F.-C. CLAPIER

Sur les surfaces minima ou élassoïdes

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1919

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1919__16__1_0>

N° D'ORDRE
1606.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par M. F.-C. CLAPIER,

Professeur de Mathématiques au lycée Gassendi,
Ancien boursier d'Agrégation de la Sorbonne.

1re THÈSE. — Sur les surfaces minima ou élassoïdes.
2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le [illegible] mai 1919 devant la Commission d'Examen.

MM. G. KŒNIGS, *Président.*
Cl. GUICHARD, *Examinateurs.*
LEBESGUE,

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1919

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
Doyen	P. APPELL, professeur.	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Professeurs honoraires	P. PUISEUX.	
	VÉLAIN.	
Professeurs	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY	Physique.
	BOUSSINESQ	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	É. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	Yves DELAGE	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	Gaston BONNIER	Botanique.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	P. JANET	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVÉ	Mécanique rationnelle.
	HAUG	Géologie.
	HOUSSAY	Zoologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie.
	Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale.
	CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie.
	Emile BOREL	Théorie des fonctions.
	MARCHIS	Aviation.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	G. PRUVOT	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	MATRUCHOT	Botanique.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	Cl. GUICHARD	Géométrie supérieure.
	MOLLIARD	Physiologie végétale.
	LEBESGUE	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	LAPICQUE	Physiologie générale.
	GENTIL	Géographie physique.
	N	Mathématiques générales.
	N	Histologie.
Professeurs adjoints	LEDUC	Physique.
	MICHEL	Minéralogie.
	HÉROUARD	Zoologie.
	Léon BERTRAND	Géologie.
	Rémy PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	COTTON	Physique.
	LESPIEAU	Chimie.
	SAGNAC	Physique (Enseignement P. C. N.).
	PEREZ	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Secrétaire	D. TOMBECK.	

59784 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

A

MONSIEUR G. KŒNIGS,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Hommage respectueux et reconnaissant.

A MA MÈRE.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES

SURFACES MINIMA OU ÉLASSOÏDES;

PAR **F.-C. CLAPIER**,

Professeur de Mathématiques au lycée Gassendi,
ancien boursier d'Agrégation de la Sorbonne.

Objet de cette étude. — Je me suis proposé d'apporter une modeste contribution à l'étude des surfaces minima ou élassoïdes. Ce dernier vocable a été introduit par Ribaucour qui a publié en 1881, étant ingénieur des Ponts et Chaussées à Aix-en-Provence, un Mémoire fort important couronné par l'Académie royale de Belgique. Dans ses « Leçons sur la Théorie générale des Surfaces », le très regretté Gaston Darboux consacre le Livre III à l'Historique et à l'exposé des principaux résultats obtenus sur cette question qui a préoccupé l'esprit des plus grands géomètres depuis Lagrange.

Dans le premier Chapitre, je rappelle les propriétés géométriques les plus importantes des surfaces maxima et montre l'intérêt des formules de Ribaucour qui se prêtent facilement aux applications et mériteraient de devenir classiques au même titre que celles de Weierstrass.

Dans les trois Chapitres suivants, j'étudie les surfaces minima déduites de leur représentation sphérique; en particulier, je détermine la surface minima qui admet, comme représentation sphérique de ses lignes de courbure, le système isotherme qui correspond aux lignes de courbure d'une quadrique. Je montre, en outre, comment les diverses méthodes géométriques employées pour la détermination générale des élassoïdes permet d'obtenir l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles.

Dans le cinquième Chapitre, j'envisage les surfaces minima, groupées en familles, comme trajectoires orthogonales de certaines congruences C_m. L'étude générale de ces congruences présenterait un vif intérêt; je me suis contenté de déduire de cette méthode les surfaces minima les plus simples.

Fidèle à la pensée de mon éminent maître Darboux qui faisait concourir l'intuition géométrique et le calcul analytique à la solution des Problèmes toujours plus nombreux et plus difficiles qui se posent à l'attention des géomètres, je me suis inspiré de cette pensée de Ch. Dupin :

« Il semble que, dans l'état actuel des Sciences mathématiques, le seul moyen d'empêcher que leur domaine ne devienne trop vaste pour notre intelligence est de généraliser de plus en plus les théories que ces Sciences embrassent, afin qu'un petit nombre de vérités générales et fécondes soit, dans la tête des hommes, l'expression abrégée de la plus grande variété des faits particuliers. »

Digne, le 31 octobre 1918.

F. CLAPIER.

CHAPITRE I.

1. Les surfaces minima ou élassoïdes [1] sont celles qui, après la sphère et les surfaces développables, présentent le plus vif intérêt, au point de vue de la courbure :

Leur indicatrice de Dupin est une hyperbole équilatère, et en chacun de leurs points, les deux rayons de courbure sont égaux et dirigés en sens inverse.

Cependant, c'est à propos d'une question de minimum qu'elles se sont présentées, pour la première fois, à l'attention des géomètres. Lagrange s'était proposé de rechercher, parmi toutes les surfaces qui passent par un contour donné, celle dont l'aire est minima. C'est l'analogue du problème des géodésiques qui consiste à trouver sur une surface la ligne la plus courte qui passe par deux points donnés de cette surface : effectivement les surfaces minima jouent dans l'espace euclidien le même rôle que les lignes géodésiques dans un espace à deux dimensions.

---

[1] Le terme *surface minima* est impropre, l'aire de la surface n'étant pas le plus souvent un minimum absolu (Ribaucour).

Et, de même que le problème de la géodésique qui joint deux points d'une surface n'est pas complètement déterminé, le problème posé par Lagrange ne comporte qu'une question de minimum relatif; et par un contour donné, il peut passer une infinité d'élassoïdes réels.

Au point de vue analytique, toutes les surfaces qui passent par un contour fixe dépendent de deux fonctions arbitraires; on peut les grouper en familles dépendant chacune d'un paramètre variable. Parmi toutes les surfaces d'une même famille, présentant une aire simplement connexe à l'intérieur du contour, il en existe une, moins étendue que toutes les surfaces voisines.

Les surfaces à étendue minima satisfont à une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre; et Monge a montré que cette équation est la même que celle qui caractérise les surfaces dont les rayons de courbure sont, en chacun de leurs points, égaux entre eux et de signes contraires.

Le Problème général de la détermination des surfaces minima dépend de deux fonctions arbitraires.

Assujettir l'une de ces surfaces à passer par un contour donné, c'est fixer une de ces fonctions arbitraires; la surface minima sera déterminée si on l'assujettit, en outre, soit à passer par un autre contour donné, soit à être inscrite à une Développable donnée, le long du premier contour : ces deux problèmes essentiels peuvent se ramener l'un à l'autre.

Ainsi, la recherche de la surface minima passant par deux cercles dont les plans sont parallèles, se ramène à celui de la surface minima inscrite, suivant le premier cercle, dans un cylindre dont les génératrices sont parallèles au plan formé par la ligne des centres et la direction commune des axes des deux cercles.

Le problème de Björling : construire la surface minima circonscrite à une Développable, le long d'un contour donné, est bien déterminé; sa solution géométrique a été donnée par Ribaucour dans un important Mémoire [1] qui nous servira de guide dans cette étude.

2. *Aire d'un élassoïde.* — Considérons une famille de surfaces passant par un contour C; celle dont l'aire est minima par rapport aux

---

[1] ALBERT RIBAUCOUR, *Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle :* Mémoire couronné par l'Académie royale de Belgique et publié à Bruxelles (1881).

surfaces voisines jouit de la propriété d'avoir sa courbure moyenne nulle.

Riemann a évalué l'aire d'une portion d'élassoïde, supposée fermée à l'intérieur du contour et ne présentant pas de nappes infinies; il envisage une famille de surfaces homothétiques et il trouve pour l'aire de la surface minima comprise dans cette famille

$$A = \int_C \frac{dl.\mathrm{ST}}{2} \cos\omega, \tag{1}$$

dl étant l'élément du contour en chaque point M, S le pôle d'homothétie et ST la longueur de la perpendiculaire menée sur la tangente MT au contour, ω l'angle du plan tangent à l'élassoïde avec le plan SMT.

Cette formule donne l'aire d'une portion de surface quelconque de la famille, quand on suppose le contour C infiniment petit. Pour un contour fini, l'accroissement d'aire $A' - A$, quand on passe d'une surface S à une surface très voisine S', est un infiniment petit du premier ordre par rapport aux distances *an* des deux surfaces. Ce n'est que dans le cas où les surfacee S et S' sont des élassoïdes que cet accroissement est un infiniment petit du deuxième ordre. D'où la formule de Riemann.

D'après cette formule, l'aire A dépend du contour C et des plans tangents en chacun des points du contour. Si l'on considère le cône de sommet S, s'appuyant sur la courbe C, ω est l'angle du plan tangent au cône avec le plan tangent à l'élassoïde. Celui-ci est bien déterminé par l'inclinaison de ses plans tangents sur les plans tangents du cône; si A_1 est l'aire latérale de celui-ci, on aura

$$\text{pour } \omega \text{ constant}, \qquad A = \cos\omega . A_1.$$

Pour $\omega = 0$, l'aire A est égale à celle du cône circonscrit. Si l'on considère tous les cônes passant par le contour C et ayant même aire latérale A_1, leurs sommets sont situés sur la courbe et dépendent d'un paramètre variable. A chacun de ces cônes correspondra une surface minima ayant une aire $A = A_1$. Nous déterminons ainsi une famille de surfaces minima passant par une courbe C et ayant toutes même aire A à l'intérieur du contour.

3. *Propriétés géométriques.* — Imaginons une famille de surfaces S, ayant une forme analogue à des surfaces équipotentielles; leurs trajectoires orthogonales forment une congruence de courbes

que l'on peut disposer en petits tubes orthogonaux curvilignes. Un de ces petits tubes, ayant pour base $d\sigma$ sur la surface S et pour hauteur dn, découpe sur la surface S' infiniment voisine une aire $d\sigma'$. Il est facile de montrer que l'accroissement d'aire

$$\delta\, d\sigma = dn\, d\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \tag{2}$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbure de la surface S, en un point du petit contour d'aire $d\sigma$.

Il en résulte que si l'on prend une famille de surfaces minima, définie par la congruence de leurs trajectoires orthogonales ([1]), un petit tube orthogonal découpe, sur chaque surface de la famille, des aires égales.

Au point de vue analytique, les surfaces minima qui passent par un contour C dépendent d'une fonction arbitraire qui caractérise la développable circonscrite le long de ce contour. Si l'on prend une famille de développables, on aura une famille correspondante de surfaces minima.

Déterminons la congruence formée par les trajectoires orthogonales aux surfaces de cette famille; on peut former avec ces courbes des tubes orthogonaux d'épaisseur finie qui découperont sur chacune des surfaces de la famille des aires égales. Il en résulte que tous les élassoïdes réels, appartenant à une famille et passant par un contour, ont à l'intérieur de ce contour des aires égales. C'est ce que nous avions montré en prenant comme famille de développables des cônes passant par le contour et ayant des aires latérales égales.

4. Ainsi, il existe un seul élassoïde passant par un contour et circonscrit à une développable le long de ce contour. Mais, si l'on veut considérer le minimum d'aire, il faut envisager une famille de surfaces S passant par le contour, dépendant d'un paramètre variable; celle de ces surfaces qui aura la moindre étendue sera un élassoïde (A); il existe uue infinité d'élassoïdes passant par le contour et ayant même aire A. — Si l'on envisageait une autre famille de surfaces S_1, on obtiendrait encore une surface d'aire minima (A_1) passant par le contour; cette aire A_1 serait différente de A.

([1]) L'étude de ces congruences fera partie de la deuxième partie de ce Mémoire.

L'équation (2) montre que les élassoïdes, ou surfaces de courbure moyenne nulle, sont les seules surfaces jouissant de la propriété relative d'aire minima. Cette propriété montre leur analogie avec les géodésiques d'une surface; mais la correspondance est plus étroite :

Si l'on a sur une surface une famille de géodésiques et si l'on en considère leurs trajectoires orthogonales, qui seront par exemple des cercles géodésiques, l'armille formée par deux de ces trajectoires découpe sur chacune des lignes géodésiques des longueurs égales. De même, si l'on a dans l'espace une famille d'élassoïdes, un tube orthogonal découpe sur chaque surface de la famille des aires égales.

On peut délimiter autour du point M d'une surface une région entourant ce point, telle que par un point quelconque de cette région et par le point M, il ne passe qu'une courbe géodésique. De même, on peut, dans l'espace, délimiter une région entourant un contour C, telle que, par un contour quelconque C′ pris dans cette région et par le contour C, il passe un seul élassoïde réel.

Formules de Ribaucour.

3. En tous les points d'une surface minima, l'indicatrice de Dupin étant une hyperbole équilatère, les directions isotropes sont deux directions conjuguées. C'est là une propriété caractéristique des élassoïdes.

Une développable isotrope a comme arête de rebroussement une ligne de longueur nulle; sa génératrice est une droite isotrope, dont la direction coïncide avec sa conjuguée ; cette surface peut donc être considérée comme un élassoïde.

Soient A et B deux points quelconques pris sur les arêtes de rebroussement (A) et (B) de deux développables isotropes; le lieu des points M tels que $\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = \text{const.}$ est un élassoïde. On obtient ainsi les surfaces minima les plus générales, car elles dépendent de deux fonctions arbitraires, celles qui définissent les deux développables. Si (A) et (B) sont imaginaires conjuguées, on obtiendra les élassoïdes réels qui dépendent d'une fonction arbitraire (Ribaucour).

Si une surface minima est rapportée à ses lignes de longueur nulle, sa représentation sphérique sera rapportée aux lignes isotropes de la sphère; c'est là une propriété caractéristique (O. Bonnet).

Les lignes de courbure d'une surface minima, qui donnent sur la surface un système isotherme, admettent pour représentation sphérique un système qui est aussi isotherme ; mais cette propriété appartient aussi aux surfaces de révolution, aux quadriques, etc. (Darboux).

La recherche des surfaces minima est étroitement liée à celle des systèmes isothermes de la sphère.

A toute représentation géographique de la sphère on peut faire correspondre un système de formules définissant la surface minima la plus générale. Nous verrons aussi qu'à tout système orthogonal quelconque de la sphère on peut faire correspondre une surface minima définie en coordonnées tangentielles.

6. Les formules de Weierstrass ont été obtenues en partant de la projection stéréographique de la sphère sur le plan de l'équateur. Si nous prenons comme tracé géographique de la sphère le système de Mercator, nous allons obtenir simplement des formules intéressantes, établies par Ribaucour, en considérant une surface minima comme enveloppée moyenne d'une congruence isotrope.

