J. KAMPÉ DE FÉRIET

Sur les fonctions hypersphériques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1914

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1914__6__1_0>

A Monsieur P. Appell,
Président du Jury
en hommage de très profonde
et très respectueuse reconnaissance
J. Kampé de Fériet

N° D'ORDRE :
1564.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. J. KAMPÉ DE FÉRIET.

1re THÈSE. — SUR LES FONCTIONS HYPERSPHÉRIQUES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 24 avril 1915, devant la Commission d'examen.

MM. P. APPELL, *Président.*
É. CARTAN, } *Examinateurs.*
CL. GUICHARD, }

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1915

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

	MM.	
Doyen	P. APPELL, Professeur.	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Doyen honoraire	G. DARBOUX	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires	CH. WOLF.	
	J. RIBAN.	
Professeurs	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	Physique.
	BOUSSINESQ	Physique mathém. et Calcul des probabilités.
	PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	Y. DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	GASTON BONNIER	Botanique.
	DASTRE	Physiologie.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	VELAIN	Géographie physique.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVE	Mécanique rationnelle.
	HAUG	Géologie.
	HOUSSAY	Zoologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale.
	CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie.
	ÉMILE BOREL	Théorie des fonctions.
	MARCHIS	Aviation.
	JEAN PERRIN	Chimie physique.
	G. PRUVOT	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	MATRUCHOT	Botanique.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CL. GUICHARD	Mathématiques générales.
	MOLLIARD	Physiologie végétale.
	N	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	N	Histologie.
Professeurs adjoints	PUISEUX	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC	Physique.
	MICHEL	Minéralogie.
	HÉROUARD	Zoologie.
	LÉON BERTRAND	Géologie.
	RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	COTTON	Physique.
	LESPIEAU	Chimie.
	GENTIL	Pétrographie.
	SAGNAC	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
Secrétaire	D. TOMBECK.	

55530 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A LA MÉMOIRE

DE

CHARLES HERMITE.

A

MONSIEUR P. APPELL,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

Très respectueux hommage et profonde reconnaissance.

A MA MÈRE.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR
LES FONCTIONS HYPERSPHÉRIQUES.

CHAPITRE I.

DES FONCTIONS HARMONIQUES EN GÉNÉRAL.

I. — L'opérateur de Laplace.

Soit une fonction dépendant de $n+2$ variables $z_1, z_2, \ldots, z_{n+2}$:

$$F(z_1, \ldots, z_{n+2}).$$

L'expression

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial z_{n+2}^2}$$

est définie pour toutes valeurs des variables pour lesquelles les dérivées qui y figurent ont elles-mêmes un sens.

On désigne cette expression par le symbole $\Delta^2 F$:

$$\Delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial z_{n+2}^2}. \tag{1}$$

L'expression $\Delta^2 F$ est elle-même une fonction des variables $z_1, \ldots, z_{n+2}$. On pose

$$\Delta^2(\Delta^2 F) = \Delta^4 F \tag{2}$$

et l'on a

$$(2') \qquad \Delta^4 F = \frac{\partial^4 F}{\partial z_1^4} + \ldots + \frac{\partial^4 F}{\partial z_{n+2}^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial z_1^2\, \partial z_2^2} + \ldots.$$

En employant la méthode symbolique bien connue qui consiste à remplacer la dérivée

$$\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_{n+2}} F}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_{n+2}^{m_{n+2}}}$$

par le produit

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)^{m_{n+2}} F,$$

on voit que

$$\Delta^2 F = \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)^2\right] F,$$

$$\Delta^4 F = \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)^2\right]^2 F.$$

On définit ainsi de proche en proche le symbole

$$(3) \qquad \Delta^{2j} F = \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)^2\right]^j F$$
$$= \sum \frac{(1, j)}{(1, j_1) \ldots (1, j_{n+2})} \frac{\partial^j F}{\partial z_1^{j_1} \ldots \partial z_{n+2}^{j_{n+2}}}$$

où la sommation (¹) est étendue à toutes les valeurs positives des entiers $j_1, \ldots, j_{n+2}$ vérifiant la condition

$$j_1 + \ldots + j_{n+2} = j.$$

II. — Expression de $\Delta^2 F$ dans un système de coordonnées quelconques.

Nous pouvons considérer $z_1, \ldots, z_{n+2}$ comme les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point dans l'espace à $n+2$ dimensions.

(¹) Nous employons la notation introduite par M. Paul Appell (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3ᵉ série, t. VII, 1882, p. 173) :

$$(\lambda, k) = \lambda \,.\, (\lambda+1) \ldots (\lambda + k - 1), \qquad (\lambda, 0) = 1,$$

où k désigne un nombre entier positif, λ un nombre quelconque.

Que devient $\Delta^2 F$ quand on passe à un nouveau système de coordonnées par les formules

$$z_k = \varphi_k(u_1, \ldots, u_{n+2}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+2).$$

Sa nouvelle expression s'obtient facilement en employant une méthode appliquée par Jacobi au cas de l'espace à trois dimensions, quand les nouvelles coordonnées forment un système orthogonal (*Cf.* F. TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. II, p. 7).

Étant donnée l'intégrale $(n+2)$-uple,

$$I = \int_T^{n+2} \Phi\left(z_1, \ldots, z_{n+2}, F, \frac{\partial F}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial z_{n+2}}\right) dz_1 \ldots dz_{n+2}$$

si l'on donne à la fonction F une variation δF assujettie à la condition de s'annuler à la frontière du domaine T, la variation de l'intégrale I a pour valeur :

$$\delta I = \int_T^{n+2} \delta F \left[\frac{\partial \Phi}{\partial F} - \sum_{k=1}^{k=n+2} \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial z_k}}\right)\right] dz_1 \ldots dz_{n+2}.$$

Ceci étant, considérons l'intégrale

$$I = \int_T^{n+2} \left[\sum_{k=1}^{k=n+2} \left(\frac{\partial F}{\partial z_k}\right)^2\right] dz_1 \ldots dz_{n+2},$$

d'où

$$\delta I = -2 \int_T^{n+2} \delta F \, \Delta^2 F \, dz_1 \ldots dz_{n+2}.$$

Faisons dans cette dernière intégrale le changement de variables :

$$z_k = \varphi_k(u_1, \ldots, u_{n+2})$$

si nous désignons par $\overline{\Delta^2 F}$ ce que devient la fonction $\Delta^2 F$ avec ce nouveau système de variables,

$$\delta I = -2 \int_{T_1}^{n+2} \delta F \, \overline{\Delta^2 F} \, D \, du_1 \ldots du_{n+2}$$

où

$$D = \frac{D(z_1, \dots, z_{n+2})}{D(u_1, \dots, u_{n+2})}.$$

Mais nous pouvons obtenir l'expression de δI au moyen des coordonnées u en faisant directement le changement de variables dans l'intégrale I :

$$I = \int_{\Gamma_1}^{n+2} \sum E_{kj} \frac{\partial F}{\partial u_k} \frac{\partial F}{\partial u_j} D \, du_1 \dots du_{n+2} \qquad (E_{kj} = E_{jk}),$$

ici

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dfrac{\partial F}{\partial u_k}} = 2 D \sum_{j=1}^{j=n+2} E_{kj} \frac{\partial F}{\partial u_j},$$

donc

$$\delta I = -2 \int_{T_1}^{n+2} \delta F \left[\sum_{k=1}^{k=n+2} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(D \sum_{j=1}^{j=n+2} E_{kj} \frac{\partial F}{\partial u_j} \right) \right] du_1 \dots du_n.$$

Or cette dernière expression de δI doit être égale à la première: ce qui exige

$$\overline{\Delta^2 F} = \frac{1}{D} \left[\sum_{k=1}^{k=n+2} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(D \sum_{j=1}^{j=n+2} E_{kj} \frac{\partial F}{\partial u_j} \right) \right]. \tag{4}$$

C'est l'expression de $\Delta^2 F$ dans un système de coordonnées quelconques.

Pour faire effectivement le calcul, on peut remarquer que

$$E_{kj} = E_{jk} = \frac{\partial u_k}{\partial z_1} \frac{\partial u_j}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial u_k}{\partial z_{n+2}} \frac{\partial u_j}{\partial z_{n+2}}.$$

Mais il est plus simple de calculer l'élément d'arc dans le nouveau système de coordonnées :

$$ds^2 = \Sigma \, dz_k^2 = \Sigma \, H_{kj} \, du_k \, du_j.$$

La connaissance des expressions

$$H_{kj} = H_{jk} = \frac{\partial z_1}{\partial u_k} \frac{\partial z_1}{\partial u_j} + \dots + \frac{\partial z_{n+2}}{\partial u_k} \frac{\partial z_{n+2}}{\partial u_j}$$

entraîne celle de tous les éléments de l'expression (4).

Car, en posant

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{1,2} & \dots & \mathbf{H}_{1,n+2} \\ & & & \\ \mathbf{H}_{n+2,1} & & \dots & \mathbf{H}_{n+2,n+2} \end{vmatrix}$$

on sait (¹) que

$$\mathbf{D} = \sqrt{\mathbf{H}}; \qquad \mathbf{E}_{kj} = \frac{\mathbf{D}_{kj}}{\mathbf{H}}$$

en désignant par D_{kj} le coefficient de H_{kj} dans le développement de **H**. Donc

$$\overline{\Delta^2 \mathrm{F}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}} \left[\sum_{k=1}^{k=n+2} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{H}}} \sum_{j=1}^{j=n+2} \mathrm{D}_{kj} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_j} \right) \right]. \tag{5}$$

Applications. — 1° Le système des coordonnées u est orthogonal, c'est-à-dire que l'on a

$$\mathbf{H}_{kj} = 0 \qquad (k \neq j).$$

Dans ce cas particulier,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{11} \mathbf{H}_{22} \dots \mathbf{H}_{n+2,n+2},$$

$$\mathbf{D}_{kj} = 0 \quad (k \neq j); \qquad \mathbf{D}_{jj} = \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{H}_{jj}}.$$

Si nous posons maintenant, comme on le fait d'ordinaire,

$$\mathbf{H}_{jj} = h_j^2,$$

de telle façon que

$$ds^2 = \Sigma\, dz_k^2 = \Sigma\, h_j^2\, du_j^2,$$

la formule (5) se réduit à la formule bien connue :

$$\overline{\Delta^2 \mathrm{F}} = \frac{1}{h_1 h_2 \dots h_{n+2}} \left[\sum_{k=1}^{k=n+2} \frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{h_1 h_2 \dots h_{n+2}}{h_k^2} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u_k} \right) \right]. \tag{6}$$

(¹) *Cf.* E. Beltrami, *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* (*Memorie della Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, 2ᵉ série, t. VIII, p. 549).

2° L'opérateur de Laplace n'est pas altéré par une substitution orthogonale :

$$z_j = \alpha_{0j} + \alpha_{1j} u_1 + \ldots + \alpha_{n+2,j} u_{n+2} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+2)$$

où les α sont des constantes liées par les relations

$$\sum_{j=1}^{j=n+2} \alpha_{k,j}^2 = 1 ; \qquad \sum_{j=1}^{j=n+2} \alpha_{r,j} \alpha_{s,j} = 0 \qquad (r \neq s).$$

En effet, nous nous trouvons dans un cas particulier de la formule (6) où :

$$h_j = 1,$$

d'où

$$\overline{\Delta^2 F} = \frac{\partial^2 F}{} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial u_{n+2}^2}. \tag{6'}$$

III. — Équation de Laplace.

L'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre :

$$\Delta^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial z_{n+2}^2} = 0, \tag{7}$$

introduite par Laplace dans ses recherches de Mécanique céleste (pour le cas de trois variables : $n = 1$), a fait l'objet d'un si grand nombre de travaux, qu'il suffira, pour la suite, d'énoncer quelques propriétés classiques.

Pour qu'il n'y ait aucune ambiguité, j'emploierai dans le présent travail les locutions suivantes :

Une fonction F, vérifiant sans aucune autre condition restrictive l'équation

$$\Delta^2 F = 0,$$

sera dite « solution de l'équation de Laplace » ;

Une fonction F, vérifiant dans un domaine T l'équation

$$\Delta^2 F = 0$$

et demeurant en outre uniforme et finie en tout point du domaine T, sera dite « fonction harmonique dans le domaine T ».

D'après le principe de Dirichlet, il existe une et une seule fonction harmonique dans un domaine T et prenant sur la frontière de T une suite continue de valeurs données à l'avance.

Si Φ et Ψ désignent deux fonctions harmoniques dans le domaine T, on a la formule classique de Green :

$$\int_{\text{Frontière de T}}^{n+1} \left(\Phi \frac{d\Psi}{dn} - \Psi \frac{d\Phi}{dn}\right) d\sigma = 0. \tag{8}$$

IV. — Coordonnées polaires.

Nous emploierons souvent le système de coordonnées défini par les formules :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{lll} z_1 &= r \cos\theta_1 & (0 \leqq \theta_1 \leqq \pi), \\ z_2 &= r \sin\theta_1 \cos\theta_2 & (0 \leqq \theta_2 \leqq \pi), \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\ z_n &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \cos\theta_n & (0 \leqq \theta_n \leqq \pi), \\ z_{n+1} &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_n \cos\varphi, & \\ z_{n+2} &= r \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_n \sin\varphi & (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi). \end{array}\right.$$

Nous désignerons constamment l'hypersphère

$$z_1^2 + \dots + z_{n+2}^2 = r^2 = 1$$

par S, aucune ambiguïté n'étant possible.

On a alors les formules élémentaires suivantes :

Dans ce système de coordonnées : l'élément d'arc est donné par la formule

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta_1^2 + r^2 \sin^2\theta_1\, d\theta_2^2 + \dots + r^2 \sin^2\theta_1 \dots \sin^2\theta_n\, d\varphi^2;$$

l'élément de volume,

$$d\tau = r^{n+1}\, dr\, d\omega,$$

où $d\omega$ désigne l'élément d'aire de S,

$$d\omega = \sin^n\theta_1 \sin^{n-1}\theta_2 \ldots \sin\theta_n \, d\theta_1 \, d\theta_2 \ldots d\theta_n \, d\varphi.$$

En appliquant la formule générale (6) on trouve ([1]) pour expression de l'opérateur de Laplace :

$$(10) \qquad r^2 \overline{\Delta^2 F} = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1} \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_n} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{k-1} \sin^{n+1-k}\theta_k} \frac{\partial}{\partial \theta_k}\left(\sin^{n+1-k}\theta_k \frac{\partial F}{\partial \theta_k}\right).$$

Remarque. — Sous la forme (10) on voit immédiatement qu'il existe une solution de l'équation de Laplace ne dépendant que de r; c'est

$$(11) \qquad \frac{1}{r^n} = \frac{1}{(z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{n+2}^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Dans le cas particulier où $n = 0$, c'est

$$(11') \qquad \operatorname{Log} r = \operatorname{Log}\sqrt{z_1^2 + z_2^2}.$$

Théorème de Lord Kelvin. — *Si la fonction*

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_{n+2})$$

est solution de l'équation de Laplace, il en est de même de la fonction

$$(12) \qquad \frac{1}{r^n} F\left(k^2 \frac{z_1}{r^2}, \ldots, k^2 \frac{z_{n+2}}{r^2}\right).$$

Ce résultat est une conséquence immédiate de la formule (10).

V. — Coordonnées sphériques.

Nous aurons souvent à faire usage du système de coordonnées

([1]) *Cf* F.-G. Mehler, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, t. LXVI, 1866, p. 161.

suivant :

$$(13)\qquad \begin{cases} z_1 \;\;\;= r x_1, \\ z_2 \;\;\;= r x_2, \\ \dots\dots\dots, \\ z_n \;\;\;= r x_n, \\ z_{n+1} = r\sqrt{X_n}\cos\varphi & (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi), \\ z_{n+2} = r\sqrt{X_n}\sin\varphi & (X_n = 1 - x_1^2 - \dots - x_n^2 \geqq 0). \end{cases}$$

Si l'on désigne par P le point de coordonnées $z_1, \dots, z_{n+2}$, on voit que

$$x_1 = \cos(\widehat{OZ_1 . OP}), \qquad x_2 = \cos(\widehat{OZ_2 . OP}), \qquad \dots, \qquad x_n = \cos(\widehat{OZ_n . OP}).$$

Dans ce système, l'hypersphère S a encore pour équation

$$r^2 = 1.$$

L'élément d'arc est donné par l'expression

$$ds^2 = dr^2 + r^2\left[(dx_1^2 + \dots + dx_n^2) + \frac{(x_1\,dx_1 + \dots + x_n\,dx_n)^2}{X_n}\right] + r^2 X_n\,d\varphi^2.$$

L'élément de volume a pour valeur

$$d\tau = r^{n+1}\,dr\,d\omega, \qquad \text{où} \qquad d\omega = dx_1 \dots dx_n\,d\varphi.$$

Pour obtenir l'expression de l'opérateur de Laplace dans ce système de coordonnées, on peut partir de la formule (4); en supposant que $x_1, \dots, x_n$ correspondent respectivement à $u_1, \dots, u_n$ et r à u_{n+1}, φ à u_{n+2}, on voit facilement que :

$$D = r^{n+1},$$

$$\begin{array}{llllll}
E_{11} = \dfrac{1 - x_1^2}{r^2}, & E_{12} = -\dfrac{x_1 x_2}{r^2}, & \dots, & E_{1n} = -\dfrac{x_1 x_n}{r^2}, & E_{1,n+1} = 0, & E_{1,n+2} = 0; \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots; \\
E_{n1} = -\dfrac{x_n x_1}{r^2}, & E_{n,2} = -\dfrac{x_n x_2}{r^2}, & \dots, & E_{nn} = \dfrac{1 - x_n^2}{r^2}, & E_{n,n+1} = 0, & E_{n,n+2} = 0; \\
E_{n+1,1} = 0, & & & E_{n+1,n} = 0, & E_{n+1,n+1} = 1, & E_{n+1,n+2} = 0; \\
E_{n+2,1} = 0, & & & E_{n+2,n} = 0, & E_{n+2,n+1} = 0, & E_{n+2,n+2} = \dfrac{1}{r^2 X_n}.
\end{array}$$

Donc

$$(14)\quad r^2\Delta^2 F = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1}\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{X_n}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial F}{\partial x_k} - x_k\left(x_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)\right].$$

VI. — Polynomes harmoniques.

Parmi les solutions de l'équation de Laplace :

$$\Delta^2 F = 0,$$

celles qui sont des polynomes jouent un rôle très important. L'étude de ces solutions, qui sont les plus simples et dont on peut déduire toutes les autres, doit donc être à la base de la théorie des fonctions harmoniques. C'est ce qui avait été fait, et d'une manière approfondie, pour le cas de trois variables, depuis les recherches classiques de Laplace et de Legendre ([1]). Nous nous proposons dans le présent travail de rechercher comment ces résultats peuvent s'étendre à un nombre quelconque de variables.

Soit

$$\Pi_\mu(z_1, z_2, \ldots, z_{n+2})$$

un polynome homogène d'un degré μ donné ($\mu \geqq 0$) :

$$\Pi_\mu(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_{n+2}) = \lambda^\mu \Pi_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}).$$

Ce polynome contient

$$N_1 = \frac{(\mu+1, n+1)}{(1, n+1)} \text{ termes.}$$

L'expression $\Delta^2\Pi_\mu$ est un polynome homogène de degré $\mu - 2$ qui

---

([1]) Pour tout ce qui concerne les fonctions harmoniques à trois variables, *voir* dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, vol. V, fasc. 2, p. 155, l'article de A. Wangerin, rédigé en français par A. Lambert.

contient

$$N_2 = \frac{(\mu-1,\, n+1)}{(1,\, n+1)} \text{ termes.}$$

Pour que Π_μ soit un polynome harmonique, il faut donc que les N_2 coefficients du polynome $\Delta^2\Pi_\mu$ soient nuls. Or les coefficients du polynome $\Delta^2\Pi_\mu$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des coefficients du polynome Π_μ. Ces derniers sont donc liés par N_2 équations.

Le nombre des coefficients arbitraires dans le polynome Π_μ est donc

$$N = N_1 - N_2 = \frac{(\mu+1,\, n+1) - (\mu-1,\, n+1)}{(1,\, n+1)}$$

$$= \frac{(\mu+1,\, n-1)}{(1,\, n)}(2\mu+n).$$

En choisissant arbitrairement l'un de ces N coefficients et en donnant aux autres, au nombre de $N-1$, la valeur zéro, tous les coefficients du polynome Π_μ se trouvent alors déterminés en écrivant que les N_2 coefficients de $\Delta^2\Pi_\mu$ sont nuls. Comme en renouvelant cette opération pour l'un quelconque des N coefficients arbitraires on obtient chaque fois un nouveau polynome harmonique, on peut énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Il y a*

$$N = \frac{(\mu+1,\, n-1)}{(1,\, n)}(2\mu+n) \tag{15}$$

polynomes harmoniques homogènes d'un degré μ donné :

$$\Pi_\mu(z_1, z_2, \ldots, z_{n+2})$$

linéairement indépendants.

Pour $n=1$, en se rappelant la définition donnée (p. 2) de (λ, k) :

$$(\lambda, 0) = 1,$$

cette formule devient

$$N = 2\mu + 1,$$

ce qui est un fait bien connu.

Soit Π_μ l'un de ces polynomes harmoniques homogènes. Supposons que l'on passe des coordonnées cartésiennes $z_1, \ldots, z_{n+2}$ aux coordonnées polaires $r, \theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi$ définies par les formules (9). A cause de l'homogénéité, le polynome Π_μ contiendra r^μ en facteur; on pourra le mettre sous la forme

$$\Pi_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = r^\mu Y_\mu(\theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi).$$

On peut considérer la fonction Y_μ comme la valeur que prend le polynome Π_μ quand le point de coordonnées $(z_1, \ldots, z_{n+2})$ vient sur l'hypersphère S. C'est par définition *une fonction hypersphérique.*

Cette fonction est d'ailleurs, d'après sa définition même, un polynome par rapport aux variables $\sin\theta_1$ et $\cos\theta_1$, $\sin\theta_2$ et $\cos\theta_2$, ..., $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$.

Comme Π_μ vérifie l'équation

$$\Delta^2 \Pi_\mu = 0,$$

on voit immédiatement, d'après la formule (10), que

$$Y_\mu(\theta_1, \ldots, \varphi)$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned}(16)\quad & \mu(\mu+n)Y_\mu + \frac{1}{\sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_n}\frac{\partial^2 Y_\mu}{\partial\varphi^2} \\ & + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sin^2\theta_1 \ldots \sin^2\theta_{k-1}\sin^{n+1-k}\theta_k}\frac{\partial}{\partial\theta_k}\left(\sin^{n+1-k}\theta_k \frac{\partial Y_\mu}{\partial\theta_k}\right) = 0.\end{aligned}$$

En partant de cette équation aux dérivées partielles, M.-J.-M. Hill (1) a cherché à déterminer des fonctions hypersphériques de la forme

$$(17)\qquad Y_\mu = \sin^{p_1}\theta_1.\Theta_1 \ldots \sin^{p_k}\theta_k.\Theta_k \ldots \sin^{p_n}\theta_n.\Theta_n \begin{bmatrix}\cos \\ \sin\end{bmatrix} p_n\varphi \Big],$$

où Θ_k est une fonction de l'angle θ_k seulement.

Il a montré que l'équation (16) est satisfaite, si Θ_k vérifie l'équa-

(1) M.-J.-M. Hill, *On functions of more than two variables analogous to Tesseral Harmonics* (*Trans. of the Cambr. philos. Society*, t. XIII, 1883, p. 273).

tion

$$\sin^2\theta_k \frac{d^2\Theta_k}{d\theta_k^2} + (2p_k + n - k + 1)\sin\theta_k\cos\theta_k \frac{d\Theta_k}{d\theta_k}$$
$$+ (p_{k-1} - p_k)(p_{k-1} + p_k + n - k + 1)\sin^2\theta_k\,\Theta_k = 0$$

ou en posant

$$\cos\theta_k = \xi_k,$$

$$(1 - \xi_k^2)\frac{d^2\Theta_k}{d\xi_k^2} - (2p_k + n - k + 2)\xi_k \frac{d\Theta_k}{d\xi_k}$$
$$+ (p_{k-1} - p_k)(p_{k-1} + p_k + n - k + 1)\Theta_k = 0.$$

En se basant sur cette dernière équation, M. Hill ramène la fonction Θ_k aux fonctions qui se rencontrent dans la théorie du potentiel ordinaire ($n = 1$). Cependant les résultats auxquels il parvient ne donnent pas de grands renseignements sur la structure des fonctions hypersphériques. Nous n'insisterons donc pas sur cette méthode.

Néanmoins, indiquons encore un Mémoire de H.-E. Heine (¹) où cet auteur met la fonction hypersphérique Y_μ sous la forme

$$Y_\mu = I_{p_1}^{\mu}[n+1.\ \cos\theta_1]\, I_{p_2}^{p_1}[n, \cos\theta_2]\ldots I_{p_n}^{p_{n-1}}[2, \cos\theta_n]\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix} p_n\varphi,$$

où (²) l'on a posé

$$I_\beta^\alpha[\gamma, \xi] = (\xi^2 - 1)^{\frac{\beta}{2}} \frac{d^\beta}{d\xi^\beta}[I^\alpha(\gamma, \xi)],$$

la fonction $I^\alpha(\gamma, \xi)$ étant à son tour définie comme le coefficient de λ^α dans le développement de

$$(1 - 2\lambda\xi + \lambda^2)^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

Abandonnant donc les coordonnées polaires pour faire l'étude des fonctions sphériques généralisées, nous emploierons les coordonnées définies par les formules (13) sous le nom de *coordonnées sphériques*. Ce sont elles, en effet, qui nous ont paru donner les résultats les plus symétriques, en permettant d'utiliser les beaux polynomes à plusieurs

---

(¹) H.-E. HEINE, *Die speciellen Lameschen Functionen erster Art von beliebiger Ordnung* (*J. reine angew. Math.*, t. LXVII, 1863, p. 110).

(²) Nous avons adapté les notations de l'auteur aux nôtres.

variables introduits dans l'Analyse par Hermite et généralisant directement les polynomes de Legendre.

Faisons dans le polynome harmonique homogène

$$\Pi_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2})$$

le changement de variables (13) :

$$\Pi_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = r^\mu \Pi_\mu(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{X_n}\cos\varphi, \sqrt{X_n}\sin\varphi).$$

La fonction

$$\Pi_\mu(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{X_n}\cos\varphi, \sqrt{X_n}\sin\varphi),$$

qui est la valeur que prend le polynome harmonique $\Pi_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2})$ quand le point $(z_1, \ldots, z_{n+2})$ vient sur l'hypersphère S, est *une fonction hypersphérique.*

C'est d'ailleurs un polynome homogène et de degré μ par rapport aux variables

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \sqrt{X_n}\cos\varphi, \quad \sqrt{X_n}\sin\varphi.$$

Si l'on remarque que ces deux dernières quantités peuvent se mettre sous la forme

$$\sqrt{X_n}\,\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{X_n}\,\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i},$$

on voit immédiatement, par une simple application de la formule de Taylor, que Π_μ a pour expression générale

$$(18) \quad \Pi_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = r^\mu \sum_{k=0}^{k=+\mu} X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)\,[A_k e^{ki\varphi} + B_k e^{-ki\varphi}],$$

où $Z_\mu^{(k)}$ désigne un polynome en $x_1, \ldots, x_n$, A_k et B_k des constantes.

Toute la question est donc ramenée à l'étude des polynomes

$$Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$$

et d'abord à leur formation effective.

