

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

GEORGES BRATU

**Sur l'équilibre des fils soumis à des forces intérieures**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1914

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1914\\_\\_5\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1914__5__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE

1549.

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. GEORGES BRATU,

Professeur au lycée « Laurian » de Botoșani (Roumanie).

1<sup>re</sup> THÈSE. — SUR L'ÉQUILIBRE DES FILS SOUMIS A DES FORCES  
INTÉRIEURES.

2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le      juin 1914 devant la Commission d'Examen.

MM. P. APPELL,      *Président.*

CL. GUICHARD, } *Examineurs.*  
LEBESGUE, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1914



# UNIVERSITÉ DE PARIS.

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.

<b>Doyen</b> .....	P. APPELL, professeur.	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
<b>Doyen honoraire</b> .....	G. DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
<b>Professeurs honoraires</b> ...	{ CH. WOLF. RIBAN.	
	LIPPMANN .....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	GASTON BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	VELAIN.....	Géographie physique.
	GOUSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	P. JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie.
	PAINLEVE.....	Mécanique rationnelle.
<b>Professeurs</b> .....	HAUG.....	Géologie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER....	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND...	Chimie biologique.
	M <sup>me</sup> P. CURIE.....	Physique générale.
	CAULLERY.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	ÉMILE BOREL.....	Théorie des fonctions.
	MARCHIS.....	Aviation.
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	G. PRUVOT.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	ABRAHAM.....	Physique.
	CARTAN.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CL. GUICHARD.....	Mathématiques générales.
	MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	N.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	N.....	Histologie.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	HÉROUARD.....	Zoologie.
	LÉON BERTRAND.....	Géologie.
<b>Professeurs adjoints</b> .....	RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	COTTON.....	Physique.
	LESPIEAU.....	Chimie.
	GENTIL.....	Pétrographie.
	SAGNAC.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ.....	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
<b>Secrétaire</b> .....	D. TOMBECK.	

A

**MONSIEUR PAUL APPELL,**

**MEMBRE DE L'INSTITUT.**

**Hommage de profonde reconnaissance.**



A

**MONSIEUR ÉMILE PICARD,**

**MEMBRE DE L'INSTITUT.**

**Hommage de profonde reconnaissance.**



A MESSIEURS

**ALEXANDRE A. BADAREU,**

ANCIEN MINISTRE D'ÉTAT.

**PIERRE PONI,**

ANCIEN MINISTRE D'ÉTAT,  
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROUMAINE.

**JEAN RALLET,**

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE JASSY.

**JEAN SIMIONESCO,**

MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROUMAINE.

Hommage de profonde reconnaissance.



---

# PREMIÈRE THÈSE.

—••••—  
SUR

# L'ÉQUILIBRE DES FILS

SOU MIS A DES

FORCES INTÉRIEURES.

---

## INTRODUCTION.

La détermination de la figure d'équilibre d'un fil, dont les éléments se repoussent mutuellement suivant une loi quelconque, est un problème difficile, qui, avant ces dernières années, n'a été l'objet d'aucune recherche. Nous devons, toutefois, citer une courte Note publiée par M. R. Townsend sur le cas particulier de deux fils circulaires se coupant orthogonalement <sup>(1)</sup>.

C'est M. Paul Appell qui, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 17 février 1913, a posé le premier le problème général suivant :

Étant donné un fil homogène, considérons le champ de forces créé par l'attraction ou la répulsion de ses éléments, en admettant que l'action de l'élément de masse  $m'$  placé en un point de coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  sur l'élément de masse  $m''$  placé en un point quelconque  $x, y, z$  soit  $m'm''V'(r)$ ,  $V(r)$  étant une fonction donnée de

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

---

(1) *The quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, t. XII, 1873, p. 214.

Ainsi à tout fil il correspondra un champ de forces créé par l'action de ses éléments suivant la loi indiquée.

*Chercher la position d'équilibre de deux fils homogènes, chacun d'eux étant supposé placé dans le champ de forces créé par l'autre.*

Si  $\lambda$  et  $l$  sont les longueurs des deux fils,  $\sigma$  et  $s$  leurs arcs respectifs, comptés à partir d'une extrémité, on a la fonction de forces

$$U(x, y, z) = \int_0^\lambda \mu V(r) d\sigma$$

et les courbes d'équilibre sont données par les équations de M. Appell :

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \int_0^\lambda \frac{V'(r)}{r} \begin{vmatrix} x - \xi & y - \eta & z - \zeta \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} d\sigma = 0, \\ \text{(B)} \quad & \int_0^\lambda \frac{V'(r)}{r} [(x - \xi)x'' + (y - \eta)y'' + (z - \zeta)z''] d\sigma \\ & - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \left[ K + \int_0^\lambda V(r) d\sigma \right] = 0, \\ \text{(C)} \quad & x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \end{aligned}$$

et trois autres qu'on obtient en échangeant  $\xi, \eta, \zeta, \sigma, \lambda$  avec  $x, y, z, s, l$ . Les accents désignent des dérivées par rapport à l'arc.

Pour obtenir  $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$  en fonction de  $s$  et de  $\sigma$  respectivement, on a à résoudre six équations *intégré-différentielles* simultanées.

Ce cas se rattache donc au problème extrêmement difficile de la résolution d'une équation *mixte* ou *intégré-différentielle*. Si l'équation est linéaire par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées, on peut la ramener à une équation intégrale de Fredholm (1). M. V. Volterra a résolu un cas spécial d'équation mixte non linéaire construite à l'aide des opérations de composition (2). Mais la résolution du cas général demandera encore de nombreuses et profondes recherches.

Dans ce travail, nous nous proposons de chercher la figure plane

(1) BOUNITZKY, *Sur une classe d'équations intégrales* (Bulletin des Sc. math., t. XXXII, janvier 1908). — G. BRATU, *Sur les équations mixtes linéaires* (C. R. Acad. Sc., n° 21, 24 mai, 1909).

(2) *Atti Lincei*, 1910, p. 169, 361, 425; 1911, 1<sup>er</sup> sem., p. 95; 2<sup>e</sup> sem., p. 79.

d'équilibre d'un seul fil soumis aux actions mutuelles de ses propres éléments. On peut, par exemple, supposer que le fil est *fermé* ou que ses extrémités sont *attachées en deux points fixes*, distincts ou confondus. Les deux équations de M. Appell se ramènent à une seule, en prenant  $x$  comme variable. Dans le cas de *l'attraction*, il est évident que la figure d'équilibre ne peut être que rectiligne ou réduite à un point. Nous allons donc supposer que les éléments du fil *se repoussent*.

Dans la première Partie, nous étudions d'une façon détaillée le cas où la répulsion est *proportionnelle à la distance*. Dans ce cas, le problème peut être complètement résolu soit par une méthode élémentaire, soit à l'aide des fonctions elliptiques.

Dans la seconde Partie, nous étudions le cas où  $V(r) = r^{2k}$ ,  $k$  étant un entier positif. Nous montrons que l'équation intégrale-différentielle de M. Appell se réduit, dans ce cas, à une équation différentielle ordinaire à coefficients constants, mais *indéterminés*. Une fois connue la forme générale de la solution, on détermine ces constantes par les relations qui expriment leur définition.

Ensuite, nous remarquons qu'à chaque figure d'équilibre du fil soumis à des forces intérieures, il correspond une force unique *extérieure* qui, agissant seule sur les éléments du fil, le maintient en équilibre *sous la même forme*. Cette remarque simplifie l'étude du cas où la fonction  $V(r)$  étant  $r^{2k}$ , la force extérieure est centrale.

Enfin, par suite des analogies qui existent entre la figure d'équilibre d'un fil et la trajectoire d'un mobile, nous rattachons le problème de M. Appell à celui étudié par M. Darboux dans son *Traité fondamental de la Théorie générale des surfaces* (T. II, Liv. V, Chap. VI). Ainsi les figures d'équilibre planes nous apparaissent comme les transformées des *lignes géodésiques* d'une certaine surface représentée sur le plan *avec conservation des angles*.



---

# PREMIÈRE PARTIE.

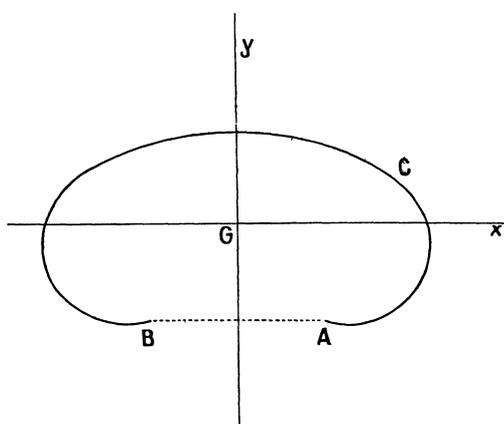
RÉPULSION PROPORTIONNELLE A LA DISTANCE.

---

1. Considérons un fil homogène de longueur  $2l$ , ayant ses extrémités attachées en deux points fixes A et B et supposons que deux quelconques de ses éléments  $ds, ds'$ , placés aux points M et M' respectivement, se repoussent proportionnellement à la distance MM'. Soient C une des figures d'équilibre du fil, G le centre de gravité de la courbe C,  $\delta$  la masse de l'unité de longueur (*fig. 1*).

Toutes les forces répulsives, qui agissent sur un même élément  $ds$ ,

Fig. 1.



ont une résultante unique et égale à la répulsion de la masse du fil  $M = 2l\delta$  concentrée en G. Si l'on appelle  $f$  la répulsion de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance, l'élément  $ds$  sera donc sollicité par une force répulsive  $Fds$  émanant de G et égale à

$$fM \delta \rho ds,$$

$\rho$  désignant la distance  $Gds$ . Par suite,

(1) 
$$F = fM \delta \rho = 2\mu\rho.$$

Toutes ces forces étant centrales, la figure d'équilibre est *plane*. Elle est évidemment *symétrique par rapport à la médiatrice de AB*.

Supposons d'abord que le centre répulsif soit un point quelconque O de cette médiatrice. Prenons le point O comme origine et la médiatrice de AC comme axe des  $y$ .

T étant la tension du fil, on a

$$\begin{aligned} dT + 2\mu\rho d\rho &= 0, \\ T + \mu\rho^2 &= \mu a^2, \end{aligned}$$

$a$  désignant une constante. Donc

$$(2) \quad T = \mu(a^2 - \rho^2).$$

Le théorème du moment de la tension donne ensuite

$$(3) \quad T\rho^2 d\theta = C ds,$$

$C$  désignant une nouvelle constante que, pour l'homogénéité, nous pouvons égaler à  $\mu b^3$ .

Nous aurons alors l'équation différentielle de la courbe d'équilibre

$$(4) \quad (a^2 - \rho^2)\rho^2 d\theta = b^3 ds.$$

Élevant au carré, remplaçant  $ds^2$  par  $d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$ , on peut séparer les variables et l'on trouve enfin

$$(5) \quad d\theta = \frac{b^3 d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2(a^2 - \rho^2)^2 - b^6}}.$$

Appelons  $\rho_1, \theta_1; \rho_2, \theta_2$  les coordonnées polaires des points A et B. En posant  $\rho^2 = u, \rho_1^2 = u_1$ , on a pour  $\theta$  la quadrature *elliptique*

$$(6) \quad \theta - \theta_1 = \pm \frac{b^3}{2} \int_{u_1}^u \frac{du}{u \sqrt{u(a^2 - u)^2 - b^6}}.$$

D'autre part  $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$  donne avec (5)

$$(7) \quad ds = \frac{(a^2 - u) du}{2 \sqrt{u(a^2 - u)^2 - b^6}}.$$

Désignons pour abréger par  $f(u)$  le polynôme sous le radical. On a

alors

$$(8) \quad f(u) = u(a^2 - u)^2 - b^6,$$

$$(9) \quad f'(u) = (a^2 - u)(a^2 - 3u),$$

$$(10) \quad T = \mu(a^2 - u),$$

$\mu$  étant une constante essentiellement *positive*.

Dans le cas de la figure 1, si  $\theta_2 - \theta_1 = 2\varphi$ , on doit supposer  $l \geq \rho_1 \sin \varphi$ .

Si  $b = 0$  la formule (6) donne  $\theta = \theta_1$ , quel que soit  $\rho$ , et la formule (7)

$$s - s_1 = \sqrt{u} - \sqrt{u_1} = \rho - \rho_1.$$

La figure d'équilibre est *rectiligne* et sa direction passe par O. C'est le cas où les points A, B, O sont en ligne droite, ce qui arrive en particulier, si les points A et B sont confondus. En effet, dans ce cas, le moment  $C = \mu b^3$  de la tension par rapport à O est nul.

Supposons alors  $b \neq 0$  et  $\mu > 0$ . C'est le cas général de la répulsion. Le polynôme  $f(u)$  et la tension T doivent rester positifs le long de l'arc ACB. Par suite  $u < a^2$ ,  $u_1 < a^2$  et  $f(u_1) > 0$ .

On a d'ailleurs, d'après (8),

$$f(0) < 0, \quad f(u_1) > 0, \quad f(a^2) < 0, \quad f(+\infty) > 0.$$

Par conséquent  $f(u)$  admet trois racines *réelles, distinctes et positives*. Désignons-les par  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\gamma^2$  dans leur ordre croissant. Alors

$$0 < \alpha^2 \leq u_1 \leq \beta^2 < a^2 < \gamma^2.$$

D'autre part, la dérivée  $f'(u)$  s'annulant pour  $u = \frac{a^2}{3}$  donne

$$\alpha^2 < \frac{a^2}{3} < \beta^2,$$

c'est-à-dire  $f\left(\frac{a^2}{3}\right) > 0$  ou encore  $4a^6 > 27b^6$ .

Remarquons aussi que l'identité

$$f(u) = u^3 - 2a^2u^2 + a^4u - b^6 = (u - \alpha^2)(u - \beta^2)(u - \gamma^2)$$

donne

$$(11) \quad \alpha^2\beta^2 + \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2) = a^4,$$

$$(12) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2a^2$$

et en éliminant  $\alpha$ , on trouve l'équation en  $\gamma^2$ ,

$$\gamma^4 - 2(\alpha^2 + \beta^2)\gamma^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0,$$

d'où

$$(13) \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \pm 2\alpha\beta.$$

Or  $\gamma^2$  étant plus grand que  $\alpha^2$ , l'égalité (12) donne

$$\alpha^2 + \beta^2 < \alpha^2 < \gamma^2.$$

C'est donc le signe + que nous devons prendre dans la formule (13) et l'on en conclut

$$(14) \quad \gamma = \alpha + \beta.$$

D'autre part, comme

$$2\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad b^6 = \alpha^2\beta^2\gamma^2,$$

il résulte que

$$(15) \quad \begin{cases} \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2, \\ b^3 = \alpha\beta(\alpha + \beta). \end{cases}$$

Ceci étant, supposons par exemple que  $\rho$  commence par croître à partir de  $\rho_1$ ;  $u$  croît à partir de  $u_1$ , et l'on prend le signe + dans la formule (6).

$u$  croît jusqu'à la valeur  $\beta^2$  qu'il atteint effectivement pour  $\theta = \theta_\beta$ ,

$$\theta_\beta = \theta_1 + \frac{b^3}{2} \int_{u_1}^{\beta^2} \frac{du}{u\sqrt{f(u)}}.$$

Ensuite  $u$  doit décroître : on prend le signe — devant le radical de la formule (6) et l'arc est le symétrique du premier par rapport au rayon vecteur  $\rho = \beta$ . Les racines  $\alpha^2$  et  $\beta^2$  étant *simples*, on a la discussion d'un cas classique de problèmes de Mécanique. *La variable  $u$  oscille entre les valeurs limites  $\alpha^2$  et  $\beta^2$ ;  $\rho$  est fonction périodique de  $\theta$  et admet comme période la quantité  $2\Theta$ ,*

$$(16) \quad \Theta = \frac{b^3}{2} \int_{\alpha^2}^{\beta^2} \frac{du}{u\sqrt{f(u)}}.$$

La figure d'équilibre est tangente aux cercles  $\rho = \alpha$  et  $\rho = \beta$ .

2. Dans ce qui précède, on a supposé  $f(u_1) > 0$ .

Si  $f(u_1) = 0$  et  $\alpha \neq \beta$ , c'est que  $u_1 = \alpha^2$  ou  $u_1 = \beta^2$ . Comme  $u$  doit rester compris entre  $\alpha^2$  et  $\beta^2$ , pour que  $f(u)$  soit positif,  $u$  devra commencer par croître dans le premier cas et par décroître dans le second. On retombe ensuite dans le cas précédent.

Si  $\alpha = \beta$ , le polynôme  $f(u)$  admet une racine double, qui ne peut être que  $\frac{\alpha^2}{3}$  et l'on a  $4a^6 - 27b^6 = 0$ , car  $f\left(\frac{\alpha^2}{3}\right) = 0$ ,  $\frac{du}{d\theta} = 0$  et  $\rho = \frac{a}{\sqrt{3}}$ . La figure d'équilibre est *circulaire*. La tension est *constante*, car la formule (10) donne tout le long du fil

$$T = \frac{2}{3} \mu a^2.$$

3. Nous avons trouvé, en général, pour la tension

$$T = \mu (\alpha^2 - \rho^2)$$

avec  $\alpha < \rho < \beta < a$ . Lorsque  $\rho$  croît la tension diminue et inversement; elle est minimum pour  $\rho = \beta$  et maximum pour  $\rho = \alpha$ .