Nous emploierons les formules de Monge, qui définissent un élassoïde, comme lieu des milieux des cordes AB joignant deux points de deux lignes de longueur nulle (A) et (B). Une de ces lignes satisfait à la condition

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

que l'on peut écrire

$$(dx + i dz)(dx - i dz) = - dy^2.$$

Désignons par φ un paramètre variable qui fixe la position du point A, et tel que l'on puisse poser

$$\frac{dx + i dz}{-dy} = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{dx - i dz}{dy} = \cot \frac{\varphi}{2}.$$

On aura, en introduisant une fonction arbitraire $\mathcal{F}(\varphi)$ qui caractérise la développable isotrope (A),

$$\frac{dx}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{dy}{2 \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}} = \frac{dz}{i\left(1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}\right)} = \mathcal{F}(\varphi)\, d\varphi.$$

L'arête de rebroussement de cette développable sera déterminée par les égalités

$$(3)\qquad \begin{cases} dx = \cos\varphi . \mathfrak{F}(\varphi) d\varphi, \\ dy = \sin\varphi . \mathfrak{F}(\varphi) d\varphi, \\ dz = i\mathfrak{F}(\varphi) d\varphi, \end{cases}$$

avec une fonction arbitraire différente de la première.

Nous pourrons intégrer si nous posons, à l'aide d'une nouvelle fonction arbitraire $F(\varphi)$, ayant pour dérivées F' et F''',

$$\mathfrak{F}(\varphi) = F'(\varphi) + F'''(\varphi):$$

nous aurons, pour les coordonnées du point A,

$$(A)\qquad \begin{cases} x_a = F' \sin\varphi + F'' \cos\varphi, \\ y_a = - F' \cos\varphi + F'' \sin\varphi, \\ z_a = i(F + F''); \end{cases}$$

avec une deuxième fonction arbitraire $F_1(\varphi_1)$ qui caractériserait la développable isotrope (B), nous aurions de même pour les coordonnées du point B,

$$(B)\qquad \begin{cases} x_b = F'_1 \sin\varphi_1 + F''_1 \cos\varphi_1, \\ y_b = - F'_1 \cos\varphi_1 + F''_1 \sin\varphi_1, \\ z_b = - i(F_1 + F''_1). \end{cases}$$

Les coordonnées du point M, qui décrit la surface minima (M), seront données par les expressions

$$(4)\qquad x = \frac{x_a + x_b}{2}, \quad y = \frac{y_a + y_b}{2}, \quad z = \frac{z_a + z_b}{2}.$$

On peut les écrire sous la forme abrégée

$$(5)\qquad \begin{cases} x + iy = \dfrac{e^{i\varphi}}{2}(-iF' + F'') + \dfrac{e^{i\varphi_1}}{2}(-iF'_1 + F''_1), \\ z = \dfrac{i}{2}(F + F'') - \dfrac{i}{2}(F_1 + F''_1). \end{cases}$$

Ce sont les formules données par Ribaucour [1], pour définir l'élassoïde moyen déduit d'une congruence isotrope. Elles contiennent deux fonctions arbitraires; on obtiendra les élassoïdes réels en prenant ces deux fonctions $F(\varphi)$ et $F_1(\varphi_1)$, imaginaires conjuguées, les paramètres φ et φ_1 étant eux-mêmes imaginaires conjugués.

---

(1) *Mémoire sur les élassoïdes*, déjà cité, Chap. XII, p. 131.

L'élassoïde conjugué, introduit par O. Bonnet, s'obtiendra en remplaçant, dans les formules (5), F par iF et F_1 par $-iF_1$, c'est-à-dire en multipliant la première fonction arbitraire par i et la deuxième par $-i$.

7. Les formules (4) peuvent se démontrer géométriquement. Nous en déduisons pour le carré de l'élément linéaire

$$\begin{aligned} 4\,ds^2 &= (dx_a+dx_b)^2+(dy_a+dy_b)^2+(dz_a+dz_b)^2 \\ &= 2(dx_a\,dx_b+dy_a\,dy_b+dz_a\,dz_b); \end{aligned}$$

et substituant les expressions déduites des formules (3),

$$ds^2 = (F'+F''')(F'_1+F'''_1).\cos^2\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\cdot d\varphi\,d\varphi_1. \tag{6}$$

L'élassoïde est donc rapporté à ses lignes de longueur nulle, comme on pouvait le prévoir : à chaque point A de la première arête de rebroussement correspond sur la surface (M) une ligne parallèle à la deuxième arête de rebroussement (B).

Représentation sphérique. — Les lignes coordonnées qui passent par le point M étant parallèles aux arêtes de base (A) et (B), leurs directions seront données par les formules (3). Désignons par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale en M, et exprimons que cette normale est perpendiculaire aux directions isotropes des points correspondants A et B; nous avons

$$\left\{\begin{aligned} c\cos\varphi\ +c'\sin\varphi\ +ic''&=0, \\ c\cos\varphi_1+c'\sin\varphi_1-ic''&=0; \end{aligned}\right. \tag{7}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{c}{-\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}}=\frac{c'}{\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}}=\frac{c''}{i\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}}=\frac{1}{\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}}.$$

L'élément linéaire de la représentation sphérique étant $d\sigma$, nous obtenons

$$d\sigma^2=\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}\,d\varphi\,d\varphi_1. \tag{8}$$

Les lignes isotropes ou génératrices rectilignes de la sphère correspondent bien aux lignes isotropes de la surface minima.

Pour obtenir les élassoïdes réels, nous poserons

$$\varphi = \alpha + i\beta, \qquad \varphi_1 = \alpha - i\beta.$$

Si l'on désigne par u et v la colatitude et la longitude du point m, représentation sphérique de M, nous avons, pour les coordonnées du point m,

$$\begin{aligned} c &= \sin u \cos v = \frac{-\sin\alpha}{\cos i\beta}, \\ c' &= \sin u \sin v = \frac{\cos\alpha}{\cos i\beta}, \\ c'' &= \cos u \qquad = i \operatorname{tang} i\beta; \end{aligned}$$

et la formule (8) peut s'écrire

$$d\sigma^2 = \sin^2 u\left(dv^2 + \frac{du^2}{\sin^2 u}\right) = \frac{1}{\cos^2 i\beta}(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

On en déduit pour les expressions de α et β, à l'aide des coordonnées géographiques,

$$\alpha = \frac{-\pi}{2} + v, \qquad -\beta = \log\cot\frac{u}{2}.$$

Ce sont les formules de la représentation géographique de la sphère sur un plan, par le système de Mercator.

Inversement, en partant de cette représentation isotherme de la sphère, on serait conduit aux formules de Ribaucour.

Lignes asymptotiques et lignes de courbure. — Deux directions conjuguées, prises sur l'élassoïde (M), satisfont à la condition

$$dx\,\delta c + dy\,\delta c' + dz\,\delta c'' = 0.$$

Les relations (7) nous donnent

$$\begin{aligned} \cos\varphi\,\delta c + \sin\varphi\,\delta c' + i\,\delta c'' &= (c\sin\varphi - c'\cos\varphi)\,\delta\varphi, \\ \cos\varphi_1\,\delta c + \sin\varphi_1\,\delta c' + i\,\delta c'' &= (c\sin\varphi_1 - c'\cos\varphi_1)\,\delta\varphi_1. \end{aligned}$$

Les parenthèses des seconds membres sont égales; de sorte que, si l'on remplace dx, dy, dz par leurs expressions complètes déduites des formules (3), nous obtenons la condition

$$(F' + F''')\,d\varphi\,\delta\varphi + (F'_1 + F'''_1)\,d\varphi_1\,\delta\varphi_1 = 0.$$

On en déduit l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$\sqrt{F' + F'''}\, d\varphi \pm i\sqrt{F'_1 + F'''_1}\, d\varphi_1 = 0, \tag{9}$$

et celle des lignes de courbure

$$\sqrt{F' + F'''}\, d\varphi \pm \sqrt{F'_1 + F'''_1}\, d\varphi_1 = 0. \tag{9$'$}$$

8. *Élassoïdes conjugués.* — Ce sont deux surfaces minima applicables l'une sur l'autre, et telles que les lignes asymptotiques de l'une correspondent aux lignes de courbure de l'autre, et inversement.

Substituant iF à F et $-i$F$_1$ à F$_1$, dans les formules (5), nous obtenons les équations

$$\left\{\begin{aligned} x' + iy' &= \frac{e^{i\varphi}}{2}(F' + iF'') - \frac{e^{i\varphi_1}}{2}(F'_1 + iF''_1), \\ z' &= -\frac{1}{2}[(F + F'') + (F_1 + F''_1)], \end{aligned}\right. \tag{10}$$

qui déterminent l'élassoïde (M$'$) conjugué de l'élassoïde (M) : en effet, l'équation différentielle de deux directions conjuguées de ce nouvel élassoïde s'écrit

$$(F' + F''')\, d\varphi\, \delta\varphi + (F'_1 + F'''_1)\, d\varphi_1\, \delta\varphi_1;$$

ses lignes asymptotiques sont données par les formules (9)$'$ qui donnent les lignes de courbure de l'élassoïde (M). De plus, la forme (6) du carré de l'élément linéaire montre que l'on a $ds^2 = ds'^2$.

Ces deux élassoïdes (M) et (M$'$) ont même représentation sphérique dont l'élément linéaire est donné par la formule (8) ; aux points correspondants M et M$'$, les plans tangents sont parallèles. Il y a, de plus, correspondance par orthogonalité des éléments ; nous avons, en effet,

$$\begin{aligned} 2\,dx &= (dx_a + dx_b) = \cos\varphi . \mathcal{F} . d\varphi + \cos\varphi_1 . \mathcal{F}_1 . d\varphi_1, \\ 2\,dy &= (dy_a + dy_b) = \sin\varphi . \mathcal{F} . d\varphi + \sin\varphi_1 . \mathcal{F}_1 . d\varphi_1, \\ 2\,dz &= (dz_a + dz_b) = \mathrm{i}(\mathcal{F} d\varphi + \mathcal{F}_1 d\varphi_1); \end{aligned}$$

changeons $\mathcal{F}$ en $i\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ en $-i\mathcal{F}_1$ et formant le produit

$$dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz';$$

nous trouvons un résultat identiquement nul.

Inversement, quand deux surfaces se correspondent de manière à satisfaire à deux des conditions suivantes :

1° Parallélisme des plans tangents;
2° Applicables l'une sur l'autre;
3° Orthogonalité des éléments;

Ce sont deux élassoïdes conjugués (¹).

Supposons, par exemple, que la première et la troisième condition soient réalisées; à tout déplacement Δ sur la première surface correspond un déplacement perpendiculaire Δ' sur la deuxième. Les plans tangents en deux points voisins M et M_1 sur Δ sont parallèles aux plans tangents menés aux points correspondants M' et M'_1 sur Δ'; il en résulte que les directions conjuguées de Δ et Δ', aux points M et M' des deux surfaces, sont parallèles. Si l'on prend pour Δ une direction asymptotique qui a pour conjuguée cette direction elle-même, la direction conjuguée de Δ' sur la deuxième surface sera parallèle à Δ, c'est-à-dire perpendiculaire à Δ'; cette direction Δ' étant orthogonale avec sa conjuguée est donc celle d'une ligne de courbure de la surface (M').

Les lignes asymptotiques de la première surface (M) correspondent aux lignes de courbure de la deuxième (M').

Remarque. — Cette notion d'élassoïdes conjuguées permet de ramener la recherche des surfaces minima à l'intégration d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = k\theta. \tag{11}$$

Désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3 trois solutions particulières de cette équation; par x_1, x_2, x_3 les coordonnées cartésiennes d'un point M d'une surface, que nous définirons à l'aide des paramètres u et v par les formules de Lelieuvre

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \xi_2 \dfrac{\partial \xi_3}{\partial u} - \xi_3 \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = -\xi_2 \dfrac{\partial \xi_3}{\partial v} + \xi_3 \dfrac{\partial \xi_2}{\partial v}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Chaque expression

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial u} dv$$

(¹) RIBAUCOUR, *Mémoire sur les élassoïdes*, p. 106.

est une différentielle exacte; on peut l'intégrer et la surface (M) est rapportée à ses lignes asymptotiques.

Les coefficients directeurs de la normale au point $M(u, v)$ sont ξ_1, ξ_2, ξ_3; et la surface sera un élassoïde, si l'expression

$$\theta_0 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

est une quatrième solution particulière de l'équation (11).

Dans ce cas, les lignes asymptotiques, comme les lignes de courbure, forment un système orthogonal sur la surface minima (M). Associons à celle-ci une autre surface (M'), définie par les formules

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial x'_1}{\partial u} = \xi_1 \dfrac{\partial \theta_0}{\partial u} - \theta_0 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial x'_1}{\partial v} = -\xi_1 \dfrac{\partial \theta_0}{\partial u} + \theta_0 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

L'expression

$$\frac{\partial x'}{\partial u} du + \frac{\partial x'}{\partial v} dv$$

pourra être intégrée, et le point $M'(x'_1, x'_2, x'_3)$ correspondra au point $M(x_1, x_2, x_3)$ à l'aide des mêmes paramètres u et v. On déduit des relations précédentes les conditions

$$\begin{gathered} \xi_1 \; dx'_1 + \xi_2 \; dx'_2 + \xi_3 \; dx'_3 = 0, \\ dx_1 \, dx'_1 + dx_2 \, dx'_2 + dx_3 \, dx'_3 = 0, \end{gathered}$$

qui montrent que les deux surfaces (M) et (M') se correspondent par parallélisme des plans tangents et par orthogonalité des éléments. Ce sont deux élassoïdes conjugués.

Ils ont même élément linéaire. On trouve, avec les fonctions $U(u)$ et $V(v)$ la valeur

$$ds^2 = \theta^2 (dU^2 + dV^2)$$

et, pour le carré de la représentation sphérique,

$$d\sigma^2 = \frac{dU^2 + dV^2}{\theta^2}.$$

Les lignes asymptotiques d'une surface minima forment un système isotherme; leur représentation sphérique est aussi formée de lignes isothermes.

Démonstrations géométriques.

9. Une développable isotrope a ses génératrices, lignes de longueur nulle, normales à la surface et tangentes à l'arête de rebroussement. Il en résulte que toute ligne tracée sur la surface est ligne de courbure.

Désignons par (A_1) la trace de la développable isotrope sur le plan des xy et par (a) la développée de cette courbe. La génératrice qui passe par un point A_1 de cette courbe (A_1) est normale à cette courbe, et elle a pour enveloppe l'arête de rebroussement (A); le point de contact A est donc situé sur la surface polaire, la droite Aa est perpendiculaire au plan des xy.

Ainsi, la développée (a) est la projection de (A). En prenant une deuxième développable isotrope ayant pour trace (B_1) sur le plan des xy, la développée (b) sera la projection de son arête de rebroussement (B).

Le point M, milieu de AB, décrit une surface minima, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{x_a + x_b}{2}, \qquad y = \frac{y_a + y_b}{2}, \qquad z = \frac{z_a + z_b}{2}.$$

Définissons la courbe (A_1) par l'équation de sa tangente

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + F(\varphi) = 0.$$

φ, angle de la normale Aa avec l'axe des x.

