

# THÈSES DE L'ENTRE-DEUX-GUERRES

HAUMÉ-HÉROUARD

**Contribution à l'étude des surfaces réelles rapportées aux coordonnées curvilignes de leurs lignes de courbure**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1920

[http://www.numdam.org/item?id=THESE\\_1920\\_\\_21\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=THESE_1920__21__1_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses de l'entre-deux-guerres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Thèse numérisée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

N° D'ORDRE  
1655

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

**HAUMÉ-HEROUARD**

SOUS-DIRECTEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

DIRECTEUR DES ÉTUDES

- 
- 1<sup>re</sup> THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES SURFACES RÉELLES  
RAPPORTÉES AUX COORDONNÉES CURVILIGNES  
DE LEURS LIGNES DE COURBURE.
- 2<sup>e</sup> THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ DES SCIENCES  
MATHÉMATIQUES

---

Soutenues le **Décembre 1920** devant la Commission d'Examen

---

MM. E. PICARD, *Président.*  
Cl. GUICHARD, } *Examineurs.*  
VESSIOT, }

PARIS

IMPRIMERIE DES ARTS ET MANUFACTURES

8, RUE DU SENTIER, 8

1920

# UNIVERSITÉ DE PARIS

## FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

MM.

	Doyen		F. HOUSSAY, <i>Professeur</i> . Zoologie.
	Professeurs honoraires	}	P. PUISEUX. VÉLAIN. BOUSSINESQ.
	Professeurs	}	LIPPMANN. . . . . Physique. BOUTY. . . . . Physique. E. PICARD. . . . . Analyse supérieure et algèbre supérieure. Y. DELAGE. . . . . Zoologie, anatomie, physiologie comparée. Gaston BONNIER. . . . . Botanique. KœNIGS. . . . . Mécanique physique et expérimentale. GOURSAT. . . . . Calcul différentiel et calcul intégral. HALLER. . . . . Chimie organique. JOANNIS. . . . . Chimie (Enseignement P. C. N.) JANET. . . . . Physique. WALLERANT. . . . . Minéralogie. ANDOYER. . . . . Astronomie. PAINLEVÉ. . . . . Mécanique analytique et mécanique céleste. HAUG. . . . . Géologie. H. LE CHATELIER. . . . . Chimie. Gabriel BERTRAND. . . . . Chimie biologique. M <sup>me</sup> P. CURIE. . . . . Physique générale. CAULLERY. . . . . Zoologie (Evolution des êtres organisés.) C. CHABRIE. . . . . Chimie appliquée. G. URBAIN. . . . . Chimie. Émile BOREL. . . . . Physique mathémat. et Calcul des probabilités. MARCHIS. . . . . Aviation. Jean PERRIN. . . . . Chimie physique. G. PRUVOT. . . . . Zoologie, anatomie, physiologie comparée. MATRUCHOT. . . . . Botanique. ABRAHAM. . . . . Physique. CARTAN. . . . . Mécanique rationnelle. Cl. GUICHARD. . . . . Géométrie supérieure. MOLLIARD. . . . . Physiologie végétale. LEBESGUE. . . . . Application de l'analyse à la géométrie. LAPICQUE. . . . . Physiologie. GENTIL. . . . . Géographie physique. VESSIOT. . . . . Calcul différentiel et calcul intégral. COTTON. . . . . Physique théorique et Physique céleste. N. . . . . Histologie. N.... . . . . Mathématiques générales.
	Professeurs adjoints	}	LEDUC. . . . . Physique. HÉROUARD. . . . . Zoologie. Léon BERTRAND. . . . . Géologie. Rémy PERRIER. . . . . Zoologie (Enseignement P. C. N.). LESPIEAU. . . . . Chimie. SAGNAC. . . . . Physique (Enseignement P. C. N.). PEREZ. . . . . Zoologie (Evolution des êtres organisés). RABAUD. . . . . Biologie générale. PORTIER. . . . . Physiologie. BLAISE. . . . . Chimie organique. PÉCHARD. . . . . Chimie (P. C. N.).
	Secrétaire		D. TOMBECK.

