\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}q^{m^2}\frac{q^{\frac{2m}{5}}+q^{-\frac{2m}{5}}}{2}.$$

Le premier terme du crochet introduit la représentation

$$\frac{2M}{5}=2x^2+2y^2+\frac{2z^2}{5}+2t^2\pm\frac{4t}{5}$$

ou

$$5M+1=(5x)^2+(5y)^2+5z^2+(5t\pm1)^2;$$

ce sont les $\mathfrak{P}_2(5M+1)$.

Il faut prendre

$$\frac{1}{4}\Sigma(-1)^{t+x+y+z}=-\frac{1}{4}\Sigma(-1)^{5t+5x+5y+z\pm1}=-\frac{1}{4}(-1)^{5M+1}\,\mathfrak{P}_2(5M+1).$$

Le deuxième terme du crochet donne

$$\frac{2M}{5}=\frac{2x^2}{5}+\frac{2y^2}{5}+\frac{2z^2}{5}+2t^2\pm\frac{4t}{5}$$

ou

$$5M + 1 = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + (5t \pm 1)^2.$$

Ce sont les $\mathfrak{U}_3(5M+1)$.

Il faut prendre

$$-\frac{1}{4}\Sigma(-1)^{t+x+y+z} = \frac{1}{4}(-1)^{5M+1}\mathfrak{U}_3(5M+1).$$

Le troisième terme du crochet conduit à poser

$$\frac{2M}{5} = x^2 + \frac{y^2}{5} + \frac{2z^2}{5} + 2t^2 \pm \frac{4t}{5}$$

ou

$$2(5M+1) = 25x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 2(5t \pm 1)^2.$$

Ce sont les $\mathcal{S}_1(5M+1)$, et il faut prendre

$$\frac{1}{4}\Sigma(-1)^{x+z+t} + (-1)^{x+z+t} = -\frac{1}{2}\Sigma(-1)^{5x+z+(5t\pm1)}.$$

On a déjà calculé cette somme et on l'a trouvée égale à

$$\frac{1}{2}(-1)^{5M+1}\Sigma.$$

Le terme correspondant est donc

$$\frac{1}{2}(-1)^{5M+1}\mathcal{S}_1(5M+1).$$

Le quatrième terme du crochet ne donne rien.

Le coefficient de $q^{\frac{2M}{5}}$ au premier membre est donc

$$-\frac{1}{4}(-1)^N\mathfrak{L}_2 + \frac{1}{4}(-1)^N\mathfrak{U}_3 + \frac{1}{2}(-1)^N\mathcal{S}_1,$$

en posant

$$N = 5M + 1.$$

Passons au second membre.

On a d'abord

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\pi\tau}{5}} = \frac{4q^{\frac{2}{5}}}{\left(1+q^{\frac{1}{5}}\right)^2} = 4\Sigma(-1)^{M+1}Mq^{\frac{2M}{5}},$$

qui donne donc

$$4(-1)^{M+1}M.$$

Ensuite

$$-8\sum_{2}(-1)^m q^{2m^2}[-2q^{-2}+\ldots+(-1)^m 2mq^{-2m^2}]\,\frac{q^{\frac{4m}{5}}+q^{-\frac{4m}{5}}}{2}.$$

Il faut poser

$$\frac{2M}{5}=2m^2-2\mu^2\pm\frac{4m}{5}$$

ou

$$5M+1=(5m\pm1)^2-(5\mu)^2=(5m+5\mu\pm1)(5m-5\mu\pm1)=d'_1d',$$

et il faut prendre

$$\frac{4}{5}\Sigma(-1)^{d'_1}(d'_1-d'),$$

la somme étant étendue aux diviseurs conjugués $d'_1\,d'$ congrus tous deux à 1 ou tous deux à -1 (mod 5), c'est-à-dire

$$d'_1d'\equiv 1.1 \qquad \text{ou} \qquad d'_1d'\equiv 4.4 \pmod 5,$$

et

$$d'_1+d'\equiv 0 \pmod 2.$$

Ensuite

$$8\sum_{1}(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{2}}\left[q^{-\frac{1}{2}}+\ldots+(-1)^{m-1}(2m-1)q^{-\frac{(2m-1)^2}{2}}\right]\frac{q^{\frac{8m}{5}}+q^{-\frac{8m}{5}}}{2}.$$

Il faut poser

$$\frac{2M}{5}=\frac{(2m+1)^2}{2}-\frac{(2\mu-1)^2}{2}\pm\frac{4m+2}{5},$$

$$5M+1=\left(\frac{10m+5}{2}\pm1\right)^2-\left(\frac{10\mu-5}{2}\right)^2;$$

d'où, d'abord,

$$5M+1=\left(\frac{10m+5}{2}+\frac{10\mu-5}{2}+1\right)\left(\frac{10m+5}{2}-\frac{10\mu-5}{2}+1\right)$$
$$=(5m+5\mu+1)(5m-5\mu+6)=d''_1d'',$$

puis.

$$5M+1=\left(\frac{10m+5}{2}+\frac{10\mu-5}{2}-1\right)\left(\frac{10m+5}{2}-\frac{10\mu-5}{2}-1\right)$$
$$=(5m+5\mu-1)(5m-5\mu+4)=d'''_1d''',$$

et il faut prendre

$$\frac{4}{5}\Sigma(-1)^{d''_1}(d''_1-d'')+\frac{4}{5}\Sigma(-1)^{d'''_1}(d'''_1-d'''),$$

la seconde somme étant étendue aux diviseurs conjugués d'''_1, d''' congrus, le premier à -1, le second à 4 et tels que, de plus,

$$d'''_1+d'''\equiv 1 \qquad (\text{mod } 2).$$

La première somme est étendue aux diviseurs conjugués d''_1, d'' congrus, le premier à 1, le second à 1, à l'exception cependant de la décomposition

$$5M+1=xy,$$

où y est 1, à laquelle correspond le terme

$$-\frac{4}{5}(-1)^{5M+1}(5M+1-1)=-4M(-1)^{M+1},$$

qu'il faudra par suite retrancher de la somme. Mais ce terme est justement le terme $4(-1)^{M+1}M$ que nous avons calculé tout à l'heure et qui provient de $\frac{1}{\cos^2\frac{\pi\tau}{5}}$. En le faisant inversement rentrer dans la somme, on voit que

$$\frac{4}{5}\Sigma(-1)^{d''_1}(d''_1-d'')+\frac{4}{5}\Sigma(-1)^{d'''_1}(d'''_1-d''')+4(-1)^{M+1}M=\frac{4}{5}\Sigma(-1)^{d^{\text{IV}}}(d^{\text{IV}}_1-d^{\text{IV}}),$$

la somme du second membre étant étendue aux diviseurs conjugués d^{IV}_1, d^{IV} congrus tous deux à 1 ou tous deux à -1 (mod 5), et tels de plus que

$$d^{\text{IV}}_1+d^{\text{IV}}\equiv 1 \qquad (\text{mod } 2).$$

Enfin

$$\frac{4}{5}\Sigma(-1)^{d'_1}(d'_1-d')+\frac{4}{5}\Sigma(-1)^{d^{\text{IV}}}(d^{\text{IV}}_1-d^{\text{IV}})=\frac{4}{5}\Sigma(-1)^{d^{\text{V}}}(d^{\text{V}}_1-d^{\text{V}}),$$

la somme du second membre étant étendue aux diviseurs conjugués d^{V}_1, d^{V} congrus tous deux à 1 ou tous deux à -1.

Mais

$$1 \equiv 1.1 \equiv 4.4 \equiv 2.3 \equiv 3.2 \pmod 5.$$

On voit donc qu'on peut écrire

$$\frac{4}{5}\Sigma(-1)^{d_1^\nu}(d_1^\nu - d^\nu) = \frac{4}{5}\Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d)\left(\frac{d_1+d}{5}\right)^2,$$

d_1 et d ayant la signification habituelle (nº **5**).

Enfin, le terme

$$4\,\Theta\left(\frac{2\pi\tau}{5}, q^2\right)\Sigma(-1)^\nu q^{2\nu} J(\nu)$$

donne pour coefficient de $q^{\frac{2M}{5}}$

$$2(-1)^{5M+1}\sum J\left[\frac{5M+1-(5m\pm 1)^2}{25}\right].$$

On a ainsi tous les éléments du calcul dont voici le résultat

$$(-1)^N\sum J\left[\frac{N-(5m\pm 1)^2}{25}\right] = -\frac{1}{4}\mathfrak{B}_1 + \frac{2}{5}\mathfrak{A}_1 - \frac{(-1)^N}{8}(2\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{P}_2).$$

127. Si, dans la première équation du nº **126**, on posait $x = \frac{2\pi\tau}{5}$, on serait conduit par des calculs analogues à l'équation

$$(-1)^N\sum J\left[\frac{N-(5m\pm 2)^2}{25}\right] = \frac{1}{4}\mathfrak{B}_1 + \frac{2}{5}\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{8}(-1)^N(2\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{P}_2)$$

avec

$$N \equiv 4 \pmod 5.$$

128. *Remarque.* — Nous avons démontré au nº **114** la formule

$$F(25\Delta) = \left[6 - \left(\frac{\Delta}{5}\right)\right] F(\Delta) - 5F\left(\frac{\Delta}{25}\right).$$

On a également la relation

$$F_1(25\Delta) = \left[6 - \left(\frac{\Delta}{5}\right)\right] F_1(\Delta) - 5F_1\left(\frac{\Delta}{25}\right). \tag{31}$$

D'où, puisque

$$E(N) = F(N) - F_1(N),$$
$$J(N) = F(N) + 3F_1(N),$$

$$E(25\Delta) = \left[6 - \left(\frac{\Delta}{5}\right)\right] E(\Delta) - 5E\left(\frac{\Delta}{25}\right), \tag{32}$$

$$J(25\Delta) = \left[6 - \left(\frac{\Delta}{5}\right)\right] J(\Delta) - 5J\left(\frac{\Delta}{25}\right). \tag{33}$$

Ces formules conduisent à diverses vérifications, mais ne donnent pas de résultats nouveaux. On peut cependant remarquer qu'elles dispensent de recourir aux formules du paragraphe III (Chap. III).

IX. — Expressions des sommes $\sum F(N - x^2)$, $\sum F_1(N - x^2)$.

129. Remarquons que

$$E(N) = F(N) - F_1(N),$$
$$J(N) = F(N) + 3F_1(N).$$

Il en résulte que les formules trouvées précédemment en E et J permettront de calculer les sommes relatives aux F et aux F_1. Nous donnons toutes ces formules classées en dix groupes suivant les valeurs de N (mod 10). Nous y adjoignons les formules trouvées pour les $\Sigma F(4N - x^2)$ au début de ce Chapitre.

$N \equiv 1 \pmod{10}$:

$$\Sigma F[N - (5\sigma \pm 1)^2] = -\frac{1}{4}\mathfrak{A} - \frac{3}{16}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{R} + \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1 - \mathcal{P}_2) + \frac{1}{8}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{16}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F_1[N - (5\sigma \pm 1)^2] = -\frac{1}{4}\mathfrak{A} - \frac{3}{16}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{R} + \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1 - \mathcal{P}_2) - \frac{1}{24}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{48}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F[N - (5\sigma \pm 2)^2] = \frac{7}{8}\mathfrak{A} - \frac{1}{16}\mathfrak{B} - \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1 - \mathcal{P}_2) - \frac{3}{16}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{16}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F_1[N - (5\sigma \pm 2)^2] = \frac{5}{24}\mathfrak{A} - \frac{1}{16}\mathfrak{B} - \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1 - \mathcal{P}_2) + \frac{1}{16}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{48}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F[N - (5\sigma)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\mathfrak{R} + \frac{1}{16}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F_1[N - (5\sigma)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\mathfrak{R} - \frac{1}{48}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F\left[\frac{N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right] = -\frac{1}{16}\mathfrak{B} + \frac{1}{10}\mathfrak{N} - \frac{1}{32}(2\mathcal{S}_1 - \mathcal{P}_2) + \frac{1}{16}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F_1\left[\frac{N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right] = -\frac{1}{16}\mathfrak{B} + \frac{1}{10}\mathfrak{N} - \frac{1}{32}(2\mathcal{S}_1 - \mathcal{P}_2) - \frac{1}{48}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{4}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \frac{1}{4}\mathfrak{A} + \frac{3}{8}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{4}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma+5)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2] = \frac{3}{4}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right] = 3\Sigma F_1\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right] = \frac{1}{4}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathcal{N}_1 + \frac{1}{4}\mathcal{N}_3.$$

$N \equiv -1 \pmod{10}$:

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{7}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{16}\mathfrak{B} - \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_2) - \frac{3}{16}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{16}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{5}{24}\mathfrak{A} + \frac{1}{16}\mathfrak{B} - \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_2) + \frac{1}{16}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{48}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] = -\frac{1}{4}\mathfrak{A} + \frac{3}{16}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{N} + \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_2) + \frac{1}{8}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{16}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] = -\frac{1}{4}\mathfrak{A} + \frac{3}{16}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{N} + \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_2) - \frac{1}{24}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{48}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\mathfrak{N} + \frac{1}{16}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\mathfrak{N} - \frac{1}{48}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F\left[\frac{N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right] = \frac{1}{16}\mathfrak{B} + \frac{1}{10}\mathfrak{N} - \frac{1}{32}(2\mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_2) + \frac{1}{16}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F_1\left[\frac{N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right] = \frac{1}{16}\mathfrak{B} + \frac{1}{10}\mathfrak{N} - \frac{1}{32}(2\mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_2) - \frac{1}{48}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \frac{1}{4}\mathfrak{A} + \frac{3}{8}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{4}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{4}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma+5)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2] = \frac{3}{4}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 1)^2}{25}\right] = 3\Sigma F_1\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 1)^2}{25}\right] = \frac{1}{4}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathcal{N}_1 + \frac{1}{4}\mathcal{N}_3.$$