Nous nous proposons de rechercher les polynomes harmoniques *homogènes de la forme*

$$\Pi_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = r^\mu X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)\, e^{\pm k\iota\varphi}.$$

La formule (18) montre en effet qu'on peut en déduire tous les autres; car le polynome harmonique le plus général homogène du degré μ se réduit, d'après (18), à une combinaison linéaire à coefficients constants de ces polynomes spéciaux.

Nous pouvons, sans aller plus loin, nous faire une idée de la forme de ces polynomes spéciaux; les formules (13) du changement de variables donnent en effet :

$$(19) \qquad \begin{cases} r\sqrt{X_n}\, e^{\iota\varphi} = z_{n+1} + i z_{n+2}, \\ r\sqrt{X_n}\, e^{-i\varphi} = z_{n+1} - i z_{n+2}. \end{cases}$$

D'où

$$r^k X_n^{\frac{k}{2}} e^{\pm k\iota\varphi} = (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k.$$

Le polynome Π_μ sera donc de la forme

$$\begin{aligned} \Pi_\mu &= r^\mu X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)\, e^{\pm k\iota\varphi} \\ &= (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k\, \Pi'(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2), \end{aligned}$$

où Π' est lui-même un polynome par rapport aux arguments qui y figurent.

Entre Π' et $Z_\mu^{(k)}$, on a la relation

$$(20) \qquad \Pi'(rx_1, \ldots, rx_n, r^2 X_n) = r^{\mu-k} Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Quand il s'agira plus loin de former effectivement les fonctions hypersphériques, nous ferons usage de la relation (20).

Nous pouvons encore écrire immédiatement une équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire $Z_\mu^{(k)}$.

La fonction

$$\Pi_\mu = r^\mu X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)}\, e^{\pm k\iota\varphi}$$

vérifie l'équation

$$\Delta^2 \Pi_\mu = 0.$$

Donc, d'après l'expression (14) de $\Delta^2 F$ dans le système de coordonnées,

$$r, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \varphi,$$

on a, en supprimant le facteur $r^{\mu} e^{\pm k i \varphi}$ et posant un instant pour abréger,

$$\mathrm{R} = \mathrm{X}_n^{\frac{k}{2}} \mathrm{Z}_{\mu}^{(k)},$$

$$(21) \quad \left[\mu(\mu+n) - \frac{k^2}{\mathrm{X}_n}\right]\mathrm{R} + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_n}\right)\right] = 0.$$

Par un calcul élémentaire, on voit que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x_n}\right) \\ &\quad = \mathrm{X}_n^{\frac{k}{2}}\left[\frac{\partial \mathrm{Z}_{\mu}^{(k)}}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial \mathrm{Z}_{\mu}^{(k)}}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial \mathrm{Z}_{\mu}^{(k)}}{\partial x_n} + k \mathrm{Z}_{\mu}^{(k)}\right)\right]. \end{aligned}$$

Donc, en supprimant le facteur $\mathrm{X}_n^{\frac{k}{2}-1}$ et en posant

$$\mathrm{S} = \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x_n} + k\mathrm{Z}\right),$$

on a une première forme de l'equation à laquelle satisfait la fonction

$$\mathrm{Z}_{\mu}^{(k)}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$(22) \qquad [\mu(\mu+n)\mathrm{X}_n - k^2]\mathrm{Z} + \sum_{j=1}^{j=n}\left(\mathrm{X}_n \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_j} - k x_j \mathrm{S}\right) = 0.$$

On peut d'ailleurs simplifier notablement cette équation. En effet,

$$-\sum x_j \mathrm{S} = (1 - \mathrm{X}_n)\left(x_1 \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x_n} + k\mathrm{Z}\right) - \left(x_1 \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x_n}\right).$$

Si l'on porte cette valeur dans l'equation (22), on voit que X_n se met en facteur; après des reductions evidentes et la suppression du facteur X_n, on arrive à la forme definitive :

$$(23) \quad (\mu+k)(\mu-k+n)\mathrm{Z} + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x_n} + 2k\mathrm{Z}\right)\right] = 0.$$

A partir de cette équation aux dérivées partielles, on pourrait mettre en évidence plusieurs propriétés des fonctions hypersphériques, car elle est du type des équations hypergéométriques à plusieurs variables introduites dans l'Analyse par M. Paul Appell (¹); nous rejetons cependant cette étude à une autre partie du présent travail.

Néanmoins nous ferons encore sur les fonctions harmoniques

$$r^{\mu} X_n^{\frac{k}{2}} Z_{\mu}^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)\, e^{\pm ik\varphi},$$

quelques remarques qui nous suggéreront immédiatement l'ordre même dans lequel nous devons les étudier.

On voit que la forme d'un polynome harmonique homogène de ce type, une fois le degré μ donné, dépend encore d'un entier k.

Nous dirons que k est l'ordre du polynome.

Si $k = 0$,

$$\Pi_{\mu} = r^{\mu} Z_{\mu}^{(0)}(x_1, \ldots, x_n), \tag{24}$$

la fonction hypersphérique ne dépend pas de φ; nous dirons, en généralisant une locution commode des géomètres anglais, que

$$Z_{\mu}^{(0)}(x_1, \ldots, x_n)$$

est une *fonction hypersphérique zonale;* il est à remarquer d'ailleurs que cette fonction se réduit ici à un polynome par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$. C'est pourquoi nous la désignerons quelquefois sous le nom de *polynome zonal.*

Dans l'autre cas extrême ($k = \mu$),

$$\Pi_{\mu} = r^{\mu} X_n^{\frac{\mu}{2}} Z_{\mu}^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n)\, e^{\pm \mu i\varphi}, \tag{25}$$

le coefficient de r^{μ} est ce qu'on peut nommer une *fonction hypersphérique sectoriale;* d'ailleurs ici le polynome $Z_{\mu}^{(\mu)}$ se réduit nécessairement à une constante; car d'après la formule (19) :

$$r^{\mu} X_n^{\frac{\mu}{2}} e^{\pm \mu i\varphi} = (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^{\mu};$$

(¹) P. Appell, *Journal de Math. pures et appl.*, 3ᵉ série, t. VIII, 1882, p. 173.

comme Π_μ est un polynome homogène de degré μ, la seule hypothèse possible est

$$Z_\mu^{(\mu)} = A.$$

Il est d'ailleurs bien connu que la fonction

$$\Pi_\mu = A(z_{n+1} \pm i z_{n+2})^\mu$$

satisfait quel que soit μ à l'équation

$$\Delta^2 \Pi_\mu = 0.$$

Dans les cas intermédiaires ($k \neq 0$ et $k \neq \mu$),

$$\Pi_\mu = r^\mu X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n) e^{\pm k i \varphi},$$

nous désignerons le coefficient de r^μ sous le nom de *fonction hypersphérique tessérale*. Le polynome $Z_\mu^{(k)}$ sera un polynome tesséral d'ordre k.

De l'étude précédente il ressort qu'un polynome harmonique de degré μ et d'ordre k est de la forme

$$r^\mu X^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)} e^{\pm k i \varphi} = \Pi_{\mu-k}(z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k, \tag{26}$$

où $\Pi_{\mu-k}$ est un polynome homogène et de degré $\mu - k$ par rapport aux variables $z_1, \ldots, z_{n+2}$ et en outre ne dépend de z_{n+1} et z_{n+2} que par l'intermédiaire de

$$z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2.$$

Nous sommes donc conduits à nous poser la question suivante : quelle est la forme la plus générale d'un polynome harmonique de degre μ et d'ordre k, et combien y a-t-il de tels polynomes qui soient lineairement independants?

On peut mettre le polynome $\Pi_{\mu-k}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha = {} & \psi_\alpha(z_1, \ldots, z_n) \\ & + r^2 \psi_{\alpha-2}(z_1, \ldots, z_n) + \ldots + r^{2j} \psi_{\alpha-2j}(z_1, \ldots, z_n) + \ldots, \end{aligned} \tag{27}$$

où $\alpha = \mu - k$; ψ_α, $\psi_{\alpha-2}$, ..., $\psi_{\alpha-2j}$, ... désignant des polynomes respectivement de degrés α, $\alpha - 2$, ..., $\alpha - 2j$, homogènes par rapport à z_1, ..., z_n.

Exprimons que la fonction

$$\Omega = \Pi_\alpha (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k$$

vérifie l'équation

$$\Delta^2 \Omega = 0.$$

Comme

$$\Delta^2 \Omega = (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k \Delta^2 \Pi_\alpha + 2k (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^{k-1} \left(\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_{n+1}} \pm i \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_{n+2}} \right),$$

en supprimant le facteur $(z_{n+1} \pm i z_{n+2})^{k-1}$, on doit avoir

$$(28) \qquad (z_{n+1} \pm i z_{n+2}) \Delta^2 \Pi_\alpha + 2k \left(\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_{n+1}} \pm i \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_{n+2}} \right) = 0.$$

De l'expression (27) de Π_α on tire :

$$(29) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_{n+1}} \pm i \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_{n+2}} \\ &\quad = (z_{n+1} \pm i z_{n+2}) [2 \psi_{\alpha-2} + 2.2 r^2 \psi_{\alpha-4} + \ldots + 2j r^{2j-2} \psi_{\alpha-2j} + \ldots]. \end{aligned}$$

Pour calculer $\Delta^2 \Pi_\alpha$ nous allons chercher l'expression de

$$\Delta^2 (r^{2j} \psi_{\alpha-2j}).$$

En appliquant les règles élémentaires pour la dérivation d'un produit, on a d'abord

$$\Delta^2 (r^{2j} \psi_{\alpha-2j}) = r^{2j} \Delta^2 \psi_{\alpha-2j} + 4j r^{2j-2} \left(z_1 \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + \ldots + z_n \frac{\partial \psi}{\partial z_n} \right) + \psi_{\alpha-2j} \Delta^2 (r^{2j}).$$

D'après la formule (14), on a de suite

$$r^2 \Delta^2 (r^{2j}) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} (2j r^{n+2j}) = 2j(n+2j) r^{2j}.$$

Comme, d'après sa définition, $\psi_{\alpha-2j}$ est homogène de degré $\alpha - 2j$ en z_1, ..., z_n, l'identité d'Euler donne

$$z_1 \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + \ldots + z_n \frac{\partial \psi}{\partial z_n} = (\alpha - 2j) \psi_{\alpha-2j}.$$

Donc

$$\Delta^2(r^{2j}\psi_{\alpha-2j}) = r^{2j}\Delta^2\psi_{\alpha-2j} + 2j(n+2\alpha-2j)r^{2j-2}\psi_{\alpha-2j}. \tag{30}$$

Portons les expressions (29) et (30) dans l'équation (28); nous obtenons, en supprimant le facteur commun $(z_{n+1} \pm iz_{n+2})$,

$$\begin{aligned}\{\Delta^2\psi_\alpha + [r^2\Delta^2\psi_{\alpha-2} + 2(n+2\alpha-2)\psi_{\alpha-2}] + \ldots\} \\ + 4k[\psi_{\alpha-2} + 2r^2\psi_{\alpha-4} + \ldots] = 0.\end{aligned}$$

En ordonnant cette équation par rapport à r^2, elle s'écrit

$$\begin{aligned}0 = [\Delta^2\psi_\alpha + 2(n+2\alpha+2k-2)\psi_{\alpha-2}] + \ldots \\ + r^{2j-2}[\Delta^2\psi_{\alpha-2j+2} + 2j(n+2\alpha+2k-2j)\psi_{\alpha-2j}] + \ldots.\end{aligned}$$

Cette équation est satisfaite, si les polynomes

$$\psi_\alpha, \quad \psi_{\alpha-2}, \quad \ldots, \quad \psi_{\alpha-2j}$$

vérifient respectivement les équations :

$$\begin{aligned}&\Delta^2\psi_\alpha + 2(n+2\alpha+2k-2)\psi_{\alpha-2} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\Delta^2\psi_{\alpha-2j+2} + 2j(n+2\alpha+2k-2j)\psi_{\alpha-2j} = 0.\end{aligned}$$

Le polynome ψ_α étant homogène et de degré α en $z_1, \ldots, z_n$, $\Delta^2\psi_\alpha$ est homogène de degré $\alpha - 2$; on voit donc que laissant ψ_α arbitraire on peut déterminer $\psi_{\alpha-2}$ par la relation

$$\psi_{\alpha-2} = \frac{1}{2^2}\,\frac{\Delta^2\psi_\alpha}{1\left(-\frac{n}{2}-\alpha-k+1\right)}$$

et, en général,

$$\psi_{\alpha-2j} = \frac{1}{2^2}\,\frac{\Delta^2\psi_{\alpha-2j+2}}{j\left(-\frac{n}{2}-\alpha-k+j\right)}. \tag{31}$$

En remplaçant ici $\psi_{\alpha-2j+2}$ par sa valeur en fonction de $\Delta^2\psi_{\alpha-2j+4}$ et ainsi de suite, on arrive à l'expression

$$\psi_{\alpha-2j} = \frac{1}{2^{2j}}\,\frac{\Delta^{2j}\psi_\alpha}{(1,j)\left(-\frac{n}{2}-\alpha-k+1,j\right)}, \tag{31'}$$

où Δ^{2j} est le symbole défini par la formule (3); ici

$$\Delta^{2j}\psi_\alpha = \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^2\right]^j \psi_\alpha,$$

puisque ψ_α ne dépend pas de z_{n+1} et z_{n+2}.

Nous tirons enfin, des formules (31′), l'expression cherchée de Π_α

$$\text{(32)} \qquad \Pi_\alpha = \psi_\alpha(z_1, \ldots, z_n) + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \frac{\Delta^2\psi_\alpha(z_1, \ldots, z_n)}{1\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1\right)} + \ldots + \left(\frac{r}{2}\right)^{2j} \frac{\Delta^{2j}\psi_\alpha}{(1, j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \ldots,$$

où, dans les parenthèses $\left(-\frac{n}{2} - \alpha - k + 1, j\right)$, on a remplacé $\alpha + k$ par sa valeur μ.

Ce développement se réduit bien à un polynome; en effet, si α est un nombre pair, il se termine par le terme en

$$r^\alpha \Delta^\alpha \psi_\alpha;$$

si α est un nombre impair,

$$r^{\alpha-1} \Delta^{\alpha-1} \psi_\alpha.$$

Nous parvenons donc au résultat suivant : *un polynome harmonique homogène de degré μ et d'ordre k peut se mettre sous la forme*

$$\text{(33)} \quad \Pi_\mu = (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k \times \left[\psi_\alpha(z_1, \ldots, z_n) + \ldots + \left(\frac{r}{2}\right)^{2j} \frac{\Delta^{2j}\psi_\alpha(z_1, \ldots, z_n)}{(1, j)\left(+\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \ldots\right],$$

où ψ_α désigne un polynome homogène arbitraire de degré $\alpha = \mu - k$.

Cette dernière propriété permet de résoudre immédiatement la question posée page 18, relativement au nombre $N^{(k)}$ des polynomes d'ordre k linéairement indépendants.

Pour $k \neq 0$, le polynome ψ_α une fois choisi, on obtient deux polynomes Π_α distincts, selon que l'on prend le signe $+$ ou le signe $-$

devant iz_{n+2}. Le nombre des coefficients de ψ_α étant celui des combinaisons complètes de n lettres α à α :

$$(34) \qquad \mathrm{N}^{(k)} = 2\,\mathrm{K}_n^\alpha = 2\,\frac{(n,\,\alpha)}{(1,\,\alpha)} = 2\,\frac{(n,\,\mu-k)}{(1,\,\mu-k)} \qquad (k \neq 0).$$

En particulier, pour $k=\mu$, $\mathrm{N}^{(\mu)}=2$, la formule (33) donne les deux polynomes

$$(z_{n+1}+i\,z_{n+2})^\mu \quad \text{et} \quad (z_{n+1}-i\,z_{n+2})^\mu,$$

trouvés directement par la formule (25).

Pour $k=0$, on a simplement

$$(34') \qquad \mathrm{N}^{(0)} = \mathrm{K}_n^\mu = \frac{(n,\,\mu)}{(1,\,\mu)}.$$

Comme vérification, on doit trouver

$$\mathrm{N}^{(0)} + \ldots + \mathrm{N}^{(k)} + \ldots + \mathrm{N}^{(\mu)} = \mathrm{N},$$

N désignant le nombre total des polynomes harmoniques de degré μ défini par la formule (15).

Or

$$\mathrm{K}_n^\alpha = \mathrm{C}_{n+\alpha-1}^{n-1};$$

donc

$$\mathrm{N}^{(1)} + \ldots + \mathrm{N}^{(\mu)} = 2\left[\mathrm{C}_{n+\mu-2}^{n-1} + \ldots + \mathrm{C}_{n-1}^{n-1}\right] = 2\,\mathrm{C}_{n+\mu-1}^{n},$$

d'après une formule d'Analyse combinatoire bien connue.

D'où

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= \mathrm{C}_{n+\mu-1}^{n-1} + 2\,\mathrm{C}_{n+\mu-1}^{n} \\ &= \frac{(n+\mu-1)\ldots(\mu+1)}{1.2\ldots(n-1)} + 2\,\frac{(n+\mu-1)\ldots\mu}{1.2\ldots n} \\ &= \frac{(n+\mu-1)\ldots(\mu+1)}{1.2\ldots n}(2\mu+n) \\ &= \frac{(\mu+1,\,n-1)}{(1,\,n)}(2\mu+n), \end{aligned}$$

expression identique à celle que nous avons déjà trouvée (p. 11) pour le nombre total des polynomes harmoniques homogènes de degré μ linéairement indépendants (¹).

Des résultats obtenus jusqu'ici on peut tirer quelques renseignements sur les polynomes tesséraux $Z_\mu^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$ définis pages 17-18.

Dans l'expression (33) de Π_μ passons des coordonnées cartésiennes z aux coordonnées sphériques (13) : $r, x_1, \ldots, x_n, \varphi$. Comme le polynome

$$\Delta^{2j}\psi_\alpha(z_1, \ldots, z_n)$$

est homogène de degré $\alpha - 2j$ en $z_1, \ldots, z_n$; quand on aura effectué le changement de variables, il contiendra $r^{\alpha-2j}$ en facteur :

$$\Delta^{2j}\psi_\alpha(z_1, \ldots, z_n) = r^{\alpha-2j}\,\overline{\Delta^{2j}}\,\psi_\alpha(x_1, \ldots, x_n),$$

où, dans le second membre, nous avons posé

$$(35)\quad \overline{\Delta^{2j}}\,\psi_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2\right]^j \psi_\alpha(x_1, \ldots, x_n).$$

La partie de Π_μ qui est entre crochets contient donc $r^\alpha = r^{\mu-k}$ en facteur; si l'on se souvient que, d'après (19),

$$(z_{n+1} \pm i\, z_{n+2})^k = r^k X_n^{\frac{k}{2}} e^{\pm ki\varphi},$$

l'expression (33) du polynome harmonique de degré μ et d'ordre k devient

$$(36)\quad \Pi_\mu = r^\mu X_n^{\frac{k}{2}} e^{\pm ki\varphi} \times \left[\psi_\alpha(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \frac{\overline{\Delta^{2j}}\,\psi_\alpha(x_1, \ldots, x_n)}{(1, j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \ldots\right].$$

D'après les définitions mêmes posées page 18, nous en tirons

(¹) Pour déterminer la forme et le nombre des polynomes harmoniques à trois variables ($n = 1$), A. Clebsch a suivi une marche analogue à celle des pages précédentes : *Ueber eine Eigenschaft der Kugelfunctionen* (*J. f. reine und angew. Math.*, t. LX, p. 343). Clebsch n'a d'ailleurs traité le cas que des polynomes d'ordre zéro : $k = 0$.

l'expression suivante du polynome tesséral :

$$(37)\qquad Z_\mu^{(k)} = \left[\psi_\alpha(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \frac{1}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}\psi_\alpha(x_1, \ldots, x_n)}{(1, j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \ldots\right],$$

où ψ_α est un polynome arbitraire homogène de degré $\alpha = \mu - k$ en $x_1, \ldots, x_n$.

Quant au polynome $Z_\mu^{(k)}$, cette formule montre immédiatement qu'il n'est pas homogène en $x_1, \ldots, x_n$. Ses termes du plus haut degré sont de degré α.

Si α est pair, il se termine par la constante

$$\frac{1}{2^\alpha} \frac{\Delta^\alpha \psi_\alpha}{\left(1, \frac{\alpha}{2}\right)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Si α est impair, par le polynome du premier degré

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} \frac{\Delta^{\alpha-1}\psi_\alpha}{\left(1, \frac{\alpha-1}{2}\right)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, \frac{\alpha-1}{2}\right)}.$$

Les coefficients de ψ_α une fois fixés, on n'en déduit qu'un seul polynome tesséral; le nombre des polynomes $Z_\mu^{(k)}$ linéairement indépendants est donc

$$(38)\qquad M^{(k)} = K_n^\alpha = \frac{(n, \mu - k)}{(1, \mu - k)}.$$

Le nombre total des polynomes tesséraux de degré μ et d'ordre $0, 1, \ldots, \mu$ linéairement indépendants est

$$(39)\quad M = K_i^\mu + K_n^{\mu-1} + \ldots + K_n^0 = C_{n+\mu-1}^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^{n-1} = C_{n+\mu}^n = \frac{(\mu + 1, n)}{(1, n)}.$$

Remarques. — I. Dans tout ce qui précède, nous avons pris pour polynomes harmoniques fondamentaux

$$r^\mu X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)} e^{+ki\varphi} \quad \text{et} \quad r^\mu X_n^{\frac{k}{2}} Z_\mu^{(k)} e^{-ki\varphi};$$

il est bien évident que nous aurions pu partir de

$$r^{\mu} X_n^{\frac{k}{2}} Z_{\mu}^{(k)} \cos k\varphi \quad \text{et} \quad r^{\mu} X_n^{\frac{k}{2}} Z_{\mu}^{(k)} \sin k\varphi$$

qui sont des combinaisons linéaires des autres polynomes.

II. Nous avons constamment désigné les polynomes

$$\Pi_{\mu} = r^{\mu} X_n^{\frac{k}{2}} Z_{\mu}^{(k)} e^{\pm k i\varphi}$$

sous le nom de *polynomes harmoniques;* en effet, en tout domaine T, qui ne s'étend pas à l'infini, ces polynomes satisfont bien à la définition générale des fonctions harmoniques rappelée page 7.

Or, il nous sera utile de connaître une fonction harmonique se réduisant sur S à la fonction hypersphérique $X_n^{\frac{k}{2}} Z_{\mu}^{(k)} e^{\pm k i\varphi}$, comme Π_{μ}, mais conservant une valeur finie à l'infini.

Le théorème de Lord Kelvin (12) montre que, Π_{μ} étant harmonique, il en est de même de

$$\text{(40)} \qquad \Pi'_{\mu} = \frac{1}{r^n} \Pi_{\mu}\left(\frac{z_1}{r^2}, \ldots, \frac{z_{n+2}}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{r^{n+2\mu}} \Pi_{\mu}(z_1, \ldots, z_{n+2}) = \frac{1}{r^{n+\mu}} X_n^{\frac{k}{2}} Z_{\mu}^{(k)} e^{\pm k i\varphi}.$$

C'est la fonction cherchée.

La fonction hypersphérique $X_n^{\frac{k}{2}} Z_{\mu}^{(k)} e^{\pm k i\varphi}$ peut donc être considérée, selon le cas, soit comme la valeur que prend sur S le polynome, harmonique à l'intérieur de S, $\Pi_{\mu}(z_1, \ldots, z_{n+2})$, soit comme la valeur que prend sur S la fonction, harmonique à l'extérieur de S,

$$\frac{1}{r^{n+2\mu}} \Pi_{\mu}(z_1, \ldots, z_{n+2}).$$

CHAPITRE II.

LA PREMIÈRE FONCTION GÉNÉRATRICE.

I.

Le but de ce Chapitre est d'esquisser une théorie générale de certains polynomes zonaux, dont la définition a été donnée par Hermite ([1]) dans une série de Notes présentées à l'Académie des Sciences, sur « quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables ».

« L'expression ([2])

$$1 - 2ax + a^2,$$

qui donne naissance aux fonctions de Legendre et aux formules trigonométriques pour la multiplication des arcs, d'après ces relations :

$$(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}} = \Sigma a^n X_n,$$

$$(1 - 2ax + a^2)^{-1} = \Sigma a^n \frac{\sin[(n+1)\operatorname{arc}\cos x]}{\sqrt{1 - x^2}},$$

se prête au mode de généralisation découvert par Göpel et M. Rosenhain pour passer des séries elliptiques de Jacobi aux fonctions abéliennes d'un nombre quelconque de variables. En comparant en effet ces deux expressions :

$$\Sigma\, e^{i\pi(2mx+m^2\omega)},$$

$$\Sigma\Sigma\, e^{i\pi(2mx+2ny+gm^2+2hmn+g'n^2)},$$

([1]) Ch. Hermite, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LX, 1er semestre 1865, p. 370-377, 432-440, 461-466, 512-518; ou *Œuvres de Ch. Hermite* (Paris, Gauthier-Villars, t. II, 1908). Nous désignerons ce dernier volume par H.

([2]) H., p. 320.

on est naturellement tenté de l'étendre de cette manière :

$$1 - 2ax - 2by + ga^2 + 2hab + g'b^2,$$

ou bien avec n variables $x, y, z, \ldots, u$:

$$1 - 2ax - 2by - \ldots - 2ku + \varphi(a, b, c, \ldots, k),$$

$\varphi(a, b, c, \ldots, k)$ étant un polynome homogène et du second degré en $a, b, c, \ldots, k$. »

Dans ces quelques pages [1], profondément empreintes du cachet d'élégance et de clarté qui distingue ses œuvres, Hermite définit des polynomes $V_{m,n}(x, y)$ par la relation

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1} = \Sigma a^m b^n V_{m,n}(x, y).$$

« Ce sont précisément ces polynomes, écrit-il dans une lettre [2] à M. Borchardt, qui m'ont donné la généralisation des fonctions de Legendre que je recherchais. » Mais nulle part l'illustre géomètre n'envisage si le lien, qui unit les polynomes de Legendre aux fonctions harmoniques à trois variables, persiste entre les polynomes $V_{m,n}(x, y)$ et les fonctions harmoniques dans l'espace à quatre dimensions. De sorte que le choix de la fonction génératrice elle-même garde une apparence arbitraire. Pourquoi est-ce l'expression

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1}$$

plutôt que celle-ci

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$$

qui généralise la fonction génératrice de Legendre :

$$(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}} ?$$

Hermite n'avait étudié que des polynomes à deux variables; sur son

---

(1) Son Mémoire occupe dans ses Œuvres les pages 319 à 346 du Tome II.

(2) H., p. 310.

inspiration, F. Didon [1] a envisagé le cas de p variables, sans d'ailleurs mettre en relief aucune idée essentiellement nouvelle; il a cependant découvert un système d'équations aux dérivées partielles auquel satisfont ses polynomes.

Un récent Mémoire [2] de M. P. Appell a jeté une lumière inattendue sur cette théorie, en montrant que « les polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite peuvent être considérés comme des fonctions sphériques déduites du potentiel dans l'espace à quatre dimensions ». Les polynomes à plusieurs variables définis par Didon se rattachent de même au potentiel dans l'espace à q dimensions.

Cette découverte faisait faire un grand pas à la théorie d'Hermite en la raccordant d'une facon intime à l'ensemble déjà imposant des recherches sur les fonctions harmoniques à un nombre quelconque de variables.