A LA MÉMOIRE  
DE MON ILLUSTRE MAITRE

GASTON DARBOUX



A MONSIEUR

**E. PICARD**

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

Hommage respectueux



A MONSIEUR

Cl. GUICHARD

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

Hommage reconnaissant





A MONSIEUR

VESSIOT

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
SOUS-DIRECTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Hommage reconnaissant



# PREMIÈRE THÈSE

---

## CONTRIBUTION

A

### L'ÉTUDE DES SURFACES RÉELLES RAPPORTÉES AUX COORDONNÉES CURVILIGNES DE LEURS LIGNES DE COURBURE

---

#### INTRODUCTION

Dans ses remarquables leçons sur la *Théorie générale des Surfaces*, Gaston Darboux montré (t. IV, Chap. VIII) que si l'on prend l'équation du plan tangent à une surface  $\Sigma$  sous la forme

$$(\sigma + \beta)x + \iota(\beta - \sigma)y + (\alpha\beta - 1)z + \xi = 0$$

$\xi$  étant une fonction de  $x$  et  $y$ , et si cette surface est rapportée aux coordonnées curvilignes de ses lignes de courbure  $u$  et  $v$ , on a les relations

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \omega' \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = -\omega' \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \omega' \frac{\partial q}{\partial u}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -\omega' \frac{\partial q}{\partial v}; \quad (2)$$

dans lesquelles  $\omega$  désigne une fonction auxiliaire et  $p$  et  $q$  les dérivées partielles de  $\xi$  par rapport à  $x$  et  $y$ ; de plus, si la surface  $\Sigma$  est réelle,  $\omega$  est une expression imaginaire de module un et  $x$  et  $y$  ainsi que  $p$  et  $q$  sont imaginaires conjuguées.

Il résulte de cela que si, inversement, on se donne une fonction  $\varphi$  telle que  $\omega = e^{i\varphi}$ , on pourra, en choisissant convenablement les solutions des systèmes (1) et (2), obtenir une infinité de surfaces réelles rapportées aux coordonnées curvilignes de leurs lignes de courbure, ces surfaces étant définies comme l'enveloppe de leurs plans tangents.

Cette question a été étudiée par Darboux dans le même Chapitre VIII. Il a montré que la résolution des systèmes (1) et (2) peut se ramener à celle d'une équation à invariants égaux admettant une solution particulière de module un, suivie d'une quadrature. Il a fait remarquer de plus que la loi de récurrence de Moutard, sur les équations à invariants égaux, s'applique au cas particulier précédent, pourvu que l'on prenne comme solution de passage d'une équation à l'autre l'une quelconque de celles qui donnent pour  $\alpha$  et  $\beta$  des quantités imaginaires conjuguées.

Les calculs relatifs à l'application des résultats obtenus par Darboux, au cas où l'équation à invariants égaux est intégrable par la méthode de Laplace, deviennent très laborieux dès que cette équation est d'un rang supérieur au premier.

Le but de notre étude a été de chercher à déterminer, par une méthode directe, les éléments réels qui rentrent dans les expressions de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $p$  et  $q$  relatives à une fonction  $\varphi$  donnée.

Nous avons montré, dans le Chapitre I, que le problème revient au fond à la résolution d'un système de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial t}{\partial v} - z \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 \quad (3)$$

et que l'application de la méthode de Moutard conduit à une série de fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  que l'on peut déterminer sans avoir recours aux équations à invariants égaux.

Ce qu'il y a d'important dans la forme des équations (3) c'est que si l'on pose

$$\frac{\theta}{z} = \frac{\theta_1}{t} = H_n$$

$$\frac{\partial^2 L H_n}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{H_{-1}}{H_n}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{H_1}{H_n},$$

elles deviennent identiques à celles qui ont été obtenues par Darboux dans ses Compléments et solutions nouvelles sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre intégrables par la méthode de Laplace (t. II, 2<sup>e</sup> édit., Chap. VI).

