Siméon Stoïlow

Sur une classe de fonctions de deux variables définies par les équations linéaires aux dérivées partielles

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1916

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1916__12__1_0>

N° D'ORDRE
1583.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. SIMÉON STOÏLOW.

1re THÈSE. — SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS DE DEUX VARIABLES DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.
2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 juin 1916 devant la Commission d'Examen.

MM. ÉMILE PICARD, *Président.*
GOURSAT, CARTAN, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1916

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

56994 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A LA MÉMOIRE

DE MON PÈRE.

A MA MÈRE.

A

Monsieur Émile PICARD,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

PROFESSEUR A LA SORBONNE.

Hommage de profond respect.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR UNE

CLASSE DE FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

DÉFINIES PAR

LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

INTRODUCTION.

1. Depuis les recherches fondamentales de Cauchy sur l'existence de fonctions satisfaisant à une relation différentielle donnée, bien des questions, plus ou moins analogues à ce que l'on a appelé le *problème de Cauchy*, ont, pour diverses raisons, attiré l'attention des géomètres.

Dans le problème de Cauchy les *données* qui représentent les valeurs de la fonction cherchée, et de plusieurs de ses dérivées, sont portées par une courbe, lorsqu'il s'agit d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes.

M. Picard a, dans un travail bien connu, résolu un problème analogue pour les équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, mais où les *données* représentent les valeurs de la fonction cherchée sur *deux* courbes appelées *caractéristiques* et ayant un point commun. La méthode des approximations successives de M. Picard peut facilement être étendue aux équations linéaires d'un ordre quelconque [1] et à certaines équations non linéaires.

---

[1] LE ROUX, *Sur les intégrales des équations linéaires* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1898).

Dans ces recherches, comme dans d'autres analogues et dans le problème de Cauchy lui-même, les données sont toujours des fonctions qui, au moins dans la région où l'on détermine les intégrales qu'elles définissent, n'ont aucune singularité.

2. Dans ce Mémoire, je me suis surtout proposé d'établir un théorème d'existence pour les équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes de la forme générale, *les données ayant des singularités*, et de donner la *forme analytique* des intégrales autour de ces singularités. Il est évident que cette forme analytique des intégrales dépendant de la forme analytique des données autour du point singulier correspondant, on ne pourra songer à considérer des données à points singuliers absolument quelconques.

Je me suis donc borné à une classe particulière de points singuliers, qui entraîne pour les intégrales des singularités tout à fait analogues.

3. Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Soit

$$a_n^0 \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a_{n-1}^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y} + \ldots + a_{m-p}^p \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-p} \partial y^p} + \ldots + a_0^0 u = 0,$$

où

$$m = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad \text{et} \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Les intégrales de ces équations auront deux espèces de singularités :

1° Des singularités *fixes*, qui pourront être les points ou ensembles de points pour lesquels on a

$$a_n^0 = a_{n-1}^1 = \ldots = a_0^n = 0$$

ou les singularités des coefficients a de l'équation;

2° Des singularités *mobiles*, qui dépendront des points singuliers des données.

M. Delassus a montré dans sa *Thèse* (Paris, 1895) que, pour les équations à caractéristiques réelles, les singularités mobiles étaient toujours des caractéristiques.

Ce résultat subsiste lorsqu'on passe dans le domaine des variables complexes, comme l'a montré M. Le Roux dans un Mémoire publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1898.

Ce sont ces dernières singularités qui interviendront dans le théorème d'existence que nous aurons en vue dans la première Partie de ce Mémoire et que voici :

Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles, et deux courbes : une caractéristique de l'équation, d'ordre k $(n > k \geq 1)$ et une autre courbe ayant avec cette caractéristique un point commun sans lui être tangente;

Étant donnée aussi deux régions (Γ) et (Γ') respectivement sur la caractéristique et sur l'autre courbe, contenant toutes les deux le point commun;

Nous allons déterminer une intégrale de l'équation avec les données suivantes :

1° Les valeurs de cette intégrale et de ses $n-k-1$ premières dérivées extérieures sur la caractéristique, ces valeurs formant des fonctions holomorphes dans (Γ);

2° Les valeurs de l'intégrale et de ses $k-1$ premières dérivées extérieures sur l'autre courbe, les fonctions qui les représentent étant représentées dans (Γ') par

$$\sum_{i=1}^{i=m} \mathrm{A}_i(x)\,\mathrm{Log}(x-a_i) + \mathrm{B}(x),$$

où les $\mathrm{A}_i(x)$ sont des fonctious holomorphes et $\mathrm{B}(x)$ est une fonction uniforme avec les singularités $x = a_i$.

Cette intégrale admet dans un domaine de l'espace (x, y) contenant le point commun des deux courbes une représentation analytique analogue à celle des données.

Si $x =$ const. désigne la famille caractéristique dont fait partie la caractéristique qui porte les données, cette représentation analytique est

$$\sum_{i=1}^{i=m} \mathrm{A}_i(x, y)\,\mathrm{Log}(x-a_i) + \mathrm{B}(x, y),$$

$\mathrm{B}(x,y)$ n'ayant dans le domaine que les singularités $x = a_i$, et étant uniforme. Les $A_i(x, y)$ sont, comme plus haut, des fonctions holomorphes.

Pour que le théorème soit exact il faut ajouter cette condition que (Γ') est assez petit par rapport à (Γ). Les données sont alors *arbitraires* dans la forme indiquée.

Cette classe d'intégrales, que l'on peut représenter, comme on le voit, analytiquement autour d'un point par lequel passe une singularité mobile, constitue la classe la plus simple d'intégrales d'une équation linéaire quelconque, après les intégrales holomorphes données par le théorème fondamental de Cauchy. En effet, M. Le Roux a montré (Mémoire cité plus haut) que les équations linéaires n'admettent pas, *en général*, des intégrales *uniformes* autour d'une singularité mobile.

D'autre part, je montre plus loin *que toute intégrale uniforme, quand elle existe, est une somme d'intégrales telles que celles indiquées plus haut, relatives aux différentes familles caractéristiques.*

Il existe, comme on verra, une classe particulière d'équations linéaires qui admettent toujours des intégrales uniformes autour d'une singularité mobile : *ce sont les équations dont toutes les caractéristiques se confondent en une seule famille.*

4. Dans la deuxième Partie de ce Mémoire, je considère les équations dont les familles caractéristiques sont des familles de droites et dont les coefficients n'ont pas de singularités.

On trouve pour ces équations, *dans tout le domaine d'existence*, des expressions analogues à celles qui ont été données dans la première Partie *autour d'un point* où passait une singularité mobile, et des propriétés d'uniformités dans tout l'espace (x, y) des variables indépendantes.

Une classe très étendue d'intégrales aura la représentation analytique valable dans tout le domaine d'existence

$$\sum_{i=\infty}^{i=\infty}\left[G_i(x,y)\,\mathrm{Log}(x-a_i)+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}A_m^i(x,y)\,(x-a_i)^m\right],$$

où les $G_i(x, y)$ et $A_m^i(x, y)$ sont des fonctions *entières* de x et de y, et

$$x = \text{const.}$$

désigne une famille caractéristique.

Les intégrales partout uniformes, quand elles existeront, seront toujours une somme de pareilles intégrales, relatives aux différentes familles caractéristiques.

Je fais ensuite la recherche des intégrales quadruplement périodiques uniformes, des équations à coefficients constants. Je trouve une forme très particulière pour cette catégorie d'intégrales (¹).

Pour terminer, je montre comment on pourrait définir des classes plus générales d'intégrales que celles dont il a été donné des représentations analytiques dans les première et deuxième Parties de ce Mémoire, intégrales qu'on pourrait également représenter analytiquement.

(¹) Stoilow, *Comptes rendus*, t. 160, 25 janvier 1915, p. 129.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

CHAPITRE I.

SUR LE DOMAINE D'HOLOMORPHISME DES INTÉGRALES DÉTERMINÉES AVEC DES DONNÉES SUR UNE COURBE NON CARACTÉRISTIQUE.

1. Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre n, que j'écrirai sous la forme

$$(\mathrm{I}) \quad a_n^0(x,y)\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a_{n-1}^1(x,y)\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\,\partial y} + \ldots + a_0^n(x,y)\frac{\partial^n u}{\partial y^n} + \Phi(u,x,y) = 0,$$

où $\Phi(u, x, y)$ désigne la partie de l'équation qui ne renferme que les dérivées d'ordre moindre que n.

Dans tout ce qui suivra je supposerai toujours les fonctions analytiques et les variables complexes.

Il est inutile de rappeler ce qu'on entend par caractéristique ou famille caractéristique de l'équation (I); aujourd'hui cette notion est tout à fait classique.

L'équation

$$(\mathrm{II}) \quad a_n^0(x,y)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n - a'_{n-1}(x,y)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-1} + \ldots \mp a_1^{n-1}(x,y)\frac{\partial y}{\partial x}\, a \pm {}_0^n(x,y) = 0$$

qui donne les familles caractéristiques sera appelée dans la suite *équation caractéristique* de (I).

Considérons un domaine (D) de l'espace à quatre dimensions des variables (x, y), où l'équation (I) n'a pas de singularités. Voici ce que l'on doit entendre par *singularité de l'équation* (I) :

1° Les singularités des coefficients de l'équation;

2° Les points ou multiplicités sur lesquelles *tous* les coefficients des dérivées d'ordre n dans l'équation sont nuls;

3° Les singularités des fonctions caractéristiques [1];

4° La courbe discriminante de l'équation et dont voici la définition :

Si $F(x, y, y') = 0$ désigne l'équation caractéristique (II), la courbe discriminante est le résultat de l'élimination de y' entre

$$F(x, y, y') = 0, \qquad F'_{y'}(x, y, y') = 0.$$

Si cependant l'équation (II), considérée comme équation algébrique en $y' = \frac{\partial u}{\partial x}$, a une racine multiple quelles que soient les valeurs de x et de y, c'est-à-dire si l'équation (I) a deux ou plusieurs caractéristiques complètement confondues, le résultat de cette élimination donnerait l'espace (x, y) lui-même, c'est-à-dire serait une identité. La courbe discriminante est alors le résultat de l'élimination de y' entre

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{et} \quad F''_{y'^2}(x, y, y') = 0,$$

et ainsi de suite.

Considérons également une courbe définie par une équation

$$P(x, y) = 0,$$

la fonction $P(x, y)$ étant holomorphe dans (D).

Supposons que (x_0, y_0) soit un point de (D) et de la courbe. Je supposerai de plus que l'on n'a jamais dans (D) l'égalité

$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial c_i}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial c_i}{\partial y} = 0,$$

où $c_i(x, y)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ désigne une fonction caractéristique.

Donnons-nous les valeurs d'une intégrale de (I) et celles de ces $n-1$ premières dérivées extérieures à

$$P(x, y) = 0$$

sur cette courbe. Soit (E) une portion de la courbe contenant (x_0, y_0),

---

[1] La fonction caractéristique étant par définition les fonctions $c(x, y)$ telles que $c(x, y) = \text{const.}$ soit une famille caractéristique, il est évident que ces fonctions ne sont pas parfaitement déterminées en ce qui concerne leur forme. On peut en effet prendre à la place de $c(x, y)$ la fonction $f[c(x, y)]$, où $f(u)$ est une fonction quelconque d'une variable. Par singularité d'une fonction caractéristique il faut entendre une singularité de $f[c(x, y)]$, qui en est une quelle que soit la forme de la fonction $f(u)$.

intérieure à (D) et telle que dans toute cette portion les fonctions d'une variable que sont les données soient holomorphes.

Le théorème général de Cauchy est alors le suivant :

On peut déterminer une intégrale satisfaisant aux conditions données et cette intégrale est holomorphe en (x_0, y_0) *et autour de ce point, dans un domaine* (d) *de l'espace* (x, y) *intérieur à* (D).

Ce domaine, tel qu'il est fourni par le théorème de Cauchy est, en général, tel, qu'il ne contient pas toute la portion (E) de la courbe qui porte les données.

2. On peut se demander s'il n'est pas possible d'étendre le domaine (d) le long de (E) de manière que la fonction intégrale soit holomorphe dans un domaine contenant entièrement (E) à son intérieur.

La réponse à cette question est affirmative.

M. Goursat a montré (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1906) que l'intégrale était bien holomorphe dans un pareil domaine.

M. Goursat a d'ailleurs montré cette proposition pour une équation quelconque aux dérivées partielles.

Nous allons démontrer ici ce résultat par une autre méthode qui est toute aussi générale que celle de M. Goursat.

Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer que l'on peut toujours, en partant de (x_0, y_0) et en suivant un chemin tracé entièrement sur (E), prolonger analytiquement l'intégrale déterminée par le théorème de Cauchy autour de (x_0, y_0), de façon à ne rencontrer aucune singularité tant que le chemin ne sort pas de (E).

Prenons donc un chemin

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t)$$

tel que $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = \varphi(t_0)$ et que tous les points de ce chemin soient sur E. En poursuivant le prolongement analytique de l'intégrale le long de ce chemin, supposons que l'on rencontre dans (E) un point singulier. Soit $t = t_1$ la valeur de t qui correspondrait à ce point singulier.

D'après la définition même d'une singularité d'une fonction analytique on pourra s'approcher autant que l'on voudra du point

$$x_1 = f(t_1), \qquad y_1 = \varphi(t_1)$$

par des domaines de plus en plus petits où convergerait la série prolongée représentant l'intégrale.

D'un autre côté le point (x_1, y_1) faisant partie de la région (E), les données y seront holomorphes, et le théorème de Cauchy peut y être appliqué. Il existe donc un domaine entourant ce point tel que l'intégrale y soit holomorphe, et l'on peut par conséquent prendre t assez près de t_1 pour que le domaine de convergence de la série correspondant à cette valeur de t contienne (x_1, y_1) à son intérieur.

Cela contredit l'hypothèse du début. Le point (x_1, y_1), et toute autre point de (E), ne peut donc être qu'*ordinaire*, et la proposition se trouve établie.

On peut donc énoncer le théorème général suivant :

Théorème général I. — *On peut toujours déterminer un domaine de l'espace (x, y), dans lequel l'intégrale déterminée avec les n données de Cauchy sur une courbe non caractéristique soit holomorphe, et qui contienne entièrement une région quelconque* (E) *de la courbe, portant les données, dans laquelle ces données sont toutes holomorphes.*

3. Considérons par exemple une équation linéaire dont tous les coefficients sont des fonctions entières de x et de y. Supposons de plus que les coefficients des dérivées d'ordre n (ordre de l'équation) soient tous des constantes, de manière que l'équation n'ait aucune espèce de singularité.

Une intégrale de cette équation déterminée avec des données fonctions entières de x sur

$$y = 0,$$

cette droite étant supposée différente de toute caractéristique de l'équation, est une fonction holomorphe autour de tout point de ce plan.

Comme les singularités possibles d'une intégrale d'une pareille équation sont toutes des caractéristiques et que ces caractéristiques coupent le plan

$$y = 0,$$

on voit que l'intégrale ainsi déterminée est entière. Cette propriété sera d'ailleurs démontrée, en toute rigueur, dans un Chapitre suivant.

4. Envisageons un point que nous pouvons supposer être l'origine, autour duquel une fonction peut se mettre sous la forme

$$y^p A(x, y) + B(x, y)$$

dans un domaine (δ) contenant l'origine et aussi petit que l'on voudra. Supposons que $B(x, y)$ soit holomorphe dans (δ) [1], et que p étant un nombre positif quelconque $A(x, y)$ soit absolument quelconque dans (δ), à condition qu'on ne puisse pas trouver un nombre positif q quelconque tel que

$$y^q A(x, y)$$

soit homolorphe à l'origine. S'il en est ainsi, l'expression ci-dessus ne saurait satisfaire à une équation linéaire, n'ayant pas de singularité à l'origine et d'un ordre n, tel que

$$p \geqq n.$$

En effet, dans ce cas, les données de Cauchy sur

$$y = 0$$

sont holomorphes dans la région de ce plan contenue dans (δ), il doit donc en être de même de l'intégrale dans un domaine contenant cette région. Ceci suppose que $y = 0$ n'est pas caractéristique. Toutefois le résultat subsiste, si $y =$ const. est une famille caractéristique, et p peut même alors être inférieur à n, pourvu qu'il ne descende pas au-dessous d'une certaine limite.

Ceci ne nous donne que de très vagues indications sur la représentation analytique d'une intégrale autour d'une singularité mobile.

D'autres théorèmes nous fourniront à ce sujet des indications plus précises.

---

(1) Cela revient à supposer que cette fonction est homolorphe à l'origine.

CHAPITRE II.

SUR LE DOMAINE D'HOLOMORPHISME DES INTÉGRALES DÉTERMINÉES AVEC DES DONNÉES SUR UNE CARACTÉRISTIQUE D'ORDRE k.

1. Reprenons l'équation linéaire considérée au premier paragraphe du Chapitre précédent et proposons-nous maintenant de déterminer une intégrale particulière de cette équation, en nous donnant les valeurs de cette intégrale et d'un certain nombre de ces dérivées, sur une courbe caractéristique.

On sait que pour les équations du premier ordre ce problème n'a pas de sens précis, car les valeurs d'une intégrale sur une caractéristique ne peuvent plus être représentées par une fonction *arbitraire* d'une variable.

D'autre part, pour une donnée telle que le problème soit possible, la solution n'est plus unique et il existe même une infinité d'intégrales prenant les mêmes valeurs sur la courbe caractéristique.

Il n'en est plus de même quand il s'agit d'équations d'un ordre supérieur au premier.

Les intégrales de ces équations peuvent être parfaitement déterminées en se donnant, sur une courbe caractéristique, les valeurs de ces intégrales et celles d'un certain nombre de leurs dérivées extérieures (nombre qui dépend, comme on va le voir, de l'ordre n de l'équation et de l'ordre k de la caractéristique), et des données en nombre suffisant sur une autre courbe coupant la caractéristique au point autour duquel on fait la détermination de l'intégrale et assujettie à la seule condition de ne pas être tangente à la caractéristique en ce point.

Il existe notamment à ce point de vue un théorème analogue à celui de Cauchy, et qui se démontre facilement au moyen des approximations successives de M. Picard [1].

Ce théorème est le suivant :

---

[1] On peut voir pour la démonstration le Mémoire déjà cité de M. Le Roux (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1898).

Considérons un domaine (D) *où l'équation n'a pas de singularités.*

Soient (x_0, y_0) un point de ce domaine et

$$P(x, y) = 0,$$

où $P(x, y)$ est une fonction holomorphe dans (D), l'équation d'une courbe passant par ce point.