4. Pour connaître le sens de la concavité de la courbe par rapport à l'origine, on doit former l'expression

$$\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = \frac{1}{\rho} + \frac{\rho\theta'' + 2\theta'}{\rho^3\theta'^3},$$

les dérivées de  $\rho$  étant prises par rapport à  $\theta$  et celles de  $\theta$  par rapport à  $\rho$ . Or on a

$$\theta' = \frac{b^3}{\rho\sqrt{f}}, \quad \theta'' = -\frac{b^3(2f + \rho f')}{2\rho^2 f^{\frac{3}{2}}},$$

et l'on trouve

$$\frac{1}{\rho} + \frac{\rho\theta'' + 2\theta'}{\rho^3\theta'^3} = \frac{2b^6 + 2f - \rho f'}{2\rho b^6} = \frac{2\rho^3(\alpha^2 - \rho^2)}{b^6}.$$

Cette expression étant *positive* pour  $\rho < a$ , la courbe d'équilibre tourne toujours sa concavité vers le centre répulsif O.

5. ÉTUDE DE L'ANGLE  $\Theta$ . — On pourrait prouver que l'angle période  $\Theta$  n'est pas inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ , en utilisant la méthode classique que Poiseux a employée dans une question analogue pour le cas du pendule sphé-

rique. Nous préférons donner les limites mêmes entre lesquelles cet angle varie, en nous inspirant d'une méthode de M. de Saint-Germain (1).

On a trouvé

$$(17) \quad \Theta = \int_{\alpha^2}^{\beta^2} \frac{\alpha\beta\gamma du}{2u\sqrt{(u-\alpha^2)(u-\beta^2)(u-\gamma^2)}} = \int_{\alpha^2}^{\beta^2} \bar{F}(u) du$$

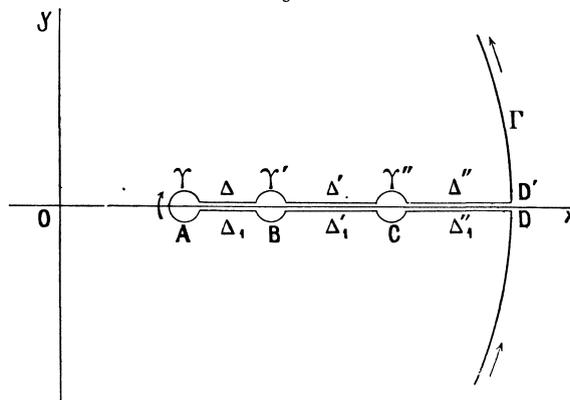
avec  $\gamma = \alpha + \beta$ . Posons pour abrégier

$$R(u) = \sqrt{(u-\alpha^2)(u-\beta^2)(u-\gamma^2)}$$

et marquons, dans le plan des quantités complexes  $X + iY$ , les trois points A, B, C d'abscisses  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$  (fig. 2).

En décrivant un cercle  $\Gamma$  de centre O et de rayon R très grand et trois

Fig. 2.



petits cercles  $\gamma, \gamma', \gamma''$  autour des points A, B, C de rayon  $\epsilon$ , nous considérons le contour marqué sur la figure 2, limité extérieurement par le cercle  $\Gamma$  et le tracé  $D\Delta''_1C\Delta'_1B\Delta_1A\gamma\Delta\gamma'\Delta'\gamma''\Delta''$  qui évite les trois points critiques  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$  de  $F(u)$ . A l'intérieur de ce contour la fonction  $F(u)$  est *uniforme* et admet le seul pôle simple  $u = 0$  avec le résidu  $\pm \frac{1}{2i}$  suivant la détermination du radical.

Prenons l'argument de  $R(u)$  égal à *zéro* sur  $\Delta''$ . En partant avec cette détermination du point D' et en suivant la circonférence  $\Gamma$  dans le sens

(1) *Bull. des Sc. math.*, t. XX, 1896, p. 114, et t. XXII, 1898, p. 95.

direct, l'argument de  $R(u)$  est égal à  $3\pi$  lorsque  $u$  revient en  $D$  et par suite sur  $\Delta_1''$ , à  $\frac{5\pi}{2}$  sur  $\Delta_1'$ , à  $2\pi$  sur  $\Delta_1$ , à  $\pi$  sur  $\Delta$  et à  $\frac{\pi}{2}$  sur  $\Delta'$ .

A l'origine l'argument de cette détermination de  $R(u)$  est  $\frac{3\pi}{2}$ .

Intégrons alors  $F(u)du$  suivant tout ce contour dans le sens direct. Les intégrales le long de la circonférence  $\Gamma$  pour  $R = \infty$  et le long des petites circonférences  $\gamma, \gamma', \gamma''$  pour  $\varepsilon = 0$  sont toutes nulles. En tenant compte de l'argument du radical au point  $O$  et le long des segments rectilignes parallèles à l'axe des  $X$ , le théorème de Cauchy donne

$$2 \int_{\gamma_1}^{+\infty} F(u) du - 2 \int_{\alpha^2}^{\beta^2} F(u) du = -\pi,$$

et par conséquent

$$(18) \quad \Theta = \frac{\pi}{2} + \int_{\gamma_1}^{+\infty} F(u) du.$$

Comme la formule (17) nous montre que pour  $u > \gamma^2$  la fonction  $F(u)$  est réelle et positive, nous trouvons ainsi, comme dans le cas du pendule sphérique,

$$(19) \quad \Theta > \frac{\pi}{2}.$$

Pour obtenir la limite supérieure de cet angle, posons

$$S = \int_{\gamma_1}^{+\infty} \frac{\alpha\beta\gamma du}{2u\sqrt{(u-\alpha^2)(u-\beta^2)(u-\gamma^2)}}.$$

En faisant le changement de variable  $u = \frac{\gamma^2}{\sin^2 \varphi}$ , on trouve

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha\beta\sqrt{\sin \varphi(1+\sin \varphi)} d\varphi}{\sqrt{\gamma^4 + \alpha^2\beta^2 \sin^2 \varphi - \gamma^2(\alpha^2 + \beta^2) \sin \varphi}},$$

ou encore, en posant  $\beta = \alpha x$ , puisque  $\gamma = \alpha(1+x)$ , on obtient finalement

$$(20) \quad S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sqrt{\sin \varphi(1+\sin \varphi)} d\varphi}{\sqrt{(1+x)^4 + x^2 \sin^2 \varphi - (1+x^2)(1+x)^2 \sin \varphi}}.$$

La dérivée de cette expression par rapport à  $x$  étant

$$\frac{dS}{d\varphi} = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x^2-1) [(1+x)^2 - (1+x+x^2) \sin \varphi] \sqrt{\sin \varphi + \sin^2 \varphi}}{[(1+x)^4 + x^2 \sin^2 \varphi - (1+x^2)(1+x)^2 \sin \varphi]^{\frac{3}{2}}} d\varphi,$$

il résulte que la fonction  $S$ , et par suite l'angle  $\Theta$ , va en décroissant lorsque  $x > 1$  croît.

Pour  $x = 1$ , on a

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin \varphi + \sin^2 \varphi}}{4 - \sin \varphi} d\varphi,$$

ou, en posant  $\sin \varphi = \frac{1}{1+u^2}$ , il vient

$$S = \int_0^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)(3+4u^2)} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, pour  $x = 1$ , on a  $\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ . C'est la valeur maximum de l'angle  $\Theta$ ; son minimum est  $\frac{\pi}{2}$  et il est atteint pour  $x = +\infty$ .

6. VARIATION DE L'ARC  $\Sigma$ . — Désignons par  $\Sigma$  la longueur de l'arc de courbe correspondant à l'angle  $\Theta$ . La formule (7) nous donne

$$\Sigma = \frac{1}{2} \int_{\alpha^2}^{\beta^2} \frac{(a^2 - u) du}{\sqrt{u(a^2 - u)^2 - b^6}},$$

ou, avec le changement  $\beta = x\alpha$ ,  $u = \alpha^2 + (\beta^2 - \alpha^2)t$ , il vient

$$(21) \quad \Sigma = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 \frac{x^2(1-t) + x + t}{\sqrt{t(1-t)[(1-t)x^2 + 2x + t]}} dt = \alpha \Phi(x).$$

Supposons  $\beta$  fixe. La dérivée de  $\Sigma$  par rapport à  $\alpha$  est

$$\frac{d\Sigma}{d\alpha} = \Phi(x) - x\Phi'(x),$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\Sigma}{d\alpha} = \int_0^1 \frac{(1+t-t^2)x^2 + 3tx + t^2}{2\sqrt{t(1-t)[(1-t)x^2 + 2x + t]^{\frac{3}{2}}} dt,$$

expression positive pour  $x \geq 1$ . L'arc  $\Sigma$  va donc en croissant avec  $\alpha$ .

Pour  $\alpha = 0$  ( $x = \infty$ ) on a  $\Sigma = \beta$ , si dans la formule (21) on remplace  $\alpha$  par  $\frac{\beta}{x}$ . Pour  $\alpha = \beta$  ( $x = 1$ ), la même formule donne  $\Sigma = \beta \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ .

7. ÉTUDE DE LA COURBE. — Pour étudier la figure d'équilibre du fil, dans le cas où les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  sont données, il suffit d'étudier la forme de l'arc  $\Sigma$  compris entre  $\rho = \alpha$  et  $\rho = \beta$ . On sait comment on continue ensuite la courbe par des symétries successives.

Preons donc  $\rho = \alpha$ ,  $\theta_1 = 0$ . L'équation (6) de la courbe d'équilibre est

$$\theta = \int_{\alpha^2}^{\rho^2} \frac{b^3 du}{2u\sqrt{u(a^2 - u)^2 - b^6}},$$

avec  $a^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ ,  $b^3 = \alpha\beta(\alpha + \beta)$ .

En posant  $\beta = \alpha x$ ,  $u - \alpha^2 = \alpha^2(x^2 - 1)t$ , on trouve, pour  $\rho$  et  $\theta$ , les expressions

$$(22) \quad \rho = \alpha \sqrt{1 + (x^2 - 1)t},$$

$$(23) \quad \theta = \int_0^t \mathbf{F}(t, x) dt,$$

avec

$$(24) \quad \mathbf{F}(t, x) = \frac{x(1+x)}{2\sqrt{t(1-t)} [tx^2 + 1 - t] \sqrt{(1-t)x^2 + 2x + t}}.$$

Nous supposons  $\beta \geq \alpha$  et par suite  $x \geq 1$ . Dans ces conditions  $\rho$  et  $\theta$  vont en croissant avec  $t$ .

Désignons par D le domaine  $x \geq 1$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , et étudions dans ce domaine la fonction  $\mathbf{F}(t, x)$ .

*Dérivée par rapport à x.* — On trouve

$$\frac{\partial \mathbf{F}(t, x)}{\partial x} = \frac{\mathbf{F}_1(t, x)}{\mathbf{F}_2(t, x)},$$

le dénominateur étant réel et positif dans le domaine D et le numérateur étant le polynome

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(t, x) &= -t(1-t)x^5 + (2t^2 - 3t)x^4 + (1 - 5t + t^2)x^3 \\ &\quad + (3 - 3t - t^2)x^2 + (1 + t - 2t^2)x + t(1-t) \\ &= (x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1)t^2 \\ &\quad - (x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 3x^2 - x - 1)t + x^3 + 3x^2 + x. \end{aligned}$$

Comme

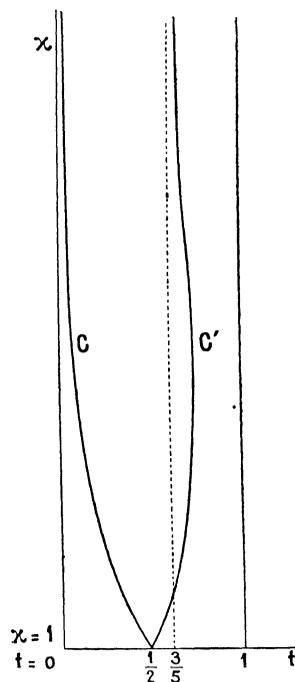
$$F_1(0, x) = x(x^2 + 3x + 1) > 0$$

et

$$F_1(1, x) = -x^2(x^2 + 3x + 1) < 0,$$

le polynome  $F_1(t, x)$ , considéré comme fonction de  $t$ , admet une racine réelle et une seule dans l'intervalle  $(0, 1)$  et la courbe  $F_1(t, x) = 0$  a une seule branche  $C$  dans le domaine  $D$ . Elle coupe la droite  $x = 1$  au

Fig. 3.



point  $t = \frac{1}{2}$ . Lorsque  $x$  croît,  $t$  décroît le long de  $C$  <sup>(1)</sup> et la branche est asymptote à la droite  $t = 0$  (*fig. 3*).

Considérons la surface  $z = F(t, x)$ . Pour  $x$  et  $t$  dans le domaine  $D$ , on a  $z > 0$ . Lorsque  $x > 1$  croît, dans l'intersection de la surface  $z = F(t, x)$  par un plan  $t = \text{const.}$ ,  $z$  va en *décroissant* si  $\frac{1}{2} < t < 1$  et

---

<sup>(1)</sup> On voit, par exemple, par la règle de Descartes que le polynome  $F_1(t_1, x)$  admet une seule racine positive en  $x$  pour  $0 \leq t_1 \leq 1$ .

croît d'abord jusqu'à la courbe C pour décroître ensuite, si  $0 < t < \frac{1}{2}$ .  
 Pour  $x = +\infty$  et  $0 < t < 1$ , on a  $z = 0$ .

Dérivée par rapport à  $t$ . — On trouve

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = - \frac{x(1+x)}{4R^3} \frac{F_3(t, x)}{(tx^2 + 1 - t)^2},$$

en posant

$$R = \sqrt{t(1-t)[(1-x^2)t + 2x + x^2]}$$

et

$$\begin{aligned} F_3(t, x) &= 5(x^2-1)^2 t^3 - (8x^4 + 8x^3 - 15x^2 - 8x + 7)t^2 \\ &\quad + (3x^4 + 6x^3 - 7x^2 - 10x + 2)t + x^2 + 2x \\ &= t(t-1) \left( t - \frac{3}{5} \right) x^4 + 2t(3-4t)x^3 + (1-2t)(5t^2 - 5t + 1)x^2 \\ &\quad + 2(4t^2 - 5t + 1)x + t(t-1) \left( t - \frac{2}{5} \right). \end{aligned}$$

Comme pour  $x > 0$  on a  $F_3(-\infty, x) < 0$ ,  $F_3(0, x) > 0$ ,  $F_3(1, x) < 0$ ,  
 $F_3(+\infty, x) > 0$ , la courbe  $F_3(t, x) = 0$  n'a qu'une seule branche C dans  
 le domaine D. Elle admet pour asymptote la droite  $t = \frac{3}{5}$ .

Pour  $x = 1$ , on a  $t = \frac{1}{2}$ . Lorsque  $x$  croît le long de C,  $t$  va d'abord en  
 croissant jusqu'à un maximum compris entre 0,7 et 0,75 et décroît  
 ensuite jusqu'à  $t = \frac{3}{5}$  (fig. 3).

L'intersection de la surface  $z = F(t, x)$  par un plan  $x = \text{const.}$ , dans  
 le domaine D, est une courbe  $\Gamma_x$ , asymptote à  $t = 0$  et  $t = 1$ , tournant  
 sa concavité vers les  $z$  positifs et ayant son minimum pour la valeur de  $t$   
 qui correspond, dans le plan sécant, à la courbe C'.

En particulier, pour  $x = 1$ , on a la section  $\Gamma_1$

$$(25) \quad z = \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{t(1-t)}},$$

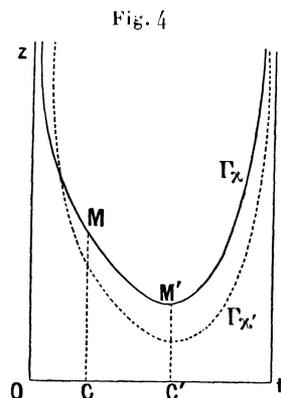
courbe symétrique par rapport à la droite  $t = \frac{1}{2}$ .

La valeur de l'angle  $\theta$  pour une valeur de  $\rho$ , c'est-à-dire pour une  
 valeur de  $t$ , n'est que l'aire comprise entre la courbe  $\Gamma_x$ , l'axe Ot et les  
 parallèles  $t = 0$  et  $t = t$ .

Si l'on considère, pour la même valeur de  $t$ , les angles  $\theta = \theta(x)$

et  $\theta' = \theta(x')$  ( $x < x'$ ), la différence  $\theta - \theta'$  est l'aire comprise entre la droite  $t = t$  et les deux courbes  $\Gamma_x, \Gamma_{x'}$  tracées dans un même plan  $zt$  (fig. 4).

La courbe  $\Gamma_{x'}$  est au-dessus de  $\Gamma_x$  pour  $t$  voisin de zéro. Soit M le point de  $\Gamma_x$  qui correspond à la courbe C. Dans la région qui, sur la



figure, se trouve à droite de MC,  $\Gamma_{x'}$  est en dessous de  $\Gamma_x$ . Ces deux courbes se coupent donc en un point P correspondant à  $t = t_p$ .

Pour  $t < t_p$ , on a  $\theta - \theta' < 0$ ; pour  $t > t_p$  cette différence croît; pour  $t = 1$ , on a  $\theta - \theta' > 0$ , car nous avons vu que l'angle  $\Theta$  décroît, lorsque  $x$  croît. La différence  $\theta - \theta'$  est donc négative pour  $t$  voisin de zéro, s'annule pour une valeur et une seule  $t$  comprise entre 0 et 1 et reste positive pour  $t' < t \leq 1$ .