Le Chapitre II de notre mémoire a été consacré à l'étude du cas où l'équation à invariants égaux, déduite des systèmes (1) et (2), est intégrable par la méthode de Laplace.

Nous avons montré comment on pouvait obtenir, dans cette hypothèse, par un procédé simple et régulier, la solution complète du problème.

Dans le Chapitre III nous avons étudié au point de vue géométrique les surfaces successives  $\Sigma_p$  et  $S_p$ , obtenues par application de la méthode de transformation de Laplace, en partant, d'une part, des tangentes aux lignes de courbure de la surface  $\Sigma$  et, d'autre part, des tangentes aux courbes correspondantes tracées sur les surfaces des centres  $S$  et  $S_1$ .

Nous avons ensuite montré comment il était possible de déterminer, par voie récurrente et par le seul emploi des fonctions  $H_p$  et  $\theta_p$  de Darboux ou de fonctions jouissant des mêmes propriétés, d'une part, les paramètres directeurs des tangentes aux surfaces successives le long des courbes  $u$  et  $v$  et, d'autre part, les coordonnées d'un point quelconque de ces surfaces.

Enfin, le Chapitre IV a été consacré à l'application des résultats trouvés dans les deux Chapitres précédents, au cas où la suite des surfaces  $\Sigma_p$  et  $S_p$  est limitée. Cette étude nous a permis d'obtenir les éléments nécessaires à la détermination d'un certain nombre de surfaces rapportées aux coordonnées curvilignes de leurs lignes de courbure.

---



## CHAPITRE I

---

### Détermination des surfaces réelles rapportées aux coordonnées curvilignes de leurs lignes de courbure.

1<sup>o</sup> — Soient  $u$  et  $v$  les coordonnées curvilignes des lignes de courbure d'une surface  $\Sigma$ .

On sait <sup>(1)</sup> que si l'on appelle  $\alpha$  et  $\beta$  les coordonnées symétriques de la représentation sphérique d'une surface quelconque, l'équation du plan tangent en un point de cette surface a pour expression

$$(\alpha + \beta)x + i(\beta - \bar{\alpha})y + (\alpha\beta - 1)z + \xi = 0, \quad (1)$$

$\xi$  étant défini par une relation de la forme

$$d\xi = p d\alpha + q d\beta, \quad (2)$$

$p$  et  $q$  désignant des fonctions de  $\alpha$  et  $\beta$ .

De plus, si la surface est réelle et rapportée aux coordonnées curvilignes de ses lignes de courbure <sup>(2)</sup>, les quantités  $\alpha$  et  $\beta$  ainsi que  $p$  et  $q$  sont imaginaires conjuguées et satisfont au même système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \omega \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial v} = -\omega \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \omega \frac{\partial q}{\partial u}, \quad \frac{\partial p}{\partial v} = -\omega \frac{\partial q}{\partial v}; \quad (4)$$

$\omega$  désignant une quantité imaginaire de module un, dont l'argument  $\varphi$  est défini par l'une des équations (3) ou (4).

Il résulte de ce qui précède qu'à toute surface réelle  $\Sigma$ , qui ne se réduit

---

<sup>(1)</sup> DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. I 2<sup>e</sup> édit., p. 297.

<sup>(2)</sup> Même ouvrage, t. IV, p. 170 et 178.



pas à un plan, correspond une fonction  $\varphi$  déterminée à un multiple de  $\pi$  près.

Considérons inversement cette même fonction  $\varphi$ , les équations (3) lui font correspondre une infinité de représentations sphériques et l'ensemble des équations (2), (3) et (4), une infinité de surfaces dépendant d'une constante arbitraire.

Parmi ces surfaces on obtiendra celles qui sont réelles en prenant pour  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $p$  et  $q$  deux systèmes de solutions imaginaires conjuguées quelconques du système unique

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \omega^2 \frac{\partial T}{\partial u}, \quad \frac{\partial Z}{\partial v} = -\omega^2 \frac{\partial T}{\partial v}, \quad (5)$$

et pour la constante arbitraire une constante réelle.