La présente étude, entreprise sur les conseils de M. Appell, en prenant pour base son Mémoire des *Rendiconti*, présente donc un double intérêt :

Résumer les résultats acquis par Hermite et en rechercher de nouveaux, en appliquant aux polynomes $V_{m_1, \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n)$ les théorèmes généraux exposés au Chapitre I;

Examiner inversement si ces polynomes n'offrent pas, dans l'étude des fonctions hypersphériques, l'instrument d'une grande souplesse qui manquait jusqu'alors pour faire de cette théorie l'équivalent réel de ce qu'elle est dans l'espace à trois dimensions, grâce aux polynomes de Legendre.

---

(1) F. Didon, *Étude de certaines fonctions analogues aux fonctions* X_n *de Legendre* (*Ann. scientif. de l'École Normale sup.*, 1re série, t. V, 1868, p. 229-310). — *Sur deux systèmes d'équations aux dérivées partielles* (*Ibid.*, t. VI, 1869, p. 7-25); *Sur une intégrale double* (*Ibid.*, t VII, 1870, p. 89-96); *Développements sur certaines séries de polynomes à un nombre quelconque de variables* (*Ibid.*, t. VII, 1870, p. 247-268). Nous désignerons ces quatre Mémoires par D_1, D_2, D_3, D_4.

(2) P. Appell, *Les polynomes* $V_{m,n}$ *d'Hermite et leurs analogues rattachés aux potentiels à q variables* (*Rend. del Circ. math. di Palermo*, t. XXXVI, 1913, p. 203-212). Ce Mémoire est résumé dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLVI, 1913, p. 1423.

II.

Comme on l'a rappelé au Chapitre I, formule (11), la fonction

$$\frac{1}{r^n} = [z_1^2 + \ldots + z_{n+2}^2]^{-\frac{n}{2}} \qquad (n \neq 0)$$

est une solution de l'équation de Laplace.

Il en est évidemment de même de la fonction

$$(41) \qquad F = [(z_1 - a_1)^2 + \ldots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]^{-\frac{n}{2}},$$

quelles que soient les constantes $a_1, \ldots, a_n$; supposons-les réelles :

Soient : P le point de coordonnées cartésiennes $z_1, \ldots, z_{n+2}$; A le point de coordonnées cartésiennes $a_1, \ldots, a_n$, o, o.

Dans tout domaine T qui ne contient pas le point A, la fonction F est harmonique.

Remplaçons les coordonnées cartésiennes z du point P par les coordonnées polaires $r, \theta_1, \ldots, \theta_n, \varphi$ et faisons un changement analogue pour les coordonnées a du point A :

$$(42) \qquad \begin{cases} a_1 = \lambda \cos\alpha_1, \\ a_2 = \lambda \sin\alpha_1 \cos\alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n = \lambda \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \ldots \sin\alpha_{n-1}. \end{cases}$$

Nous poserons, en outre,

$$(43) \qquad a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n = \lambda r \cos\gamma.$$

γ sera donc l'angle $\widehat{POA}$ et l'on aura

$$(44) \qquad \begin{cases} \cos\gamma = \cos\alpha_1 \cos\theta_1 + \sin\alpha_1 \sin\theta_1 \cos\gamma_1, \\ \cos\gamma_1 = \cos\alpha_2 \cos\theta_2 + \sin\alpha_2 \sin\theta_2 \cos\gamma_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \cos\gamma_{n-2} = \cos\alpha_{n-1} \cos\theta_{n-1} + \sin\alpha_{n-1} \sin\theta_{n-1} \cos\theta_n. \end{cases}$$

Avec ces notations,

$$(45)\qquad F = [r^2 - 2\lambda r\cos\gamma + \lambda^2]^{-\frac{n}{2}}$$
$$= \frac{1}{r^n}\left(1 - \frac{\lambda}{r}e^{i\gamma}\right)^{-\frac{n}{2}}\left(1 - \frac{\lambda}{r}e^{-i\gamma}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Sous cette forme, nous voyons que F est développable en une série uniformément convergente selon les puissances de $\frac{\lambda}{r}$ tant que

$$\left|\frac{\lambda}{r}\right| < 1.$$

Sous la forme (41) la fonction F sera donc développable selon les puissances des a_j tant que

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 < z_1^2 + \ldots + z_{n+2}^2.$$

En particulier, si nous supposons A intérieur à l'hypersphère S

$$\lambda^2 = a_1^2 + \ldots + a_n^2 < 1,$$

on aura le développement valable à l'extérieur de S et sur S même

$$(46)\qquad F = [(z_1 - a_1)^2 + \ldots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]^{-\frac{n}{2}}$$
$$= \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} W_{m_1, \ldots, m_n},$$

où, d'après la formule de Taylor [1],

$$(47)\qquad W_{m_1, \ldots, m_n} = \frac{(-1)^\mu}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \frac{\partial^\mu}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} \left(\frac{1}{r^n}\right).$$

Les fonctions W, ainsi définies, jouissent d'une importante propriété : étant les dérivées partielles de la fonction $\frac{1}{r^n}$, elles satisfont à l'équation de Laplace, d'après la relation évidente

$$\Delta^2\left[\frac{\partial^\mu}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}}\Omega\right] = \frac{\partial^\mu}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}}[\Delta^2\Omega].$$

[1] Dans tout ce qui suit, nous poserons constamment $m_1 + \ldots + m_n = \mu$.

Pour aller plus loin, il nous faut chercher l'expression effective des fonctions $W_{m_1,\ldots,m_n}$, ce que nous obtiendrons en généralisant un théorème donné par Hobson [1] dans le cas de trois variables ($n=1$).

III.

Soit

$$f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2})$$

un polynome homogène de degré μ en z. En employant la méthode symbolique bien connue, dont la définition est rappelée au Chapitre I (§ I), l'expression

$$f_\mu\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)\Phi(z_1, \ldots, z_{n+2})$$

a un sens bien défini.

Considérons, en particulier, la fonction

$$\Pi'_\mu = f_\mu\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)\frac{1}{r^n}.$$

D'après le principe rappelé au paragraphe précédent, c'est une fonction harmonique, quelle que soit f_μ.

Par induction, on voit qu'elle doit être de la forme

$$\Pi'_\mu = (-1)^\mu 2^\mu\left(\frac{n}{2}, \mu\right)\frac{1}{r^{n+2\mu}}[f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) + \ldots + r^{2j} f_{\mu-2j}(z_1, \ldots, z_{n+2}) + \ldots],$$

où les fonctions $f_{\mu-2j}$ qu'il s'agit de déterminer sont homogènes de degré $\mu - 2j$.

D'après la formule (40), on voit que si Π'_μ est harmonique il doit en être de même de

$$\Pi_\mu = f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) + \ldots + r^{2j} f_{\mu-2j}(z_1, \ldots, z_{n+2}).$$

---

(1) E.-W. Hobson, *On a Theorem in Differentiation and its application to Spherical Harmonics* (*Proceedings of the Mathematical Society of London*, t. XXIV, p. 55).

Or, en appliquant la formule (30) :

$$\Delta^2 \Pi_\mu = \Delta^2 f_\mu + [r^2 \, \Delta^2 f_{\mu-2} + 2\,(n + 2\mu - 2\,) f_{\mu-2}]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ [r^{2j} \Delta^2 f_{\mu-2j} + 2j(n + 2\mu - 2j)\, r^{2j-2} f_{\mu-2j}]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

Π_μ sera donc une fonction harmonique si l'on prend

$$f_{\mu-2j} = \frac{1}{2^2} \frac{\Delta^2 f_{\mu-2j+2}}{j\left(-\frac{n}{2} - \mu + j\right)}.$$

Nous en tirons l'importante formule de Hobson généralisée :

$$(48) \quad f_\mu\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)\frac{1}{r^n}$$
$$= (-1)^\mu 2^\mu \left(\frac{n}{2}, \mu\right) \frac{1}{r^{n+2\mu}}$$
$$\times \left[f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) + \ldots \left(\frac{r}{2}\right)^{2j} \frac{\Delta^{2j} f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2})}{(1,j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1 \,.\, j\right)} + \ldots \right].$$

Sur cette fonction harmonique particulière, on pourrait répéter tout ce qui a été dit page 21 sur Π_μ.

Nous nous contenterons d'en faire l'application suivante :

Soit

$$f_\mu = (z_{n+1} \pm i\, z_{n+2})^\mu;$$

comme $\Delta^2 f_\mu = \ldots = \Delta^{2j} f_\mu = 0$,

$$(49) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial z_{n+1}} \pm i \frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)^\mu \frac{1}{r^n} = (-1)^\mu 2^\mu \left(\frac{n}{2}, \mu\right) \frac{(z_{n+1} \pm i\, z_{n+2})^\mu}{r^{n+2\mu}}.$$

Nous utiliserons cette formule plus loin.

IV. — Expression des polynomes hypersphériques zonaux d'Hermite.

Les fonctions harmoniques

$$(47) \qquad W_{m_1, \ldots, m_n} = \frac{(-1)^\mu}{(1, m_1) \ldots (1, m_n)} \frac{\partial^\mu}{\partial z_1^{m_1} \ldots \partial z_n^{m_n}} \left(\frac{1}{r^n}\right)$$

rentrent comme cas particulier dans la formule (48), en prenant

$$f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = \frac{(-1)^\mu}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n}.$$

Donc

$$(50)\quad W_{m_1, \ldots, m_n} = 2^\mu \frac{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \frac{1}{r^{n+2\mu}}$$
$$\times\left[z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n} + \ldots + \left(\frac{r}{2}\right)^{2j} \frac{\Delta^{2j}(z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n})}{(1, j)\left(-\frac{n}{2}-\mu+1, j\right)} + \ldots\right].$$

Relativement au nom de *fonction harmonique* appliqué à $W_{m_1,\ldots,m_n}$ il faut faire la même restriction que page 25; la fonction conjuguée qui reste harmonique pour $r = 0$ est, d'après (40),

$$(51)\qquad \mathfrak{W}_{m_1,\ldots,m_n} = r^{n+2\mu} W_{m_1,\ldots,m_n};$$

elle a pour fonction génératrice

$$\frac{1}{r^n} \frac{1}{\left[\left(\frac{z_1}{r^2}-a_1\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z_n}{r^2}-a_n\right)^2 + \frac{z_{n+1}^2+z_{n+2}^2}{r^4}\right]^{\frac{n}{2}}} = \Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n} \mathfrak{W}_{m_1,\ldots,m_n}.$$

Si maintenant nous passons dans W des coordonnées z aux coordonnées sphériques (13), comme nous l'avons fait dans le cas général par la formule (36), nous aurons

$$(52)\qquad W_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{1}{r^{n+\mu}} V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

où

$$V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n) = 2^\mu \frac{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)}$$
$$\times\left[x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n} + \ldots + \frac{1}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n})}{(1, j)\left(-\frac{n}{2}-\mu+1, j\right)} + \ldots\right].$$

D'après nos définitions, $V_{m_1,\ldots,m_n}$ est un polynome hypersphérique zonal; il rentre dans la formule générale (37), où

$$k = 0, \qquad \psi_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}.$$

C'est un polynome de degré μ, dont le seul terme de degré μ est

$$x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n},$$

les autres termes étant de degré $\mu-2$, $\mu-4$, ...

Passons dans la fonction génératrice (46) des $W_{m_1,\dots,m_n}$ aux coordonnées sphériques :

$$(53)\qquad \begin{aligned} F &= [r^2 - 2r(a_1x_1+\dots+a_nx_n) + a_1^2+\dots+a_n^2]^{-\frac{n}{2}} \\ &= \Sigma a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n}\frac{1}{r^{n+\mu}}V_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n). \end{aligned}$$

Donc, sur l'hypersphère S,

$$(54)\qquad \begin{aligned} &(1-2a_1x_1-\dots-2a_nx_n+a_1^2+\dots+a_n^2)^{-\frac{n}{2}} \\ &\quad = \Sigma a_1^{m_1}\dots a_n^{m_n}V_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n). \end{aligned}$$

C'est l'équation même dont Hermite (¹), dans le cas de $n=2$, et Didon (²) dans le cas général, étaient partis pour définir leurs polynomes.

Tandis que l'expression (52) nous donne $V_{m_1,\dots,m_n}$ quels que soient les indices m, Hermite (³) n'a donné la valeur effective de ses polynomes que jusqu'à $\mu=4$.

On voit avec quelle simplicité la méthode de M. Appell conduit aux polynomes $V_{m_1,\dots,m_n}$; le choix de la fonction

$$(1-2a_1x_1-\dots-2a_nx_n+a_1^2+\dots+a_n^2)^{-\frac{n}{2}},$$

pour généraliser celle de Legendre, perd son cachet mystérieux.

Examinons de plus près l'expression (52) des polynomes $V_{m_1,\dots,m_n}$. Nous voyons d'abord que les polynomes d'un degré μ donné sont linéairement indépendants; leur nombre est celui des combinaisons complètes de n lettres μ à μ

$$\frac{(n,\mu)}{(1,\mu)}.$$

(¹) H., p. 322.
(²) D_1, p. 229.
(³) H., p. 322.

D'après la formule (38), *ces polynomes* $V_{m_1,\dots,m_n}$ *constituent donc un système complet de polynomes zonaux linéairement indépendants de degré* μ.

On peut les exprimer au moyen des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, introduites dans l'Analyse par M. Appell [1] et généralisées par M. Lauricella [2].

En effet, d'après (3),

$$(55)\quad \Delta^{2j}(x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n}) = (1,j)\sum \frac{1}{(1,j_1)\dots(1,j_n)}\frac{\partial^{2j}}{\partial x_1^{2j_1}\dots\partial x_n^{2j_n}}(x_1^{m_1},\dots,x_n^{m_n})$$

$$= (1,j)\sum \frac{m_1(m_1-1)\dots(m_1-2j_1+1)}{(1,j_1)}x_1^{m_1-2j_1}\dots$$

$$\times\frac{m_n\dots(m_n-2j_n+1)}{(1,j_n)}x_n^{m_n-2j_n}$$

$$= 2^{2j}(1,j)x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n}\sum\frac{\left(-\frac{m_1}{2},j_1\right)\left(\frac{1-m_1}{2},j_1\right)}{(1,j_1)}\frac{1}{x_1^{2j_1}}\dots$$

$$\times\frac{\left(-\frac{m_n}{2},j_n\right)\left(\frac{1-m_n}{2},j_n\right)}{(1,j_n)}\frac{1}{x^{2j_n}}.$$

Dans toutes ces expressions, le signe Σ est étendu à toutes les valeurs positives des entiers $j_1,\dots,j_n$ telles que

$$j = j_1+\dots+j_n.$$

En portant cette valeur de Δ^{2j} dans (52), nous obtenons

$$(56)\quad V_{m_1,\dots,m_n}(x_1,\dots,x_n)$$

$$= 2^{\mu}\frac{\left(\frac{n}{2},\mu\right)}{(1,m_1)\dots(1,m_n)}x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n}$$

$$\times\sum\frac{\left(-\frac{m_1}{2},j_1\right)\left(\frac{1-m_1}{2},j_1\right)\dots\left(\frac{1-m_n}{2},j_n\right)}{(1,j_1)\dots(1,j_n)\left(-\frac{n}{2}-\mu+1,j\right)}\frac{1}{x_1^{2j_1}}\dots\frac{1}{x_n^{2j_n}}.$$

---

[1] P. Appell, *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. VIII, 1882, p. 173-216).

[2] G. Lauricella, *Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. VII, 1893, p. 111-158).

Or M. Lauricella définit précisément une fonction hypergéométrique par la relation

$$F_B(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, u_1, \ldots, u_n)$$
$$= \sum \frac{(\alpha_1, m_1)(\beta_1, m_1)\ldots(\alpha_n, m_n)(\beta_n, m_n)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)(\gamma, m_1 + \ldots + m_n)} u_1^{m_1}\ldots u_n^{m_n}.$$

D'où la nouvelle expression des V :

$$(57) \quad V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= 2^\mu \frac{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{(1, m_1)\ldots(1, m_p)} x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}$$
$$\times F_B\left[-\frac{m_1}{2}, \ldots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1-m_1}{2}, \ldots, \frac{1-m_n}{2}, -\frac{n}{2}-\mu+1, \frac{1}{x_1^2}, \ldots, \frac{1}{x_n^2}\right],$$

qui rattache ces polynomes aux fonctions hypergéométriques de plusieurs variables comme les polynomes de Legendre l'étaient depuis longtemps à la fonction hypergéométrique de Gauss.

Cette expression a l'avantage de bien mettre en relief la parité de $V_{m_1,\ldots,m_n}$.

V. — Système d'équations aux dérivées partielles des polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$.

Didon [1] a formé le premier un système de n équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre auxquelles satisfont les $V_{m_1,\ldots,m_n}$; mais sa démonstration étant un peu laborieuse, nous allons en donner une autre qui se base uniquement sur la formule (57).

La fonction

$$F\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, x_1, \ldots, x_n)$$

vérifie un système de n équations aux dérivées partielles du type hypergéométrique généralisé; en partant de ces équations M. Lauricella [2] a montré que la fonction

$$\varphi = u_1^{-\alpha_1}\ldots u_n^{-\alpha_n} F_B\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma, \frac{1}{u_1}, \ldots, \frac{1}{u_n}\right)$$

---

(1) D_1, p. 269.

(2) LAURICELLA, *loc. cit.*, p. 134.

satisfait aux n équations

$$u_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j^2} - u_j \frac{\partial}{\partial u_j}\left[u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \ldots + u_n \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} + (\alpha - \gamma + 1)\varphi\right]$$
$$+ (\alpha_j - \beta_j + 1)\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} + \alpha_j \left[u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \ldots + u_n \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} + (\alpha - \gamma + 1)\varphi\right] = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n).$$

Si dans ces équations on pose

$$\alpha_j = -\frac{m_j}{2}, \qquad \beta_j = \frac{1 - m_j}{2}, \qquad \gamma = -\frac{n}{2} - \mu + 1, \qquad u_j = x_j^2,$$

la fonction φ devient égale à un facteur constant près à $V_{m_1, \ldots, m_n}$; après avoir effectué ce facile changement de variables, on obtient le système d'équations

$$(58) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + (\mu + n)V\right]$$
$$+ m_j \left[x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + (\mu + n)V\right] = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n),$$

que l'on peut aussi écrire

$$(58') \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j \left[x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + (\mu + n)V\right]\right\}$$
$$+ (m_j + 1)\left[x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + (\mu + n)V\right] = 0.$$

Si l'on remarque que

$$\sum_{j=1}^{j=n} (m_j + 1)\left[x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + (\mu + n)V\right] - (\mu + n)\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j V)$$
$$\equiv \mu(\mu + n)V,$$

en ajoutant membre à membre les n équations (58′), il vient l'équation unique

$$(59) \quad \mu(\mu + n)V + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j\left(x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\right] = 0.$$

Cette équation est identique à l'équation (23), où $k=0$; *c'est donc simplement l'équation qui exprime que* $V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n)$ *est un polynome hypersphérique zonal.*

Tandis que l'equation (59), ne dépendant que de μ, appartient à tous les polynomes V de même degré μ, le système (58), contenant séparement les indices m_j, caracterise un seul d'entre eux.

Considérons maintenant la fonction hypergéometrique

$$F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, u_1, \ldots, u_n),$$

dont M. Lauricella a donné la définition. Il a démontré [1] que le système d'équations

$$u_j \frac{\partial^2 F}{\partial u_j^2} - u_j \frac{\partial}{\partial u_j}\left[u_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + \ldots + u_n \frac{\partial F}{\partial u_n} + \alpha F\right]$$
$$- \beta_j \left[u_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + \ldots + u_n \frac{\partial F}{\partial u_n} + \alpha F\right] + \gamma_j \frac{\partial F}{\partial u_j} = 0$$

admet, pour intégrale générale,

$$\begin{aligned} F = {} & A F_A(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, u_1, \ldots, u_n) \\ & + A_1^{(1)} u_1^{1-\gamma_1} F_A(\alpha + 1 - \gamma_1, \beta_1 + 1 - \gamma_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 2 - \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, u_1, \ldots, u_n) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_n^{(1)} u_n^{1-\gamma_n} F_A(\alpha + 1 - \gamma_n, \beta_1, \ldots, \beta_n + 1 - \gamma_n, \gamma_1, \ldots, 2 - \gamma_n, u_1, \ldots, u_n) \\ & + A_{1,2}^{(2)} u_1^{1-\gamma_1} . u_2^{1-\gamma_2} \\ & \times F_A(\alpha + 2 - \gamma_1 - \gamma_2, \beta_1 + 1 - \gamma_1, \beta_2 + 1 - \gamma_2, \ldots, \beta_n, 2 - \gamma_1, 2 - \gamma_2, \ldots, \gamma_n, u_1, \ldots, u_n) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Or le système précédent se réduit au système (58) si l'on y fait

$$u_j = x_j^2, \qquad \alpha = \frac{\mu + n}{2}, \qquad \beta_j = -\frac{m_j}{2}, \qquad \gamma_j = \frac{1}{2}.$$

Supposons tous les indices $m_1, \ldots, m_n$ pairs; d'après (57), $V_{m_1, \ldots, m_n}$ est un polynome en $x_1^2, \ldots, x_n^2$; donc

$$(60^a) \quad V_{m_1, \ldots, m_n} = A F_A\left(\frac{\mu + n}{2}, -\frac{m_1}{2}, \ldots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, x_1^2, \ldots, x_n^2\right).$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 132.

Supposons le seul indice m_1 impair; $V_{m_1,\dots,m_n}$ est égal à un polynome en x_1^2, ..., x_n^2 multiplié par x_1; donc

$$(60^b)\quad V_{m_1,\dots,m_n} = A_1^{(1)}\, x_1\, F_A\left(\frac{\mu+n+1}{2}, \frac{1-m_1}{2}, \dots, -\frac{m_n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, x_1^2, \dots, x_n^2\right)$$

et $(n-1)$ formules analogues en supposant successivement les seuls indices m_2, ..., m_n impairs.

Supposons maintenant les seuls indices m_1 et m_2 impairs; $V_{m_1,\dots,m_n}$ est égal à un polynome en x_1^2, ..., x_n^2 multiplié par $x_1 x_2$; donc

$$(60^c)\quad V_{m_1,\dots,m_n} = A_{1,2}^{(2)}\, x_1 x_2\, F_A\left(\frac{\mu+n}{2}+1, \frac{1-m_1}{2}, \frac{1-m_2}{2}, \dots, -\frac{m_n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2}, x_1^2, \dots, x_n^2\right),$$

et ainsi de suite.

Le groupe des formules (60^a), (60^b), (60^c), etc. généralise complètement les résultats classiques pour les polynomes de Legendre.

VI. — Expression des polynomes $V_{m_1,\dots,m_n}$ par des intégrales définies.

Heine [1] a démontré la formule suivante

$$(61)\quad \int_0^{2\pi} d\omega_n \int_0^{\pi} \sin\omega_{n-1}\, d\omega_{n-1} \dots \int_0^{\pi} \sin^{n-1}\omega_1\, F(\lambda_1\xi_1 + \dots + \lambda_{n+1}\xi_{n+1})\, d\omega_1$$
$$= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\pi} \sin^{n-1}\omega\, F\left(\sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_{n+1}^2}\cos\omega\right) d\omega,$$

où dans la première intégrale

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \cos\omega_1,\\
\xi_2 &= \sin\omega_1\cos\omega_2,\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
\xi_n &= \sin\omega_1\sin\omega_2\dots\cos\omega_n,\\
\xi_{n+1} &= \sin\omega_1 \qquad \sin\omega_n.
\end{aligned}$$

(1) E. Heine, *Ueber einige bestimmte Integrale* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXI, 1863, p. 356-366).

D'un autre côté, on sait que

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{n-1}\omega}{(\alpha+i\beta\cos\omega)^n}\,d\omega = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}(\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{n}{2}};$$

donc

$$(62)\quad \int_0^{2\pi} d\omega_n \int_0^\pi \sin\omega_{n-1}\,d\omega_{n-1}\ldots\int_0^\pi \frac{\sin^{n-1}\omega_1\,d\omega_1}{[\alpha+i(\lambda_1\xi_1+\ldots+\lambda_{n+1}\xi_{n+1})]^n}$$
$$= 2\,\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}[\alpha^2+\lambda_1^2+\ldots+\lambda_{n+1}^2]^{-\frac{n}{2}}.$$

Si dans cette formule nous posons

$$\alpha=\sqrt{X_n},\qquad \lambda_1=x_1-a_1,\qquad \ldots,\qquad \lambda_n=x_n-a_n,\qquad \lambda_{n+1}=0,$$

nous voyons apparaître dans le second membre

$$[X_n+(x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2]^{-\frac{n}{2}}$$
$$=(1-2a_1x_1-\ldots-2a_nx_n+a_1^2+\ldots+a_n^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

La fonction sous le signe d'intégration s'écrit ici :

$$[\sqrt{X_n}+i\xi_1(x_1-a_1)+\ldots+i\xi_n(x_n-a_n)]^{-n}$$
$$=[\sqrt{X_n}+i\xi_1x_1\ldots+i\xi_nx_n]^{-n}$$
$$\times\sum\frac{(n,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}\,i^\mu\,\frac{a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\xi_1^{m_1}\ldots\xi_n^{m_n}}{[\sqrt{X_n}+i\xi_1x_1+\ldots+i\xi_nx_n]^\mu}.$$

En identifiant les coefficients de $a_1^{m_1}$, ..., $a_n^{m_n}$ dans les deux membres de la relation (62), nous obtenons

$$(63)\quad \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)$$
$$=\frac{(n,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}$$
$$\times\frac{1}{i^n}\int_0^\pi d\omega_n\int_0^\pi\sin\omega_{n-1}\,d\omega_{n-1}\ldots\int_0^\pi\frac{\sin^{n-1}\omega_1\,\xi_1^{m_1}\ldots\xi_n^{m_n}\,d\omega_1}{(\xi_1x_1+\ldots+\xi_nx_n-i\sqrt{X_n})^{\mu+n}}.$$

Didon [1] a obtenu, par une tout autre voie, pour le polynome d'Hermite $V_{m,n}(x, y)$, une expression qui se ramène facilement à celle-là par un changement de variables.

VII.

Théorème. — *Soit*

$$\Phi(z_1, \ldots, z_{n+2})$$

une fonction possédant les propriétés suivantes :

1° *Elle est harmonique à l'intérieur de* S;

2° *Sur* S *elle se réduit à une fonction* $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$.

On a

$$(64)\quad \begin{aligned} &\Sigma(2\mu + n)a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n} \\ &\times\int_{(x_n\geqq 0)}^{n} \Psi(x_1, \ldots, x_n)\,V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n \\ &= \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\Phi(a_1, \ldots, a_n, 0, 0). \end{aligned}$$

En effet, considérons la fonction

$$(53)\quad \begin{aligned} \mathrm{F} &= [r^2 - 2r(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) + a_1^2 + \ldots + a_n^2]^{-\frac{n}{2}} \\ &= \Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\frac{1}{r^{n+\mu}}V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

et la fonction

$$(51)\quad \begin{aligned} \mathrm{G} &= [1 - 2r(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) + r^2(a_1^2 + \ldots + a_n^2)]^{-\frac{n}{2}} \\ &= \Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}r^{\mu}V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Appliquons aux fonctions G et Φ la formule de Green (8) pour le domaine intérieur à S, où elles sont toutes deux harmoniques :

$$(65)\quad \int_{\mathrm{S}}\left(\Phi\frac{d\mathrm{G}}{dn} - \mathrm{G}\frac{d\Phi}{dn}\right)d\omega = 0,$$

où $d\omega$ désigne, comme à la page 8, l'élément d'aire de l'hypersphère.

---

[1] D_2, p. 20.