$N \equiv 3 \pmod{10}$:

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{1}{2}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathfrak{B} - \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{P}_1) + \frac{1}{8}\mathcal{N}_1 - \frac{15}{32}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{1}{3}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathfrak{B} - \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{P}_1) - \frac{1}{24}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{32}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{3}{16}\mathcal{N}_1 + \frac{15}{32}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] = -\frac{3}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{P} + \frac{1}{16}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{32}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{8}\mathfrak{B} + \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{P}_1) + \frac{1}{16}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{8}\mathfrak{B} + \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{P}_1) - \frac{1}{48}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \frac{3}{4}\mathfrak{A} + \frac{3}{8}\mathcal{N}_1 - \frac{15}{16}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma+5)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2] = \frac{1}{4}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathcal{N}_1 + \frac{15}{16}\mathcal{N}_2.$$

$N \equiv 7 \pmod{10}$:

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{3}{16}\mathcal{N}_1 + \frac{15}{32}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] = -\frac{3}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{P} + \frac{1}{16}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{32}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{1}{2}\mathfrak{A} + \frac{1}{8}\mathfrak{B} - \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2-\mathcal{P}_1) + \frac{1}{8}\mathcal{N}_1 - \frac{15}{32}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{1}{3}\mathfrak{A} + \frac{1}{8}\mathfrak{B} - \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2-\mathcal{P}_1) - \frac{1}{24}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{32}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathfrak{B} + \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2-\mathcal{P}_1) + \frac{1}{16}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathfrak{B} + \frac{5}{52}(2\mathcal{S}_2-\mathcal{P}_1) - \frac{1}{48}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \frac{3}{4}\mathfrak{A} + \frac{3}{8}\mathcal{N}_1 - \frac{15}{16}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma+5)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2] = \frac{1}{4}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathcal{N}_1 + \frac{15}{16}\mathcal{N}_2.$$

130. $\mathrm{N} \equiv 5 \pmod{10}$:

$$\begin{aligned}
\Sigma\,\mathrm{F}\,[\mathrm{N}-(5\sigma\pm 1)^2] &= \frac{1}{4}\mathfrak{A}+\frac{1}{4}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}-\frac{1}{4}\mathfrak{C} - \frac{1}{4}\mathfrak{Q}+\frac{1}{4}\mathfrak{R}-\frac{\mathcal{N}_1}{32}\\
&= \frac{5(5^{\nu}-1)}{16}\mathrm{U}+\frac{1}{4}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}'''}{5}\right)\right]\mathrm{V} - \frac{1}{4}\mathfrak{Q}+\frac{1}{4}\mathfrak{R}-\frac{\mathcal{N}_1}{32},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma\,\mathrm{F}_1[\mathrm{N}-(5\sigma\pm 1)^2] &= -\frac{1}{12}\mathfrak{A}+\frac{1}{4}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}-\frac{1}{4}\mathfrak{C} - \frac{1}{4}\mathfrak{Q}+\frac{1}{4}\mathfrak{R}+\frac{\mathcal{N}_1}{96}\\
&= -\frac{5^{\nu+1}+11}{48}\mathrm{U}+\frac{1}{4}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}'''}{5}\right)\right]\mathrm{V} - \frac{1}{4}\mathfrak{Q}+\frac{1}{4}\mathfrak{R}+\frac{\mathcal{N}_1}{96},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma\,\mathrm{F}\,[\mathrm{N}-(5\sigma\pm 2)^2] &= \frac{1}{4}\mathfrak{A}-\frac{1}{4}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}-\frac{1}{4}\mathfrak{C} + \frac{1}{4}\mathfrak{Q}+\frac{1}{4}\mathfrak{R}-\frac{\mathcal{N}_1}{32}\\
&= \frac{5(5^{\nu}-1)}{16}\mathrm{U}-\frac{1}{4}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}'''}{5}\right)\right]\mathrm{V} + \frac{1}{4}\mathfrak{Q}+\frac{1}{4}\mathfrak{R}-\frac{\mathcal{N}_1}{32},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma\,\mathrm{F}_1[\mathrm{N}-(5\sigma\pm 2)^2] &= -\frac{1}{12}\mathfrak{A}-\frac{1}{4}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}-\frac{1}{4}\mathfrak{C} + \frac{1}{4}\mathfrak{Q}+\frac{1}{4}\mathfrak{R}+\frac{\mathcal{N}_1}{96}\\
&= -\frac{5^{\nu+1}+11}{48}\mathrm{U}-\frac{1}{4}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{\mathrm{N}'''}{5}\right)\right]\mathrm{V} + \frac{1}{4}\mathfrak{Q}+\frac{1}{4}\mathfrak{R}+\frac{\mathcal{N}_1}{96},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma\,\mathrm{F}\,[\mathrm{N}-(5\sigma)^2] &= \frac{1}{2}\mathfrak{C}+\frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\mathfrak{R}+\frac{\mathcal{N}_1}{16}\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{U} + \frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\mathfrak{R}+\frac{\mathcal{N}_1}{16},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma\,\mathrm{F}_1[\mathrm{N}-(5\sigma)^2] &= \frac{1}{2}\mathfrak{C}+\frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\mathfrak{R}-\frac{\mathcal{N}_1}{48}\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{U} + \frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\mathfrak{R}-\frac{\mathcal{N}_1}{48},
\end{aligned}$$

$$\Sigma\,\mathrm{F}[4\mathrm{N}-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\,\Sigma\,\mathrm{F}_1[4\mathrm{N}-(10\sigma\pm 1)^2] = \frac{7}{10}\mathfrak{A}+\frac{3}{10}\mathfrak{C}+\frac{\mathcal{N}_1}{16} = \frac{7.5^{\nu}+1}{8}\mathrm{U}+\frac{\mathcal{N}_1}{16},$$

$$\Sigma\,\mathrm{F}[4\mathrm{N}-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\,\Sigma\,\mathrm{F}_1[4\mathrm{N}-(10\sigma\pm 3)^2] = \frac{7}{10}\mathfrak{A}+\frac{3}{10}\mathfrak{C}+\frac{\mathcal{N}_1}{16} = \frac{7.5^{\nu}+1}{8}\mathrm{U}+\frac{\mathcal{N}_1}{16},$$

$$\Sigma\,\mathrm{F}[4\mathrm{N}-(10\sigma+5)^2] = 3\,\Sigma\,\mathrm{F}_1[4\mathrm{N}-(10\sigma+5)^2] = \frac{3}{5}\mathfrak{A}-\frac{3}{5}\mathfrak{C}-\frac{\mathcal{N}_1}{8} = \frac{3(5^{\nu}-1)}{4}\mathrm{U}-\frac{\mathcal{N}_1}{8}.$$

131. $\mathrm{N} \equiv 4 \pmod{10}$:

$$\begin{aligned}
\Sigma\,\mathrm{F}\,[\mathrm{N}-(5\sigma\pm 1)^2] &= \frac{3}{16}\mathfrak{A}+\frac{3}{16}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{16}\mathfrak{B}_1 - \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1+\mathcal{P}_2)+\frac{5}{16}\mathcal{N}_3\\
&= \frac{3}{4}(2^{\mu}-1)\mathrm{U} - \frac{1}{48}[5+(-2)^{\mu+1}]\mathrm{V} - \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1+\mathcal{P}_2)+\frac{5}{16}\mathcal{N}_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma\,\mathrm{F}_1[\mathrm{N}-(5\sigma\pm 1)^2] &= -\frac{1}{16}\mathfrak{A}+\frac{7}{16}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{16}\mathfrak{B}_1 - \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1+\mathcal{P}_2)-\frac{5}{48}\mathcal{N}_3\\
&= \frac{1}{4}(3.2^{\mu}-5)\mathrm{U} - \frac{1}{48}[5+(-2)^{\mu+1}]\mathrm{V} - \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1+\mathcal{P}_2)-\frac{5}{48}\mathcal{N}_3,
\end{aligned}$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{3}{8}\mathfrak{A} - \frac{5}{8}\mathfrak{A}_1 + \frac{3}{16}\mathfrak{B}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{R}_1 + \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1+\mathcal{P}_2) - \frac{5}{16}\mathcal{N}_3$$

$$= -\frac{2^\mu - 5}{4}U + \frac{(-2)^{\mu+1}-1}{16}V + \mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right) + \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1+\mathcal{P}_2) - \frac{5}{16}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathfrak{A}_1 + \frac{3}{16}\mathfrak{B}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{R}_1 + \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1+\mathcal{P}_2) + \frac{5}{48}\mathcal{N}_3$$

$$= -\frac{2^\mu - 1}{4}U + \frac{(-2)^{\mu+1}-1}{16}V + \mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right) + \frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1+\mathcal{P}_2) + \frac{5}{48}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] = \frac{3}{16}\mathfrak{A} - \frac{5}{16}\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{4}\mathfrak{B}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{P}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{R}_1$$

$$= \frac{1}{2}U + \frac{1-(-2)^{\mu-1}}{6}V + \mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right) - \mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] = -\frac{1}{16}\mathfrak{A} - \frac{1}{16}\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{4}\mathfrak{B}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{P}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{R}_1$$

$$= \frac{1-(-2)^{\mu-1}}{6}V + \mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right) - \mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F\left[\frac{N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right] = \frac{1}{16}\mathfrak{B}_1 + \frac{1}{10}\mathfrak{R}_1 - \frac{1}{32}(2\mathcal{S}_1+\mathcal{P}_2) + \frac{1}{16}\mathcal{N}_3$$

$$= \frac{2^\mu - 1}{20}U + \frac{(-2)^{\mu+1}-13}{240}V + \frac{1}{5}\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right) - \frac{1}{32}(2\mathcal{S}_1+\mathcal{P}_2) + \frac{1}{16}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F_1\left[\frac{N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right] = \frac{1}{16}\mathfrak{B}_1 + \frac{1}{10}\mathfrak{R}_1 - \frac{1}{32}(2\mathcal{S}_1+\mathcal{P}_2) - \frac{1}{48}\mathcal{N}_3$$

$$= \frac{2^\mu - 1}{20}U + \frac{(-2)^{\mu+1}-13}{240}V + \frac{1}{5}\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right) - \frac{1}{32}(2\mathcal{S}_1+\mathcal{P}_2) - \frac{1}{48}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2]$$

$$= -\frac{1}{2}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{A}_1 + \frac{3}{16}\mathfrak{B} - \frac{9}{16}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_1 + \frac{5}{16}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{V}_2)$$

$$= -\frac{2^\mu + 1}{2}U + \frac{1-(-2)^{\mu-1}}{2}V + \mathfrak{R} - 2\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right) + \frac{5}{16}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{V}_2),$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2]$$

$$= \frac{9}{8}\mathfrak{A} - \frac{3}{8}\mathfrak{A}_1 + \frac{5}{16}\mathfrak{B} + \frac{1}{16}\mathfrak{B}_1 - \frac{5}{16}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{V}_2)$$

$$= 3.2^{\mu-1}U + (-2)^{\mu-2}V - \frac{5}{16}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{V}_2),$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma+5)^2] = \Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2]$$

$$= -\frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{3}{8}\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{2}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}_1 - \mathfrak{R} + \mathfrak{R}_1$$

$$= -\frac{1}{2}U - \frac{(-2)^\mu + 1}{2}V + \mathfrak{P} - 2\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right) - \mathfrak{R} + 2\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\begin{aligned}
\Sigma F\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 1)^2}{25}\right] = \Sigma F_1\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 1)^2}{25}\right]
&= \frac{1}{20}\mathfrak{A}+\frac{1}{20}\mathfrak{A}_1+\frac{13}{80}\mathfrak{B}-\frac{7}{80}\mathfrak{B}_1-\frac{1}{5}\mathfrak{R}+\frac{1}{5}\mathfrak{R}_1 - \frac{1}{16}(2\mathfrak{S}_2+\mathfrak{D}_2)\\
&= \frac{3(2^\mu-1)}{10}U+\frac{3+(-2)^{\mu+1}}{10}V-\frac{1}{5}\mathfrak{R}+\frac{2}{5}\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right)-\frac{1}{16}(2\mathfrak{S}_2+\mathfrak{D}_2).
\end{aligned}$$