La forme (25) de l'expression  $F(t, 1)$  prouve encore que, pour  $x = 1$ , on a  $\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ .

8. Toutes ces remarques étant faites, nous pouvons nous rendre compte de la forme de la figure d'équilibre d'un fil homogène de longueur  $2l$ , ayant ses extrémités attachées en deux points fixes A, B et étant repoussé proportionnellement à la distance par le centre fixe O.

En supposant  $\alpha$  et  $\beta$  connus, décrivons les cercles  $C_\alpha$  et  $C_\beta$  de centre O et de rayon  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement. Partons du point A ( $s = 0$ ) et décrivons la courbe d'équilibre dans le sens des  $\theta$  croissants. Le rayon vecteur peut commencer par croître ou par décroître. Supposons-le croissant.  $\rho$  croît de  $\rho_1$  à  $\beta$ , puis décroît jusqu'à  $\alpha$ , et ainsi de suite.

Pour  $\rho = \alpha$  et  $\rho = \beta$ , la courbe est tangente aux cercles  $C_\alpha$  et  $C_\beta$ . Elle est symétrique par rapport aux rayons vecteurs  $\rho_\alpha, \rho_\beta$  des points de contact sur les deux cercles. Elle tourne sa concavité vers O. L'angle des deux rayons  $\rho_\alpha, \rho_\beta$  consécutifs est compris entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ .

*La figure d'équilibre est assimilable à la trajectoire d'un mobile, qui décrirait une ovale de centre O, tournant elle-même autour de O dans le sens du mouvement.*

La courbe est analogue à la projection horizontale de la trajectoire du mobile, dans le cas du pendule sphérique, lorsque les parallèles extrêmes sont tous les deux en dessous du centre de la sphère.

9. VARIATION DE LA BOUCLE. — Considérons une boucle  $A, B, A'$  pour laquelle  $\alpha = \alpha_1$  et  $\beta = \beta_1$ . Prenons pour axe des  $y$  la direction  $OB_1$ .

Lorsque  $\alpha$  diminue,  $\beta$  restant constant,  $x$  croît et nous avons vu que l'angle  $\Theta = A, OB_1$  diminue. Nous voulons prouver que l'arc  $A, B_1$  se rapproche en tous ses points de l'axe  $OB_1$  (*fig. 5*).

En effet, on a d'après la formule (22)

$$(26) \quad \rho^2 = \alpha^2(1-t) + t\beta^2,$$

et, par suite,  $\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} > 0$  pour  $0 < t < 1$ .

Considérons alors deux arcs  $\Sigma_1 = A_1B_1$  et  $\Sigma_2 = A_2B_1$  correspondant à une même valeur de  $\beta$ , mais à deux valeurs différentes de  $\alpha$  :  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Soient  $x_1, \Theta_1, x_2, \Theta_2$  les valeurs de  $x$  et  $\Theta$  correspondant à ces deux boucles. On a  $x_1 < x_2$  et  $\Theta_1 > \Theta_2$ . Le rayon  $OA_2$  se trouve donc compris entre  $Ox$  et  $OA_1$  (*fig. 5*).

Nous avons vu aux paragraphes 6 et 7 que  $\theta$  et  $s$  sont donnés en fonction de  $t$  par des formules

$$\theta = \int_0^t F(t, x) dt, \quad s = \alpha \int_0^t F_1(t, x) dt,$$

les fonctions  $F$  et  $F_1$  étant réelles et positives dans le domaine  $D$ .

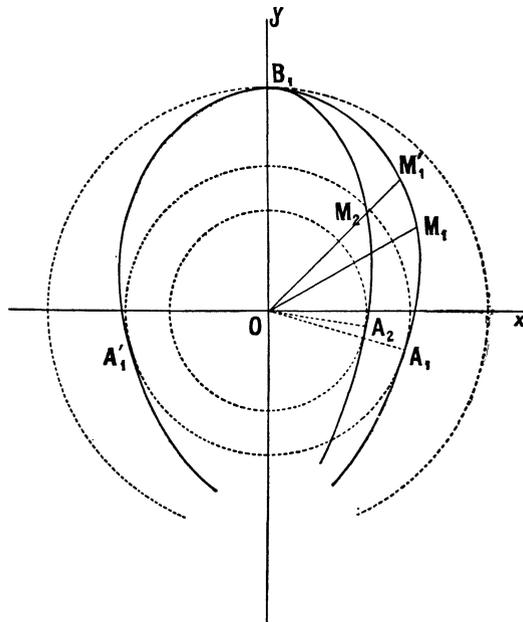
A chaque valeur de  $t$  entre 0 et 1, les formules (22) et (23) font correspondre un point et un seul  $M_1(\rho_1, \theta_1)$  sur l'arc  $A_1B_1$  et  $M_2(\rho_2, \theta_2)$  sur l'arc  $A_2B_1$ .

Pour  $t = 0$ , on a  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ,  $\rho_1 = \alpha_1 > \rho_2 = \alpha_2$ .  $M_1$  est en  $A_1$  et  $M_2$  en  $A_2$ . Lorsque  $t$  croît à partir de zéro, nous savons que la différence  $\theta_1 - \theta_2$  est d'abord *négative*. Donc

$$\text{angle } M_1 O A_1 < \text{angle } M_2 O A_2.$$

Dans leur rotation autour de  $O$ , de  $Ox$  vers  $Oy$ , le point  $M_2$  *suit* le

Fig. 5.



point  $M_1$ , et comme  $OM_2 < OM_1$ , d'après la formule (26), on a

$$OM_2 < OM_1 < OM'_1,$$

$M'_1$  étant le point où la droite  $OM_2$  coupe l'arc  $A_1 B_1$ .

Ceci reste vrai tant que le rayon vecteur  $OM_2$  suit  $OM_1$ , ce qui a certainement lieu tant que la différence  $\theta_1 - \theta_2$  est négative. Mais nous avons vu (§ 7) que cette différence s'annule pour une valeur  $t' < 1$  et devient positive et croissante pour  $t > t'$ . L'angle  $M_1 O M_2$  *diminue*, mais il ne s'annule que pour  $t = 1$ , lorsque les points  $M_1$  et  $M_2$  se confondent en  $B_1$ .

On a donc, pour toutes les valeurs de  $t$  comprises entre 0 et 1,

B.

$OM_2 < OM_1$ , c'est-à-dire que l'arc  $A_2B_1$  se trouve entièrement compris entre l'axe  $OB_1$  et l'arc  $A_1B_1$ .

**Détermination des constantes.**

10. Soient  $\rho_1, \theta_1, \rho_2, \theta_2$  les coordonnées des extrémités du fil,  $2\varphi$  l'angle  $\theta_2 - \theta_1$  et  $2l$  la longueur du fil. On a, dans le cas général,

$$2\varphi = \int_{\rho_1}^{\beta} \frac{b^3 d\rho}{\rho \sqrt{f(\rho)}} + 2m \int_{\alpha}^{\beta} \frac{b^3 d\rho}{\rho \sqrt{f(\rho)}} + \int_{\rho_2}^{\beta} \frac{b^3 d\rho}{\rho \sqrt{f(\rho)}}.$$

Si le centre répulsif se trouve sur la médiatrice de la corde  $AB$  ( $A$  et  $B$  étant les extrémités du fil), on a  $\rho_1 = \rho_2$ . La figure d'équilibre est symétrique par rapport à  $Oy$ .

Si  $\rho$  commence à croître à partir de  $\rho_1$ , on a, d'après la formule précédente et celle qui donne  $l$ , les formules

$$(27) \quad \varphi = \int_{\rho_1}^{\beta} \frac{b^3 d\rho}{\rho \sqrt{f(\rho)}} + m \int_{\alpha}^{\beta} \frac{b^3 d\rho}{\rho \sqrt{f(\rho)}},$$

$$(28) \quad l = \int_{\rho_1}^{\beta} \frac{\rho(a^2 - \rho^2) d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + m \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\rho(a^2 - \rho^2) d\rho}{\sqrt{f(\rho)}},$$

avec

$$(29) \quad a^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2,$$

$$(30) \quad b^3 = \alpha\beta(\alpha + \beta).$$

Si  $\rho$  commence par décroître à partir de  $\rho_1$ , on a deux formules analogues

$$(31) \quad \varphi = \int_{\alpha}^{\rho_1} \frac{b^3 d\rho}{\rho \sqrt{f(\rho)}} + m \int_{\alpha}^{\beta} \frac{b^3 d\rho}{\rho \sqrt{f(\rho)}},$$

$$(32) \quad l = \int_{\alpha}^{\rho_1} \frac{\rho(a^2 - \rho^2) d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} + m \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\rho(a^2 - \rho^2) d\rho}{\sqrt{f(\rho)}},$$

avec (29) et (30).

Nous avons supposé connues la longueur  $2l$  du fil et les positions des points  $A$  et  $B$ , ce qui revient à se donner les quantités  $l, \rho_1$  et  $\varphi$ . Les équations (27), (28) ou (31), (32) déterminent alors, en général, les

rayons  $\alpha$  et  $\beta$  dans les deux cas et l'on a les figures d'équilibre cherchées.

On obtient un résultat plus précis en se plaçant dans d'autres conditions initiales.

Choisissons arbitrairement les constantes *réelles et positives*  $\alpha$ ,  $\rho_1$ ,  $\beta$  et  $m$ , avec la seule restriction

$$(33) \quad \alpha \leq r_1 \leq \beta \quad \text{et} \quad m \text{ entier.}$$

Les formules (27), (28), (29) et (30) déterminent un système et *un seul* de valeurs réelles et positives pour  $\varphi$  et  $l$ ; il en est de même pour le second système (31), (32), (29) et (30) et l'on en conclut qu'à *un système arbitraire de valeurs réelles et positives données*  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\rho_1$  et  $m$ , *satisfaisant aux conditions (33)*, il correspond toujours deux figures d'équilibre et deux seulement.

Comme l'entier  $m$  est *arbitraire*, nous voyons que *la figure d'équilibre peut avoir le nombre de boucles que nous voulons*.

Remarquons encore qu'on peut toujours imaginer la figure *homothétique* à l'une des précédentes dans un rapport  $k$  quelconque, O étant le centre d'homothétie. On peut ainsi réduire, dans les deux cas, la longueur de l'arc obtenu, à la longueur *donnée*  $2l$  du fil. Après cette transformation, les longueurs  $\alpha$ ,  $\rho_1$ ,  $\beta$  se trouveront réduites dans le même rapport, tandis que l'angle  $\varphi$  et la quantité  $x = \frac{\beta}{\alpha}$  resteront invariables. Les positions des extrémités A et B du fil seront déterminées par les quantités  $\rho_1$  et  $\varphi$ .

*Géométriquement* la solution est immédiate. Prenons, pour fixer les idées,  $m = 1$ , et traçons les cercles  $C_\alpha$ ,  $C_1$  et  $C_\beta$  de rayons  $\alpha$ ,  $\rho_1$  et  $\beta$ . Le rapport  $x$  étant connu, la valeur de l'angle  $\Theta$  est déterminée et l'on peut construire l'arc  $\Sigma$  correspondant donné par les formules (22) et (23).

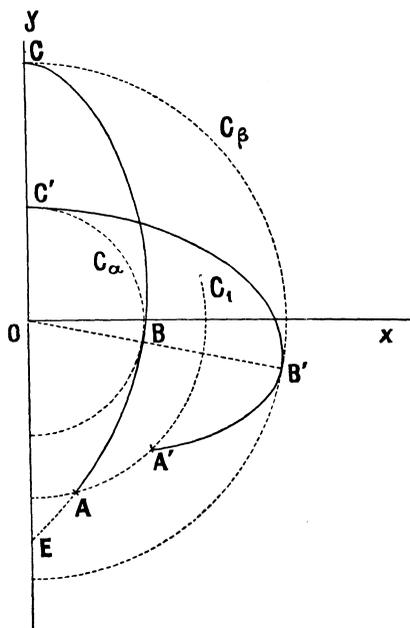
Le point milieu du fil étant un des sommets, plaçons-le sur l'axe Oy au point C (*fig. 6*) et construisons l'angle  $\text{COB} = \Theta$ . L'arc  $\Sigma$  est tangent en C au cercle  $C_\beta$  et en B au cercle  $C_\alpha$ . On continue ensuite la figure par l'arc BA, le symétrique de l'arc BC par rapport à la droite OB. Le point A, où cet arc coupe le cercle  $C_1$ , est l'une des extrémités du fil. On construit ensuite la figure symétrique de CBA par rapport à l'axe des y.

On peut aussi, en partant du point C' (*fig. 6*), placer le symétrique

de l'arc  $\Sigma$  entre les points  $C'$ ,  $B'$ , continuer la courbe symétriquement par rapport à  $OB'$  et prendre le point  $A'$  sur  $C_1$  comme extrémité du fil. L'autre moitié du fil est la figure symétrique de l'arc  $C'B'A'$  par rapport à l'axe des  $y$ .

La première de ces figures correspond à  $\rho$  commençant par décroître

Fig. 6.



et la seconde à  $\rho$  commençant par croître à partir de  $\rho_1$ .

On trouve de la même façon la construction de la figure pour une valeur quelconque de l'entier  $m$ .

Si l'on change la valeur du rayon initial  $\rho_1$ , sans changer  $\alpha$  et  $\beta$ , les nouvelles figures d'équilibre sont celles précédemment obtenues, mais limitées à leurs points de rencontre avec le nouveau cercle  $\rho = \rho_1$ .

En particulier, on peut prendre  $\rho_1 = \alpha$  ou  $\rho_1 = \beta$ .

11. Revenons maintenant au *problème de M. Appell*, que nous nous sommes posé au début de cette étude. Ce problème se trouvera résolu par les figures précédemment obtenues *toutes les fois que le centre ré-pulsif O coïncidera avec le centre de gravité du fil.*

Comme le point O a été pris pour origine des coordonnées, on devra donc satisfaire aux conditions supplémentaires

$$\int_0^{2l} \rho \cos \theta ds = 0, \quad \int_0^{2l} \rho \sin \theta ds = 0.$$

Or la première de ces conditions est remplie à cause de la symétrie de la courbe et la seconde peut s'écrire

$$(34) \quad \int_{\rho_1}^{\beta} \frac{\rho^2 (a^2 - \rho^2) \sin \theta}{\sqrt{f(\rho)}} d\rho + m \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\rho^2 (a^2 - \rho^2) \sin \theta}{\sqrt{f(\rho)}} d\rho = 0,$$

si  $\rho$  commence par croître.

Les quantités  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $m$  étant arbitrairement choisies, l'équation (34) sert à définir le rayon vecteur initial  $\rho_1$  et ensuite les équations du paragraphe 10 permettent d'achever la résolution du problème.

Convenons d'appeler figure d'équilibre de *première espèce* celle pour laquelle le point milieu du fil est un sommet situé sur le cercle  $C_\beta$ , *sommet supérieur*. Si ce point se trouve sur le cercle  $C_\alpha$ , *sommet inférieur*, la figure est dite de *deuxième espèce*.

Supposons le fil fermé (ses deux extrémités attachées au même point fixe A), et la figure de première espèce *sans points doubles* (fig. 7).

On a

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{et} \quad \frac{dx}{d\rho} = \cos \theta - x \operatorname{tang} \theta \frac{d\theta}{d\rho}.$$

Le long de l'arc AFC,  $\frac{dx}{d\rho}$  ne peut s'annuler que pour  $\operatorname{tang} \theta > 0$ ; par suite les points à tangente parallèle à  $Oy$  se trouvent au-dessous de l'axe des  $x$ .

Si X, Y sont les coordonnées du centre de gravité G du fil, on a

$$(35) \quad X = 0, \quad Y = \int_0^l y(s) ds.$$

L'origine des arcs  $s$  étant en A, soit D le point  $s = \frac{l}{2}$ , F le point où la courbe coupe l'axe des  $x$  et prenons arc CE = arc AF.

Si arc DE  $\leq s' \leq \frac{l}{2}$ , on a sur la figure

$$y\left(\frac{l}{2} + s'\right) + y\left(\frac{l}{2} - s'\right) > 0;$$

et par suite :

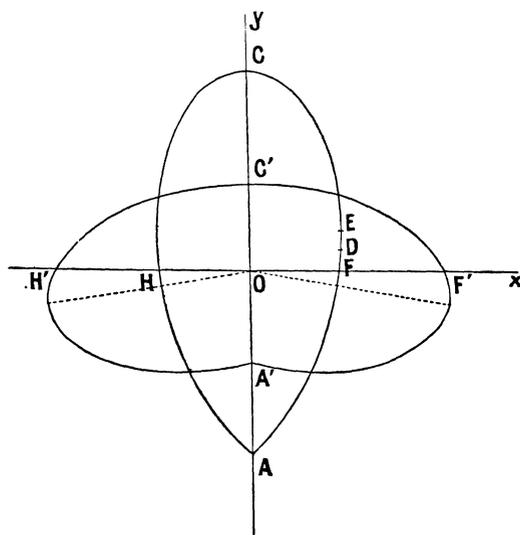
$$Y = \int_{\text{AFC}} y(s) ds = \int_{\text{FE}} y(s) ds + \int_{\text{EC}} \left[ y\left(\frac{l}{2} + s'\right) + y\left(\frac{l}{2} - s'\right) \right] ds' > 0.$$

Dans le cas de la figure fermée de deuxième espèce, les points à tangente parallèle à  $Oy$  se trouvent en dessous de l'axe des  $x$  et le même raisonnement nous montre que  $Y$  est *néglatif*.