Le problème de la détermination des surfaces réelles, correspondant à une même fonction  $\varphi$ , revient donc, au fond, à la recherche de tous les systèmes de solutions imaginaires conjuguées des équations (5).

Pour résoudre cette question, posons

$$\omega T + \frac{Z}{\omega} = 2t, \quad i \left( \omega T - \frac{Z}{\omega} \right) = 2z, \quad (6)$$

et éliminons  $Z$  et  $T$  entre ces équations et les équations (5). On obtient ainsi, toutes réductions faites et en tenant compte de la relation

$$\omega = e^{i\varphi}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial v} - z \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 \quad (8)$$

Il résulte des équations (6) que l'on obtiendra la solution du problème en prenant pour  $z$  et  $t$  toutes les solutions réelles du système (8) ; on aura ensuite pour les valeurs correspondantes de  $Z$  et  $T$

$$T = -i e^{-i\varphi} (z + it), \quad Z = i e^{i\varphi} (z - it). \quad (9)$$

Ce qui précède montre que l'on obtiendra toutes les surfaces réelles en donnant à la fonction  $\varphi$  toutes les formes possibles et que l'on pourra les déterminer explicitement toutes les fois que l'on saura résoudre le système (8).

2°. — Reprenons ce dernier système ; on en déduit, par dérivation et en tenant compte des équations elles-mêmes, les deux relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + z \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v} - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= 0; \end{aligned} \quad (10)$$

d'où l'on tire, en multipliant la deuxième par  $i$  et ajoutant,

$$\frac{\partial^2(z+it)}{\partial u \partial v} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right) (z+it) = 0,$$

ou encore, en posant

$$\frac{\partial^2 L \rho^2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial(z+it)}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 L \rho^2 e^{-i\varphi}}{\partial u \partial v} (z+it) = 0. \quad (12)$$

On retrouve ainsi la propriété de la fonction  $z + it$  de satisfaire à une équation à invariants égaux admettant la solution particulière de module un  $e^{i\varphi}$ ; mais la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que toutes les solutions de l'équation (12) ne satisfont pas au système (8).

Considérons en effet les deux équations (10), dont l'équation (12) n'est au fond que l'expression condensée; on peut, comme il est facile de le vérifier, les remplacer par les suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial z}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) - \left( \frac{\partial t}{\partial v} - z \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial t}{\partial v} - z \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \left( \frac{\partial z}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Sous cette forme, on voit que si l'on désigne par  $z_1$  et  $t_1$  un système quelconque de solutions des équations

$$\frac{\partial t_1}{\partial v} - z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z_1}{\partial u} + t_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0, \quad (14)$$

on pourra écrire

$$\frac{\partial z}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} = t_1, \quad \frac{\partial t}{\partial v} - z \frac{\partial \varphi}{\partial v} = z_1. \quad (15)$$

Il résulte de cela, qu'une solution de l'équation (12) ne satisfera au système (8) que si elle correspond à la solution particulière zéro des équations (14).

Bien que l'équation (12) ne puisse remplacer le système (8), nous allons montrer comment sa considération permet, sous certaines conditions, de déduire les uns des autres, par application de la méthode de récurrence de Moulard (1), toutes les équations à invariants égaux admettant une solu-

(1) DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. II, 2<sup>e</sup> édit, p. 161.

tion particulière de module un, et, comme conséquence, toute une série de fonctions  $\varphi$  en partant d'une fonction initiale  $\varphi_0$ .