La fonction F possède à l'intérieur de S le pôle A

$$z_1 = a_1, \quad \ldots, \quad z_n = a_n, \quad z_{n+1} = 0, \quad z_{n+2} = 0.$$

En isolant cette singularité par une hypersphère dont on fait tendre le rayon vers zéro, on peut appliquer la formule de Green aux fonctions F et Φ; on obtient

$$(66) \qquad \int_S \left(F \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{dF}{dn} \right) d\omega = n\,\Phi(a_1, \ldots, a_n, 0, 0) \int_S d\omega.$$

Or, sur S,

$$F = G.$$

En ajoutant les deux égalités (65) et (66), nous obtenons

$$(67) \qquad \int_S \Phi \left(\frac{dG}{dn} - \frac{dF}{dn} \right) d\omega = n\,\Phi(a_1, \ldots, a_n, 0, 0) \int_S d\omega.$$

Mais sur S

$$\Phi = \Psi(x_1, \ldots, x_n);$$

d'après (51),

$$\frac{dG}{dn} = \left(\frac{dG}{dr} \right)_{r=1} = \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} \mu V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n);$$

d'après (53),

$$\frac{dF}{dn} = \left(\frac{dF}{dr} \right)_{r=1} = -\Sigma a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} (\mu + n) V_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Donc

$$(68) \quad \int_S \Phi \left(\frac{dG}{dn} - \frac{dF}{dn} \right) d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} \Psi(x_1, \ldots, x_n)\, \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} (2\mu + n) V_{m_1, \ldots, m_n}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

car pour obtenir l'hypersphère S tout entière, il faut faire varier φ de 0 à 2π et donner aux x toutes les valeurs compatibles avec la relation

$$X_n \geqq 0;$$

quant à l'expression de $d\omega$, elle a été calculée page 9.

La fonction sous le signe intégral ne dépendant pas de φ, on pourra intégrer par rapport à cette variable; le second membre de (68) contiendra 2π en facteur.

D'un autre côté,

$$\int_S d\omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{(x_n \geqq 0)}^{n} dx_1 \dots dx_n = 2\pi \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{69}$$

En portant les valeurs (68) et (69) dans l'expression (67) et en supprimant de part et d'autre le facteur 2π, nous obtenons

$$\Sigma(2\mu+n) a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} \int_{(x_n \geqq 0)}^{n} \Psi(x_1, \dots, x_n) V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$
$$= \frac{n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \pi^{\frac{n}{2}} \Phi(a_1, \dots, a_n, 0, 0).$$

Cas particulier. — Supposons que la fonction $\Phi(z_1, \dots, z_{n+2})$, aux propriétés de l'énoncé joigne celle d'être développable en série de Taylor dans le domaine intérieur à S, de sorte que

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 < 1, \qquad \Phi(a_1, \dots, a_n, 0, 0) = \Sigma K_{m_1, \dots, m_n} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n}.$$

Nous déduisons de la relation précédente

$$(2\mu+n) \int_{(x_n \geqq 0)}^{n} \Psi(x_1, \dots, x_n) V_{m_1, \dots, m_n} dx_1 \dots dx_n = \frac{n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \pi^{\frac{n}{2}} K_{m_1, \dots, m_n}. \tag{70}$$

VIII. — Application.

Prenons en particulier pour fonction $\Phi(z_1, \dots, z_{n+2})$ le polynome harmonique défini par la formule (51)

$$\mathfrak{P}_{q_1, \dots, q_n} = r^q V_{q_1, \dots, q_n}(x_1, \dots, x_n) \qquad (q = q_1 + \dots + q_n);$$

il satisfait à toutes les conditions du théorème précédent; de plus, son expression (50) montre que

$$\mathfrak{P}_{q_1,\ldots,q_n}(a_1,\ldots,a_n,0,0)=\Sigma K^{q_1,\ldots,q_n}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} a_1^{q_1+2\alpha_1}\ldots a_n^{q_n+2\alpha_n} \qquad (\alpha_1+\ldots+\alpha_n=0),$$

où les K sont des constantes faciles à calculer.

La formule (70) nous permet d'énoncer les conclusions suivantes :

1° Si $q_1+\ldots+q_n \neq m_1+\ldots+m_n$,

$$(71)\qquad \int_{(x_n \geqq 0)}^{n} V_{q_1,\ldots,q_n}(x_1,\ldots,x_n)\, V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1\ldots dx_n = 0.$$

2° Les entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant assujettis à la condition

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_n=0,$$

$$(72)\qquad \begin{aligned} &\int_{(x_n \geqq 0)}^{n} V_{m_1+2\alpha_1,\ldots,m_n+2\alpha_n} V_{m_1,\ldots,m_n}\, dx_1\ldots dx_n \\ &\quad = \frac{n}{2\mu+n}\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}+1\right)} K^{m_1,\ldots,m_n}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}. \end{aligned}$$

Nous tirerons plus loin les conclusions des formules (71) et (72).

IX.

Nous poserons dans ce qui suit :

$$(73)\qquad \begin{aligned} &[1-2a_1x_1-\ldots-2a_px_p+a_1^2+\ldots+a_p^2]^{-\frac{p+s-1}{2}} \\ &\quad = \Sigma a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}(x_1,\ldots,x_p), \end{aligned}$$

p et s désignant deux entiers positifs.

Nous n'introduisons d'ailleurs ainsi aucune fonction nouvelle, puisqu'on voit immédiatement que

$$V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}(x_1,\ldots,x_p) = V_{m_1,\ldots,m_p,0,\ldots,0}(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1},\ldots,x_{p+s-1}).$$

C'est simplement une notation, qui sera commode dans l'étude des polynomes tesséraux.

Toutes les propriétés des polynomes $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}$ se déduisent de celles qui ont été données pour les polynomes $V_{m_1,\ldots,m_n}$, en faisant dans ces derniers

$$n = p + s - 1, \qquad m_{p+1} = \ldots = m_{p+s-1} = 0.$$

Nous allons les résumer dans le Tableau suivant :

TABLEAU I.

(A) $$[(z_1 - a_1)^2 + \ldots + (z_p - a_p)^2 + z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2]^{-\frac{p+s-1}{2}}$$
$$= \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_p^{m_p} W_{m_1,\ldots,m_p}^{(s)}.$$

(B) $$W_{m_1,\ldots,m_p}^{(s)} = \frac{(-1)^\mu}{(1, m_1)\ldots(1, m_p)} \frac{\partial^\mu}{\partial z_1^{m_1}\ldots\partial z_p^{m_p}}\left(\frac{1}{r^{p+s-1}}\right),$$

où

$$r^2 = z_1^2 + \ldots + z_{p+s-1}^2.$$

(C) $$W_{m_1,\ldots,m_p}^{(s)} = \frac{1}{r^{\mu+p+s-1}} V_{m_1,\ldots,m_p}^{(s)}(x_1, \ldots, x_p).$$

(D) $$V_{m_1,\ldots,m_p}^{(s)} = 2^\mu \frac{\left(\frac{p+s-1}{2}, \mu\right)}{(1, m_1)\ldots(1, m_p)}$$
$$\times \left[x_1^{m_1}\ldots x^{m_p} + \ldots + \frac{1}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1}, \ldots, x_p^{m_p})}{(1, j)\left(-\frac{p+s-3}{2} + \mu, j\right)} + \ldots\right].$$

(E) $$V_{m_1,\ldots,m_p}^{(s)} = 2^\mu \frac{\left(\frac{p+s-1}{2}, \mu\right)}{(1, m_1)\ldots(1, m_p)} x_1^{m_1}\ldots x_p^{m_p}$$
$$\times F_B\left[-\frac{m_1}{2}, \ldots, -\frac{m_p}{2}, \frac{1-m_1}{2}, \ldots, \frac{1-m_p}{2}, -\mu - \frac{p+s-3}{2}, \frac{1}{x_1^2}, \ldots, \frac{1}{x_p^2}\right].$$

(F) $$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j\left[x_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + x_p\frac{\partial V}{\partial x_p} + (\mu + p + s - 1)V\right]\right\}$$
$$+ (m_j + 1)\left[x_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + x_p\frac{\partial V}{\partial x_p} + (\mu + p + s - 1)V\right] = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, p).$$

(G) $$(\mu + p)(\mu + s - 1)V$$
$$+ \sum_{j=1}^{j=p} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j\left[x_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + x_p\frac{\partial V}{\partial x_p} + (s-1)V\right]\right\} = 0.$$

Soit $\Phi(z_1, \ldots, z_{p+s+1})$ une fonction harmonique se réduisant sur S à $\Psi(x_1, \ldots, x_p)$

$$(\mathrm{H}) \quad \Sigma(2\mu+p+s-1)a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p}\int_{(\mathrm{X}_p\geqq 0)}^{p} \mathrm{X}_p^{\frac{s-1}{2}}\Psi(x_1,\ldots,x_p)\mathrm{V}_{m_1,\ldots,m_p}^{(s)}dx_1\ldots dx_p$$
$$=(p+s-1)\pi^{\frac{p}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+s+1}{2}\right)}\Phi(a_1,\ldots,a_p,0,\ldots,0).$$

Si, de plus, $\Phi(a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0) = \Sigma \mathrm{K}_{m_1,\ldots,m_p} a_1^{m_1}, \ldots, a_p^{m_p}$,

$$(\mathrm{I}) \quad \int_{(\mathrm{X}_p\geqq 0)}^{p} \mathrm{X}^{\frac{s-1}{2}}\Psi(x_1,\ldots,x_p)\mathrm{V}_{m_1,\ldots,m_p}^{(s)}(x_1,\ldots,x_p)\,dx_1\ldots dx_p$$
$$=\frac{p+s-1}{2\mu+p+s-1}\pi^{\frac{p}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+s+1}{2}\right)}\mathrm{K}_{m_1,\ldots,m_p}.$$

L'intégrale

$$(\mathrm{J}) \quad \int_{(\mathrm{X}_p\geqq 0)}^{p} \mathrm{X}_p^{\frac{s-1}{2}}\mathrm{V}_{q_1,\ldots,q_p}^{(s)}\mathrm{V}_{m_1,\ldots,m_n}^{(s)}\,dx_1\ldots dx_n$$

n'est différente de zéro que si l'on a à la fois

$$q_1 = m_1 + 2\alpha_1, \qquad \ldots, \qquad q_p = m_p + 2\alpha_p, \qquad \alpha_1 + \ldots + \alpha_p = 0.$$

Remarque I. — Dans les formules (J), (I), (H) nous avons posé

$$\mathrm{X}_p = 1 - x_1^2 - \ldots - x_p^2.$$

La formule (H) se déduit de la formule (64), en remarquant que la fonction sous le signe intégral ne dépendant pas des variables $x_{p+s-1}, \ldots, x_{p+1}$, on peut intégrer par rapport à celles-ci; on trouve facilement

$$\int_{(\mathrm{X}_{p+s-1}\geqq 0)}^{s-1} dx_{p+1}\ldots dx_{p+s-1} = \mathrm{X}_p^{\frac{s-1}{2}}\frac{\pi^{\frac{s-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}.$$

Remarque II. — Appliquons la formule (H) au cas de

$$\Phi(z_1,\ldots,z_{p+s+1}) = r^q\,\mathrm{V}_{q_1,\ldots,q_p}^{(s)}(x_1,\ldots,x_p).$$

Pour

$$z_1 = a_1, \quad \ldots, \quad z_p = a_p, \quad z_{p+1} = 0, \quad \ldots, \quad z_{p+s+1} = 0,$$

$$r^2 = a_1^2 + \ldots + a_p^2, \quad x_1 = \frac{a_1}{r}, \quad \ldots, \quad x_p = \frac{a_p}{r},$$

on a

$$\Phi(a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0) = (a_1^2 + \ldots + a_p^2)^{\frac{q}{2}} \mathrm{V}^{(s)}_{q_1, \ldots, q_n}\left[\frac{a_1}{r}, \ldots, \frac{a_p}{r}\right],$$

donc :

$$\Sigma(2\mu + p + s - 1) a_1^{m_1} \ldots a_p^{m_p} \int_{(\mathrm{X}_p \geqq 0)}^{p} \mathrm{X}_p^{\frac{s-1}{2}} \mathrm{V}^{(s)}_{q_1, \ldots, q_p} \mathrm{V}^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p} dx_1 \ldots dx_p$$

$$= (p + s - 1)\, \pi^{\frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+s+1}{2}\right)} (a_1^2 + \ldots + a_p^2)^{\frac{q}{2}}$$

$$\times \mathrm{V}^{(s)}_{q_1, \ldots, q_n}\left[\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_p^2}}, \ldots, \frac{a_p}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_p^2}}\right].$$

C'est, à un changement insignifiant près, la formule donnée dans une Note à l'Académie des Sciences (¹).

Remarque III. — Signalons encore cette relation, évidente sur la fonction génératrice, qui donne l'expression du groupe homogène

$$\sum_{m_1 + \ldots + m_p = \mu} a_1^{m_1} \ldots a_p^{m_p} \mathrm{V}^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}(x_1, \ldots, x_p)$$

$$= (a_1^2 + \ldots + a_p^2)^{\frac{\mu}{2}} \mathrm{V}^{(p+s-1)}_{\mu}\left(\frac{a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_p^2}}\right).$$

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLVII, 2ᵉ semestre 1913, p. 912.

CHAPITRE III.

LA FONCTION GÉNÉRATRICE ADJOINTE.

I.

L'étude précédente conduit naturellement à se poser la question suivante :

Les polynomes hypersphériques zonaux [1] $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}(x_1, \ldots, x_p)$ *donnent-ils, à eux seuls, le moyen de représenter une fonction* $F(x_1, \ldots, x_p)$ *donnée arbitrairement sur l'hypersphère* S?

Pour trouver un développement de la forme

$$F(x_1, \ldots, x_p) = \Sigma H_{m_1,\ldots,m_p} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}(x_1, \ldots, x_p), \tag{74}$$

la formule (J) du Tableau I suggère l'idée d'employer la méthode de Fourier; elle est bien applicable ici, mais avec une modification qui lui ôte sa portée.

Nous voyons, en effet, que

$$\begin{aligned} &\int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\frac{s-1}{2}} F V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p} dx_1 \ldots dx_p \\ &= \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_p=0} H_{m_1+2\alpha_1,\ldots,m_p+2\alpha_p} \\ &\qquad \times \int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p} V^{(s)}_{m_1+2\alpha_1,\ldots,m_p+2\alpha_p} dx_1 \ldots dx_p. \end{aligned} \tag{75}$$

Le second membre, au lieu de contenir un seul des coefficients H, comme dans al méthode ordinaire de Fourier, contient une combinaison linéaire des coefficients $H_{q_1,\ldots,q_p}$ pour lesquels $q_1 + \ldots + q_p = \mu$.

En formant toutes les équations analogues à (75) dans lesquelles

$$m_1 + \ldots + m_p = \mu,$$

---

[1] Nous continuerons à poser, dans ce Chapitre, $n = p + s - 1$.

nous obtenons un système de $\frac{(p,\mu)}{(1,\mu)}$ équations linéaires entre les $\frac{(p,\mu)}{(1,\mu)}$ coefficients $H_{q_1,\ \ ,q_p}(q_1+\ldots+q_p=\mu)$.

Les H sont donc bien ainsi déterminés; mais il est inutile d'ajouter que c'est là une méthode qui, non seulement, ne se prête aucunement au calcul effectif, mais encore masque toutes les propriétés théoriques du développement (74).

La difficulté s'étant déjà offerte à Hermite pour ses polynomes à deux variables $V_{m,n}(x,y)$, il définit de nouveaux polynomes $U_{m,n}(x,y)$ par la relation (1)

$$[(ax+by-1)^2+(a^2+b^2)(1-x^2-y^2)]^{-\frac{1}{2}}=\Sigma\, a^m b^n\, U_{m,n}(x,y),$$

généralisant ceux de Legendre

$$[(ax-1)^2+a^2(1-x^2)]^{-\frac{1}{2}}=\Sigma\, a^n X_n(x).$$

Puis il démontre la formule suivante

$$\iint_{(1-x^2-y^2\geqq 0)} V_{m,n}U_{\mu,\nu}\,dx\,dy=0$$

tant qu'on n'a pas à la fois

$$m=\mu,\qquad n=\nu.$$

Dans ce cas,

$$\iint_{(1-x^2-y^2\geqq 0)} V_{m,n}U_{m,n}\,dx\,dy=\frac{\pi}{m+n+1}\,\frac{(1,m+n)}{(1,m).(1,n)}.$$

Ce résultat lui permet de calculer les coefficients du développement

$$F(x,y)=\Sigma\, A_{m,n}V_{m,n}(x,y)$$

par la formule

$$\iint_{(1-x^2-y^2\geqq 0)} F\,U_{m,n}\,dx\,dy=A_{m,n}\frac{\pi}{m+n+1}\,\frac{(1.\,m+n)}{(1,m).(1,n)}.$$

Nous suivrons une marche différente de celle de l'illustre géomètre :

---

(1) H., p. 324.

au lieu de former *a priori* des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}$ et de vérifier après qu'ils possèdent la propriété désirée :

$$\int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p} U^{(s)}_{q_1,\ldots,q_p} dx_1 \ldots dx_p = 0$$

tant qu'on n'a pas à la fois

$$m_1 = q_1, \quad \ldots, \quad m_p = q_p,$$

nous allons chercher à déterminer une famille de polynomes par les conditions suivantes :

Soit

$$R_{m_1,\ldots,m_p}(x_1, \ldots, x_p),$$

l'un de ces polynomes :

1° La fonction

$$\Phi_{m_1,\ldots,m_p}(z_1, \ldots, z_{p+s+1}) = r^{\mu} R_{m_1,\ldots,m_p}(x_1, \ldots, x_p)$$

est un polynome harmonique homogène et de degré μ.

2° Tant qu'on n'a pas à la fois

$$m_1 = q_1, \quad \ldots, \quad m_p = q_p :$$

$$\int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\frac{s-1}{2}} V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p} R_{q_1,\ldots,q_p} dx_1 \ldots dx_p = 0.$$

La première condition montre d'abord que le polynome

$$\Phi_{m_1,\ldots,m_p}(z_1, \ldots, z_{p+s+1})$$

devant se réduire sur S à

$$R_{m_1,\ldots,m_p}(x_1, \ldots, x_p)$$

ne dépend de $z_{p+1}, \ldots, z_{p+s+1}$ que par l'intermédiaire de

$$z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2.$$

Ceci étant, la formule (H) du Tableau I est applicable à la fonction harmonique $\Phi_{q_1,\dots,q_p}$; elle s'écrit ici

$$(76)\quad \Sigma(2\mu+p+s-1)a_1^{m_1}\dots a_p^{m_p}\int_{(X_p\geqq 0)}^{p} X_p^{\frac{s-1}{2}} V_{m_1,\dots,m_p}^{(s)} R_{q_1,\dots,q_p}\,dx_1\dots dx_p$$
$$= A\,\Phi_{q_1,\dots,q_p}(a_1,\ \dots,\ a_p,\ 0,\ \dots,\ 0),$$

où A est une certaine constante.

La condition nécessaire et suffisante pour que les polynomes $R_{q_1,\dots,q_p}$ possèdent la propriété (2), c'est donc que

$$\Phi_{q_1,\dots,q_p}(a_1,\ \dots,\ a_p,\ 0,\ \dots,\ 0) \equiv a_1^{q_1}\dots a_p^{q_p}.$$

Nous sommes donc conduits à résoudre le problème suivant :

Trouver un polynome harmonique homogène de degré μ

$$\Phi_{m_1,\dots,m_p}(z_1,\ \dots,\ z_{p+s+1})$$

ne dépendant de z_{p+1}, ..., z_{p+s+1} que par $z_{p+1}^2+\dots+z_{p+s+1}^2$ et qui pour $z_{p+1}=\dots=z_{p+s+1}=0$ se réduit à

$$B\,z_1^{m_1}\dots z_p^{m_p}.$$

II.

Théorème. — *Le polynome harmonique homogène de degré μ, ne dépendant de z_{p+1}, ..., z_{p+s+1} que par $z_{p+1}^2+\dots+z_{p+s+1}^2$ et se réduisant pour $z_{p+1}=\dots=z_{p+s+1}=0$ à un polynome homogène donné*

$$f_\mu(z_1,\ \dots,\ z_p),$$

a pour expression

$$(77)\quad \Omega = f_\mu(z_1,\ \dots,\ z_p)+\dots+(-1)^j\frac{(z_{p+1}^2+\dots+z_{p+s+1}^2)^j}{2^{2j}}\,\frac{\Delta^{2j}f_\mu(z_1,\dots,z_p)}{(1,j)\cdot\left(\frac{s+1}{2},j\right)}.$$

En effet, il est évident que le polynome Ω sera de la forme

$$\Omega = f_\mu(z_1,\ \dots,\ z_p)+(z_{p+1}^2+\dots+z_{p+s+1}^2)f_{\mu-2}(z_1,\ \dots,\ z_p)+\dots$$
$$+(z_{p+1}^2+\dots+z_{p+s+1}^2)^j f_{\mu-2j}(z_1,\ \dots,\ z_p)+\dots,$$

où $f_{\mu-2}, \ldots, f_{\mu-2j}$ sont des polynomes homogènes de degré $\mu - 2, \ldots, \mu - 2j$ à déterminer.

Or les règles élémentaires de dérivation donnent

$$\Delta^2[(z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2)^j f_{\mu-2j}] = (z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2)^j \Delta^2 f_{\mu-2j}$$
$$+ 2j(s+1+2j-2)(z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2)^{j-1} f_{\mu-2j}.$$

L'équation

$$\Delta^2 \Omega = 0$$

s'écrit alors

$$0 = [\Delta^2 f_\mu + 2(s+1) f_{\mu-2}] + \ldots$$
$$+ (z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2)^{j-1} [\Delta^2 f_{\mu-2j+2} + 2j(s+1+2j-2) f_{\mu-2j}] + \ldots.$$

Pour qu'elle soit satisfaite, il faut et il suffit que

$$\Delta^2 f_\mu + 2(s+1) f_{\mu-2} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta^2 f_{\mu-2j+2} + 2j(s+1+2j-2) f_{\mu-2j} = 0.$$

Les polynomes $f_{\mu-2}, \ldots, f_{\mu-2j}$ sont déterminés de proche en proche par ces formules ; leur expression générale est

$$f_{\mu-2j} = \frac{(-1)^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j} f_\mu(z_1, \ldots, z_p)}{(1, j)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)},$$

ce qui démontre le théorème.

Cette nouvelle expression d'un polynome harmonique d'une forme particulière est à rapprocher de celles qui sont données dans les précédents Chapitres ; au sujet de sa parité, de son dernier terme, etc., nous pourrions reprendre tout ce qui a été dit au sujet de l'expression (50).

Si dans la formule (77) nous passons des coordonnées rectangulaires z aux coordonnées sphériques, nous obtenons, par un calcul que nous avons déjà fait plusieurs fois,

$$(78) \quad \Omega = r^\mu \left[f_\mu(x_1, \ldots, x_p) + \ldots + (-1)^j \frac{X_p^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j} f_\mu(x_1, \ldots, x_p)}{(1, j)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} + \ldots \right].$$

Le coefficient de r^μ est un polynome hypersphérique zonal d'une forme que nous n'avions pas encore rencontrée.

Nous aurons plus loin l'occasion d'étudier en detail ces formules et de les étendre au cas des fonctions hypersphériques d'ordre quelconque.

III.

La formule (77) nous permet de résoudre le problème posé au début de ce Chapitre; en effet, nous l'avons ramené à la formation d'une classe de polynomes $\Phi_{m_1, \dots m_p}$ qui rentrent comme cas particuliers dans l'expression Ω en y faisant

$$f_\mu(z_1, \dots, z_p) = \mathrm{B}\, z_1^{m_1} \dots z_p^{m_p}.$$

L'expression que nous cherchons est donc

$$(79)\quad \Phi_{m_1, \dots, m_p} = \mathrm{B}\left[z_1^{m_1} \dots z_p^{m_p} + \dots + (-1)^j \frac{(z_{p+1}^2 + \dots + z_{p+s+1}^2)}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(z_1^{m_1}, \dots, z_p^{m_p})}{(1, j)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} + \dots\right].$$

Nous avions posé de plus

$$\Phi_{m_1, \dots, m_p} = r^\mu \mathrm{R}_{m_1, \dots, m_p}(x_1, \dots, x_p),$$

d'où

$$(80)\quad \mathrm{R}_{m_1, \dots, m_p} = \mathrm{B}\left[x_1^{m_1} \dots x_p^{m_p} + \dots + (-1)^j \frac{\mathrm{X}_p^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1}, \dots, x_p^{m_p})}{(1, j)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} + \dots\right].$$

En particularisant la constante B, nous emploierons les notations définitives

$$(81)\quad \mho_{m_1, \dots, m_p}^{(s)} = \frac{(s, \mu)}{(1, m_1) \dots (1, m_p)} \times \left[z_1^{m_1} \dots z_p^{m_p} + \dots + (-1)^j \frac{(z_{p+1}^2 + \dots + z_{p+s+1}^2)^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(z_1^{m_1}, \dots, z_p^{m_p})}{(1, j)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} + \dots\right],$$

$$(82)\quad \mathrm{U}_{m_1, \dots, m_p}^{(s)} = \frac{(s, \mu)}{(1, m_1) \dots (1, m_p)}\left[x_1^{m_1} \dots x_p^{m_p} + \dots + (-1)^j \frac{\mathrm{X}_p^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1}, \dots, x_p^{m_p})}{(1, j)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} + \dots\right].$$

Nous avons formé ainsi, *a priori*, une classe de polynomes $U^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}(x_1,\dots,x_p)$ satisfaisant à toutes les conditions imposées, car :

1° L'expression

$$\mathcal{V}^{(s)}_{m_1,\dots,m_p} = r^{\mu}\, U^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}$$

est un polynome harmonique homogène de degré μ.

2° Si dans la formule (H) du Tableau (I) nous prenons

$$\Phi(z_1,\ \dots,\ z_{p+s+1}) = \mathcal{V}^{(s)}_{q_1,\dots,q_p},$$

d'où

$$\Psi(x_1,\ \dots,\ x_p) = U^{(s)}_{q_1,\dots,q_p}(x_1,\ \dots,\ x_p),$$

$$\Phi(a_1,\ \dots,\ a_p,\ 0,\ \dots,\ 0) = \frac{(s,\ q)}{(1,\ q_1)\dots(1,\ q_p)}\, a_1^{q_1}\dots a_p^{q_p},$$

elle nous donne le résultat suivant

$$\text{(83)}\qquad \int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\frac{s-1}{2}}\, V^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}\, U^{(s)}_{q_1,\dots,q_p}\, dx_1\dots dx_p = 0$$

tant qu'on n'a pas à la fois

$$m_1 = q_1,\quad \dots,\quad m_p = q_p.$$

Dans ce cas,

$$\text{(84)}\qquad \int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\frac{s-1}{2}}\, V^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}\, U^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}\, dx_1\dots dx_p$$
$$= \frac{p+s-1}{2\mu+p+s-1}\, \pi^{\frac{p}{2}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+s+1}{2}\right)}\, \frac{(s,\ \mu)}{(1,\ m_1)\dots(1,\ m_p)}.$$

Les polynomes $U^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}$ satisfont donc à toutes les conditions imposées; ils sont d'ailleurs les seuls, car la condition suffisante

$$\Phi_{m_1,\dots,m_p} = B\, z_1^{m_1}\dots z_p^{m_p}$$

est également nécessaire.

Il nous reste à montrer que les polynomes que nous venons de former sont identiques à ceux que Hermite ([1]) a considérés dans

---

([1]) H., p. 324 et 340.

le cas de deux variables pour $s=1$ et $s=2$, et dont M. Appell [1] a donné une définition générale.