L'équation de cette normale étant

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = F'(\varphi),$$

si l'on détermine le point de contact a, avec son enveloppe, on retrouve précisément les expressions qui correspondent aux deux premières formules de Ribaucour. La droite AA_1 est une génératrice isotrope et nous avons

$$z_a = \overline{aA} = i.\overline{aA_1}.$$

Pour la deuxième développable, nous aurons, en prenant une génératrice isotrope symétrique de la première,

$$z_b = \overline{bB} = (-i).\overline{bB_1}.$$

En désignant par R_a et R_b les rayons de courbure des courbes (A_1)

et (B_1), nous aurons

$$z = i\frac{R_a - R_b}{2}, \qquad R_a = F + F'', \qquad R_b = F_1 + F_1''.$$

Nous retrouvons ainsi la troisième formule de Ribaucour, en même temps qu'une interprétation géométrique de ces formules.

Pour l'élassoïde conjugué (M'), on aurait les relations

$$z' = -\frac{R_a + R_b}{2}, \qquad \overline{om'} = i.\frac{ab}{2};$$

le segment $\overline{om'}$ joint l'origine des coordonnées à la projection de M', et il est parallèle au segment ab qui joint les centres de courbure des traces (A_1) et (B_1).

La courbe (A_1) est une développante de la courbe (a); si l'on désigne par R_1 le rayon de courbure de celle-ci, nous aurons

$$R_1 = \frac{dR_a}{d\varphi} = F' + F'''.$$

L'équation des lignes de courbure, donnée par la formule (9), peut donc s'écrire

$$\sqrt{R_1}\, d\varphi_1 \pm \sqrt{R_2}\, d\varphi_2 = 0.$$

Supposons que les développables isotropes (A) et (B) soient confondues; nous aurons une seule courbe (A_1) sur laquelle nous prendrons deux points de paramètres φ et φ_1. Pour $\varphi = \varphi_1$, la corde $\overline{A_1B_1}$ est tangente à la courbe double (A_1), et nous avons

$$R_a = R_b, \qquad z = 0, \qquad c'' = 0.$$

La développée (a) est donc une géodésique de la surface; le plan des xy est un plan de symétrie.

Inversement, on peut se proposer de rechercher la surface minima admettant comme géodésique une courbe plane donnée (a). Celle-ci étant définie par l'expression de son rayon de courbure en fonction de l'angle φ que fait la tangente avec l'axe des x, la détermination des lignes de courbure et des lignes asymptotiques sera donnée par

$$\int \sqrt{R}\, d\varphi.$$

Applications.

10. Les formules de Ribaucour se prêtent commodément aux applications, suivant la forme choisie des fonctions arbitraires qui y entrent. Nous poserons

$$\varphi = \alpha + i\beta, \qquad \varphi_1 = \alpha - i\beta,$$

et nous prendrons $F(\varphi)$ et $F_1(\varphi_1)$ imaginaires conjuguées, pour obtenir des surfaces minima réelles. Supposons

1° $$F(\varphi) = x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi + a\varphi.$$

Nous avons

$$x_a = -x_0 + a \sin\varphi, \qquad y_a = -y_0 - a\cos\varphi$$

et, par suite,

$$x + x_0 = a \sin\frac{\varphi + \varphi_1}{2} \cos\frac{\varphi - \varphi_1}{2},$$

$$y + y_0 = a \cos\frac{\varphi + \varphi_1}{2} \cos\frac{\varphi - \varphi_1}{2};$$

à l'aide des paramètres réels α et β, nous obtenons

$$\begin{cases} x + x_0 = a \sin\alpha \cos i\beta, \\ y + y_0 = -a\cos\alpha \cos i\beta, \\ \phantom{y + {}} z = -a\beta. \end{cases}$$

Ces formules caractérisent la surface minima de révolution dont l'équation peut s'écrire

$$a \cos\frac{iz}{a} = \sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2} \quad \text{(alysséide)}.$$

2° $$F(\varphi) = e^{mi\varphi}.$$

Les équations (5) nous donnent, après l'introduction des paramètres α et β,

$$\begin{cases} x + iy = \dfrac{m(1-m)}{2}[\cos(m+1)\alpha + i\sin(m+1)\alpha]\,e^{-(m+1)\beta} \\ \qquad\qquad - \dfrac{m(1+m)}{2}[\cos(m-1)\alpha - i\sin(m-1)\alpha]\,e^{-(m-1)\beta}, \\ z = (1 - m^2)\cos m\alpha . e^{-m\beta}. \end{cases}$$

Nous avons trouvé, à l'aide des coordonnées géographiques u et v de la sphère,

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + v, \qquad e^{-\beta} = \cot\frac{u}{2} = \rho.$$

Après cette substitution, nous trouvons les formules de Bour qui donnent les surfaces minima applicables sur une surface de révolution.

Dans ce cas, la formule (6) nous donne

$$\begin{aligned} ds^2 &= m^2(1-m^2)^2\cos^2 i\beta\,(d\alpha^2 + d\beta^2)\\ &= m^2(1-m^2)^2\sin^4 u\,(du^2 + \sin^2 u\,dv^2).\end{aligned}$$

Les géodésiques de ces surfaces minima correspondent aux méridiens de la sphère $v = \text{const}$.

Les élassoïdes de cette famille, pour lesquels m est un nombre commensurable, sont algébriques; pour $m = 2$, on obtient l'élassoïde d'Enneper.

Remarque. — Les lignes de courbure de ce dernier élassoïde sont données, à l'aide de la formule (9), par les relations

$$\begin{aligned} e^{-\beta}\cos\alpha &= \text{const.},\\ e^{-\beta}\sin\alpha &= \text{const.} \end{aligned}$$

ou, avec les paramètres géographiques u et v,

$$\cot\frac{u}{2}\sin v = -y_0 = \text{const.}$$

$$\cot\frac{u}{2}\cos v = x_0 = \text{const.}$$

Le point de coordonnées (x_0, y_0) est la projection stéréographique du point m de la sphère; c'est l'affixe de cette projection qui représente le paramètre des formules de Weierstrass,

$$\xi = \frac{c + ic'}{1 - c''} = ie^{i\varphi}.$$

L'élassoïde d'Enneper correspond à la surface minima qui admet pour géodésique la première podaire négative de la parabole :

Soit, en effet, l'équation de la parabole

$$\rho = \frac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}},$$

rapportée à son foyer comme pôle. Le rayon de courbure de la podaire négative sera

$$R = \rho + \frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} = \frac{3}{2} \frac{a}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}};$$

et les lignes de courbure de la surface minima, qui admet cette courbe comme géodésique, sont données par

$$\int \sqrt{R}\, d\varphi = m \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}.$$

3° Supposons

$$F(\varphi) = ih \cos 2\varphi.$$

L'élassoïde (M) correspondant nous est donné par les parties réelles des expressions

$$\begin{aligned} x &= \Re(-4ih \cos^3 \varphi), \\ y &= \Re(4ih \sin^3 \varphi), \\ z &= \Re(3h \cos 2\varphi). \end{aligned}$$

Substituant $\varphi = \alpha + i\beta$, nous trouvons

$$\left\{ \begin{aligned} z &= 3h \cos 2\alpha \cos 2i\beta, \\ x &= 4ih \sin\alpha \sin i\beta (\sin^2\alpha \sin^2 i\beta + 3\cos^2\alpha \cos^2 i\beta), \\ y &= -4ih \cos\alpha \sin i\beta (\cos^2\alpha \sin^2 i\beta + 3 \sin^2\alpha \cos^2 i\beta); \end{aligned} \right.$$

posons $\lambda = i \sin i\beta$, paramètre réel, nous obtenons

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 2h\lambda \sin\alpha [(3 + 4\lambda^2) \cos 2\alpha + (3 + 2\lambda^2)], \\ y &= 2h\lambda \sin\alpha [(3 + 4\lambda^2) \cos 2\alpha - (3 + 2\lambda^2)], \\ z &= 3h(1 + 2\lambda^2) \cos 2\alpha. \end{aligned} \right.$$

Ces expressions montrent que la surface minima obtenue n'est autre que celle qu'on déduit de la congruence isotrope formée par les génératrices rectilignes d'une famille de Paraboloïdes homofocaux.

Ceux-ci étant rapportés au milieu O du segment focal pris comme axe des y, leur équation générale s'écrit

$$\frac{x^2}{\sin^2\alpha} - \frac{z^2}{\cos^2\alpha} = 8h(y - h\cos 2\alpha),$$

h est la demi-longueur du segment et α un paramètre variable. Ces surfaces étant inscrites dans une même développante isotrope, une génératrice est à l'intersection de deux plans tangents isotropes.

Si l'on détermine l'enveloppe du plan moyen de la congruence isotrope formée par ces génératrices, on trouve précisément les formules précédentes (¹).

En prenant $F(\varphi) = h\cos 2\varphi$, on obtiendrait l'élassoïde conjugué (M') dérivé des paraboloïdes homofocaux.

CHAPITRE II.

11. Soit l'équation d'une surface en coordonnées tangentielles, à laquelle nous adjoignons l'équation de l'ombilical,

$$\Phi(u, v, w, p) = 0, \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 0;$$

nous déterminons ainsi une développable isotrope dépendant d'une fonction Φ. Deux plans tangents quelconques à deux développables isotropes (A) et (B) se coupent suivant une droite D qui dépend de deux paramètres. La congruence isotrope formée par les droites D dépend de deux fonctions arbitraires. La détermination des réseaux isothermes de la sphère dépend, elle aussi, de deux fonctions arbitraires. Nous allons montrer qu'à chaque représentation isothermique de la sphère on peut faire correspondre un couple de congruences isotropes auxquelles correspondent un couple de surfaces minima conjuguées.

Nous aurons à utiliser les formules relatives au trièdre mobile assujetti à la sphère de rayon unité, prise comme surface de référence. Rappelons brièvement l'établissement de ces formules :

— Un point quelconque M de la sphère est déterminé par un système orthogonal de courbes coordonnées (u) et (v) (²). Nous considérons

(¹) RIBAUCOUR, Mémoire cité, p. 206.

(²) La courbe (u) correspond à u variable et v constant.

le trièdre positif formé par la normale extérieure MN $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, la tangente à la première courbe MT $(\beta_1\beta_2\beta_3)$ et la tangente à la deuxième courbe coordonnée MS $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$.

Les neuf cosinus directeurs qui déterminent la position de ce trièdre mobile satisfont aux relations

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}=a\beta,\qquad \frac{\partial\alpha_1}{\partial u}=a\beta_1,\qquad \frac{\partial\alpha_2}{\partial u}=a\beta_2,$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial v}=b\gamma,\qquad \frac{\partial\alpha_1}{\partial v}=b\gamma_1,\qquad \frac{\partial\alpha_2}{\partial v}=b\gamma_2;$$

a et b sont des fonctions (u, v) qui fixent la forme de l'élément linéaire

$$d\sigma^2=a^2du^2+b^2dv^2.$$

Si l'on exprime que l'accélération sur la courbe (u) est située dans le plan $M\alpha\gamma$ perpendiculaire à MT, on trouve les égalités

$$\frac{\partial\beta}{\partial u}=-a\alpha-m\gamma,\qquad \frac{\partial\beta_1}{\partial u}=-a\alpha_1-m\gamma_1,\qquad \frac{\partial\beta_2}{\partial u}=-a\alpha_2-m\gamma_2,$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial u}=m\beta\qquad \frac{\partial\gamma_1}{\partial u}=m\beta_1\qquad \frac{\partial\gamma_2}{\partial u}=m\beta_2.$$

Relativement à la courbe (v), on aura six équations analogues. Écrivant que deux expressions, soit de $\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}$, soit de $\frac{\partial^2\beta}{\partial u\,\partial v}$, sont identiques, on trouvera les trois équations de Codazzi, où entrent les nouvelles fonctions m et n, correspondant aux rotations instantanées.

A chaque formule contenant α, β ou γ, on peut en ajouter deux autres obtenues par permutation tournante; de sorte que nous pourrons écrire toutes les relations relatives au trièdre mobile de la sphère, dans le Tableau suivant :

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial u}=a\beta, & \dfrac{\partial\beta}{\partial u}=-a\alpha-m\gamma, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial u}=m\beta, \\[2mm] \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}=b\gamma, & \dfrac{\partial\beta}{\partial v}=n\gamma\qquad, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial v}=-b\alpha-n\beta; \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial v}=bm, \qquad \dfrac{\partial b}{\partial u}=an, \\[2mm] \dfrac{\partial n}{\partial u}+\dfrac{\partial m}{\partial v}+ab=0. \end{cases}$$

12. Si nous supposons que le réseau des courbes u et v soit un réseau isotherme, nous aurons au point

$$\mathrm{M}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3), \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,$$
$$d\sigma^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2),$$

λ fonction déterminée de u et v, qui caractérise le système isotherme. Posons $a = b = \lambda = e^\varphi$, les relations (13) s'écrivent :

$$(14) \qquad m = \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad n = \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + e^{2\varphi} = 0.$$

En faisant le changement de variables

$$u' = u + iv, \qquad v' = u - iv,$$

l'équation aux dérivées partielles (14) prend la forme

$$(15) \qquad 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\, \partial v} + e^{2\varphi} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2(\log\lambda^2)}{\partial u\, \partial v} + \frac{\lambda^2}{2} = 0.$$

Elle peut s'intégrer avec deux fonctions arbitraires $\mathrm{U}(u)$ et $\mathrm{V}(v)$, dont on désigne les dérivées par U' et V' ; on a

$$\lambda^2 = \frac{-4\mathrm{U}'\mathrm{V}'}{(\mathrm{U}+\mathrm{V})^2}.$$

Portons, sur la tangente $\mathrm{M}\beta$ à la courbe (u), une longueur $\mathrm{MI} = \lambda$, et menons ID parallèle à la normale $\mathrm{M}\alpha$; la droite D, ainsi construite, engendre une congruence isotrope :

En effet, les coordonnées du point I sont

$$\alpha_1 + e^\varphi\beta_1, \qquad \alpha_2 + e^\varphi\beta_2, \qquad \alpha_3 + e^\varphi\beta_3$$

et les coordonnées $(x_1 x_2 x_3)$ d'un point quelconque de la droite D s'expriment sous forme abrégée par l'égalité

$$(\mathrm{F}) \qquad x = \alpha + e^\varphi\beta + \rho\alpha = e^\varphi\beta + r\alpha.$$

Nous en déduisons, à l'aide des formules (12)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \alpha\left(\frac{\partial r}{\partial u} - e^{2\varphi}\right) + \beta\left(e^\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} + re^\varphi\right) - \gamma e^\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \alpha\frac{\partial r}{\partial v} + \beta e^\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \gamma\left(e^\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u} + re^\varphi\right). \end{aligned}\right.$$

Ces expressions déterminent deux directions de tangentes au point F pris sur la droite D. Si le point F est un foyer, ces directions devront être situées dans le plan tangent à la focale de la congruence. Ce plan contient la droite D dont la direction est Mα; il faudra donc que les directions $\left[\frac{\partial x}{\partial u}\right]$, $\left[\frac{\partial x}{\partial v}\right]$ et $[\alpha]$ soient dans un même plan; ce qui exige que les coefficients de β et γ dans les expressions précédentes, soient proportionnels. On devra donc avoir

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}+r}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}=\frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}+r};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}+r=\pm i\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Il en résulte que la droite D engendre une congruence dont les focales sont déterminées par les expressions de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u}=k\alpha+h\,(\beta\pm i\gamma),$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}=k_1\alpha+h_1\,(\beta\pm i\gamma);$$

c'est une congruence isotrope.