*Le point O ne peut donc être centre de gravité du fil.*

Tous ces résultats subsistent, *a fortiori*, dans le cas du fil *ouvert*, mais

Fig. 7.



seulement pour la figure de première espèce. Au contraire pour celle de deuxième espèce,  $Y$  étant positif pour l'arc  $F'C'H'$ , il existe une valeur et une seule  $\rho_1$ , pour laquelle  $Y$  s'annule. On a ainsi une solution.

Le raisonnement est en défaut, si la figure d'équilibre se réduit à une droite double soit le long de l'axe des  $y$  (fil attaché en bas), soit le long de l'axe des  $x$  (fil attaché en  $O$ ), ou si elle est circulaire et fermée, c'est-à-dire dans les cas limites  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = \infty$ , pour lesquels le point  $O$  est centre de gravité du fil.

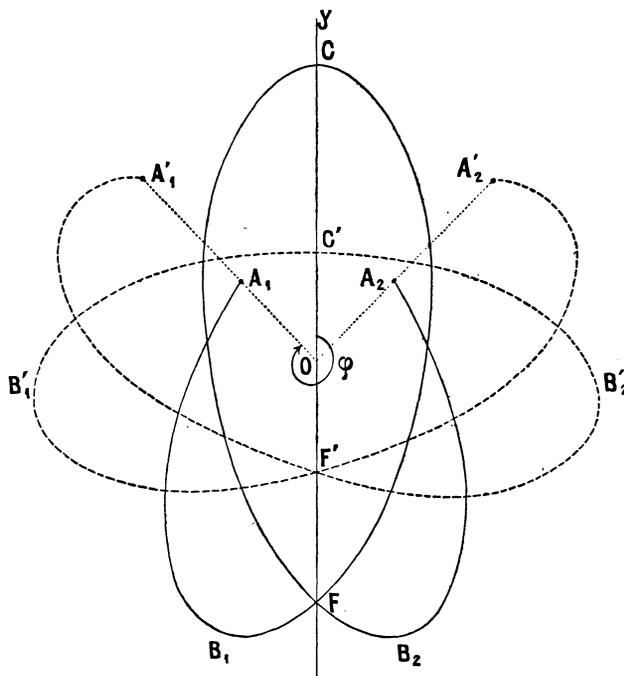
Ainsi dans le cas de la figure d'équilibre *sans points doubles*, pour

toute valeur finie de  $\alpha > 1$ , le problème de M. Appell admet une solution et une seule. La figure est ouverte et de deuxième espèce. Pour  $\alpha = 1$ , on a une figure circulaire fermée. Pour  $\alpha = \infty$ , on a une figure de première espèce rectiligne et fermée et une infinité de figures rectilignes de deuxième espèce, dont une fermée.

12. Supposons maintenant que les quantités  $\varphi$  et  $l$  soient données. Dans ce cas, le centre répulsif O étant quelconque, à chaque valeur de  $\alpha$  il correspond deux positions d'équilibre et deux seulement.

En effet, prenons  $\alpha$  arbitraire et  $\beta = \alpha\alpha$ . Nous savons qu'à ces valeurs

Fig. 8.



il correspond une seule valeur de l'angle  $\Theta$  et une forme déterminée pour l'arc  $\Sigma$ . On peut alors construire deux figures d'équilibre, une de première espèce et une de deuxième espèce. En partant du point milieu C (ou C'), on décrit d'abord l'arc  $\Sigma$  (ou son symétrique) (*fig. 8*) et l'on continue la courbe par des symétries successives, jusqu'à ce qu'on

arrive au point  $A_1$  (ou  $A'_1$ ), tel que l'angle  $\widehat{COA_1}$ , balayé par le rayon vecteur, soit égal à  $\varphi$ .

Une fois ces deux figures obtenues, chacune d'elles se ramène, par une homothétie convenable de centre  $O$ , à une courbe de longueur  $2l$ . Il est évident qu'en général les cercles inscrit et circonscrit  $C_\alpha$  et  $C_\beta$  changent d'une solution à l'autre.

Pour  $\alpha = 1$ , le fil est placé sur la circonférence de centre  $O$  et de rayon  $\frac{l}{\varphi}$ . Pour  $\alpha = \infty$ , le fil se place le long d'un segment de l'axe  $Ox$  ou de l'axe  $Oy$ .

La figure d'équilibre est en général *ouverte*. Pour  $\varphi > \pi$ , elle a au moins un point double situé sur l'axe des  $y$ .

Supposons la figure de *première espèce* et  $\varphi = (2n + 1)\Theta$ ,  $n$  entier. La courbe a  $2n + 1$  boucles. Le centre de gravité de chaque boucle se trouve sur l'axe de symétrie correspondant et à une distance  $\delta$  du point  $O$ . Si  $y_1, y_2, \dots, y_{2n+1}$  sont les ordonnées des centres de gravité de chacune de ces boucles, et  $Y_n$  celui de la courbe entière, on a

$$Y_n = \frac{\sum y_i}{2n + 1}.$$

Or, pour la boucle  $C$  (*fig. 8*) on a  $y_1 = \delta$ ; pour les boucles  $B_1, B_2$ , on a  $y_2 = y_3 = \delta \cos 2\Theta$ ; ainsi de suite. On peut donc écrire

$$Y_n = \frac{\delta + 2\delta \cos 2\Theta + 2\delta \cos 4\Theta + \dots + 2\delta \cos 2n\Theta}{2n + 1},$$

ou encore

$$Y_n = \frac{\delta \sin(2n + 1)\Theta}{(2n + 1) \sin \Theta},$$

puisque

$$1 + 2 \cos 2\Theta + 2 \cos 4\Theta + \dots + 2 \cos 2n\Theta = \frac{\sin(2n + 1)\Theta}{\sin \Theta}.$$

Ainsi  $\Theta$  étant connu, on peut calculer les  $Y_i$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots$  et obtenir la suite

$$Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_i, \dots$$

*Cette suite présente une infinité de variations de signes.*

En effet, comme

$$\pi \leq 2\Theta < \frac{3\pi}{2},$$

si

$$2k\pi < (2n+1)\Theta < (2k+1)\pi,$$

on a

$$(2k+1)\pi < (2n+3)\Theta < (2k+2)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Alors, si

$$(2n+3)\Theta \leq (2k+2)\pi,$$

on a

$$Y_n Y_{n+1} \leq 0;$$

si

$$(2k+2)\pi < (2n+3)\Theta < (2k+2)\pi + \frac{\pi}{2},$$

on a

$$(2k+3)\pi < (2n+5)\Theta < (2k+4)\pi \quad \text{et} \quad Y_n Y_{n+2} < 0.$$

Par suite, *il existe une infinité dénombrable de valeurs de  $\varphi$ , qui donnent des solutions de première espèce, pour lesquelles le centre de gravité est en O.*

En particulier, si

$$\Theta < \frac{(n+1)\pi}{2n+1},$$

on a, pour  $\mu = 1, 2, \dots, n$ ,

$$(2\mu+1)\frac{\pi}{2} < (2\mu+1)\Theta < (2\mu+2)\frac{\pi}{2},$$

et la suite des  $Y_i$  est *alternée* depuis  $Y_0$  jusqu'à  $Y_n$ .

En considérant des boucles de *deuxième espèce* (ayant comme point milieu un sommet inférieur), on trouve une autre infinité de valeurs de  $\varphi$  donnant des solutions de *deuxième espèce* avec  $Y = 0$ . On a ainsi une double infinité de solutions du problème de M. Appell.

Pour que le fil soit *fermé*, on doit prendre  $\varphi = k\pi$ . On a, dans ce cas, un seul point d'attache situé sur l'axe des  $y$  : c'est en général un point *anguleux* de la figure d'équilibre. Pour qu'il soit point ordinaire, on doit avoir  $\varphi_1 = \alpha$  ou  $\varphi_1 = \beta$ .

13. CAS DE  $\varphi_1 = \alpha$ . — Les quantités  $l$  et  $\varphi$  étant données, cherchons une position d'équilibre telle que les points d'attache *soient sur le cercle  $C_\alpha$  correspondant*.

Pour  $\varphi_1 = \alpha$  les équations fondamentales (27) et (28) deviennent

$$(36) \quad \varphi = m\Theta, \quad l = m\Sigma,$$

B.

avec

$$(37) \quad \Theta = F(x), \quad \Sigma = \alpha \Phi(x),$$

les fonctions  $F$  et  $\Phi$  étant connues [formules (18), (20), (21), pages 10 et 11] et  $m$  étant un nombre entier positif.

D'autre part, on a

$$(38) \quad \frac{\pi}{2} \leq \Theta \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1,81380\dots = 103^{\circ}55'23''.$$

Pour  $\varphi < \frac{\pi}{2}$  le problème n'admet aucune solution. Pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  on a  $m = 1$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  et  $\alpha = 0$ ,  $l$  supposé fini. Le fil fixé en  $O$  recouvre deux fois un segment de l'axe  $Oy$  de longueur  $l$ . La figure d'équilibre est de *première espèce et rectiligne*.

Soit  $\varphi > \frac{\pi}{2}$  et posons

$$(39) \quad \varphi = k \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \psi, \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{\sqrt{3}},$$

$$(40) \quad \varphi = k' \frac{\pi}{2} + \psi', \quad 0 < \psi' < \frac{\pi}{2},$$

$k$  et  $k'$  étant des nombres entiers et positifs,  $k$  pouvant être nul. Soit  $k' - k = n > 0$ . Nous allons voir que le problème admet  $n$  *solutions distinctes*.

En effet,  $\mu$  étant un entier au plus égal à  $n$ , on a

$$(k + \mu) \frac{\pi}{2} < \varphi < (k + \mu) \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Il existe donc une valeur et une seule  $\Theta_{\mu}$  telle qu'on ait  $\varphi = (k + \mu)\Theta_{\mu}$ . La seconde équation (36), pour  $m = k + \mu$ , donne pour  $\Sigma$  une valeur  $\Sigma_{\mu}$ , et les équations (37) déterminent ensuite un système *unique* de valeurs  $x_{\mu}$  et  $\alpha_{\mu}$  pour  $x$  et  $\alpha$ . On obtient ainsi une figure d'équilibre à  $k + \mu$  *boucles*. Elle est de première ou de deuxième espèce, suivant que l'entier  $k + \mu$  est impair ou pair.

Comme  $\mu$  peut être l'un quelconque des entiers  $1, 2, \dots, n$ , on trouve ainsi  $n$  *solutions distinctes*. Ce nombre peut être égal à *zéro*. Par exemple,

si  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ , on a

$$k' = 1, \quad k = 0, \quad n = 1;$$

mais si  $\frac{\pi}{\sqrt{3}} < \varphi < \pi$ , on a

$$k' = 1, \quad k = 1 \quad \text{et} \quad n = 0.$$

Le nombre  $n$  est nul en général pour

$$k \frac{\pi}{\sqrt{3}} < \varphi < (k+1) \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad k \frac{\pi}{\sqrt{3}} < (k+1) \frac{\pi}{2}.$$

Cette inégalité n'a plus lieu pour  $k \geq 7$ .

Nous avons supposé, dans ce qui précède,  $\psi$  et  $\psi'$  différents de zéro. Ils ne peuvent pas s'annuler ensemble. Si  $\psi' = 0$ , la figure d'équilibre à  $k+n$  boucles correspond à  $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ; elle est par suite *rectiligne*.

Si  $\psi = 0$ , la figure d'équilibre à  $k$  boucles correspond à  $\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ; elle est *circulaire*.

Dans le cas de  $\rho_1 = \beta$ , les équations (31) et (32) prennent encore la forme (36). On trouve donc  $n$  autres solutions.

On a ainsi  $2n$  solutions :  $n$  de première espèce et  $n$  de deuxième espèce; elles sont, en général, des courbes ouvertes.

14. FIGURES ÉTOILÉES. — Nous devons nous demander si, parmi ces figures d'équilibre, il en existe de *fermées*.

L'angle  $\varphi$  doit être un multiple de  $\pi$ , c'est-à-dire  $\psi' = 0$  et  $k'$  pair. Nous venons de voir que, dans ce cas, on a  $2n$  solutions, parmi lesquelles deux courbes à  $k+n$  boucles, qui sont *rectilignes*. Il est évident que les  $2n - 2$  autres courbes d'équilibre sont des figures *étoilées*, c'est-à-dire des courbes dont les sommets supérieurs sont les sommets d'un polygone *régulier* inscrit dans la circonférence  $C_\beta$ .

Le point d'attache étant un point ordinaire, ses réactions sont *égales* et *directement opposées*. On peut donc les supprimer sans déranger l'équilibre. D'ailleurs, dans cette position, le point  $O$  est le centre de gravité du fil. On a donc là des solutions du problème de M. Appell.

Remarquons aussi que, par une rotation convenable autour du point  $O$ , on peut faire coïncider respectivement les  $n - 1$  courbes de première espèce avec les  $n - 1$  de deuxième espèce. Il n'y a donc que  $n - 1$  figures étoilées distinctes.

En dehors de ces solutions, il faut considérer aussi la figure *circulaire*

correspondant à  $\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ , car, dans ce cas, on a évidemment  $\rho_1 = \alpha = \beta$ , quel que soit  $\varphi$ .

Si dans les formules (39) et (40) nous faisons  $k' = 2p$ , comme  $\varphi = p\pi = k \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \psi$ , il vient  $k < p\sqrt{3} < k + 1$ , et comme  $k' - k = n$ , le nombre  $n - 1$  est la *partie entière* de la différence

$$(2 - \sqrt{3})p = 0,26795\dots p.$$

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante en ce qui concerne le problème de M. Appell :

*Un fil fermé de longueur  $2l$ , enroulé  $p$  fois autour de son centre de gravité, peut être placé en  $\nu + 2$  positions d'équilibre,  $\nu$  étant la partie entière du produit  $(2 - \sqrt{3})p$ . Parmi ces figures d'équilibre il y a : 1 rectiligne (courbe multiple), 1 circulaire (courbe multiple si  $p > 1$ ) et  $\nu$  figures étoilées (simples ou multiples).*

#### Suites continues de figures d'équilibre.

15. Supposons le fil *fermé* et *attaché en un de ses points* A. Nous avons vu que  $l$  et  $\varphi$  étant donnés, à chaque valeur de  $x$  il correspond *deux figures d'équilibre*. Mais de l'étude précédente il résulte que, dans la suite continue des valeurs du paramètre  $x > 1$ , il existe  $\nu$  valeurs particulières  $x_1, x_2, \dots, x_\nu$  pour lesquelles les figures d'équilibre correspondantes sont *étoilées*. Nous voulons déterminer les valeurs  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_\nu$  des angles  $\Theta$ , qui correspondent à ces valeurs *singulières* de  $x$ .

Construisons la circonférence  $C_\beta$ , de centre O et de rayon  $\beta$ . Son diamètre BC, qui passe par A, est axe de symétrie de la figure d'équilibre. En général, une figure étoilée à  $t$  boucles admet  $t$  axes de symétrie.

Supposons alors qu'on veuille construire *une figure étoilée* ayant un sommet supérieur  $\beta_1$  au point B (*fig. 9*). Soit M un point mobile sur la courbe. Le rayon vecteur OM, après avoir balayé deux fois l'angle  $\Theta$  à partir de OB, arrive à un second sommet supérieur  $\beta_2$ . A cause de l'iné-

galité (38), on doit avoir

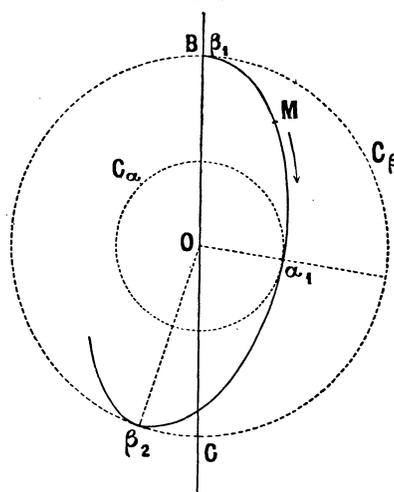
$$\text{angle } CO\beta_2 = 2\Theta - \pi < \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\pi.$$

Comme il doit être commensurable avec  $\pi$ , posons  $2\Theta - \pi = \frac{p\pi}{q}$ ,  $p$  et  $q$  étant entiers. On en déduit

$$2\Theta = \frac{p+q}{2q} 2\pi.$$

Si  $\frac{p'}{q'}$  est la fraction irréductible égale à  $\frac{p+q}{2q}$ , à cet angle  $\Theta$  il corres-

Fig. 9.



pond une figure étoilée à  $q'$  boucles et entourant  $p'$  fois l'origine, c'est-à-dire avec  $\varphi = p'\pi$ .

Les nombres  $p$  et  $q$  ne sont pas absolument indépendants. En effet,  $\Theta < \frac{\pi}{\sqrt{3}}$  donne  $\frac{p+q}{q} < \frac{2}{\sqrt{3}}$ , d'où

$$p < 0,15470\dots q.$$

On ne peut prendre  $p=1$  que pour  $q \geq 7$ . Pour  $q=7$ ,  $p=1$ , on a  $2\Theta = \frac{4}{7} \cdot 2\pi$ . Donc, la figure d'équilibre étoilée la plus simple est celle à 7 boucles entourant 4 fois l'origine. Pour  $q=8$ ,  $p=1$ , on a  $2\Theta = \frac{9}{16} \cdot 2\pi$ . La figure étoilée la plus simple ayant un nombre pair de boucles est celle à 16 boucles avec  $\varphi = 9\pi$ .