IV. — Fonction génératrice des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}(x_1,\dots,x_p)$.

Soient $a_1, \dots, a_p$ des constantes quelconques; l'expression

$$\Omega_\mu(z_1,\dots,z_{p+s+1}) = \sum_{m_1+\dots+m_p=\mu} a_1^{m_1}\dots a_p^{m_p}\,\mho^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}$$

est un polynome homogène de degré μ qui ne dépend de $z_{p+1}, \dots, z_{p+s+1}$ que par l'intermédiaire de

$$z_{p+1}^2+\dots+z_{p+s+1}^2;$$

de plus, d'après (81),

$$\Omega_\mu(z_1,\dots,z_p,0,\dots,0) = \frac{(s,\mu)}{(1,\mu)}(a_1z_1+\dots+a_pz_p)^\mu.$$

La formule (77) est donc applicable à cette expression; d'où

$$(85)\quad \Omega_\mu = \frac{(s,\mu)}{(1,\mu)}\Bigg[(a_1z_1+\dots+a_pz_p)^\mu+\dots + (-1)^j\frac{(z_{p+1}^2+\dots+z_{p+s+1}^2)^j}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}(a_1z_1+\dots+a_pz_p)^\mu}{(1,j)\left(\frac{s+1}{2},j\right)}+\dots\Bigg].$$

Ceci étant, supposons les constantes $a_1, \dots, a_p$ telles que

$$a_1^2+\dots+a_p^2<1$$

et le point de coordonnées z intérieur à S; considérons

$$(86)\qquad F = \sum_{m_1=\dots=m_p=0}^{m_1=\dots=m_p=+\infty} a_1^{m_1}\dots a_p^{m_p}\,\mho^{(s)}_{m_1,\dots,m_p} = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty}\Omega_\mu.$$

---

(1) P. Appell, *Les polynomes* $U_{m,n}$ *d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperespace* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CLVI, 1er semestre 1913, p. 1852).

Comme dans Ω_μ le terme en Δ^{2j} est nul pour $j > \frac{\mu}{2}$ ou $j > \frac{\mu - 1}{2}$ (selon la parité de μ), nous pouvons mettre F sous la forme :

$$
\text{(87)} \qquad F = \sum_{j=0}^{j=+\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j}} \frac{(z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2)^j}{(1, j)\left(\frac{s+1}{2}, j\right)} \times \left[\sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} \frac{(s, \mu)}{(1, \mu)} \Delta^{2j} (a_1 z_1 + \ldots + a_p z_p)^\mu \right].
$$

La quantité entre crochets peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
\Delta^{2j} \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} \frac{(s, \mu)}{(1, \mu)} (a_1 z_1 + \ldots + a_p z_p)^\mu &= \Delta^{2j} [(1 - a_1 z_1 - \ldots - a_p z_p)^{-s}] \\
&= (s, 2j) \frac{(a_1^2 + \ldots + a_p^2)^j}{(1 - a_1 z_1 - \ldots - a_p z_p)^{s+2j}}.
\end{aligned}
$$

En utilisant la formule élémentaire

$$
\left(\frac{s}{2}, j\right)\left(\frac{s+1}{2}, j\right) = \frac{1}{2^{2j}} (s, 2j),
$$

l'expression (87) prend la forme

$$
\begin{aligned}
F &= \sum_{j=0}^{j=+\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{s}{2}, j\right)}{(1, j)} \frac{(a_1^2 + \ldots + a_p^2)^j (z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2)^j}{(1 - a_1 z_1 - \ldots - a_p z_p)^{s+2j}} \\
&= (1 - a_1 z_1 - \ldots - a_p z_p)^{-s} \left[1 + \frac{(a_1^2 + \ldots + a_p^2)(z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2)}{(1 - a_1 z_1 - \ldots - a_p z_p)^2} \right]^{-\frac{s}{2}} \\
&= [(1 - a_1 z_1 - \ldots - a_p z_p)^2 + (a_1^2 + \ldots + a_p^2)(z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2)]^{-\frac{s}{2}}.
\end{aligned}
$$

Quant à la légitimité des diverses sommations, il suffit de remarquer pour l'établir que toutes les séries employées convergent sous les conditions imposées au début

$$
a_1^2 + \ldots + a_p^2 < 1, \qquad z_1^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2 < 1;
$$

d'où

$$
\begin{gathered}
|a_1 z_1 + \ldots + a_p z_p| < 1, \\
0 < 1 - a_1 z_1 - \ldots - a_p z_p \leqq 1, \\
z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2 < 1.
\end{gathered}
$$

Nous parvenons donc à la formule fondamentale

$$(88)\quad \begin{aligned} F &= [(a_1 z_1 + \ldots + a_p z_p - 1)^2 + (a_1^2 + \ldots + a_p^2)(z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2)]^{-\frac{s}{2}} \\ &= \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_p^{m_p} \mho_{m_1,\ldots,m_p}^{(s)}, \end{aligned}$$

d'où, sur l'hypersphère S,

$$(89)\quad \begin{aligned} F_s &= [(a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p - 1)^2 + (a_1^2 + \ldots + a_p^2)(1 - x_1^2 - \ldots - x_p^2)]^{-\frac{s}{2}} \\ &= \Sigma a_1^{m_1} \ldots a_p^{m_p} U_{m_1,\ldots,m_p}^{(s)}(x_1, \ldots, x_p), \end{aligned}$$

ce dernier développement convergeant pour

$$a_1^2 + \ldots + a_p^2 < 1, \qquad 1 > X_p = 1 - x_1^2 - \ldots - x_p^2 \geqq 0.$$

C'est cette fonction qu'Hermite avait prise *a priori* pour définir ses polynomes $U_{m,n}(x,y)$; il avait ensuite démontré que

$$\iint_{(1-x^2-y^2\geqq 0)} V_{m,n} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0$$

tant qu'on n'a pas à la fois $m = \mu$, $n = \nu$; dans ce cas,

$$\iint_{(1-x^2-y^2\geqq 0)} V_{m,n} U_{m,n}\, dx\, dy = \frac{\pi}{m+n+1} \frac{(1, m+n)}{(1, m)(1, n)};$$

ce résultat concorde bien avec la formule (84) en y faisant

$$p = 2, \qquad s = 1.$$

Hermite [1] avait encore considéré les développements suivants :

$$(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} = \Sigma a^m b^n \vartheta_{m,n}(x, y),$$

$$\begin{aligned} &(1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} [(ax + by - 1)^2 + (a^2 + b^2)(1 - x^2 - y^2)]^{-1} \\ &\quad = \Sigma a^m b^n \mho_{m,n}(x, y); \end{aligned}$$

avec nos notations,

$$\vartheta_{m,n} = V_{m,n}^{(2)}, \qquad \mho_{m,n} = (1 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} U_{m,n}^{(2)}.$$

[1] H., p. 335.

La formule (84) donne

$$\iint_{(1-x^2-y^2\geqq 0)} (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}} \mathrm{V}^{(2)}_{m,n} \mathrm{U}^{(2)}_{\mu,\nu}\, dx\, dy$$

$$= \iint_{(1-x^2-y^2\geqq 0)} \mathfrak{V}_{m,n} \mathfrak{U}_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0 \qquad (m \neq \mu,\ n \neq \nu),$$

$$\iint_{(1-x^2-y^2\geqq 0)} \mathfrak{V}_{m,n} \mathfrak{U}_{m,n}\, dx\, dy = \frac{3}{2(m+n)+3}\, \pi \, \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \, \frac{(2, m+n)}{(1, m)(1, n)}$$

$$= \frac{\pi}{2(m+n)+3} \, \frac{(2, m+n)}{(1, m)(1, n)},$$

résultat conforme à celui qu'Hermite a trouvé directement.

C'est M. Appell qui a consideré pour la première fois la fonction génératrice F dans toute sa généralité; voici comment il l'introduit :

La fonction

$$\mathrm{F} = (\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_{s+2}^2)^{-\frac{s}{2}}$$

satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \zeta_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \zeta_{s+2}^2} = 0.$$

D'après la formule (6′), si l'on pose

$$\begin{aligned} \zeta_1 \;\; &= a_1 z_1 + \ldots + a_p z_p - 1. \\ \zeta_2 \;\; &= \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_p^2}\, z_{p+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \zeta_{s+2} &= \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_p^2}\, z_{p+s+1}, \end{aligned}$$

la fonction F vérifie l'équation

$$\Delta^2 \mathrm{F} = \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z_{p+s+1}^2} = 0.$$

De plus cette fonction

$$\mathrm{F} = [(a_1 z_1 + \ldots + a_p z_p - 1)^2 + (a_1^2 + \ldots + a_p^2)(z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2)]^{-\frac{s}{2}}$$

admet la seule singularité

$$a_1 z_1 + \ldots + a_p z_p - 1 = 0, \qquad z_{p+1} = \ldots = z_{p+s+1} = 0,$$

qui est extérieure à l'hypersphère S, si l'on suppose $a_1^2 + \ldots + a_p^2 < 1$.

F est donc une fonction harmonique à l'intérieur de S. Soit F_s sa valeur sur S. M. Appell définit les polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}(x_1,\ldots,x_p)$ comme le coefficient de $a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p}$ dans le développement de F_s. Sa marche est inverse de celle que nous avons suivie.

V. — Étude des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}(x_1,\ldots,x_p)$.

Nous savons déjà qu'ils ont pour expression

$$(82)\quad U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}=\frac{(s,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_p)}\times\left[x_1^{m_1}\ldots x_p^{m_p}+\ldots+(-1)^j\frac{X_p^j}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1},\ldots,x_p^{m_p})}{(1,j)\left(\frac{s+1}{2},j\right)}+\ldots\right].$$

Il y a

$$\frac{(p,\mu)}{(1,\mu)}$$

de ces polynomes qui sont de degré μ et qui sont linéairement indépendants.

En nous rappelant l'expression donnée page 35,

$$(55)\quad \Delta^{2j}(x_1^{m_1}\ldots x_p^{m_p})=2^{2j}(1,j)\sum_{(j_1+\ldots+j_p=j)}\frac{\left(-\frac{m_1}{2},j_1\right)\left(\frac{1-m_1}{2},j_1\right)}{(1,j_1)}x_1^{m_1-2j_1}\ldots\times\frac{\left(-\frac{m_p}{2},j_p\right)\left(\frac{1-m_p}{2},j_p\right)}{(1,j_p)}x_p^{m_p-2j_p},$$

nous voyons que les polynomes U se rattachent encore aux fonctions hypergéométriques de plusieurs variables

$$(90)\quad U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}=\frac{(s,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_p)}x_1^{m_1}\ldots x_p^{m_p}\times F\left[-\frac{m_1}{2},\ldots,-\frac{m_p}{2},\frac{1-m_1}{2},\ldots,\frac{1-m_p}{2},\frac{s+1}{2},-\frac{X_p}{x_1^2},\ldots,-\frac{X_p}{x_p^2}\right],$$

formule qui est à rapprocher de la formule (E) du Tableau I.

Enfin, de (85), nous tirons cette expression élégante du groupe homogène

$$(91)\quad \sum_{m_1+\ldots+m_p=\mu} a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p}\,\mathrm{U}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}$$
$$= \frac{(s,\,\mu)}{(1,\,\mu)}\Bigg[(a_1x_1+\ldots+a_px_p)^\mu+\ldots$$
$$+(-1)^j\frac{\mathrm{X}_p^j}{2^{2j}}\times\frac{\Delta^{2j}(a_1x_1+\,\ldots+a_px_p)^\mu}{(1,j)\left(\frac{s+1}{2},\,j\right)}+\ldots\Bigg].$$

Dans le cas de $s=1$, Didon [1] a donné une relation analogue, mais sous une forme moins condensée.

Cette relation subsiste quelles que soient les valeurs des constantes a_1, ..., a_p réelles ou imaginaires; en particulier si elles sont telles que

$$a_1^2+\ldots+a_p^2=0$$

comme

$$\Delta^2[a_1x_1+\ldots+a_px_p]^\mu=0,$$

$$(91')\quad \sum_{m_1+\ldots,m_p=\mu} a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p}\,\mathrm{U}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}=\frac{(s,\,\mu)}{(1,\,\mu)}(a_1x_1+\ldots+a_px_p)^\mu.$$

Nous allons tirer de la formule (82) une expression très remarquable de $\mathrm{U}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}(x_1,\ldots,x_p)$.

Comme une des formules (55) peut s'écrire

$$\frac{1}{(1,j)}\Delta^{2j}(x_1^{m_1},\ldots,x_p^{m_p})=\sum_{j_1+\ldots+j_p=j}\frac{(-m_1,\,2j_1)}{(1,j_1)}x_1^{m_1-2j_1}\ldots\frac{(-m_p,\,2j_p)}{(1,j_p)}x_p^{m_p-2j_p},$$

nous voyons d'abord que

$$(92)\quad \mathrm{U}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}=\frac{(s,\,\mu)}{(1,\,m_1)\ldots(1,\,m_p)}\sum\frac{(-1)^j}{\left(\frac{s+1}{2},\,j\right)}\frac{\mathrm{X}_p^j}{2^{2j}}\frac{(-m_1,\,2j_1)}{(1,j_1)}x_1^{m_1-2j_1}\ldots$$
$$\times\frac{(-m_p,\,2j_p)}{(1,j_p)}x_p^{m_p-2j_p}.$$

---

[1] D_1, p. 258.

Ceci étant, nous allons généraliser une formule bien connue

$$\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x^2) = (2x)^n \varphi^{(n)}(x^2) + \ldots + (2x)^{n-2j}\frac{(-n,\,2j)}{(1,\,j)}\varphi^{(n-j)}(x^2) + \ldots,$$

où $\varphi^{(k)}(x^2)$ désigne la dérivée d'ordre k par rapport à x^2.

Considérons une fonction $\Phi(x_1^2, \ldots, x_p^2)$; nous désignerons par

$$D_{q_1, \ldots, q_p}\Phi$$

la dérivée de Φ prise q_1 fois par rapport à x_1^2, ..., q_p fois par rapport à x_p^2.

Par définition

$$\frac{\partial^\mu \Phi}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_p^{m_p}}$$

est le coefficient de

$$\frac{h_1^{m_1}\ldots h_p^{m_p}}{(1,\,m_1)\ldots(1,\,m_p)}$$

dans le développement de

$$\Phi[(x_1+h_1)^2, \ldots, (x_p+h_p)^2].$$

Or,

$$\begin{aligned}
&\Phi[(x_1+h_1)^2, \ldots, (x_p+h_p)^2] \\
&\quad = \Phi[x_1^2 + h_1(2x_1+h_1), \ldots, x_p^2 + h_p(2_p^2 + h_p(2x_p+h_p)] \\
&\quad = \sum \frac{h_1^{q_1}\ldots h_p^{q_p}}{(1,\,q_1)\ldots(1,\,q_p)}(2x_1+h_1)^{q_1}\ldots(2x_p+h_p)^{q_p} D_{q_1,\ldots,q_p}\Phi.
\end{aligned}$$

D'où nous tirons

$$(93)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial^\mu \Phi(x_1^2, \ldots, x_p^2)}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_p^{m_p}} &= 2^\mu \sum \frac{1}{2^{2j}}\frac{(-m_1,\,2j_1)}{(1,\,j_1)}\cdots\frac{(-m_p,\,2j_p)}{(1,\,j_p)} \\
&\quad \times x_1^{m_1-2j_1}\ldots x_p^{m_p-2j_p} D_{m_1-j_1,\ldots,m_p-j_p}\Phi.
\end{aligned}$$

C'est l'extension à une fonction de p variables $\Phi(x_1^2, \ldots, x_p^2)$ du résultat classique pour une fonction d'une variable $\varphi(x^2)$.

Si nous prenons, en particulier,

$$\Phi(x_1^2, \ldots, x_p^2) = (1 - x_1^2 - \ldots - x_p^2)^{\mu + \frac{s-1}{2}} = X_p^{\mu + \frac{s-1}{2}},$$

d'où

$$D_{m_1-j_1,\ldots,m_p-j_p}\Phi = (-1)^{\mu+j}\left(\mu+\frac{s-1}{2}\right)\left(\mu-1+\frac{s-1}{2}\right)\cdots\left(j+1+\frac{s-1}{2}\right)X_p^{j+\frac{s-1}{2}}$$

$$= (-1)^{\mu+j}\frac{\left(\frac{s+1}{2},\mu\right)}{\left(\frac{s+1}{2},j\right)}X_p^{j+\frac{s-1}{2}},$$

la formule (93) devient

$$\frac{\partial^{\mu}\left(X_p^{\mu+\frac{s-1}{2}}\right)}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_p^{m_p}} = 2^{\mu}(-1)^{\mu}\left(\frac{s+1}{2},\mu\right)X_p^{\frac{s-1}{2}}$$
$$\times\sum\frac{(-1)^j}{2^{2j}}\frac{X_p^j}{\left(\frac{s+1}{2},j\right)}\frac{(-m_1,2j_1)}{(1,j_1)}x_1^{m_1-2j_1}\cdots\frac{(-m_p,2j_p)}{(1,j_p)}x_p^{m_p-2j_p}.$$

Le simple rapprochement de cette dernière expression et de (92) nous conduit à ce beau résultat

$$(94)\quad U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}(x_1,\ldots,x_p)$$
$$= \frac{(-1)^{\mu}}{2^{\mu}}\frac{(s,\mu)}{\left(\frac{s+1}{2},\mu\right)}\frac{X_p^{\frac{1-s}{2}}}{(1,m_1)\ldots(1,m_p)}\frac{\partial^{\mu}}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_p^{m_p}}\left(X_p^{\mu+\frac{s-1}{2}}\right).$$

Il était déjà connu dans divers cas particuliers; quand $p=1$, c'est une application de la formule énoncée par Jacobi [1] pour les polynomes hypergéométriques; Hermite [2] l'a étendu aux polynomes à deux variables ($p=2$) pour $s=1$ et $s=2$; Didon [3] a considéré le cas de p variables, mais seulement pour $s=1$.

D'ailleurs, tandis que Hermite et Didon sont parvenus à des cas particuliers de (94) en employant leurs fonctions génératrices, nous nous sommes appuyés uniquement sur l'expression générale (82) de $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}$ formée *a priori*. Nous donnerons plus loin une autre démonstration de ce même résultat basée sur une méthode générale.

---

[1] C.-G.-J. Jacobi, *Untersuchungen uber die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LVI, 1859, p. 149-175).

[2] H., p. 328 et p. 342.

[3] D_1, *passim*.

De (94) se déduisent quelques-unes des propriétés les plus importantes de $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}$.

THÉORÈME. — *Soit* $P(x_1, \ldots, x_p)$ *un polynome arbitraire de degré inférieur à* μ.

$$\int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\frac{s-1}{2}} P\, U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}\, dx_1 \ldots dx_p = 0.$$

Considérons d'abord l'intégrale

$$\begin{aligned} I &= \int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\frac{s-1}{2}} F\, U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}\, dx_1 \ldots dx_p \\ &= \frac{(-1)^{\mu}}{2^{\mu}} \frac{(s.\ \mu)}{\left(\frac{s+1}{2}, \mu\right)} \frac{1}{(1, m_1) \ldots (1, m_p)} \int_{(X_p \geqq 0)}^{p} F \frac{\partial^{\mu}\left(X_p^{\mu + \frac{s-1}{2}}\right)}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_p^{m_p}} dx_1 \ldots dx_p, \end{aligned}$$

où F désigne une fonction quelconque. D'après une formule démontrée par Hermite ([1]),

$$I = \frac{1}{2^{\mu}} \frac{(s,\ \mu)}{\left(\frac{s+1}{2}, \mu\right)} \frac{1}{(1, m_1) \ldots (1, m_p)} \times \int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\mu + \frac{s-1}{2}} \frac{\partial^{\mu} F}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_p^{m_p}} dx_1 \ldots dx_p. \tag{95}$$

Donc, si F désigne un polynome P de degré inférieur à μ,

$$I = 0.$$

Si nous prenons, en particulier,

$$F = V^{(s)}_{q_1,\ldots,q_p}(x_1, \ldots, x_p),$$

pour $q_1 + \ldots + q_p < \mu$,

$$I = 0;$$

pour $q_1 + \ldots + q_p = \mu$ (comme d'après la page 45 le terme du plus haut degré de $V^{(s)}_{q_1,\ldots,q_p}$ est un terme en $x_1^{q_1} \ldots x_p^{q_p}$), si l'on n'a pas à la

([1]) H., p. 329.

fois $q_1 = m_1, \ldots, q_p = m_p$,
$$I = 0;$$
dans le cas contraire,
$$I = \frac{(s,\mu)}{\left(\frac{s+1}{2},\mu\right)} \frac{\left(\frac{p+s-1}{2},\mu\right)}{(1,m_1)\ldots(1,m_p)} \int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\mu+\frac{s-1}{2}} dx_1\ldots dx_p.$$
Or,
$$\int_{(X_p\geqq 0)}^{p} X_p^{\mu+\frac{s-1}{2}} dx_1\ldots dx_p = \pi^{\frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{p+s+1}{2}\right)}$$
$$= \pi^{\frac{p}{2}} \frac{\left(\frac{s+1}{2},\mu\right)}{\left(\frac{p+s+1}{2},\mu\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+s+1}{2}\right)},$$
$$I = \frac{p+s-1}{2\mu+p+s-1} \pi^{\frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+s+1}{2}\right)} \frac{(s,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_p)}.$$

Nous retrouvons ainsi, par une autre voie, la formule (84) qui a servi de point de départ.

VI. — Système d'équations aux dérivées partielles des polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}$.

Nous avons vu que $V^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}$ vérifie les p équations
$$(F)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left\{\dfrac{\partial V}{\partial x_j} - x_j\left[x_1\dfrac{\partial V}{\partial x_1}+\ldots+x_p\dfrac{\partial V}{\partial x_p}+(\mu+p+s-1)V\right]\right\} \\ \qquad + (m_j+1)\left[x_1\dfrac{\partial V}{\partial x_1}+\ldots+x_p\dfrac{\partial V}{\partial x_p}+(\mu+p+s-1)V\right] = 0 \\ \qquad\qquad (j=1,2,\ldots,p); \end{cases}$$
nous tirerons de (94) des équations analogues pour $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}$.

Soit d'abord
$$R = \frac{\partial^{\mu}(X_p^{\lambda})}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_p^{m_p}},$$

λ désignant un nombre quelconque; nous voyons sans peine que

$$x_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + \ldots + x_p \frac{\partial R}{\partial x_p} - (2\lambda - \mu) R = -2\lambda \frac{\partial^{\mu} (X_p^{\lambda-1})}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_p^{m_p}}.$$

En outre,

$$\frac{\partial (X_p^{\lambda})}{\partial x_j} = -2\lambda x_j X_p^{\lambda-1}.$$

Dérivons cette dernière égalité m_1 fois par rapport à $x_1, \ldots,$ $(m_j + 1)$ fois par rapport à $x_j, \ldots, m_p$ fois par rapport à x_p

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} = -2\lambda x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial^{\mu} (X_p^{\lambda-1})}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_p^{m_p}} \right] - 2\lambda (m_j + 1) \left[\frac{\partial^{\mu} (X_p^{\lambda-1})}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_p^{m_p}} \right];$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} = \quad & x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[x_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + \ldots + x_p \frac{\partial R}{\partial x_p} + (\mu - 2\lambda) R \right] \\ & + (m_j + 1) \left[x_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + \ldots + x_p \frac{\partial R}{\partial x_p} + (\mu - 2\lambda) R \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_j} - x_j \left[x_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + \ldots + x_p \frac{\partial R}{\partial x_p} + (\mu - 2\lambda) R \right] \right\} \\ & \qquad - m_j \left[x_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + \ldots + x_p \frac{\partial R}{\partial x_p} + (\mu - 2\lambda) R \right] = 0. \end{aligned}$$

Si dans R nous posons maintenant

$$\lambda = \mu + \frac{s-1}{2},$$

R devient à un facteur constant près la fonction

$$X_p^{\frac{s-1}{2}} U_{m_1, \ldots, m_p}^{(s)}.$$

Celle-ci vérifie donc le système d'équations

$$(96) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_j} - x_j \left[x_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + \ldots + x_p \frac{\partial R}{\partial x_p} - (\mu + s - 1) R \right] \right\} \\ & \qquad - m_j \left[x_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + \ldots + x_p \frac{\partial R}{\partial x_p} - (\mu + s - 1) R \right] = 0 \\ & \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned} \right.$$

En développant les calculs, les equations (F) et (96) peuvent s'écrire

$$(97)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} - \sum_{k=1}^{k=p} x_j x_k \frac{\partial^2 V}{\partial x_j\,\partial x_k} - (\mu + p + s) x_j \frac{\partial V}{\partial x_j} + m_j \sum_{k=1}^{k=p} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k} + m_j(\mu + p + s - 1)V = 0$$

et

$$(98)\quad \frac{\partial^2 R}{\partial x_j^2} - \sum_{k=1}^{k=p} x_j x_k \frac{\partial^2 R}{\partial x_j\,\partial x_k} + (\mu + s - 2) x_j \frac{\partial R}{\partial x_j} - (m_j + 1) \sum_{k=1}^{k=p} x_k \frac{\partial R}{\partial x_k} + (m_j + 1)(\mu + s - 1) R = 0.$$

Or, l'equation adjointe, au sens de Lagrange, de l'equation (97) est donnée par la formule [1]

$$A(V) = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(V) - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}(x_j x_k V) + (\mu + p + s)\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j V) - m_j \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial}{\partial x_k}(x_k V) + m_j(\mu + p + s - 1)V.$$

Mais

$$\sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}(x_j x_k V) = (p+2) x_j \frac{\partial V}{\partial x_j} + (p+1)V + \sum_{k=1}^{k=p}\left(x_k \frac{\partial V}{\partial x_k} + x_j x_k \frac{\partial^2 V}{\partial x_j\,\partial x_k}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{k=p} \frac{\partial}{\partial x_k}(x_k V) = pV + \sum_{k=1}^{k=p} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k},$$

(1) *Cf.* G. DARBOUX, *Leçons sur la theorie generale des surfaces*, t. II, p. 73.

d'où

$$A(V) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j^2} - \sum_{k=1}^{k=p} x_k x_j \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}$$

$$+ (\mu + p + s - p - 2) x_j \frac{\partial V}{\partial x_j} - (m_j + 1) \sum_{k=1}^{k=p} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}$$

$$+ [m_j(\mu + p + s - 1) - pm_j - (p + 1) + (\mu + p + s)] V.$$

L'équation (98) n'est donc pas autre chose que

$$A(R) = 0,$$

d'où :

THEOREME. — *La fonction*

$$R = X_p^{\frac{s-1}{2}} U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}$$

vérifie un système de p équations aux dérivées partielles, qui sont les équations adjointes de celles des polynomes $V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}$. *Ce système est donné par la formule* (96)

$$(96) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_j} - x_j \left[x_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + \ldots + x_p \frac{\partial R}{\partial x_p} - (\mu + s - 1) R \right] \right\} \\ &\qquad - m_j \left[x_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + \ldots + x_p \frac{\partial R}{\partial x_p} - (\mu + s - 1) R \right] = 0 \\ &\qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned} \right.$$

L'équation obtenue en faisant la somme de ces p équations s'écrit :

$$(96') \quad \mu(\mu + p + s - 1) R + \sum_{j=1}^{j=p} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial R}{\partial x_j} - x_j \left[x_1 \frac{\partial R}{\partial x_1} + \ldots + x_p \frac{\partial R}{\partial x_p} - (s - 1) R \right] \right\} = 0.$$

De cette dernière relation, on deduit pour $U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}$, par un calcul analogue à celui de la page 16 :

$$(99) \quad (\mu + p)(\mu + s - 1) U + \sum_{j=1}^{j=p} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x_j} - x_j \left[x_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \ldots + x_p \frac{\partial U}{\partial x_p} + (s - 1) U \right] \right\} = 0,$$

équation identique à l'équation (G) du Tableau I, obtenue pour $V^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}$ en additionnant les p équations (F).