Soit encore

$$c(x, y) = 0$$

une caractéristique faisant partie d'une famille d'ordre k :

$$c(x, y) = \text{const.}$$

supposons que $P(x, y)$ satisfasse dans (D) à la condition

$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x} \neq 0.$$

Donnons-nous alors des fonctions d'une variable représentant les valeurs d'une intégrale et de ses $n - k - 1$ premières dérivées extérieures sur la caractéristique et les valeurs de la même intégrale et de ses $k - 1$ premières dérivées extérieures sur la courbe de plus haut.

Si ces données sont holomorphes au point (x_0, y_0) *il existe une intégrale satisfaisant aux conditions, que ces données représentent, et holomorphe en* (x_0, y_0).

Il résulte, des approximations successives mêmes, la remarque suivante :

Si l'on suppose les données holomorphes dans le domaine

$$P(x, y) < \alpha', \qquad |c(x, y)| < \beta',$$

où α' et β' sont deux quantités positives, l'intégrale sera holomorphe dans un domaine, plus petit, généralement :

$$|P(x, y)| < \alpha'', \qquad |c(x, y)| < \beta'',$$

qui est indépendant des données et dépend exclusivement de l'équation et du domaine (D) *supposé limité, pourvu que les données soient holomorphes dans le premier domaine.*

De ce fait il résulte une seconde remarque qui sera utile plus tard :

Si les données sur

$$P(x, y) = 0$$

sont holomorphes au point (x_1, y_1) *de cette courbe et que l'intégrale est holomorphe dans un domaine :*

$$|P(x, y)| < \alpha, \qquad |c(x, y)| < \beta,$$

où $c(x, y) = \beta$ *représente la caractéristique passant par* (x_1, y_1) *et* α *est une quantité positive, aussi petite que l'on voudra, l'intégrale est holomorphe en* (x_1, y_1).

En effet, d'après la remarque précédente, on peut prendre un point (x_2, y_2) situé sur la courbe, dans

$$|c(x, y) < \beta$$

et assez près de (x_1, y_1) pour que le domaine d'holomorphisme, résultant des données sur la courbe et la caractéristique passant par (x_2, y_2) (holomorphes autour de ce point), soit tel que le point (x_1, y_1) soit contenu dans ce domaine. Aux deux courbes

$$P(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad P(x, y = \beta$$

correspond en effet un domaine de ce genre qui, lorsque l'on déplace (x_1, y_1) très peu sur $P(x, y)$, varie d'une manière continue.

Il importe bien de remarquer quel est le sens de cette remarque. Holomorphe en (x_1, y_1) ne veut pas dire seulement que les valeurs de la fonction et d'un certain nombre de ses dérivées sont holomorphes sur une courbe passant par (x_1, y_1), mais que la fonction est holomorphe en ce point dans l'espace à quatre dimensions (x, y) et dans un domaine entourant le point (x_1, y_1).

2. On peut se poser ici une question analogue à celle qui a fait l'objet du premier Chapitre et qui a fourni le théorème de M. Goursat.

Peut-on étendre le domaine relativement réduit qui fournit le théorème précédent, de manière que l'intégrale déterminée avec nos données y reste holomorphe ?

La méthode de prolongement employée plus haut tombe ici en défaut, car il s'agit dans le cas présent, de deux courbes qui portent les données, et non plus d'une seule. Sur ces deux courbes l'une varie quand on fait le prolongement le long de l'autre.

On verra cependant que l'analogie avec le cas où l'on a pris des données sur une courbe non caractéristique n'en subsiste pas moins dans le résultat.

M. Picard a dans un travail classique démontré ce résultat pour les équations du second ordre [1]. Le résultat y est obtenu d'une manière fort élégante par l'application de la méthode des approximations successives.

La démonstration que nous allons donner revient, en somme, à une généralisation de la célèbre méthode de M. Picard. Toutefois, pour faire l'extension au cas des équations d'ordre n, il est nécessaire d'établir d'abord quelques préliminaires, qui par l'intermédiaire des approximations successives permettront de faire le prolongement de la solution dans l'espace (x, y).

3. Remarquons d'abord que le théorème général que nous avons en vue est facile à vérifier pour une équation d'un type particulier que nous écrirons

$$\Delta_n(u) = 0. \tag{1}$$

Le symbole $\Delta_n(u)$ est défini par l'identité :

$$\begin{aligned}\Delta_n(u) = & \left[a_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b_1(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\right] \\ & \times \left[a_2(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\right] \cdots \left[a_n(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_n(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\right],\end{aligned}$$

où chaque opération différentielle est effectuée sur l'expression se trouvant à sa droite et $a_i(x, y)$ et $b_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ désignent des fonctions quelconques.

L'équation (1) est évidemment une équation linéaire d'ordre n et ses n familles caractéristiques sont les intégrales générales des n équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_i(x, y)}{a_i(x, y)}.$$

---

[1] M. Picard a démontré ce résultat en considérant des équations du second ordre réelles, où les fonctions ne sont d'ailleurs pas supposées analytiques, mais seulement continues.

Ses singularités sont les singularités des équations du premier ordre

$$a_i(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_i(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

En prenant des données particulières de la nature de celles considérées au commencement de ce Chapitre, sur les courbes

$$P(x, y) = 0, \qquad c(x, y) = 0,$$

qui ont la même signification que plus haut, on pourra, en effet, facilement intégrer l'équation (1) en remarquant qu'on peut la mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\Delta_n(u) = & \left[\quad a_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \quad b_1(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\right] \\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times \left[a_{n-k}(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + b_{n-k}(x, y)\frac{\partial}{\partial y}\right] \\ & \times \left[\quad a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \quad b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]^{(k)},\end{aligned}$$

où l'exposant du dernier facteur différentiel indique que la même opération est répétée sur u, un nombre k de fois. On supposera pour cela que les k derniers facteurs différentiels de l'identité qui définit (1) correspondent justement aux équations du premier ordre dont la famille caractéristique est

$$c(x, y) = \text{const.}$$

qui a été supposée d'ordre k pour l'équation (1).

L'équation (1) est en effet équivalente aux deux suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} \left[a_1(x, y)\dfrac{\partial}{\partial x} + b_1(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y}\right]\cdots\left[a_{n-k}(x, y)\dfrac{\partial v}{\partial x} + b_{n-k}(x, y)\dfrac{\partial v}{\partial y}\right] = 0, \\ \left[\ a(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \ b(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]^{(k)} = v, \end{cases}$$

dont la première est intégrée avec $n - k$ données, sur la courbe

$$c(x, y) = 0,$$

non caractéristique pour cette équation, ces données étant obtenues par dérivations des données correspondantes relatives à l'équation (1), et la seconde est intégrée avec les k données relatives à (1) sur la courbe

$$P(x, y) = 0.$$

Dans ces conditions, le théorème de Cauchy-Goursat montre que l'intégrale de la première équation (2) *est holomorphe dans une région contenant entièrement, à son intérieur, la région de la caractéristique* $c(x, y) = 0$, *où les données sont holomorphes*, et la forme de l'intégrale générale de la deuxième équation, qui est facile à obtenir, montre qu'il *en est de même de* u, *donc de l'intégrale de* (1).

5. *Changement de variables.* — Soient X et Y deux nouvelles variables indépendantes, que l'on obtient par le changement

$$X = P(x, y), \qquad Y = c(x, y).$$

Quand (x, y) décrit le domaine (D), le point (X, Y), décrit dans l'espace transformé un domaine qui en général se recouvre lui-même, et la correspondance entre (X, Y) et (x, y) n'est pas biunivoque, en ce cas.

Il est cependant facile de voir que l'on peut toujours partager (D) en un nombre fini de domaine $(D_1), (D_2), \ldots, (D_q)$, chacun de ces domaines étant suffisamment petit pour que la correspondance entre ce domaine et celui qui est son transformé dans l'espace (X, Y) *soit biunivoque*, et que chaque point de (D) se trouve *à l'intérieur* d'un de ces domaines. [Cette dernière condition exige que les domaines (D_1), (D_2), ..., (D_q) empiètent les uns sur les autres.]

Revenons au théorème général, que nous avons en vue.

On pourra choisir parmi les domaines (D_1), (D_2), (D_q) une suite de p domaines, formant ensemble un domaine à un seul tenant, contenant entièrement à son intérieur la région de la caractéristique

$$c(x, y) = 0$$

qui se trouve dans (D) et sur laquelle les données sont holomorphes.

Dès lors il suffira pour établir le théorème relatif à cette région tout entière, de le démontrer pour le domaine (D_p) (de la suite), qui entoure le point (x_0, y_0) par où passent les deux courbes portant les données, car la démonstration s'étendra tout naturellement de proche en proche aux autres domaines (D_1), (D_2), ..., (D_p) de la suite.

Dans ce qui suivra, nous considérerons toujours ce domaine (D_p), en le désignant quand même par (D), la démonstration pour les autres domaines se faisant exactement de la même manière.

Nous pouvons donc supposer sans aucun inconvénient que le changement de variables de plus haut a été effectué, ce changement étant biunivoque dans notre domaine (D), implicitement supposé assez petit. Les équations de la courbe et de la caractéristique qui portent les données peuvent donc être supposées être

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

6. *Le domaine* $D_1^{x_0 y_0}$ *de l'équation* $\Delta_n(u) = 0$. — Soit $(\mathfrak{D})$ le plus grand domaine intérieur à (D) et défini par

$$|x| < m, \qquad |y| < n,$$

m et n étant deux quantités positives. Soit (x_0, y_0) un point quelconque de $(\mathfrak{D})$; soient α_0 et β_0 deux quantités positives telles que l'on ait

$$m - |x_0| > \alpha_0, \qquad n - |y_0| > \beta_0.$$

Les domaines intérieurs à $(\mathfrak{D})$ que nous appellerons $(D_0^{x_0 y_0})$, en les définissant par

$$(D_0^{x_0 y_0}) \qquad |x - x_0| < \alpha_0, \qquad |y - y_0| < \beta_0,$$

dépendront donc de x_0, y_0, α_0 et β_0, ces quatre variables dont deux réelles et deux complexes étant assujetties à définir un point de l'espace à six dimensions qui fait partie du domaine $(\mathfrak{D}')$ ainsi défini :

$$(\mathfrak{D}') \qquad |x_0| < m, \qquad |y_0| < n, \qquad m - |x_0| > \alpha_0, \qquad n - |y_0| > \beta_0.$$

A chaque domaine $(D_0^{x_0 y_0})$ correspondra un domaine plus petit $(D_1^{x_0 y_0})$ défini par

$$(D_1^{x_0 y_0}) \qquad |x - x_0| < \alpha_1, \qquad |y - y_0| < \beta_1,$$

les quantités α_1 et β_1 étant telles que $(D_1^{x_0 y_0})$ jouisse par rapport à $(D_0^{x_0 y_0})$ de la propriété suivante :

Si les données (considérées plus haut) *sur* $x = x_0$ *et* $y = y_0$ *sont holomorphes dans* $(D_0^{x_0 y_0})$, *l'intégrale qu'elles déterminent est holomorphe dans le domaine* $(D_1^{x_0 y_0})$ *correspondant.*

On aura naturellement

$$\alpha_1 = \lambda_{x_0 y_0}(\alpha_0, \beta_0)\alpha_0, \qquad \beta_1 = \mu_{x_0 y_0}(\alpha_0, \beta_0)\beta_0,$$

les formes des fonctions $\lambda_{x_0 y_0}$ et $\mu_{x_0 y_0}$ dépendant du point (x_0, y_0) et de l'équation

$$\Delta_n(u) = 0,$$

mais en aucune façon des données sur $x = x_0$ et $y = y_0$ pourvu que ces données soient holomorphes dans $(D_0^{x_0 y_0})$.

De plus les deux fonctions $\lambda_{x_0 y_0}(\alpha_0, \beta_0)$ et $\mu_{x_0 y_0}(\alpha_0, \beta_0)$ sont toujours réelles et positives et au plus égales à *un*. Elles sont continues dans tout domaine $(\mathfrak{D}')$ défini par

$$(\mathfrak{D}') \qquad \begin{gathered} |x_0| \leqq m', \qquad |y_0| \leqq n', \\ 0 \leqq \alpha_0 \leqq m - |x_0|, \qquad 0 \leqq \beta_0 \leqq n - |y_0|, \qquad \frac{\alpha_0}{\beta_0} \geqq l, \end{gathered}$$

où l'on a $m' < m$, $n' < n$, $l > 0$, ces inégalités excluant les égalités. La continuité persiste sur la limite du domaine $(\mathfrak{D}')$ intérieur à $(\mathfrak{D}')$. Nous allons démontrer maintenant la proposition suivante :

Les fonctions $\lambda_{x_0 y_0}$ et $\mu_{x_0 y_0}$ sont toujours supérieures en valeur absolue à une quantité positive, quand x_0, y_0, α_0 et β_0 définissent un point de $(\mathfrak{D}')$.

Il suffit pour cela de montrer que $[(x_0, y_0)$ étant fixe$]$ les fonctions $\lambda_{x_0 y_0}$ et $\mu_{x_0 y_0}$ de α_0 et β_0 tendent vers une limite différente de zéro, quand α_0 et β_0 tendent vers zéro, restant liés par la relation

$$\alpha_0 > l\beta_0,$$

car pour $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, il est évident, d'après le théorème analogue à celui de Cauchy, que l'on peut toujours prendre α_1 et β_1 différents de zéro.

La proposition qui a été établie relativement à l'équation

$$\Delta_n(u) = 0$$

montre immédiatement que l'on peut prendre pour $\lambda_{x_0 y_0}$ une quantité plus petite que *un*, quelconque, que l'on peut laisser fixe quand α_0 et β_0 diminuent en restant dans $(\mathfrak{D}')$. La limite de $\lambda_{x_0 y_0}$ est donc bien différente de zéro quand les deux quantités α_0 et β_0 tendent vers zéro en restant liées par

$$\alpha_0 > l\beta_0.$$

Reste à montrer qu'il en est de même de $\mu_{x_0 y_0}$.

Nous allons nous servir pour cela d'un raisonnement qui reviendra à plusieurs reprises dans la suite de ce Mémoire. Soit λ' le nombre inférieur à l'unité que l'on choisit pour valeur fixe de $\lambda_{x_0 y_0}$ conformément à ce qui vient d'être dit. Les deux valeurs de α_0 et β_0 faisant partie de $(\mathcal{O}')$ étant fixes, considérons les courbes imaginaires définies par

$$(3) \qquad y - y_0 = \frac{\theta}{\alpha_0}(x - x_0 - \lambda'\alpha_0)(x - x_0 + \lambda'\alpha_0),$$

où θ désigne un paramètre imaginaire ou réel.

Tout point de l'espace (x, y), qui se trouve sur une courbe de cette famille dont le paramètre θ est en valeur absolue inférieur à une certaine quantité positive θ_0, et dont le $x - x_0$ a un module inférieur à $\lambda'\alpha_0$ est un point ordinaire pour l'intégrale déterminée avec des données holomorphes dans $(D_0^{x_0 y_0})$, défini par

$$|x - x_0| < \alpha_0, \qquad |y - y_0| < \beta_0$$

si θ_0 est pris *assez petit*.

En effet, en faisant croître progressivement $|\theta|$, en partant de zéro, il y aura certainement une limite θ_0 de $|\theta|$, telle que pour tout $|\theta| < \theta_0$ les courbes (3) ne contiennent dans $|x - x_0| < \lambda'\alpha_0$ que des points ordinaires de l'intégrale, le théorème démontré au commencement de ce Chapitre montrant tout de suite que $\theta_0 > 0$.

Mais cette valeur θ_0 dépend de α_0 et β_0 ; il faut donc montrer qu'on peut la choisir telle que, quelles que soient les valeurs de α_0 et β_0 dans $(\mathcal{O}')$, elle reste toujours supérieure à une quantité positive.

Pour cela prenons θ_0 tel que l'on ait

$$(4) \qquad 2\lambda'\theta_0 < p,$$

la quantité positive p désignant une limite inférieure des coefficients angulaires (1) des tangentes caractéristiques autres que $y =$ const. dans $(\mathcal{O}')$ et sur la limite de ce domaine. Je dis que cette valeur de θ_0, étant prise de manière à satisfaire en outre à l'inégalité $\theta_0 l\lambda'^2 < 1$,

(1) C'est-à-dire des racines y' de l'équation caractéristique.

peut être considérée, quels que soient α_0 et β_0 dans $(\mathcal{D}')$, comme une limite de $|\theta|$ telle que toutes les courbes (3) dont le module $|\theta|$ est inférieur à cette limite ne contiennent dans $|x - x_0| < \lambda' \alpha_0$ que des points où l'intégrale est holomorphe.

En effet, pour toutes ces valeurs α_0 et β_0 il devra y avoir une valeur maxima θ_0 telle que sur l'une au moins des courbes

$$y - y_0 = \frac{\theta_0 e^{\omega i}}{\alpha_0}(x - x_0 - \lambda' \alpha_0)(x - x_0 + \lambda' \alpha_0),$$

où ω est compris entre o et 2π il y ait un point singulier de l'intégrale. Or, d'après un théorème de M. Delassus [1], sur l'existence d'un « domaine d'un arc analytique », cela n'est possible que si au point singulier en question, la courbe (3) est tangente à une caractéristique. Ceci ne peut se produire, à cause de la manière dont on a choisi θ_0, qu'au point $x = x_0$; or en ce point les données sont holomorphes si

$$\beta_0 > \theta_0 \alpha_0 \lambda'^2$$

et *a fortiori* si

$$\beta_0 > \theta_0 \beta_0 l \lambda'^2$$

ou

$$1 > \theta_0 l \lambda'^2.$$

En prenant donc θ_0 tel que cette inégalité soit satisfaite en même temps que (4), on voit (remarque, p. 12 et 13) que ce point est ordinaire.

On sera alors sûr que l'intégrale est holomorphe dans le domaine engendré par les courbes (3) limitées par $|\theta| = \theta_0$, et où l'on a

$$|x - x_0| < \lambda' \alpha_0.$$

De ce domaine on peut en détacher un autre qui sera le domaine $(D_1^{x_0 y_0})$ cherché correspondant à

$$(D_0^{x_0 y_0}) \qquad |x - x_0| < \alpha_0, \qquad |y - y_0| < \beta_0,$$

et qui sera défini par

$$|x - x_0| < \lambda'' \alpha_0, \qquad |y - y_0| < \theta_0 \alpha_0 |[\lambda'^2 - \lambda''^2]|,$$

où λ'' désigne une quantité positive $< \lambda'$.

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1895.