D'ailleurs, si  $q$  est pair,  $q + 1$  est premier avec  $2q$  et la figure étoilée correspondant à  $p = 1$  est à  $2q$  boucles. *Il y a donc une infinité de figures d'équilibre étoilées à deux axes de symétrie rectangulaires.*

16. Comme pour chaque valeur de  $\alpha$  il y a deux figures d'équilibre, une de première espèce et une de deuxième espèce, lorsque  $\alpha$  varie d'une manière continue, nous avons *deux suites continues de figures*. Nous nous proposons de chercher si ces suites *linéaires* restent distinctes pour toutes les valeurs de  $\alpha$ , ou bien si elles se croisent et, dans ce cas, quelles sont *les figures d'équilibre de croisement* (1).

Pour plus de clarté, nous allons laisser constant le rayon vecteur maximum  $\beta$  et pour faire varier  $\alpha$ , on fera varier  $\alpha$ . Comme  $\varphi$  est donné, la longueur de la courbe changera d'une figure à l'autre; mais une fois la forme de la courbe connue, on ramènera sa longueur à  $2l$  par une homothétie.

Prenons, pour fixer les idées,  $\varphi = 8\pi$ .

Pour  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  les deux figures d'équilibre sont rectilignes; l'une correspond à  $\rho_1 = \alpha = 0$ , l'autre à  $\rho_1 = \beta$ .

Considérons d'abord *la première* :  $\rho_1 = 0$ . Le fil a ses extrémités attachées au point O et décrit 16 fois le diamètre DE.

Soit BC le diamètre perpendiculaire à DE. Lorsque  $\alpha$  croît,  $\Theta$  croît. Désignons par  $\alpha_1$  le point milieu du fil; il se trouve sur OB et  $C_\alpha$ . Comme la figure reste symétrique par rapport à la droite BC, nous pouvons commencer à la construire à partir de  $\alpha_1$ .

Soit

$$\Theta = \widehat{\alpha_1 O \beta_1} = \frac{\pi}{2} + \dots$$

On a sur la figure

$$E\beta_1 = \varepsilon, \quad D\beta_2 = 3\varepsilon, \quad E\beta_3 = 5\varepsilon, \quad \dots$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, le fil a la forme de la figure 10, ses extrémités étant attachées au point A.

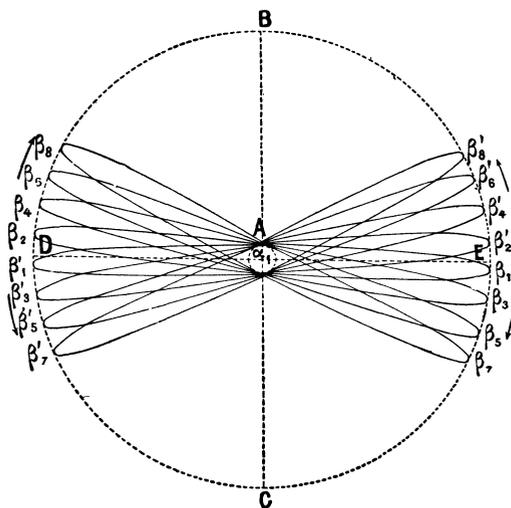
Appelons *arc correspondant* à la figure d'équilibre, l'arc de la circon-

(1) Voir H. POINCARÉ, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta mathematica*, t. VII, 1885).

férence  $C_\beta$  compris entre deux sommets supérieurs consécutifs de la courbe, tel que  $\beta_1\beta'_2, \beta'_2\beta'_4, \dots$ . Ces arcs sont tous égaux à  $4\varepsilon$ .

Lorsque  $\alpha$  croît,  $\Theta, \varepsilon$  et les arcs correspondants croissent, les boucles de la courbe s'élargissent, tous les sommets supérieurs se meuvent sur la circonférence  $C_\beta$  dans le sens indiqué par les flèches, c'est-à-dire en

Fig. 10.



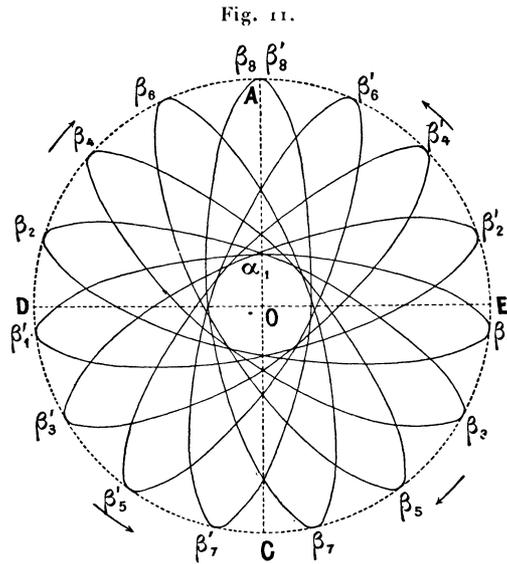
s'éloignant de la droite DE.  $\beta'_8$  s'approche de  $\beta_8$  et comme le fil se termine toujours en A, qui est un point anguleux de la courbe, ce point monte sur OB vers B.

L'arc de cercle  $E\beta'_8$  étant égal à  $15\varepsilon$ ,  $\beta'_8$  arrive en B pour  $\varepsilon = \frac{\pi}{30}$ . Mais alors l'arc  $\beta'_7\beta_7$  devient  $4\frac{\pi}{30} = 4\varepsilon$  et la figure est étoilée; les arcs correspondants étant égaux à  $\frac{2\pi}{15}$ , elle a 15 boucles (fig. 11).

$\Theta$  continuant à croître,  $\beta'_8$  passe à gauche de AC,  $\beta_8$  à droite. Le point A descend vers O et les sommets  $\beta_8, \beta'_8$  disparaissent.  $\beta_7, \beta'_7$  s'approchent de C. Comme  $E\beta_7 = 13\varepsilon$ , pour  $\varepsilon = \frac{\pi}{26}$  les sommets  $\beta_7$  et  $\beta'_7$  se confondent en C et les boucles correspondantes se superposent. Les arcs correspondants sont égaux à  $4\varepsilon = \frac{2\pi}{13} = \beta_6\beta'_6$ . On a une nouvelle figure étoilée à 13 boucles, mais non homogène, car la boucle qui a le sommet en C est double jusqu'au point A.

$\varepsilon$  continuant à croître, les boucles continuent leurs déplacements dans le sens initial :  $\beta_6$  viendra se confondre avec  $\beta'_6$ , en même temps que  $\beta_7, \beta_5$  se confondront respectivement avec  $\beta'_5, \beta'_7$ ; le point A descendra vers O. A ce moment, on aura une figure étoilée à 11 boucles, dont 3 doubles.

La courbe passera ensuite par la figure à 9 boucles, dont 5 seront



doubles, et enfin par celle à 7 boucles toutes doubles. Ce sera une nouvelle figure étoilée homogène. Le point A arrivera sur  $C_\alpha$ .

L'angle  $\varepsilon$  croissant encore, toutes ces boucles se dédoubleront, mais avant de pouvoir constituer une nouvelle figure étoilée,  $\Theta$  arrivera à la valeur limite  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ , pour laquelle la figure d'équilibre est circulaire. Le point A et la circonférence  $C_\alpha$  s'approcheront de  $C_\beta$  et le fil finira par former 8 circonférences confondues sur  $C_\beta$ .

Dans la seconde suite  $\rho_1 = \beta$ , un sommet supérieur de la courbe reste en B. Pour  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  la figure est rectiligne le long de BC. Pour  $\Theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$  et  $\varepsilon$  croissant, toutes les boucles (sauf celle de sommet B) s'éloignent de BC. Les arcs correspondants sont encore égaux à  $4\varepsilon$ . Le point d'attache A descend de B vers O et, lorsqu'il arrive sur  $C_\alpha$ , on a une figure étoilée

à 15 boucles. L'angle  $\varepsilon$  croissant, les sommets continuent leurs déplacements dans le sens initial (contraire à celui indiqué par les flèches dans la figure 11). Le point A remonte vers B et, lorsqu'il est sur  $C_\beta$ , la courbe arrive à la deuxième figure étoilée *homogène* à 7 boucles doubles.

Ces deux figures étoilées, quoique identiques comme forme à celles trouvées dans la première suite, ne sont pas des figures de *croisements*, à cause de la position différente du point d'attache A pour les figures infiniment voisines.

Pour  $\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ , on a de nouveau la figure *circulaire*. C'est ce que Poincaré appelle *une figure limite* des deux suites.

En revenant à la proposition de la fin du paragraphe 14, nous voyons que, dans ce cas, on a  $p = 8$  et  $\nu = 2$ . Le problème de M. Appell admet donc, en dehors des solutions rectiligne et circulaire, *deux autres solutions*, qui sont les figures étoilées homogènes à 7 et à 15 boucles. La méthode géométrique nous rend ce résultat intuitif.

#### Étude de la figure d'équilibre à l'aide des fonctions elliptiques.

20. Reprenons les formules du paragraphe 1 :

$$(52) \quad \rho = \sqrt{u},$$

$$(53) \quad \theta - \theta_1 = \int_{u_1}^u \frac{b^3 du}{2u \sqrt{u(a^2 - u)^2 - b^6}},$$

$$(54) \quad T = \mu(a^2 - u).$$

En posant

$$P^2 = u^3 - 2a^2u^2 + a^4u - b^6,$$

et en faisant le changement

$$(55) \quad P = 4R, \quad u = \frac{2}{3}a^2 + 4\tau,$$

on trouve

$$(56) \quad R^2 = 4\tau^3 - g_2\tau - g_3,$$

avec

$$g_2 = \frac{a^4}{12}, \quad g_3 = \frac{1}{16} \left( b - \frac{2a^6}{27} \right).$$

B.

Si l'on désigne par  $\nu$  l'intégrale

$$\nu = \int_{\infty}^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{4\tau^3 - g_2\tau - g_3}},$$

on en déduit par inversion  $\tau = p(\nu)$ ,  $R = p'(\nu)$ ,  $p$  étant la fonction elliptique de Weierstrass, et d'après (55),

$$(57) \quad u = \frac{2}{3}a^2 + 4p(\nu), \quad P = 4p'(\nu).$$

Les formules (53), (54) deviennent

$$(58) \quad \theta - \theta_1 = \int_{\nu_1}^{\nu} \frac{3b^3 d\nu}{4a^2 + 24p(\nu)} = \int_{\nu_1}^{\nu} f(\nu) d\nu,$$

$$(59) \quad T = 4\mu \left[ \frac{a^2}{12} - p(\nu) \right],$$

$f(\nu)$  étant une fonction elliptique de deuxième ordre. Soient  $\nu_0$  et  $2\Omega - \nu_0$  ses pôles dans le parallélogramme des périodes; ils correspondent à  $u = 0$  d'après la formule (57). Leurs résidus, d'après (53), sont  $\frac{1}{2i}$  et  $-\frac{1}{2i}$ . Par suite

$$f(\nu) = C + \frac{1}{2i}\zeta(\nu + \nu_0) - \frac{1}{2i}\zeta(\nu - \nu_0),$$

et en intégrant

$$(60) \quad \theta = C\nu + C_1 + \frac{1}{2i} \log \frac{\sigma(\nu + \nu_0)}{\sigma(\nu - \nu_0)}$$

et

$$(61) \quad e^{2i\theta} = e^{2i(C\nu + C_1)} \frac{\sigma(\nu + \nu_0)}{\sigma(\nu - \nu_0)}.$$

Remarquons aussi que la fonction doublement périodique

$$\rho^2 = \frac{2}{3}a^2 + 4p(\nu),$$

admettant les racines simples  $\nu_0$  et  $-\nu_0$  et le pôle double  $\nu = 0$ , peut s'écrire

$$(62) \quad \rho^2 = C_2^2 \frac{\sigma(\nu - \nu_0)\sigma(\nu + \nu_0)}{\sigma^2(\nu)},$$

C, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub> étant des constantes. On a donc, d'après (61) et (62),

$$(63) \quad z = x + iy = \rho e^{i\theta} = A \frac{\sigma(v + v_0)}{\sigma(v)} e^{iCv},$$

en posant  $A = C_2 e^{iC_1}$ .

D'autre part,  $f(v)$  s'annulant pour  $v = 0$ , on trouve

$$C = -\frac{1}{i} \zeta(v_0),$$

et l'expression de  $z$  devient

$$(64) \quad z = A \frac{\sigma(v + v_0)}{\sigma(v)} e^{-v\zeta(v_0)}.$$

Par suite,  $z = x + iy$  est une fonction de  $v$  doublement périodique de deuxième espèce (Hermite) et les coordonnées  $x$  et  $y$  d'un point de la courbe d'équilibre sont des fonctions uniformes dans tout le plan de la variable complexe  $v$ .

21. Si nous désignons par  $e_1, e_2, e_3$  les racines du trinôme

$$(65) \quad R^2(\tau) = 4\tau^3 - g_2\tau - g_3,$$

nous remarquons que ces racines sont réelles dans le cas de la répulsion, car la condition  $g_2^3 - 27g_3^2 > 0$  se réduit à  $4a^6 > 27b^6$ .

En supposant  $e_1 > e_2 > e_3$ , les formules (55) et (56) donnent

$$(66) \quad \alpha^2 = \frac{2}{3}a^2 + 4e_3, \quad \beta^2 = \frac{2}{3}a^2 + 4e_2, \quad \gamma^2 = \frac{2}{3}a^2 + 4e_1.$$

D'ailleurs on sait (1) que  $e_1$  est positif,  $e_3$  négatif,  $e_2$  de signe opposé à celui de  $g_3$  et que la fonction  $p(v)$  admet les périodes

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{4\tau^3 - g_2\tau - g_3}}, \quad \omega' = i \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{4\tau^3 - g_2\tau - g_3}},$$

la première étant une quantité réelle et la deuxième purement imaginaire.

La dérivée du trinôme (65) s'annulant pour  $\tau = \pm \frac{a^2}{12}$  et la valeur  $-\frac{a^2}{6}$

---

(1) G.-H. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, 1<sup>re</sup> Partie.

rendant ce trinôme négatif, on a

$$-\frac{\alpha^2}{6} < e_3 < -\frac{\alpha^2}{12} < e_2 < \frac{\alpha^2}{12} < e_1$$

et par suite les quantités réelles  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\gamma^2$  sont toutes *positives*.

Ceci étant,  $\frac{du}{d\theta}$  doit être *réel*.  $\frac{d\theta}{dv}$  l'est; pour que  $\frac{du}{dv}$  le soit aussi, il faut que  $p'(v)$  soit réel, c'est-à-dire que le trinôme (65) soit *positif*. Comme la tension (59) doit elle-même être positive, nous devons avoir tout le long de la courbe

$$(67) \quad e_3 < p(v) < e_2.$$

D'autre part, si une quantité *réelle*  $\xi$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ ,  $p(\xi)$  varie entre  $+\infty$  et  $e_1$ ,  $p(i\xi)$  entre  $-\infty$  et  $e_3$ ,  $p(\xi + \omega')$  entre  $e_3$  et  $e_2$  et  $p(\omega + i\xi)$  entre  $e_1$  et  $e_2$ . On a en particulier  $p(\omega) = e_1$ ,  $p(\omega') = e_3$ ,  $p(\omega + \omega') = e_2$ .

Pour satisfaire à l'inégalité (67), il suffira de prendre  $v = \xi + \omega'$  ( $\xi$  *réel*). Remarquons encore, que si  $v_0$  est un *zéro* de la fonction  $4\alpha^2 + 24p(v)$ , on a, d'après (66),

$$(68) \quad p(v_0) = -\frac{\alpha^2}{6} < e_3,$$

ce qui donne  $v_0 = i\eta + 2\Omega$  ( $\eta$  *réel*).

La formule (57) et l'inégalité (67) nous montrent que  $u$ , et par suite  $\rho$ , est une *fonction périodique de  $v$  (ou de  $\xi$ ) admettant la période réelle  $2\omega$* .

22. Lorsque  $p(v)$  varie entre  $e_3$  et  $e_2$ , la dérivée  $\frac{d\theta}{dv}$  reste *réelle et positive* et par suite l'angle

$$(69) \quad \theta = \theta_1 + \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{3b^3 d\xi}{4\alpha^2 + 24p(\xi + \omega')}$$

est *réel et va toujours en croissant avec  $\xi$* .

D'autre part, la formule (60) nous montre que lorsque  $v$  croit de  $2\omega$ , l'angle  $\theta$  augmente de

$$(70) \quad 2\Theta = 2C\omega - 2i\nu_0 \zeta(\omega),$$

$\zeta(\omega)$  étant la quantité *réelle*

$$(71) \quad \zeta(\omega) = \frac{1}{\omega} + \int_0^{\omega} \left( \frac{1}{u^2} - pu \right) du \quad (1).$$

Comme

$$v_0 = i\eta + 2m\omega + 2m'\omega', \quad C = i\zeta(v_0),$$

il résulte que

$$2C\omega - 2iv_0\zeta(\omega) = 2i[\omega\zeta(v_0) - v_0\zeta(\omega)],$$

et la quantité entre crochets pouvant s'écrire

$$\omega\zeta(i\eta) + 2m'[\omega\zeta(\omega') - \omega'\zeta(\omega)] = \omega\zeta(i\eta) - m'\pi i.$$

l'angle  $\Theta$  est *réel*.

Par suite, lorsque l'argument  $v$  (ou  $\zeta$ ) augmente de  $2\omega$ , l'angle polaire  $\theta$  augmente d'une quantité réelle  $2\Theta$ . Cette quantité ne dépend que de la constante  $v_0$  et des invariants  $g_2$  et  $g_3$ , qui définissent la fonction  $p(v)$ ; ces trois constantes sont elles-mêmes fonctions de  $a$  et  $b$ .