$N \equiv 6 \pmod{10}$:

$$\begin{aligned}
\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2] &= \frac{3}{8}\mathfrak{A}-\frac{5}{8}\mathfrak{A}_1-\frac{3}{16}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{R}_1+\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1-\mathcal{P}_2)-\frac{5}{16}\mathcal{N}_3\\
&= -\frac{2^\mu-5}{4}U-\frac{(-2)^{\mu+1}-1}{16}V+\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right)+\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1-\mathcal{P}_2)-\frac{5}{16}\mathcal{N}_3,\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] &= -\frac{1}{8}\mathfrak{A}-\frac{1}{8}\mathfrak{A}_1-\frac{3}{16}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{R}_1+\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1-\mathcal{P}_2)+\frac{5}{48}\mathcal{N}_3\\
&= -\frac{2^\mu-1}{4}U-\frac{(-2)^{\mu+1}-1}{16}V+\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right)+\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1-\mathcal{P}_2)+\frac{5}{48}\mathcal{N}_3,\\
\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] &= \frac{3}{16}\mathfrak{A}+\frac{3}{16}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{16}\mathfrak{B}_1-\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1-\mathcal{P}_2)+\frac{5}{16}\mathcal{N}_3\\
&= \frac{3}{4}(2^\mu-1)U+\frac{1}{48}[5+(-2)^{\mu+1}]V-\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1-\mathcal{P}_2)+\frac{5}{16}\mathcal{N}_3,\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] &= -\frac{1}{16}\mathfrak{A}+\frac{7}{16}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{16}\mathfrak{B}_1-\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1-\mathcal{P}_2)-\frac{5}{48}\mathcal{N}_3\\
&= \frac{1}{4}(3.2^\mu-5)U+\frac{1}{48}[5+(-2)^{\mu+1}]V-\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_1-\mathcal{P}_2)-\frac{5}{48}\mathcal{N}_3,\\
\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] &= \frac{3}{16}\mathfrak{A}-\frac{5}{16}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1-\frac{1}{2}\mathfrak{R}_1\\
&= \frac{1}{2}U-\frac{1-(-2)^{\mu-1}}{6}V+\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right)-\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right),\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] &= -\frac{1}{16}\mathfrak{A}-\frac{1}{16}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1-\frac{1}{2}\mathfrak{R}_1\\
&= -\frac{1-(-2)^{\mu-1}}{6}V+\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right)-\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right),\\
\Sigma F\left[\frac{N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right] &= -\frac{1}{16}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{10}\mathfrak{R}_1-\frac{1}{32}(2\mathcal{S}_1-\mathcal{P}_2)+\frac{1}{16}\mathcal{N}_3\\
&= \frac{2^\mu-1}{20}U-\frac{(-2)^{\mu+1}-13}{240}V+\frac{1}{5}\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right)-\frac{1}{32}(2\mathcal{S}_1-\mathcal{P}_2)+\frac{1}{16}\mathcal{N}_3,\\
\Sigma F_1\left[\frac{N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right] &= -\frac{1}{16}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{10}\mathfrak{R}_1-\frac{1}{32}(2\mathcal{S}_1-\mathcal{P}_2)-\frac{1}{48}\mathcal{N}_3\\
&= \frac{2^\mu-1}{20}U-\frac{(-2)^{\mu+1}-13}{240}V+\frac{1}{5}\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right)-\frac{1}{32}(2\mathcal{S}_1-\mathcal{P}_2)-\frac{1}{48}\mathcal{N}_3,
\end{aligned}$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2]$$
$$=\frac{9}{8}\mathfrak{A}-\frac{3}{8}\mathfrak{A}_1-\frac{5}{16}\mathfrak{B}-\frac{1}{16}\mathfrak{B}_1\qquad-\frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_2-\mathfrak{D}_2)$$
$$=3.2^{\mu-1}U-(-2)^{\mu-2}V\qquad-\frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_2-\mathfrak{D}_2),$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2]$$
$$=-\frac{1}{2}\mathfrak{A}+\frac{1}{2}\mathfrak{A}_1-\frac{3}{16}\mathfrak{B}+\frac{9}{16}\mathfrak{B}_1\qquad+\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_1+\frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_2-\mathfrak{D}_2)$$
$$=-\frac{2^{\mu}+1}{2}U-\frac{1-(-2)^{\mu-1}}{2}V\quad+\mathfrak{R}-2\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right)+\frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_2-\mathfrak{D}_2),$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma+5)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2]$$
$$=-\frac{1}{8}\mathfrak{A}+\frac{3}{8}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{B}-\frac{1}{2}\mathfrak{B}_1+\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1-\mathfrak{R}+\mathfrak{R}_1$$
$$=-\frac{1}{2}U+\frac{(-2)^{\mu}+1}{2}V+\mathfrak{P}-2\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right)-\mathfrak{R}+2\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right]=\Sigma F_1\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right]$$
$$=\frac{1}{20}\mathfrak{A}+\frac{1}{20}\mathfrak{A}_1-\frac{13}{80}\mathfrak{B}+\frac{7}{80}\mathfrak{B}_1\qquad-\frac{1}{5}\mathfrak{R}+\frac{1}{5}\mathfrak{R}_1-\frac{1}{16}(2\mathfrak{S}_2-\mathfrak{D}_2)$$
$$=\frac{3(2^{\mu}-1)}{10}U-\frac{3+(-2)^{\mu-1}}{10}V-\frac{1}{5}\mathfrak{R}+\frac{2}{5}\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right)-\frac{1}{16}(2\mathfrak{S}_2-\mathfrak{D}_2).$$

$N\equiv 2\pmod{10}$:

$$\Sigma F[N-(5\sigma\pm 1)^2]=\frac{3}{8}\mathfrak{A}-\frac{5}{8}\mathfrak{A}_1\qquad+\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1=U+\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2]=-\frac{1}{8}\mathfrak{A}-\frac{1}{8}\mathfrak{A}_1\qquad+\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F[N-(5\sigma\pm 2)^2]=\frac{5}{16}\mathfrak{A}+\frac{1}{16}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1\qquad-\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2-\mathcal{P}_1)-\frac{5}{32}\mathcal{N}_2$$
$$=\frac{3.2^{\mu-1}-1}{2}U-\frac{5+(-2)^{\mu+1}}{24}V\qquad-\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2-\mathcal{P}_1)-\frac{5}{32}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2]=-\frac{5}{48}\mathfrak{A}+\frac{23}{48}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1\qquad-\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2-\mathcal{P}_1)+\frac{5}{96}\mathcal{N}_2$$
$$=\frac{9.2^{\mu-2}-4}{3}U-\frac{5+(-2)^{\mu+1}}{24}V\qquad-\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2-\mathcal{P}_1)+\frac{5}{96}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F[N-(5\sigma)^2]=\frac{1}{16}\mathfrak{A}-\frac{3}{16}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1\qquad+\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2-\mathcal{P}_1)+\frac{5}{32}\mathcal{N}_2$$
$$=\frac{-2^{\mu-1}+1}{2}U\quad+\frac{5+(-2)^{\mu+1}}{24}V\qquad+\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2-\mathcal{P}_1)+\frac{5}{32}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] = -\frac{1}{48}\mathfrak{A}-\frac{5}{48}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1 \qquad +\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2-\mathcal{L}_1)-\frac{5}{96}\mathcal{N}_2$$

$$= \frac{-3.2^{\mu-2}+1}{3}U+\frac{5+(-2)^{\mu+1}}{24}V \qquad +\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2-\mathcal{L}_1)-\frac{5}{96}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 1)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2]$$

$$= \frac{9}{8}\mathfrak{A}-\frac{3}{8}\mathfrak{A}_1+\frac{5}{8}\mathfrak{B}+\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1 \qquad -\frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_1-\mathfrak{b}_1)$$

$$= 3.2^{\mu-1}U-(-2)^{\mu-1}V \qquad -\frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_1-\mathfrak{b}_1),$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 3)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2]$$

$$= -\frac{1}{4}\mathfrak{A}+\frac{3}{4}\mathfrak{A}_1 \qquad +\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}-U-2\,\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma+5)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2]$$

$$= -\frac{3}{8}\mathfrak{A}+\frac{1}{8}\mathfrak{A}_1-\frac{5}{8}\mathfrak{B}-\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1 \qquad +\frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_1-\mathfrak{b}_1)$$

$$= -2^{\mu-1}U \quad +(-2)^{\mu-1}V \qquad +\frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_1-\mathfrak{b}_1).$$

$N\equiv 8 \pmod{10}$:

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{5}{16}\mathfrak{A}+\frac{1}{16}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1 \qquad -\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{L}_1)-\frac{5}{32}\mathcal{N}_2$$

$$= \frac{3.2^{\mu-1}-1}{2}U+\frac{5+(-2)^{\mu+1}}{24}V \qquad -\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{L}_1)-\frac{5}{32}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] = -\frac{5}{48}\mathfrak{A}+\frac{23}{48}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1 \qquad -\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{L}_1)+\frac{5}{96}\mathcal{N}_2$$

$$= \frac{9.2^{\mu-2}-4}{3}U+\frac{5+(-2)^{\mu+1}}{24}V \qquad -\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{L}_1)+\frac{5}{96}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{3}{8}\mathfrak{A}-\frac{5}{8}\mathfrak{A}_1 \qquad +\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1=U+\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A}-\frac{1}{8}\mathfrak{A}_1 \qquad +\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1= \quad \mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] = \frac{1}{16}\mathfrak{A}-\frac{3}{16}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1 \qquad +\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{L}_1)+\frac{5}{32}\mathcal{N}_2$$

$$= \frac{-2^{\mu-1}+1}{2}U \quad -\frac{5+(-2)^{\mu+1}}{24}V \qquad +\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{L}_1)+\frac{5}{32}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] = -\frac{1}{48}\mathfrak{A}-\frac{5}{48}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1 \qquad +\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{L}_1)-\frac{5}{96}\mathcal{N}_2$$

$$= \frac{-3.2^{\mu-2}+1}{3}U-\frac{5+(-2)^{\mu+1}}{24}V \qquad +\frac{5}{32}(2\mathcal{S}_2+\mathcal{L}_1)-\frac{5}{96}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm1)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm1)^2]$$
$$=-\frac{1}{4}\mathfrak{A}+\frac{3}{4}\mathfrak{A}_1\qquad+\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1\quad=\mathfrak{P}-U-2\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm3)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm3)^2]$$
$$=\ \frac{9}{8}\mathfrak{A}-\frac{3}{8}\mathfrak{A}_1-\frac{5}{8}\mathfrak{B}-\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1\qquad-\frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_1+\mathfrak{W}_1)$$
$$=\ 3.2^{\mu-1}U+(-2)^{\mu-1}V\qquad-\frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_1+\mathfrak{W}_1),$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma+5)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2]$$
$$=-\frac{3}{8}\mathfrak{A}+\frac{1}{8}\mathfrak{A}_1+\frac{5}{8}\mathfrak{B}+\frac{1}{8}\mathfrak{B}_1\qquad+\frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_1+\mathfrak{W}_1)$$
$$=-2^{\mu-1}U\quad-(-2)^{\mu-1}V\qquad+\frac{5}{16}(2\mathfrak{S}_1+\mathfrak{W}_1).$$

132. $N\equiv0\pmod{10}$:

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm1)^2]\ =\ \frac{3}{10}\mathfrak{A}-\frac{3}{10}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{4}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1+\frac{3}{40}\mathfrak{C}-\frac{13}{40}\mathfrak{C}_1-\frac{1}{4}\mathfrak{Q}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{R}_1,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm1)^2]\ =-\frac{1}{10}\mathfrak{A}+\frac{1}{10}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{4}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1-\frac{1}{40}\mathfrak{C}-\frac{9}{40}\mathfrak{C}_1-\frac{1}{4}\mathfrak{Q}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{R}_1,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm2)^2]\ =\ \frac{3}{10}\mathfrak{A}-\frac{3}{10}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{4}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1+\frac{3}{40}\mathfrak{C}-\frac{13}{40}\mathfrak{C}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{Q}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{R}_1,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm2)^2]\ =-\frac{1}{10}\mathfrak{A}+\frac{1}{10}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{4}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1-\frac{1}{40}\mathfrak{C}-\frac{9}{40}\mathfrak{C}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{Q}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{R}_1,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2]\ =\ \frac{3}{20}\mathfrak{A}-\frac{3}{20}\mathfrak{A}_1\qquad-\frac{3}{20}\mathfrak{C}+\frac{13}{20}\mathfrak{C}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1-\frac{1}{2}\mathfrak{R}_1,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2]\ =-\frac{1}{20}\mathfrak{A}+\frac{1}{20}\mathfrak{A}_1\qquad+\frac{1}{20}\mathfrak{C}+\frac{9}{20}\mathfrak{C}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1-\frac{1}{2}\mathfrak{R}_1,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm1)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm1)^2]$$
$$=\frac{1}{5}\mathfrak{A}+\frac{1}{5}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{2}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}+\frac{1}{2}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1$$
$$-\frac{9}{20}\mathfrak{C}+\frac{11}{20}\mathfrak{C}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{Q}-\frac{1}{2}\mathfrak{Q}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{R}-\frac{1}{2}\mathfrak{R}_1,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm3)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm3)^2]$$
$$=\frac{1}{5}\mathfrak{A}+\frac{1}{5}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{2}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}-\frac{1}{2}\left[1+5^{\nu}\left(\frac{N''}{5}\right)\right]\mathfrak{B}_1$$
$$-\frac{9}{20}\mathfrak{C}+\frac{11}{20}\mathfrak{C}_1-\frac{1}{2}\mathfrak{Q}+\frac{1}{2}\mathfrak{Q}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{R}-\frac{1}{2}\mathfrak{R}_1,$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma+5)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2]$$
$$=\frac{1}{10}\mathfrak{A}+\frac{1}{10}\mathfrak{A}_1+\frac{9}{10}\mathfrak{C}-\frac{11}{10}\mathfrak{C}_1+\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1-\mathfrak{R}+\mathfrak{R}_1,$$

ou encore, avec d'autres notations :