Les équations (96′) et (G) étant adjointes (cela résulte immédiatement du théorème), en désignant par $\mathcal{A}(R)$ et $\mathcal{B}(V)$ leurs premiers membres, nous avons :

$$(100)\quad V\mathcal{A}(R) - R\mathcal{B}(V) \equiv \sum_{j=1}^{j=p} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[V\left(\frac{\partial R}{\partial x_j} - x_j \sum_{k=1}^{k=p} x_k \frac{\partial R}{\partial x_k}\right) - R\left(\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j \sum_{1}^{k=p} x_k \frac{\partial V}{\partial x_k}\right) + (s-1)x_j RV \right].$$

VII. — Valeur maximum de $U^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}$ dans le domaine $X_p \geqq 0$.

La formule (82) montre que, dans le domaine $X_p \geqq 0$, $U^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}$ atteint sa plus grande valeur sur la frontière $X_p = 0$; comme dans ce cas

$$U^{(s)}_{m_1,\dots,m_p} = \frac{(s,\mu)}{(1,m_1)\dots(1,m_p)} x_1^{m_1}\dots x_p^{m_p}$$

et que cette expression est elle-même maximum pour

$$x_1^2 = \frac{m_1}{\mu},\qquad \dots,\qquad x_{p-1}^2 = \frac{m_{p-1}}{\mu},\qquad x_p^2 = 1 - x_1^2 - \dots - x_{p-1}^2 = \frac{m_p}{\mu},$$

nous voyons que

$$(101)\quad |U^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}(x_1,\dots,x_p)| < \frac{(s,\mu)}{\mu^{\frac{\mu}{2}}} \frac{m_1^{\frac{m_1}{2}}}{(1,m_1)} \dots \frac{m_p^{\frac{m_p}{2}}}{(1,m_p)} \qquad (\text{pour } X_p \geqq 0).$$

Dans le cas particulier qu'il a envisagé ($p = 2$, $s = 1$), Hermite [1] a déjà donné cette formule.

---

[1] H., p. 332 (Remarque).

CHAPITRE IV.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION ARBITRAIRE EN SÉRIE DE POLYNOMES HYPERSPHERIQUES ZONAUX.

I.

Pour mettre une fonction donnée $F(x_1, \ldots, x_p)$ sous la forme

$$F(x_1, \ldots, x_p) = \Sigma A_{m_1, \ldots, m_p} V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}(x_1, \ldots, x_p), \tag{102}$$

nous pouvons maintenant nous servir de la méthode de Fourier; multiplions les deux membres par

$$X_p^{\frac{s-1}{2}} U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p} dx_1 \ldots dx_p,$$

et intégrons dans le domaine $X_p \geqq 0$. En tenant compte des formules (83) et (84), nous obtenons immédiatement

$$\begin{aligned} &\int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\frac{s-1}{2}} U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p} F \, dx_1 \ldots dx_p \\ &= \frac{p+s-1}{2\mu + p + s - 1} \, \frac{(s, \mu)}{(1, m_1) \ldots (1, m_p)} \, \pi^{\frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+s+1}{2}\right)} A_{m_1, \ldots, m_p}, \end{aligned} \tag{103}$$

relation qui détermine le coefficient $A_{m_1, \ldots, m_p}$ à condition que l'intégrale du premier membre ait un sens.

Reste à savoir dans quels cas la série (102), où l'on remplace les $A_{m_1, \ldots, m_p}$ par leurs valeurs (103), converge effectivement et représente la fonction $F(x_1, \ldots, x_p)$ dans le domaine $X_p \geqq 0$.

Nous ne ferons, pour le moment, qu'effleurer la question, en indiquant un cas où l'on peut affirmer la convergence de la série (102).

Supposons la fonction F, telle que la formule (95) soit applicable,

$$(104)\qquad \int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\mu + \frac{s-1}{2}} \frac{\partial^\mu F}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_p^{m_p}} dx_1 \ldots dx_p$$

$$= 2^\mu \frac{p+s-1}{2\mu + p + s - 1} \left(\frac{s+1}{2}, \mu\right) \pi^{\frac{p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+s+1}{2}\right)} A_{m_1, \ldots, m_p}.$$

Si la fonction F est telle qu'on ait dans tout le domaine $X_p \geqq 0$

$$\left| \frac{\partial^\mu F}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_p^{m_p}} \right| < H_{m_1, \ldots, m_p},$$

nous en tirons :

$$\int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\mu + \frac{s-1}{2}} \frac{\partial^\mu F}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_p^{m_p}} dx_1 \ldots dx_p$$

$$< H_{m_1, \ldots, m_p} \int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\mu + \frac{s-1}{2}} dx_1 \ldots dx_p$$

$$< H_{m_1, \ldots, m_p} \pi^{\frac{p}{2}} \frac{\left(\frac{s+1}{2}, \mu\right)}{\left(\frac{p+s+1}{2}, \mu\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+s+1}{2}\right)}.$$

La formule (104) nous donne

$$(105)\qquad \frac{H_{m_1, \ldots, m_p}}{\left(\frac{p+s+1}{2}, \mu\right)} > 2^\mu \frac{p+s-1}{2\mu + p + s - 1} A_{m_1, \ldots, m_p}$$

ou

$$(105')\qquad A_{m_1, \ldots, m_p} < \frac{1}{2^\mu} \cdot \frac{H_{m_1, \ldots, m_p}}{\left(\frac{p+s-1}{2}, \mu\right)}.$$

Donc si

$$\frac{H_{m_1, \ldots, m_p}}{\left(\frac{p+s-1}{2}, \mu\right)} < \frac{H}{p^{\frac{\mu}{2}}},$$

nous voyons que

$$\Sigma A_{m_1, \ldots, m_p} V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p} < H \sum \frac{1}{p^{\frac{\mu}{2}}} \frac{1}{2^\mu} V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}.$$

Or, la série du second membre est évidemment convergente, puisqu'elle est identique à la série (A) pour

$$a_1 = \frac{1}{2\sqrt{p}}, \qquad \ldots, \qquad a_p = \frac{1}{2\sqrt{p}}; \qquad a_1^2 + \ldots + a_p^2 = \frac{1}{2^2} < 1.$$

Donnons un exemple de développement obtenu au moyen de la formule (104). Stieltjes [1] a indiqué le développement suivant :

$$\frac{2^\omega}{(1-x)^\omega} = \frac{1}{1-\omega} + \frac{3\omega}{(1-\omega)(2-\omega)} V_1^{(1)}(x) + \ldots$$
$$+ (2m+1)\frac{(\omega, m)}{(1-\omega, m+1)} V_m^{(1)}(x) + \ldots \qquad (0 < \omega < 1),$$

et il a démontré sa convergence :

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des constantes assujetties à la condition

$$\lambda_1^2 + \ldots + \lambda_p^2 = 1;$$

considérons la fonction

$$F = (1 - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_p x_p)^{-\omega} \qquad (0 < \omega < 1);$$

ici

$$\frac{\partial^\mu F}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_p^{m_p}} = \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_p^{m_p} (\omega, \mu)(1 - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_p x_p)^{-(\omega+\mu)}.$$

Tout est ramené au calcul de

$$I = \int_{(X_p \geqq 0)}^{p} \frac{X_p^{\mu + \frac{s-1}{2}}}{(1 - \lambda_1 x_1 - \ldots - \lambda_p x_p)^{\omega+\mu}} dx_1 \ldots dx_p.$$

Nous trouvons ainsi sans peine

$$A_{m_1, \ldots, m_p} = 2^{p+s-2-\omega} \frac{2\mu + p + s - 1}{\sqrt{\pi}}$$
$$\times (\omega, \mu) \frac{\Gamma\left(\frac{p+s-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+s}{2} - \omega\right)}{\Gamma(\mu + p + s - \omega)} \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_p^{m_p};$$

quand on fait dans cette expression $p = 1$, $s = 1$, on retrouve bien la

---

[1] T.-J. Stieltjes, *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, t. II, p. 46.

formule de Stieltjes :

$$A_\mu = 2^{-\omega}(2\mu+1)(\omega,\mu)\frac{\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(\mu+2-\omega)}.$$

II.

Cherchons maintenant à mettre une fonction $F(x_1, \ldots, x_p)$ sous la forme

$$(106)\qquad F(x_1, \ldots, x_p) = \Sigma B_{m_1, \ldots, m_p} U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}(x_1, \ldots, x_p).$$

La méthode de Fourier nous donne ici

$$(107)\qquad \int_{(X_p \geqq 0)}^{p} X_p^{\frac{s-1}{2}} F V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p} dx_1 \ldots dx_p$$

$$= \frac{p+s-1}{2\mu+p+s-1}\,\frac{(s,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_p)}\,\pi^{\frac{p}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+s+1}{2}\right)} B_{m_1, \ldots, m_p},$$

relation qui détermine les coefficients $B_{m_1, \ldots, m_p}$.

Mais ici nous pouvons obtenir de précieux renseignements sur la convergence du developpement (106), en rapprochant la formule (107) de la formule (I) du Tableau I.

Soit, en effet, $\Phi(z_1, \ldots, z_{p+s+1})$ la fonction harmonique dans le domaine intérieur S, qui sur S se réduit à $F(x_1, \ldots, x_p)$; autrement dit, c'est la solution du problème de Dirichlet avec la condition aux frontières

$$\Phi_S = F.$$

Supposons cette fonction telle qu'on ait le développement

$$\Phi(z_1, \ldots, z_p, 0, \ldots, 0) = \Sigma z_1^{m_1} \ldots z_p^{m_p} K_{m_1, \ldots, m_p},$$

convergent pour

$$z_1^2 + \ldots + z_p^2 < 1.$$

Nous savons que

$$(\mathrm{I})\qquad \int_{(X_p\geqq 0)}^{p} X_p^{\frac{s-1}{2}} F V_{m_1,\dots,m_p}^{(s)}\, dx_1\dots dx_p = \frac{p+s-1}{2\mu+p+s-1}\,\pi^{\frac{p}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+s+1}{2}\right)} K_{m_1,\dots,m_p}.$$

Par simple quotient des formules (107) et (I), nous obtenons l'importante relation

$$(108)\qquad B_{m_1,\dots,m_p} = \frac{(1, m_1)\dots(1, m_p)}{(s, \mu)} K_{m_1,\dots,m_p}.$$

Si donc, par un procédé quelconque, on a pu former la fonction Φ correspondant à F, les coefficients B se trouvent par là même déterminés.

De plus, d'après la formule (101), pour $X_p \geqq 0$,

$$\left|\frac{(1, m_1)\dots(1, m_p)}{(s, \mu)} U_{m_1,\dots,m_p}^{(s)}\right| < \frac{m_1^{\frac{m_1}{2}}\dots m_p^{\frac{m_p}{2}}}{\mu^{\frac{\mu}{2}}},$$

d'où

$$|B_{m_1,\dots,m_p} U_{m_1,\dots,m_p}^{(s)}| < \frac{m_1^{\frac{m_1}{2}}\dots m_p^{\frac{m_p}{2}}}{\mu^{\frac{\mu}{2}}} K_{m_1,\dots,m_p} < K_{m_1,\dots,m_p}.$$

La série des K est donc majorante pour le développement (106).

La relation (108) peut s'obtenir par une autre voie; en effet, à la fonction donnée sur l'hypersphère S,

$$(106)\qquad F(x_1,\dots x_p) = \Sigma B_{m_1,\dots,m_p} U_{m_1,\dots,m_p}^{(s)},$$

correspond la fonction, harmonique à l'intérieur de S,

$$\Phi(z_1,\dots,z_{p+s+1}) = \Sigma B_{m_1,\dots,m_p} \mathcal{V}_{m_1,\dots,m_p}^{(s)}.$$

Comme

$$\mathcal{V}_{m_1,\dots,m_p}^{(s)}(z_1,\dots,z_p,0,\dots,0) = \frac{(s,\mu)}{(1, m_1)\dots(1, m_p)} z_1^{m_1}\dots z_p^{m_p},$$

nous voyons que

$$\Phi(z_1, \ldots, z_p, 0, \ldots, 0) = \Sigma B_{m_1,\ldots,m_p} \frac{(s, \mu)}{(1, m_1) \ldots (1, m_p)} z_1^{m_1} \ldots z_p^{m_p}.$$

Or, nous avions posé

$$\Phi(z_1, \ldots, z_p, 0, \ldots, 0) = \Sigma K_{m_1,\ldots,m_p} z_1^{m_1} \ldots z_p^{m_p}.$$

Le simple rapprochement de ces deux développements redonne bien la formule (108).

Exemple. — Soit $J_\lambda(u)$ la fonction de Bessel de première espèce; posons

$$G_\lambda(u) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\left(\frac{u}{2}\right)^\lambda} J_\lambda(u);$$

de sorte que

$$G_\lambda(0) = 1;$$

de plus,

$$u \frac{d^2 G_\lambda}{du^2} + (2\lambda + 1) \frac{dG_\lambda}{du} + u G_\lambda = 0.$$

Cherchons une fonction harmonique de la forme

$$\Phi = \varphi_1(z_1) \ldots \varphi_p(z_p) \psi\left(k\sqrt{z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2}\right).$$

Comme

$$\frac{1}{\varphi_1 \ldots \varphi_p} \Delta^2 \Phi = \left[\frac{\varphi_1''}{\varphi_1} + \ldots + \frac{\varphi_p''}{\varphi_p}\right] \psi + k \frac{s}{\sqrt{z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2}} \psi' + k^2 \psi'',$$

on aura

$$\Delta^2 \Phi = 0$$

si

$$\frac{\varphi_1''}{\varphi_1} = a_1^2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\varphi_p''}{\varphi_p} = a_p^2, \qquad k^2 = a_1^2 + \ldots + a_p^2,$$

$$k\psi + \frac{s}{\sqrt{z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2}} \psi' + k\psi'' = 0.$$

Donc la fonction

$$\Phi = e^{a_1 z_1 + \ldots + a_p z_p} G_{\frac{s-1}{2}}\left[\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_p^2} \sqrt{z_{p+1}^2 + \ldots + z_{p+s+1}^2}\right]$$

est harmonique; de plus,

$$\Phi(z_1, \ldots, z_p, 0, \ldots, 0) = e^{a_1 z_1 + \ldots + a_p z_p} = \sum \frac{a_1^{m_1} \ldots a_p^{m_p}}{(1, m_1) \ldots (1, m_p)} z_1^{m_1} \ldots z_p^{m_p};$$

d'où

$$\Phi = \sum \frac{a_1^{m_1} \ldots a_p^{m_p}}{(s, \mu)} \mathcal{V}^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}.$$

En particulier [1] sur S

$$e^{a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p} G_{\frac{s-1}{2}}\left[A_p \sqrt{X_p}\right] = \sum \frac{a_1^{m_1} \ldots a_p^{m_p}}{(s, \mu)} U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}, \tag{109}$$

où

$$A_p^2 = a_1^2 + \ldots + a_p^2,$$

ou sous une autre forme

$$e^{a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p} J_{\frac{s-1}{2}}\left[A_p \sqrt{X_p}\right] = \left(\frac{A_p \sqrt{X_p}}{2}\right)^{\frac{s-1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \sum \frac{a_1^{m_1} \ldots a_p^{m_p}}{(s, \mu)} U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}. \tag{109'}$$

Le développement (109) *fait apparaître des liaisons entre les fonctions de Bessel et les polynomes hypersphériques* $U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}$. Nous nous contenterons [2] d'en déduire une expression élégante du groupe homogène sous forme d'intégrale définie. En effet, la formule bien connue

$$G_\lambda(u) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} e^{iu\cos\omega} \sin^{2\lambda}\omega \, d\omega$$

permet de mettre le développement (109) sous la forme

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{2\pi} e^{[a_1 x_1 + \ldots + a_p x_p + i A_p \sqrt{X_p} \cos\omega]} \sin^{s-1}\omega \, d\omega = \sum \frac{a_1^{m_1} \ldots a_p^{m_p}}{(s, \mu)} U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p},$$

---

[1] *Cf.* ma Note du 22 décembre 1913 (*Comptes rendus*, t. CLVII, p. 1392).

[2] *Cf.* E.-W. Hobson, *On Bessel's Functions and Relations connecting them with Hyperspherical and Spherical Harmonics* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, t. XXV, 1893, p. 49).

ce qui donne, par simple identification, l'expression suivante du groupe homogène

$$(110)\quad \sum_{m_1+\ldots+m_p=\mu} a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p}\,\mathrm{U}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}$$
$$=\frac{(s,\mu)}{(1,\mu)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$
$$\times\int_0^{2\pi}\left[a_1x_1+\ldots+a_px_p+i\,\mathrm{A}_p\sqrt{\mathrm{X}_p}\cos\omega\right]^{\mu}\sin^{s-1}\omega\,d\omega.$$

On peut la rapprocher de la formule (91), qui donne l'expression générale de ce groupe homogène.

III.

La méthode de développement donnée au paragraphe précédent conduit à certaines propriétés nouvelles des polynomes $\mathrm{U}^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}$; elle permet aussi de retrouver très simplement la formule fondamentale (94).

La racine de l'équation

$$u=x+a\,\varphi(u),$$

qui se réduit à x pour $a=0$, a été mise par Lagrange [1] sous une forme remarquable; plus généralement, il a donné la formule

$$f(u)=f(x)+a\,\varphi(x)\,f'(x)+\ldots.$$

Laplace [2] s'est proposé, étant données les deux équations

$$u=x+a\,\varphi(u,v),$$
$$v=y+b\,\psi(u,v),$$

[1] Lagrange, *Sur une nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales au moyen des séries* (*OEuvres*, t. III, p. 5).

[2] Laplace, *Mécanique céleste*, t. I, Liv. II, p. 198.

de trouver un développement analogue

$$f(u, v) = f(x, y) + a\varphi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + b\psi(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} + \dots$$

Mais son résultat, peu symétrique, se prête difficilement aux applications. C'est la forme élégante donnée par Hermite à la série de Lagrange

$$\frac{F(u)}{1 - a\varphi'(u)} = F(u)\frac{du}{dx} = \sum \frac{a^m}{(1, m)} \frac{d^m}{dx^m}[F(x)\varphi^m(x)],$$

qui a conduit M. Darboux (1) à la généraliser ainsi

$$F(u, v)\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \sum \frac{a^m}{(1, m)} \frac{b^n}{(1, n)} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}[F\varphi^m\psi^n].$$

Diverses démonstrations ont été données de ce résultat; Stieltjes (2) en a proposé une qui prête à certaines critiques; Poincaré (3) l'a établi rigoureusement en utilisant les résidus des intégrales doubles. Cette formule s'étend d'ailleurs aux cas de p variables; on peut y parvenir sans employer, comme Poincaré, les propriétés des fonctions de plusieurs variables complexes.

Considérons les p équations simultanées

$$u_j = x_j + a_j\varphi_j(u_1, \dots, u_p) \qquad (j = 1, 2, \dots, p). \tag{111}$$

Supposons que, pour $a_1 = \dots = a_p = 0$,

$$\frac{D(u_1, \dots, u_p)}{D(x_1, \dots, x_p)} \neq 0.$$

Les équations (111) admettent alors p racines

$$u_1, \dots, u_p$$

qui se réduisent à

$$x_1, \dots, x_p \quad \text{pour} \quad a_1 = \dots = a_p = 0.$$

---

(1) *Cf.* HERMITE, *Cours d'Analyse*, 4e édition, p. 182; G. DARBOUX, *Sur la série de Laplace* (*Comptes rendus*, t. LXVIII, p 324).

(2) T.-J. STIELTJES, *Sur une généralisation de la serie de Lagrange* (*Ann. de l'École Normale supér.*, 3e série, t. II, 1885, p. 93).

(3) H. POINCARÉ, *Sur les résidus des intégrales doubles* (*Acta mathematica*, t. IX).

Soit $F(u_1, \ldots, u_p)$ une fonction donnée de ces racines; la *formule de Lagrange généralisée* s'écrit

$$(112)\qquad F(u_1, \ldots, u_p)\frac{D(u_1, \ldots, u_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)} = \sum \frac{a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p}}{(1, m_1)\ldots(1, m_p)} \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_p^{m_p}}[\varphi_1^{m_1}\ldots\varphi_p^{m_p} F].$$

Dans le cas particulier où $\varphi_1 = \ldots = \varphi_p = \varphi(u_1, \ldots, u_p)$,

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_p)}{D(u_1, \ldots, u_p)} = 1 - a_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - \ldots - a_p\frac{\partial\varphi}{\partial u_p}.$$

Soit donc ξ une racine de l'équation

$$\mathcal{F}(\xi) = \xi - \varphi(x_1 + a_1\xi, \ldots, x_p + a_p\xi) = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 + a_1\xi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_p &= x_p + a_p\xi, \end{aligned}$$

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_p)}{D(u_1, \ldots, u_p)} = 1 - a_1\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - \ldots - a_p\frac{\partial\varphi}{\partial u_p} = \frac{d\mathcal{F}}{d\xi}.$$

Dans ce cas particulier, la formule de Lagrange généralisée se réduit à la formule découverte par Hermite [1] :

$$(113)\qquad \frac{F(x_1 + a_1\xi, \ldots, x_p + a_p\xi)}{\dfrac{d\mathcal{F}}{d\xi}} = \sum \frac{a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p}}{(1, m_1)\ldots(1, m_p)} \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_p^{m_p}}[\varphi^\mu F].$$

Si nous supposons en outre que

$$F(u_1, \ldots, u_p) \equiv \Phi[\varphi(u_1, \ldots, u_p)],$$

$$F(x_1 + a_1\xi, \ldots, x_p + a_p\xi) \equiv \Phi(\xi),$$

$$(113')\qquad \frac{\Phi(\xi)}{\dfrac{d\mathcal{F}}{d\xi}} = \sum \frac{a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p}}{(1, m_1)\ldots(1, m_p)} \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_p^{m_p}}[\varphi^\mu \Phi(\varphi)].$$

---

[1] H., p. 328.

Appliquons ces résultats au cas particulier suivant

$$\varphi(u_1, \ldots, u_p) = \frac{u_1^2 + \ldots + u_p^2 - 1}{2},$$

d'où

$$\mathcal{F}(\xi) = \xi - \frac{1}{2}[(x_1 + a_1\xi)^2 + \ldots + (x_p + a_p\xi)^2 - 1] = 0,$$

et prenons en outre

$$F(u_1, \ldots, u_p) = (1 - u_1^2 - \ldots - u_p^2)^{\frac{s-1}{2}} = (-2\xi)^{\frac{s-1}{2}}.$$

D'après la relation (113'),

$$\frac{(-2\xi)^{\frac{s-1}{2}}}{\frac{d\mathcal{F}}{d\xi}} = \sum \frac{a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p}}{(1, m_1)\ldots(1, m_p)} \frac{(-1)^\mu}{2^\mu} \frac{\partial^\mu\left(X_p^{\mu+\frac{s-1}{2}}\right)}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_p^{m_p}}.$$

Mais ici

$$-2\mathcal{F}(\xi) = (a_1^2 + \ldots + a_p^2)\xi^2 + 2[a_1x_1 + \ldots + a_px_p - 1]\xi + (x_1^2 + \ldots + x_p^2 - 1) = 0,$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\xi} = \sqrt{(a_1x_1 + \ldots + a_px_p - 1)^2 + (a_1^2 + \ldots + a_p^2)(1 - x_1^2 - \ldots - x_p^2)},$$

$$-\frac{\xi}{X_p} = [1 - a_1x_1 - \ldots - a_px_p$$
$$+ \sqrt{(a_1x_1 + \ldots + a_px_p - 1)^2 + (a_1^2 + \ldots + a_p^2)(1 - x_1^2 - \ldots - x_p^2)}]^{-1}.$$

Soit donc :

$$(114)\quad \Psi(x_1, \ldots, x_p) = \sum \frac{a_1^{m_1}}{(1, m_1)} \cdots \frac{a_p^{m_p}}{(1, m_p)} \frac{(-1)^\mu}{2^\mu} X_p^{\frac{1-s}{2}} \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_p^{m_p}}\left(X_p^{\mu+\frac{s-1}{2}}\right);$$

nous voyons que

$$\Psi = 2^{\frac{s-1}{2}}\left[H_p + \sqrt{H_p^2 + A_pX_p}\right]^{\frac{1-s}{2}}[H_p^2 + A_pX_p]^{-\frac{1}{2}},$$

où

$$H_p = 1 - a_1x_1 - \ldots - a_px_p,$$

$$A_p = a_1^2 + \ldots + a_p^2, \qquad X_p = 1 - x_1^2 - \ldots - x_p^2.$$

Or, si nous posons

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{1 - a_1 z_1 - \ldots - a_p z_p}{\sqrt{A_p}},\\
\zeta_2 &= z_{p+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\zeta_{s+2} &= z_{p+s+1},
\end{aligned}$$

Ψ peut être considérée comme la valeur que prend sur l'hypersphère S la fonction

$$\Phi = 2^{\frac{s-1}{2}} A_p^{-\frac{s}{4}} \left(\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_{s+2}^2}\right)^{\frac{1-s}{2}} (\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_{s+2}^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

On voit sans aucune peine que Φ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta_{s+2}^2} = 0;$$

la substitution par laquelle on passe des ζ au z étant orthogonale, Φ vérifie donc l'équation

$$\Delta^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_{p+s+1}^2} = 0.$$

De plus, si $A_p < 1$, Φ reste finie à l'intérieur de S; pour développer Ψ en série de polynomes $U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}$, la méthode de la page 73 est donc applicable.

Or

$$\begin{aligned}
\Phi(z_1, \ldots, z_p, 0, \ldots, 0) &= (1 - a_1 z_1 - \ldots - a_p z_p)^{-\frac{s+1}{2}}\\
&= \sum \frac{\left(\frac{s+1}{2}, \mu\right)}{(1, m_1)\ldots(1, m_p)} a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p} z_1^{m_1}\ldots z_p^{m_p}.
\end{aligned}$$

Donc, d'après la formule (108),

$$\Psi(x_1, \ldots, x_p) = \sum \frac{\left(\frac{s+1}{2}, \mu\right)}{(s, \mu)} a_1^{m_1}\ldots a_p^{m_p} U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p}.$$

En rapprochant de la formule (114) ce développement de Ψ, nous retrouvons la relation (94)

$$U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_p} = \frac{(s, \mu)}{\left(\frac{s+1}{2}, \mu\right)} \frac{(-1)^\mu}{2^\mu} \frac{X_p^{\frac{1-s}{2}}}{(1, m_1)\ldots(1, m_p)} \frac{\partial^\mu\left(X_p^{\mu+\frac{s-1}{2}}\right)}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_p^{m_p}}.$$

Nous voyons, en outre, que la fonction génératrice de ces polynomes peut s'écrire

$$[(a_1x_1+\ldots+a_px_p-1)^2+(a_1^2+\ldots+a_p^2)(1-x_1^2-\ldots-x_p^2)]^{-\frac{s}{2}}$$
$$\equiv\left(\frac{d\mathfrak{F}}{d\xi}\right)^s\equiv\left[\frac{D(u_1, \ldots, u_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)}\right]^s.$$

CHAPITRE V.

EXPRESSION GENERALE DES FONCTIONS HYPERSPHERIQUES.

I.