On aura alors

$$\text{Minimum de } \lambda_{x_0 y_0}(\alpha_0, \beta_0) = \lambda'',$$

$$\text{Minimum de } \mu_{x_0 y_0}(\alpha_0, \beta_0) = \theta_0 \frac{\alpha_0}{\beta_0} |[\lambda'^2 - \lambda''^2]|.$$

Cette dernière quantité pouvant être remplacée par celle toujours plus petite

$$\theta_0 l |(\lambda'^2 - \lambda''^2)|$$

qui est toujours différente de zéro.

Les minima de $\mu_{x_0 y_0}$ et $\lambda_{x_0 y_0}$ sont donc bien des quantités différentes de zéro.

Soient $L_{x_0 y_0}$ et $M_{x_0 y_0}$ ces deux limites.

Il est clair que lorsque l'on fera varier (x_0, y_0) dans $(\mathfrak{D}')$ et sur ce domaine il y aura pour toutes ces valeurs des limites inférieures analogues différentes de zéro, et ces limites seront continues de (x_0, y_0). Il y aura donc deux quantités M et L différentes de zéro, qui seront les limites inférieures de toutes ces limites inférieures. On pourra donc prendre sans inconvénient, pour domaine $(D_1^{x_0 y_0})$ correspondant à un domaine $(D_0^{x_0 y_0})$ défini par

$$|x - x_0| < \alpha_0. \qquad |y - y_0| < \beta_0,$$

le domaine plus petit

$$|x - x_0| < M\alpha_0, \qquad |y - y_0| < L\beta_0,$$

c'est ce que nous ferons toujours dans la suite.

Il faut bien remarquer que M et L qui sont des constantes positives ne dépendent exclusivement que de l'équation

$$\Delta_n(u) = 0$$

et du domaine $(\mathfrak{D}')$ envisagé.

7. *Équation à second membre.* — Considérons maintenant l'équation à second membre

$$\Delta_n(u) = f(x, y), \tag{5}$$

où $\Delta_n(u)$ est formé de telle manière que la famille caractéristique

$$c(x, y) = \text{const.}$$

corresponde aux k derniers produits différentiels à droite, et $f(x, y)$ est une fonction holomorphe dans le domaine (D) où l'équation (1) n'a pas de singularités.

Considérons comme plus haut la courbe

$$P(x, y) = 0$$

définie comme on l'a vu et cherchons l'intégrale de (5) que nous aurons à utiliser plus loin et qui est déterminée par des données dans le genre de celle que nous avons toujours considéré dans ce Chapitre sur $P(x, y) = 0$ et $c(x, y) = 0$, mais identiquement nulles.

Il est facile de voir que cette intégrale est donnée par

$$u_0(x, y) = \int_{(c_{n-k})}^{x, y} A_1(x, y)\, dc \int_{(c_{n-k-1})}^{x, y} A_2(x, y)\, dc \ldots \int_{(c_1)}^{x, y} A_{n-k}(x, y)\, dc$$
$$\int_{(c)}^{x, y} A_{n-k+1}(x, y)\, dP \int_{(c)}^{x, y} A_{n-k+2}(x, y)\, dP \ldots \int_{(c)}^{x, y} A_n(x, y)\, dP\, f(x, y).$$

Dans cette expression les premières intégrales sont prises le long des caractéristiques autres que

$$c(x, y) = \text{const.}$$

et à partir du point de ces caractéristiques où $c(x, y) = 0$, dc désignant la différentielle totale

$$dc = \frac{\partial c}{\partial x}dx + \frac{\partial c}{\partial y}dy.$$

Les autres intégrales sont prises le long de la caractéristique

$$c(x, y) = \text{const.}$$

qui passe par (x, y) et à partir du point où $P(x, y) = 0$, dP désignant la différentielle totale

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy.$$

Quant aux fonctions $A_1(x, y)$, $A_2(x, y)$, $\ldots$, $A_n(x, y)$, elles ne dépendent exclusivement que du premier membre de l'équation

$$\Delta_n(u) = f(x, y)$$

et sont holomorphes dans (D). Faisons le changement de variable de plus haut, qui ramène les deux courbes à $y = 0$ et $x = 0$, en supposant (D) assez petit.

Soit $(D_1^{x_0 y_0})$ un domaine intérieur au domaine $(\mathfrak{D}')$ considéré plus haut, et défini par

$$(D_1^{x_0 y_0}) \qquad |x - x_0| < \alpha_1, \qquad |y - y_0| < \beta_1,$$

α_1 et β_1 étant des constantes positives.

A chaque domaine $(D_1^{x_0 y_0})$ ainsi défini, nous allons faire correspondre un domaine $(D_2^{x_0 y_0})$ défini par

$$(D_2^{x_0 y_0}) \qquad |x - x_0| < \alpha_2, \qquad |y - y_0| < \beta_2,$$

où α_2 et β_2 désignent des constantes positives plus petites que α_1 et β_1 respectivement, et qui jouira, par rapport au domaine $(D_1^{x_0 y_0})$, de la propriété suivante :

Un chemin d'intégration (1) *se trouvant entièrement situé sur une caractéristique, partant de* $y = 0$ *et aboutissant en un point quelconque de* $(D_2^{x_0 y_0})$, *se trouve entièrement situé dans le domaine* $(D_1^{x_0 y_0})$ *correspondant.*

Le cas est analogue à celui étudié au paragraphe précédent.

On aura encore

$$\alpha_2 = a_{x_0 y_0}(\alpha_1, \beta_1)\alpha_1 \qquad \text{et} \qquad \beta_2 = b_{x_0 y_0}(\alpha_1, \beta_1)\beta_1,$$

où les fonctions $a_{x_0 y_0}$ et $b_{x_0 y_0}$ dont la forme ne dépend que de l'équation (5), et notamment de son premier membre, sont réelles positives et plus petites ou au plus égales à l'unité.

8. *Remarque sur les domaines* $(D_2^{x_0 y_0})$. — Ici, comme plus haut, on peut remplacer dans $(\mathfrak{D}')$ les fonctions $a_{x_0 y_0}(\alpha_1, \beta_1)$ et $b_{x_0 y_0}(\alpha_1, \beta_1)$ par leur minima. C'est ce que nous allons montrer.

Il est facile de voir qu'à partir de valeurs α_1 et β_1 assez petites on peut prendre $b_{x_0 y_0}(\alpha_2, \beta_2)$ égal à l'unite.

---

(1) Par *chemin d'intégration* il faut entendre ici une multiplicité à une dimension, définie dans l'espace (x, y) par quatre fonctions réelles d'une variable réelle, qui sont les parties réelles et purement imaginaires de x et de y.

D'autre part, si α_2 et β_2 sont deux quantités déterminant un domaine $(D_2^{x_0y_0})$ relatif à un domaine $(D_1^{x_0y_0})$ défini par α_1 et β_1, si nous diminuons la quantité β_1 en laissant α_1 constant, les mêmes α_2 et β_2 peuvent encore servir pour la définition du domaine $D_2^{x_0y_0}$ correspondant si $\beta_2 < \beta_1$.

Le tout revient donc à montrer que $a_{x_0y_0}$ tend vers une limite *différente de zéro* quand α_1 et β_1 tendent vers zéro en étant liés par

$$\alpha_1 = l\beta_1.$$

Supposons qu'on ait intégré les $n-k$ équations du premier ordre qui donne les $n-k$ familles caractéristiques. Soient

$$y = \varphi_i(x, c_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-k),$$

les intégrales générales de ces équations différentielles. Un calcul facile montre que la limite cherchée est exprimée par

$$\frac{l\varphi_i'(o, c_i^0)}{1 + l\varphi_i'(o, c_i^0)},$$

où c_i^0 est une valeur constante. Comme il n'y a dans $(\mathfrak{D}^l)$ aucun point où une tangente caractéristique soit parallèle à $y = o$, si cette tangente n'est pas de la famille caractéristique d'ordre k

$$y = \text{const.},$$

on voit que $\varphi_i'(o, c_i^0) \neq o$.

On peut donc choisir comme plus haut deux quantités positives A et B, qui soient les minima de $a_{x_0y_0}$ et $b_{x_0y_0}$ dans $(\mathfrak{D}^l)$ et sur ce domaine.

Dans ce qui va suivre, nous prendrons pour domaine $(D_2^{x_0y_0})$ correspondant au domaine $(D_1^{x_0y_0})$

$$(D_1^{x_0y_0}) \qquad |x - x_0| < \alpha_1, \qquad |y - y_0| < \beta_1,$$

le domaine

$$(D_2^{x_0y_0}) \qquad |x - x_0| < A\alpha_1, \qquad |y - y_0| < B\beta_1.$$

Les quantités A et B sont des constantes positives et ne dépendent que de l'équation

$$\Delta_n(u) = o$$

et du domaine $(\mathfrak{D}^l)$ considéré.

9. *Limites supérieures des valeurs absolues de $u_0(x, y)$ et de ses dérivées d'ordre inférieur à n dans un domaine limité.* — La fonction $f(x, y)$ est supposée holomorphe dans le domaine limité $(\mathfrak{D})$ faisant partie de (D).

Dans le domaine $(D_1^{x_0 y_0})$ de $(\mathfrak{D}')$, cette fonction est majorée par

$$\frac{\mathfrak{M}}{\left(1-\dfrac{x-x_0}{\alpha_1}\right)\left(1-\dfrac{y-y_0}{\beta_1}\right)},$$

où $\mathfrak{M}$ désigne le maximum de la valeur absolue de $f(x, y)$ dans $(\mathfrak{D})$. Un simple calcul de dérivation sous le signe $\int$ nous montre que $|u_0(x, y)|$ aussi bien que les valeurs absolues des dérivées d'ordre inférieur à n de $u_0(x, y)$ sont inférieures à l'expression

$$(6)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{M}\, P_{\alpha_1 \beta_1}^{x_0 y_0}(|x-x_0|, |y-y_0|) \\ &= \mathfrak{M}\Bigg[\sum_{\nu=0}^{\nu=n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n} |x-x_0|^{\mu}\,|y-y_0|^{\nu} \\ &\qquad + \sum_{\nu=0}^{\nu=n}\sum_{\mu=0}^{\mu=n}\sum_{\nu'=0}^{\nu'=n-1}\sum_{\mu'=0}^{\mu'=n-1} A_{\nu\nu'}^{\mu\mu'}\,\frac{|x-x_0|^{\mu}\,|y-y_0|^{\nu}}{(\alpha_1)^{\mu'}(\beta_1)^{\nu'}} \\ &\qquad \times \frac{1}{\left(1-\dfrac{x-x_0}{\alpha_1}\right)^{\mu'+1}\left(1-\dfrac{y-y_0}{\beta_1}\right)^{\nu'+1}}\Bigg] \end{aligned}$$

dans le domaine $D_2^{x_0 y_0}$ correspondant aux valeurs α_2 et β_2, déduites de α_1 et β_1 comme on sait.

Dans l'expression (6), les sommations sont soumises aux restrictions suivantes :

1° Dans la première somme (la somme double), on a toujours

$$1 \leqq \mu + \nu \leqq n.$$

Même observation pour $\mu' + \nu'$ dans la seconde somme.

2° De plus, on a toujours dans cette seconde somme (la somme quadruple)

$$\mu' + \nu' < \mu + \nu,$$

cette inégalité excluant l'égalité.

On a donc toujours dans cette somme

$$\mu + \nu \geqq 2.$$

Les quantités $A_{\nu\nu'}^{\mu\mu'}$ sont des constantes positives dont la valeur dépend exclusivement de la forme

$$\Delta_n(u)$$

et du domaine $(\mathcal{D})$.

10. *Nouvelle expression de la limite précédente dans un domaine limité.* — Supposons maintenant que $x_0, y_0, \alpha_0, \beta_0$ sont dans un domaine $(\mathcal{D}^l)$ défini comme on sait par

$$|x_0| \leqq m', \qquad |y_0| < n' \qquad (m' < m,\ n' < n),$$
$$0 \leqq \alpha_0 \leqq m' - |x_0|, \qquad 0 \leqq \beta_0 \leqq n' - |p_0|, \qquad \alpha_0 > l\beta_0 \qquad (l > 0).$$

Les quantités (α_0, β_0) définiront des domaines $(D_0^{x_0 y_0})$ et par les relations

$$\alpha_1 = L\alpha_0, \qquad \beta_1 = M\beta_0,$$
$$\alpha_2 = A\alpha_1, \qquad \beta_2 = B\beta_1,$$

où A, B, L et M ont les significations de plus haut, des domaines plus petits $(D_1^{x_0 y_0})$ et $(D_2^{x_0 y_0})$, et ne dépendant que de $(\mathcal{D}^l)$ et de $\Delta_n(u)$.

Soient ξ et η deux nombres positifs tels que $\frac{\xi}{\eta} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$ et que le domaine (d) défini par

$$(d) \qquad |x - x_0| < \xi, \qquad |y - y_0| < \eta$$

représente un domaine intérieur à $(D_2^{x_0 y_0})$.

Dans ce domaine, que nous appellerons (d), la limite du paragraphe précédent devient alors

$$(7) \qquad \mathfrak{M}\, P_{\alpha_1\beta_1}^{x_0 y_0}(\xi, \eta) \equiv \mathfrak{M}\, P_{\alpha_1\beta_1}^{x_0 y_0}\left(\frac{L\alpha_0}{M\beta_0}\eta, \eta\right) \equiv \mathfrak{M}\, R_{\alpha_0\beta_0}(\eta),$$

ou $R_{\alpha_0\beta_0}(\eta)$ désigne une fonction de η seulement, dont la forme dépend de $(\mathcal{D}^l)$ et de α_0, β_0. On aura d'ailleurs

$$R_{\alpha_0\beta_0}(\eta) \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \left(\frac{L\alpha_0}{M\beta_0}\eta\right)^{\mu} \eta^{\nu}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \sum_{\nu'=0}^{\nu'=n-1} \sum_{\mu'=0}^{\mu'=n-1} A_{\nu\nu'}^{\mu\mu'} \frac{\left(\frac{L\alpha_0}{M\beta_0}\eta\right)^{\mu} \eta^{\nu}}{(L\alpha_0)^{\mu'}(M\beta_0)^{\nu'}}$$
$$\times \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\frac{L\alpha_0}{M\beta_0}\eta}{L\alpha_0}\right)^{\mu'+1} \left(1 - \dfrac{\eta}{M\beta_0}\right)^{\nu'+1}}.$$

On remplacera α_0 par $\frac{\alpha_0}{\beta_0}\beta_0$, et l'on posera ensuite

$$\frac{\eta}{\beta_0} = \rho_0,$$

où ρ_0 désigne une valeur positive plus petite que les deux quantités

$$AL \quad \text{et} \quad BM,$$

de sorte que η reste inférieur à β_2, conformément à la définition donnée du domaine (d).

Cette quantité ρ_0 une fois choisie sera une constante dont la valeur ne dépend, comme on voit, que du domaine $(\mathfrak{D}')$ et de l'équation

$$\Delta_n(u) = 0.$$

On aura donc

$$R_{\alpha_0 \beta_0} \equiv S_{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}(\eta, \rho_0).$$

La fonction $S_{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}$ dont la forme dépendra seulement de $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$ [et du domaine $(\mathfrak{D}')$ et l'équation bien entendu] jouit d'ailleurs des propriétés suivantes :

1° C'est un polynome en η.

2° Ce polynome est nul pour $\eta = 0$.

3° C'est la limite supérieure des valeurs absolues de $u_0(x, y)$ et de ses dérivées d'ordre moindre que n, dans un domaine défini par

$$|x - x_0| < \rho_0 \alpha_0, \qquad |y - y_0| < \rho_0 \beta_0,$$

dans lequel cette fonction est holomorphe.

Je poserai donc

$$S_{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}(\eta, \rho_0) \equiv \eta\, Q_{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}(\eta),$$

où $Q_{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}(\eta)$ est un polynome en η et dépend de $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$ de $(\mathfrak{D}')$ et $\Delta_n(u)$, quant à sa forme.

11. En conservant toutes les notations et définitions données dans ce qui précède, mais en les rapportant à une expression $\Delta_n(u)$ attachée à

l'équation générale (I), (Chap. I, p. 6), nous allons établir maintenant le théorème que nous avons en vue. Cette équation générale est

$$\text{(I)}\quad a_n^0(x,y)\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a'_{n-1}(x,y)\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\,\partial y} + \ldots + a_0^n(x,y)\frac{\partial^n u}{\partial y^n} + \Phi(u,x,y) = 0,$$

où $\Phi(u, x, y)$ désigne la partie qui renferme les termes qui ne contiennent pas de dérivées d'ordre n, l'ordre de l'équation.

On peut attacher à l'équation (I) une équation

$$\Delta_n(u) = 0,$$

formée de la manière suivante :

Les fonctions $a_i(x,y)$ et $b_i(x,y)$ entrant dans la définition de $\Delta_n(u)$ sont choisies de telle manière que

$$\frac{b_i(x,y)}{a_i(x,y)}$$

soit identique à la racine y'_i de l'équation caractéristique algébrique en y'. Cela est possible de plusieurs manières, comme on le voit. On prendra

$$a_1(x,y) \equiv a_n^0(x,y),$$
$$a_2(x,y) \equiv a_3(x,y) \equiv \ldots \equiv a_n(x,y) \equiv 1,$$

de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned}\Delta_n(u) = a_n^0(x,y) & \left[\frac{\partial}{\partial x} + b_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right] \\ & \times \left[\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right] \cdots \left[\frac{\partial}{\partial x} + b_n(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right],\end{aligned}$$

où les k derniers facteurs différentiels seront précisément ceux qui correspondent à la famille caractéristique

$$c(x,y) = \text{const.}$$

d'ordre k sur laquelle on prend $n - k$ données.

On pourra alors mettre l'équation (I) sous la forme

$$\text{(I')}\qquad \Delta_n(u) + \Psi(u,x,y) = 0,$$

où $\Psi(u, x, y)$ ne contiendra que des dérivées d'ordre moindre que n.

12. Cela étant, nous allons établir maintenant les lemmes suivants :

Lemme I. — Étant donné le rapport $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$ de deux quantités définissant des domaines $(D_0^{x_0 y_0})$ d'un domaine $(\mathcal{D}^l)$ donné, on peut déterminer dans $(\mathcal{D}^l)$ des domaines $(D_0^{x_0 y_0})$ correspondant au rapport donné et *assez petits* pour qu'ils jouissent de la propriété suivante :

Si dans un domaine $(D_0^{x_0 y_0})$, ainsi choisi, on prend des données holomorphes sur $x = x_0$ et $y = y_0$, l'intégrale correspondant à ces données est holomorphe dans un domaine défini par

$$|x - x_0| < \rho_0 \alpha_0, \qquad |y - y_0| < \rho_0 \beta_0.$$

Écrivons pour cela les équations d'approximations successives selon la méthode de M. Picard :

$$\begin{aligned}
&\Delta_n(u_1) = 0,\\
&\Delta_n(u_2) + \Psi(u_1, \quad x, y) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\Delta_n(u_p) + \Psi(u_{p-1}, x, y) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc la première sera intégrée avec les données du problème sur $x = x_0$ et $y = y_0$; les autres avec des données identiquement nulles sur les mêmes droites.