Donc le long de la courbe d'équilibre  $\rho$  est fonction périodique de  $\theta$  ayant pour période l'angle  $2\Theta$ .

23. L'expression (64) peut s'écrire

$$(72) \quad z = A_1 \frac{\sigma(v + v_0)}{\sigma(v)\sigma(v_0)} e^{-v\zeta v_0},$$

ou encore

$$z = A_1 \varphi(v).$$

$\varphi(v)$  est la fonction *doublement périodique de deuxième espèce* étudiée dans le *Traité des fonctions elliptiques* de Halphen (t. I, p. 235). On y démontre que  $\varphi(v)$  satisfait à l'équation de Lamé

$$\frac{d^2\varphi}{dv^2} = [2p(v) + p(v_0)]\varphi.$$

La fonction  $z = x + yi$  donnée par la formule (72) est donc elle-même solution de l'équation différentielle de Lamé

$$(73) \quad \frac{d^2z}{dv^2} = [2p(v) + p(v_0)]z.$$

---

(1) E. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, p. 195-197 (1<sup>re</sup> édition).



---

## DEUXIÈME PARTIE.

CAS GÉNÉRAL.

---

1. Imaginons un fil homogène en équilibre, la masse de l'unité de longueur étant égale à 1, et soit, le long de cette figure d'équilibre,

$$x = f(s), \quad y = \varphi(s), \quad z = \psi(s),$$

les coordonnées d'un point M du fil exprimées en fonction de l'arc  $s$  compté à partir d'une extrémité. Soient  $\xi, \eta, \zeta$  les coordonnées d'un autre point quelconque M' correspondant à la longueur d'arc  $\sigma$ . On a

$$\xi = f(\sigma), \quad \eta = \varphi(\sigma), \quad \zeta = \psi(\sigma).$$

Considérons, avec M. Appell (<sup>1</sup>), le champ de forces créé par l'attraction ou la répulsion des éléments du fil, en admettant que l'élément de masse  $m$  placé au point M sur l'élément de masse  $m'$  placé en M' soit  $mm'V'(r)$ ,  $V(r)$  étant une fonction de la distance

$$r = \overline{MM'} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

L'action du fil sur un de ses points  $x, y, z$  dérive de la fonction de forces

$$U(x, y, z) = \int_0^\lambda V(r) d\sigma,$$

$\lambda$  désignant la longueur du fil. Cette intégrale dépendant évidemment de la forme L du fil, U est fonction de  $x, y, z$  et de la ligne L.

Les composantes de la force au point M, rapportée à l'unité de lon-

---

(<sup>1</sup>) P. APPELL, *Sur l'équilibre des fils dont les éléments s'attirent ou se repoussent en fonction de la distance* (C. R. de l'Acad. des Sc., 17 févr. 1913).

gueur, sont

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}} = \int_0^\lambda \mathbf{V}'(r) \frac{x - \xi}{r} d\sigma, \quad \dots,$$

et la tension

$$\mathbf{T} = -(\mathbf{U} + h),$$

$h$  désignant une constante. En appliquant les équations classiques de l'équilibre des fils, M. Appell arrive aux équations

$$(1) \quad \mathbf{X}x'' + \mathbf{Y}y'' + \mathbf{Z}z'' - (x'^2 + y'^2 + z'^2)(\mathbf{U} + h) = 0,$$

$$(2) \quad (y'z'' - z'y'')\mathbf{X} + (z'x'' - x'z'')\mathbf{Y} + (x'y'' - y'x'')\mathbf{Z} = 0,$$

qui, avec

$$(3) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

définissent  $x, y, z$  en fonction de  $s$ .

La figure d'équilibre est plane. En prenant son plan pour plan de  $xy$ , on doit faire  $z = \zeta = 0$ . L'équation (2) se trouve alors satisfaite et il reste, pour définir la courbe d'équilibre, les deux équations

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} x'' + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} y'' = (x'^2 + y'^2)(\mathbf{U} + h),$$

$$(5) \quad x'^2 + y'^2 = 1.$$

La dernière donne

$$(6) \quad x'x'' + y'y'' = 0$$

et, en éliminant  $x''$  entre les équations (4) et (6), nous obtenons :

1° soit  $y'' = 0$ , donc  $x'' = 0$ , c'est-à-dire *une droite* ;

2° soit l'équation *intégré-différentielle*

$$(7) \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} x'^2 - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} x'y' = y''(\mathbf{U} + h).$$

2. Cette équation peut encore s'écrire

$$(8) \quad \frac{y''}{x'^2}(\mathbf{U} + h) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \frac{dy}{dx}.$$

Mais on a

$$x'y'' - y'x'' = x'^2 \left( \frac{y'}{x'} \right)'$$

et, si les dérivées sont prises par rapport à l'arc, l'égalité

$$x'' = -\frac{y' y''}{x'}$$

donne

$$x' y'' - y' x'' = \frac{y''}{x'} = x'^2 \left( \frac{y'}{x'} \right)'$$

Il en résulte que

$$\frac{y''}{x'^2} = \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2},$$

et l'équation (8) devient

$$(9) \quad (U + h) y'' = \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} y' \right) (1 + y'^2),$$

dans laquelle les accents désignent des dérivées prises par rapport à  $x$ .

### Répulsion proportionnelle au cube de la distance.

3. Dans le cas où la répulsion est proportionnelle au cube de la distance, on a  $V(r) = r^4$  et l'action du fil sur un de ses points  $x, y$  dérive de la fonction de forces

$$(10) \quad U = \int_0^\lambda r^4 d\sigma.$$

Comme  $r^2 = x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2(x\xi + y\eta)$ , en écrivant que l'origine est centre de gravité du fil

$$\int_0^\lambda \xi d\sigma = \int_0^\lambda \eta d\sigma = 0,$$

et en posant pour abrégé :

$$(11) \quad \begin{cases} \rho^2 = \xi^2 + \eta^2, & A = \int_0^\lambda \eta^2 d\sigma, & B = \int_0^\lambda \xi^2 d\sigma, & C = \int_0^\lambda \rho^2 d\sigma, \\ F = \int_0^\lambda \xi \eta d\sigma, & G = \int_0^\lambda \xi \rho^2 d\sigma, & H = \int_0^\lambda \eta \rho^2 d\sigma, & J = \int_0^\lambda \rho^4 d\sigma, \end{cases}$$

l'équation (9) devient

$$(12) \quad y'' = \frac{4(Ly' + M)(1 + y'^2)}{N},$$

avec

$$(13) \quad \begin{cases} \mathbf{L} = -\lambda x(x^2 + y^2) - 2\mathbf{F}y - (\mathbf{A} + 3\mathbf{B})x + \mathbf{G}, \\ \mathbf{M} = +\lambda y(x^2 + y^2) + (3\mathbf{A} + \mathbf{B})y + 2\mathbf{F}x - \mathbf{H}, \\ \mathbf{N} = +\lambda(x^2 + y^2)^2 + 2\mathbf{C}(x^2 + y^2) + 4\mathbf{A}y^2 + 4\mathbf{B}x^2 + 8\mathbf{F}xy \\ \quad \quad \quad - 4\mathbf{G}x - 4\mathbf{H}y + \mathbf{J} + h. \end{cases}$$

4. Pour pouvoir intégrer cette équation au moins dans un cas particulier, on peut employer les coordonnées tangentielles, en regardant le fil comme l'enveloppe de la droite

$$(14) \quad x \sin \omega - y \cos \omega = p(\omega),$$

$p$  étant une fonction inconnue de  $\omega$ . Ce système de coordonnées, qui est d'ailleurs classique, a été employé par M. Appell dans son *Mémoire Sur le mouvement des fils* (*Acta mathematica*, t. 12).

L'équation (14) dérivée par rapport à  $\omega$  donne

$$x \cos \omega + y \sin \omega = p'$$

et l'on en déduit

$$(15) \quad \begin{cases} x = p \sin \omega + p' \cos \omega, \\ y = -p \cos \omega + p' \sin \omega; \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} dx = (p + p'') \cos \omega d\omega, \\ dy = (p + p'') \sin \omega d\omega, \\ ds = (p + p'') d\omega; \end{cases}$$

$$\mathbf{R} = p + p'' = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Par suite

$$(17) \quad \frac{dy}{dx} = \tan \omega,$$

$$(18) \quad \frac{d\omega}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2} = \frac{1}{(p + p'') \cos \omega},$$

$\mathbf{R}$  désignant le rayon de courbure;  $y'$ ,  $y''$  des dérivées prises par rapport à  $x$ ;  $p'$ ,  $p''$  des dérivées prises par rapport à  $\omega$ .

L'équation (12) prend alors la forme

$$(19) \quad \frac{d^2 p}{d\omega^2} + p = \frac{\mathbf{N}}{4(\mathbf{L} \sin \omega + \mathbf{M} \cos \omega)}$$

B.

avec

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L} \sin \omega + \mathbf{M} \cos \omega = - [\lambda(p^2 + p'^2) + \mathbf{A} + \mathbf{B}]p - 2\mathbf{B}(p \sin \omega + p' \cos \omega) \sin \omega \\ \quad - 2\mathbf{A}(p \cos \omega - p' \sin \omega) \cos \omega \\ \quad + 2\mathbf{F}(p \sin 2\omega + p' \cos 2\omega) + \mathbf{G} \sin \omega - \mathbf{H} \cos \omega, \\ \mathbf{N} = \lambda(p^2 + p'^2)^2 + 2(\mathbf{A} + \mathbf{B})(p^2 + p'^2) + 4\mathbf{B}(p \sin \omega + p' \cos \omega)^2 \\ \quad + 4\mathbf{A}(p \cos \omega - p' \sin \omega)^2 - 4\mathbf{G}x - 4\mathbf{H}y + 8\mathbf{F}xy + \mathbf{J} + h. \end{array} \right.$$

5. Considérons l'ellipsoïde central d'inertie du fil. La figure d'équilibre étant dans le plan des  $xy$ , l'un des axes principaux est  $oz$ . Cette figure est symétrique par rapport à  $oy$ , si l'on suppose les extrémités du fil attachées symétriquement par rapport à cet axe.

Ainsi l'axe  $oy$  et, par suite,  $ox$  sont aussi axes principaux d'inertie, et l'équation de l'ellipsoïde central se réduit à

$$\mathbf{A}X^2 + \mathbf{B}Y^2 + \mathbf{C}Z^2 = \mathbf{I},$$

$\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  désignant *les moments d'inertie* du fil par rapport aux axes et étant donnés par les formules (11).

Cet ellipsoïde est aplati dans le sens de  $oz$  et l'on a

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{F} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = 0.$$

Dans le cas où l'ellipsoïde central est de *révolution* autour de  $oz$ , ce qui arrive par exemple pour les figures d'équilibre *étoilées*, on a  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  et, si  $ox$  est aussi axe de symétrie de la figure, on a en outre  $\mathbf{H} = 0$ .

6. *Toutes ces conditions étant supposées remplies*, les expressions (20) deviennent

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \sin \omega + \mathbf{M} \cos \omega &= - [\lambda(p^2 + p'^2) + 4\mathbf{A}]p, \\ \mathbf{N} &= \lambda(p^2 + p'^2)^2 + 8\mathbf{A}(p^2 + p'^2) + \mathbf{D}, \end{aligned}$$

en désignant par  $\mathbf{D}$  la constante  $\mathbf{J} + h$ .

L'équation (19) prend la forme

$$(21) \quad p'' + p + \frac{\lambda(p^2 + p'^2)^2 + 8\mathbf{A}(p^2 + p'^2) + \mathbf{D}}{4[\lambda(p^2 + p'^2) + 4\mathbf{A}]p} = 0,$$

ou encore, en posant

$$(22) \quad p^2 + p'^2 = u,$$

d'où

$$2(p'' + p) = \frac{du}{dp},$$

cette équation devient

$$2p' \frac{du}{dp} + \frac{\lambda u^2 + 8Au + D}{\lambda u + 4A} = 0.$$

En séparant les variables, en posant

$$(23) \quad P(u) = \lambda u^2 + 8Au + D$$

et en intégrant, on obtient

$$(24) \quad p = \frac{K}{P(u)}, \quad p' = -\frac{K P'(u) u'}{P^2(u)},$$

$K$  étant une constante arbitraire, qu'on détermine par les conditions initiales.

La formule (22) donne ensuite

$$K^2(P^2 + u'^2 P'^2) = u P^4,$$

d'où

$$u'^2 = \left(\frac{du}{d\omega}\right)^2 = \frac{P^2(u P^2 - K^2)}{K^2 P'^2}$$

et

$$(25) \quad d\omega = \frac{K P'(u) du}{\pm P(u) \sqrt{u P^2(u) - K^2}}.$$

On en conclut

$$(26) \quad \omega - \omega_0 = \int_{u_0}^u \frac{K P'(u) du}{\pm P(u) \sqrt{u P^2(u) - K^2}},$$

et l'on a à discuter une intégrale *hyperelliptique*.

7. La tension du fil est donnée par la formule

$$T = -\int_0^\lambda r^4 d\sigma - h = -N,$$

ou, d'après l'expression de  $N$ ,

$$(27) \quad T = -(\lambda u^2 + 8Au + D) = -P(u).$$

La tension devant être positive,  $D$  et, par suite,  $h$  sont *négatifs*.

Désignons par  $R(u)$  le polynôme du cinquième degré qui se trouve

sous le radical de l'expression (26). On a

$$(28) \quad R(u) = u(\lambda u^2 + 8\Lambda u + D)^2 - K^2,$$

$$(29) \quad R'(u) = (\lambda u^2 + 8\Lambda u + D)(5\lambda u^2 + 24\Lambda u + D) = P(u)P_1(u).$$

Chacun de ces deux trinômes admet deux racines *réelles* et de signes contraires. Soient  $u_1$  la racine positive de  $P_1(u)$  et  $u_2$  celle de  $P(u)$ . Comme  $P_1(u) = P(u) + 4\lambda u^2 + 16\Lambda u$ , on voit que  $P_1(u_2) > 0$  et, par conséquent, on a  $0 < u_1 < u_2$ .

D'autre part, désignons, pour abrégé, par  $p_1, P_1, \rho_1$  et  $p_0, P_0, \rho_0$  les valeurs des expressions  $p, P, \rho$  pour  $u = u_1$  et  $u = u_0$ .

La relation (28) et la formule

$$(30) \quad \rho = \sqrt{p^2 + p'^2} = \sqrt{u}$$

donnent

$$R(u_1) = u_1 P_1^2 - K^2 = \rho_1^2 P_1^2 - K^2,$$

et comme  $\rho_1 \geq p_1$  et  $p_1 P_1 = K$  d'après l'équation (24), il vient  $\rho_1^2 P_1^2 \geq K^2$  et par suite, en général,  $R(u_1) > 0$ .

Les inégalités

$$R(0) < 0, \quad R(u_1) > 0, \quad R(u_2) < 0, \quad R(+\infty) > 0$$

montrent que le polynôme  $R(u)$  admet trois racines *réelles* et *positives* :  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ .

En remarquant, en outre, que pour  $u < 0$ , on a  $R(u) < 0$  et que pour  $u > 0$  la dérivée (29) n'admet que deux racines réelles, nous concluons que les deux autres racines de  $R(u)$  sont *imaginaires conjuguées*. Désignons-les par  $\delta + \varepsilon i$  et  $\delta - \varepsilon i$ . Si  $u'_2$  est la racine négative de  $P(u)$ , on peut démontrer qu'on a  $u'_2 < \delta < 0$ .

Considérons alors les trois racines réelles de  $R(u)$  dans l'ordre suivant :

$$(31) \quad 0 < \alpha^2 \leq u_1 \leq \beta^2 < u_2 < \gamma^2.$$

Comme, d'après les formules (26) et (27),  $P(u)$  doit être *négatif* et  $R(u)$  *positif*, on doit avoir le long de la figure d'équilibre

$$(32) \quad \alpha^2 \leq u \leq \beta^2.$$

D'autre part,  $p_0 > 0$  et  $P(u_0) < 0$  donnent

$$(33) \quad K = p_0 P_0 < 0,$$

et les formules (24) nous montrent que  $p$  reste positif et varie dans le même sens que  $\rho$ .