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{2^{\mu-1}5^\nu+5^\nu-2^{\mu-1}+1}{2}U-\frac{1}{6}\left[1+\left(\frac{N''}{5}\right)5^\nu\right][1-(-2)^{\mu-1}]V + \frac{1}{2}\mathfrak{C}\left(\frac{N}{4}\right)+\frac{1}{2}\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{(2^{\mu-1}-1)(5^\nu-1)}{2}U-\frac{1}{6}\left[1+\left(\frac{N''}{5}\right)5^\nu\right][1-(-2)^{\mu-1}]V + \frac{1}{2}\mathfrak{C}\left(\frac{N}{4}\right)+\frac{1}{2}\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{2^{\mu-1}5^\nu+5^\nu-2^{\mu-1}+1}{2}U+\frac{1}{6}\left[1+\left(\frac{N''}{5}\right)5^\nu\right][1-(-2)^{\mu-1}]V - \frac{1}{2}\mathfrak{C}\left(\frac{N}{4}\right)+\frac{1}{2}\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{(2^{\mu-1}-1)(5^\nu-1)}{2}U+\frac{1}{6}\left[1+\left(\frac{N''}{5}\right)5^\nu\right][1-(-2)^{\mu-1}]V - \frac{1}{2}\mathfrak{C}\left(\frac{N}{4}\right)+\frac{1}{2}\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] = \frac{2^{\mu-1}5^\nu+5^\nu+3.2^{\mu-1}-5}{4}U+\mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right)-\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] = \frac{(2^{\mu-1}-1)(5^\nu+3)}{4}U+\mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right)-\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right).$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2]$$
$$= \frac{2^\mu 5^\nu-2^\mu-5^\nu-1}{2}U-\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{N''}{5}\right)5^\nu\right][1+(-2)^\mu]V + \frac{\mathfrak{C}+\mathfrak{n}}{2}+\mathfrak{C}\left(\frac{N}{4}\right)-\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2]$$
$$= \frac{2^\mu 5^\nu-2^\mu-5^\nu-1}{2}U+\frac{1}{2}\left[1+\left(\frac{N''}{5}\right)5^\nu\right][1+(-2)^\mu]V - \frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{n}}{2}-\mathfrak{C}\left(\frac{N}{4}\right)-\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F\,[4N-(10\sigma+5)^2] = \Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2]$$
$$= \frac{2^\mu 5^\nu+3.2^\mu-5^\nu+5}{4}U+\mathfrak{p}-\mathfrak{n}-2\left[\mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right)-\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right)\right].$$

133. On pouvait prévoir certaines de ces formules dans un cas particulier.

Supposons N pair, mais double d'un nombre impair, c'est-à-dire supposons $\mu = 1$.

Alors $F_1(N - m^2)$ est nul, car $N - m^2$ est congru à 1 ou à 2 (mod 4). On a, en effet,

$$N - (2h+1)^2 \equiv N - 1 \equiv 1 \pmod 4,$$
$$N - (2h)^2 \equiv N \equiv 2 \pmod 4,$$

et d'ailleurs

$$F_1(M) = 0,$$

si M est congru à 1 ou à 2 (mod 4).

On vérifie aisément, dans le cas de $N \equiv 0 \pmod{10}$ qu'il en est ainsi. On le voit encore dans les autres cas, pour les $\Sigma F(N - m^2)$ qui s'expriment sans faire intervenir des nombres de représentations par des formes quaternaires. On en déduit, pour les autres, inversement, une relation entre les nombres $\mathcal{S}_\alpha$, $\mathcal{P}_\beta$, $\mathcal{M}_2$ (ou $\mathcal{M}_3$) et, par suite, on voit qu'il est possible de simplifier les formules obtenues au n° **129** dans le cas de $\mu = 1$. Je montrerai au Chapitre suivant que les formules se simplifient quel que soit μ, aussi ne m'attarderai-je pas actuellement sur cette question.

134. Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. XIV, 2e série, p. 162), donne la formule

$$\Sigma F(m - 25t^2) = \Sigma \Delta,$$

Δ étant un diviseur de m', avec $m = 10m'$, m' étant un entier impair premier à 5, t étant un nombre entier prenant les valeurs 1, 2, 3, ...

Cette formule est un cas particulier de notre formule

$$\Sigma F[N - (5\sigma)^2],$$

dans le cas où $N \equiv 0 \pmod{10}$, $\mu = 1$, $\nu = 1$.

On trouve alors

$$\Sigma F[N - (5\sigma)^2] = 2U.$$

U n'est autre que la somme des diviseurs de $m' = \frac{N}{10}$ et le facteur 2 provient de ce que les σ prennent des valeurs négatives.

On peut donner des formules analogues pour les deux autres sommes : on trouve, en supposant toujours $\mu = 1$, $\nu = 1$:

$$\Sigma F[N - (5\sigma \pm 1)^2] = \Sigma F[N - (5\sigma \pm 2)^2] = 5U.$$

CHAPITRE VI.

FORMULES DE M. GIERSTER. — FORMULES DÉFINITIVES.

135. *Nouvelles relations.* — On sait que

$$F(4\Delta) = 2F(\Delta),$$
$$F_1(4\Delta) = F(\Delta) + F_1(\Delta).$$

Il en résulte immédiatement que

$$(1)\qquad \Sigma F[4N-(5\sigma\pm 1)^2] = \Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2] + \Sigma 2F[N-(5\sigma\pm 2)^2],$$

$$(2)\qquad \Sigma F[4N-(5\sigma\pm 2)^2] = \Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2] + \Sigma 2F[N-(5\sigma\pm 1)^2],$$

$$(3)\qquad \Sigma F[4N-(5\sigma)^2] = \Sigma F[4N-(10\sigma\pm 5)^2] + \Sigma 2F[N-(5\sigma)^2],$$

$$(4)\qquad \Sigma F\left[\frac{4N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right] = \Sigma F\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 1)^2}{25}\right] + \Sigma 2F\left[\frac{N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right],$$

$$(5)\qquad \Sigma F\left[\frac{4N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right] = \Sigma F\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right] + \Sigma 2F\left[\frac{N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right]$$

et

$$(6)\qquad \Sigma F_1[4N-(5\sigma\pm 1)^2]$$
$$= \Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] + \Sigma F[N-(5\sigma\pm 2)^2] + \Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2],$$

$$(7)\qquad \Sigma F_1[4N-(5\sigma\pm 2)^2]$$
$$= \Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] + \Sigma F[N-(5\sigma\pm 1)^2] + \Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2],$$

$$(8)\qquad \Sigma F_1[4N-(5\sigma)^2]$$
$$= \Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2] + \Sigma F[N-(5\sigma)^2] + \Sigma F_1[N-(5\sigma)^2],$$

$$(9)\qquad = \Sigma F_1\left[\frac{4N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right]$$
$$= \Sigma F_1\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 1)^2}{25}\right] + \Sigma F\left[\frac{N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right] + \Sigma F_1\left[\frac{N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right],$$

$$(10)\qquad \Sigma F_1\left[\frac{4N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right]$$
$$= \Sigma F_1\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right] + \Sigma F\left[\frac{N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right] + \Sigma F_1\left[\frac{N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right].$$

Or, dans ces formules, chaque somme est connue. On peut donc espérer, au moyen des formules des nos **129** et **131**, en déduire des relations entre les nombres $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, etc., qui les encombrent, et inversement, se servir de ces relations pour simplifier les formules des nos **129** et **131**.

136. *Formules de M. Gierster : cas de* N *impair.* — Supposons d'abord $N \equiv 3 \pmod{10}$.

La formule (2) donne

$$\frac{2\mathcal{S}_2(4N)-\mathcal{P}_1(4N)}{2}+\frac{\mathcal{M}_2(4\mathcal{M})}{2}=\frac{6}{5}\mathfrak{B}+\frac{8}{5}\mathfrak{A}+2\mathcal{S}_2(N)+\mathcal{P}_1(N)+3\mathcal{M}_2(N).$$

Or (no **100**)

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2(4N)&=4\mathfrak{A}-\mathcal{S}_2(N),\\ \mathcal{M}_2(4N)&=3\mathcal{M}_2(N),\\ \mathcal{P}_1(4N)&=\mathcal{P}_1(N);\end{aligned}$$

donc

$$(11)\qquad 2\mathcal{S}_2+\mathcal{P}_1+\mathcal{M}_2=\frac{8}{5}\mathfrak{A}-\frac{4}{5}\mathfrak{B}.$$

Ceci posé, les équations (6), (7) et (8) donnent

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\,H[4N-(5\sigma\pm 1)^2]&=\Sigma\,F_1[4N-(5\sigma\pm 1)^2]=\mathfrak{P}\\ \Sigma\,H[4N-(5\sigma\pm 2)^2]&=\Sigma\,F_1[4N-(5\sigma\pm 2)^2]=\frac{2}{3}\mathfrak{A}\\ \Sigma\,H[4N-(5\sigma)^2]&=\Sigma F_1[4N-(5\sigma)^2]=\frac{1}{3}\mathfrak{A}.\end{aligned}\right\}\quad N\equiv 3 \pmod{10},$$

Ce sont les *formules de M. Gierster*, traduites dans nos notations (nos **2** et **5**).

137. La formule (11) permet de simplifier les formules du no **129**.

On trouve

$$
\left.
\begin{aligned}
\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2] &= \tfrac{1}{4}\mathfrak{A} + \tfrac{1}{8}\mathcal{N}_1 - \tfrac{5}{16}\mathcal{N}_2\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] &= \tfrac{1}{12}\mathfrak{A} - \tfrac{1}{24}\mathcal{N}_1 + \tfrac{5}{16}\mathcal{N}_2,\\
\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] &= \tfrac{1}{8}\mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P} - \tfrac{3}{16}\mathcal{N}_1 + \tfrac{15}{32}\mathcal{N}_2\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] &= -\tfrac{3}{8}\mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P} + \tfrac{1}{16}\mathcal{N}_1 - \tfrac{5}{32}\mathcal{N}_2\\
\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] &= \tfrac{1}{8}\mathfrak{A} + \tfrac{1}{16}\mathcal{N}_1 - \tfrac{5}{32}\mathcal{N}_2,\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] &= \tfrac{1}{8}\mathfrak{A} - \tfrac{1}{48}\mathcal{N}_1 - \tfrac{5}{32}\mathcal{N}_2.
\end{aligned}
\right\}
\quad N\equiv 3 \pmod{10},
$$

Ce sont les formules que nous voulions obtenir.

On peut remarquer que dans ce cas

$$\Sigma F[N-(5\sigma\pm 1)^2] = 2\Sigma F[N-(5\sigma)^2].$$

138. Supposons $N\equiv 7 \pmod{10}$.

Au lieu de l'équation (11) on obtient

$$2\mathcal{S}_2 - \mathcal{L}_1 + \mathcal{N}_2 = \frac{8}{5}\mathfrak{A} + \frac{4}{5}\mathfrak{B} \tag{12}$$

et les formules de M. Gierster sont

$$
\left.
\begin{aligned}
\Sigma H[4N-(5\sigma\pm 1)^2] &= \Sigma F_1[4N-(5\sigma\pm 1)^2] = \tfrac{2}{3}\mathfrak{A},\\
\Sigma H[4N-(5\sigma\pm 2)^2] &= \Sigma F_1[4N-(5\sigma\pm 2)^2] = \mathfrak{P}\\
\Sigma H[4N-(5\sigma)^2] &= \Sigma F_1[4N-(5\sigma)^2] = \tfrac{1}{3}\mathfrak{A}.
\end{aligned}
\right\}
\quad N\equiv -3 \pmod{10},
$$

On simplifie enfin les formules du n° **129** comme tout à l'heure. Nous donnons les résultats plus loin (n° **148**).

139. Supposons $N\equiv \pm 1 \pmod{10}$.

On a trouvé (n° **100**)

$$\begin{gathered}
3\mathfrak{N}_3(4N) - \mathfrak{N}_1(4N) = 3[3\mathfrak{N}_3(N) - \mathfrak{N}_1(N)], \\
\mathfrak{N}_1(4N) = 6\mathfrak{A}, \\
\mathcal{S}_1(4N) + \mathcal{S}_1(N) = 4\mathfrak{A}, \\
\mathfrak{P}_2(4N) = \mathfrak{P}_2(N);
\end{gathered}$$

il en résulte, par la formule (1),

$$(13) \qquad 3(2\mathcal{S}_1 \mp \mathfrak{P}_2) + 2\mathfrak{N}_1 - 6\mathfrak{N}_3 = \frac{36}{5}\mathfrak{A} \mp \frac{6}{5}\mathfrak{B}$$

avec $N \equiv \pm 1 \pmod{10}$. Les signes supérieurs se correspondent et les signes inférieurs aussi.