Nous reprendrons dans ce Chapitre les notations du début; les coordonnées cartésiennes d'un point P sont

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n, \quad z_{n+1}, \quad z_{n+2};$$

ses coordonnées sphériques

$$r, \quad \varphi, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_n$$
$$(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \ X_n = 1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 \geqq 0);$$

ses coordonnées polaires

$$r, \quad \varphi, \quad \theta_1, \quad \ldots, \quad \theta_n$$
$$(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \ 0 \leqq \theta_1 \leqq \pi, \ \ldots, \ 0 \leqq \theta_n \leqq \pi).$$

Examinons comment les résultats des Chapitres II et III réalisent le but proposé : l'étude des polynomes harmoniques homogènes ou, ce qui revient au même, des fonctions hyperspheriques de degré μ et d'ordre k.

Pour les fonctions hypersphériques zonales ($k=0$), notre but est atteint et semble même dépassé au premier abord.

En effet, nous avons vu au Chapitre I [p. 22, formule (34′)] que le nombre des polynomes zonaux, d'un degré μ donné, linéairement indépendants, est

$$N^{(0)} = \frac{(n, \mu)}{(1, \mu)}.$$

Or, nous avons effectivement formé un système de polynomes zonaux (au Chapitre II) définis par la relation (54) :

$$(1 - 2a_1x_1 - \ldots - 2a_nx_n + a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{-\frac{n}{2}}$$
$$= \Sigma\, a_1^{m_1} \ldots a_n^{m_n} V^{(1)}_{m_1, \ldots, m_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Nous savons (p. 34) que le nombre de ces polynomes qui sont de degré μ : $m_1 + \ldots + m_n = \mu$, est également

$$\frac{(n, \mu)}{(1, \mu)}.$$

Ils forment donc un systeme complet de polynomes zonaux ; c'est-à-dire qu'un polynome zonal quelconque de degré μ s'exprime par une combinaison linéaire de ces polynomes

$$(115) \qquad Z_\mu^{(0)}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1 + \ldots + m_n = \mu} A_{m_1, \ldots, m_n} V^{(1)}_{m_1, \ldots, m_n}.$$

Cette formule devient évidente si l'on se reporte à l'expression générale (37) de $Z_\mu^{(k)}(x)$, qui s'écrit, pour $k=0$,

$$Z_\mu^{(0)} = \left[\psi_\mu(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \frac{1}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}\psi_\mu(x_1, \ldots, x_n)}{(1, j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \ldots\right],$$

où ψ_μ désigne un polynome quelconque homogène de degré μ

$$\psi_\mu = \sum_{m_1 + \ldots + m_n = \mu} a_{m_1, \ldots, m_n} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta^{2j}\psi_\mu = \sum_{m_1 + \ldots m_n = \mu} a_{m_1, \ldots, m_n} \Delta^{2j}(x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n});$$

donc

$$(116)\quad Z_\mu^{(0)} = \sum_{m_1+\ldots+m_n=\mu} a_{m_1,\ldots,m_n}\left[x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}+\ldots + \frac{1}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1},\ldots,x_n^{m_n})}{(1,j)\left(-\frac{n}{2}-\mu+1,j\right)}+\ldots\right].$$

D'après la formule (D) du Tableau I (p. 45), l'expression entre crochets est tout simplement

$$\frac{1}{2^\mu}\frac{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}{\left(\frac{n}{2},\mu\right)}V^{(1)}_{m_1,\ldots,m_n},$$

ce qui démontre la formule (115).

Les polynomes $V^{(1)}_{m_1,\ldots,m_n}$ forment bien un système complet de polynomes zonaux.

Mais au Chapitre III nous avons été conduits à considérer une autre catégorie de polynomes $U^{(s)}_{m_1,\ldots,m_p}$ qui, pour $s=1$, peuvent être définis par le développement

$$(89)\quad [(a_1x_1+\ldots+a_nx_n-1)^2+(a_1^2+\ldots+a_n^2)(1-x_1^2-\ldots-x_n^2)]^{-\frac{1}{2}} = \Sigma a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}U^{(1)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1,\ldots,x_n).$$

Ce sont encore des polynomes zonaux, comme le montre immédiatement l'étude de la page 54, où nous avons reconnu que l'expression

$$(81)\quad \mathfrak{V}^{(1)}_{m_1,\ldots,m_n} = r^\mu U^{(1)}_{m_1,\ldots,m_n} = \frac{(1,\mu)}{(1,m_1)\ldots(1,m_n)}\left[z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n}+\ldots+(-1)^j\frac{(z_{n+1}^2+z_{n+2}^2)^j}{2^{2j}} \times\frac{\Delta^{2j}(z_1^{m_1},\ldots,z_n^{m_n})}{(1,j)\left(\frac{1+1}{2},j\right)}+\ldots\right]$$

est un polynome harmonique homogène; de plus, comme il ne dépend de z_{n+1} et z_{n+2} que par $z_{n+1}^2+z_{n+2}^2$, il est d'ordre $k=0$.

Or il y a aussi

$$\frac{(n,\mu)}{(1,\mu)}$$

polynomes $U^{(1)}_{m_1,\ldots,m_n}$ de degré μ; ils forment donc également un système complet de polynomes zonaux.

Mais il ne saurait y avoir, sans contradiction, deux systèmes complets distincts; celui des U doit pouvoir se ramener à celui des V et inversement. C'est en effet ce qui a lieu, car :

THÉORÈME. — *Un polynome* $V^{(1)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *se réduit à une combinaison linéaire à coefficients constants des polynomes* $U^{(1)}_{m_1,\ldots,m_n}$ *de même degré.*

Proposons-nous de développer la fonction $V^{(1)}_{m_1,\ldots,m_n}$ en série de polynomes U

$$V^{(1)}_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma B_{q_1,\ldots,q_n} U^{(1)}_{q_1,\ldots,q_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Nous appliquerons la méthode du paragraphe II du Chapitre IV.

$V^{(1)}_{m_1,\ldots,m_n}$ est la valeur que prend sur l'hypersphère S la fonction harmonique à l'intérieur de S,

$$(51)\quad \begin{cases} W^{(1)}_{m_1,\ldots,m_n} = 2^{\mu} \dfrac{\left(\dfrac{n}{2}, \mu\right)}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \\ \qquad \times \left[z_1^{m_1}\ldots z_n^{m_n} + \ldots + \left(\dfrac{r}{2}\right)^{2j} \dfrac{\Delta^{2j}(z_1^{m_1}, \ldots, z_n^{m_n})}{(1, j)\left(-\dfrac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \ldots \right]. \end{cases}$$

Donc, pour $z_{n+1} = z_{n+2} = 0$,

$$W_{m_1,\ldots,m_n} = \Sigma z_1^{m_1+2\alpha_1}\ldots z_n^{m_n+2\alpha_n} K_{m_1+2\alpha_1,\ldots,m_n+2\alpha_n},$$

où $K_{m_1+2\alpha_1,\ldots,m_n+2\alpha_n}$ désigne une constante, la sommation étant étendue aux valeurs des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ telles que

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0 \qquad \text{avec} \qquad m_1 + 2\alpha_1 \geqq 0, \qquad \ldots, \qquad m_n + 2\alpha_n \geqq 0.$$

La relation (108) donne ici

$$B_{q_1,\ldots,q_n} = 0$$

si

$$q_1 + \ldots + q_n \neq \mu,$$

$$B_{m_1+2\alpha_1,\ldots,m_n+2\alpha_n} = \frac{(1, m_1 + 2\alpha_1)\ldots(1, m_n + 2\alpha_n)}{(1, \mu)} K_{m_1+2\alpha_1,\ldots,m_n+2\alpha_n}$$

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0),$$

ce qui démontre la proposition.

RÉCIPROQUE. — *Un polynome* $U^{(1)}_{m_1,\dots,m_n}$ *est une combinaison linéaire à coefficients constants des polynomes* $V^{(1)}_{m_1,\dots,m_n}$ *de même degré :*

$$U^{(1)}_{m_1,\dots,m_n} = \Sigma A_{m_1+2\alpha_1,\dots,m_n+2\alpha_n} V^{(1)}_{m_1+2\alpha_1,\dots,m_n+2\alpha_n}$$

où les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *sont des entiers tels que*

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0, \qquad m_1 + 2\alpha_1 \geqq 0, \qquad \dots, \qquad m_n + 2\alpha_n \geqq 0.$$

D'après la méthode générale,

$$A_{m_1+2\alpha_1,\dots,m_n+2\alpha_n} = \frac{I_1}{I_2},$$

où

$$I_1 = \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} U^{(1)}_{m_1,\dots,m_n} U^{(1)}_{m_1+2\alpha_1,\dots,m_n+2\alpha_n}\, dx_1 \dots dx_n,$$

$$I_2 = \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} V^{(1)}_{m_1+2\alpha_1,\dots,m_n+2\alpha_n} U^{(1)}_{m_1+2\alpha_1,\dots,m_n+2\alpha_n}\, dx_1 \dots dx_n.$$

Or, d'après la page 64,

$$I_2 = \frac{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)}{(1, m_1 + 2\alpha_1)\dots(1, m_n + 2\alpha_n)} \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\mu}\, dx_1 \dots dx_n$$

et

$$I_1 = \frac{1}{2^{\mu}} \frac{1}{(1, m_1)\dots(1, m_n)} \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} X_n^{\mu} \frac{\partial^{\mu}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} [U^{(1)}_{m_1+2\alpha_1,\dots,m_n+2\alpha_n}]\, dx_1 \dots dx_n.$$

Mais

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{\mu}}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} [U^{(1)}_{m_1+2\alpha_1,\dots}] \\
&= \frac{(-1)^{\mu}}{2^{\mu}} \frac{1}{(1, m_1 + 2\alpha_1)\dots(1, m_n + 2\alpha_n)} \frac{\partial^{2\mu}(X_n^{\mu})}{\partial x_1^{2m_1+2\alpha_1} \dots \partial x_n^{2m_n+2\alpha_n}} \\
&= \frac{1}{2^{\mu}} \frac{(1, 2m_1 + 2\alpha_1)\dots(1, 2m_n + 2\alpha_n)}{(1, m_1 + 2\alpha_1)\dots(1, m_n + 2\alpha_n)} \frac{(1, \mu)}{(1, m_1 + \alpha_1)\dots(1, m_n + \alpha_n)},
\end{aligned}$$

qui est une constante ; donc, dans le quotient $\frac{I_1}{I_2}$, tout signe d'intégration disparaît :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2^{2\mu}} \frac{1}{(1, m_1)\ldots(1, m_n)} \frac{(1, \mu)}{\left(\frac{n}{2}, \mu\right)} \frac{(1, 2m_1 + 2\alpha_1)\ldots(1, 2m_n + 2\alpha_n)}{(1, m_1 + \alpha_1)\ldots(1, m_n + \alpha_n)};$$

d'où (¹)

$$(117) \qquad \frac{2^{2\mu}}{(1, \mu)} \left(\frac{n}{2}, \mu\right)(1, m_1)\ldots(1, m_n) U^{(1)}_{m_1, \ldots, m_n}$$

$$= \sum \frac{(1, 2m_1 + 2\alpha_1)}{(1, m_1 + \alpha_1)} \cdots \frac{(1, 2m_n + 2\alpha_n)}{(1, m_n + \alpha_n)} V^{(1)}_{m_1+2\alpha_1, \ldots, m_n+2\alpha_n}$$

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0, \qquad m_1 + 2\alpha_1 \geqq 0, \qquad \ldots, \qquad m_n + 2\alpha_n \geqq 0).$$

Les polynomes $U^{(1)}_{m_1, \ldots, m_p}$ et $V^{(1)}_{m_1, \ldots, m_n}$ ne forment donc en réalité qu'un seul système de polynomes zonaux; on peut prendre l'un ou l'autre, à volonté, pour former le système complet des polynomes zonaux.

II.

Reste maintenant à considérer les fonctions hypersphériques tessérales ($k \neq 0$); c'est ici que les polynomes plus généraux $V^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}$ et $U^{(s)}_{m_1, \ldots, m_n}$ vont avoir à jouer un rôle.

Nous allons utiliser la formule de Hobson généralisée (Chap. II, § III), en prenant

$$f_\mu(z_1, \ldots, z_{n+2}) = C z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n} (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k,$$

où

$$h_1 + \ldots + h_n = h = \mu - k,$$

C désignant une constante;

$$\Omega = f_\mu\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right) \frac{1}{r^n}$$

$$= C\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{h_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{h_n} \left[\left(\frac{\partial}{\partial z_{n+1}} \pm i \frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)^k \frac{1}{r^n}\right]$$

$$= C(-1)^k 2^k \left(\frac{n}{2}, k\right)(z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k \frac{\partial^h}{\partial z_1^{h_1} \ldots \partial z_n^{h_n}} \left(\frac{1}{r^{n+2k}}\right),$$

(¹) *Cf.* pour deux variables D_1, p. 253.

où l'on passe de la première expression à la deuxième au moyen de la formule (49).

Rapprochons ce résultat de la formule (B) du Tableau I. Si nous prenons

$$C = (-1)^{\mu} \frac{1}{2^k} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}, k\right)} \frac{1}{(1, h_1) \dots (1, h_n)},$$

$$\begin{aligned}
\Omega &= f_{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right) \frac{1}{r^n} \\
&= \frac{(-1)^h}{(1, h_1) \dots (1, h_n)} (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k \frac{\partial^h}{\partial z_1^{h_1} \dots \partial z_n^{h_n}} \left(\frac{1}{r^{n+2k}}\right) \\
&= (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k W^{(2k+1)}_{h_1, \dots, h_n}.
\end{aligned}$$

Cette fonction satisfait à l'équation de Laplace, d'après la remarque faite à la fin du paragraphe II du Chapitre II.

Faisons dans la formule (C) du Tableau I

$$p = n, \qquad s - 1 = 2k, \qquad \mu = h;$$

nous voyons que

$$W^{(2k+1)}_{h_1, \dots, h_n} = \frac{1}{r^{h+n+2k}} V^{(2k+1)}_{h_1, \dots, h_n}(x_1, \dots, x_n);$$

donc

$$\Omega = \frac{1}{r^{\mu+n}} X_n^{\frac{k}{2}} V^{(2k+1)}_{h_1, \dots, h_n} e^{\pm k i \varphi}.$$

Nous poserons

(118) $$P^{(\mu, k)}_{h_1, \dots, h_n}(x_1, \dots, x_n) = X_n^{\frac{k}{2}} V^{(2k+1)}_{h_1, \dots, h_n}.$$

Théorème. — *L'expression*

$$P^{(\mu, k)}_{h_1, \dots, h_n} e^{\pm k i \varphi} \qquad (h_1 + \dots + h_n = h = \mu - k)$$

est une fonction hypersphérique d'ordre k et de degré μ. C'est la valeur que prennent sur S :

1° *La fonction harmonique à l'extérieur de* S,

$$\Omega = \frac{1}{r^{\mu+n}} P^{(\mu, k)}_{h_1, \dots, h_n} e^{\pm k i \varphi};$$

2° *Le polynome homogène, harmonique à l'intérieur de* S,

$$\Pi_\mu = r^\mu P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} e^{\pm k\iota\varphi}.$$

D'après la formule (D) du Tableau I,

$$(119)\qquad P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} = 2^h \frac{\left(\frac{n}{2}+k,\, h\right)}{(1,\, h_1)\ldots(1,\, h_n)} X_n^{\frac{k}{2}}$$
$$\times\left[x_1^{h_1}\ldots x_n^{h_n} + \ldots + \frac{1}{2^{2j}}\frac{\Delta^{2j}(x_1^{h_1}\ldots x_n^{h_n})}{(1,j)\left(-\frac{n}{2}-\mu+1,\, j\right)} + \ldots\right].$$

Nous pouvons remarquer d'ailleurs que la formule (119) n'est qu'un cas particulier de la formule (36), trouvée *a priori;* elle s'en déduit en prenant pour le polynome $\psi_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ arbitraire homogène de degré $\mu - k$:

$$\psi_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = A\, x_1^{h_1}\ldots x_n^{h_n}.$$

Ce rapprochement nous montre que $V^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}$ est un cas particulier des polynomes considérés au Chapitre I (p. 24) sous le nom de *polynomes tesséraux* de degré μ et d'ordre k.

Or, nous avons démontré que le nombre de ces polynomes $Z^{(k)}_\mu$ linéairement indépendants est

$$(38)\qquad M^{(k)} = \frac{(n,\, \mu - k)}{(1,\, \mu - k)}.$$

Mais, k et μ etant donnés, le nombre des polynomes $V^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}$ est égal à celui des combinaisons de n lettres h à h, donc à $M^{(k)}$.

En donnant aux indices $h_1, \ldots, h_n$ toutes les valeurs compatibles avec la relation

$$h_1 + \ldots + h_n = h = \mu - k,$$

nous obtenons ainsi tous les polynomes tesséraux de degré μ et d'ordre k, d'où :

Théorème. — *Les fonctions*

$$P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} e^{\pm k\iota\varphi}$$
$$(h_1 + \ldots + h_n = \mu - k;\ k = 0, 1, \ldots, \mu)$$

sont au nombre de

$$N = M^{(0)} + 2M^{(1)} + \ldots + 2M^{(\mu)},$$

(15) $$= \frac{(\mu+1,\, n-1)}{(1,\, n)}(2\mu+n).$$

Elles forment un système complet de fonctions hypersphériques de degré μ.

Remarque. — Au lieu de prendre pour fonctions fondamentales

$$P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} e^{+ki\varphi} \quad \text{et} \quad P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} e^{-ki\varphi},$$

il revient au même de partir de

$$P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} \cos k\varphi \quad \text{et} \quad P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} \sin k\varphi.$$

La formule (36) rend alors évident qu'un polynome arbitraire Π_μ, harmonique et homogène de degré μ, peut se mettre sous la forme

(120) $$\Pi_\mu = r^\mu \sum H_{h_1,\ldots,h_n} P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} \cos k(\varphi - \varphi_{h_1,\ldots,h_n}),$$

$H_{h_1,\ldots,h_n}$ et $\varphi_{h_1,\ldots,h_n}$ désignant des constantes, la sommation étant étendue aux valeurs de $h_1, \ldots, h_n$ tels que

$$h_1 + \ldots + h_n = \mu - k \qquad (k = 0, 1, \ldots, \mu).$$

Sans nous arrêter à étudier en détail ces fonctions, faisons encore la remarque suivante, qui nous servira de vérification.

D'après la formule (G) du Tableau I, $V^{(2k+1)}_{h_1,\ldots,h_n}$ satisfait à l'équation

(121) $$(h+n)(h+2k)V + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial V}{\partial x_j} - x_j\left(x_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial V}{\partial x_n} + 2kV\right)\right] = 0.$$

Si nous y faisons $h = \mu - k$, nous reconnaissons bien l'équation (23) que doit vérifier tout polynome tesséral $Z^{(k)}_\mu$ (p. 16).

Enfin la propriété essentielle des fonctions sphériques ordinaires se trouve conservée pour les fonctions hypersphériques, mais avec une modification qui la complique un peu.

THÉORÈME. — *Les fonctions hypersphériques d'ordre quelconque k peuvent se déduire de la fonction hypersphérique zonale*

$$P^{(\mu,0)}_{m_1,\dots,m_n} = V^{(1)}_{m_1,\dots,m_n}$$

par la formule

$$P^{(\mu,k)}_{h_1,\dots,h_n} = \frac{1}{2^k} \frac{X_n^{\frac{k}{2}}}{\left(\frac{n}{2},\, k\right)} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} P^{(\mu,0)}_{m_1,\dots,m_n} \tag{122}$$

$$(k_1 = m_1 - h_1, \qquad k_n = m_n - h_n, \qquad k_1 + \dots + k_n = k = \mu - h).$$

Ce théorème découle immédiatement de la comparaison des deux formules

$$P^{(\mu,0)}_{m_1,\dots,m_n} = 2^{\mu} \frac{\left(\frac{n}{2},\, \mu\right)}{(1,\, m_1)\dots(1,\, m_n)} \left[x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} + \dots + \frac{1}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(x_1^{m_1},\, \dots,\, x_n^{m_n})}{(1, j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} + \dots \right],$$

$$P^{(\mu,k)}_{h_1,\dots,h_n} = 2^{h} \frac{\left(\frac{n}{2} + k,\, h\right)}{(1,\, h_1)\dots(1,\, h_n)} X_n^{\frac{k}{2}} \left[x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n} + \dots + \frac{1}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(x_1^{h_1},\, \dots,\, x_n^{h_n})}{(1, j)\left(-\frac{n}{2} - \mu + 1, j\right)} \right].$$

Comme dans cette dernière formule, il faut prendre

$$h_1 + \dots + h_n = \mu - k,$$

nous voyons que

$$\frac{x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}}{(1,\, h_1)\dots(1,\, h_n)} = \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \left[\frac{x_1^{m_1},\, \dots,\, x_n^{m_n}}{(1,\, m_1)\dots(1,\, m_n)} \right],$$

où

$$\begin{aligned} k_1 + \dots + k_n &= k, \\ m_1 - k_1 &= h_1, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ m_n - k_n &= h_n. \end{aligned}$$

De plus

$$\Delta^{2j}\left(\frac{\partial^k F}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right)=\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}(\Delta^{2j}F).$$

Si enfin, nous tenons compte de la relation évidente

$$\frac{\left(\frac{n}{2}+k,\,\mu-k\right)}{\left(\frac{n}{2},\,\mu\right)}=\frac{1}{\left(\frac{n}{2},\,k\right)},$$

il vient la formule annoncée

$$\text{(122)}\qquad P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}=\frac{1}{2^k}\,\frac{X_n^{\frac{k}{2}}}{\left(\frac{n}{2},\,k\right)}\,\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}P^{(\mu,0)}_{m_1,\ldots,m_n},$$

qui permet de déduire très simplement une fonction hypersphérique de degré μ et d'ordre quelconque k d'une fonction hypersphérique zonale de même degré μ.

Mais ce qui complique un peu ce résultat, c'est qu'une fonction tessérale donnée $P^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$ peut être ainsi déduite de plusieurs manières d'une fonction zonale; en effet, entre les quantités

$$m_1,\quad\ldots,\quad m_n,\quad k_1,\quad\ldots,\quad k_n,$$

au nombre de $2n$, nous avons seulement les $n+2$ relations

$$\begin{gathered} m_1-k_1=h_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ m_n-k_n=h_n\\ (m_1+\ldots+m_n=\mu,\qquad k_1+\ldots+k_n=k), \end{gathered}$$

où $h_1,\ldots,h_n$, μ et k sont des données.

Prenons un exemple concret; soit à déduire par la formule (122) la fonction tessérale

$$P^{(4,2)}_{1,1}(x_1,x_2)$$

d'une fonction zonale.

Nous avons les relations

$$m_1+m_2=4,\qquad k_1+k_2=2,\qquad m_1-k_1=1,\qquad m_2-k_2=1;$$

d'où

$$m_2 = 4 - m_1, \qquad k_1 = m_1 - 1, \qquad k_2 = 3 - m_1;$$

nous ne devons accepter que les valeurs de m_1, qui rendent m_2, k_1, k_2 entiers positifs; donc ici

$$m_1 = 1, \qquad m_1 = 2, \qquad m_1 = 3.$$

Donc

$$2^3(1 - x_1^2 - x_2^2)^{-1} P_{1,1}^{(4,2)} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} P_{1,3}^{(4,0)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} P_{2,2}^{(4,0)} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} P_{3,1}^{(4,0)}.$$

On saisit ainsi comment la formule (122), qui étend aux fonctions hypersphériques la propriété classique des fonctions sphériques, aboutit toutefois à un résultat pratique plus compliqué.

III.

Les polynomes $V_{m_1, \ldots, m_n}^{(2k+1)}$ permettent donc de construire un système complet de fonctions hypersphériques; mais nous avons vu que, dans le cas de $k = 0$, au système complet des fonctions zonales déduites de $V_{m_1, \ldots, m_n}^{(1)}$, on pouvait adjoindre un système équivalent, également complet, déduit des $U_{m_1, \ldots, m_n}^{(1)}$.

Examinons si cette propriété se conserve pour les fonctions tessérales d'ordre quelconque.

La première idée qui se présente, c'est, par analogie avec la formule

$$P_{h_1, \ldots, h_n}^{(\mu,k)} = \frac{1}{2^k} \frac{X_n^{\frac{k}{2}}}{\left(\frac{n}{2}, k\right)} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} V_{m_1, \ldots, m_n}^{(1)},$$

de prendre pour point de départ la fonction

$$(123) \qquad R_{h_1, \ldots, h_n}^{(\mu,k)} = H X_n^{\frac{k}{2}} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} U_{m_1, \ldots, m_n}^{(1)},$$

où H est une constante.

La fonction $R_{h_1, \ldots, h_n}^{(\mu,k)}$ est bien une fonction tessérale d'ordre k; car

$$U_{m_1, \ldots, m_n}^{(1)} = \Sigma A_{m_1+2\alpha_1, \ldots, m_n+2\alpha_n} V_{m_1+2\alpha_1, \ldots, m_n+2\alpha_n}^{(1)}$$
$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0),$$

les constantes $A_{m_1+2\alpha_1,}$ étant données effectivement par la formule (117).

Donc

$$\frac{1}{2^k}\frac{X_n^{\frac{k}{2}}}{\left(\frac{n}{2}, k\right)}\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}U^{(1)}_{m_1,\ \ldots, m_n}=\Sigma A_{m_1+2\alpha_1,\ \ldots, m_n+2\alpha_n}P^{(\mu,k)}_{h_1+2\alpha_1,\ \ldots, h_n+2\alpha_n}.$$

En utilisant la formule fondamentale (94), nous pouvons dire que :

Theorème. — *La fonction*

$$R^{(\mu,k)}_{h_1,\ \ldots, h_n}e^{\pm k\iota\varphi}=X_n^{\frac{k}{2}}\frac{\partial^{\mu+k}(X_n^{\mu})}{\partial x_1^{m_1+k_1}\ldots\partial x_n^{m_n+k_n}}e^{\pm k\iota\varphi} \tag{124}$$

est une fonction hypersphérique d'ordre k et de degré μ.

Ce ne sont cependant pas ces fonctions qui nous donnent la véritable solution du problème; nous y parviendrons de la façon suivante.

IV.

Cherchons un polynome harmonique homogène de degré μ qui soit de la forme

$$\Pi_\mu = P_h(z_{n+1}\pm iz_{n+2})^k,$$

où

$$P_h=\varphi_h(z_1,\ \ldots,\ z_n)+(z_{n+1}^2+z_{n+2}^2)\ \ \varphi_{h-2}(z_1,\ \ldots,\ z_n)+\ldots$$
$$+(z_{n+1}^2+z_{n+2}^2)^j\varphi_{h-2j}(z_1,\ \ldots,\ z_n)+\ldots,$$

φ_{h-2j} étant un polynome homogène de degré $h-2j$,

$$h=\mu-k.$$

Pour que Π_μ soit harmonique, il faut (*voir* p. 19) que

$$(z_{n+1}\pm iz_{n+2})\,\Delta^2 P_h+2k\left(\frac{\partial P_h}{\partial z_{n+1}}\pm i\frac{\partial P_h}{\partial z_{n+2}}\right)=0. \tag{28}$$

Mais

$$\frac{\partial P_h}{\partial z_{n+1}} \pm i\,\frac{\partial P_h}{\partial z_{n+2}} = 2(z_{n+1} \pm i z_{n+2})[\varphi_{h-2} + \ldots + j(z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)^{j-1}\varphi_{h-2j} + \ldots],$$

$$\Delta^2 P_h = \sum_{j=1} (z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)^{j-1}[\Delta^2\varphi_{h-2j+2} + (2j)^2\varphi_{h-2j}].$$

Par un raisonnement identique à celui que nous avons employé plusieurs fois, l'équation (28) se réduit aux équations

$$\Delta^2\varphi_{h-2j+2} + 2^2 j(j+k)\varphi_{h-2j} = 0,$$

d'où

$$(125)\quad \Pi_\mu = (z_{n+1} \pm i z_{n+2})^k \Big[\varphi_h(z_1, \ldots, z_n) + \ldots + (-1)^j \frac{(z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2)^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}\varphi_h(z_1, \ldots, z_n)}{(1, j)(k+1, j)} + \ldots\Big],$$

le polynome homogène φ_h restant arbitraire.