Les coordonnées des foyers F_1 et F_2 de cette congruence sont données par les égalités

$$x=(\alpha+e^{\varphi}\beta)+\rho\alpha\quad\left\{\begin{array}{ll} 1+\rho_1=i\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \varphi}{\partial u} & (\mathrm{IF}_1=\rho_1),\\ 1+\rho_2=-i\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \varphi}{\partial u} & (\mathrm{IF}_2=\rho_2).\end{array}\right.$$

Le point central sur la droite D est à la distance du point I $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$; il a donc pour coordonnées

$$x=\alpha+e^{\varphi}\beta-\left(1+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)x=e^{\varphi}\beta-\alpha\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Le plan moyen passe par ce point et est normal à la droite D; il aura donc pour équation

$$(16)\qquad \alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\alpha_3 X_3+\frac{\partial \varphi}{\partial u}=0.$$

Ce plan enveloppe la surface minima déduite de la congruence; sa distance au centre de la sphère est

$$p = -\frac{\partial\varphi}{\partial u} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}.$$

Si nous considérons la congruence isotrope obtenue, en portant sur la tangente $M\gamma$, à la courbe (v), une longueur $MI' = \lambda$ et menant $I'D'$ parallèle à la normale $M\alpha$, nous obtiendrons une deuxième surface minima, enveloppe du plan qui a pour équation

$$(17) \qquad \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0;$$

en faisant tourner de 90° l'angle $M\beta\gamma$ formé par les tangentes aux courbes coordonnées, on ne change pas la forme de l'élément linéaire.

Il en résulte que les deux surfaces minima (16) et (17) définies en coordonnées tangentielles se correspondent par parallélisme des plans tangents et sont applicables l'une sur l'autre. Ce sont deux élassoïdes conjugués.

15. *Détermination des surfaces minima admettant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure un réseau isotherme déterminé.* — Rapportons une surface (M_1) à ses lignes de courbure (u) et (v); les directions $M_1\beta_1$ et $M_1\gamma_1$ de leurs tangentes restent parallèles aux directions $M\beta$ et $M\gamma$ des tangentes aux représentations sphériques des courbes coordonnées; le trièdre mobile $M_1\alpha_1\beta_1\gamma_1$ sur la surface est donc équipollent au trièdre $M\alpha\beta\gamma$ qui lui correspond sur la sphère.

Désignons par (x, x_1, x_2) les coordonnées du point M_1; nous devrons avoir les relations

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h\beta, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = h\beta_1, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial u} = h\beta_2,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = l\gamma, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = l\gamma_1, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial v} = l\gamma_2,$$

h et l étant deux fonctions de u et v, qui doivent satisfaire à deux conditions, exprimant que les deux expressions de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$, déduites des formules précédentes, sont les mêmes; en se reportant aux formules (12), on trouve l'égalité

$$hn\gamma + \beta \frac{\partial h}{\partial v} = lm\beta + \gamma \frac{dl}{du},$$

qui doit être satisfaite, quelles que soient les valeurs de β et γ ; d'où les conditions

$$\frac{\partial h}{\partial v} = lm, \qquad \frac{\partial l}{\partial u} = hn. \tag{18}$$

Les fonctions h et l étant choisies de manière à vérifier ces relations, nous pourrons exprimer les coordonnées du point M_1 par des quadratures

$$(M_1) \quad \begin{cases} x = \int h\beta\, du + l\gamma\, dv, \\ x_1 = \int h\beta_1\, du + l\gamma_1\, dv, \\ x_2 = \int h\beta_2\, du + l\gamma_2\, dv. \end{cases}$$

La surface (M_1) est rapportée à ses lignes de courbure; les coordonnées de l'un des centres de courbure sont

$$y = x + R_1\alpha,$$

et nous avons

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + R_1\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \alpha\frac{\partial R_1}{\partial u} = h\beta + R_1 \alpha\beta + \alpha\frac{\partial R_1}{\partial u}.$$

Cette direction $\left[\frac{\partial y}{\partial u}\right]$ doit être la même que celle de la normale $M\alpha_1$, ce qui exige que l'on ait

$$aR_1 + h = 0.$$

On a donc les valeurs des deux rayons de courbure

$$R_1 = \frac{-h}{a}, \quad R_2 = \frac{-l}{b}.$$

Donnons-nous comme image sphérique des lignes de courbure un système isotherme,

$$a = b = e^{\varphi}, \quad d\sigma^2 = e^{2\varphi}(du^2 + dv^2),$$

φ satisfaisant aux relations (14).

Si nous posons

$$h = e^{-\varphi}, \quad l = e^{-\varphi},$$

les conditions (18) seront vérifiées; et nous obtiendrons une surface (M_1) ayant pour rayons de courbure

$$R_1 = -e^{-2\varphi}, \qquad R_2 = e^{-2\varphi}.$$

Ce sera une surface minima.

Elle dépendra de deux fonctions arbitraires correspondant à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (14). La recherche générale des surfaces minima est encore ramenée à celle des systèmes isothermes de la sphère. L'intérêt de cette méthode est que, dans chaque cas particulier, la surface obtenue est rapportée à ses lignes de courbure.

14. En général, la représentation isothermique est donnée sous la forme

$$d\sigma^2 = \lambda^2(U^2 du^2 + V^2 dv^2),$$

U et V étant de simples fonctions de u et v. Posons

$$a = e^\theta U, \qquad b = e^\theta V, \qquad d\sigma^2 = e^{2\theta}(U^2 du^2 + V^2 dv^2).$$

Si nous nous reportons aux formules (13), nous obtenons

$$m = \frac{U}{V}\frac{\partial\theta}{\partial v}, \qquad n = \frac{V}{U}\frac{\partial\theta}{\partial u}.$$

θ doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{U'}{U^3}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{V'}{V^3}\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{1}{U^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + e^{2\theta}.$$

Posons, avec deux autres fonctions $U_1(u)$ et $V_1(v)$,

$$h = e^{-\theta}U_1, \qquad l = -e^{-\theta}V_1,$$

les conditions (18) seront satisfaites si l'on a

$$U_1 V = U V_1,$$

En conséquence, nous prendrons les valeurs suivantes :

$$h = e^{-\theta}U, \qquad l = -e^{-\theta}V;$$

nous en déduirons, pour la valeur des rayons de courbure,

$$R_1 = \frac{-h}{a} = -e^{-2\theta}, \qquad R_2 = \frac{-l}{b} = e^{2\theta}.$$

La surface correspondante est une surface minima dont les coordonnées seront exprimées par les quadratures

$$(19) \qquad \begin{cases} x = \int e^{-\theta}(\beta\, U\, du - \gamma\, V\, dv), \\ x_1 = \int e^{-\theta}(\beta_1 U\, du - \gamma_1 V\, dv), \\ x_2 = \int e^{-\theta}(\beta_2 U\, du - \gamma_2 V\, dv). \end{cases}$$

Connaissant le système particulier des courbes (u) et (v) sur la sphère, on connaît les cosinus directeurs des tangentes à ces courbes en fonction des paramètres u et v; la connaissance du $d\sigma^2$ nous donne les expressions de $e^{-\theta}$, U et V, à l'aide des mêmes paramètres.

En effectuant les quadratures, quand cela est possible, avec des fonctions analytiques, nous aurons une surface minima bien déterminée, qui admet pour représentation sphérique de ses lignes de courbure un réseau isotherme donné.

15. Application. — *Surface minima dont l'image sphérique de ses lignes de courbure est la même que celle des lignes de courbure d'une quadrique.* — Donnons-nous une quadrique à centre, ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0.$$

Ses lignes de courbure sont déterminées par un double système de quadriques homofocales, qui, avec la quadrique donnée, forment un système triple orthogonal.

Désignons par u et v les paramètres de ces lignes de courbure, λ un paramètre caractéristique de chaque quadrique de la famille monofocale; nous avons l'identité

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} - 1 \equiv \frac{-\lambda(\lambda-u)(\lambda-v)}{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)};$$

d'où l'on déduit

$$(20)\qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{a(a+u)(a+v)}{(a-b)(a-c)}, \\ y^2 = \dfrac{b(b+u)(b+v)}{(b-c)(b-a)}, \\ z^2 = \dfrac{c(c+u)(c+v)}{(c-a)(c-b)}. \end{cases}$$

Formons le carré de l'élément linéaire. Nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{x}{2(a+u)}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y}{2(b+u)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{z}{2(c+u)}.$$

Prenons la dérivée de l'identité en λ, dont nous sommes partis; nous en déduisons

$$\mathbf{S}\frac{x^2}{(a+u)^2} = \left[\frac{\lambda(\lambda-v)\dfrac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda-u)}{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)}\right] \qquad \text{pour } \lambda = u.$$

On obtient ainsi

$$\mathbf{S}\frac{x^2}{(a+u)^2} = \frac{u(u-v)}{(a+u)(b+u)(c+u)},$$
$$\mathbf{S}\frac{x^2}{(a+v)^2} = \frac{v(u-v)}{(a+v)(b+v)(c+v)}.$$

D'autre part, les normales aux quadriques ($\lambda = u, \lambda = v$) étant rectangulaires, l'expression

$$\mathbf{S}\frac{x^2}{(a+u)(u+v)} = 0;$$

et l'élément linéaire a la forme isotherme

$$(21)\qquad ds^2 = \frac{(u-v)}{4}\left[\frac{u\,du^2}{(a+u)(b+u)(c+u)} - \frac{v\,dv^2}{(a+v)(b+v)(c+v)}\right].$$

Nous pouvons en déduire le $d\sigma^2$ de la représentation sphérique :

Nous avons pour les cosinus directeurs de la normale

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{x}{a\rho}, \qquad \alpha_1 = \dfrac{y}{b\rho}, \qquad \alpha_2 = \dfrac{z}{c\rho}, \\ \rho^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}. \end{cases}$$

$$\rho^2 = \mathbf{S}\frac{(a+u)(a+v)}{a(a-b)(a-c)} = \frac{uv}{abc}.$$

Nous avons ensuite

$$\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \rho}{\partial u}}{\rho^2} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{x}{2u}}{\rho}.$$

Remplaçons $\frac{\partial x}{\partial u}$ par son expression précédemment écrite,

$$(22) \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{-x}{2\sqrt{\mathrm{A}uv}} \cdot \frac{1}{u(a+u)}, \qquad \mathrm{A} = \frac{1}{abc}.$$

Le rayon de courbure R_1 vérifie l'équation

$$\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{R}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0,$$

ou bien

$$\frac{x}{2(a+u)} - \frac{\mathrm{R}_1 x}{2u(a+u)\sqrt{\mathrm{A}uv}} = 0.$$

On aura donc

$$\mathrm{R}_2^1 = \mathrm{A}u^3 v \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}_2^2 = \mathrm{A}v^3 u.$$

Le calcul des rayons de courbure nous permet d'obtenir

$$d\sigma^2 = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}_1^2} du^2 + \frac{\mathrm{G}^2}{\mathrm{R}_1^2} dv^2,$$

sachant que $ds^2 = \mathrm{E}du^2 + \mathrm{G}2dv^2$.

De la formule (21) nous déduisons, pour le carré de l'élément linéaire de la sphère,

$$(23) \qquad d\sigma^2 = \frac{abc(u-v)}{4uv}\left[\frac{du^2}{u(a+u)(b+u)(c+u)} - \frac{dv^2}{v(a+v)(b+v)(c+v)}\right].$$

Appliquons les formules (19); nous avons, avec une constante d'homogénéité k,

$$e^{2\theta} = \frac{abc}{4k^2}\frac{u-v}{uv},$$

$$\mathrm{U}\sqrt{u(a+u)(b+u)(c+u)} = k.$$

Nous avons aussi, en utilisant la première formule (12) et l'expression (21),

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \sqrt{\frac{u-v}{\mathrm{A}uv}} \frac{\beta}{\sqrt{u(a+u)(b+u)(c+u)}};$$

d'après la formule (22), il vient

$$\frac{-x}{\sqrt{u(a+u)}} = \frac{\beta.\sqrt{u-v}}{\sqrt{(b+u)(c+u)}}$$

et

$$\beta = \sqrt{\frac{a}{(a-b)(a-c)}}\sqrt{\frac{(b+u)(c+u)(a+v)}{u^2-uv}}.$$

Nous pouvons donc écrire les valeurs de $U\beta$ et les valeurs analogues de $V\gamma$

$$\beta U = \sqrt{\frac{a}{(a-b)(a-c)}}\,\frac{k}{u\sqrt{u-v}}\sqrt{\frac{a+v}{a+u}},$$
$$\gamma U = \sqrt{\frac{a}{(a-b)(a-c)}}\,\frac{k}{v\sqrt{v-u}}\sqrt{\frac{a+u}{a+v}},$$

De sorte que les coordonnées de la surface minima cherchée seront données par l'expression triple

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= 2\int \frac{A_1\sqrt{uv}}{(u-v)}\sqrt{\frac{a+v}{a+u}}\,\frac{du}{u} - \sqrt{\frac{a+u}{a+v}}\,\frac{dv}{v},\\ A_1^2 &= \frac{k^3}{bc(a-b)(a-c)}. \end{aligned}\right.$$

Pour effectuer ces quadratures, nous devons faire intervenir les fonctions elliptiques.