D'après une définition précédente, l'intégrale $u_1(x, y)$ de la première, qui sera ainsi déterminée, sera holomorphe dans le domaine $(D_1^{x_0 y_0})$ correspondant au domaine $(D_0^{x_0 y_0})$ considéré.

Dans ce domaine $(D_1^{x_0 y_0})$ on pourra donc assigner une limite supérieure $\mathfrak{M}$, qui dépendra uniquement de $(\mathcal{D})$, pour les valeurs absolues de $u_1(x, y)$ et de ses dérivées d'ordre moindre que n.

Les limites analogues pour les intégrales $u_2(x, y)$, $u_3(x, y)$, ..., $u_p(x, y)$, ... seront alors les expressions

$$\mathfrak{M} N \eta \, Q_{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}(\eta), \qquad \mathfrak{M} N' \eta^2 \left[Q_{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}(\eta) \right]^2, \qquad \ldots,$$
$$\mathfrak{M} N^{p-1} \eta^{p-1} \left[Q_{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}(x) \right]^{p-1}, \qquad \ldots,$$

valables dans les domaines (d) intérieurs aux $(D_2^{x_0 y_0})$ correspondant aux $(D_0^{x_0 y_0})$ considérés. La quantité N désigne un nombre positif ne dépendant que de $\Delta_n(u)$.

D'autre part, d'après la forme de la majorante considérée plus haut, les *dérivées d'ordre n* des $u_i(x, y)$ $(i = 2, 3, \ldots)$ sont en valeur absolue inférieures à une expression

$$\mathfrak{M}_p \, \mathrm{H}(x, y),$$

où $\mathfrak{M}_p$ désigne le maximum de la valeur absolue du second membre et $\mathrm{H}(x, y)$ une fonction dont la forme dépend de x_0, y_0, α_0 et β_0, mais qui reste finie dans $(D_2^{x_0 y_0})$ et sur la limite de ce domaine.

Ici l'on a

$$\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M} \mathrm{N}^p \eta^{p-1} \left[\mathrm{Q}_{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}(\eta) \right]^{p-1}.$$

La série

$$\sum_{q=1}^{q=+\infty} \mathfrak{M} \mathrm{N}^q \eta^q \left[\mathrm{Q}_{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}(\eta) \right]^q$$

converge donc en même temps que

$$\sum_{i=1}^{i=+\infty} \mathfrak{M}_i \mathrm{H}(x, y).$$

Dans le domaine dans lequel la première série sera convergente, la série

$$\sum_{q=1}^{q=+\infty} u_q(x, y)$$

sera donc absolument et uniformément convergente et représentera bien, d'après la manière dont elle est formée et la convergence simultanée des séries dérivées jusqu'à l'ordre n (inclusivement), l'intégrale de (I) qui est déterminée avec nos données.

Dans ce domaine de convergence, l'intégrale sera évidemment holomorphe.

Soit η_0 la valeur maxima de η satisfaisant à l'inégalité

$$(8) \qquad \left| \eta \, \mathrm{Q}_{\frac{\alpha_0}{\beta_0}}(\eta) \right| < \frac{1}{\mathrm{N}},$$

et telle que tout $\eta < \eta_0$ satisfasse à la même inégalité. Si l'on a

$$(8') \qquad \eta_0 > \rho_0 \beta_0,$$

les séries de plus haut seront convergentes et l'intégrale holomorphe dans le domaine défini par

$$|x - x_0| < \rho_0 \alpha_0, \qquad |y - y_0| < \rho_0 \beta_0.$$

En effet, l'inégalité (8) sera alors satisfaite pour

$$\eta = \rho_0 \beta_0,$$

si l'on a

$$\eta_0 \geqq \rho_0 \beta_0.$$

Comme η_0 ne dépend exclusivement que de $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$ qui est ici constant et donné à l'avance, on peut prendre β_0 assez petit pour que l'on ait l'inégalité (8′).

Les domaines $(\mathrm{D}_0^{\gamma_0\gamma_0})$ définis par ce β_0 *assez petit* satisfont donc aux conditions de l'énoncé dans tout $(\mathfrak{D}')$.

13. Soit maintenant $\mathrm{U}(x, y)$ l'intégrale trouvée, qui est holomorphe dans un domaine défini par deux cercles (γ) et (γ') situés

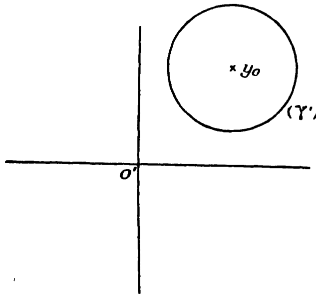

Fig. 1. — Plan des y ($x = 0$).

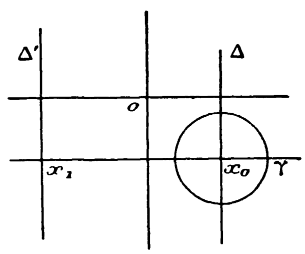

Fig. 2. — Plan des x ($y = 0$).

respectivement dans le plan de la variable x et celui de la variable y, ayant pour centres les affixes y_0 et x_0. Supposons qu'on fasse le prolongement analytique de $\mathrm{U}(x, y)$ le long de l'axe passant par x_0 et parallèle à l'axe réel du plan des x, l'affixe y_0 restant en y_0. Cela revient à prendre un chemin rectiligne dans le plan de la caractéristique portant les $n - k$ données. On pourra arriver à un point singulier, soit x_1, situé dans le plan de cette caractéristique.

Soient Δ et Δ' deux parallèles menées par x_0 et x_1 à l'axe purement imaginaire.

Nous allons établir le lemme suivant :

Lemme II. — *Il existe un nombre positif c, tels que tous les points situés sur l'une des droites imaginaires*

$$y - y_0 = \theta(x - x_1),$$

où $|\theta| < c$, *et ayant l'affixe de leur x situé dans la région comprise entre* Δ *et* Δ', *soient des points ordinaires pour l'intégrale* $U(x, y)$ *de l'équation* (I).

Prenons pour cela un point x_2 situé sur la droite de prolongement entre x_0 et x_1.

Il existe évidemment un nombre c' positif tel que tous les points des droites imaginaires

$$y - y_0 = \theta(x - x_2),$$

où $|\theta| < c'$ et dont l'affixe de x est dans la région entre Δ et Δ', soient tous imaginaires.

En effet, dans tous les points situés sur le chemin de prolongement entre x_0 et x_2, les deux extrémités comprises, l'intégrale $U(x, y)$ est holomorphe.

Il est évident que tout $c'' < c'$ satisfait à la même condition.

D'autre part, nous avons exclu du domaine (D) la courbe discriminante; donc les racines y' de l'équation caractéristique, autres que $y' = 0$, sont dans (D) supérieures en valeur absolue à un nombre p positif.

Prenons c' assez petit pour qu'il soit inférieur à p tout en satisfaisant à la condition de plus haut.

Considérons alors les droites

$$(9) \qquad y - y_0 = \frac{c'(x_2 - x_0)}{x' - x_0}(x - x'),$$

où x'_2 est entre x_1 et x_2 sur le chemin de prolongement. En faisant tendre x' vers x_1, les droites imaginaires (9) joueront le même rôle par rapport à x' que

$$y - y_0 = c'(x - x_2)$$

par rapport à x_2, quand x' occupe un point quelconque du segment $\overline{x_1 x_2}$, les extrémités comprises.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il faudrait qu'il y ait une valeur minima de $(x' - x_0)$ entre $(x_1 - x_0)$ et $(x_2 - x_0)$ pour laquelle l'une des droites

$$y - y_0 = \frac{c^{\omega i}(x_2 - x_0)}{(x' - x_0)} r(x - x'),$$

où ω est un angle compris entre 0 et 2π, au moins devra contenir un point singulier de l'intégrale, et ce point ne serait pas sur $y = y_0$ ou sur $x = x_0$.

Or, cela voudrait dire que cette droite se confond en ce point avec une tangente caractéristique [1], ce qui est impossible, car

$$\frac{(x_2 - x_0)c'}{(x' - x_0)} < c' < p;$$

donc la droite

$$y = \frac{(x_2 - x_0)c'}{(x_1 - x_0)}(x - x_1)$$

satisfait encore aux conditions voulues. On peut donc prendre

$$c = \frac{(x_2 - x_0)c'}{(x_1 - x_0)}$$

et le lemme est démontré.

13. Ces deux lemmes établis, on va maintenant démontrer la proposition suivante :

Théorème général II. — *Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles à deux variables indépendantes d'ordre quelconque n,* L'INTÉGRALE PARTICULIÈRE DE CETTE ÉQUATION DÉTERMINÉE AVEC LES DONNÉES SUIVANTES :

1° *Les valeurs de l'intégrale et de ses $k - n - 1$ premières dérivées extérieures à une caractéristique, passant par (x_0, y_0),*

$$c(x, y) = 0$$

d'ordre k, sur cette caractéristique même.

---

(1) Delassus, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1895).

2° *Les valeurs de l'intégrale et de ses $k-1$ premières dérivées extérieures à une courbe quelconque, passant par* (x_0, y_0),

$$P(x, y) = 0$$

sur cette courbe même [*toutes ces données étant holomorphes autour de* (x_0, y_0) *sur la courbe respective*], EST UNE FONCTION HOLOMORPHE DANS UNE RÉGION DE L'ESPACE (x, y) CONTENANT ENTIÈREMENT LA RÉGION (E) DE

$$c(x, y) = 0$$

QUI ENTOURE LE POINT (x_0, y_0) ET DANS LAQUELLE LES DONNÉES SUR CETTE CARACTÉRISTIQUE SONT HOLOMORPHES, *pourvu que le point* (x_0, y_0) *et la région* (E) *tout entière soient contenus dans un domaine* (D) *où l'équation n'a pas de singularités fixes, et que* $P(x, y)$ *soit une fonction holomorphe satisfaisant dans tout ce domaine* (D) *à la condition*

$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial x} \neq 0.$$

On peut toujours supposer que l'on ait effectué le changement de variables qui ramène la famille caractéristique d'ordre k à

$$y = \text{const.}$$

et la courbe quelconque à

$$x = 0,$$

ainsi que le point (x_0, y_0) à l'origine.

D'après ce qui a été dit, il suffit, en effet, de démontrer le théorème pour un domaine (D) contenant (x_0, y_0) et étant assez petit pour que le changement de variables en question soit biunivoque.

L'intégrale sera holomorphe autour de l'origine dans un petit domaine, dont la forme n'importe pas ici.

Soit $U(x, y)$ l'intégrale holomorphe à l'origine, par conséquent définie par un élément analytique en ce point.

Il est évident que, (E) désignant la région de la caractéristique

$$y = 0,$$

dans laquelle les données sur cette caractéristique sont toutes holomorphes et qui contient l'origine à son intérieur, le théorème sera démontré si l'on prouve que le prolongement analytique de cet élément analytique effectué le long d'un chemin quelconque entièrement situé dans (E) ne conduit jamais à un point singulier de $U(x, y)$. Supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi et que le chemin (L) de E conduise à un point singulier x_1 du plan $y = 0$.

On pourra toujours remplacer ce chemin par un nombre fini de

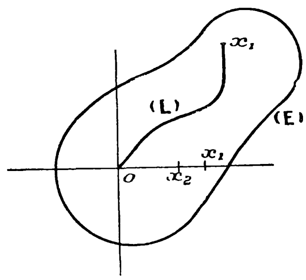

Fig. 3. — Plan des x ($y = 0$).

segments de droites, et il suffit de montrer qu'en suivant le dernier de ces segments on ne peut rencontrer de point singulier. Ce segment lui-même peut être remplacé par l'axe réel du plan des x par un changement de variable linéaire effectué sur x. Le tout revient donc à montrer qu'en suivant l'axe réel, on ne peut rencontrer de point singulier x_1 situé dans (E).

D'après le deuxième lemme, on peut déterminer une quantité positive c telle que tous les points situés sur les droites

$$y = \theta(x - x_1)$$

et dont l'affixe des x est compris dans la région du plan $y = 0$ située entre l'axe purement imaginaire et la parallèle menée par x_1 à cet axe soient des points ordinaires pour $U(x, y)$ si $|\theta| < c$.

Prenons un point x_2 entre o et x_1 sur l'axe réel. Des données analogues à celles que nous avons prises sur $x = 0$ et $y = 0$ autour de l'origine déterminent $U(x, y)$ sur $x = x_2$ et $y = 0$, autour du point $(x_2, 0)$.

Les données sur $y = 0$ seront holomorphes, par hypothèse, autour de $(x_2, 0)$ et dans tout (E). Les données sur $x = x_2$ le seront certainement dans une région, définie par

$$|\imath| < c(x_1 - x_2),$$

du plan $x = x_2$.

Rappelons la définition de $(\mathfrak{D}')$, domaine de l'espace à six dimensions formé par les variables complexes x_0 et y_0 et les variables réelles α_0 et β^0. Ce domaine est défini par

$$|x_0| \leqq m, \qquad |y_0| \leqq n,$$
$$m - |x_0| \geqq \alpha_0 \geqq 0, \qquad n - |y_0| \geqq \beta_0 \geqq 0, \qquad \alpha_0 > l\beta_0;$$

où m et n sont deux quantités positives choisies de telle manière que le domaine défini par les deux premières inégalités contienne entièrement le segment de l'axe réel du plan des x qui va de o à x_1.

Définissons maintenant le domaine $(D_0^{(x_2,0)})$, dont nous allons partir, par les inégalités

$$(D_0^{(x_2,0)}) \qquad \begin{aligned} |x - x_2| &< qc\,|x_1 - x_2|, \\ |y| &< c\,|x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

où q désigne un nombre positif plus grand que l et x_2 est pris assez près de x_1 sur le segment entre o et x_1 pour que ce domaine $(D_0^{x_2,0})$ *fasse partie de* (ω'). (On a ici $\alpha_0 = qc|x_1 - x_2|$, $\beta_0 = c|x_1 - x_2|$.)

Cela est manifestement toujours possible. De plus, en prenant $|x_1 - x_2|$ plus petit encore et q plus grand encore, le domaine $(D_0^{x_2,0})$ ainsi déformé ferait encore partie de (ω').

On peut donc prendre, d'une part, $|x_1 - x_2|$ *assez petit* pour que, conformément au premier lemme, l'intégrale $U(x, y)$ soit holomorphe dans le domaine

$$\begin{aligned} |x - x_2| &< \rho_0 qc\,|x_1 - x_2|, \\ |y| &< \rho_0\, c\,|x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

où ρ_0 ne dépend exclusivement que de (ω') et de la forme $\Delta_n(u)$. D'autre part, on peut déterminer q de manière que l'on ait

$$\rho_0 qc > 1.$$

Le domaine de plus haut, qui est un domaine d'holomorphisme de l'intégrale $U(x, y)$, contiendra alors à son intérieur le point $(x_1, 0)$. Ce point ne peut donc être singulier et le théorème est ainsi démontré.

14. Ce théorème, établi maintenant pour une équation linéaire du type quelconque, constitue bien l'extension aux courbes caractéristiques du théorème général I, qui concernait les courbes non caractéristiques.

Il montre bien, comme nous l'avons annoncé (Chap. I, p. 10), que l'expression

$$y^p A(x, y) + B(x, y),$$

où $B(x, y)$ est holomorphe à l'origine et p un nombre positif quelconque, ne peut être, dans *aucun cas*, l'intégrale d'une équation linéaire d'ordre n autour de l'origine (où l'équation est supposée ne pas avoir de singularités), si $A(x, y)$ n'est pas holomorphe en ce point, et si

$$n \leqq p.$$

Le théorème général II montre même que, dans le cas où $y=$ const. serait une famille caractéristique d'ordre k, on peut avoir

$$n > p$$

pourvu que

$$p \geqq n - k$$

et le fait énoncé subsiste.

CHAPITRE III.

SUR LES ÉQUATIONS DONT LES CARACTÉRISTIQUES SE CONFONDENT EN UNE SEULE FAMILLE OU EN DEUX FAMILLES DISTINCTES SEULEMENT. — INTÉGRALES UNIFORMES ET INTÉGRALES QUASI UNIFORMES.

1. Nous avons jusqu'ici déterminé des intégrales au moyen de données qui étaient holomorphes sur une courbe caractéristique ou non caractéristique dans la région de cette courbe qui nous intéressait.

Nous allons considérer dans ce Chapitre des données analogues à celles prises plus haut, en ce qui concerne leur nature, mais non plus holomorphes.

Les singularités que nous considérons sont des points en nombre quelconque mais fini, dans une région limitée des courbes qui porteront des données.

On supposera les données uniformes ou d'une multiformité simple que nous allons définir plus loin. La considération d'un nombre *fini* de points singuliers n'est pas essentielle; on pourrait facilement étendre les résultats que nous obtiendrons au cas d'une infinité de points singuliers sans ligne singulière.

Reprenons donc l'équation générale (I) considérée plus haut.

Considérons de même le domaine (D) ne renfermant pas de singularité de l'équation et une courbe

$$P(x, y) = 0$$

n'ayant que des points ordinaires dans (D) et n'étant en aucun point tangente à une caractéristique.

Déterminons, d'après le théorème de Cauchy, une intégrale de (I), holomorphe autour d'un point (x_1, y_1) de

$$P(x, y) = 0$$

en nous donnant les valeurs de cette intégrale et de ces $n - 1$ premières dérivées extérieures à la courbe $P(x, y) = 0$, sur cette courbe.

Soit (Γ) une région de la courbe qui porte les données, que nous supposerons contenue dans (D) et contenant (x_1, y_1). Supposons de plus que les données soient toutes holomorphes en chaque point de (T), excepté en un point (x_0, y_0) [qui ne se confond pas avec (x_1, y_1) bien entendu], et qu'elles soient *uniformes* dans (Γ) tout entier.

L'intégrale holomorphe en (x_1, y_1) donnée par le théorème de Cauchy peut être prolongée, d'après le théorème de M. Goursat, le long de tout chemin contenu dans (Γ) qui ne traverse pas le point (x_0, y_0).

On reviendra donc en (x_1, y_1), après avoir décrit un cycle autour de (x_0, y_0), avec les mêmes déterminations des données, donc de l'intégrale et sans rencontrer de singularités.

Si maintenant par le point (x_0, y_0) il ne passe qu'une seule caractéristique singulière, l'intégrale est uniforme dans un domaine simplement connexe de l'espace (x, y), contenant à son intérieur le point (x_0, y_0).