En formant alors les combinaisons conduisant aux premiers membres des formules de M. Gierster, on obtient, si $N \equiv 1 \pmod{10}$,

$$\begin{aligned}
\Sigma H[4N - (5\sigma \pm 1)^2] &= \Sigma F_1[4N - (5\sigma \pm 1)^2] = \frac{2}{3}\mathfrak{A}, \\
\Sigma H[4N - (5\sigma \pm 2)^2] &= \Sigma F_1[4N - (5\sigma \pm 2)^2] = \frac{1}{3}\mathfrak{A} - \frac{1}{2}\mathfrak{B} + \mathfrak{N}, \\
\Sigma H[4N - (5\sigma)^2] &= \Sigma F_1[4N - (5\sigma)^2] = \frac{1}{2}\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{N}, \\
\Sigma H\left[\frac{4N - (5\sigma \pm 2)^2}{25}\right] &= \Sigma F_1\left[\frac{4N - (5\sigma \pm 2)^2}{25}\right] = -\frac{1}{15}\mathfrak{A} - \frac{1}{10}\mathfrak{B} + \frac{1}{5}\mathfrak{N},
\end{aligned}$$

et, si $N \equiv -1 \pmod{10}$,

$$\begin{aligned}
\Sigma H[4N - (5\sigma \pm 1)^2] &= \Sigma F_1[4N - (5\sigma \pm 1)^2] = \frac{1}{3}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{B} + \mathfrak{N}, \\
\Sigma H[4N - (5\sigma \pm 2)^2] &= \Sigma F_1[4N - (5\sigma \pm 2)^2] = \frac{2}{3}\mathfrak{A}, \\
\Sigma H[4N - (5\sigma)^2] &= \Sigma F_1[4N - (5\sigma)^2] = -\frac{1}{2}\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{N}, \\
\Sigma H\left[\frac{4N - (5\sigma \pm 1)^2}{25}\right] &= \Sigma F_1\left[\frac{4N - (5\sigma \pm 1)^2}{25}\right] = -\frac{1}{15}\mathfrak{A} + \frac{1}{10}\mathfrak{B} + \frac{1}{5}\mathfrak{N}.
\end{aligned}$$

Ces formules sont équivalentes à celles de M. Gierster (n^{os} **2** et **16**). M. Gierster introduit les symboles $H_{+1}(\Delta)$ et $H_{-1}(\Delta)$ qui désignent respectivement des nombres de classes de formes susceptibles de représenter des nombres résidus quadratiques de 5 ou non résidus.

On passe d'une notation à l'autre en remarquant (¹) que

$$H_{+1}(\Delta) = H_{-1}(\Delta) = \frac{1}{2}\left[H(\Delta) - H\left(\frac{\Delta}{25}\right)\right].$$

La relation (13) permet d'ailleurs évidemment de simplifier les formules du n° **129**. Nous donnons les résultats plus loin.

140. Supposons enfin

$$N \equiv 5 \pmod{10}.$$

Les formules de M. Gierster (n° **2**) s'obtiennent sans peine. Nous avons, en effet, calculé $\sigma(n)$, $\Phi(m)$ ....

Par exemple,

$$\begin{aligned}\sum_{x=0} H_{+1}(4N - x^2) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{x=0} H(4N - x^2) - \sum H\left(\frac{4N - x^2}{25}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\Big\{\Sigma F_1[4N - (10\sigma + 5)^2] + \Sigma F[N - (5\sigma)^2] \\ &\qquad + \Sigma F_1[N - (5\sigma)^2] - \mathfrak{A}\left(\frac{N}{25}\right) - \mathfrak{p}\left(\frac{N}{25}\right)\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{5^{\nu} - 1}{4}U - \frac{\mathfrak{N}_1}{24} + U + \mathfrak{p} - \mathfrak{n} + \frac{\mathfrak{N}_1}{24} - \frac{5^{\nu-1} - 1}{4}U - \frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{n}}{5}\right],\end{aligned}$$

d'après le n° **15**.

Le second membre s'écrit encore

$$\frac{1}{2}\left[(5^{\nu-1} + 1)U + \frac{4}{5}(\mathfrak{p} - \mathfrak{n})\right].$$

Or $N = m.5^{\nu}$, donc

$$\begin{aligned}\Phi(m) &= U, \\ \Phi\left(\frac{N}{25}\right) &= \frac{5^{\nu-1} - 1}{4}U, \\ \Psi\left(\frac{N}{25}\right) &= \frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{n}}{5};\end{aligned}$$

puis

$$\sum_{x=0} H_{+1}(4N - x^2) = \Phi(m) + 2\Phi\left(\frac{N}{25}\right) + 2\Psi\left(\frac{N}{25}\right) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(¹) *Voir* la Note placée à la fin du Mémoire.

141. *Formules de M. Gierster : cas de* N *pair.* — Supposons $N \equiv 4 \pmod{10}$.

Les formules (1) et (2) donnent

$$(14)\qquad 3(2\mathcal{S}_1 + 2\mathcal{E}_2 + \mathcal{Q}_2 + \mathcal{M}_2) - 2\mathcal{N}_3 = \left(2^{\mu+4} - \frac{64}{5}\right)U - 2\left[1 + \frac{(-2)^{\mu+3}}{5}\right]V$$
$$= \frac{28}{5}\mathfrak{A} + \frac{12}{5}\mathfrak{A}_1 + 3\mathfrak{B} + \frac{9}{5}\mathfrak{B}_1.$$

On en déduit

$$\Sigma H[4N - (5\sigma \pm 1)^2] = \Sigma F_1[4N - (5\sigma \pm 1)^2] = \frac{1}{3}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{B} + \mathfrak{N},$$

$$\Sigma H[4N - (5\sigma \pm 2)^2] = \Sigma F_1[4N - (5\sigma \pm 2)^2] = \frac{2}{3}\mathfrak{A},$$

$$\Sigma H[4N - (5\sigma)^2] = \Sigma F_1[4N - (5\sigma)^2] = -\frac{1}{2}\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{N},$$

$$\Sigma H\left[\frac{4N - (5\sigma \pm 1)^2}{25}\right]^2 = \Sigma F_1\left[\frac{4N - (5\rho \pm 1)^2}{25}\right] = -\frac{1}{15}\mathfrak{A} + \frac{1}{10}\mathfrak{B} + \frac{1}{5}\mathfrak{N}$$
$$[N \equiv 4 \pmod{10}].$$

qui sont des formules équivalentes à celles de M. Gierster.

142. Si $N \equiv -4 \pmod{10}$, on trouve de même

$$(15)\qquad 3(2\mathcal{S}_1 + 2\mathcal{E}_2 - \mathcal{Q}_2 - \mathcal{M}_2) - 2\mathcal{N}_3 = \frac{28}{5}\mathfrak{A} + \frac{12}{5}\mathfrak{A}_1 - 3\mathfrak{B} - \frac{9}{5}\mathfrak{B}_1,$$

puis

$$\Sigma H[4N - (5\sigma \pm 1)^2] = \Sigma F_1[4N - (5\sigma \pm 1)^2] = \frac{2}{3}\mathfrak{A},$$

$$\Sigma H[4N - (5\sigma \pm 2)^2] = \Sigma F_1[4N - (5\sigma \pm 2)^2] = \frac{1}{3}\mathfrak{A} - \frac{1}{2}\mathfrak{B} + \mathfrak{N},$$

$$\Sigma H[4N - (5\sigma)^2] = \Sigma F_1[4N - (5\sigma)^2] = \frac{1}{2}\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{N},$$

$$\Sigma H\left[\frac{4N - (5\sigma \pm 2)^2}{25}\right] = \Sigma F_1\left[\frac{4N - (5\sigma \pm 2)^2}{25}\right] = -\frac{1}{15}\mathfrak{A} - \frac{1}{10}\mathfrak{B} + \frac{1}{5}\mathfrak{N}$$
$$[N \equiv -4 \pmod{10}].$$

143. Si $N \equiv \pm 2 \pmod{10}$, on trouve

$$(16)\qquad 3[2\mathcal{S}_2 \mp \mathcal{Q}_1 + 2\mathcal{E}_1 \mp \mathcal{M}_1] + \mathcal{N}_2 = \frac{32}{5}\mathfrak{A} + \frac{8}{5}\mathfrak{A}_1 \pm 6\mathfrak{B} \pm \frac{18}{5}\mathfrak{B}_1,$$

puis

$$\begin{aligned}
&\Sigma\,\mathrm{H}[4\mathrm{N}-(5\sigma\pm 1)^2]=\Sigma\,\mathrm{F}_1[4\mathrm{N}-(5\sigma\pm 1)^2]=\tfrac{2}{3}\mathfrak{A}\\
&\Sigma\,\mathrm{H}[4\mathrm{N}-(5\sigma\pm 2)^2]=\Sigma\,\mathrm{F}_1[4\mathrm{N}-(5\sigma\pm 2)^2]=\mathfrak{p} \qquad [\mathrm{N}\equiv 2 \pmod{10}]\\
&\Sigma\,\mathrm{H}[4\mathrm{N}-(5\sigma)^2] \qquad =\Sigma\,\mathrm{F}_1[4\mathrm{N}-(5\sigma)^2] \qquad =\tfrac{1}{3}\mathfrak{A}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\Sigma\,\mathrm{H}[4\mathrm{N}-(5\sigma\pm 1)^2]=\Sigma\,\mathrm{F}_1[4\mathrm{N}-(5\sigma\pm 1)^2]=\mathfrak{p}\\
&\Sigma\,\mathrm{H}[4\mathrm{N}-(5\sigma\pm 2)^2]=\Sigma\,\mathrm{F}_1[4\mathrm{N}-(5\sigma\pm 2)^2]=\tfrac{2}{3}\mathfrak{A} \qquad [\mathrm{N}\equiv -2 \pmod{10}]\\
&\Sigma\,\mathrm{H}[4\mathrm{N}-(5\sigma)^2] \qquad =\Sigma\,\mathrm{F}_1[4\mathrm{N}-(5\sigma)^2] \qquad =\tfrac{1}{3}\mathfrak{A}
\end{aligned}$$

Si enfin $\mathrm{N}\equiv 0 \pmod{10}$, les formules du n° **132** donnent sans peine, par les combinaisons convenables, les formules de M. Gierster.

144. *Formules définitives.* — Nous avons déjà traité aux n$^{\text{os}}$ **137**, **138** *et* **139** *le cas de* N *impair.*

Supposons *m impair* et congru à $2 \pmod 5$.

On a trouvé n° **138**

$$\Sigma\,\mathrm{F}_1[4m-(5\sigma\pm 1)^2]=\frac{2}{3}\mathrm{U};$$

d'où, en posant $4m=\mathrm{N}$,

$$\Sigma\,\mathrm{F}_1[\mathrm{N}-(5\sigma\pm 1)^2]=\frac{2}{3}\mathrm{U}=\frac{2^{\mu}-2}{3}\mathrm{U}, \tag{17}$$

puisqu'ici $\mu=2$.

Nous avons remarqué plus haut (n° **135**) que, si $\mu=1$,

$$\Sigma\,\mathrm{F}_1[\mathrm{N}-(5\sigma\pm 1)^2]=0.$$

Donc la formule (17) s'applique encore dans ce cas.

Supposons *m pair* et congru à $2 \pmod 5$.

On a trouvé n° **145**

$$\Sigma\,\mathrm{F}_1[4m-(5\sigma\pm 1)^2]=\frac{2}{3}(2^{\mu'+1}-1)\mathrm{U}=\frac{2^{\mu'+2}-2}{3}\mathrm{U}$$

avec $m = 2^{\mu'} n$ (n impair); d'où, en posant $4m = N$,

$$\Sigma F_1[N - (5\sigma \pm 1)^2] = \frac{1}{3}(2^{\mu} - 2)U;$$

ce qui montre que la formule (17) s'applique, quel que soit N pair et congru à 8 (mod 10). Alors, par comparaison avec l'expression déjà obtenue pour le premier membre, on trouve

$$(18) \qquad 3(2\mathcal{S}_2 + \mathcal{P}_1) = \mathfrak{N}_2 + \left(2^{\mu+3} - \frac{64}{5}\right)U + \frac{4}{5}[5 + (-2)^{\mu+1}]V$$

et, par suite,

$$\Sigma F[N - (5\sigma \pm 1)^2] = \frac{2^{\mu+1} + 1}{6}U - \frac{5}{24}\mathfrak{N}_2 = \frac{1}{3}\mathfrak{A} - \frac{1}{6}\mathfrak{A}_1 - \frac{5}{24}\mathfrak{N}_2.$$

De même

$$\Sigma F_1[4m - (5\sigma \pm 2)^2] = \mathfrak{p}(m),$$

d'où, en posant

$$4m = N,$$

$$(19) \qquad \Sigma F_1[N - (5\sigma \pm 2)^2] = \mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right),$$

formule qui n'est vraie que si N est multiple de 4. On sait (n° **133**) que si N est multiple impair de 2, le second membre doit être remplacé par zéro. Or, si $\mu = 1$, le second membre devient zéro (n° **10**, remarque 3). Donc la formule (19) est vraie dans tous les cas où $N \equiv 8 \pmod{10}$.