Déterminons l'élément linéaire ds^2 ; nous avons

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \frac{4uv}{u^2(u-v)^2}\,\frac{A_1^2(a+v)}{a+u},$$

$$\sum \frac{A_1^2 a}{a+u} = \sum \frac{A_1^2(a+u-u)}{a+u} = -u\sum \frac{A_1^2}{a+u}, \qquad \sum A_1^2 = 0.$$

Le coefficient de du^2 dans ds^2 est donc

$$\frac{4uv}{u^2(u-v)^2}\,(v-u)\sum\frac{A_1^2}{a+u}$$

et

$$\sum\frac{A_1^2}{a+u} = \frac{-u\sum a(b^2-c^2)}{abc(b-c)(c-a)(a-b).(a+u)(b+u)(c+u)},$$

Nous aurons, par analogie, le coefficient de dv^2 ; et l'élément linéaire de la surface maxima considérée aura la forme isothermique

$$ds^2 = \frac{4\mathrm{H}uv}{abc(u-v)}\left[\frac{du^2}{u(a+u)(b+u)(c+u)} - \frac{dv^2}{v(a+v)(b+v)(c+v)}\right],$$

$$\mathrm{H} = \frac{\sum a(b^2-c^2)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Son rayon de courbure s'obtiendra par comparaison avec la forme (23) de la représentation sphérique; on aura

$$\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{H}}\,\frac{4uv}{abc(u-v)} = \sqrt{\mathrm{H}}\,e^{-2\theta}.$$

CHAPITRE III.

Correspondance par orthogonalité des éléments.

16. *Théorème de Ribaucour.* — Soient deux surfaces (A) et (B) qui se correspondent par orthogonalité des éléments. Par le point B de la deuxième on mène une droite D parallèle à la normale au point correspondant A de la première surface :

1° La surface (B) est la surface moyenne de la congruence formée par les droites D; 2° les plans focaux sont perpendiculaires aux directions asymptotiques de la surface (A).

Désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3 les cosinus directeurs de la normale An au point de coordonnées (x_1, x_2, x_3). Un point quelconque de la droite D, menée par le point $\mathrm{B}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)$ parallèlement à An, aura pour coordonnées

$$\text{(C)} \qquad \mathrm{Y}_1 = \mathrm{X}_1 + \rho\xi_1, \qquad \mathrm{Y}_2 = \mathrm{X}_2 + \rho\xi_2, \qquad \mathrm{Y}_3 = \mathrm{X}_3 + \rho\xi_3.$$

Nous rapportons la surface (A) à ses directions asymptotiques, à l'aide des formules de Lelieuvre

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \xi_2\frac{\partial \xi_3}{\partial u} - \xi_3\frac{\partial \xi_2}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -\xi_2\frac{\partial \xi_3}{\partial v} + \xi_3\frac{\partial \xi_2}{\partial v},$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 représentent trois solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v} = \alpha\lambda.$$

Si l'on prend une quatrième solution déterminée λ de la même équation, on peut définir une surface (B) qui correspond à la surface (A) par orthogonalité des éléments, à l'aide des formules

$$(B) \qquad \frac{\partial X_1}{\partial u} = \lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial u} - \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

Lorsque le point A varie sur la courbe (u), le point C décrit une certaine courbe dont la tangente est

$$\frac{\partial Y_1}{\partial u} = \frac{\partial X_1}{\partial u} + \rho \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \xi_1 \frac{\partial \rho}{\partial u},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\partial Y_1}{\partial u} = (\lambda + \rho) \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \xi_1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right);$$

si l'on choisit la valeur $\rho = -\lambda$, la direction de cette tangente sera précisément celle de la droite D et le point C sera un foyer de la congruence engendrée par cette droite. Dans ce cas

$$\frac{\partial Y_1}{\partial u} = -2 \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial u};$$

et les coordonnées du foyer F_1 seront

$$(F_1) \qquad Y_1 = X_1 - \lambda \xi_1, \qquad Y_2 = X_2 - \lambda \xi_2, \qquad Y_3 = X_3 - \lambda \xi_3.$$

On voit de plus que les premières développables de la congruence correspondent aux asymptotiques (u) de la surface (A). Prenant la développable correspondant à la deuxième asymptotique (v), on trouve que les coordonnées du deuxième foyer de la congruence sont

$$(F_2) \qquad Z_1 = X_1 + \lambda \xi_1, \qquad Z_3 = X_2 + \lambda \xi_2, \qquad Z_3 = X_3 + \lambda \xi_3.$$

Le point central, milieu de $F_1 F_2$, a pour coordonnées

$$\frac{Y_1 + Z_1}{2} = X_1, \qquad \frac{Y_2 + Z_2}{2} = X_2, \qquad \frac{Y_3 + Z_3}{2} = X_3;$$

c'est précisément le point B.

Ainsi, la surface (B) est la surface moyenne, et les courbes décrites sur les focales de la congruence par les foyers F_1 et F_2 correspondent aux lignes asymptotiques de la surface (A).

Le plan tangent au point F_1 à la première focale est déterminé par la droite D et la direction

$$\frac{\partial Y_1}{\partial v} = \frac{\partial X_1}{\partial v} - \lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda} - \xi_1 \frac{\partial \lambda}{\partial v} = -2\lambda \frac{\partial \xi_1}{\partial v}.$$

Il en résulte que les paramètres directeurs de la normale au premier plan focal sont donnés par le Tableau

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} & \frac{\partial \xi_2}{\partial v} & \frac{\partial \xi_3}{\partial v} \end{vmatrix};$$

ils sont proportionnels à

$$\frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial v},$$

c'est-à-dire aux coefficients directeurs de la deuxième ligne asymptotiques : Les images sphériques des asymptotiques de la surface (A) sont aussi les images sphériques principales de la congruence. Une démonstration géométrique de cette propriété est donnée par Darboux [1].

17. Prenons pour surface (A) une sphère de rayon 1; les lignes asymptotiques sont les génératrices de la sphère. Ce sont des lignes isotropes; le centre O est le pôle du plan de l'infini, et un plan qui passe par la normale OA et une génératrice est un plan isotrope. La droite D, parallèle à la normale, est comme celle-ci l'intersection de deux plans isotropes; elle engendre une congruence isotrope. Inversement, la surface moyenne d'une congruence isotrope correspond, par orthogonalité des éléments, à la sphère qui en est la représentation sphérique.

Dans ce cas particulier, nous avons les formules suivantes :

Les coordonnées du point A(α), peuvent s'écrire

$$(A) \qquad \alpha_1 = \frac{u+v}{1+uv}, \qquad \alpha_2 = \frac{i(u-v)}{1+uv}, \qquad \alpha_3 = \frac{1-uv}{1+uv}$$

et

$$\frac{\xi_1}{\alpha_1} = \frac{\xi_2}{\alpha_2} = \frac{\xi_3}{\alpha_3} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}.$$

On constate facilement que les coordonnées α_1, α_2, α_3, vérifient

---

[1] *Leçons sur la Théorie des surfaces*, p. 861.

l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathrm{M}) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{-2}{(1+uv)^2}\,\theta;$$

et l'on peut, dans les formules du paragraphe précédent, remplacer les paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3 par les cosinus directeurs α_1, α_2, α_3.

La congruence formée par les droites D est une congruence isotrope qui dépend de l'équation du deuxième ordre (M); sa surface moyenne (B) sera déterminée par les formules

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{\partial X_1}{\partial u} = \theta\frac{\partial\alpha_1}{\partial u} - \alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\theta\frac{\partial\alpha_1}{\partial v} + \alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial v};$$

θ est une solution de l'équation (M) qui caractérise la congruence isotrope. Le plan moyen de celle-ci enveloppe une surface minima; la distance de ce plan au centre de la sphère est précisément égale à la valeur θ choisie.

En effet, les expressions (B) nous donnent

$$S\alpha\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{\partial\theta}{\partial u}, \qquad S\alpha\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial v};$$

il en résulte

$$2S\alpha\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} + S\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + S\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = 0.$$

La condition générale d'orthogonalité nous montre que l'on doit avoir

$$S\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right) = 0$$

et, par suite,

$$S\alpha\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Le plan moyen passant par le point B et perpendiculaire à la normale OA est placé à la distance du point O

$$p = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} = SX\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v} = \frac{-2}{(1+uv)^2}(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3);$$

on a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} = \frac{-2p}{(1+uv)^2}, \qquad p = \theta.$$

Ainsi, à chaque solution particulière de l'équation (M) correspond une surface minima définie en coordonnées tangentielles $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, p)$.

18. Nous avions trouvé (**12**) l'équation (16) qui représente en coordonnées tangentielles une surface minima correspondant à la représentation sphérique

$$d\sigma^2 = e^{2\varphi}(du^2 + dv^2)$$

Changeant u en $u + iv$ et v en $u - iv$, cette expression prend la forme

$$d\sigma^2 = e^{2\varphi}(du.dv),$$

et le plan tangent à la surface minima prend la forme

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0,$$

φ étant une solution de l'équation (15).

En posant

$$e^{\varphi} = \frac{2}{1 - uv},$$

on choisit comme système isotherme celui qui est formé par les génératrices de la sphère. Et la surface minima correspondante est telle que la distance de l'origine O au plan tangent

$$p = \theta = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right).$$

On en déduit

$$-\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\,\partial v} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial u\,\partial v^2}.$$

De l'équation (15) on déduit

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v} + \frac{\partial^3\varphi}{\partial u\,\partial v^2} = -\frac{e^{2\varphi}}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right);$$

d'où

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2\partial v} = -\frac{e^{2\varphi}}{2}\theta = \frac{-2}{(1 + uv)^2}\theta.$$

Nous retrouvons ainsi l'équation (M).

A la solution

$$e^{\varphi} = \frac{2}{1 + uv}$$

de l'équation (15) correspond la solution

$$\vartheta = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = \frac{u+v}{1+uv}$$

de l'équation (M). La connaissance de l'intégrale générale de la première nous permettra d'obtenir celle de la seconde. On a

$$e^{2\varphi} = \frac{-f'(u)\varphi'(v)}{[f(u)+f(v)]^2},$$

avec deux fonctions arbitraires; pour

$$f(u) = \frac{1}{u} \qquad \text{et} \qquad \varphi(v) = v,$$

on a la solution particulière

$$e^{2\varphi} = \frac{4}{(1+uv)^2}$$

à laquelle correspond

$$\vartheta = \alpha_1.$$

Pour obtenir la solution générale θ de l'équation (M), on peut se servir des formules de Weierstrass :

Le plan de coordonnées tangentielles (α_1, α_2, α_3, θ) a pour équation

$$(u+v)x + i(u-v)y + (1-uv)z = (1+uv)\theta.$$

Il enveloppe une surface minima qui dépend de l'intégration de l'équation (M), c'est-à-dire de deux fonctions arbitraires. Or, les formules de Weierstrass, qui font intervenir la représentation isotherme de la sphère sous la même forme

$$d\sigma^2 = \frac{4\,du\,dv}{(1+uv)^2},$$

nous donnent la valeur de

$$(u+v)x + i(u-v)y + (1-uv)z = \xi \quad (^1)$$
$$\xi = 2vF(u) + 2uF_1(v) - (1+uv)[F'(u) + F'_1(v)].$$

L'intégrale générale de l'équation (M) est donc, avec les deux

(1) Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, p. 193.

fonctions arbitraires $F(u)$ et $F_1(v)$,

$$\theta = \frac{2}{1+uv}[vF(u)+uF_1(v)] - [F'(u)+F'_1(v)].$$

L'intérêt de cette méthode est de nous donner l'intégration de certaines formes d'équations aux dérivées partielles par des méthodes géométriques.

Ainsi, les formules de Ribaucour se rapportent à la représentation sphérique donnée par l'expression (7); et l'on a

$$\alpha_1 = \frac{-\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}, \qquad \alpha_2 = \frac{\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}{\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}, \qquad \alpha_3 = i\tang\frac{\varphi-\varphi_1}{2};$$

ces trois cosinus directeurs satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathrm{M}_1) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\,\partial\varphi_1} = \frac{-1}{2\cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}\theta,$$

θ étant une solution donnée de cette équation, le plan ayant pour équation

$$-x\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2} + y\cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2} + iz\tang\frac{\varphi-\varphi_1}{2} = \cos\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\cdot\theta,$$

enveloppe une surface minima bien explicitée par les formules de Ribaucour (5).

Il en résulte que l'intégrale générale de l'équation (M_1) peut se mettre sous la forme

$$\theta = \tang\left(i\frac{\varphi-\varphi_1}{2}\right)\times\frac{F(\varphi)-F_1(\varphi_1)}{2} - \frac{F'(\varphi)+F'_1(\varphi_1)}{2}.$$

19. Nous avons vu qu'à toute représentation isotherme de la sphère on peut faire correspondre une congruence isotrope, et par suite une surface minima. Nous allons montrer que, à tout système orthogonal quelconque de courbes (u) et (v) sur la sphère, on peut faire correspondre une congruence isotrope :

Soit $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ un point de la sphère qui correspond par orthogonalité des éléments à la surface (B).

Nous avons les formules

$$(25)\qquad d\sigma^2 = a^2\,du^2 + b^2\,dv^2;$$

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} = a\beta, & \dfrac{\partial\beta}{\partial u} = -a\alpha - m\gamma, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial u} = m\beta, \\[2ex] \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} = b\gamma, & \dfrac{\partial\beta}{\partial v} = n\gamma, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial v} = -b\alpha - n\beta. \end{cases}$$

Aux directions β et γ des courbes coordonnées de la sphère correspondent, sur la surface (B), deux directions perpendiculaires qui seront données par les formules

$$(27)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = h\gamma + e\alpha, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = l\beta + f\alpha.$$

Écrivons que l'on doit avoir

$$\mathrm{S}\beta\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}\gamma\frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

ou bien

$$\mathrm{S}\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{S}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = 0;$$

nous déduisons, d'après la condition générale d'orthogonalité entre les éléments des surfaces (A) et (B),

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{S}[a\beta(l\beta + f\alpha) + b\gamma(h\gamma + e\alpha)] = 0;$$

d'où l'on déduit la condition

$$(28)\qquad al + bh = 0.$$

Écrivons ensuite que les deux expressions de $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$, déduites des formules (27), sont les mêmes; il vient, en tenant compte des égalités fondamentales (26),

$$\alpha\left(-hb + \frac{\partial e}{\partial v}\right) + \beta(-hn) + \gamma\left(\frac{\partial h}{\partial v} + eb\right),$$

$$\equiv \alpha\left(-la + \frac{\partial f}{\partial u}\right) + \beta\left(\frac{\partial l}{\partial u} + fa\right) + \gamma(-lm);$$

ce qui donne les trois nouvelles conditions

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} &-bh+\frac{\partial e}{\partial v}=-al+\frac{\partial f}{\partial u},\\ &\frac{\partial l}{\partial u}+af+nh=0,\\ &\frac{\partial h}{\partial v}+be+ml=0.\end{aligned}\right.$$

Les coefficients h, l, e et f satisfaisant à ces quatre conditions (28) et (29), les formules (27) nous détermineront la surface moyenne (B) d'une congruence formée par les droites D, menées par chaque point B parallèlement à la normale au point correspondant A de la sphère (théorème de Ribaucour).

Nous allons montrer que, même dans ce cas où les courbes coordonnées ne sont pas des lignes isotropes et forment un réseau orthogonal, la congruence des droites D est une congruence isotrope.