En effet, on peut alors déterminer deux nombres positifs, assez petits :

$$\varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2$$

tels que dans le domaine, défini par

$$(1) \qquad |P(x, y)| < \varepsilon_1, \qquad |c(x, y)| < \varepsilon_2$$

qui peut être supposé simplement connexe (s'il est assez petit) et d'un seul tenant, et où

$$c(x, y) = 0$$

désigne la caractéristique singulière passant par (x_0, y_0), l'intégrale n'ait d'autre singularité que cette caractéristique.

Tout chemin fermé ne traversant pas la singularité et entièrement situé dans le domaine défini par (1) conduira alors à la même détermination de l'intégrale en chacun de ces points, s'il est tel que par une déformation continue et sans traverser la singularité on peut le réduire à un point.

S'il n'en est pas ainsi, on pourra le remplacer par un chemin qui jouira de cette propriété et un autre, qui sera entièrement situé sur

$$P(x, y) = 0$$

dans la région de cette courbe contenue dans le domaine défini par (1), donc dans (Γ), et qui conduit bien, d'après ce qu'on a vu, toujours à la même détermination de l'intégrale.

On a donc cette conséquence presque immédiate des deux théorèmes généraux de Cauchy et de M. Goursat :

Toute intégrale déterminée avec les données de Cauchy, uniformes dans une région (Γ) *d'une courbe non caractéristique et ayant dans cette région un nombre fini de points singuliers, est uniforme dans un domaine de l'espace* (x, y) *qui contient entièrement* (Γ) *pourvu que par chaque point singulier des données il ne passe qu'une seule caractéristique singulière.*

Ce théorème s'étendrait d'ailleurs facilement aux équations non linéaires.

2. Si donc par un moyen quelconque on peut s'assurer que l'on peut prendre des données uniformes telles que par leurs points singuliers il ne passe qu'une seule multiplicité singulière [1] de l'intégrale, on saura que l'équation admet une intégrale uniforme autour d'une singularité mobile. *Tel est le cas, pour toute équation linéaire dont toutes les*

[1] Si la multiplicité singulière y avait un point double ou multiple, il faudrait considérer qu'il y passe *plusieurs* multiplicités singulières.

familles caractéristiques se confondent en une seule, et, en particulier, le cas des équations paraboliques du second ordre.

3. Nous allons maintenant prendre des données à singularités isolées sur une caractéristique, et examiner ce que deviennent les intégrales qu'elles déterminent.

Donnons-nous pour cela dans un domaine (D) ne contenant pas de singularités de l'équation, un point (x_0, y_0) par où passent une caractéristique

$$c(x, y) = 0$$

d'ordre k, et une courbe quelconque, soumises aux restrictions que l'on sait

$$P(x, y) = 0.$$

Soit (Γ) une région de la caractéristique contenant (x_0, y_0) et (Γ') une région de la courbe quelconque contenant le même point.

Soit (x_1, y_1) un point de (Γ) différent de (x_0, y_0).

Je supposerai que les k données (représentant les valeurs de l'intégrale et de ses $k-1$ premières dérivées extérieures) sur la courbe quelconque sont holomorphes dans (Γ') et que les $n-k$ données (représentant les valeurs analogues) sur la caractéristique sont holomorphes dans (Γ) et *quasi uniformes en* (x_1, y_1).

Voici ce que nous entendrons par là :

Une fonction d'une variable indépendante x sera dite *quasi uniforme en un point* $x = a$, si autour de ce point elle est représentable par une expression de la forme

$$A(x)\,\mathrm{Log}(x-a) + B(x),$$

où $A(x)$ indique une fonction holomorphe en $x = 0$ et $B(x)$ une fonction ayant en ce point une singularité isolée ou y étant holomorphe, mais étant dans tous les cas *uniforme* autour de ce point.

Supposons, pour plus de simplicité, que l'on ait ramené les deux courbes à

$$y = 0, \qquad x = 0,$$

la première étant la caractéristique d'ordre k.

Le point (x_0, y_0) sera alors transformé en origine des axes coordonnées, le point (x_1, y_1) en un point $(x_1, 0)$. Nous garderons les mêmes notations pour les domaines (Γ) et (Γ').

L'intégrale sera holomorphe à l'origine et, d'après le théorème général II, dans un domaine de l'espace à quatre dimensions contenant une portion quelconque de (Γ) qui ne contient pas $(x_1, 0)$. Si donc on décrit un chemin fermé situé entièrement dans (Γ), et ne passant pas par ce point singulier des données sur $y = 0$, on reviendra au point du départ dans (Γ) avec une détermination holomorphe que nous désignerons par

$$U_1(x, y).$$

Soit $U_0(x, y)$ la détermination avec laquelle on est parti du même point. Soient de même $U_2(x, y)$, $U_3(x, y)$, ..., les déterminations suivantes obtenues en décrivant le même chemin dans la même direction, et qui toutes seront holomorphes.

On aura

$$U_{i+1}(x, y) - U_i(x, y) = V_i(x, y)$$

(où $i = 1, 2, 3, \ldots, \infty$), les fonctions

$$V_i(x, y)$$

étant toutes holomorphes dans un domaine contenant entièrement (Γ) à son intérieur, toujours d'après le théorème général II et la nature quasi uniforme des données sur la caractéristique.

D'autre part, la détermination $U_{i+2}(x, y)$ est, par définition, la détermination de $U_{i+1}(x, y)$ après un tour, donc de

$$U_i(x, y) + V_i(x, y)$$

après un tour. On a donc

$$U_{i+2}(x, y) = U_i(x, y) + 2V_i(x, y),$$

la détermination de $V_i(x, y)$ ne changeant pas après un tour. On a donc identiquement

$$V_1(x, y) \equiv V_2(x, y) \equiv \ldots \equiv V_i(x, y) \equiv \ldots.$$

Soit $V(x, y)$ cette valeur commune, on aura

$$U(x, y) = \frac{V(x, y)}{2\pi i} \operatorname{Log}[c(x, y) - c(x_1, 0)] + W(x, y),$$

la fonction $W(x, y)$ étant *uniforme* dans un domaine annulaire autour du point (x_1, o), et la caractéristique

$$c(x, y) = o$$

étant une singularité de l'intégrale, passant par ce point.

Si maintenant l'intégrale n'a qu'une seule caractéristique singulière passant par ce point, c'est-à-dire

$$c(x, y) = o,$$

il est évident que la fonction

$$W(x, y)$$

sera uniforme non pas seulement dans un domaine annulaire, mais dans un domaine simplement connexe de l'espace (x, y) contenant à son intérieur le point (x_1, o), et l'on pourra dire que *l'intégrale est alors quasi uniforme autour du point singulier des données*, en entendant par fonction de deux variables quasi uniforme autour d'un point (x_0, y_0), une fonction qui, aux environs de ce point, est représentée par une somme d'un nombre fini d'expressions telles que

$$A(x, y) \operatorname{Log}[C(x, y) - C(x_0, y_0)] + B(x, y),$$

où $A(x, y)$ est holomorphe en (x_0, y_0), $C(x, y)$ aussi et $B(x, y)$ est une fonction uniforme autour de ce point n'ayant d'autre singularité que

$$C(x, y) - C(x_0, y_0) = o$$

qui passe par ce point.

4. Comme plus haut, au n° 2 de ce Chapitre, on pourra remarquer qu'il existe un cas où la proposition que l'on vient d'établir permet de donner la représentation de certaines intégrales autour d'une singularité mobile.

Il faut en effet pouvoir reconnaître par un moyen quelconque que la singularité qui passe par le point singulier des données sur la caractéristique est unique. C'est le cas, lorsque l'on considère une équation à deux familles de caractéristiques (ou une équation où les familles caractéristiques se confondent en deux familles seulement).

On peut affirmer qu'une pareille équation *admet toujours une infinité d'intégrales quasi uniformes autour d'une singularité mobile*, et c'est en particulier le cas des équations à *une seule* famille caractéristique de n'importe quel ordre, que l'on a considérées au n° 2 de ce Chapitre.

Le raisonnement ci-dessus ne s'applique évidemment pas tel quel à ces équations, car on ne peut prendre des données arbitraires sur une caractéristique d'ordre n.

Si, cependant, nous remplacions les données uniformes considérées au n° 1 par des données quasi uniformes, la dernière partie du raisonnement du n° 3 s'applique et montre bien que ces équations, aussi, admettent des intégrales quasi uniformes, en dehors de leurs intégrales uniformes autour d'une singularité mobile.

5. Remarquons encore que la forme

$$y^p \mathrm{A}(x, y) + \mathrm{B}(x, y),$$

où p désigne un nombre positif, $\mathrm{B}(x, y)$ une fonction uniforme autour de l'origine, n'ayant qu'une seule multiplicité singulière passant par ce point et cette multiplicité étant isolée, et $\mathrm{A}(x, y)$ une fonction multiforme autour de l'origine, autour d'une seule singularité passant par ce point, la même que celle de $\mathrm{B}(x, y)$, ne peut être l'expression d'une intégrale d'une équation linéaire d'ordre n si

$$p \geqq n$$

et $y = 0$ n'est pas une caractéristique.

C'est une conséquence de la proposition établie au n° 1.

Si $y = 0$ est une caractéristique d'ordre k et que $\mathrm{A}(x, y)$ n'est pas quasi uniforme autour de la singularité passant par l'origine, la proposition établie au n° 3 montre que ce fait subsiste même si l'on a

$$n - k \leqq p \leqq n.$$

Si p est un nombre fractionnaire, on voit que l'on pourrait supposer $\mathrm{A}(x, y)$ holomorphe à l'origine et la forme ne serait pas acceptable pour l'intégrale d'une équation d'ordre $n \leqq p$, autour de l'origine, ce point étant, dans ce qui vient d'être dit, supposé faire partie d'un domaine où l'équation n'a pas de singularités.

CHAPITRE IV.

ÉQUATION LINÉAIRE GÉNÉRALE. — LA CLASSE D'INTÉGRALES QUASI UNIFORMES.

1. On a déterminé, dans le Chapitre précédent, *la forme analytique* d'une singularité d'une intégrale correspondant à des données dont on connaissait la nature des points singuliers. La question n'a cependant été résolue qu'en supposant que l'on connaissait *a priori* la *forme géométrique* de cette singularité.

Dans certains cas particuliers, on l'a vu, la solution de cette question supplémentaire se présente immédiatement. Il n'en est pas ainsi dans le cas général.

Pour compléter le résultat obtenu dans le Chapitre précédent, nous allons établir la proposition suivante :

THEORÈME GÉNERAL III. — *Étant donnés une équation linéaire d'ordre n, un point d'une région où l'équation n'a pas de singularités, une caractéristique d'ordre* K, *et une courbe quelconque n'étant pas tangente à la caractéristique, les deux courbes passant par le point donné :*

On pourra, en prenant une région quelconque (γ) *sur la caractéristique et contenant le point, déterminer sur l'autre courbe une région* (E) *assez petite et contenant le même point, de façon que toute intégrale déterminée autour de ce point avec des données holomorphes dans* (γ) *et quasi uniformes dans* (E) *soit une fonction quasi uniforme de deux variables dans un domaine* (δ) *de l'espace* (x, y), *simplement connexe et contenant entièrement* (E).

On a défini dans le Chapitre précédent ce que l'on entendait par fonction quasi uniforme autour d'un point. Nous appellerons *fonction quasi uniforme dans une région limitée* une fonction qui, dans cette région, peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=q} \mathrm{A}_i(x) \operatorname{Log}(x - a_i) + \mathrm{B}_i(x),$$

où les $\mathrm{A}_i(x)$ sont holomorphes *dans toute la région*, les $\mathrm{B}_i(x)$ y étant uniformes et n'y ayant que les points singuliers $x = a_i$.

On définira d'une manière toute analogue (les formes des multiplicités singulières pouvant être de différentes familles) les fonctions de deux variables quasi uniformes dans une région limitée.

2. La démonstration de ce théorème repose sur trois lemmes qui seront utiles plus tard pour la démonstration d'un autre théorème général. Ces lemmes établis, le théorème de plus haut s'en déduira facilement.

Lemme I. — Étant données les deux courbes

$$C(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad P(x, y) = 0$$

passant par un point (x_0, y_0) de (D) où l'équation proposée n'a pas de singularités [la courbe $c(x, y) = 0$ est une caractéristique d'ordre k et l'autre satisfait, comme plus haut, à la condition

$$\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$$

dans tout (D)], prenons toujours dans (D) un domaine (γ) sur la caractéristique et qui est défini par

$$|P(x, y)| < h,$$

h étant une quantité positive; *il est alors possible de déterminer une quantité positive* ε, *assez petite, pour que, si les données sur la caractéristique sont holomorphes dans* (γ) *et les données sur l'autre courbe holomorphes dans la région*

$$|c(x, y)| < \varepsilon$$

de cette courbe, région que nous appellerons (γ'), *il existe un domaine* (d) *simplement connexe, de l'espace* (x, y), *contenant entièrement* (γ) *et* (γ'), *et tel que dans ce domaine l'intégrale soit holomorphe.*

On peut naturellement supposer, comme on l'a fait à plusieurs reprises, que les deux courbes sont

$$y = 0 \qquad \text{et} \qquad x = 0.$$

Les domaines (γ) et (γ') sont alors des cercles tracés sur ces deux plans et ayant l'origine pour centre.

Soit x_1 un point intérieur à (γ). Son module dans le plan des x sera

$$\lambda h,$$

où λ est une quantité positive plus petite que l'unité. Considérons alors les courbes définies par

$$(1) \qquad y = \frac{\theta}{h}(x - \lambda h)(x + \lambda h).$$

Soit p, comme plus haut, un nombre positif inférieur à la limite inférieure des valeurs absolues des racines y' de l'équation caractéristique, autres que $y' = 0$, dans le domaine (D) de l'espace (x, y).

Nous poserons

$$\theta_0^\lambda = \frac{p}{2\lambda}.$$

On est alors assuré que toutes les courbes (1), où

$$(2) \qquad |\theta| < \theta_0^\lambda,$$

ne contiennent que des points ordinaires de l'intégrale, dans la région où l'x de ces points est dans (γ) [1], si l'on ne rencontre pas de singularités des données sur $x = 0$. On voit d'autre part que si l'on remplace θ_0^λ par $\frac{p}{2}$, soit θ_0^1, l'inégalité

$$(3) \qquad |\theta| < \theta_0^1$$

peut remplacer l'inégalité (2) si λ est plus petit que l'unité dans (2).

Il en résulte que les courbes

$$(1') \qquad y = \frac{1}{h}\theta(x - h)(x + h),$$

où l'on a

$$(2') \qquad |\theta| < \frac{p}{2},$$

définissent avec l'inégalité

$$(\gamma) \qquad |x| < h$$

---

[1] *Voir* Chapitre II, p. 18 et 19, le raisonnement qui conduit à cette conclusion.

un domaine qui est simplement connexe, qui contient entièrement à son intérieur le domaine (γ), et dont tous les points intérieurs sont ordinaires pour l'intégrale déterminée avec des données holomorphes dans

$$|x| < h, \qquad |y| < \frac{ph}{2}.$$

On peut donc prendre

$$\varepsilon = \frac{ph}{2}.$$

Le domaine de $x = 0$, défini par

$$|y| < \frac{ph}{2},$$

est entièrement compris dans celui de l'espace (x, y) défini par (1'), (2') et (γ) qui est le domaine (d) cherché.

Le lemme se trouve donc établi.

3. Le domaine (d) défini plus haut par le lemme I dépend, comme on le voit, de h et en outre du point (x_0, y_0) et du domaine (D) choisis dans (x, y), mais en aucune façon des données, pourvu qu'elles soient holomorphes.

Nous allons maintenant laisser de côté, pour un instant, ce domaine, et établir un second lemme, concernant les singularités mobiles d'une intégrale dans (D).

Lemme II. — Si par un point (x_0, y_0), il passe une caractéristique singulière, soit

$$c(x, y) = 0,$$

et une autre courbe qui n'est pas tangente en ce point à la caractéristique, soit

$$P(x, y) = 0,$$

s'il existe une quantité positive ε telle que, dans tout le domaine

$$|y - y_0| < \varepsilon$$

de cette courbe, l'intégrale soit holomorphe [excepté au point (x_0, y_0) bien entendu], *on peut affirmer qu'il existe une quantité positive* η, *telle* *que dans le domaine*

$$|y - y_0| < \eta$$

tous les points de la caractéristique soient des points singuliers.

On peut naturellement supposer que l'on a réduit la courbe à la forme

$$x = 0,$$

la caractéristique à

$$x - y = 0,$$

et l'on voit facilement que la définition des domaines sur ces deux courbes par la forme $y - y_0$ n'a rien d'*essentiel*, de sorte que l'on peut supposer qu'après la transformation, ces domaines sont encore définis par les mêmes expressions.

Le schéma ci-contre représente les courbes ainsi transformées, qui

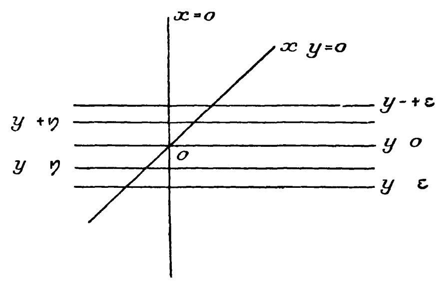

Fig. 4.

en réalité sont des multiplicités à deux dimensions de l'espace (x, y) à quatre dimensions.

Considérons les droites

$$(4) \qquad x - x_0 = \theta(y - y_0),$$

et soit θ_0 une quantité positive telle que toutes les droites (4), où $|\theta| < \theta_0$, satisfassent à la condition suivante :

Il existe pour chacune de ces droites une quantité positive ε_θ dépendant de θ et telle que tous les points de cette droite étant en même temps dans le domaine

$$|y| < \varepsilon_\theta$$

soient des points ordinaires pour l'intégrale.

Le théorème, plusieurs fois cité déjà, de M. Delassus, montre que l'on a successivement pour θ_0 le module d'une tangente caractéristique à l'origine qui, dans tous les cas, n'est pas $x = 0$. Nous supposerons que l'intégrale n'a pas de tangente caractéristique singulière pour laquelle la valeur absolue de $\frac{1}{y'}$ soit moindre que celle du $\frac{1}{y'}$ de $x - y = 0$. Cette tangente caractéristique sera donc

$$x - y = 0.$$

D'autre part, cette droite étant ici une caractéristique, il est évident qu'il existera une quantité ε_0 unique, soit η, telle que toutes les droites (4), où $|\theta| < \theta_0$, n'aient, dans

$$(5) \qquad |y| < \eta,$$

aucun point singulier de l'intégrale.