8. Prenons, pour fixer les idées, le signe + devant le radical de la formule (26). Puisque

$$p' = \frac{dp}{du} \cdot \frac{du}{d\omega} = \frac{-\sqrt{uP^2 - K^2}}{P},$$

les équations (15) de la courbe d'équilibre deviennent

$$(34) \quad \begin{cases} x = \frac{K \sin \omega - \sqrt{uP^2 - K^2} \cos \omega}{P}, \\ y = \frac{-K \cos \omega - \sqrt{uP^2 - K^2} \sin \omega}{P}. \end{cases}$$

On en déduit pour les coordonnées polaires

$$(35) \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{u},$$

$$(36) \quad \text{tang } \theta = \frac{y}{x} = \frac{K \cos \omega + \sqrt{uP^2 - K^2} \sin \omega}{-K \sin \omega + \sqrt{uP^2 - K^2} \cos \omega},$$

ou en posant

$$(37) \quad \text{tang } \sigma = \frac{K}{\sqrt{uP^2 - K^2}},$$

on a

$$(38) \quad \theta = \omega + \sigma + k\pi$$

et par suite

$$(39) \quad \text{tang}(\theta - \omega) = \text{tang } \sigma = \frac{K}{\sqrt{uP^2 - K^2}}.$$

Mais  $\omega - \theta$  est l'angle que fait la tangente à la courbe avec le rayon vecteur correspondant. On a donc

$$(40) \quad \text{tang}(\omega - \theta) = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = 2u \frac{d\theta}{du}.$$

Les formules (39) et (40) donnent finalement

$$(41) \quad \frac{d\theta}{du} = \frac{-K}{2u\sqrt{uP^2 - K^2}},$$

et, en considérant les deux déterminations du radical,

$$(42) \quad \theta - \theta_0 = \pm \int_{u_0}^u \frac{K du}{2u \sqrt{u P^2(u) - K^2}}.$$

On se trouve encore dans le cas où le rayon vecteur  $\rho$  oscille entre deux valeurs  $\alpha$  et  $\beta$ , tandis que l'angle  $\theta$  va toujours en croissant;  $\rho$  est fonction périodique de  $\theta$  et admet pour période la quantité

$$(43) \quad 2\Theta = \int_{\alpha^2}^{\beta^2} \frac{-K du}{u \sqrt{u P^2(u) - K^2}}.$$

9. Nous démontrerons dans le cas général que *la concavité de la courbe d'équilibre est toujours tournée vers l'origine.*

La formule (39), pour  $\rho = \alpha$  et  $\rho = \beta$ , donne

$$(44) \quad \text{tang}(\theta - \omega) = \pm \infty.$$

La courbe est donc tangente aux cercles  $\rho = \alpha$  et  $\rho = \beta$ . La figure d'équilibre est analogue à celle du cas où la répulsion est proportionnelle à la distance.

**Le cas de  $V(r) = r^{2k}$ .**

10. PREMIÈRE PROPOSITION GÉNÉRALE. — Nous devons tout d'abord énoncer la proposition générale suivante:

*La figure d'équilibre d'un fil homogène, de longueur  $\lambda$ , soumis à l'action des seules forces intérieures  $V'(r) ds d\sigma$ ,  $V$  étant une fonction donnée de  $r$ , est la même que celle que prendrait le fil placé, avec les mêmes conditions initiales, dans le champ créé par l'action d'une force extérieure dérivant de la fonction*

$$(45) \quad U(x, y) = \int_0^\lambda V(r) d\sigma.$$

Cette proposition résulte des équations mêmes de l'équilibre du fil. Elle ne fait que remplacer les actions de tous les éléments du fil sur un élément déterminé  $ds$  par leur résultante, qui est la force extérieure unique agissant sur  $ds$ .

Si  $x = f(s)$ ,  $y = \varphi(s)$  sont les équations de la figure d'équilibre dans le premier cas, pour avoir l'expression de la force unique correspondant au second cas, on doit remplacer sous le signe *somme*, dans la formule (45), les lettres  $\xi$  et  $\eta$  par les fonctions  $f(\sigma)$  et  $\varphi(\sigma)$ .

11. Dans le cas simple  $V(r) = r^2$ , en prenant pour origine le centre de gravité G du fil, on trouve

$$U(x, y) = \int_0^\lambda (x^2 + y^2 + \xi^2 + \eta^2) d\sigma = \lambda \rho^2 + C,$$

$\rho$  désignant le rayon vecteur et C le moment d'inertie du fil par rapport à G. On a  $X = 2\lambda x$ ,  $Y = 2\lambda y$ . La force extérieure unique est donc *centrale*, résultat évident *a priori*.

12. L'étude du cas  $V(r) = r^4$  se trouve simplifiée à l'aide de la proposition énoncée plus haut. Les formules (11) et (45) donnent

$$(46) \quad U = \lambda \rho^4 + 2C\rho^2 + 4A y^2 + 4B x^2 + 8Fxy - 4Gx - 4Hy + J,$$

et nous savons qu'on peut toujours faire les hypothèses  $F = G = 0$ , en choisissant convenablement les axes. On a d'ailleurs  $C = A + B$ .

*Supposons d'abord*  $A = B$  *et*  $T = 0$ . La fonction de forces se réduit à

$$U = \lambda \rho^4 + 8A\rho^2 + J,$$

et la force extérieure unique, qui remplace toutes les actions mutuelles des éléments du fil, a pour composantes

$$X = 4(\lambda \rho^2 + 4A)x,$$

$$Y = 4(\lambda \rho^2 + 4A)y,$$

*Cette force est centrale et fonction de  $\rho$  seulement.*

Les équations classiques de l'équilibre donnent

$$(47) \quad T = - (U + h) = - (\lambda \rho^4 + 8A\rho^2 + D),$$

$$(48) \quad \theta - \theta_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\pm C_0 d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 (\lambda \rho^4 + 8A\rho^2 + D)^2 - C_0^2}},$$

D étant la constante  $J + h$ .

En posant  $\rho^2 = u$ , l'équation de la courbe d'équilibre s'écrit

$$(49) \quad \theta - \theta_0 = \int_{u_0}^u \frac{\pm C_0 du}{2u\sqrt{u(\lambda u^2 + 8Au + D)^2 - C_0^2}}$$

avec

$$(50) \quad \rho = \sqrt{u}.$$

Si  $\omega$  et  $V$  désignent les angles que fait la tangente au fil, au point  $M$ , avec l'axe  $Ox$  et avec le rayon vecteur  $OM$  prolongé, on a  $V = \omega - \theta$  et la relation

$$T\rho \sin(\omega - \theta) = T\rho = C_0$$

donne, d'après (33),

$$(51) \quad C_0 = -\rho_0 P(u_0) = -K.$$

On retrouve ainsi les formules obtenues au paragraphe 8.

13. Pour achever la résolution de l'équation intégral-différentielle de M. Appell, il reste encore à déterminer les valeurs des constantes  $A$  et  $D$ , qui interviennent dans la formule (49).

En choisissant, pour sens des arcs croissants, le sens des  $\theta$  croissants et en prenant pour le radical la détermination positive ou négative suivant que, dans ce sens,  $u$  va en croissant ou en décroissant le long de la courbe, les formules (49) et (50) donnent

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{-k du}{2u\sqrt{uP^2 - K^2}}, \quad \frac{ds}{d\theta} = \frac{Pu}{K};$$

et, par suite,

$$(52) \quad ds = \frac{-P du}{2\sqrt{uP^2 - K^2}}.$$

Les équations

$$(53) \quad A = \int_0^\lambda y^2 ds, \quad D = h + \int_0^\lambda \rho^4 ds,$$

qui définissent  $A$  et  $D$ , peuvent s'écrire

$$A = -\frac{1}{2} \int_L \frac{uP \cos^2 \theta du}{\sqrt{uP^2 - K^2}}, \quad D = h - \frac{1}{2} \int_L \frac{u^2 P du}{\sqrt{uP^2 - K^2}},$$

les intégrales devant être calculées le long de la courbe d'équilibre  $L$ .

Dans le cas du fil fermé, la figure d'équilibre est *étoilée* et si elle a  $m$  boucles, les constantes A et D sont définies par le système d'équations

$$(54) \quad A = -m \int_{\alpha^2}^{\beta^2} \frac{u P \cos^2 \theta du}{\sqrt{u P^2 - K^2}}, \quad D = h - m \int_{\alpha^2}^{\beta^2} \frac{u^2 P du}{\sqrt{u P^2 - K^2}},$$

$\theta$  étant donné par la formule (49).

14. Supposons maintenant  $A = B$  et  $T \neq 0$ . La fonction de forces prend la forme

$$U = \lambda \rho^4 + 8A \rho^2 + J - 4Hy,$$

ce qui donne pour les composantes de la force extérieure

$$(55) \quad \begin{cases} X = 4(\lambda \rho^2 + 4A)x, \\ Y = 4(\lambda \rho^2 + 4A)y - 4H. \end{cases}$$

Le fil peut donc être supposé soumis en même temps à *une force centrale*  $F_1 = 4(\lambda \rho^2 + 4A\rho)$  *répulsive* et à *une seconde force*  $F_2 = -4H$  *parallèle à Oy et d'intensité constante.*

Si l'on suppose  $A \neq B$  et  $T \neq 0$ , la fonction de forces

$$U = \lambda \rho^4 + 2C\rho^2 + 4A y^2 + 4B x^2 - 4Hy + J$$

donne pour les composantes de la force extérieure

$$(56) \quad \begin{cases} X = 4(\lambda \rho^2 + A + 3B)x, \\ Y = 4(\lambda \rho^2 + A + 3B)y + 8(A - B)y - 4H. \end{cases}$$

Cette force est en chaque point du fil *la résultante d'une force centrale*  $F_1 = 4(\lambda \rho^2 + A + 3B)\rho$  *et d'une seconde force*  $F_2 = 8(A - B)y - 4H$  *parallèle à l'axe des y.*

15. CAS GÉNÉRAL. — Dans le cas  $V(r) = r^{2k}$ , où  $k$  est un entier positif, l'expression

$$U = \int_0^\lambda [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^k d\sigma$$

prend la forme

$$(57) \quad U = \lambda \rho^{2k} + \sum_{p=1}^k k(k-1)\dots(k-p+1)\rho^{2(k-p)} \sum_p \frac{(-2)^{\beta+\gamma}}{\alpha! \beta! \gamma!} A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta y^\gamma,$$

B.

dans laquelle

$$(58) \quad A_{\alpha\beta\gamma} = \int_0^\lambda (\xi^2 + \eta^2)^\alpha \xi^\beta \eta^\gamma d\sigma$$

et  $\sum_p$  désigne une somme étendue à tous les nombres entiers  $\alpha, \beta, \gamma$  positifs ou nuls, remplissant la condition  $\alpha + \beta + \gamma = p$ . On convient que  $0! = 1$ .

16. On peut chercher en particulier les courbes d'équilibre pour lesquelles toutes les constantes  $A_{\alpha\beta\gamma}$  s'annulent, sauf les  $A_{\alpha 0 0} = A_{p 0 0}$ .

Dans ce cas  $U$  est fonction de  $\rho$  seulement, car l'expression (57) se réduit à

$$(59) \quad U = \lambda \rho^{2k} + \sum_{p=1}^k \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} A_p \rho^{2(k-p)}$$

avec

$$(60) \quad A_p = \int_0^\lambda (\xi^2 + \eta^2)^p d\sigma.$$

La force extérieure unique est *centrale* et en posant pour abrégier

$$U + h = P(\rho^2) \quad \text{et} \quad \rho^2 = u,$$

la tension et la courbe d'équilibre sont données par les formules

$$(61) \quad T = -P(u),$$

$$(62) \quad \rho = \sqrt{u},$$

$$(63) \quad \theta - \theta_0 = \int_{u_0}^u \frac{\pm C du}{2u\sqrt{u[P(u)]^2 - C^2}}.$$

La fonction sous le radical est un polynôme en  $u$  de degré  $k + 1$ ; désignons-le par  $R(u)$ . Ses racines réelles sont toutes positives et l'on a

$$(64) \quad R'(u) = P(2uP' + P) = P(u)P_1(u).$$

Tous les coefficients du polynôme  $P(u)$  sont positifs, sauf le dernier  $A_k + h$ , qui doit être négatif, pour que la tension soit positive. Par suite  $P'(u) > 0$  pour  $u > 0$ . Comme pour  $u = 0$ ,  $P(u)$  est négatif, il admet une seule racine réelle et positive. Il en est de même pour  $P_1(u)$ . Soient  $u_1$  cette racine de  $P_1(u)$  et  $u_2$  celle de  $P(u)$ . Puisque  $P_1(u_2) = 2u_2 P'(u_2) > 0$ ,

on a  $0 < u_1 < u_2$  et comme, d'après la formule (61),  $P(u)$  doit être négatif, on a tout le long de la courbe  $u < u_2$ .

La formule (64) montre alors que la dérivée  $R'(u)$  est positive pour  $0 \leq u < u_1$ , nulle pour  $u = u_1$ , négative pour  $u_1 < u < u_2$ , nulle pour  $u = u_2$  et positive pour  $u > u_2$ . D'autre part on a

$$R(0) < 0, \quad R(u_0) > 0, \quad R(u_2) < 0, \quad R(+\infty) > 0.$$

Par suite l'équation  $R(u) = 0$  admet *trois racines réelles, distinctes et positives* et trois seulement. Désignons-les par  $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$  dans leur ordre croissant. On a

$$(65) \quad 0 < \alpha^2 < u_1 < \beta^2 < u_2 < \gamma^2.$$

Comme, le long de la figure d'équilibre, on doit avoir  $R(u) > 0$  et  $u < u_2$ ,  $u$  oscille entre  $\alpha^2$  et  $\beta^2$ . *Le rayon vecteur  $\rho$  varie entre  $\alpha$  et  $\beta$  et il est fonction périodique de  $\theta$  ayant pour période la quantité*

$$(66) \quad 2\Theta = \int_{\alpha^2}^{\beta^2} \frac{-C du}{u \sqrt{u[P(u)]^2 - C^2}}.$$

Les formules (62) et (63) nous permettent d'obtenir les expressions de  $x$  et  $y$  en fonction de  $u$  et des constantes  $A_1, A_2, \dots, A_k$ .

En choisissant pour sens des arcs croissants le sens des  $\theta$  croissants et en prenant pour le radical la détermination positive ou négative suivant que, dans ce sens,  $u$  va en croissant ou en décroissant le long de la courbe, les formules (62) et (63) donnent

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{-C}{2u\sqrt{uP^2 - C^2}}, \quad \frac{ds}{d\theta} = \frac{uP(u)}{C},$$

$C$  étant une constante négative. On en déduit

$$(67) \quad ds = \frac{-P du}{2\sqrt{uP^2 - C^2}}.$$

Les  $k$  équations

$$A_p = \int_0^\lambda (\xi^2 + \eta^2)^p d\sigma \quad (p = 1, 2, \dots, k)$$

déterminent ensuite les constantes  $A_1, A_2, \dots, A_k$  dans le cas général.

17. SENS DE LA CONCAVITE DE LA COURBE. — On a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad \left(\frac{1}{\rho}\right)' = \sqrt{\frac{P^2}{C^2} - \frac{1}{u}},$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'' = -u\sqrt{u} \left[ \frac{2PP'}{C^2} + \frac{1}{u^2} \right] = -\frac{2PP'u\sqrt{u}}{C^2} - \frac{1}{\sqrt{u}},$$

les dérivées de  $\frac{1}{\rho}$  étant prises par rapport à  $\theta$ . Il en résulte que

$$(68) \quad \frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = -\frac{2uP(u)P'(u)\sqrt{u}}{C^2},$$

expression qui reste *positive* pour  $\alpha^2 \leq u \leq \beta^2$ . Par suite, *la courbe d'équilibre tourne toujours sa concavité vers l'origine.*

18. Dans le cas limite  $\alpha = \beta$ , on a  $u_0 = u_1 = \alpha^2$  et  $\rho = \alpha$ , quel que soit  $\theta$ . La figure d'équilibre est *circulaire*.

**Analogies entre les figures d'équilibre d'un fil  
et les lignes géodésiques.**

19. Le problème de M. Appell peut être rattaché aussi à celui des *lignes géodésiques*. En effet, soit

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

l'expression de l'élément linéaire d'une surface S,  $u$  et  $v$  étant les coordonnées curvilignes. L'équation des lignes géodésiques sur cette surface (1) est :

$$(69) \quad 2v''(EG - F^2) = + \left( E \frac{\partial E}{\partial v} + F \frac{\partial E}{\partial u} - 2E \frac{\partial F}{\partial u} \right)$$

$$+ \left( 3F \frac{\partial E}{\partial v} + G \frac{\partial E}{\partial u} - 2F \frac{\partial F}{\partial u} - 2E \frac{\partial G}{\partial u} \right) v'$$

$$- \left( 3F \frac{\partial G}{\partial u} + E \frac{\partial G}{\partial v} - 2F \frac{\partial F}{\partial v} - 2G \frac{\partial E}{\partial v} \right) v'^2$$

$$- \left( G \frac{\partial G}{\partial u} + F \frac{\partial G}{\partial v} - 2G \frac{\partial F}{\partial v} \right) v'^3.$$

---

(1) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, L. V, Chap. IV.

Si les coordonnées  $u, v$  sont orthogonales ( $F = 0$ ) et si l'on suppose  $E = G$ , l'équation précédente se réduit à

$$2E v'' = \left( \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial u} v' \right) (1 + v'^2).$$

En y faisant  $u = x, v = y, E = (U + h)^2$ , on retrouve l'équation

$$(70) \quad (U + h) y'' = \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} y' \right) (1 + y'^2),$$

qui, pour

$$(71) \quad U = \int_0^\lambda V(r) d\sigma,$$

donne les figures d'équilibre d'un fil homogène, de longueur  $\lambda$ , dont les éléments se repoussent mutuellement suivant la loi  $V'(r) ds d\sigma$  (§ 2, page 40).

La surface  $S$ , ayant dans ce cas l'élément linéaire

$$(72) \quad ds^2 = (U + h)^2 (dx^2 + dy^2),$$

est représentée sur le plan *avec conservation des angles*.

20. SECONDE PROPOSITION GÉNÉRALE. — La fonction  $V(r)$  étant *donnée*, à tout arc de courbe plane  $L$  la formule (71) fait correspondre une expression bien déterminée pour la fonction de forces  $U(x, y)$ .

Supposons *données* cette expression de  $U$  et la valeur de  $h$ . Les solutions de l'équation différentielle (70) dépendent encore de deux constantes arbitraires, et la tension du fil le long d'une quelconque de ces figures d'équilibre est donnée par la fonction

$$(73) \quad T = -(U + h).$$

Ceci étant, nous pouvons énoncer la proposition générale suivante :

*Toutes les figures d'équilibre planes, pour lesquelles l'expression de la tension est donnée par une même fonction  $f(x, y)$  de forme bien déterminée, se trouvent représentées sur la surface d'élément linéaire*

$$ds^2 = f^2(dx^2 + dy^2)$$

*par des lignes géodésiques et inversement, si la courbe plane, correspondant à une géodésique de cette surface, donne à la tension  $T$  l'expression*

$f(x, y)$ , cette courbe est une figure d'équilibre pour la loi de forces donnée.