On a aussi

$$\Sigma F[N - (5\sigma \pm 2)^2] = U + \mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right);$$

puis, de même

$$\Sigma F_1[N - 25\sigma^2] = \frac{2^{\mu-1} - 1}{3}U,$$

$$\Sigma F[N - 25\sigma^2] = \frac{2^{\mu} - 1}{6}U + \frac{5}{24}\mathfrak{N}_2.$$

En comparant les équations (16) et (18), on trouve

$$(20) \qquad 3(2\mathcal{E}_1 + \mathfrak{V}_1) = -2\mathfrak{N}_2 + \left(2^{\mu+3} + \frac{8}{5}\right)U + \frac{3}{5}(-2)^{\mu+3}V;$$

d'où l'on déduit

$$\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2]=\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2]=\frac{2^{\mu+2}-1}{6}U+\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2]=\Sigma F[4N-(10\sigma+5)^2]=\frac{2^{\mu+1}+1}{6}U-\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2.$$

145. Les autres cas conduisent à des calculs complètement analogues. Nous avons réuni les résultats au n° **148** pour N non multiple de 5. Pour N multiple de 5, les résultats ont déjà été donnés aux n^{os} **130** et **132**.

146. Notre méthode nous a permis de retrouver les résultats de M. Gierster. Nous donne-t-elle quelque chose de nouveau?

Supposons d'abord N *non résidu*. Nos formules donnent *douze* relations dont *trois* pouvaient êtres écrites *a priori*, savoir :

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm\alpha)^2]=[2-(-1)^N]\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm\alpha)^2] \qquad (\alpha=1,\ 3 \text{ ou } 5).$$

Trois autres résultent des formules de Kronecker donnant les sommes

$$\Sigma F(N-\sigma^2), \qquad \Sigma F_1(N-\sigma^2), \qquad \Sigma F[4N-(2\sigma+1)^2].$$

Enfin *deux* autres coïncident avec les formules de Gierster que je ne compte que pour deux parce que l'une des trois formules se déduit des deux autres grâce à la relation de Kronecker.

Nous obtenons donc, en définitive, *quatre* relations nouvelles.

Si N est *résidu*, nos seize formules donnent

$$16-4-3-3=6$$

relations nouvelles.

Si N est multiple de 5, nons avons

$$12-3-3-2=4$$

relations nouvelles.

Nous commencerons par réunir les formules analogues aux relations (18) et (20) et donnant de nouvelles propriétés des nombres de représentations par diverses formes quaternaires.

147. *Formules nouvelles relatives aux nombres de représentations par diverses formes quaternaires.* — $N \equiv \pm 1 \pmod{10}$:

$$3(2\mathcal{S}_1 \mp \mathcal{P}_2) = -2\mathcal{N}_1 + 6\mathcal{N}_3 + \frac{36}{5}\mathfrak{A} \mp \frac{6}{5}\mathfrak{B};$$

$N \equiv \pm 3 \pmod{10}$:

$$2\mathcal{S}_2 \pm \mathcal{P}_1 = -\mathcal{N}_2 + \frac{8}{5}\mathfrak{A} \mp \frac{4}{5}\mathfrak{B};$$

$N \equiv \pm 8 \pmod{10}$:

$$3(2\mathcal{S}_2 \pm \mathcal{P}_1) = \mathcal{N}_2 - \frac{2}{5}\mathfrak{A} + \frac{22}{5}\mathfrak{A}_1 \mp \frac{12}{5}\mathfrak{B}_1,$$

$$3(2\mathcal{C}_1 \pm \mathcal{M}_1) = -2\mathcal{N}_2 + \frac{34}{5}\mathfrak{A} - \frac{14}{5}\mathfrak{A}_1 \mp 6\mathfrak{B} \mp \frac{6}{5}\mathfrak{B}_1;$$

$N \equiv \pm 6 \pmod{10}$:

$$3(2\mathcal{S}_1 \mp \mathcal{P}_2) = -2\mathcal{N}_3 + \frac{18}{5}\mathfrak{A}_1 + \frac{2}{5}\mathfrak{A} \mp \frac{6}{5}\mathfrak{B}_1,$$

$$3(2\mathcal{C}_2 \mp \mathcal{M}_2) = 4\mathcal{N}_3 - \frac{6}{5}\mathfrak{A}_1 + \frac{26}{5}\mathfrak{A} \mp 3\mathfrak{B} \mp \frac{3}{5}\mathfrak{B}_1.$$

148. *Formules relatives aux nombres de classes.* — $N \equiv 1 \pmod{10}$:

$$\begin{aligned}
\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2] &= \frac{1}{8}\mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{N} + \frac{1}{48}\mathcal{N}_1,\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] &= \frac{1}{8}\mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{N} - \frac{7}{48}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{12}\mathcal{N}_3,\\
\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] &= \frac{1}{2}\mathfrak{A} - \frac{1}{12}\mathcal{N}_1,\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] &= -\frac{1}{6}\mathfrak{A} + \frac{1}{6}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{12}\mathcal{N}_3,\\
\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] &= -\frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{p} - \frac{1}{2}\mathfrak{N} + \frac{1}{16}\mathcal{N}_1,\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] &= -\frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{p} - \frac{1}{2}\mathfrak{N} - \frac{1}{48}\mathcal{N}_1,\\
\Sigma F\left[\frac{N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right] &= -\frac{3}{40}\mathfrak{A} - \frac{1}{20}\mathfrak{B} + \frac{1}{10}\mathfrak{N} + \frac{1}{48}\mathcal{N}_1,\\
\Sigma F_1\left[\frac{N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right] &= -\frac{3}{40}\mathfrak{A} - \frac{1}{20}\mathfrak{B} + \frac{1}{10}\mathfrak{N} + \frac{1}{48}\mathcal{N}_1 - \frac{1}{12}\mathcal{N}_3,
\end{aligned}$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{4}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \frac{1}{4}\mathfrak{A} + \frac{3}{8}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{4}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma+5)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2] = \frac{3}{4}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right] = 3\Sigma F_1\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right] = \frac{1}{4}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathcal{N}_1 + \frac{1}{4}\mathcal{N}_3.$$

$N \equiv -1 \pmod{10}$:

$$\Sigma F[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{1}{2}\mathfrak{A} - \frac{1}{12}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] = -\frac{1}{6}\mathfrak{A} + \frac{1}{6}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{12}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{R} + \frac{1}{48}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{1}{8}\mathfrak{A} + \frac{1}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{R} - \frac{7}{48}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{12}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F[N-(5\sigma)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\mathfrak{R} + \frac{1}{16}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathfrak{B} + \frac{1}{2}\mathfrak{P} - \frac{1}{2}\mathfrak{R} - \frac{1}{48}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F\left[\frac{N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right] = -\frac{3}{40}\mathfrak{A} + \frac{1}{20}\mathfrak{B} + \frac{1}{10}\mathfrak{R} + \frac{1}{48}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F_1\left[\frac{N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right] = -\frac{3}{40}\mathfrak{A} + \frac{1}{20}\mathfrak{B} + \frac{1}{10}\mathfrak{R} + \frac{1}{48}\mathcal{N}_1 - \frac{1}{12}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \frac{1}{4}\mathfrak{A} + \frac{3}{8}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{4}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \mathfrak{A} - \frac{1}{4}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{4}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma+5)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2] = \frac{3}{4}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathcal{N}_1,$$

$$\Sigma F\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 1)^2}{25}\right] = 3\Sigma F_1\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 1)^2}{25}\right] = \frac{1}{4}\mathfrak{A} - \frac{1}{8}\mathcal{N}_1 + \frac{1}{4}\mathcal{N}_3.$$

$N \equiv 3 \pmod{10}$:

$$\Sigma F[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{1}{4}\mathfrak{A} + \frac{1}{8}\mathcal{N}_1 - \frac{5}{16}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{1}{12}\mathfrak{A} - \frac{1}{24}\mathcal{N}_1 + \frac{5}{16}\mathcal{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{1}{8}\mathfrak{A}+\frac{1}{2}\mathfrak{p}-\frac{3}{16}\mathfrak{N}_1+\frac{15}{32}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] = -\frac{3}{8}\mathfrak{A}+\frac{1}{2}\mathfrak{p}+\frac{1}{16}\mathfrak{N}_1-\frac{5}{32}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] = \frac{1}{8}\mathfrak{A}+\frac{1}{16}\mathfrak{N}_1-\frac{5}{32}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] = \frac{1}{8}\mathfrak{A}-\frac{1}{48}\mathfrak{N}_1-\frac{5}{32}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \frac{3}{4}\mathfrak{A}+\frac{3}{8}\mathfrak{N}_1-\frac{15}{16}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \mathfrak{A}-\frac{1}{4}\mathfrak{N}_1,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma+5)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2] = \frac{1}{4}\mathfrak{A}-\frac{1}{8}\mathfrak{N}_1+\frac{15}{16}\mathfrak{N}_2.$$

$N\equiv -3 \pmod{10}$:

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{1}{8}\mathfrak{A}+\frac{1}{2}\mathfrak{p}-\frac{3}{16}\mathfrak{N}_1+\frac{15}{32}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] = -\frac{3}{8}\mathfrak{A}+\frac{1}{2}\mathfrak{p}+\frac{1}{16}\mathfrak{N}_1-\frac{5}{32}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{1}{4}\mathfrak{A}+\frac{1}{8}\mathfrak{N}_1-\frac{5}{16}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{1}{12}\mathfrak{A}-\frac{1}{24}\mathfrak{N}_1+\frac{5}{16}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] = \frac{1}{8}\mathfrak{A}+\frac{1}{16}\mathfrak{N}_1-\frac{5}{32}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] = \frac{1}{8}\mathfrak{A}-\frac{1}{48}\mathfrak{N}_1-\frac{5}{32}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \mathfrak{A}-\frac{1}{4}\mathfrak{N}_1,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \frac{3}{4}\mathfrak{A}+\frac{3}{8}\mathfrak{N}_1-\frac{15}{16}\mathfrak{N}_2,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma+5)^2] = 3\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2] = \frac{1}{4}\mathfrak{A}-\frac{1}{8}\mathfrak{N}_1+\frac{15}{16}\mathfrak{N}_2.$$

$N\equiv 2 \pmod{10}$:

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2] = \frac{3}{8}\mathfrak{A}-\frac{5}{8}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{p}_1 = U+\mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] = -\frac{1}{8}\mathfrak{A}-\frac{1}{8}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] &= \frac{1}{3}\mathfrak{A}-\frac{1}{6}\mathfrak{A}_1-\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2=\frac{2^{\mu+1}+1}{6}U-\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2,\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] &= -\frac{1}{12}\mathfrak{A}+\frac{1}{4}\mathfrak{A}_1 = \frac{2^{\mu}-2}{3}U,\\
\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] &= \frac{1}{24}\mathfrak{A}+\frac{1}{24}\mathfrak{A}_1+\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2=\frac{2^{\mu}-1}{6}U+\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2,\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] &= -\frac{1}{24}\mathfrak{A}+\frac{1}{8}\mathfrak{A}_1 = \frac{2^{\mu-1}-1}{3}U,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] &= \frac{5}{12}\mathfrak{A}-\frac{1}{12}\mathfrak{A}_1+\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2\\
&= \frac{2^{\mu+2}-1}{6}U+\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2,\\
\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] &= -\frac{1}{4}\mathfrak{A}+\frac{3}{4}\mathfrak{A}_1+\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_1\\
&= -U+\mathfrak{p}-2\mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right),\\
\Sigma F[4N-(10\sigma+5)^2] = \Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2] &= \frac{1}{3}\mathfrak{A}-\frac{1}{6}\mathfrak{A}_1-\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2\\
&= \frac{2^{\mu+1}+1}{6}U-\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2.
\end{aligned}
$$

$N\equiv 8 \pmod{10}$:

$$
\begin{aligned}
\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2] &= \frac{1}{3}\mathfrak{A}-\frac{1}{6}\mathfrak{A}_1-\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2=\frac{2^{\mu+1}+1}{6}U-\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2,\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] &= -\frac{1}{12}\mathfrak{A}+\frac{1}{4}\mathfrak{A}_1 = \frac{2^{\mu}-2}{3}U,\\
\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] &= \frac{3}{8}\mathfrak{A}-\frac{5}{8}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{p}_1 = U+\mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right),\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] &= -\frac{1}{8}\mathfrak{A}-\frac{1}{8}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right),\\
\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] &= \frac{1}{24}\mathfrak{A}+\frac{1}{24}\mathfrak{A}_1+\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2=\frac{2^{\mu}-1}{6}U+\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2,\\
\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] &= -\frac{1}{24}\mathfrak{A}+\frac{1}{8}\mathfrak{A}_1 = \frac{2^{\mu-1}-1}{3}U,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2] = \Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2] &= -\frac{1}{4}\mathfrak{A}+\frac{3}{4}\mathfrak{A}_1+\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_1\\
&= -U+\mathfrak{p}-2\mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right),\\
\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2] = \Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2] &= \frac{5}{12}\mathfrak{A}-\frac{1}{12}\mathfrak{A}_1+\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2\\
&= \frac{2^{\mu+2}-1}{6}U+\frac{5}{24}\mathfrak{N}_2,
\end{aligned}
$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma+5)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2]=\frac{1}{3}\mathfrak{A}-\frac{1}{6}\mathfrak{A}_1-\frac{5}{24}\mathfrak{M}_2$$
$$=\frac{2^{\mu+1}+1}{6}U-\frac{5}{24}\mathfrak{M}_2.$$