Ceci étant, il est facile de montrer que tous les points de

$$x - y = 0,$$

contenus dans le domaine (5) de l'espace (x, y), sont des points sin-

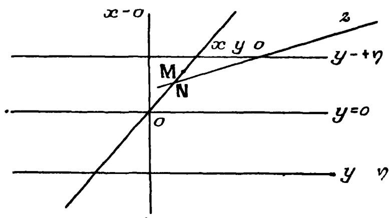

Fig. 5.

guliers. En effet, soient M un point ordinaire sur cette caractéristique, et N le premier point singulier que l'on rencontrerait en allant de M à O, *par un chemin situé sur la caractéristique singulière*.

Il passerait alors par N une droite Nz, différente de NM, telle que dans le domaine au voisinage de N, formé par le plus grand angle ONz et limité par ON et Nz [1], l'intégrale soit holomorphe. Il est alors évident que l'on pourrait prendre un point N′ assez proche de N, situé dans ce

---

[1] Ce domaine est formé par les parties avoisinantes de N, des deux domaines engendrés par les parties supérieures des droites Nz et ON (*fig.* 5) à la façon de (4) (p. 48).

domaine et tel que les données holomorphes sur les deux droites passant par N′ et parallèles à ON et Nz, déterminent pour l'intégrale un domaine d'holomorphisme contenant le point N. Ce point serait donc ordinaire.

Il ne pourrait donc y avoir sur la caractéristique comme point singulier que l'origine; alors la caractéristique ne serait pas singulière, ce qui est contre l'hypothèse.

Le point M est donc singulier et le lemme est démontré.

4. Nous allons maintenant revenir au domaine (d) défini au n° 2 de ce Chapitre et démontrer le lemme suivant :

Lemme III. — *Si les données dans* (γ) (les données sur la caractéristique) *sont holomorphes, et les données dans* (γ') *quelconques à points singuliers isolés, l'intégrale sera telle que par chaque point singulier de ces données il ne passera qu'une seule caractéristique singulière.*

Cette caractéristique sera de la famille

$$c(x, y) = \text{const.}$$

dont fait partie la caractéristique sur laquelle se trouve le domaine (γ).

Considérons un domaine tel que (d), qui a été défini par les trois conditions $(1')$, $(2')$ et (γ), plus petit, étant assujetti à ne pas contenir de points singuliers des données sur la courbe quelconque, et supposons qu'on l'ait pris maximum. Le point singulier le plus rapproché de (x_0, y_0) sur (γ') sera sur la frontière de ce domaine, que nous appellerons (d'), et dans lequel naturellement l'intégrale sera holomorphe. Soient (x_i, y_i) les points singuliers de (γ') et considérons le domaine (T) défini par les inégalités

$$|c(x, y) - c(x_i, y_i)| > r$$

et le domaine (d).

En faisant croître le domaine (d') jusqu'à ce qu'il atteigne le domaine (d), on voit facilement qu'on ne rencontrera dans (T) aucun point singulier de l'intégrale sur (γ'). En effet, soit (d'') le domaine (d') limite supérieure de ceux pour lesquels les points de (γ') [1] sont tous

[1] Il s'agit des points de (γ') qui sont dans (T).

ordinaires. Il devra y avoir sur la limite de (d'') dans (γ') un point singulier de l'intégrale. Or les données étant holomorphes en ce point et les données sur toutes les courbes engendrant ce domaine étant holomorphes, une remarque faite plus haut (Chap. II) montre que le point en question de (γ') ne peut être singulier.

D'autre part r peut être pris aussi petit qu'on voudra de sorte qu'on peut dire que dans (γ'), les seuls points singuliers de l'intégrale sont ceux des données.

A chaque point singulier (x_i, y_i) de (γ') correspondra un domaine (d'_i), tel que (x_i, y_i) soit sur la frontière de ce domaine et que tous les points de ce domaine qui se trouveraient en même temps dans la région de l'espace définie par

$$|c(x, y) - c(x_i, y_i)| < s, \tag{6}$$

s étant une quantité positive infiniment petite, soient des points ordinaires de l'intégrale.

Ceci étant, supposons que par (x_i, y_i) il passe une singularité

$$c'(x, y) - c'(x_i, y_i) = 0.$$

D'après le lemme II, cette caractéristique doit ne contenir que des points singuliers dans un domaine

$$|c'(x, y) - c'(x_i, y_i)| < \eta.$$

Or cela contredit la propriété exprimée par l'inégalité (6). Il faut donc qu'on ait identiquement

$$c'(x, y) \equiv c(x, y)$$

et le lemme III est établi.

5. Ceci étant, on montrera, par des considérations toutes analogues à celles faites pour l'établissement du lemme I, qu'on peut définir au moyen de la famille de courbes et de (γ') un domaine tout analogue à (d), contenant entièrement (γ') et tel que dans ce domaine qu'on appelera (δ), l'intégrale n'ait que les singularités :

$$c(x, y) - c(x_i, y_i) = 0.$$

Ce domaine (δ), comme (d), ne dépend pas des données.

Un raisonnement, identique à celui du Chapitre III, n° 3, montre que l'intégrale déterminée, avec des données quasi uniformes dans (γ'), est représentable dans (δ) par

$$\sum_{i=1}^{i=q} A_i(x, y) \operatorname{Log}[c(x, y) - c(x_i, y_i)] + B_i(x, y),$$

où $A_i(x, y)$ est holomorphe et $B_i(x, y)$ uniforme n'ayant que les singularités

$$c(x, y) - c(x_i, y_i) = 0.$$

On voit donc, par là, qu'il existe des intégrales admettant comme singularité mobile isolée une caractéristique quelconque passant par ce point et étant quasi uniformes. C'est le théorème général III énoncé au n° 1.

6. Les intégrales quasi uniformes autour d'une singularité mobile, qui constituent comme on voit une classe très étendue, existent donc pour chaque équation du type linéaire.

En général, une équation linéaire n'admet pas d'intégrale uniforme autour d'une singularité mobile. On a vu dans le Chapitre précédent que de pareilles intégrales existaient dans le cas des équations dont toutes les caractéristiques se confondent en une seule famille.

Il y a d'autres types d'équations linéaires qui jouissent de cette propriété.

Quand il existe des intégrales uniformes autour d'une caractéristique singulière, on a naturellement immédiatement une représentation analytique autour d'un point par où passe une seule de ces singularités isolées. Mais quelle est l'expression d'une intégrale uniforme autour d'un point où viennent se couper plusieurs caractéristiques singulières?

En réponse à cette question nous allons établir le théorème suivant :

Théorème général IV. — *Si par un point de l'espace (x, y) où il n'y a pas de singularités de l'équation, il passe q multiplicités singulières différentes $(q \leqq n)$ d'une intégrale uniforme dans un domaine autour de ce point, et holomorphe dans ce domaine, en tout point qui n'est pas sur l'une de q multiplicités singulières, cette intégrale peut être représentée aux* *environs de ce point par*

$$\sum_{i=1}^{i=q} f_i(x, y),$$

où les $f_i(x, y)$ sont des fonctions ayant une seule caractéristique singulière chacune.

Soit (x_0, y_0) le point et

$$c_1(x, y) = 0, \qquad c_2(x, y) = 0, \qquad \ldots, \qquad c_q(x, y) = 0$$

les q caractéristiques singulières qui y passent, dont quelques unes, ou toutes, peuvent être multiples.

Pour plus de simplicité, nous supposerons que les multiplicités singulières sont

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad y = 0,$$

le point (x_0, y_0) se confondant avec l'origine, et qu'il n'y a que ces deux multiplicités singulières.

Le cas de q multiplicités singulières passant par (x_0, y_0) pourra se traiter d'une façon tout à fait analogue.

Prenons une quantité positive h, telle que la région

$$|y| < h \qquad (\overline{OA} = h)$$

de $x = 0$ soit entièrement contenue dans (D) le domaine de (x, y) où

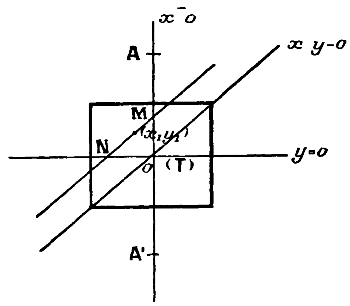

Fig. 6.

l'équation est dépourvue de singularités, et où se trouve l'origine. Faisons passer par l'origine une droite quelconque : soit, par exemple,

$$x - y = 0.$$

D'après les lemmes I et III, on pourra déterminer sur cette droite une région

$$|x| < \varepsilon$$

telle que le domaine (d) de l'espace [1], que cette région définit avec la région

$$|y| < h,$$

jouisse de la propriété qu'on sait (lemme I).

Il y aura de même un domaine (δ) de l'expace [2], correspondant aux mêmes valeurs h et ε et contenant entièrement la région

$$|x| < \varepsilon$$

de la droite $x - y = 0$. Ce domaine (δ) possède la propriété qui a fait l'objet du lemme III.

Il est évident que lorsque, h restant fixe, le point de rencontre des droites

$$x = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad x - y = \text{const.}$$

se déplacera dans l'espace (x, y), les domaines (d) et (δ) varieront d'une manière continue.

Il existera donc un domaine défini par

$$\text{(T)} \qquad |x| \leqq r, \qquad |y| \leqq s$$

que nous appelerons (T) et qui possèdera la propriété suivante :

1° Quel que soit le point (x_1, y_1), dans (T) ou sur la limite de ce domaine, le domaine (δ) correspondant au point (x_1, y_1) contiendra le point O.

2° Quel que soit (x_1, y_1) dans ou sur (T), le domaine (δ) contiendra les deux points M et N, où la droite

$$x - y = x_1 - y_1$$

coupe les axes de coordonnées, qui sont ici les seules singularités.

---

(1) Ce domaine est simplement connexe et est défini au moyen d'une courbe limite dépendant de h et ε. (*Voir* lemme I, pages 46 et 47.)

(2) *Voir* lemme III.

On pourra donc choisir (x_1, y_1) tel, qu'en plus des conditions 1° et 2° on ait la condition suivante :

3° Le domaine (d), du premier lemme correspondant au point (x_1, y_1) et à la région du plan $x = x_1$, définie par

$$|y - y_1| < |y_1|,$$

dans laquelle l'intégrale uniforme donnée, soit $U(x, y)$ est holomorphe, contient le point M. On n'aurait qu'à prendre (x_1, y_1) assez près de $x = 0$, y_1 étant fixe.

Ceci étant, déterminons une intégrale $V_1(x, y)$ avec les données suivantes :

Sur $x = x_1$ des données en nombre $n - k$ (k étant l'ordre de multiplicité de la famille caractéristique $x =$ const.), toutes fonctions entières de y.

Sur $y = y_1$, les k données résultant de $U(x, y)$, qui par conséquent seront holomorphes, excepté aux points N et M.

La condition 2° de plus haut montre que $V_1(x, y)$ n'aura dans (δ) que les deux multiplicités singulières

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = a,$$

a désignant l'affixe de N dans $y = 0$. La condition 1° montre que (δ) est un domaine autour de l'origine.

D'autre part, la condition 3° montre que

$$U(x, y) - V_1(x, y)$$

qui est également une intégrale est holomorphe en M; donc, d'après le lemme II, holomorphe tout le long de

$$x = 0$$

dans le domaine (δ). La seule singularité dans (δ), que cette différence possède est donc

$$x = a \quad \text{et} \quad y = 0,$$

et à l'origine elle n'a, comme on voit, que la singularité $y = 0$. En procédant d'une manière tout à fait analogue pour $y = 0$, que pour $x = 0$, on obtiendra une autre intégrale $V_2(x, y)$ n'ayant que les deux singularités

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = b$$

et la différence

$$U(x, y) - V_1(x, y) - V_2(x, y)$$

sera une intégrale n'ayant dans (δ) (¹) que la seule singularité

$$y = b.$$

On obtiendra donc ainsi une intégrale

$$U(x, y) - V_1(x, y) - V_2(x, y) = H(x, y),$$

holomorphe à l'origine. Le théorème est donc démontré.

7. Ce théorème général montre que dans l'expression analytique d'une intégrale uniforme autour d'un point où passent, par exemple, les singularités

$$x = 0, \quad y = 0,$$

il ne peut entrer des termes tels que

$$\frac{1}{x^m y^n},$$

m et n étant des nombres entiers positifs.

Les termes d'une pareille expression ne sont singuliers que par rapport à une seule caractéristique.

En appelant fonction quasi uniforme autour de (x_0, y_0) une fonction dont l'expression autour de ce point est

$$\sum_{i=1}^{i=m} \{ A_i(x, y) \operatorname{Log}[c_i(x, y) - c_i(x_0, y_0)] + B_i(x, y) \},$$

où les $A_i(x, y)$ et $c_i(x, y)$ sont des fonctions holomophes en (x_0, y_0), et les $B_i(x, y)$ ont en ce point les singularités des logarithmes, mais sont uniformes, on voit que toute fonction uniforme de deux variables n'est pas une fonction quasi uniforme. *On vient de montrer qu'il en est pourtant ainsi, d'une fonction uniforme qui satisfait à une équation*

(¹) Ce domaine n'est pas *le même* que plus haut.

linéaire aux dérivées partielles. Les intégrales quasi uniformes constituent *la chose la plus simple* d'intégrales d'une équation linéaire.

Il est facile de se convaincre par un exemple très simple que les équations non linéaires ne jouissent pas, en ce qui concerne l'expression de la classe la plus simple d'intégrales, de la propriété dont on vient de parler. Soit par exemple l'équation

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

dont l'intégrale générale est $f(x)\varphi(y)$, f et φ étant des fonctions quelconques.

On voit que la forme de plus haut est une intégrale uniforme de cette équation, lorsque f et φ sont des fonctions uniformes, et la classe la plus simple d'intégrales de l'équation ci-dessus, considérée comme type, est certainement la classe uniforme.

SECONDE PARTIE.

LES ÉQUATIONS LINÉAIRES A COEFFICIENTS PARTOUT HOLOMORPHES ET A CARACTÉRISTIQUES LINÉAIRES.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES N'AYANT, PARTOUT, QU'UNE SEULE FAMILLE DE CARACTÉRISTIQUES SINGULIÈRES.

1. Nous allons maintenant considérer des équations linéaires d'un type particulier, qui seront caractérisées par l'absence de toutes singularités fixes.

Les théorèmes établis dans la première Partie s'appliquent naturellement à cette classe d'équations sans aucune difficulté ; mais ce que nous chercherons ici ce ne seront plus des représentations analytiques autour d'un point dans un domaine limité de l'espace à quatre dimensions des variables indépendantes, mais une expression obtenue au moyen de fonctions élémentaires en nombre fini ou infini, qui les représente *dans tout leur domaine d'existence*. On aura donc ainsi intégré, au moins partiellement, d'une manière effective les équations du type envisagé.

Écrivons toujours l'équation sous la forme

$$(\mathrm{I}) \qquad \Delta_n(u) + \Psi(u, x, y) = 0,$$

où $\Delta_n(u)$ représente la partie de l'équation qui ne renferme que les termes à dérivées d'ordre le plus élevé, et dont les coefficients sont constants, les caractéristiques de l'équation étant linéaires, c'est-à-dire de la forme

$$(\mathrm{II}) \qquad a_i x + b_i y + c = b = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le symbole $\Psi(u, x, y)$ indique la totalité des autres termes de l'équation dont les coefficients sont des fonctions entières quelconques de x et y.

On a naturellement ici :

$$\Delta_n(u) = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(a_n \frac{\partial u}{\partial x} + b_n \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

où a_i et b_i indiquent des quantités constantes.

Le domaine (D) considéré dans la première Partie est ici un domaine quelconque de l'espace (x, y), car les équations (I) n'ont pas de singularités fixes.

La courbe

$$P(x, y) = 0$$

qui a été considérée plus haut, sera ici toujours supposée être une droite

$$Ax + By + C = 0,$$

où il suffira que l'on ait

$$\frac{A}{a_i} \neq \frac{B}{b_i},$$

a_i et b_i appartenant à une famille caractéristique (II).

2. Nous allons voir maintenant ce que pourront nous apprendre les théorèmes de la première Partie, sur la représentation analytique dans tout l'espace (x, y) des intégrales d'une équation de ce type [1].

Comme on l'a déjà remarqué dans le Chapitre I de la première Partie, le théorème de M. Goursat, extension de celui de Cauchy, permet d'affirmer tout de suite (en se rappelant que d'après le théorème de M. Delassus, les singularités seront toujours ici des caractéristiques) que toute intégrale déterminée avec n données fonctions entières de x sur une droite non caractéristique

$$y = 0$$

est une fonction entière de x et de y.

C'est donc déjà une première classe d'intégrales dont on connaît la forme analytique.

Si l'on prenait maintenant des données quelconques en nombre n

[1] Les résultats contenus dans ces deux premiers Chapitres ont été communiqués à l'Académie des Sciences, dans la séance du 20 juillet 1914.

sur la même droite, on pourrait, en faisant passer par chaque point singulier de ces données les n caractéristiques correspondantes, déterminer un ensemble de droites de l'espace (x, y), sur lesquelles se trouveront toutes les singularités de l'intégrale.

Rien ne prouve cependant que *toutes* ces droites sont des singularités.

Si l'on prenait une droite caractéristique et qu'on déterminerait une intégrale avec $n - k$ données sur cette droite (k étant toujours l'ordre de la caractéristique) et k données sur une autre droite la coupant, on pourrait procéder de la même manière, mais on arriverait à un autre genre d'ensemble de droites qui pourrait *au plus* être des singularités.

En effet le nombre de caractéristiques que l'on ferait passer par chaque point singulier des $n - k$ données serait égal à $n - 1$, au plus, on serait donc à ce point de vue plus près du vrai ensemble de droites singulières. Il faudrait cependant ajouter des singularités *possibles* parallèles à la caractéristique portant les données, et situées à une distance quelconque de celle-ci.

On voit facilement que dans le cas d'une seule famille caractéristique (d'ordre n, par conséquent) ou de deux familles caractéristiques (d'ordre p et $n - p$), on déterminerait par ces deux procédés toutes les singularités des intégrales, d'une manière absolument parfaite en ce qui concerne leur position.

Ces faits sont presque intuitifs quand on tient compte de la forme possible d'une singularité mobile d'une équation linéaire donnée par le théorème de M. Delassus. Toutefois, pour pouvoir tirer de ce théorème des conclusions rigoureuses, il faudrait montrer qu'une caractéristique singulière ne peut contenir des points ordinaires de l'intégrale en aucun endroit, et que tous les chemins du prolongement analytique de l'intégrale, même ceux qui sortent des plans des données, reviennent toujours avec des déterminations holomorphes au point du départ, même si ces chemins décrivent des cycles autour des différentes singularités.