21. Dans le cas de la répulsion *proportionnelle à la distance*, on a

$$T = -(\lambda\rho^2 + C) + h$$

avec

$$C = \int_0^\lambda (\xi^2 + \eta^2) d\sigma.$$

Les figures d'équilibre dépendent de trois constantes :  $\gamma_0, \gamma'_0$  et  $h$ . Si  $h$  est donné, par chaque point  $x_0, y_0$  il passe une infinité de courbes, qu'on obtient en faisant varier  $\gamma'_0$ ; les fonctions  $\xi(\sigma)$  et  $\eta(\sigma)$  dépendent de la valeur de  $\gamma'_0$ . Choisissons, parmi ces courbes, celles qui donnent à  $C$  une valeur déterminée  $C_0$ . Analytiquement, ceci revient à résoudre l'équation en  $\gamma'_0$

$$(74) \quad C_0 = \int_0^\lambda (\xi^2 + \eta^2) d\sigma.$$

On voit ainsi qu'en général, par chaque point  $x_0, y_0$  du plan, il passe une ou plusieurs courbes donnant à  $C$  la valeur  $C_0$ . *Toutes ces courbes sont des géodésiques sur la surface d'élément linéaire*

$$(75) \quad ds^2 = (\lambda\rho^2 + C_0 - h)^2 (dx^2 + dy^2).$$

22. On sait que l'équation des lignes géodésiques sur une surface d'élément linéaire

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

est

$$(76) \quad \frac{\partial f}{\partial C} = C',$$

$f(u, v, C)$  désignant une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(77) \quad E \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + G \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 = EG - F^2,$$

$C$  étant une constante arbitraire qui figure au moins dans l'une des dérivées  $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ , et  $C'$  une autre constante arbitraire (G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. II et III).

Dans le cas où E, F, G sont fonctions de la seule variable  $u$ , la surface S est *applicable sur une surface de révolution* et l'on peut prendre comme solution de l'équation (77) la fonction

$$f = C\nu + \varphi(u).$$

L'équation (77) détermine  $\varphi'(u)$  et l'on trouve

$$(78) \quad f = C\nu + \int \frac{CF + \sqrt{EG - F^2} \sqrt{G - C^2}}{G} du.$$

23. Si  $V(r) = r^2$  et si le centre de gravité du fil est pris pour origine, on a la fonction de forces

$$U = \int_0^\lambda r^2 d\sigma = \lambda\rho^2 + A$$

avec

$$A = \int_0^\lambda [\rho(\sigma)]^2 d\sigma.$$

On en conclut que

$$U + h = \lambda\rho^2 + A + h = \lambda(\rho^2 - a^2),$$

$a$  étant une nouvelle constante.

L'expression de l'élément linéaire, en coordonnées polaires, est dans ce cas

$$(79) \quad ds^2 = \lambda^2(\rho^2 - a^2)^2(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2)$$

avec

$$u = \rho, \quad \nu = \theta,$$

$$E = \lambda^2(\rho^2 - a^2)^2, \quad F = 0, \quad G = \lambda^2\rho^2(\rho^2 - a^2)^2.$$

La fonction (78) devient

$$f = C\theta + \int \frac{1}{\rho} \sqrt{\lambda^2\rho^2(a^2 - \rho^2)^2 - C^2} d\rho,$$

et d'après l'équation (76) les lignes géodésiques de la surface (79) sont

$$\theta - \int \frac{C d\rho}{\rho \sqrt{\lambda^2\rho^2(a^2 - \rho^2)^2 - C^2}} = C'.$$

En posant  $C = \lambda b^3$ ,  $C' = \theta_1$  et  $\rho^2 = u$ , on retrouve l'équation (6)

(page 5)

$$\theta - \theta_1 = \int_{u_1}^u \frac{b^3 du}{2u \sqrt{u(a^2 - u)^2 - b^6}}.$$

24. La proposition générale du paragraphe 20 est analogue à celle énoncée par M. Darboux pour les *trajectoires planes* d'un mobile, dans le cas où l'action dérive d'une fonction de forces  $U_1(x, y)$  (1).

Les équations du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U_1}{\partial y}$$

et celle des forces vives

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2(U_1 + h_1)$$

donnent

$$dx \, d^2y - dy \, d^2x = \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} dx - \frac{\partial U_1}{\partial x} dy\right) \frac{dx^2 + dy^2}{2(U_1 + h_1)},$$

ou encore, si  $x$  est la variable indépendante,

$$(80) \quad 2(U_1 + h_1) y'' = \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial U_1}{\partial x} y'\right) (1 + y'^2).$$

La fonction  $U_1$  a, dans ce cas, une forme *bien déterminée* et cette équation différentielle est celle *des trajectoires qui correspondent à une même valeur de la constante  $h_1$* . Comme elle est du deuxième ordre en  $y$  et du premier degré en  $y''$ , une trajectoire sera pleinement déterminée par la condition de passer par un point et d'y avoir une tangente donnée.

M. Darboux remarque que l'équation (80) est celle des lignes géodésiques de la surface d'élément linéaire

$$(81) \quad ds^2 = 2(U_1 + h_1) (dx^2 + dy^2),$$

et qu'à toute trajectoire du mobile dans le plan correspond une ligne géodésique de cette surface et vice versa (2).

(1) G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. II, L. V, Chap. VI.

(2) *Ibid.*, t. II, p. 453.

25. En tenant compte des analogies qui existent entre la trajectoire d'un mobile et la figure d'équilibre d'un fil, nous allons comparer les formules (72) et (81).

On sait que, si un fil est en équilibre sous l'action d'une force *extérieure*  $Fds$ , la tension étant  $T$ , un point matériel de masse  $m$ , décrivant la courbe funiculaire avec une vitesse  $v$  égale à  $kT$  en chaque point ( $k$  étant une constante), est sollicité par une force  $\Phi$  opposée à  $F$  d'intensité  $mk^2FT$  ou  $mk^2Fv$  (P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I, 2<sup>e</sup> éd., p. 365). En prenant  $m = k = 1$ , on a  $v = T$  et  $\Phi = -FT$ .

Dans le cas du paragraphe I, le fil peut être considéré comme soumis à une seule force extérieure  $F$  dérivant de la fonction

$$U = \int_0^\lambda V(r) d\sigma,$$

et l'on a

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad T = -(U + h).$$

Par suite, si  $X_1$  et  $Y_1$  désignent les projections de la force  $\Phi$  sur les axes  $Ox$  et  $Oy$ , comme

$$(82) \quad \begin{cases} X_1 = -TF \cos(F, x) = (U + h) \frac{\partial U}{\partial x}, \\ Y_1 = -TF \cos(F, y) = (U + h) \frac{\partial U}{\partial y}, \end{cases}$$

$\Phi$  dérive d'une fonction de forces

$$(83) \quad U_1 = \frac{1}{2} (U + h)^2.$$

L'équation des forces vives donne  $v^2 = 2(U_1 + h_1)$ ; mais, puisque  $v = T = -(U + h)$ , on a  $h_1 = 0$  et l'équation (80), qui est dans ce cas

$${}_2U_1 y'' = \left( \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial U_1}{\partial x} y' \right) (1 + y'^2),$$

devient, à cause des relations (82) et (83),

$$(U + h) y'' = \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} y' \right) (1 + y'^2).$$

Nous retrouvons ainsi l'équation (70).

De même la formule (81), pour  $h_1 = 0$ ,

$$ds^2 = 2 U_1(dx^2 + dy^2),$$

prend la forme de l'expression (72)

$$ds^2 = (U + h)^2(dx^2 + dy^2).$$

On voit ainsi l'analogie qui existe, dans le cas où l'action dérive d'une fonction de forces, entre les trajectoires planes d'un mobile et les figures d'équilibre d'un fil soumis à des forces intérieures.

#### Figure d'équilibre circulaire.

26. Il est évident que la circonférence est toujours une courbe d'équilibre, solution du problème de M. Appell. Nous voulons démontrer qu'elle est une *figure d'équilibre instable* dans le cas de la *répulsion*.

Supposons, en effet, qu'on déforme infiniment peu la courbe *sans altérer sa longueur*  $\lambda$  et *sans déplacer son centre de gravité* O.

Soient R le rayon de la circonférence et  $\rho$  le rayon vecteur de la courbe après la déformation. Nous pouvons écrire en coordonnées polaires

$$(84) \quad \rho = R + \varepsilon f(\theta),$$

$\varepsilon$  étant une *constante* suffisamment petite et  $f(\theta)$  une fonction *finie, continue, périodique, de période*  $2\pi$ , et *admettant une dérivée*  $f'(\theta)$  *finie* pour toutes les valeurs de  $\theta$ .

Soit, en série trigonométrique,

$$(85) \quad f(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + \dots + a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta + \dots$$

On a

$$(86) \quad \begin{aligned} \rho' &= \varepsilon f'(\theta), \\ \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} &= \sqrt{R^2 + 2\varepsilon R f + \varepsilon^2(f^2 + f'^2)} = R \sqrt{1 + \frac{2f}{R}\varepsilon + \frac{f^2 + f'^2}{R^2}\varepsilon^2} \\ &= R + \varepsilon f + \varepsilon^2 \frac{f'^2}{2R} + \eta, \end{aligned}$$

$\eta$  ne contenant que des termes du troisième ordre au moins ( $\varepsilon$  étant un infiniment petit du premier ordre).

27. Supposons, pour fixer les idées,

$$V(r) = r^4$$

et calculons l'énergie du fil dans sa nouvelle position. Elle est donnée par l'intégrale

$$(87) \quad W = \int \int [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^2 ds ds_1$$

doublement étendue le long de la courbe de longueur  $\lambda = 2\pi R$ .

En posant  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $\rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ ,  $A_1 = xx_1 + yy_1$ , on peut écrire

$$W = \int \int (\rho^2 + \rho_1^2 - 2A_1)^2 ds ds_1$$

ou encore

$$(88) \quad W = \int \int \rho^4 ds ds_1 + \int \int \rho_1^4 ds ds_1 + 4 \int \int A_1^2 ds ds_1 \\ - 4 \int \int A_1 \rho^2 ds ds_1 - 4 \int \int A_1 \rho_1^2 ds ds_1 + 2 \int \int \rho^2 \rho_1^2 ds ds_1.$$

Les deux premières intégrales sont évidemment égales. Soit

$$I_1 = \int \int \rho^4 ds ds_1 = 2\pi R \int_0^{2\pi} \rho^4 \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta$$

ou, d'après les formules (84) et (86),

$$I_1 = 2\pi R \int_0^{2\pi} (R + \varepsilon f)^4 \left( R + \varepsilon f + \varepsilon^2 \frac{f'^2}{2R} + \dots \right) d\theta.$$

En négligeant les termes du troisième ordre, on trouve

$$(89) \quad I_1 = 4\pi^2 R^6 + 20\pi^2 R^5 \varepsilon a_0 + \pi R^4 \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} (20f^2 + f'^2) d\theta.$$

Ensuite on a

$$I_2 = \int \int A_1^2 ds ds_1 = A^2 + B^2 + 2F^2$$

si l'on pose

$$\mathbf{A} = \int_0^\lambda y^2 ds, \quad \mathbf{B} = \int_0^\lambda x^2 ds, \quad \mathbf{F} = \int_0^\lambda xy ds.$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_0^{2\pi} (\mathbf{R} + \varepsilon f)^2 \left( \mathbf{R} + \varepsilon f + \varepsilon^2 \frac{f'^2}{2\mathbf{R}} + \dots \right) \sin^2 \theta d\theta \\ &= \pi \mathbf{R}^3 + 3 \mathbf{R}^2 \varepsilon \int_0^{2\pi} f \sin^2 \theta d\theta + \mathbf{R} \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \left( 3f^2 + \frac{1}{2} f'^2 \right) \sin^2 \theta d\theta. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \pi \mathbf{R}^3 + 3 \mathbf{R}^2 \varepsilon \int_0^{2\pi} f \cos^2 \theta d\theta + \mathbf{R} \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \left( 3f^2 + \frac{1}{2} f'^2 \right) \cos^2 \theta d\theta, \\ \mathbf{F} &= 3 \mathbf{R}^2 \varepsilon \int_0^{2\pi} f \sin \theta \cos \theta d\theta + \mathbf{R} \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \left( 3f^2 + \frac{1}{2} f'^2 \right) \sin \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} (90) \quad \mathbf{I}_2 &= 2 \pi^2 \mathbf{R}^6 + 12 \pi^2 \mathbf{R}^5 \varepsilon \alpha_0 \\ &\quad + 2 \pi \mathbf{R}^4 \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \left( 3f^2 + \frac{1}{2} f'^2 \right) d\theta + 9 \mathbf{R}^4 \varepsilon^2 (\alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2) \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \int_0^{2\pi} f \sin^2 \theta d\theta, \quad \beta = \int_0^{2\pi} f \cos^2 \theta d\theta, \quad \gamma = \int_0^{2\pi} f \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

La quatrième intégrale de la formule (88)

$$\iint \mathbf{A}_1 \rho^2 ds ds_1 = \int_0^\lambda x \rho^2 ds \int_0^\lambda x_1 ds_1 + \int_0^\lambda y \rho^2 ds \int_0^\lambda y_1 ds_1$$

est *nulle*, car par hypothèse le centre de gravité du fil reste à l'origine.

Il en est de même de la cinquième de ces intégrales.

Enfin, puisque

$$\mathbf{C} = \int_0^\lambda \rho^2 ds = \int_0^{2\pi} (\mathbf{R} + \varepsilon f)^2 \left( \mathbf{R} + \varepsilon f + \varepsilon^2 \frac{f'^2}{2\mathbf{R}} + \dots \right) d\theta = \mathbf{A} + \mathbf{B},$$

la dernière intégrale,

$$\mathbf{C}^2 = \iint \rho^2 \rho_1^2 ds ds_1,$$

devient

$$(91) \quad C^2 = 4\pi^2 R^6 + 24\pi^2 R^5 \varepsilon \alpha_0 \\ + 4\pi R^4 \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} \left( 3f^2 + \frac{1}{2} f'^2 \right) d\theta + 36\pi^2 R^4 \varepsilon^2 \alpha_0^2,$$

en négligeant toujours les termes du troisième ordre.

On en conclut

$$W = 2I_1 + 4I_2 + 2C^2,$$

c'est-à-dire, d'après (89), (90) et (91),

$$(92) \quad W = 24\pi^2 R^6 + 136\pi^2 R^5 \varepsilon \alpha_0 + 72\pi^2 R^4 \varepsilon^2 \alpha_0^2 \\ + 2\pi R^4 \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} (44f^2 + 5f'^2) d\theta + 36R^4 \varepsilon^2 (\alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2),$$

$\alpha_0$  étant le premier coefficient du développement (85). Pour  $\varepsilon = 0$ , on a  $W_0 = 24\pi^2 R^6$ . C'est l'énergie du fil dans sa forme circulaire.

Comme la circonférence est une figure d'équilibre, la *première variation de l'énergie* (92) doit être *nulle* pour toute transformation de figure compatible avec les liaisons, c'est-à-dire pour toute déformation du fil qui laisse invariables et sa longueur et la position de son centre de gravité. Par suite, la fonction  $f(\theta)$  remplit la condition

$$(93) \quad \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0,$$

et le développement (92) montre que la *deuxième variation*  $\delta^2 W$  est essentiellement *positive*.

La valeur  $W_0$  est donc un *minimum* et la circonférence est une figure d'équilibre instable.

28. En supposant la forme de la courbe  $\rho = R + \varepsilon f(\theta)$  définie par l'infinité dénombrable de paramètres  $\varepsilon a_1, \varepsilon b_1, \dots, \varepsilon a_n, \varepsilon b_n, \dots$ , on peut calculer les *coefficients de stabilité* d'après la méthode de Poincaré (1).

---

(1) H. POINCARÉ, *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Acta mathematica*, t. VII).

Le développement (85) donne

$$\int_0^{2\pi} f^2(\theta) d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$
$$\int_0^{2\pi} f'^2(\theta) d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2),$$

et comme, la condition (93) étant remplie, on a

$$\beta = -\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f \cos 2\theta d\theta = \frac{\pi}{2} a_2,$$
$$\gamma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f \sin 2\theta d\theta = \frac{\pi}{2} b_2,$$

on voit que le groupe homogène de deuxième degré de la formule (92) a comme coefficients  $2\pi^2 R^4(44 + 5n^2)$  pour tous les termes en  $\varepsilon^2 a_n^2$  et  $\varepsilon^2 b_n^2$ , sauf pour  $\varepsilon^2 a_2^2$  et  $\varepsilon^2 b_2^2$  auxquels il correspond le coefficient  $146\pi^2 R^4$ .

Ainsi, *tous les coefficients de stabilité sont positifs.*

Dans le cas de l'attraction, tous ces coefficients sont *négatifs* et la forme de l'équilibre est *stable*, mais il faudrait supposer, par exemple, que des sphères infiniment petites, formant un chapelet, empêcheraient le fil de se ramasser en un seul point.

*Vu et approuvé :*

Paris, le 4 avril 1914.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
PAUL APPELL.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 4 avril 1914.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,  
L. LIARD.