Déterminons en effet les foyers de la congruence (D); les coordonnées de l'un d'eux étant exprimées par

$$y=x+\alpha\rho,$$

nous aurons

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\alpha\left(e+\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)+\beta a\rho+\gamma h,$$
$$\frac{\partial y}{\partial v}=\alpha\left(f+\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)+\beta l+\gamma b\rho.$$

Ces directions et la direction α de la droite D doivent être dans un même plan focal; il en résulte que les coefficients de β et γ dans les formules précédentes doivent être proportionnels; ce qui donne la condition

$$\frac{a\rho}{l}=\frac{h}{b\rho},\qquad \text{d'où}\qquad \rho^2=\frac{hl}{ab};$$

tenant compte de la relation (28), on en déduit

$$\frac{h}{al}=\frac{b\rho}{l}=\pm i;$$

c'est bien la détermination des foyers d'une congruence isotrope.

CHAPITRE IV.

Intégration de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles.

20. Nous avons vu qu'à chaque système de projection géographique de la sphère correspond un système de formules déterminant les surfaces minima. La connaissance de celles-ci, qui contiennent deux fonctions arbitraires, nous a permis d'intégrer certaines équations aux dérivées partielles de la forme étudiée par Moutard. D'autres méthodes de recherche permettront d'intégrer certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui déterminent les surfaces minima. Je vais en donner deux exemples correspondant aux formules de Weierstrass et de Ribaucour :

Nous désignerons par (c, c', c'') les cosinus directeurs de la normale en un point $M_1(x, y, z)$ d'une surface minima. Si l'on suppose que x et y soient les variables indépendantes, nous avons la condition de Lagrange

$$\frac{dc}{dx} + \frac{dc'}{dy} = 0, \tag{30}$$

et il faut exprimer que l'expression

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz \tag{31}$$

est une différence exacte.

I. *Projection stéréographique.* — Les coordonnées du point M, image sphérique du point M_1, sont données par les formules

$$c = \sin u \cos v, \qquad c' = \sin u \cos v, \qquad c'' = \cos u.$$

Désignons par $(\alpha - i\beta)$ l'affixe de la projection stéréographique m de ce point vu d'un pôle P ; nous avons

$$\alpha = \rho \cos v, \qquad -\beta = \rho \sin v, \qquad om = \rho = \cot\frac{u}{2}.$$

Le réseau de courbes (α) et (β) est un réseau isotherme formé par les deux familles de cercles orthogonaux passant par les droites Px et Py

parallèles aux axes de coordonnées. L'élément linéaire de la sphère a la forme

$$dv^2 = du^2 + \sin^2 v\, dv^2 = \frac{4(d\alpha^2 + d\beta^2)}{(1+\alpha^2+\beta^2)^2}.$$

Au lieu des variables indépendantes x et y, nous nous proposons de déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface (M_1), en fonction des nouvelles variables α et β.

La condition (30) nous donne l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy} + (\beta^2 - \alpha^2)\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + 2\alpha\beta\left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}\right) = 0.$$

Et si nous effectuons le changement de variables, à l'aide des formules

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{D}\frac{dy}{d\beta}, \qquad \frac{d\beta}{dx} = -\frac{1}{D}\frac{dy}{d\alpha},$$
$$\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{1}{D}\frac{dx}{d\beta}, \qquad \frac{d\beta}{dy} = \frac{1}{D}\frac{dx}{dx},$$

D étant le déterminant fonctionnel, nous avons l'équation caractéristique d'une surface minima :

$$(32) \qquad \frac{dx}{d\alpha} - \frac{dy}{d\beta} + (\alpha^2 - \beta^2)\left(\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dy}{d\beta}\right) + 2\alpha\beta\left(\frac{dx}{d\beta} - \frac{dy}{d\alpha}\right) = 0.$$

Mais la condition (31) devant aussi être satisfaite, nous devrons pouvoir intégrer l'équation

$$(33) \qquad 2\alpha\, dx - 2\beta\, dy + (\alpha^2 + \beta^2 - 1)\, dz = 0.$$

La condition d'intégrabilité nous donne une deuxième équation aux dérivées partielles :

$$(34) \qquad \frac{dx}{d\beta} + \frac{dy}{d\alpha} + (\alpha^2 - \beta^2)\left(\frac{dx}{d\beta} - \frac{dy}{d\alpha}\right) - 2\alpha\beta\left(\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dy}{d\beta}\right) = 0.$$

Nous obtiendrons les surfaces minima algébriques en recherchant les solutions algébriques communes aux deux équations (32) et (34). La coordonnée z s'en déduira par une quadrature, d'après l'équation (33) qui est intégrable.

21. La surface d'Enneper nous donne une solution de la forme

$$x + iy = \frac{3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3}{3} + i\frac{3\beta + 3\alpha^2\beta - \beta^3}{3};$$

ou bien

$$x + iy = -\frac{(\alpha - i\beta)^3}{3} + \frac{\alpha + i\beta}{3};$$

on déduit, pour la coordonnée z et pour l'élément linéaire,

$$z = \alpha^2 - \beta^2,$$
$$ds^2 = (1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 (d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Les courbes (α) et (β) sont les lignes de courbure.

Proposons-nous de rechercher les solutions de la forme plus générale

$$x + iy = \frac{(\alpha - i\beta)^m}{m} - \frac{(\alpha + i\beta)^n}{n}. \tag{35}$$

Pour satisfaire aux équations (32) et (34) nous devons avoir

$$(\alpha - i\beta)^{m-1} + (\alpha + i\beta)^{m-1} = (\alpha - i\beta)^{n+1} + (\alpha + i\beta)^{n+1},$$

d'où

$$m = n + 2.$$

Nous obtenons ainsi, en faisant $n = m - 2$, dans la formule (35), une famille de surfaces comprenant une infinité de surfaces algébriques (m commensurable).

Si l'on substitue aux paramètres α et β les paramètres u et v qui définissent les méridiens et les parallèles de la sphère, on a

$$\alpha - i\beta = \rho(\cos v + i\sin v), \qquad \alpha + i\beta = \rho(\cos v - i\sin v),$$
$$x + iy = \frac{\rho^m}{m}(\cos mv + i\sin mv) - \frac{\rho^{m-2}}{m-2}[\cos(m-2)v - i\sin(m-2)v];$$

on déduit, après l'intégration de

$$dz = -\operatorname{tang} u\,(\cos v\,dx + \sin v\,dy),$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\rho^m}{m}\cos mv - \frac{\rho^{m-2}}{m-2}\cos(m-2)v,\\ y &= \frac{\rho^m}{m}\sin mv + \frac{\rho^{m-2}}{m-2}\sin(m-2)v,\\ z &= \frac{2}{m-1}\rho^{m-1}\cos(m-1)v. \end{aligned}\right.$$

Ce sont les formules de Bour qui définissent les surfaces minima applicables sur une surface de révolution. Elles admettent pour géodésiques les courbes $v = \text{const.}$

Les formules de Weierstrass expriment x, y et z, à l'aide des variables caractéristiques des lignes isotropes

$$\xi = \alpha - i\beta, \qquad \xi_1 = \alpha + i\beta;$$

elles peuvent s'écrire

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} x + iy &= -\xi^2 f''(\xi) + 2\xi f'(\xi) - 2f(\xi) + f_1''(\xi), \\ z &= \xi f''(\xi) - f'(\xi) + \xi_1 f''(\xi_1) - f_1'(\xi_1), \end{aligned} \right.$$

avec les deux fonctions arbitraires imaginaires conjuguées $f(\xi)$ et $f(\xi_1)$. Si l'on prend

$$f(\xi) = \frac{-\xi^m}{m(m-1)(m-2)}, \qquad f'''(\xi) = -1,$$

on obtient l'expression

$$(x + iy) = \frac{(\alpha - i\beta)^m}{m} - \frac{(\alpha + i\beta)^{m-2}}{m-2},$$

qui correspond aux formules de Bour, obtenues par une autre méthode.

L'intérêt de celle-ci est de nous permettre d'obtenir la solution générale avec deux fonctions arbitraires des équations aux dérivées partielles (32) et (34).

Cette solution nous sera donnée par les formules (36); on peut d'ailleurs en donner une vérification.

Remarque. — La solution particulière $f'''(\xi) = 1$ nous donne la surface d'Enneper :

$$\left\{ \begin{aligned} x + iy &= \frac{(\alpha - i\beta)^3}{3} - (\alpha + i\beta), \\ z &= \alpha^3 - \beta^3, \end{aligned} \right.$$

que l'on peut déduire directement des équations aux dérivées partielles où l'on suppose

$$\frac{dx}{d\beta} - \frac{dy}{d\alpha} = 0.$$

La solution particulière qui correspond à $f'''(\xi) = \frac{1}{\xi^2}$ nous donne les égalités

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\alpha\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2},\\ y &= \quad\beta\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2},\\ z &= -2+\log(\alpha^2+\beta^2). \end{aligned}\right.$$

Cette surface n'est autre que l'alysséïde; on pourrait la déduire des équations aux dérivées partielles où l'on suppose

$$\frac{dx}{d\beta}+\frac{dy}{d\alpha}=0.$$

Ainsi les solutions particulières du système des équations (32) et (34) qui correspondent aux conditions

$$\frac{dx}{d\beta}\pm\frac{dy}{d\alpha},$$

nous donnent deux surfaces minima : l'une algébrique (Enneper); l'autre transcendante (caténoïde).

22. II. *Projections de Mercator.* — Au point M de la sphère on fait correspondre dans le plan le point de coordonnées

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+v,\qquad \beta=-\log\cot\frac{u}{2}.$$

A l'aide de ces nouvelles variables α et β, nous avons

$$c=\frac{-\sin\alpha}{\cos i\beta},\qquad c'=\frac{\cos\alpha}{\cos i\beta},\qquad c''=i\,\mathrm{tang}\,i\beta.$$

Les conditions (30) et (31), qui expriment que la surface (M) est une surface minima, nous donnent les deux nouvelles équations aux dérivées partielles :

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha\frac{dy}{d\beta}-\sin\alpha\frac{dx}{d\beta} &= \quad i\,\mathrm{tang}\,i\beta\left(\cos\alpha\frac{dx}{d\alpha}+\sin\alpha\frac{dy}{d\alpha}\right),\\ \cos\alpha\frac{dy}{d\alpha}-\sin\alpha\frac{dx}{d\alpha} &= -i\,\mathrm{tang}\,i\beta\left(\cos\alpha\frac{dx}{d\beta}+\sin\alpha\frac{dy}{d\beta}\right). \end{aligned}\right.$$

Ces équations sont linéaires, et leur intégrale générale, avec deux fonctions arbitraires, nous sera donnée par la formule de Ribaucour :

$$x + iy = \frac{e^{i\varphi}}{2}(-iF' + F'') + \frac{e^{-i\varphi_1}}{x}(-iF'_1 + F''_1);$$
$$\varphi = \alpha + i\beta,$$
$$\varphi_1 = \alpha - i\beta.$$

Les solutions réelles correspondent aux fonctions $F(\varphi)$ et $F_1(\varphi_1)$ imaginaires conjuguées.

La coordonnée z est donnée par l'équation intégrable

$$\sin\alpha\, dx + \cos\alpha\, dy + i \sin i\beta\, dz = 0;$$

et l'on doit trouver

$$z = \frac{i}{2}(F + F'') - \frac{i}{2}(F_1 + F''_1).$$

CHAPITRE V.

Les congruences de courbes normales à une famille d'élassoïdes.

23. Soit une congruence de courbes, définie en coordonnées cartésiennes par les équations différentielles

$$(C_m) \qquad \frac{dx}{c} = \frac{dy}{c'} = \frac{dz}{c''}.$$

Nous désignons par (c, c', c'') les cosinus directeurs de la tangente à la courbe de la congruence, qui passe par un point $M(x, y, z)$; ce sont des fonctions données de ce point qui vérifient la relation

$$H = c^2 + c'^2 + c''^2 - 1 = 0.$$

Choisissons ces trois fonctions de manière à vérifier, quels que soient (x, y, z), la condition

$$I = c\left(\frac{\partial c'}{\partial z} - \frac{\partial c''}{\partial y}\right) + c'\left(\frac{\partial c''}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) + c''\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c'}{\partial x}\right) = 0;$$

l'équation aux différentielles totales

$$E = c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0$$

sera intégrable avec une constante arbitraire, et représentera une famille de surfaces orthogonales à toutes les courbes de la congruence.

Soit S la surface de la famille qui passe au point M; on peut calculer les rayons de courbure R_1 et R_2 de la surface S en ce point par les formules (1)

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} &= -\left(\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c'}{\partial y}+\frac{\partial c''}{\partial z}\right),\\ \frac{1}{R_1R_2} &= \left(\frac{\partial c'}{\partial y}\frac{\partial c''}{\partial z}-\frac{\partial c''}{\partial y}\frac{\partial c'}{\partial z}\right)+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Elles permettent de déterminer soit les surfaces à courbure moyenne nulle, soit les surfaces à courbure totale constante.

Surfaces minima. — Donnons-nous trois fonctions de point c, c', c'', satisfaisant à la relation quadratique H, à la condition d'intégrabilité I et, en outre, à l'identité

$$(39)\qquad \frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c'}{\partial y}+\frac{\partial c''}{\partial z}=0.$$

L'intégration possible de l'équation E nous donnera une famille de surfaces minima.

Nous nous proposons d'étudier les congruences de courbes trajectoires orthogonales de certaines familles de surfaces minima. La congruence générale est déterminée par les formules C_m où c, c', c'' sont trois fonctions de point satisfaisant aux conditions

$$H=0,\qquad I=0\qquad \text{et à l'identité (39).}$$

1° Un élassoïde S, en tous les points duquel la somme des rayons de courbure est nulle, est une surface d'aire minima : Considérons, en effet, une famille d'élassoïdes et deux surfaces voisines S_1 et S_2 passant par un contour fixe; elles limitent un volume v et, si nous désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface limite σ, nous pourrons appliquer la formule relative à la divergence d'un flux,

$$\int_v\left(\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c'}{\partial y}+\frac{\partial c''}{\partial z}\right)d\omega=\int_\sigma(\alpha c+\beta c'+\gamma c'')\,d\sigma.$$

(1) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques* (août 1914).

La première intégrale est nulle, d'après la relation (39), et la seconde se réduit à $S_1 - S_2$.

Il en résulte que si l'on considère une famille de surfaces quelconques passant par un contour, et si l'on écrit que la variation première de l'aire comprise à l'intérieur du contour est nulle, on trouve la condition (39).

Toutes les portions continues d'élassoïdes qui passent par un contour et font partie d'une même famille à un paramètre ont une aire égale.

Parmi toutes les surfaces d'une même famille passant par un contour et ayant des aires continues et finies à l'intérieur de ce contour, celle dont l'aire est minima est un élassoïde.