Nous démontrerons d'une manière absolument rigoureuse le théorème qui suit et qui pourrait se déduire intuitivement des considérations précédentes.

3. Comme dans le cas général faisons le changement de variable

(qui est ici biunivoque dans tout l'espace x, y), qui ramène la caractéristique d'ordre k à

$$y = 0$$

et l'autre droite, qui peut être quelconque (pourvu que ce ne soit pas une caractéristique de la même famille), à

$$x = 0,$$

on aura alors le théorème suivant :

Théorème I. — *L'intégrale de l'équation* (I) *déterminée avec* $n - k$ *données, toutes fonctions entières de* x *sur*

$$y = 0$$

et k *données, fonctions quelconques de* y *sur*

$$x = 0$$

n'a dans tout son domaine d'existence que des singularités dont l'équation est

$$y = a_i,$$

les a_i *indiquant les points singuliers des données sur* $x = 0$; *le prolongement analytique de cette intégrale se fait par conséquent dans l'espace* (x, y) *comme le prolongement des données sur* $x = 0$, *dans ce plan.*

Le théorème général II de la première Partie (Chap. II) montre bien que l'intégrale est holomorphe en chaque point de

$$y = 0.$$

Cela ne veut pas encore dire cependant qu'elle est holomorphe dans un domaine

$$|y| < A$$

tout entier, A étant une quantité positive.

Soit $y = y_1$ le point le plus rapproché de l'origine sur $x = 0$, où l'intégrale cesserait d'être holomorphe. Comme dans le lemme II (1re Partie, Chapitre II) on peut montrer ici qu'il existe un nombre positif c, tel que les droites

$$\theta(y - y'_1) = x \qquad (|y'_1| < |y_1|),$$

où $|\theta| < c$ n'ait dans la bande du plan des y comprise entre l'axe réel et une parallèle à celui-ci menée par y_1, que des points ordinaires pour l'intégrale. La valeur maxima de c doit être telle que l'une des droites

$$(y - y'_1)\, c\, e^{\omega i} = x,$$

où ω est un angle compris entre o et 2π, soit une caractéristique (théorème de M. Delassus sur le « domaine correspondant à un arc analytique »).

Prenons alors le point singulier de cette caractéristique dont l'y est de module minimum; s'il y a plusieurs points sur la caractéristique satisfaisant à cette condition, prenons-en indifféremment l'un d'entre eux. Sur ce point on pourra répéter le raisonnement fait sur le point (o, y_1) en prenant pour axes la droite caractéristique qui le porte et $y = o$.

Nous aurons alors une autre caractéristique jouant un rôle analogue à la précédente.

Le module de son coefficient angulaire sera c' et l'on aura nécessairement

$$c > c',$$

cette inégalité excluant l'égalité. Au bout d'un nombre fini d'opérations, on aura donc pour caractéristique limite une caractéristique de la famille

$$y = \text{const.}$$

Cela prouve bien que l'intégrale est holomorphe dans un domaine

$$|y| < A$$

autour de $y = o$.

Si l'on suppose que l'on a pris pour A la valeur maxima satisfaisant à cette condition, l'une des droites

$$y = A\, e^{\omega i}$$

devra contenir un point singulier au moins.

Si le point singulier dont le $|x|$ serait minima ne se confond pas avec $(o, Ae^{\omega i})$, la considération d'un domaine analogue à celui de plus haut montrerait que l'on pourrait prendre des données holomorphes sur deux droites se coupant en un point aussi près que l'on voudrait de ce point singulier, et qui détermineraient l'intégrale;

d'après une remarque (1[re] Partie, Chap. II, p. 13), on pourrait alors prendre ce point assez près du point singulier pour que le domaine d'holomorphisme le contienne, donc ce point ne serait pas singulier.

D'autre part, le point $(0, Ae^{\omega'})$ ne peut être singulier que si les données y sont singulières; cela résulte d'une autre remarque faite au même paragraphe.

On aura donc nécessairement

$$A = |a|,$$

$y = a$, indiquant dans $x = 0$ le point singulier le plus rapproché de l'origine.

4. La proposition ainsi établie permet de démontrer un résultat déjà trouvé : *L'existence d'intégrales en nombre infini fonctions entières de x et de y*. On n'aurait en effet qu'à prendre sur

$$x = 0$$

des données fonctions entières de y.

CHAPITRE II.

INTÉGRALES QUASI UNIFORMES DANS TOUT LEUR DOMAINE D'EXISTENCE. INTÉGRALES PARTOUT UNIFORMES.

1. L'existence d'intégrales quasi uniformes autour d'un point dans le cas de l'équation générale fait présumer que, dans le cas de l'équation du type ici envisagé, on peut obtenir des intégrales *quasi uniformes dans tout leur domaine d'existence*, dont on pourra donner une représentation analytique valable dans tout (x, y), ces intégrales ayant une infinité de caractéristiques singulières de toutes les familles. C'est ce qui a lieu, en effet, quand on détermine des intégrales par des données *quasi uniformes dans tout le plan*, sur

$$x = 0$$

comme on va le voir.

2. Pour cela, nous allons définir d'abord ce que l'on doit entendre par quasi uniforme dans tout le domaine d'existence.

Appelons *fonction quasi uniforme d'une variable* une fonction n'ayant partout à distance finie que des points singuliers isolés et telle qu'on puisse la représenter dans tout son domaine d'existence par une série de la forme

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=\infty}\left[G_i(x)\operatorname{Log}(x-c_i)+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}A_m^i(x-c_i)^m\right],$$

où $G_i(x)$ désigne des fonctions entières, A_m^i des constantes et $x=c_i$ les points singuliers.

La convergence absolue et uniforme est relative à la série dont les termes ont l'indice i.

Il est évident, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler, que toute fonction uniforme partout et à points singuliers isolés fait partie de cette classe de fonctions. [On aurait alors $G_i(x,y)\equiv 0$ quel que soit i.]

Par analogie avec la définition donnée dans la première Partie (Chap. IV, n° 7), une fonction de deux variables qui dans tout son domaine d'existence sera représentable par

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{j=q}\left\{\sum_{i=i}^{i=\infty}\left[G_i(x,y)\operatorname{Log}(a_jx+b_jy+c_j^i)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}A_m^{ij}(x,y)(a_jx+b_jy+c_j^i)^m\right]\right\}$$

sera nommée *fonction quasi uniforme de deux variables.*

Dans cette expression $q\leqq n$, $G_i(x,y)$ et $A_m^{ij}(x,y)$ désignent des fonctions entières et a_j, b_j, c_i^j des constantes.

On remarquera, comme dans le cas de la quasi uniformité autour d'un point, que les fonctions uniformes de deux variables ne font pas, *en général*, partie de la classe quasi uniforme correspondante.

3. Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Toute intégrale déterminée avec des données fonctions entières sur la caractéristique*

$$y=0$$

et les données quasi uniformes sur

$$x = 0$$

est une fonction quasi uniforme de deux variables.

En répétant le raisonnement fait dans la première Partie pour la question analogue, et en tenant compte du théorème I démontré ici, on voit facilement que l'établissement de ce résultat ne présente aucune difficulté dans le cas où les données quasi uniformes *n'auraient qu'un nombre fini de singularités.*

Pour la démonstration générale on détermine donc des intégrales, en nombre infini, ayant chacune qu'une seule caractéristique singulière

$$y = c_i,$$

les données sur $x = 0$ étant pour chacune de ces intégrales un terme de la série (1) relatif à la sommation, d'indice i.

Soient

$$u_1(x, y), \qquad u_2(x, y), \qquad \ldots, \qquad u_i(x, y), \qquad \ldots$$

les différentes intégrales ainsi obtenues (les données sur la caractéristique sont des fonctions entières quelconques pour chaque intégrale). En général, la série formée avec ces fonctions quasi uniformes, soit

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} u_i(x, y),$$

n'est pas convergente. Soit η une quantité positive plus petite que l'unité. Prenons les domaines définis par

$$|x| < \eta |c_i|, \qquad |y| < \eta i,$$

que nous appellerons (D_i) ($i = 1, 2, 3, \ldots, \infty$) et qui sont tels que chacun contient le précédent (en supposant que les $|c_i|$ ont été rangés dans l'ordre de leur grandeur; on pourra déterminer des polynomes

$$P_i(x, y),$$

tels que dans (D_i) on ait, en choisissant pour le logarithme une détermination arbitraire fixe

$$|u_i(x, y) - P_i(x, y)| < \varepsilon_i,$$

$\varepsilon_i (i = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$ étant des quantités positives données à l'avance de manière que

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \varepsilon_i$$

soit convergent.

La série

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{i=\infty} [u_i(x, y) - P_i(x, y)]$$

convergera pour les déterminations choisies du logarithme dans tout domaine de l'espace (D_i), ne contenant pas $y = c_i$.

Comme d'autre part un chemin quelconque fermé ne saurait contenir à son intérieur *qu'un nombre fini de points singuliers* c_i, on voit que la série (3) converge pour toutes les déterminations du logarithme.

D'autre part, si $U(x, y)$ est l'intégrale déterminée avec les données de l'énoncé, on aura

$$U(x, y) - \sum_{i=1}^{i=\infty} [u_i(x, y) - P_i(x, y)] = H(x, y),$$

$H(x, y)$ étant une fonction entière de x et y, d'après la conséquence du théorème I.

L'intégrale $U(x, y)$ est donc bien quasi uniforme dans tout l'espace (x, y), car elle est bien de la forme (2).

4. On est donc assuré, par ce qui précède, qu'il existe une classe d'intégrales de la forme

$$\sum_{j=1}^{j=q} \left\{ \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[G_i(x, y) \operatorname{Log}(a_j x + b_j y + c'_j) + \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m^{ij}(x, y)\,(a_j x + b_j y + c'_j)^m \right] \right\},$$

où $q \leqq n$, et les expressions

$$a_j x + b_j y = \text{const.} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

désignent les familles caractéristiques; la manière dont on détermine les intégrales quasi uniformes relatives à une seule famille caractéristique d'après le théorème II, nous renseigne sur le degré de généralité de cette classe.

Pour pouvoir affirmer que c'est là la classe la plus simple d'intégrales d'une équation à coefficients fonctions entières et à caractéristiques linéaires quelconques, il faut établir le théorème analogue du théorème général IV (*voir* 1re Partie), qui concernera ici les intégrales uniformes dans tout leur domaine d'existence et n'ayant que des singularités linéaires isolées.

Avant d'établir ce théorème remarquons, en passant, que l'expression donnant la représentation de la classe quasi uniforme d'intégrales est une extension de celle qui donne l'intégrale générale des équations homogènes à coefficients constants, soit

$$\sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i(a_i x + b_i y),$$

où φ_i désigne des fonctions arbitraires d'une variable et les expressions

$$a_i x + b_i y = \text{const.}$$

comme plus haut, les familles caractéristiques.

5. Nous allons enfin établir le théorème suivant :

Théorème III. — *Toute intégrale uniforme dans tout son domaine d'existence et n'ayant que des multiplicités singulières isolées, fait partie, quand elle existe, de la classe d'intégrales quasi uniformes.*

Considérons une intégrale partout uniforme et à multiplicités singulières isolées, soit

$$V(x, y),$$

on peut toujours déterminer une droite

$$ax + by + c = 0, \tag{3}$$

de manière qu'en aucun de ses points il ne passe deux caractéristiques singulières différentes de $V(x, y)$.

Sur cette droite séparons les points singuliers, qui proviennent des différentes caractéristiques singulières, en n classes (au plus).

Déterminons alors une intégrale

$$u_1(x, y)$$

avec des données entières quelconques sur une caractéristique et des données uniformes sur (3), ayant pour points singuliers ceux de la première classe et ces points seulement. Ces données uniformes, dans tout le plan de (3), seront en plus déterminées de manière que le développement de Laurent en chaque point soit identique à celui qui résulte des données analogues, pour le même point de $V(x, y)$.

Un raisonnement tout analogue à celui employé pour la démonstration du théorème général IV nous montre que l'on a

$$V(x, y) - u_1(x, y) = H(x, y),$$

la fonction $H(x, y)$ étant partout uniforme, et n'ayant plus de singularités de la famille correspondant à la première classe de points singuliers sur (3).

On réduit ainsi successivement les familles de caractéristiques singulières et l'on obtient

$$V(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + \ldots + u_q(x, y) + G(x, y),$$

où $q \leqq n$ et $G(x, y)$ désigne une fonction entière.

Le théorème est ainsi établi.

6. On peut remarquer que les raisonnements qui ont permis d'établir les théorèmes I et II nous conduiraient à affirmer, si on les appliquait à une équation (I) à une seule famille caractéristique d'ordre n, *que toute pareille équation a une infinité d'intégrales partout uniformes*. Il en est donc ainsi en particulier de l'équation bien connue de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

et de toutes les équations paraboliques à coefficients entiers.

7. Comme application du théorème II, on peut se proposer d'intégrer toutes les équations

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^q \, \partial y^{n-q}} + \Phi(u, x, y) = 0$$

(où Φ désigne une forme linéaire en u et ses dérivées d'ordre moindre que n, à coefficients fonctions entières de x et y), avec des données fonctions uniformes et à singularités isolées (absolument quelconques) sur les caractéristiques

$$x=0 \quad \text{et} \quad y=0.$$

On peut, en effet, toujours décomposer ces données en somme de deux séries d'autres données, qui satisferont aux conditions du théorème II. Le même raisonnement montre que, les données étant uniformes, les fonctions entières coefficients de la partie logarithmique sont nulles sur le plan de ces données. On aura donc

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \sum_{i=1}^{i=\infty}\left[y\,G_i(x, y)\operatorname{Log}(x-a_i)+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m^i(y)(x-a_i)^m\right] \\ & +\sum_{i=1}^{i=\infty}\left[x\,E_i(x, y)\operatorname{Log}(y-b_i)+\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} B_m^i(x)(y-b_i)^m\right] \end{aligned}$$

où $G_i(x, y)$ et $E_i(x, y)$, aussi bien que $A_m^i(y)$ et $B_m^i(x)$ désignent de fonctions entières.

CHAPITRE III.

LES INTÉGRALES QUADRUPLEMENT PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

1. Nous allons nous occuper dans ce Chapitre des solutions périodiques des équations (I) [1].

Il est facile de voir que, si l'on suppose les coefficients entiers de cette équation fonctions doublement périodiques de x et y, on n'aurait qu'à prendre des données en nombres n doublement périodiques (par exemple des fonctions elliptiques) sur une droite non caractéristique

$$x=0$$

et la solution serait doublement périodique si les périodes des données coïncidaient avec les périodes des coefficients. Cependant, les solutions que l'on obtient ainsi ne sont pas en général uniformes.

(Elles seraient uniformes dans le cas d'une équation à une famille caractéristique d'ordre n.)

[1] Les résultats contenus dans ce Chapitre ont été communiqués, à peu de chose près, à l'Académie des Sciences dans la séance du 15 janvier 1915.

Nous allons nous occuper ici des intégrales fonctions quadruplement périodiques partout uniformes, dont la théorie est, comme on sait, dans le domaine des fonctions de deux variables, ce que la théorie des fonctions doublement périodiques ou elliptiques est dans le domaine des fonctions d'une variable.

On conçoit facilement que toute fonction quadruplement périodique satisfaisant à une équation (I) d'ordre n doit n'avoir que des singularités linéaires.

Ces fonctions quadruplement périodiques sont donc d'un type particulier. De plus, nous allons montrer que toute fonction quadruplement périodique à singularités linéaires ne saurait satisfaire à une équation (I). En ce qui concerne les fonctions de cette espèce du type le plus général, nous allons démontrer le fait suivant :

Toute fonction uniforme à multiplicités linéaires, toutes isolées, et quadruplement périodique, ne peut avoir plus de quatre familles différentes de singularités.

Par famille de singularités linéaires, j'entends l'ensemble des multiplicités singulières dont l'équation est

$$ax + by = \text{const.},$$

a et b ayant des valeurs *fixes*.

Soit donc $f(x, y)$ une pareille fonction quadruplement périodique qui aurait *cinq* familles singulières *différentes*, et supposons, ce qui est toujours possible, que deux de ces familles se confondent avec les familles des axes

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad y = 0.$$

Soient donc

$$\begin{gathered} a_1 x + b_1 y = \text{const.}, \\ a_2 x + b_2 y = \text{const.}, \\ a_3 x + b_3 y = \text{const.} \\ (x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.}), \end{gathered}$$

les cinq familles singulières *distinctes*, c'est-à-dire où l'on a

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3},$$

ces coefficients étant différents de zéro ou de l'infini.

Envisageons une singularité de chaque famille, soient :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \\ a_3 x + b_3 y = c_3 \\ (x = c_4, \quad y = c_5). \end{array}\right.$$

Soient de plus (ω_1, ω'_1), (ω_2, ω'_2), (ω_3, ω'_3) et (ω_4, ω'_4) les quatre couples de périodes *distinctes* de $f(x, y)$.

Il est manifeste que toute multiplicité dont l'équation aura l'une des formes suivantes :

$$a_j x + b_j y - c_j = \sum_{i=1}^{i=4} \lambda_i (a_j \omega_i + b_j \omega'_i),$$

$$x - c_4 = \sum_{i=1}^{i=4} \lambda_i \omega_i,$$

$$y - c_5 = \sum_{i=1}^{i=4} \lambda_i \omega'_i,$$

où j prend successivement les valeurs 1, 2 et 3 et les λ_i désignent des nombres entiers positifs ou négatifs quelconques, sont des multiplicités singulières de $f(x, y)$.

Pour que cette fonction ne soit pas indéterminée, ayant au voisinage de chaque singularité une infinité d'autres singularités de la même famille, il faut et il suffit que l'on ait

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=4} A_i^j (a_j \omega_i + b_j \omega'_i) = 0, & \displaystyle\sum_{i=1}^{i=4} A_i^4 \omega_i = 0, & \displaystyle\sum_{i=1}^{i=4} A_i^5 \omega'_i = 0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{i=4} B_i^j (a_j \omega_i + b_j \omega'_i) = 0, & \displaystyle\sum_{i=1}^{i=4} B_i^4 \omega_i = 0, & \displaystyle\sum_{i=1}^{i=4} B_i^5 \omega'_i = 0, \end{array}\right.$$

où comme plus haut $j = 1, 2, 3$, et les A_i^j et B_i^j sont des nombres entiers positifs ou négatifs (dont quelques-uns peuvent être nuls), tels que les dix relations ci-dessus soient *distinctes*.