Soit

$$\frac{\partial^2(z_1 + it_1)}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 L \rho_1^2 e^{-i\varphi_1}}{\partial u \partial v} (z_1 + it_1) = 0 \quad (16)$$

une équation à invariants égaux déduite de l'équation (12) par application de la méthode de Moutard. Cette équation admettra une solution de module un si l'on a

$$\frac{\partial^2 L \rho_1^2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}. \quad (17)$$

Posons

$$\rho_1 = \rho r, \quad \varphi_1 = \varphi - 2\psi; \quad (18)$$

la relation de récurrence

$$\frac{\partial^2 L \rho_1^2 e^{-i\varphi_1}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 L \rho^2 e^{-i\varphi}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 L(z + it)^2}{\partial u \partial v}, \quad (19)$$

dans laquelle  $z + it$  représente une solution de l'équation (12), montre que l'on peut prendre

$$\rho_1^2 = \rho^2(z^2 + t^2), \quad \psi = \arctan \frac{t}{z} \quad (20)$$

D'après cela, les équations (11) et (17) donnent, en tenant compte des relations (10) et après réduction,

$$\begin{aligned} (z^2 + t^2) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial v} \\ = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \left( z \frac{\partial t}{\partial u} - t \frac{\partial z}{\partial u} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \left( z \frac{\partial t}{\partial v} - t \frac{\partial z}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que cette dernière équation peut être mise sous la forme simple

$$\left( \frac{\partial t}{\partial u} - z \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial t}{\partial v} - z \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) + \left( \frac{\partial z}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial z}{\partial v} + t \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = 0. \quad (21)$$

Si donc on désigne par  $K$  une certaine fonction de  $u$  et  $v$ , on peut écrire les deux relations

$$\frac{\partial t}{\partial u} - z \frac{\partial \varphi}{\partial u} = K \left( \frac{\partial z}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right), \quad (22)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} + t \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -K \left( \frac{\partial t}{\partial v} - z \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right). \quad (23)$$

On déduit de ces deux équations, en dérivant la première par rapport à  $v$ , la seconde par rapport à  $u$  et en tenant compte des relations (10),

$$\frac{\partial K}{\partial v} \left( \frac{\partial z}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial u} \left( \frac{\partial t}{\partial v} - z \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = 0.$$

On doit donc avoir, d'après les équations (13), en supposant  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$  différent de zéro,

soit

$$\frac{\partial z}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial v} - z \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0;$$

soit

$$\frac{\partial K}{\partial u} = \frac{\partial K}{\partial v} = 0$$

et par suite

$$K = \text{constante.}$$

Dans la deuxième hypothèse les équations (22) et (23) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Kz-t)}{\partial u} + (Kt+z) \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial(Kt+z)}{\partial v} - (Kz-t) \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

et expriment que les quantités  $Kz - t$  et  $Kt + z$  doivent satisfaire au système (8).

De plus, l'identité

$$Kz - t + i(Kt + z) = (z + it)(K + i)$$

montre qu'elles satisfont également aux équations (12) et (19).

Si le produit  $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}$  était nul, c'est-à-dire si l'équation (12) était du premier rang, et si de plus le système (8) n'était pas vérifié, il serait facile de montrer que l'équation (16) serait également du premier rang et par conséquent identique à l'équation (12). Nous pouvons donc écarter ce cas particulier

Il résulte de ce qui précède que l'on peut énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (16) admette comme l'équation (12), dont elle dérive, une solution particulière de module un, est que la solution de passage  $z + it$  satisfasse au système (8).

Cette condition étant supposée remplie, les quantités  $\rho_1^2$  et  $\varphi_1$  sont données par les équations

$$\rho_1^2 = \rho^2(z^2 + t^2), \quad (25) \quad \varphi_1 = \varphi - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{z}. \quad (26)$$

Inversement, je dis que toute équation à invariants égaux qui admet une solution particulière de module un peut être déduite d'une équation de même nature et jouissant de la même propriété au moyen de la méthode de Moutard. La démonstration est immédiate, car les équations (8) et (26) permettent de déterminer, par l'élimination de  $z$  et  $t$ , la valeur de  $\varphi$  relative à l'équation (12), en fonction de la quantité correspondante de l'équation (16).

Cette élimination donne, tous calculs faits,

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial L t y^{\frac{\varphi - \varphi_1}{2}}}{\partial u} - t y^{\frac{\varphi - \varphi_1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \operatorname{cotg} \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$$

Ce résultat montre que de même que l'équation (12) peut donner naissance à une infinité d'équations de même nature, l'équation (16) peut être considérée comme dérivant, par application de la méthode de Moutard, d'une infinité d'autres équations jouissant des mêmes propriétés.