Prenons en particulier

$$\varphi_h = \frac{(2k+1, h)}{(1, h_1)\ldots(1, h_n)} z_1^{h_1}\ldots z_n^{h_n}$$

et passons aux coordonnees sphériques.

La fonction

$$(126)\quad \Pi_\mu = r^\mu X_n^{\frac{k}{2}} e^{\pm k\iota\varphi} \frac{(2k+1, h)}{(1, h_1)\ldots(1, h_n)} \Big[x_1^{h_1}\ldots x_n^{h_n} + \ldots + (-1)^j \frac{X_n^j}{2^{2j}} \frac{\Delta^{2j}(x_1^{h_1}, \ldots, x_n^{h_n})}{(1, j)(k+1, j)} + \ldots\Big]$$

est un polynome harmonique homogène de degré μ.

Un simple coup d'œil jeté sur la formule (82) montre que

$$\Pi_\mu = r^\mu X_n^{\frac{k}{2}} e^{\pm k\iota\varphi} U_{h_1, \ldots, h_n}^{(2k+1)}.$$

Nous poserons

$$(127)\qquad Q_{h_1 \ldots h_n}^{(\mu, k)} = X_n^{\frac{k}{2}} U_{h_1, \ldots, h_n}^{(2k+1)}.$$

THEORÈME. — *L'expression*

$$Q_{h_1, \ldots, h_n}^{(\mu, k)} e^{\pm k\iota\varphi} \qquad (h_1 + \ldots + h_n = \mu - k)$$

est une fonction hypersphérique de degré μ et d'ordre k.

D'après la formule (94),

$$(128)\qquad Q^{(\mu,k)}_{h_1,\dots,h_n}=\frac{(-1)^h}{2^h}\,\frac{(2k+1,\,h)}{(k+1,\,h)}\,\frac{X_n^{-\frac{k}{2}}}{(1,\,h_1)\dots(1,\,h_n)}\,\frac{\partial^h(X_n^\mu)}{\partial x_1^{h_1}\dots\partial x_n^{h_n}},$$

ce qui est la généralisation d'une propriété bien connue des fonctions sphériques ordinaires.

Comme les polynomes $U^{(2k+1)}_{h_1,\dots,h_n}$ sont en même nombre que les $V^{(2k+1)}_{h_1,\dots,h_n}$, nous pouvons, sans avoir à refaire le raisonnement de la page 88, énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Les fonctions*

$$Q^{(\mu,k)}_{h_1,\dots,h_n}e^{\pm ki\varphi}$$

forment un système complet de fonctions hypersphériques.

Un polynome Π_μ harmonique et homogène de degré μ peut se mettre sous la forme

$$(129)\qquad \Pi_\mu=r^\mu\Sigma M_{h_1,\dots,h_n}Q^{(\mu,k)}_{h_1,\dots,h_n}\cos k(\varphi-\psi_{h_1,\dots,h_n}),$$

où les $M_{h_1,\dots,h_n}$ et $\psi_{h_1,\dots,h_n}$ sont des constantes.

Exemple de développement. — Soit

$$\Theta=a_1z_1+\dots+a_nz_n+i\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}\,z_{n+1}.$$

L'expression

$$\Theta^\mu$$

est un polynome harmonique, homogène de degré μ, quelles que soient les constantes $a_1,\dots,a_n$.

De plus

$$\Theta^\mu=r^\mu(a_1x_1+\dots+a_nx_n+iA_n\sqrt{X_n}\cos\varphi)^\mu,$$

en posant, comme toujours,

$$A_n^2=a_1^2+\dots+a_n^2.$$

Or, la formule (109') donne

$$e^{r(a_1x_1+\ldots+a_nx_n)}J_k(rA_n\sqrt{X_n})=\left(\frac{rA_n}{2}\right)^k\frac{X_n^{\frac{k}{2}}}{(1,k)}\sum r^h\frac{a_1^{h_1}\ldots a_n^{h_n}}{(2k+1,h)}U_{h_1,\ldots,h_n}^{(2k+1)}$$
$$=\left(\frac{rA_n}{2}\right)^k\frac{1}{(1,k)}\sum r^h\frac{a_1^{h_1}\ldots a_n^{h_n}}{(2k+1,h)}Q_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}.$$

Mais les fonctions de Bessel satisfont à la relation bien connue [1] :

$$\sum_{k=0}^{k=+\infty}{}' 2J_k(u)\,i^k\cos k\varphi=e^{iu\cos\varphi},$$

qui devient ici

$$(130)\qquad e^{\Theta}=\sum_{k=0}^{k=+\infty}{}' 2\left(\frac{rA_n i}{2}\right)^k\frac{1}{(1,k)}\left[\sum r^h\frac{a_1^{h_1}\ldots a_n^{h_n}}{(2k+1,h)}Q_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}\right]\cos k\varphi,$$

d'où, en identifiant dans les deux membres le coefficient de r^{μ},

$$(131)\qquad (a_1x_1+\ldots+a_nx_n+iA_n\sqrt{X_n}\cos\varphi)^{\mu}$$
$$=\sum_{k=0}^{k=\mu}{}'\left(\frac{A_n}{2}\right)^k\frac{(1,\mu)}{(1,k)}\left[\sum\frac{a_1^{h_1}\ldots a_n^{h_n}}{(2k+1,h)}Q_{h_1,\ldots,h_n}^{(\mu,k)}\right]2\,i^k\cos k\varphi,$$

où le deuxième signe Σ est étendu à toutes les valeurs de $h_1, \ldots, h_n$ telles que

$$h_1+\ldots+h_n=\mu-k.$$

Ou encore, en employant la formule (128),

$$(132)\qquad 2^{\mu}(a_1x_1+\ldots+a_nx_n+iA_n\sqrt{X_n}\cos\varphi)^{\mu}$$
$$=\sum_{k=0}^{k=\mu}{}' 2\frac{A_n^k}{(1,\mu-k)}\left[\sum(-1)^h\frac{a_1^{h_1}\ldots a_n^{h_n}X_n^{-\frac{k}{2}}}{(1,h_1)\ldots(1,h_n)}\frac{\partial^h(X_n^{\mu})}{\partial x_1^{h_1}\ldots\partial x_n^{h_n}}\right]i^k\cos k\varphi$$
$$(h_1+\ldots+h_n=h=\mu-k).$$

C'est la généralisation complète d'une formule découverte par Jacobi [2].

---

[1] Le symbole Σ' indique que, pour $k=0$, il faut prendre la moitié du terme général.

[2] C.-G.-J. Jacobi, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, t. XXVI, 1843, p. 81.

De la formule (131) on tire l'expression suivante du groupe homogène :

$$(133)\quad \left(\frac{A_n i}{2}\right)^k \sum a_1^{h_1}\dots a_n^{h_n} Q^{(\mu,k)}_{h_1,\dots,h_n}$$
$$= \frac{(1,k)(2k+1,h)}{2\pi(1,\mu)} \int_0^{2\pi} (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + i A_n \sqrt{X_n}\cos\varphi)^\mu \cos k\varphi\, d\varphi,$$

qui est à rapprocher de la formule (110).

V. — Propriété fondamentale.

Nous possédons maintenant deux systèmes complets équivalents de fonctions hypersphériques, celui des fonctions

$$P^{(\mu,k)}_{h_1,\dots,h_n} e^{\pm k i\varphi}$$

et celui des fonctions

$$Q^{(\mu,k)}_{h_1,\dots,h_n} e^{\pm k i\varphi}.$$

De même qu'au Chapitre IV la considération simultanée des deux familles de polynomes $V^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}$ et $U^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}$ a permis de développer une fonction sous l'une ou l'autre forme :

$$F(x_1, \dots, x_p) = \Sigma A_{m_1,\dots,m_n} V^{(s)}_{m_1,\dots,m_p}$$
$$= \Sigma B_{m_1,\dots,m_p} U^{(s)}_{m_1,\dots,m_p};$$

ici encore, c'est le rapprochement de ces deux familles de fonctions hypersphériques qui rendra possible le développement d'une fonction arbitraire.

En effet, considérons l'intégrale

$$I = \int_{(X_n \geq 0)}^{n} P^{(\mu,k)}_{h_1,\dots,h_n} Q^{(\mu,k)}_{j_1,\dots,j_n}\, dx_1 \dots dx_n,$$

où

$$h_1 + \dots + h_n = \mu - k,$$
$$j_1 + \dots + j_n = \mu - k.$$

D'après les formules (118) et (127),

$$\mathrm{I} = \int_{(\mathrm{X}_n \geqq 0)}^{n} \mathrm{X}_n^k \mathrm{V}_{h_1,\dots,h_n}^{(2k+1)} \mathrm{U}_{j_1,\dots,j_n}^{(2k+1)} dx_1 \dots dx_n.$$

Mais cette intégrale rentre dans celle qui a été étudiée en détail au Chapitre III, d'où, en nous appuyant sur les formules (83) et (84) :

Théorème. — *L'intégrale*

$$\int_{(\mathrm{X}_n \geqq 0)}^{n} \mathrm{P}_{h_1,\dots,h_n}^{(\mu,k)} \mathrm{Q}_{j_1,\dots,j_n}^{(\mu,k)} dx_1 \dots dx_n$$

est nulle tant qu'on n'a pas à la fois

$$h_1 = j_1, \quad \dots, \quad h_n = j_n.$$

Dans ce dernier cas,

$$(134) \qquad \begin{aligned} &\int_{(\mathrm{X}_n \geqq 0)}^{n} \mathrm{P}_{h_1,\dots,h_n}^{(\mu,k)} \mathrm{Q}_{h_1,\dots,h_n}^{(\mu,k)} dx_1 \dots dx_n \\ &= \frac{2k+n}{2\mu+n} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k+1\right)} \frac{(2k+1, h)}{(1, h_1)\dots(1, h_n)} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{2\mu+n} \frac{(1, k)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)} \frac{(2k+1, h)}{(1, h_1)\dots(1, h_n)}. \end{aligned}$$

VI. — Développement d'une fonction arbitraire.

Soit $\mathrm{F}(x_1, \dots, x_n, \varphi)$ une fonction arbitraire donnée sur l'hypersphère S, cherchons à la représenter par l'un ou l'autre des développements équivalents

$$(135) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{F} &= \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{k=\mu} \left[\sum_{h_1+\dots+h_n=\mu-k} \mathrm{A}_{h_1,\dots,h_n}^{(\mu,k)} \mathrm{P}_{h_1,\dots,h_n}^{(\mu,k)} \cos k(\varphi - \varphi_{h_1,\dots,h_n}^{\mu,k}) \right] \right\}, \\ \mathrm{F} &= \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{k=\mu} \left[\sum_{h_1+\dots+h_n=\mu-k} \mathrm{B}_{h_1,\dots,h_n}^{(\mu,k)} \mathrm{Q}_{h_1,\dots,h_n}^{(\mu,k)} \cos k(\varphi - \psi_{h_1,\dots,h_n}^{\mu,k}) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Le théorème précédent permet de déterminer les constantes qui figurent dans ce développement par la formule

$$(136)\qquad \int_0^{2\pi}\cos k(\varphi-\varphi^{\mu,k}_{h_1,\ldots,h_n})\,d\varphi\int^n_{(X_n\geqq 0)}\mathrm{F}\mathrm{Q}^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}dx_1\ldots dx_n$$
$$=\mathrm{A}^{\mu,k}_{h_1,\ldots,h_n}\frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2\mu+n}\,\frac{(1,\,k)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\,\frac{(2k+1,\,h)}{(1,\,h_1)\ldots(1,\,h_n)}.$$

Et de même

$$(137)\qquad \int_0^{2\pi}\cos k(\varphi-\psi^{\mu,k}_{h_1,\ldots,h_n})\,d\varphi\int^n_{(X_n\geqq 0)}\mathrm{F}\mathrm{P}^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}dx_1\ldots dx_n$$
$$=\mathrm{B}^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}\frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2\mu+n}\,\frac{(1,\,k)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\,\frac{(2k+1,\,h)}{(1,\,h_1)\ldots(1,\,h_n)}.$$

Nous laissons de côté, pour le moment, l'étude approfondie de la convergence des séries (135).

VII. — Théorème fondamental.

Le théorème démontré au paragraphe VIII du Chapitre II est susceptible d'une extension importante. La formule (64) peut s'écrire avec nos notations actuelles :

$$(138)\qquad \Sigma(2\mu+n)a_1^{m_1}\ldots a_n^{m_n}\int^n_{(X_n\geqq 0)}\Psi(x_1,\,\ldots,\,x_n)\,\mathrm{P}^{(\mu,0)}_{m_1,\ldots,m_n}dx_1\ldots dx_n$$
$$=\frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\,\Phi(a_1,\,\ldots,\,a_n,\,0,\,0),$$

où $\Phi(z_1,\,\ldots,\,z_{n+2})$ désigne la fonction, harmonique à l'intérieur de S, se réduisant sur S à $\Psi(x_1,\,\ldots,\,x_n)$.

Nous nous proposons de démontrer un théorème analogue plus général, où interviendra sous le signe intégral $\mathrm{P}^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n}$.

Désignons toujours par

$$\Phi(z_1,\,\ldots,\,z_{n+1},\,z_{n+2})$$

une fonction harmonique à l'intérieur de S; soit

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, \varphi)$$

la valeur que prend Φ sur S.

Nous ferons d'abord la remarque suivante :

En posant

$$z_{n+1} + i z_{n+2} = \zeta_1,$$
$$z_{n+1} - i z_{n+2} = \zeta_2;$$

d'où

$$z_{n+1} = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}, \qquad z_{n+2} = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2i},$$

une fonction quelconque

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, z_{n+2})$$

peut toujours se mettre sous la forme

$$\Theta(z_1, \ldots, z_n, \zeta_1, \zeta_2).$$

Il est facile de démontrer que

$$(139) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^k \Theta}{\partial \zeta_1^k} &= \frac{1}{2^k}\left(\frac{\partial}{\partial z_{n+1}} - i\,\frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)^k \Phi, \\ \frac{\partial^k \Theta}{\partial \zeta_2^k} &= \frac{1}{2^k}\left(\frac{\partial}{\partial z_{n+1}} + i\,\frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)^k \quad . \end{aligned} \right.$$

Ceci étant, considérons les fonctions suivantes, où les a_j désignent les coordonnees d'un point A intérieur à S :

$$(140) \quad \begin{aligned} F &= (z_{n+1} + i z_{n+2})^k [(z_1 - a_1)^2 + \ldots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]^{-\left(\frac{n}{2}+k\right)} \\ &= r^k X_n^{\frac{k}{2}} e^{+ki\varphi} [r^2 - 2r(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n) + a_1^2 + \ldots + a_n^2]^{-\left(\frac{n}{2}+k\right)} \\ &= e^{+ki\varphi} \Sigma a_1^{h_1} \ldots a_n^{h_n} \frac{1}{r^{n+\mu}} P_{h_1, \ldots, h_n}^{(\mu, k)}, \end{aligned}$$

puis :

$$(141)\quad G = r^k X_n^{\frac{k}{2}} e^{+k\iota\varphi}[1 - 2r(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) + r^2(a_1^2 + \ldots + a_n^2)]^{-\left(\frac{n}{2}+k\right)}$$
$$= e^{+k\iota\varphi} \Sigma a_1^{h_1} \ldots a_n^{h_n} r^\mu P_{h_1, \ldots, h_n}^{(\mu, k)}.$$

Le premier développement converge à l'extérieur de S; le second à l'intérieur.

Appliquons aux fonctions G et Φ la formule de Green (8) pour le domaine intérieur à S où elles sont toutes deux harmoniques :

$$(142)\qquad \int_S \left(\Phi \frac{dG}{dn} - G \frac{d\Phi}{dn}\right) d\omega = 0,$$

où $d\omega$ désigne, comme à la page 9, l'élément d'aire de S.

Appliquons de nouveau cette formule aux fonctions F et Φ pour le domaine intérieur à S et extérieur à une hypersphère Σ de centre A et de rayon infiniment petit ρ :

$$(143)\qquad \int_S \left(F \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{dF}{dn}\right) d\omega = (n + 2k)\mathfrak{L}.$$

Si sur cette hypersphère Σ nous posons

$$z_1 = a_1 + \rho x_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z_n = a_n + \rho x_n,$$
$$z_{n+1} = \rho\sqrt{X_n}\cos\varphi,$$
$$z_{n+2} = \rho\sqrt{X_n}\sin\varphi,$$

$$\mathfrak{L} = \lim_{\rho=0}\left[\int_S \frac{X_n^{\frac{k}{2}} e^{k\iota\varphi}}{\rho^k} \Phi[a_1 + \rho x_1, \ldots, a_n + \rho x_n, \rho\sqrt{X_n}\cos\varphi, \rho\sqrt{X_n}\sin\varphi] d\omega\right]$$
$$= \lim_{\rho=0}\left[\int_S \frac{X_n^{\frac{k}{2}} e^{k\iota\varphi}}{\rho^k} \Theta[a_1 + \rho x_1, \ldots, a_n + \rho x_n, \rho\sqrt{X_n} e^{\iota\varphi}, \rho\sqrt{X_n} e^{-\iota\varphi}] d\omega\right];$$

d'après la formule (13),

$$d\omega = dx_1 \ldots dx_n d\varphi.$$

Or

$$\lim_{\rho=0}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho^k}\,\Theta\left[a_1+\rho x_1,\ \ldots,\ \rho\sqrt{X_n}e^{\iota\varphi},\ \rho\sqrt{X_n}e^{-\iota\varphi}\right]e^{k\iota\varphi}\,d\varphi$$

$$=\frac{2\pi}{(1,\,k)}\,X_n^{\frac{k}{2}}\left(\frac{\partial^k\Theta}{\partial\zeta_2^k}\right)_{\rho=0}$$

$$=\frac{2\pi}{(1,\,k)}\,X_n^{\frac{k}{2}}\left[\frac{1}{2^k}\left(\frac{\partial}{\partial a_{n+1}}+\iota\,\frac{\partial}{\partial a_{n+2}}\right)^k\Phi(a_1,\,\ldots,\,a_{n+2})\right]_{a_{n+1}=a_{n+2}=0}.$$

Pour abreger l'écriture, nous poserons

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial a_{n+1}}+\iota\,\frac{\partial}{\partial a_{n+2}}\right)^k\Phi(a_1,\ \ldots,\ a_{n+2})\right]_{a_{n+1}=a_{n+2}=0}=\Phi^{(+k)}(a_1,\ \ldots,\ a_n,\ 0,0).$$

En ajoutant les deux egalites (142) et (143), nous obtenons

$$(144)\quad \int_S\Phi\left(\frac{dG}{dn}-\frac{dF}{dn}\right)d\omega=\frac{2\pi}{(1,\,k)}\,\frac{n+2k}{2^k}\,\Phi^{(+k)}\int_{(X_n\geqq 0)}^{n}X_n^k\,dx_1\ \ldots dx_n$$

$$=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}+1}}{(1,\,k)}\,\frac{n+2k}{2^k}\,\Phi^{(+k)}\,\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k+1\right)}$$

$$=\frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2^{k-2}}\,\frac{\Phi^{(+k)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}.$$

Or, d'après (141),

$$\frac{dG}{dn}=\left(\frac{dG}{dr}\right)_{r=1}$$

$$=\Sigma a_1^{h_1}\ldots a_n^{h_n}\,\mu\,P_{h_1\ \ldots\ h_n}^{(\mu,\,k)}\,e^{+k\iota\varphi}$$

$$\frac{dF}{dn}=-\Sigma a_1^{h_1}\ldots\ a_n^{h_n}(n+\mu)\,P_{h_1,\ \ldots,h_n}^{(\mu,\,k)}\,e^{+k\iota\varphi}.$$

Donc, comme $\Phi_S=\Psi$:

$$(145)\quad \Sigma(2\mu+n)\,a_1^{h_1}\ \ldots a_n^{h_n}\int_0^{2\pi}e^{+k\iota\varphi}\,d\varphi\int_{(X_n\geqq 0)}^{n}\Psi(x_1,\ldots,x_n,\,\varphi)\,P_{h_1,\ \ldots,h_n}^{(\mu,k)}\,dx_1\ldots dx_n$$

$$=\frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2^{k-2}}\,\frac{\Phi^{(+k)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}.$$

Si nous faisons $k = 0$,

$$\Phi^{(0)} = \Phi(a_1, \ldots, a_n, 0, 0),$$

nous retrouvons bien la formule (138).

En suivant un raisonnement analogue au précédent et en posant

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial a_{n+1}} - \iota \frac{\partial}{\partial a_{n+2}}\right)^k \Phi(a_1, \ldots, a_{n+2})\right]_{a_{n+1}=a_{n+2}=0} = \Phi^{(-k)}(a_1, \ldots, a_n, 0, 0),$$

on obtient la formule

$$(146)\quad \Sigma a_1^{h_1} \ldots a_n^{h_n} (2\mu + n) \int_0^{2\pi} e^{-k\iota\varphi} d\varphi \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} \Psi(x_1, \ldots, x_n, \varphi) \mathrm{P}_{h_1, \ldots, h_n}^{(\mu, k)} dx_1 \ldots dx_n$$
$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2^{k-2}} \frac{\Phi^{(-k)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)}.$$

Faisons maintenant l'hypothèse que

$$(147)\quad \begin{cases} \Phi^{(+k)}(a_1, \ldots, a_n, 0, 0) = \Sigma \mathrm{C}_{h_1, \ldots, h_n}^{(+k)} a_1^{h_1} \ldots a_n^{h_n}, \\ \Phi^{(-k)}(a_1, \ldots, a_n, 0, 0) = \Sigma \mathrm{C}_{h_1, \ldots, h_n}^{(-k)} a_1^{h_1} \ldots a_n^{h_n}, \end{cases}$$

nous obtenons *les deux formules fondamentales*

$$(148)\quad \int_0^{2\pi} e^{+k\iota\varphi} d\varphi \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} \Psi(x_1, \ldots, x_n, \varphi) \mathrm{P}_{h_1, \ldots, h_n}^{(\mu, k)} dx_1 \ldots dx_n$$
$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2^{k-2}(2\mu + n)} \frac{\mathrm{C}_{h_1, \ldots, h_n}^{(+k)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)},$$

$$(149)\quad \int_0^{2\pi} e^{-k\iota\varphi} d\varphi \int_{(X_n \geqq 0)}^{n} \Psi(x_1, \ldots, x_n, \varphi) \mathrm{P}_{h_1, \ldots, h_n}^{(\mu, k)} dx_1 \ldots dx_n$$
$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2^{k-2}(2\mu + n)} \frac{\mathrm{C}_{h_1, \ldots, h_n}^{(-k)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)},$$

qui sont la généralisation complète de la formule (70).

De ces formules decoulent quelques consequences importantes pour la détermination des coefficients du développement

$$(150)\quad \Psi(x_1, \ldots, x_n, \varphi) = \sum_{\mu=0}^{\mu=+\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{k=\mu} \left[\sum \left(M^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} \cos k\varphi + N^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} \sin k\varphi \right) Q^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} \right] \right\}.$$

Le simple rapprochement des formules (137) et (148-149) donne

$$(151)\quad \left\{ \begin{aligned} M^{(\mu,0)}_{m_1,\ldots,m_n} &= \frac{(1, m_1)\ldots(1, m_n)}{(1, \mu)} C^{(0)}_{m_1,\ldots,m_n}, \\ N^{(\mu,0)}_{m_1,\ldots,m_n} &= 0, \\ M^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} &= \frac{1}{2^k} \frac{(1, h_1)\ldots(1, h_n)}{(1, k)(2k+1, h)} \left(C^{(+k)}_{h_1,\ldots,h_n} + C^{(-k)}_{h_1,\ldots,h_n} \right), \\ N^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} &= \frac{1}{2^k} \frac{(1, h_1)\ldots(1, h_n)}{(1, k)(2k+1, h)} \left(C^{(+k)}_{h_1,\ldots,h_n} - C^{(-k)}_{h_1,\ldots,h_n} \right). \end{aligned} \right.$$

Exemple. — Soit à trouver le développement de la fonction

$$\Psi = (\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n + i\Lambda_n \sqrt{X_n} \cos\varphi)^\mu \qquad (\Lambda_n^2 = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2),$$

qui est, d'après la page 95, la valeur prise sur S par la fonction harmonique

$$\Phi(z_1, \ldots, z_{n+1}, z_{n+2}) = (\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_n z_n + i\Lambda_n z_{n+1})^\mu.$$

Ici $\Phi(a_1, \ldots, a_{n+2})$ ne dépend pas de a_{n+2} ; donc

$$\Phi^{(+k)} = \Phi^{(-k)} = \frac{\partial^k \Phi}{\partial a_{n+1}^k}.$$

Nous pouvons déjà prévoir que

$$C^{(+k)}_{h_1,\ldots,h_n} = C^{(-k)}_{h_1,\ldots,h_n},$$

donc

$$N^{(\mu,k)}_{h_1,\ldots,h_n} = 0 ;$$

puis

$$\Phi^{(0)}(a_1, \ldots, a_n, 0, 0) = (\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n)^\mu,$$

donc

$$M^{(\mu,0)}_{m_1,\ldots,m_n} = \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_n^{m_n}.$$

Enfin

$$\Phi^{(k)}(a_1, \ldots, a_n, 0, 0) = \frac{(1, \mu)}{(1, h)} (\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n)^h (i\Lambda_n)^k,$$

donc

$$C^{(+k)}_{h_1, \ldots h_n} = \frac{(1, \mu)}{(1, h_1)\ldots(1, h_n)} (i\Lambda_n)^k \lambda_1^{h_1} \ldots \lambda_n^{h_n}$$

et, d'après (151),

$$M^{(\mu, k)}_{h_1 \ldots, h_n} = \frac{1}{2^k} \frac{(1, \mu)}{(1, k)} \frac{(i\Lambda_n)^k}{(2k+1, h)} 2\lambda_1^{h_1} \ldots \lambda_n^{h_n} (k > 0).$$

Ce résultat est identique à celui de la formule (131), obtenue par une tout autre méthode.

Ces conclusions se résument donc dans le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donnée une fonction*

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n, \varphi);$$

soit

$$\Phi(z_1, \ldots, z_{n+2})$$

la fonction harmonique à l'intérieur de S, *qui, sur* S, *se réduit à* Ψ. *La connaissance des développements*

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial z_{n+1}} \pm i \frac{\partial}{\partial z_{n+2}}\right)^k \Phi\right]_{z_{n+1}=z_{n+2}=0} = \Sigma C^{(\pm k)}_{h_1, \ldots, h_n} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

permet immédiatement d'écrire le développement de Ψ *en série de fonctions* $Q^{(\mu, k)}_{h_1, \ldots, h_n}$ *au moyen des formules* (151).

Vu et approuvé :
Paris, le 21 décembre 1914.
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Paul APPELL.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 21 décembre 1914.
Le Vice-Recteur de l'Académie de Paris,
L. LIARD.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

DES FONCTIONS HARMONIQUES EN GÉNÉRAL.

CHAPITRE II.

LA PREMIÈRE FONCTION GÉNÉRATRICE.

CHAPITRE III.

LA FONCTION GÉNÉRATRICE ADJOINTE.

CHAPITRE IV.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION ARBITRAIRE EN SÉRIE DE POLYNOMES HYPERSPHÉRIQUES ZONAUX.

CHAPITRE V.

EXPRESSION GÉNÉRALE DES FONCTIONS HYPERSPHÉRIQUES.

55530 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.