Prenons alors pour base du même système de périodes les couples définis comme il suit, et qui, d'après les relations (2), se réduisent à

$$(0, w'_1), \quad (0, w'_2), \quad w_3, 0), \quad w_4, 0),$$

savoir :

$$\varpi_1 = \sum_{i=1}^{i=4} A_i^4 \omega_i = 0, \qquad \varpi'_1 = \sum_{i=1}^{i=4} A_i^4 \omega'_i,$$

$$\varpi_2 = \sum_{i=1}^{i=4} B_i^4 \omega_i = 0, \qquad \varpi'_2 = \sum_{i=1}^{i=4} B_i^4 \omega'_i,$$

$$\varpi_3 = \sum_{i=1}^{i=4} A_i^5 \omega_i, \qquad \varpi'_3 = \sum_{i=1}^{i=4} A_i^5 \omega'_i = 0,$$

$$\varpi_4 = \sum_{i=1}^{i=4} B_i^5 \omega_i, \qquad \varpi'_4 = \sum_{i=1}^{i=4} B_i^5 \omega'_i = 0.$$

La fonction $f(x, y)$ est donc doublement périodique de x pour $y =$ const. et doublement périodique de y pour $x =$ const.

Pour ce nouveau système base des périodes, il faudra avoir des relations analogues à (2), c'est-à-dire en conservant les mêmes notations, malgré les changements des valeurs des coefficients

$$(3) \qquad \begin{cases} a_j (A'_3 \varpi_3 + A'_4 \varpi_4) + b_j (A'_1 \varpi'_1 + A'_2 \varpi'_2) = 0, \\ a_j (B'_3 \varpi_3 + B'_4 \varpi_4) + b_j (B'_1 \varpi'_1 + B'_2 \varpi'_2) = 0, \end{cases}$$

où j prend successivement les valeurs 1, 2 et 3.

Les six relations ci-dessus donnent, par division de deux à deux, les trois relations suivantes

$$(4) \qquad \frac{A'_3 \varpi_3 + A'_4 \varpi_4}{B'_3 \varpi_3 + B'_4 \varpi_4} = \frac{A'_1 \varpi'_1 + A'_2 \varpi'_2}{B'_1 \varpi'_1 + B'_2 \varpi'_2},$$

ou sous une autre forme

$$(4) \qquad \begin{aligned} &(A'_1 B'_3 - A'_3 B'_1) \varpi_3 \varpi'_1 + (A'_1 B'_4 - B'_1 A'_4) \varpi'_1 \varpi_4 \\ &+ (A'_2 B'_3 - A'_3 B'_1) \varpi'_2 \varpi_3 + (A'_2 B'_4 - A'_4 B'_2) \varpi'_2 \varpi_4 = 0. \end{aligned}$$

Ce système doit être indéterminé quand on y considère $\varpi'_1 \varpi_3$, $\varpi'_1 \varpi_4$, $\varpi'_2 \varpi_3$, $\varpi'_2 \varpi_4$, ou le rapport de trois de ces quantités à la quatrième, comme inconnues. En effet, si cela n'était pas, la résolution de (4) donnerait des relations linéaires à coefficients entiers entre ϖ'_1 et ϖ'_2, ou entre ϖ_3 et ϖ_4, et $f(x, y)$ ne serait plus *quadruplement* périodique.

Il faudra donc qu'en résolvant les deux premières équations (4) par rapport à $w'_1 w_3$ et $w'_1 w_4$, en considérant les autres inconnues comme des quantités connues, on obtienne pour ces quantités les mêmes expressions que celles que donnerait la résolution des deux dernières équations du système.

Cela donnera les conditions

$$(5)\qquad \frac{A_1^1 B_3^1 - A_3^1 B_1^1}{A_1^2 B_3^2 - A_3^2 B_1^2} = \frac{A_1^1 B_4^1 - A_4^1 B_1^1}{A_1^2 B_4^2 - A_4^2 B_1^2} = \frac{A_2^1 B_3^1 - A_3^1 B_2^1}{A_2^2 B_3^2 - A_3^2 B_2^2} = \frac{A_2^1 B_4^1 - A_4^1 B_2^1}{A_2^2 B_4^2 - A_4^2 B_2^2}.$$

Si maintenant on tire des premières relations (3), ($j = 1$), la valeur de w_3 et des deux secondes la même valeur et qu'on divise, on obtient, en tenant compte de (5),

$$(6)\qquad \frac{a_1}{b_1} = \mathrm{R}\,\frac{a_2}{b_2},$$

où R désigne un nombre rationnel.

Or cette relation introduite dans (3) donnerait six relations linéaires et homogènes à coefficients entiers entre w'_1, w'_2, w_3 et w_4, dont les premières donneraient, par un raisonnement tout analogue à celui par lequel de (4) on a déduit (5), les relations suivantes :

$$(7)\qquad \frac{A_1^1}{B_1^1} = \frac{A_2^1}{B_2^1} = \frac{A_3^1}{B_3^1} = \frac{A_4^1}{B_4^1}.$$

Il faut remarquer, en effet, que dans (3) on peut supposer a_1 et b_1 rationnels, car si cela n'était pas, un changement de variables linéaire

$$x = m\mathrm{X}, \qquad y = n\mathrm{Y},$$

convenablement choisi, nous ramènerait toujours à ce cas sans changer quoi que ce soit à la nature de $f(x, y)$ ou de ces singularités, dont les deux dernières familles seraient toujours

$$x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.}$$

On peut donc supposer, à cause de (6), tous les coefficients de (3) entiers; les relations (7) s'en déduisent donc comme (5) de (4).

Or, les relations (7) impliquent que les relations (2) ne sont pas toutes distinctes, ce qui est contre l'hypothèse.

La fonction $f(x, y)$ ne peut donc avoir cinq familles singulières différentes.

2. Les résultats concernant les intégrales quasi uniformes des équations (I) vont nous permettre maintenant de donner une forme plus précise encore, des fonctions quadruplement périodiques, solutions d'une pareille équation.

Remarquons en effet que toute fonction quadruplement périodique $f(x, y)$, uniforme dans tout l'espace (x, y), n'ayant partout que des singularités linéaires isolees, peut être représentée analytiquement par une expression

$$(8) \qquad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} [A_m(a'x + b'y + c')][ax + by + c]^m + H(x, y),$$

où A_m désigne *une fonction uniforme et doublement périodique* d'une variable $a'x + b'y + c'$, les deux multiplicités

$$\begin{aligned} a'x + b'y + c' &= \text{const.}, \\ a\,x + b\,y + c &= \text{const.}, \end{aligned}$$

deux familles singulières différentes de $f(x, y)$ et $H(x, y)$ une fonction uniforme n'ayant pas

$$ax + by + c = 0$$

comme singularité et dont les autres singularités font partie des familles singulières de $f(x, y)$.

Cela résulte des transformations faites plus haut sur une fonction $f(x, y)$ pour amener ces couples de périodes à

$$(0, w'_1), \quad (0, w'_2), \quad (w_3, 0), \quad (w_4, 0).$$

D'autre part, le théorème III montre que l'intégrale quadruplement périodique considerée doit faire partie de la classe quasi uniforme. En comparant le développement des intégrales de cette classe, donné dans le Chapitre précédent à (8), on en déduit les identités

$$\begin{aligned} A_m(u) &\equiv \text{const.}, \\ G_i(x, y) &\equiv 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, \infty). \end{aligned}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Toute fonction quadruplement périodique uniforme* *et à multiplicités singulières isolées, qui satisfait à une équation* (I), *est de la forme*

$$\sum_{i=1}^{i=4} f_i(a_i x + b_i y),$$

où les familles de droites

$$a_i x + b_i y = \text{const.}$$

désignent quatre quelconques des familles caractéristiques et $f_i(u)$ *des fonctions d'une variable.*

3. Une question se pose maintenant :

Existe-t-il effectivement des fonctions quadruplement périodiques de cette forme, ou l'expression donnée par le théorème de plus haut représente-t-elle seulement une condition *nécessaire?*

S'il en existe, on pourra toujours les ramener par un changement de variables linéaires, qui ne change rien à la nature de la fonction, à avoir deux familles singulières,

$$x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.},$$

et choisir la base des périodes telle qu'elle soit de la forme

$$(0, w'_1), \quad (0, w'_2), \quad (w_3, 0), \quad (w_4, 0).$$

La forme

$$\sum_{i=1}^{i=4} f_i(a_i x + b_i y)$$

ne se trouvera pas changée non plus par cette transformation.

On pourrait maintenant, par un nouveau changement de variables,

$$x = m\mathrm{X}. \qquad y = n\mathrm{Y},$$

sans rien changer à la forme ci-dessus, réduire la troisième famille singulière à la forme

$$x + y = \text{const.}$$

Supposons que l'on ait

$$w'_1 = w_3, \qquad w'_2 = w_4,$$

la fonction qui s'écrit

$$f_1(x) + f_2(y) + f_3(x + y) + f_4(\alpha x + \beta y) \tag{9}$$

admet alors les couples de périodes

$$(0, w_3), \quad (0, w_4), \quad (w_3, 0), \quad (w_4, 0)$$

On voit immédiatement qu'on n'aurait qu'à prendre pour les trois premières fonctions $f_1(u)$, $f_2(u)$ et $f_3(u)$ des fonctions doublement périodiques uniformes à périodes

$$w_3 \quad \text{et} \quad w_4.$$

La fonction $f_4(u)$ devrait avoir alors les périodes

$$\alpha w_3, \quad \alpha w_4, \quad \beta w_3, \quad \beta w_4.$$

Pour que cela soit possible, il faudrait que l'on puisse déterminer des nombres rationnels P, P', Q et Q' tels que

$$(10) \qquad \begin{cases} \alpha w_3 = P\,\beta w_3 + Q\,b w_4, \\ \alpha w_4 = P'\beta w_3 + Q_{/}\beta w_4, \end{cases}$$

ou encore

$$(11) \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{P w_3 + Q w_4}{w_3} = \frac{P' w_3 + Q' w_4}{w_4}$$

qui peut encore s'écrire

$$(12) \qquad Q\left(\frac{w_4}{w_3}\right)^2 + (P - Q')\frac{w_4}{w_3} - P' = 0,$$

où l'on peut toujours choisir des coefficients tels que

$$PQ' - QP' \neq 0,$$

P, P', Q et Q' étant rationnels et que (12) ait des racines imaginaires, c'est à-dire qu'il puisse y avoir des fonctions doublement périodiques à périodes w_3 et w_4.

Les relations (11) donneront alors $\frac{\alpha}{\beta}$.

Comme cette condition est suffisante pour qu'il puisse exister une fonction

$$f_4(\alpha x + \beta y)$$

admettant les couples de périodes

$$(0, w_3), \quad (0, w_4), \quad (w_3, 0), \quad (w_4, 0),$$

on voit que $f_4(u)$ peut être choisi de manière que l'expression (9) soit quadruplement périodique en admettant le couple de périodes ci-dessus où

$$\frac{w_3}{w_4}$$

est imaginaire.

C'est là un exemple de fonctions quadruplement périodiques du type

$$\sum_{i=1}^{i=4} f_i(a_i x + b_i y).$$

4. Les fonctions quadruplement périodiques solutions d'une équation (I) satisfont, d'après leur forme, à une équation homogène du quatrième ordre :

$$\text{(13)} \qquad A\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + B\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y} + C\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + D\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y^3} + E\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0,$$

où A, B, C, D et E sont des constantes.

Inversement, toute équation de la forme (13) admet des intégrales quadruplement périodiques. On peut en effet ramener, par des substitutions linéaires, trois familles caractéristiques de (13) à la forme

$$x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.}, \qquad x + y = \text{const.}$$

Soit alors $\frac{\alpha}{\beta}$ le rapport des coefficients de x et y dans l'expression de la quatrième famille. En portant cette valeur dans (11), on pourra toujours déterminer P, P', Q et Q' telles que les équations (11) soient satisfaites et que l'équation (12) ait des racines imaginaires. D'autre part, l'intégrale générale de (13) est donnée par

$$\sum_{i=1}^{i=4} \varphi_i(\alpha_i x + \beta_i y),$$

où φ_i désigne des fonctions arbitraires d'une variable et

$$\alpha_i x + \beta_i y = \text{const.}$$

des familles caractéristiques. On peut donc toujours choisir des φ_i de manière que l'intégrale soit quadruplement périodique.

5. *Il résulte de là que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation linéaire aux dérivées partielles, dont tous les coefficients sont constants, ait une intégrale quadruplement périodique uniforme à multiplicités singulières isolées, est que chaque partie de l'équation, ne contenant que des dérivées du même ordre, considérée comme équation homogène à part, ait des familles caractéristiques communes.*

On voit donc qu'en général une équation à coefficients constants n'admet pas de solution quadruplement périodique.

GÉNÉRALISATION DES INTÉGRALES QUASI UNIFORMES.

1. Nous allons montrer dans ce dernier Chapitre que les intégrales quasi uniformes ne sont pas les seules dont on puisse donner une forme analytique ou des représentations valables dans tout le domaine d'existence.

Il existe une classe beaucoup plus générale encore que l'on peut obtenir en s'appuyant sur le théorème I (2e Partie, Chap. I), et en prenant conformément à l'énoncé de ce théorème des données entières sur une caractéristique.

Appelons, en effet, fonction *quasi uniforme quelconque* d'une variable, le produit d'un certain nombre de fonctions quasi uniformes simples, telles que nous les avons définies dans le Chapitre II de cette Partie.

On aura alors à envisager des termes de la forme

$$G(x)\,\mathrm{Log}^p y \qquad (p \text{ est un entier positif}), \tag{1}$$

où $G(x)$ est une fonction entière, et même des termes

$$S(x)\,\mathrm{Log}^p y, \tag{2}$$

où $S(x)$ est une fonction étant seulement uniforme autour de la multiplicité

$$y = 0$$

et n'ayant que des singularités de cette famille.

La forme (2) contient évidemment la forme (1). Nous allons nous borner à montrer que l'on peut donner l'expression, valable dans tout l'espace (x, y), d'une intégrale déterminée avec de pareilles données sur

$$x = 0.$$

Pour cela, remarquons que si l'on désigne par

$$\mathrm{Log}_1^p y$$

une détermination quelconque de cette fonction et par

$$\mathrm{Log}_2^p y$$

la détermination suivante, on a

$$\mathrm{Log}_2^p y = (\mathrm{Log}_1 y + 2\pi i)^p = \mathrm{Log}_1^p y + \mathrm{H}(y),$$

où $\mathrm{H}(y)$ désigne une expression linéaire en

$$\mathrm{Log}_1^{p-1} y, \quad \mathrm{Log}_1^{p-2} y, \quad \ldots, \quad \mathrm{Log}_1 y,$$

et cette identité subsiste pour deux quelconques des déterminations *successives* de $\mathrm{Log}\, y$.

Si nous reprenons alors le raisonnement fait pour les intégrales quasi uniformes, nous aurons à déterminer le coefficient de $\mathrm{Log}\, y$, dans l'intégrale, par des données fonctions entières sur

$$y = 0$$

et fonctions *quasi uniformes quelconques, d'un degré moindre que p*, sur

$$x = 0.$$

On arrivera donc, par réductions successives, à des données quasi uniformes simples, qui, comme on l'a vu dans les Chapitres précédents, nous amène à déterminer une intégrale par des données entières sur les deux droites, pour la forme (1) et des données uniformes sur l'une des droites (la droite quelconque) dans le cas de la forme (2).

Comme on le sait, les données uniformes sont équivalentes pour la détermination de la forme analytique de l'intégrale aux données quasi uniformes, de sorte que la forme (2) revient en fin de compte à la forme

$$\mathrm{G}(x)\,\mathrm{Log}^{p+1} y.$$

Les intégrales que l'on obtiendra avec les formes (1) et (2) de données seront donc

(3) $S_0(x, y) + S_1(x, y) \operatorname{Log} y + S_2(x, y) \operatorname{Log}^2 y + \ldots + S_p(x, y) \operatorname{Log}^p y,$

où $S_0(x, y)$, $S_1(x, y)$, ..., $S_p(x, y)$ désignent des fonctions uniformes n'ayant que $y = 0$ comme singularité.

On peut naturellement former, d'après les principes connus, des fonctions intégrales de cette forme ayant une infinité de singularités, $y = a_i$.

Il résulte de ce qui précède qu'il y a des classes d'intégrales dont la forme analytique s'exprime par des puissances de logarithmes.

2. Ce qui vient d'être dit peut être répété pour les équations linéaires quelconques, pourvu que l'on se borne à un domaine limité d'une région de l'espace où l'équation n'a pas de singularités.

On peut donc trouver des intégrales d'une équation linéaire quelconque s'exprimant autour de (x_0, y) par

$$A_0(x, y) + A_1(x, y) \operatorname{Log}(y - y_0) + \ldots + A_p(x, y) \operatorname{Log}^p(y - y_0),$$

où $A_0(x, y)$, $A_1(x, y)$, ..., $A_p(x, y)$ sont des fonctions uniformes autour de ce point n'admettant en (x_0, y_0) que la singularité isolée

$$y - y_0 = 0.$$

Le cas des termes

$$\operatorname{Log}^p(y - a) \operatorname{Log}^q(y - b)$$

dans les données est tout à fait analogue, et l'on obtient dans l'expression de l'intégrale des termes

(4) $$A(x, y) \operatorname{Log}^{p'}(y - a) \operatorname{Log}^{q'}(y - b),$$

où p' et q' comme p et q désignent des entiers positifs.

On peut cependant montrer qu'une expression polynome en $\operatorname{Log}(y - a_1)$, $\operatorname{Log}(y - a_2)$, ..., $\operatorname{Log}(y - a_m)$, $\operatorname{Log}(x - b_1)$, $\operatorname{Log}(x - b_2)$, ..., $\operatorname{Log}(x - b_n)$, *qui est intégrale d'une équation linéaire, ne peut contenir des termes tels que*

$$\operatorname{Log}^p(y - a_i) \operatorname{Log}^q(x - b_j),$$

a_i et b_j étant quelconques.

En effet, tout pareil polynome serait autour d'un point une fonction quasi uniforme quelconque de x et y, et un raisonnement tout analogue à celui qui a servi à la démonstration du théorème général IV (1re Partie), montrerait que toute pareille intégrale se décompose en une somme d'intégrales ne contenant que des termes tels que (4).

Il est évident que la considération des deux familles de multiplicités singulières

$$x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.}$$

n'a rien d'essentiel. On pourrait considérer un nombre fini quelconque de familles singulières, et cette proposition est tout aussi générale que le théorème général IV cité.

On peut donc faire la même remarque, à propos des intégrales quasi uniformes quelconques que celle de la fin de la première Partie de ce Mémoire, qui concernait les intégrales uniformes.

Vu et approuvé :

Paris, le 6 juin 1916.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 6 juin 1916.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

S.