$N\equiv 4 \pmod{10}$:

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2]=\frac{1}{6}\mathfrak{A}+\frac{5}{12}\mathfrak{M}_3=\frac{2^{\mu+1}-1}{6}U+\frac{5}{12}\mathfrak{M}_3,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2]=-\frac{1}{12}\mathfrak{A}+\frac{1}{4}\mathfrak{A}_1=\frac{2^{\mu}-2}{3}U,$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2]=\frac{19}{48}\mathfrak{A}-\frac{7}{16}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{R}_1-\frac{5}{12}\mathfrak{M}_3$$
$$=\frac{2^{\mu-1}+2}{3}U+\frac{-1+(-2)^{\mu-1}}{6}V+\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right)-\frac{5}{12}\mathfrak{M}_3,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2]=-\frac{5}{48}\mathfrak{A}+\frac{1}{16}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{R}_1$$
$$=\frac{2^{\mu-1}-1}{3}U+\frac{-1+(-2)^{\mu-1}}{6}V+\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2]=\frac{3}{16}\mathfrak{A}-\frac{5}{16}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{4}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1-\frac{1}{2}\mathfrak{R}_1$$
$$=\frac{1}{2}U-\frac{-1+(-2)^{\mu-1}}{6}V+\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right)-\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2]=-\frac{1}{16}\mathfrak{A}-\frac{1}{16}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{4}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{P}_1-\frac{1}{2}\mathfrak{R}_1$$
$$=-\frac{-1+(-2)^{\mu-1}}{6}V+\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right)-\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F\left[\frac{N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right]=-\frac{1}{240}\mathfrak{A}-\frac{3}{80}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{20}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{10}\mathfrak{R}_1+\frac{1}{12}\mathfrak{M}_3$$
$$=-\frac{2^{\mu-1}-1}{15}U+\frac{-1+(-2)^{\mu-1}}{30}V+\frac{1}{5}\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right)+\frac{1}{12}\mathfrak{M}_3,$$

$$\Sigma F_1\left[\frac{N-(5\sigma\pm 2)^2}{25}\right]=-\frac{1}{240}\mathfrak{A}-\frac{3}{80}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{20}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{10}\mathfrak{R}_1$$
$$=-\frac{2^{\mu-1}-1}{15}U+\frac{-1+(-2)^{\mu-1}}{30}V+\frac{1}{5}\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right),$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 1)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2]$$
$$=\frac{1}{24}\mathfrak{A}+\frac{3}{8}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{B}-\frac{1}{2}\mathfrak{B}_1+\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_1+\frac{5}{12}\mathfrak{M}_3$$
$$=\frac{2^{\mu}-2}{3}U+\frac{1+(-2)^{\mu}}{2}V+\mathfrak{R}-2\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right)+\frac{5}{12}\mathfrak{M}_3,$$

$$\Sigma F[4N-(10\sigma\pm 3)^2]=\Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2]$$
$$=\frac{7}{12}\mathfrak{A}-\frac{1}{4}\mathfrak{A}_1-\frac{5}{12}\mathfrak{M}_3=\frac{2^{\mu+2}+1}{6}U-\frac{5}{12}\mathfrak{M}_3,$$

$$\begin{aligned}
\Sigma F[4N-(10\sigma+5)^2] &= \Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2] \\
&= -\frac{1}{8}\mathfrak{A}+\frac{3}{8}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{2}\mathfrak{B}+\frac{1}{2}\mathfrak{B}_1+\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_1-\mathfrak{n}+\mathfrak{n}_1 \\
&= -\frac{1}{2}U-\frac{1+(-2)^\mu}{2}V+\mathfrak{p}-\mathfrak{n}-2\mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right)+2\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma F\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 1)^2}{25}\right] &= \Sigma F_1\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 1)^2}{25}\right] \\
&= -\frac{7}{120}\mathfrak{A}+\frac{3}{40}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{10}\mathfrak{B}-\frac{1}{10}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{5}\mathfrak{n}-\frac{1}{5}\mathfrak{n}_1-\frac{1}{12}\mathcal{N}_3 \\
&= -\frac{2^\mu+1}{15}U+\frac{1+(-2)^\mu}{10}V+\frac{1}{5}\mathfrak{n}-\frac{2}{5}\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right)-\frac{1}{12}\mathcal{N}_3.
\end{aligned}$$

$N \equiv -4 \pmod{10}$:

$$\begin{aligned}
\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 1)^2] &= \frac{19}{48}\mathfrak{A}-\frac{7}{16}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{4}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{n}_1-\frac{5}{12}\mathcal{N}_3 \\
&= \frac{2^{\mu-1}+2}{3}U-\frac{-1+(-2)^{\mu-1}}{6}V+\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right)-\frac{5}{12}\mathcal{N}_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 1)^2] &= -\frac{5}{48}\mathfrak{A}+\frac{1}{16}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{4}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{n}_1 \\
&= \frac{2^{\mu-1}-1}{3}U-\frac{-1+(-2)^{\mu-1}}{6}V+\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right),
\end{aligned}$$

$$\Sigma F\,[N-(5\sigma\pm 2)^2] = \frac{1}{6}\mathfrak{A}+\frac{5}{12}\mathcal{N}_3 = \frac{2^{\mu+1}-1}{6}U+\frac{5}{12}\mathcal{N}_3,$$

$$\Sigma F_1[N-(5\sigma\pm 2)^2] = -\frac{1}{12}\mathfrak{A}+\frac{1}{4}\mathfrak{A}_1 = \frac{2^\mu-2}{3}U,$$

$$\begin{aligned}
\Sigma F\,[N-(5\sigma)^2] &= \frac{3}{16}\mathfrak{A}-\frac{5}{16}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{p}_1-\frac{1}{2}\mathfrak{n}_1 \\
&= \frac{1}{2}U+\frac{-1+(-2)^{\mu-1}}{6}V+\mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right)-\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma F_1[N-(5\sigma)^2] &= -\frac{1}{16}\mathfrak{A}-\frac{1}{16}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{4}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{p}_1-\frac{1}{2}\mathfrak{n}_1 \\
&= \frac{-1+(-2)^{\mu-1}}{6}V+\mathfrak{p}\left(\frac{N}{4}\right)-\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma F\left[\frac{N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right] &= -\frac{1}{240}\mathfrak{A}-\frac{3}{80}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{20}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{10}\mathfrak{n}_1+\frac{1}{12}\mathcal{N}_3 \\
&= -\frac{2^{\mu-1}-1}{15}U-\frac{-1+(-2)^{\mu-1}}{30}V+\frac{1}{5}\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right)+\frac{1}{12}\mathcal{N}_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma F_1\left[\frac{N-(5\sigma\pm 1)^2}{25}\right] &= -\frac{1}{240}\mathfrak{A}-\frac{3}{80}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{20}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{10}\mathfrak{n}_1 \\
&= -\frac{2^{\mu-1}-1}{15}U-\frac{-1+(-2)^{\mu-1}}{30}V+\frac{1}{5}\mathfrak{n}\left(\frac{N}{4}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 1)^2] &= \Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 1)^2]\\
&= \frac{7}{12}\mathfrak{A}-\frac{1}{4}\mathfrak{A}_1-\frac{5}{12}\mathcal{N}_3 = \frac{2^{\mu+2}+1}{6}\mathrm{U}-\frac{5}{12}\mathcal{N}_3,\\
\Sigma F\,[4N-(10\sigma\pm 3)^2] &= \Sigma F_1[4N-(10\sigma\pm 3)^2]\\
&= \frac{1}{24}\mathfrak{A}+\frac{3}{8}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{2}\mathfrak{B}+\frac{1}{2}\mathfrak{B}_1+\mathfrak{R}-\mathfrak{R}_1+\frac{5}{12}\mathcal{N}_3\\
&= \frac{2^{\mu}-2}{3}\mathrm{U}-\frac{1+(-2)^{\mu}}{2}\mathrm{V}+\mathfrak{R}-2\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right)+\frac{5}{12}\mathcal{N}_3,\\
\Sigma F\,[4N-(10\sigma+5)^2] &= \Sigma F_1[4N-(10\sigma+5)^2]\\
&= -\frac{1}{8}\mathfrak{A}+\frac{3}{8}\mathfrak{A}_1+\frac{1}{2}\mathfrak{B}-\frac{1}{2}\mathfrak{B}_1+\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1-\mathfrak{R}+\mathfrak{R}_1\\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{U}+\frac{1+(-2)^{\mu}}{2}\mathrm{V}+\mathfrak{P}-\mathfrak{R}-2\mathfrak{P}\left(\frac{N}{4}\right)+2\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right),\\
\Sigma F\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right] &= \Sigma F_1\left[\frac{4N-(10\sigma\pm 3)^2}{25}\right]\\
&= -\frac{7}{120}\mathfrak{A}+\frac{3}{40}\mathfrak{A}_1-\frac{1}{10}\mathfrak{B}+\frac{1}{10}\mathfrak{B}_1+\frac{1}{5}\mathfrak{R}-\frac{1}{5}\mathfrak{R}_1-\frac{1}{12}\mathcal{N}_3\\
&= -\frac{2^{\mu}+1}{15}\mathrm{U}-\frac{1+(-2)^{\mu}}{10}\mathrm{V}+\frac{1}{5}\mathfrak{R}-\frac{2}{5}\mathfrak{R}\left(\frac{N}{4}\right)-\frac{1}{12}\mathcal{N}_3.
\end{aligned}$$

149. *Notations.* — Je rappelle enfin le sens des notations.

$F(\Delta)$ est le nombre des classes de formes quadratiques $(ax^2+2bxy+cy^2)$ de discriminant $\Delta = ac-b^2$, de l'ordre propre, primitives ou non.

$F_1(\Delta)$ est le nombre des classes de formes de discriminant Δ, de l'ordre impropre, primitives ou non.

Les sommes sont étendues à toutes les valeurs entières, positives, négatives ou nulles de σ, rendant les crochets positifs ou nuls, mais entiers.

On pose d'ailleurs

$$F_1(0)=0,\qquad F(0)=-\frac{1}{12}.$$

Si $N\equiv 0 \pmod 5$, on a posé

$$N = 2^{\mu}5^{\nu}N''' = 2^{\mu}N' = 5^{\nu}N'',$$

avec

$$N'''\not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2)\ \text{et}\ (\mathrm{mod}\ 5).$$

Si d' est un diviseur quelconque de N, et que d_1 et d soient deux diviseurs *conjugués* ($N = d_1 d$ et $d_1 > d$), on a posé

$$\mathfrak{A} = \Sigma d', \qquad \mathfrak{B} = \Sigma d'\left(\frac{d'}{5}\right), \qquad \mathfrak{C} = \Sigma d'\left(\frac{d'}{5}\right)^2,$$

$$\mathfrak{A}_1 = \Sigma(-1)^{d'} d', \qquad \mathfrak{B}_1 = \Sigma(-1)^{d'} d'\left(\frac{d'}{5}\right), \qquad \mathfrak{C}_1 = \Sigma(-1)^{d'} d'\left(\frac{d'}{5}\right)^2,$$

$$\mathfrak{P} = \Sigma(d_1 - d), \qquad \mathfrak{Q} = \Sigma(d_1 - d)\left(\frac{d_1 + d}{5}\right), \qquad \mathfrak{R} = \Sigma(d_1 - d)\left(\frac{d_1 + d}{5}\right)^2,$$

$$\mathfrak{P}_1 = \Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d), \quad \mathfrak{Q}_1 = \Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d)\left(\frac{d_1 + d}{5}\right), \quad \mathfrak{R}_1 = \Sigma(-1)^{d_1}(d_1 - d)\left(\frac{d_1 + d}{5}\right)^2.$$

Si θ' est un diviseur de N'''

$$U = \Sigma\theta', \qquad V = \Sigma\theta'\left(\frac{\theta'}{5}\right).$$

Enfin $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$ sont respectivement les nombres des représentations de N par les trois formes

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 + z^2 + 25t^2,\\ &x^2 + y^2 + 25z^2 + 25t^2,\\ &x^2 + 25y^2 + 25z^2 + 25t^2. \end{aligned}$$

Ce sont des nombres de décompositions de N en quatre carrés, dont au moins un, deux ou trois sont multiples de 25.

NOTE.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME.

150. Il s'agit d'établir que *le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant négatif, susceptibles de représenter des nombres résidus quadratiques de* 5, *est égal au nombre des classes de formes susceptibles de représenter des nombres non résidus de* 5.

Remarquons d'abord que la proposition n'a de sens que si le déterminant est divisible par 5.

Supposons en effet que le déterminant $-\Delta$ soit résidu et considérons la classe

$$x^2 + \Delta y^2.$$

Si

$$\Delta \equiv 1 \pmod 5,$$
$$\Delta + 1 \equiv 2 \pmod 5.$$

Donc les deux nombres 1 et $\Delta + 1$ qui sont représentables par la forme $(1, 0, \Delta)$ sont, l'un résidu, l'autre non résidu : l'énoncé n'aurait donc aucune signification dans ce cas.

Si

$$\Delta \equiv -1 \pmod 5.$$

on vérifie que 1 et $\Delta + 4$ sont représentables par la forme $(1, 0, \Delta)$ et sont, l'un résidu, l'autre non résidu.