2° Découpons une surface S en petits rectangles par le double système de ses lignes de courbure; les normales aux extrémités de chacun de ces petits rectangles découpent sur une surface voisine S' un nouvel élément dont l'accroissement d'aire, par rapport au précédent, est égal à

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dn\, d\sigma.$$

Pour une surface d'aire minima, cette expression doit être nulle et l'on retrouve la condition caractéristique des élassoïdes d'avoir une courbure moyenne nulle.

Si l'on prenait une famille de surfaces minima et sur l'une d'elles une décomposition superficielle en petits éléments, chacun de ceux-ci pouvant être circonscrit par un contour rectangulaire formé de lignes de courbure, on pourrait appliquer la formule précédente. Il en résulte qu'un tube orthogonal, formé par les courbes de la congruence orthogonale à une famille de surfaces minima, découpe sur chacune de celles-ci des aires égales.

24. On peut, pour la détermination des surfaces minima, utiliser l'une ou l'autre des propriétés précédentes. Riemann considère la portion de surface qui repose sur un contour fixe et se déforme et se dilate infiniment peu; son aire σ devient $\sigma + \delta\sigma$ et il exprime que la première variation $\delta\sigma = 0$. Il trouve ainsi que la surface S doit satisfaire à la condition

$$\frac{d}{dx}(\sin u \cos v) + \frac{d}{dy}(\sin u \sin v) = 0,$$

u et v étant les paramètres géographiques qui définissent la direction de la normale extérieure au point $M(x, y, z)$.

Le point $m\,(cc'c'')$ est l'image sphérique du point M, et l'on a

$$c = \sin u \cos v, \qquad c' = \sin u \sin v, \qquad c'' = \cos u,$$

v azimut et u colatitude.

Si l'on a pris x et y comme variables indépendantes, la condition trouvée par Riemann s'écrit

$$\frac{dc}{dx} + \frac{dc'}{dy} = 0. \tag{40}$$

La surface S étant donnée sous la forme

$$z = \text{fonct.}\,(x, y), \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

l'égalité précédente n'est autre que celle de Lagrange :

$$\frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{d}{dy}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0.$$

Supposons que l'équation de la surface minima soit $F(x, y, z) = 0$; nous aurons

$$c = n\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad c' = n\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad c'' = n\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$n\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

La relation E est identiquement satisfaite, et nous avons

$$\frac{dc}{dx} = \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{c}{c''}\frac{\partial c}{\partial z}; \qquad \frac{dc'}{dy} = \frac{\partial c'}{\partial y} - \frac{c'}{c''}\frac{\partial c'}{\partial z}.$$

Ajoutons ces deux égalités et tenons compte de la relation différentielle

$$c\frac{\partial c}{\partial z} + c'\frac{\partial c'}{\partial z} + c''\frac{\partial c''}{\partial z} = 0,$$

nous retrouvons la condition (39), obtenue en considérant une surface minima comme faisant partie d'une famille de surfaces orthogonales à une congruence de courbes C_m.

On voit que, si une surface de la famille $F(x, y, z) = \text{const.}$ jouit de la propriété d'aire minima, toutes les autres de la même famille sont aussi des surfaces minima.

Si l'on pose

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$X_x = \frac{\partial X}{\partial x}, \qquad \ldots, \qquad Y_x = \frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \ldots, \qquad Z_x = \frac{\partial Z}{\partial x} \qquad \ldots,$$

la condition (39) pourra s'écrire

$$(41) \qquad \Sigma X^2 (Y_y + Z_z) - \Sigma YZ (Y_z + Z_y) = 0.$$

Nous utiliserons dans la recherche des surfaces minima les plus simples l'une des formules (39), (40) ou (41).

25. *Surface de Scherk.* — En prenant x et y comme variables indépendantes, le choix de la congruence C_m, qui se présente naturellement à l'esprit, consiste à poser

$$\frac{c}{f(x)} = \frac{c'}{\varphi(y)} = \frac{c''}{1}.$$

L'équation E est tout de suite intégrée et donne

$$z = F(x) + F(y).$$

Formons la condition (40) qui s'applique au cas où l'on envisage z comme fonction explicite de x et y; nous trouvons, en tenant compte de la relation H, et après simplification,

$$(1 + f^2)\frac{d\varphi}{dy} + (1 + \varphi^2)\frac{df}{dx} = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\frac{df}{dx}}{1 + f^2_{(x)}} + \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{1 + \varphi^2_{(y)}} = 0.$$

Pour satisfaire identiquement à cette égalité, il faudra poser

$$\frac{df}{dx} = a(1 + f^2), \qquad \frac{d\varphi}{dy} = -a(1 + \varphi^2),$$

a étant une constante. Il en résulte les expressions

$$f = -\cot ax, \qquad \varphi = \cot ay$$

et, par suite,

$$dz = (\cot ax)\,dx - (\cot ay)\,dy;$$

d'où, en intégrant

$$e^{az} = \frac{\sin ax}{\sin ay} \quad \text{(Scherk)};$$

on voit que c'est la seule surface minima qui satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

a étant un paramètre, nous avons une famille d'élassoïdes semblables. La congruence (C_m) correspondante est déterminée par les équations

$$\frac{dx}{-\cot ax} = \frac{dy}{\cot a\varphi} = \frac{dz}{\sqrt{1 - \cot^2 ax - \cot^2 ay}}.$$

Toutes les courbes de cette congruence sont orthogonales aux élassoïdes de Scherk, déduits de l'un d'eux par une translation parallèle à Oz.

L'étude de cette congruence comme celle des congruences (C_m) qui suivront ne peut être faite dans ce travail d'ensemble; elle fera l'objet de nouvelles recherches. On voit tout de suite une intégrale

$$\frac{\cos a\varphi}{\cos ax} = \text{const.};$$

la deuxième s'en déduirait par quadrature en substituant, dans l'expression du radical, $\cot ay$ par sa valeur en fonction de $\cot ax$, déduite de la relation précédente.

26. *Surface minima réglée.* — Considérons toutes les courbes (C) telles que la tangente en un point M soit dans un plan parallèle à l'axe Oz et que son inclinaison sur cet axe ne dépende que de la distance du point M à l'axe. Les cosinus directeurs de la tangente MT pourront s'écrire

$$c = \frac{ay}{f(\rho)}, \qquad c' = \frac{-ax}{f(\rho)}, \qquad c'' = \frac{\sqrt{f^2 - a^2\rho^2}}{f(\rho)}, \qquad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

La relation (39) est toujours satisfaite; de sorte que l'ensemble des courbes (C) pourra, par le choix convenable de la fonction indéterminée $f(\rho)$, former une congruence (C_m). Il suffit d'exprimer que la condition d'intégrabilité $I = 0$ est réalisée; on trouve ainsi l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d.f^2}{d\rho} = \frac{4}{\rho} f^2 - 2a^2\rho;$$

On en déduit

$$f(\rho) = \rho\sqrt{a^2 + m^2\rho^2}.$$

La famille de surface minima correspondante est donnée par l'intégration de l'expression E, qui donne

$$mz = a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + \text{const}.$$

Elle représente un hélicoïde gauche à plan directeur ayant pour axe Oz.

Une courbe (γ) orthogonale à une courbe (C) vérifie la condition différentielle

$$a\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} + \frac{\sqrt{f^2 - a^2\rho^2}}{\rho^2}dz = 0,$$

qui peut toujours s'intégrer à l'aide d'une fonction arbitraire,

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} \Phi(z) = a + \operatorname{arc\,tang} \dfrac{y}{x}, \\ \Phi'(z) = \dfrac{\sqrt{f^2 - a^2\rho^2}}{\rho^2}. \end{cases}$$

Si l'on écrit que la condition I est satisfaite, on trouve, d'après ce qui précède, qu'il faut prendre $\Phi'(z) = m$. Ainsi les courbes (γ) forment un ensemble minima dépendant d'une fonction arbitraire; elles ne pourront engendrer une surface minima que si la fonction Φ a la forme linéaire en z. Dans ce cas, nous avons une double infinité de courbes (γ_m) déterminant une famille de surfaces minima réglées et trajectoires orthogonales des courbes d'une congruence (C_m).

Celle-ci sera déterminée par les équations différentielles

$$\frac{dx}{ay} = \frac{dy}{-ax} = \frac{dz}{m\rho^2},$$

d'où l'on déduit facilement

$$mz + a - \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} = \text{const.}, \qquad x^2 + y^2 = \text{const}.$$

Ces équations représentent des hélices de même pas, tracées sur des cylindres de révolution d'axe Oz.

Si l'on enroule sur un cylindre un réseau plan formé de droites rectangulaires, on obtient un système de courbes γ_m et C_m. En prenant les hélices γ_m de même pas, placées sur des cylindres différents, on engendre une surface minima réglée.

La congruence (C_m), formée d'hélices de même pas, ne présente rien de particulier.

Remarquons que, si l'on fait tourner autour de Oz un hélicoïde gauche à plan directeur, ou surface de vis à filet carré, la surface coïncide avec elle-même et la famille de surfaces minima qui résulte de la translation de l'une d'elles, suivant Oz, donne la multiplication des spires.

Rappelons que la surface de vis à filet carré est la seule surface minima réglée (Catalan).

C'est aussi la seule surface minima réelle qui puisse coïncider avec la surface moyenne d'une congruence isotrope (Ribaucour).

27. *Surface minima de révolution*. — Prenons l'axe de révolution pour axe des x; la normale MN au point $M(xyz)$ a ses cosinus directeurs proportionnels à $(x-\xi, y, z)$; la sous-normale $PN = \xi - x$ est une fonction de l'ordonnée $PM = \rho\sqrt{y^2+z^2}$.

Cette fonction dépend de la méridienne que nous nous proposons de déterminer. Nous aurons donc à considérer la congruence de courbes définies par

$$c' = \frac{y}{f(\rho)}, \qquad c'' = \frac{z}{f(\rho)}, \qquad c = \frac{\sqrt{f^2-\rho^2}}{f(\rho)}.$$

Ici, l'équation E est toujours intégrable et nous donne

$$x = -\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{f^2(\rho)-\rho^2}}.$$

Il nous reste à déterminer la fonction $f(\rho)$, de manière à vérifier la condition (39); nous trouvons

$$f(\rho) = \frac{-\rho^2}{a}.$$

L'équation précédente nous donne, en effectuant la quadrature,

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}\right) \qquad \text{(chaînette)}.$$

Le caténoïde est donc la seule surface minima de révolution. Nous obtenons ainsi une famille de surfaces minima engendrées par des chaînettes égales et de même axe Ox; leur équation différentielle est

$$dx + \frac{a\,d\rho}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} = 0.$$

Les courbes de la congruence (C_n) correspondante sont données par les équations

$$\frac{dx}{\rho\sqrt{\rho^2 - a^2}} = \frac{dy}{ay} = \frac{dz}{az}$$

que l'on peut écrire

$$y\,dz - z\,dy = 0, \qquad d\rho = \frac{a\,dx}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}.$$

Ce sont les trajectoires orthogonales des chaînettes résultant de la translation de l'une d'elles suivant la direction de leur axe Ox.

Le sommet A de la chaînette méridienne située dans le plan des xy est à une distance a de l'axe de révolution. L'équation différentielle trouvée peut s'écrire

$$dx + \frac{a\,dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad y^2 = a^2(1 + y'^2), \qquad y' = \frac{dy}{dx};$$

elle permet de vérifier qu'au point M les rayons de courbure sont égaux et de signes contraires.

L'équation différentielle des trajectoires orthogonales à ces diverses méridiennes s'écrit

$$a\,dx = \sqrt{y^2 - a^2}\,dy;$$

on peut intégrer et l'on trouve

$$2\frac{x - x_0}{a} = \frac{y}{a}\sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1} + \log\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}\right).$$

La congruence (C_m) est donc formée de ces courbes qui se déduisent de l'une d'elles par une translation suivant la direction Ox et une rotation autour du même axe Ox.

Remarque. — Si les rayons de courbure, au lieu d'être liés par la relation $R_1 + R_2 = 0$, étaient liés par la suivante $R_1 R_2 = -a^2$, nous aurions à satisfaire à la deuxième expression (38) et la détermination de $f(\rho)$ nous donnerait la méridienne d'une famille de surfaces à courbure constante négative. Nous obtiendrons ainsi l'équation différentielle

$$\frac{a^2\,df}{a^2 f + f^3} = \frac{d\rho}{\rho},$$

d'où l'on déduit, avec la constante d'intégration α,

$$f(\rho) = \frac{a\rho}{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}.$$

L'équation de la méridienne est

$$dx = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}{\sqrt{(a^2 - \alpha^2) + \rho^2}}\,d\rho.$$

Pour $\alpha = a$, nous obtenons l'équation

$$dx = \frac{-d\rho}{\rho}\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}$$

qui caractérise la développante de la chaînette.

Les courbes de la congruence particulière que nous avons utilisée vérifient la relation

$$dx = \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$$

qui définit une famille de cercles de même rayon a ayant leurs centres sur l'axe des x.

Il en résulte que la développante précédente est la courbe aux tangentes égales : la tangente étant limitée au point M et à l'axe Ox; $\mathrm{MI} = a$, rayon constant des cercles orthogonaux. On peut vérifier géométriquement que pour cette nouvelle méridienne $R_1 R_2 = -a^2$.

Nous avons trouvé pour celle-ci l'équation différentielle

$$dx^2 = d\rho^2\,\frac{a^2 - \rho^2}{(a^2 - \alpha^2) + \rho^2};$$

son élément linéaire est donné par

$$du^2 = dx^2 + d\rho^2 = \frac{a^2\, d\rho^2}{a^2 - \alpha^2 + \rho^2}.$$

On déduit

$$\rho = \mathrm{C}(u) = \frac{\alpha + a}{2}\, e^{\frac{u}{a}} + \frac{\alpha - a}{2}\, e^{-\frac{u}{a}}.$$

L'élément linéaire de la surface de révolution est

$$ds^2 = du^2 + \rho^2\, dv^2.$$

Pour $\alpha = a$, il prend la forme

$$ds^2 = du^2 + a^2\, e^{\frac{2u}{a}}\, dv^2,$$

caractéristique de la surface pseudosphérique.

28. *Surface minima passant par deux cercles dont les axes sont parallèles.* — La même méthode nous permettrait d'obtenir les surfaces de révolution à courbure moyenne constante. L'équation de la méridienne, déduite de la congruence des trajectoires orthogonales, montre que cette courbe peut être engendrée, soit par une ellipse constante, soit par une hyperbole de grandeur fixe qui roule sur l'une de ses tangentes Ox.

Prenons deux cercles de centres O et O′, dont les plans sont parallèles. Si la ligne des centres OO′ est perpendiculaire aux plans des deux cercles, il existe une surface à courbure moyenne constante qui passe par les deux circonférences; c'est une surface de révolution ayant pour méridienne une courbe de Delaunay, et qui peut avoir l'une des trois formes (onduloïde, nodoïde, caténoïde). Celle-ci est une surface minima.