En résumé, la méthode de récurrence de Moutard s'applique aux équations à invariants égaux, admettant une solution particulière de module un, sous la réserve que la solution de passage  $z + it$  satisfasse aux équations (8).

Ce résultat est extrêmement important, car il montre que tout système de la forme (8) peut donner naissance, sans passer par les équations à invariants égaux, à une infinité d'autres systèmes de même nature au moyen de la formule de récurrence

$$\varphi_1 = \varphi - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{z},$$

et qu'inversement, tout système de cette nature peut être considéré comme dérivant, dans les mêmes conditions, d'une infinité de systèmes de même forme.

3°. — Soient  $\lambda$  et  $\mu$ ,  $l$  et  $m$  deux systèmes de solutions réelles des équations (8); on peut prendre, d'après le système (6),

$$\alpha = -ie^{-i\varphi} (\lambda + i\mu), \quad \beta = ie^{i\varphi} (\lambda - i\mu), \quad (27)$$

$$q = -ie^{-i\varphi} (l + im), \quad p = ie^{i\varphi} (l - im). \quad (28)$$

On déduit immédiatement de là, en posant d'une façon générale

$$\frac{\partial t}{\partial u} - z \frac{\partial \varphi}{\partial u} = z', \quad \frac{\partial z}{\partial v} + t \frac{\partial \varphi}{\partial v} = t'; \quad (29)$$

$$d\sigma = (\lambda' du - \mu' dv) e^{-i\varphi}, \quad (30)$$

$$d\beta = (\lambda' du + \mu' dv) e^{i\varphi},$$

$$dq = (l' du - im' dv) e^{-i\varphi}, \quad (31)$$

$$dp = (l' du + im' dv) e^{i\varphi}$$

Les équations (28) et (30) permettent par suite d'écrire l'équation (2), toutes réductions faites, sous la forme essentiellement réelle

$$d\xi = 2(m\lambda' du + l\mu' dv), \quad (32)$$

d'où l'on tire,  $c$  désignant une constante réelle,

$$\xi = 2 \int m\lambda' du + l\mu' dv + c. \quad (33)$$

En résumé, les équations (27), (28) et (33) donneront les éléments d'une surface réelle toutes les fois que la fonction  $\varphi$  sera telle que le système (8) pourra être intégré.

Considérons enfin les fonctions  $z'$  et  $t'$  définies par les équations (29); on a par exemple

$$dT = (z' du - it' dv) e^{-i\varphi}. \quad (34)$$

En écrivant que cette expression est une différentielle exacte on obtient les deux relations

$$\frac{\partial t'}{\partial u} - z' \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial v} + t' \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0 \quad (35)$$

qui relie directement les fonctions  $z'$ ,  $t'$  et  $\varphi$ .

Il est facile de voir que ces équations ont une certaine analogie avec les équations (8); on passe en effet du système (35) au système (8) en remplaçant les dérivées des inconnues prises par rapport à  $u$  par celles prises par rapport à  $v$  et inversement.

Il résulte de cela, que les équations aux dérivées partielles qui donnent séparément  $z$  et  $z'$  ou  $t$  et  $t'$  sont adjointes l'une de l'autre.

Cette remarque sera utilisée dans le Chapitre suivant où nous allons étudier en détail le cas où les fonctions  $\varphi$  donnent des équations à invariants égaux intégrables par la méthode de Laplace.



## CHAPITRE II

---

### Cas où la fonction $\varphi$ permet de former une équation à invariants égaux intégrable par la méthode de Laplace.

4°. — Reprenons les équations

$$\frac{\partial^2(z+it)}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \text{Lp}^2 e^{-\varphi}}{\partial u \partial v}(z+it) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial v} - z \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0. \quad (2)$$

Nous allons d'abord montrer que si l'équation (1) est intégrable par la méthode de Laplace, il en est de même de celles qui seraient obtenues par l'élimination de  $z$  ou  $t$  entre les équations (2) et réciproquement.