Si Δ n'est pas résidu, la classe $(1, 0, \Delta)$ peut représenter 1 et Δ, c'est-à-dire des résidus et des non résidus : le théorème n'a pas de sens.

Supposons donc

$$\Delta \equiv 0 \pmod 5.$$

On sait alors (¹) que, si n et n' sont deux nombres non divisibles par 5 et représentables par la forme (a, b, c) de déterminant $-\Delta$, on a

$$\left(\frac{n}{5}\right) = \left(\frac{n'}{5}\right),$$

et, par suite, tous les nombres représentables par la forme sont résidus ou tous sont non résidus : l'énoncé a donc un sens.

151. Ceci posé, rappelons d'après *Lejeune-Dirichlet* les principaux résultats de la théorie des *genres*, de *Gauss* (²).

(¹) P.-G. Lejeune-Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, vierte Auflage, § 121.

(²) P.-G. Lejeune-Dirichlet, *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres* (Première Partie, § 3 et 6) (*Journal de Crelle*, t. 19).

Soit $-\Delta$ le déterminant de la forme (a, b, c) supposée primitive (soit proprement, soit improprement).

On pose

$$\frac{\Delta}{S^2} = P$$

ou

$$\frac{\Delta}{S^2} = 2P,$$

selon que le quotient du premier membre est impair ou pair. S^2 désigne d'ailleurs le plus grand carré qui divise Δ. Par suite, P est un nombre *impair* dont les facteurs premiers $p, p', p'', \ldots$ sont tous inégaux. Soient $s, s', s'', \ldots$ les divers facteurs premiers *impairs* (inégaux) de S, et m un nombre représentable par la forme (¹).

On considère les Tableaux suivants :

1° $\Delta = S^2P \quad [P \equiv 3 \pmod 4]$.

$$\begin{array}{l|l|l}
S \equiv 1 \pmod 2 & \left(\frac{m}{p}\right), \ \left(\frac{m}{p'}\right), \ \ldots & \qquad\qquad\qquad\qquad \left(\frac{m}{s}\right), \ \left(\frac{m}{s'}\right), \ \ldots; \\
S \equiv 2 \pmod 4 & \left(\frac{m}{p}\right), \ \left(\frac{m}{p'}\right), \ \ldots & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \qquad\qquad \left(\frac{m}{s}\right), \ \left(\frac{m}{s'}\right), \ \ldots; \\
S \equiv 0 \pmod 4 & \left(\frac{m}{p}\right), \ \left(\frac{m}{p'}\right), \ \ldots & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \ (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \ \left(\frac{m}{s}\right), \ \left(\frac{m}{s'}\right), \ \ldots .
\end{array}$$

2° $\Delta = S^2P \quad [P \equiv 1 \pmod 4]$.

$$\begin{array}{l|l|l}
S \equiv 1 \pmod 2 & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \ \left(\frac{m}{p}\right), \ \left(\frac{m}{p'}\right), \ \ldots & \qquad\qquad \left(\frac{m}{s}\right), \ \left(\frac{m}{s'}\right), \ \ldots; \\
S \equiv 2 \pmod 4 & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \ \left(\frac{m}{p}\right), \ \left(\frac{m}{p'}\right), \ \ldots & \qquad\qquad \left(\frac{m}{s}\right), \ \left(\frac{m}{s'}\right), \ \ldots; \\
S \equiv 0 \pmod 4 & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \ \left(\frac{m}{p}\right), \ \left(\frac{m}{p'}\right), \ \ldots & (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \ \left(\frac{m}{s}\right), \ \left(\frac{m}{s'}\right), \ \ldots .
\end{array}$$

3° $\Delta = 2S^2P \quad [P \equiv 3 \pmod 4]$.

$$\begin{array}{l|l|l}
S \equiv 1 \pmod 2 & (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \ \left(\frac{m}{p}\right), \ \left(\frac{m}{p'}\right), \ \ldots & \qquad\qquad \left(\frac{m}{s}\right), \ \left(\frac{m}{s'}\right), \ \ldots; \\
S \equiv 0 \pmod 2 & (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \ \left(\frac{m}{p}\right), \ \left(\frac{m}{p'}\right), \ \ldots & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, \ \left(\frac{m}{s}\right), \ \left(\frac{m}{s'}\right), \ \ldots .
\end{array}$$

(¹) Il faut prendre $2m$ si la forme est impropre.

4° $\Delta = 2S^2P \quad [P \equiv 1 \pmod 4]$.

$$\begin{array}{l|llll|lll}
S \equiv 1 \pmod 2 & (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}, & & \left(\frac{m}{p}\right), & \left(\frac{m}{p'}\right), \ \ldots & \left(\frac{m}{s}\right), & \left(\frac{m}{s'}\right), & \ldots; \\
S \equiv 0 \pmod 2 & (-1)^{\frac{m-1}{2}}, & (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, & \left(\frac{m}{p}\right), & \left(\frac{m}{p'}\right), \ \ldots & \left(\frac{m}{s}\right), & \left(\frac{m}{s'}\right), & \ldots.
\end{array}$$

Ces quatre Tableaux contiennent évidemment tous les cas.

Les divers caractères quadratiques contenus dans ces Tableaux ne dépendent en rien du nombre particulier m (1) représentable par la forme ; ils constituent autant de *caractères particuliers* de cette forme.

L'ensemble des *caractères particuliers*, c'est-à-dire l'ensemble des caractères quadratiques contenu dans une ligne des Tableaux précédents, est le *caractère complet* de la forme. L'ensemble des formes ayant même caractère complet constitue un *genre*. Deux formes de la même classe appartenant au même genre, les classes se répartissent également en genres.

Si λ est le nombre des unités ($+1$ ou -1) d'une ligne des Tableaux qui précèdent, le nombre des genres *possibles* est évidemment 2^λ. Mais, tous ces genres n'existent pas, en général. On a, en effet, une relation entre les caractères particuliers : le produit des caractères particuliers qui sont situés dans la première partie de chaque ligne doit donner $+1$. Cette condition, si la première partie de la ligne existe, aura donc pour effet de réduire le nombre des genres *possibles* de moitié. On constate d'ailleurs aisément que la première partie de chaque ligne existe toujours, sauf si Δ est un carré précédé du signe $-$. Ce cas ne nous intéresse pas, puisque nous supposons le déterminant *négatif*.

Ainsi le nombre des genres *possibles* est $2^{\lambda-1}$. De plus, ces genres *existent* effectivement et chaque genre contient le même nombre de classes de formes. On remarquera que, dans le cas d'une forme improprement primitive, on ne peut avoir que $\Delta \equiv 3 \pmod 4$ et, par suite,

(1) Ou $2m$.

$P \equiv 3 \pmod 4$ et $S \equiv 1 \pmod 2$. Les Tableaux qui précèdent se réduisent alors à la première ligne de 1°.

152. Or, un des nombres $p, \ldots, s, \ldots$ est 5. Un des caractères quadratiques sera donc $\left(\frac{m}{5}\right)$.

1° Si 5 est un des nombres $p, p', \ldots$, P étant impair, sera ou 5, ou le produit de 5 par au moins un autre facteur, différent de 1.

Si $P = 5 \equiv 1 \pmod 4$, on est dans le cas 2° et la première partie des caractères particuliers se compose de *deux* caractères :

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{m}{5}\right),$$

auxquels correspondent deux combinaisons de signes

$$+ \quad +$$

et

$$- \quad -,$$

et, par suite, au *moins* deux groupes de genres : l'un pour lequel $\left(\frac{m}{5}\right) = +1$, c'est-à-dire le groupe des genres pour lesquels la forme représente des nombres résidus quadratiques de 5, l'autre pour lequel $\left(\frac{m}{5}\right) = -1$, ou le groupe des genres pour lesquels la forme représente des nombres non résidus quadratiques de 5. D'ailleurs, ces deux groupes contiennent le même nombre de genres et, par suite, le même nombre de classes de formes, ce qui démontre le théorème.

Si P est le produit de 5 par un autre nombre, quel que soit le cas où l'on se trouve, il est clair que la première partie des caractères particuliers se composera au *moins* de deux caractères, et par suite qu'on aura un certain nombre de groupes de genres où $\left(\frac{m}{5}\right) = +1$, et le même nombre de groupes de genres où $\left(\frac{m}{5}\right) = -1$. Il y a donc, ici encore, autant de classes où $\left(\frac{m}{5}\right) = +1$ que de classes où $\left(\frac{m}{5}\right) = -1$.

2° Si 5 est un des nombres s, il est clair que, puisque les caractères particuliers de la seconde partie de chaque ligne ne sont soumis à aucune restriction, lors même que seul le caractère $\left(\frac{m}{5}\right)$ existerait, il y aura à la fois des genres où $\left(\frac{m}{5}\right) = +1$ et des genres où $\left(\frac{m}{5}\right) = -1$. Ces nombres de genres sont d'ailleurs les mêmes : par suite, le théorème est encore démontré dans ce cas.

On voit que le point important de la démonstration est qu'il existe à coup sûr, *à la fois*, des genres où $\left(\frac{m}{5}\right) = +1$, et des genres où $\left(\frac{m}{5}\right) = -1$.

Cela n'a pas lieu pour tous les nombres.

Si l'on prenait, par exemple, les classes de formes susceptibles de représenter des nombres résidus quadratiques de 3, ou des nombres non résidus de 3, on constaterait que, pour certains déterminants, il n'existe pas de classes pouvant représenter des nombres résidus.

Si, par exemple, $\Delta = 147 = 3(49)^2$, on est dans le cas $P \equiv 3 \pmod 4$ et $S \equiv 1 \pmod 2$

Classes.	$\left(\frac{m}{3}\right)$.	$\left(\frac{m}{7}\right)$.
$(1, \ 0, \ 147)$	+	+
$(4, \ 1, \ 37)$	+	+
$(4, \ -1, \ 37)$	+	+
$(3, \ 0, \ 49)$	+	−
$(12, \ 3, \ 13)$	+	−
$(12, \ -3, \ 13)$	+	−
$(2, \ 1, \ 74)$	+	+
$(6, \ 3, \ 13)$	+	−

On voit qu'on n'a que deux genres et que, *seuls*, les résidus quadratiques de 3 sont représentables par des formes quadratiques de discriminant 147.

La démonstration précédente réussit pour tout nombre premier congru à 1 (mod 4).

153. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les formes considérées étaient des formes *primitives*.

Soient $h(\Delta)$ le nombre des classes de formes primitives, proprement, par exemple, de discriminant Δ, divisible par 5;

$F(\Delta)$ le nombre des classes de formes, primitives ou non, de l'ordre propre et de discriminant Δ;

$F'(\Delta)$ le nombre des classes de formes, primitives ou non, de l'ordre propre, de discriminant Δ, et n'admettant pas le diviseur 5.

Alors

$$F(\Delta)=h(\Delta)+h\left(\frac{\Delta}{25}\right)+h\left(\frac{\Delta}{625}\right)+\ldots+\sum_a h\left(\frac{\Delta}{a^2}\right)+\sum_a h\left(\frac{\Delta}{25a^2}\right)+\ldots=F'(\Delta)+F\left(\frac{\Delta}{25}\right).$$

D'ailleurs

$$h(\Delta)=h_{+1}(\Delta)+h_{-1}(\Delta),$$

h_{+1} représentant le nombre des classes de formes proprement primitives susceptibles de représenter uniquement des nombres résidus quadratiques de 5.

On a démontré que

$$h_{+1}(\Delta)=h_{-1}(\Delta),$$

donc

$$h(\Delta)=2h_{+1}(\Delta);$$

de même

$$h\left(\frac{\Delta}{a^2}\right)=2h_{+1}\left(\frac{\Delta}{a^2}\right), \qquad \ldots,$$

etc.

Donc

$$F'(\Delta)=2\left[h_{+1}(\Delta)+\sum_a h_{+1}\left(\frac{\Delta}{a^2}\right)\right]=2F_{(+1)}(\Delta),$$

en appelant $F_{(+1)}(\Delta)$ le nombre des classes de formes, primitives ou non, de l'ordre propre, susceptibles de ne représenter que des nombres résidus quadratiques de 5.

Donc

$$F(\Delta)=2F_{(+1)}(\Delta)+F\left(\frac{\Delta}{25}\right),$$

de même

$$F(\Delta)=2F_{(-1)}(\Delta)+F\left(\frac{\Delta}{25}\right).$$

$F_{(-1)}(\Delta)$ étant le nombre des classes de formes, primitives ou non, de l'ordre propre, susceptibles de représenter des nombres non résidus quadratiques de 5.

154. Des raisonnements analogues s'appliqueraient aux formes de l'ordre impropre, et l'on trouverait

$$F_1(\Delta) = 2F_{1(+1)}(\Delta) + F_1\left(\frac{\Delta}{25}\right),$$

$$F_1(\Delta) = 2F_{1(-1)}(\Delta) + F_1\left(\frac{\Delta}{25}\right).$$

Il va de soi que $F\left(\frac{\Delta}{25}\right) = F_1\left(\frac{\Delta}{25}\right) = 0$, si Δ, qui est divisible par 5, ne l'est pas par 25.

Le théorème énoncé résulte évidemment de ces équations.

Grenoble, le 1er mai 1913.

Vu et approuvé :

Paris, le 5 décembre 1913.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 5 décembre 1913.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.