Nous nous proposons de déterminer la surface minima plus générale qui passe par les deux cercles dont les plans parallèles sont obliques à leur ligne des centres, et d'en déduire certaines considérations géométriques.

Nous prenons comme axe Ox la direction commune des axes des deux cercles et comme plan des xy celui qui contient la ligne des centres OO′.

Avec deux anneaux en fil de fer, trempés dans le liquide glycérique, on peut réaliser physiquement la surface cherchée; pour des raisons de continuité géométrique et mécanique, il en résulte que tout plan perpendiculaire à Ox donnera une section circulaire dont le centre sera dans le plan des xy. La surface est donc symétrique par rapport à ce plan et son équation aura la forme

$$F = [y + \alpha(x)]^2 + z^2 + \beta(x) = 0.$$

Nous poserons

$$c = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \qquad c' = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \qquad c'' = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

et nous appliquerons, avec les notations indiquées, la forme (41) de la condition d'aire minima. Nous avons

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial F}{\partial x} = X = 2\alpha'(y+\alpha) + \beta', & \dfrac{\partial F}{\partial y} = Y = 2(y+\alpha), & Z = 2z, \\ X_x = 2\alpha''(y+\alpha) + 2\alpha'^2 + \beta'', & Y_y = 2, & Z_z = 2, \\ X_y = 2\alpha', \quad X_z = 0; & Y_x = 2\alpha', \quad Y_z = 0; & Z_x = Z_y = 0. \end{array}\right.$$

Les dérivées des fonctions inconnues $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont désignées par des accents; substituant dans la relations (41), il vient

$$4X^2 + 4[(y+\alpha)^2 + z^2](X_x + 2) - X\,2(y+\alpha)\,4\alpha' = 0,$$

ou bien

$$X[X - 2\alpha'(y+\beta)] + [(y+\alpha)^2 + z^2](X_x + 2) = 0,$$

et, en tenant compte de l'équation $F = 0$, il vient

$$\beta' X - \beta(X_x + 2) = 0.$$

Cette équation a la forme

$$A(x)y + B(x) = 0;$$

elle ne peut être identiquement nulle que si l'on a

$$(42) \qquad \left\{\begin{array}{l} A = 2\alpha'\beta' - 2\alpha''\beta = 0, \\ B = \beta'(2\alpha\alpha' + \beta') - \beta(2\alpha\alpha'' + 2\alpha'^2 + \beta'' + 2) = 0. \end{array}\right.$$

Ces équations différentielles permettront de déterminer les fonctions α et β.

Elles sont vérifiées dans le cas particulier où l'on a

$$\alpha = 0, \qquad \beta'^2 - \beta(\beta'' + 2) = 0.$$

On en déduit, en intégrant,

$$\beta = -a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x - x_0}{a};$$

nous retrouvons l'équation du caténoïde,

$$F = y^2 + z^2 - a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x - x_0}{a} = 0.$$

29. Dans le cas général, la première équation (42) nous donne

$$\frac{d\alpha}{dx} = -a\beta,$$

a nouvelle constante d'intégration ; et la deuxième équation nous montre que β doit satisfaire à l'équation différentielle du deuxième ordre

$$\beta \frac{d^2\beta}{dx^2} - \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + 2\beta + 2a^2\beta^3 = 0.$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\frac{\beta^2 d\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 d(\beta^2)}{\beta^4} + \left(\frac{4}{\beta^2} + 4a^2\right) d\beta = 0.$$

On peut simplifier et intégrer ; en désignant par c une deuxième constante d'intégration, nous obtenons

$$\frac{\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2}{\beta^2} = \frac{4}{\beta} - 4a^2\beta + 8c;$$

on en déduit

$$dx = \frac{d\beta}{2\sqrt{\beta + 2c\beta^2 - a^2\beta^3}}.$$

Le carré du rayon du cercle de section par un plan normal à Ox est

$$-\beta = u = R^2.$$

Posons

$$2c = \frac{1}{k^2};$$

avec ces nouvelles notations, nous avons, pour déterminer u et α, les équations

$$(43) \qquad \frac{d\alpha}{dx} = au, \qquad dx = \frac{k\,du}{2\sqrt{u(a^2k^2u^2 + u - k^2)}}.$$

Remarque. — Dans le cas où $\alpha = 0$, la deuxième équation s'écrit

$$dx = \frac{k\,du}{2\sqrt{u}\sqrt{u-k^2}},$$

elle s'intègre facilement et nous donne

$$x - x_0 = k\log(\sqrt{u} + \sqrt{u-k^2}), \qquad u = \mathrm{R}^2,$$

équation qui caractérise la chaînette d'axe Ox.

Dans le plan de symétrie $z = 0$, on a $\sqrt{u} = y$ et

$$dx = \frac{k\,dy}{\sqrt{y^2 - k^2}}.$$

Cette relation différentielle caractérise la courbe décrite par le foyer F d'une parabole qui roule sur l'axe Ox : en effet, si N est le point de contact ou centre instantané, la normale à cette courbe est FN; φ étant l'angle (FN, Ox) on a

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tang}\varphi.$$

Soit FP $= y$ l'ordonnée du point décrivant; Ox étant une tangente à la parabole de foyer F, nous avons la relation intrinsèque

$$\mathrm{FN} = \frac{\overline{\mathrm{FP}}^2}{k} \qquad (k \text{ demi-paramètre}).$$

Il en résulte

$$\sin\varphi = \frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{FN}} = \frac{k}{\mathrm{FP}};$$

donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{k}{\sqrt{y^2 - k^2}},$$

équation différentielle de la chaînette.

30. Dans le cas général, le centre D du cercle générateur de rayon R décrit une courbe diamétrale (D) par rapport à la section de la surface par le plan des xy. L'équation de cette section peut s'écrire

$$y = -\alpha(x) \pm R(x).$$

Dans le cas du caténoïde, il y a un cercle de gorge pour lequel le plan tangent est, en tous ses points, parallèle à la direction Ox. Sur la surface générale, il y aura aussi un cercle d'étranglement en tous les points duquel le plan tangent sera parallèle à une direction fixe du plan des xy. Cette intuition géométrique sera justifiée par ses conséquences.

Nous supposerons que ce cercle minima soit celui des yz; ce cercle C_0 ayant pour équation

$$y^2 + z^2 + \beta_0 = 0, \qquad \beta_0 = -R_0^2,$$

le plan tangent en un point quelconque de ce cercle sera parallèle à la droite $y = mx$, qui est la tangente du point O à la courbe (D).

En chaque point du cercle C_0, $\frac{dR}{dx}$ et $\frac{du}{dx}$ sont nuls, et si l'on se reporte aux équations (43), on voit que l'on devra avoir

$$m = a u_0, \qquad k^2 = \frac{u_0}{1 - a^2 u_0}.$$

Remplaçons, dans ces équations, u par R^2, u_0 par R_0^2, puis les constantes a et k par les valeurs ci-dessus; elles peuvent s'écrire

$$(44) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dx} = -m\frac{R^2}{R_0^2}, \qquad \alpha = -y_1, \\ &i\frac{dx}{R_0} = \frac{d\dfrac{R}{R_0}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{R^2}{R_0^2}\right)\left(1 + m^2\dfrac{R^2}{R_0^2}\right)}}. \end{aligned} \right.$$

La deuxième, intégrée par les fonctions elliptiques, nous donnera le rayon R du cercle générateur et la première l'ordonnée y_1 de son centre, en fonction de la variable x.

Si nous posons, suivant l'usage,

$$k^2 = \frac{m^2}{1 + m^2}, \qquad k'^2 = \frac{1}{1 + m^2}, \qquad \frac{k}{k'} = -m,$$

nous aurons

$$\frac{i\,dx}{R_0 k'} = \frac{d\dfrac{R}{R_0}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{R^2}{R_0^2}\right)\left(k'^2+k^2\dfrac{R^2}{R_0^2}\right)}};$$

c'est-à-dire en prenant la fonction inverse,

$$R = R_0\, cn\frac{ix}{R_0 k'}. \tag{45}$$

Nous en déduisons l'équation de la courbe (D) :

$$\frac{dy_1}{dx} = m\frac{R^2}{R_0^2} = m cn^2\frac{ix}{R_0 k'},$$

ou, en intégrant

$$y_1 = mx - m\frac{R_0 k'}{i}\int \mathrm{sn}^2\frac{ix}{R_0 k'}\, d\left(\frac{ix}{R_0 k'}\right);$$

avec la notation

$$Z(u) = k^2\int_0^u \mathrm{sn}^2 u\, du,$$

on obtient finalement

$$y_1 = mx - i\frac{R_0}{k}Z\left(\frac{ix}{R_0 k'}\right). \tag{46}$$

Ces formules (45) et (46) résolvent le problème posé pour la première fois par Riemann [1].

Il reste à étudier la congruence (C_m) des trajectoires orthogonales aux surfaces minima $F(x, y, z) = \text{const.}$, et définie par les équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

$$\begin{aligned}
X &= -\frac{dy_1}{dx}(y-y_1) - R\frac{dR}{dx}, & \frac{dy_1}{dx} &= m cn^2\frac{ix}{R_0 k'},\\
Y &= \quad (y-y_1),\\
Z &= \quad z, & F &= (y-y_1)^2 + z^2 - R^2;
\end{aligned}$$

y_1 et R sont des fonctions connues de x données par les expressions (45) et (46). Celle-ci est l'équation de la courbe diamétrale (D) dont la forme caractérise la surface minima étudiée.

(1) Niewenglowski, *Thèse*, 1880, p. 75.

31. *Surfaces minima hélicoïdes*. — Nous allons, pour terminer, montrer comment la méthode indiquée au paragraphe **23** permet de trouver facilement les hélicoïdes qui sont des surfaces minima [1].

Prenons des coordonnées semi-polaires et considérons z comme fonction des variables indépendantes ρ et θ :

$$x = \rho\cos\theta, \qquad dx = \cos\theta\, d\rho - \rho\sin\theta\, d\theta;$$
$$y = \rho\sin\theta, \qquad dy = \sin\theta\, d\rho - \rho\cos\theta.$$

Proposons-nous de rechercher les surfaces minima telles que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\,\partial\theta} = 0;$$

leur équation aura la forme

$$\mathrm{Z} + a(\theta) + \mathrm{F}(\rho) = 0. \tag{47}$$

Exprimons les cosinus directeurs de la normale (c, c', c'') en fonction des nouvelles variables indépendantes ρ et θ; nous avons

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0$$

c'est-à-dire

$$c''\,dz + (c\cos\theta + c'\sin\theta)\,d\rho + (-c\sin\theta + c'\cos\theta)\,\rho\,d\theta = 0,$$

et comme

$$dz + a\,d\theta + f\,d\rho = 0, \qquad f = \mathrm{F}''(\rho),$$

nous devrons avoir les égalités

$$\left\{\begin{aligned} c\cos\theta + c'\sin\theta &= f c'', \\ -c\sin\theta + c'\cos\theta &= \frac{a}{\rho}c'', \\ c''^2\left(1 + f^2 + \frac{a^2}{\rho^2}\right) &= 1. \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Elles déterminent c, c', c''. La condition d'aire minima (40), qui correspond aux variables indépendantes x et y, deviendra avec les nouvelles variables ρ et θ,

$$\sin\theta\left(\frac{\partial c'}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial\theta}\right) + \cos\theta\left(\frac{\partial c}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial c'}{\partial\theta}\right) = 0. \tag{49}$$

---

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, p. 180.

Déduisons c et c' des relations (48), nous pourrons calculer

$$\frac{\partial c'}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial \theta} = c'' \sin\theta\left(\frac{f}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{c'}{c''}\frac{\partial c''}{\partial \rho} + \frac{c''\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial a}{\partial \theta}$$

et aussi l'expression

$$\frac{\partial c}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial c'}{\partial \theta} = c'' \cos\theta\left(\frac{f}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{c}{c''}\frac{\partial c''}{\partial \rho} + \frac{c''\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial a}{\partial \theta}.$$

Il en résulte que la condition (49) devient, dans le cas étudié,

$$c''\left(\frac{f}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + f\frac{\partial c''}{\partial \rho} + \frac{c''}{\rho^2}\cdot\frac{\partial a}{\partial \theta} = 0.$$

Cette identité devant être vérifiée, quels que soient ρ et θ, doit se décomposer en deux autres

$$(50) \qquad \frac{\partial a}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{f}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{f}{c''}\frac{\partial c''}{\partial \rho} = 0.$$

La première nous montre que l'équation (47) peut s'écrire

$$Z = a\theta + c + F(\rho),$$

a et c étant des constantes.

Il reste à calculer

$$F(\rho) = \int f(\rho)\, d\rho;$$

la deuxième équation (50) peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} + \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \rho}}{f} + \frac{\dfrac{\partial c''}{\partial \rho}}{c''} = 0.$$

On peut l'intégrer, en introduisant une autre constante b,

$$\rho^2 f^2 = \frac{b^2}{c''^2} = b^2\left(1 + f^2 + \frac{a^2}{\rho^2}\right),$$

et, par suite,

$$f(\rho) = \frac{b}{\rho}\frac{\sqrt{\rho^2 + a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} = \frac{b}{\rho}\frac{a^2 + \rho^2}{\sqrt{\rho^2 + a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2}};$$

nous avons

$$\int a^2 b \frac{d\rho}{\rho} \frac{1}{\sqrt{(\rho^2+a^2)(\rho^2-b^2)}} = -a \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\rho^2+a^2}}{\sqrt{\rho^2-b^2}},$$

$$\int b\rho\, d\rho \quad \frac{1}{\sqrt{(\rho^2+a^2)(\rho^2-b^2)}} = b \log\left(\sqrt{\rho^2+a^2}+\sqrt{\rho^2-b^2}\right).$$

En ajoutant, nous avons l'expression de $F(\rho)$, et les surfaces hélicoïdes minima ont la forme

$$(51) \quad Z = a\theta + c + a \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\rho^2+a^2}}{\sqrt{\rho^2-b^2}} - b \log\left(\sqrt{\rho^2+a^2}+\sqrt{\rho^2-b^2}\right).$$

Elles comprennent, comme cas particulier, la surface minima de révolution ($a = 0$), et la surface minima réglée ($b = 0$).

La section de la surface par un plan perpendiculaire à Oz est une courbe déterminée par la relation

$$\rho \frac{d\theta}{d\rho} = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\rho^2+a^2}}{\sqrt{\rho^2-b^2}} = \operatorname{tang} V.$$

Désignons par φ l'angle de sa tangente avec l'axe des x, nous avons $\varphi = \theta + V$, et l'équation (51) s'écrit :

$$Z = a\varphi - b \log\left(\sqrt{\rho^2+a^2}+\sqrt{\rho^2-b^2}\right).$$

Vu et approuvé :

Paris, le 11 janvier 1919.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 11 janvier 1919.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. POINCARÉ.