Soit en effet  $z + it$  une solution de l'équation (1), supposée intégrable par la méthode de Laplace, et posons

$$z'_1 = -i \frac{\partial}{\partial u}(z+it) - (z+it) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad (3)$$

$$t'_1 = \frac{\partial}{\partial v}(z+it) - t(z+it) \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \quad (4)$$

L'élimination de  $z+it$  entre ces deux équations et l'équation (1) donne, en tenant compte de la relation

$$\frac{\partial^2 \text{Lp}^2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z'_1}{\partial v} + t'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial t'_1}{\partial u} - z'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

Il résulte de cela et de la forme des expressions de  $z'_1$  et  $t'_1$  que l'élimination de  $z'$  ou  $t'$  entre les équations (35) du chapitre précédent donne une équation intégrable par la méthode de Laplace. Les équations qui donnent  $z$  et  $t$  étant respectivement adjointes de celles qui donnent  $z'$  et  $t'$  jouissent par conséquent de la même propriété.



Réciproquement, supposons que l'élimination de  $t$ , par exemple, entre les équations (2), donne pour  $z$  une équation intégrable par la méthode de Laplace ; cette équation admet donc une solution particulière linéaire et homogène par rapport à une fonction arbitraire de l'une des variables indépendantes ainsi qu'à un certain nombre de ses dérivées. On en conclut facilement, en tenant compte de la première équation (2), que l'équation (1) jouit de la même propriété et par conséquent qu'elle est intégrable par la méthode de Laplace.

On déduit de cette proposition et de certains résultats du Chapitre précédent que si l'on peut trouver toutes les fonctions  $\varphi$ , telles que l'équation (1) soit intégrable par la méthode de Laplace et admette une solution de module un, on pourra, par cela même, former tous les systèmes (2) dont les inconnues  $z$  et  $t$  pourront être obtenues par l'intégration d'équations aux dérivées partielles intégrables par la méthode de Laplace.

5°. — Soit  $\varphi$  une fonction réelle quelconque des deux variables indépendantes  $u$  et  $v$  ; on peut écrire d'une façon générale

$$\varphi = U + V + \varphi'. \quad (5)$$

$U$  et  $V$  désignant respectivement des fonctions réelles de  $u$  et  $v$ , et  $\varphi'$  une expression qui ne renferme aucun terme fonction seulement de l'une des deux variables indépendantes.

D'après cela, la fonction  $\varphi$  se présente sous quatre formes différentes suivant que l'on a

$$\begin{array}{ll} U' = 0 & V' = 0, & U' = 0 & V' \neq 0, \\ U' \neq 0 & V' = 0, & U' \neq 0 & V' \neq 0. \end{array} \quad (6)$$

Les variables indépendantes étant restées jusqu'ici indéterminées, nous les choisirons de telle façon que l'on ait pour les valeurs initiales des fonctions  $\varphi$ , lorsque les quantités  $U'$  ou  $V'$  ne sont pas nulles,

$$U' = 1, \quad V' = 1.$$

Les résultats obtenus par Darboux sur l'application de la loi de récurrence de Moutard aux équations à invariants égaux intégrables par la méthode de Laplace, et ceux que nous avons obtenus nous-même dans le Chapitre précédent sur l'application de cette loi aux équations à invariants égaux admettant une solution particulière de module un, montrent que l'on obtiendra l'ensemble de ces dernières équations, qui sont intégrables par la méthode de Laplace, en appliquant la loi de récurrence de Moutard et

en parlant, pour chacune des formes de la fonction  $\varphi$ , de l'équation du rang le plus bas qui admet une solution particulière de module un.

L'étude de l'équation à invariants égaux du premier rang montre qu'elle admet les trois types de solutions particulières de module un correspondant aux trois premières formes des relations (6) et qu'elles n'en admet aucune correspondant à la quatrième forme.

Nous sommes donc conduit à rechercher s'il existe des équations du second rang jouissant de cette propriété.

Comme nous l'avons dit précédemment, nous supposons

$$U' = V' = 1.$$

Soit, d'après cela,

$$P = U_1 + V_1 + i(U_2 + V_2) \quad (7)$$

la forme générale de la solution de l'équation du premier rang qui permet de former les équations cherchées,  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $V_1$  et  $V_2$  désignant respectivement des fonctions réelles des variables  $u$  et  $v$ . Ces quatre fonctions doivent satisfaire à la relation

$$\frac{\partial^2 L \rho^2}{\partial u \partial v} = \left(1 + \frac{\partial \varphi'}{\partial u}\right) \left(1 + \frac{\partial \varphi'}{\partial v}\right), \quad (8)$$

dans laquelle

$$\rho^2 = (U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2, \quad t q \frac{\varphi'}{2} = -\frac{U_2 + V_2}{U_1 + V_1}.$$

L'équation (8) donne, tous calculs faits et après groupement convenable des termes,

$$\begin{aligned} & (V'_1 + V_2) (U'_1 + U_2) + (V'_2 - V_1) (U'_2 - U_1) \\ & = U_1 U'_2 - U_2 U'_1 - \frac{U_1^2 + U_2^2}{2} + V_1 V'_2 - V_2 V'_1 - \frac{V_1^2 + V_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Prenons les dérivées des deux membres de cette équation, successivement par rapport à  $u$  et par rapport à  $v$ , on obtient la relation

$$(V''_1 + V'_2) (U''_1 + U'_2) + (V''_2 - V'_1) (U''_2 - U'_1) = 0,$$

d'où l'on déduit successivement,  $m$ ,  $n$  et  $p$  désignant trois constantes arbitraires,

$$U''_1 + U'_2 = m(U''_2 - U'_1) \quad V''_2 - V'_1 = -m(V''_1 + V'_2), \quad (10)$$

$$U'_1 + U_2 = m(U'_2 - U_1) + n \quad V'_2 - V_1 = -m(V'_1 + V_2) + p. \quad (11)$$

D'après cela, l'équation (9) peut s'écrire

$$\begin{aligned} & n(V'_1 + V_2) + p(U'_2 - U_1) \\ &= U_1 U'_2 - U_2 U'_1 - \frac{U_1^2 + U_2^2}{2} + V_1 V'_2 - V_2 V'_1 - \frac{V_1^2 + V_2^2}{2} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

On doit donc avoir,  $c$  désignant une nouvelle constante,

$$\begin{aligned} & n(V'_1 + V_2) - V_1 V'_2 + V_2 V'_1 + \frac{V_1^2 + V_2^2}{2} = c, \\ & p(U'_2 - U_1) - U_1 U'_2 + U_2 U'_1 + \frac{U_1^2 + U_2^2}{2} = -c. \end{aligned} \quad (13)$$

Prenons les dérivées des deux membres de ces dernières équations ; on obtient, en tenant compte des équations (11),

$$\begin{aligned} & (V''_1 + V'_2) (V_2 + mV_1 + n) = 0, \\ & (U''_2 - U'_1) (-U_1 + mU_2 + p) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Je dis que les seconds facteurs des expressions précédentes ne peuvent être nuls ; car, s'il en était ainsi, on aurait, d'après les équations (11),

$$V_1 - mV_2 + p = 0 \quad \text{ou} \quad U_2 + mU_1 - n = 0$$

et par suite les quantités  $V_1$  et  $V_2$  ou  $U_1$  et  $U_2$  se réduiraient à des constantes. La fonction  $\varphi'$  ne contiendrait donc au plus qu'une seule variable indépendante, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

On doit donc avoir

$$V''_1 + V'_2 = 0, \quad U''_2 - U'_1 = 0, \quad (15)$$

et par suite, d'après les équations (10), en supposant que  $m$  est finie,

$$V''_2 - V'_1 = 0, \quad U''_1 + U'_2 = 0. \quad (16)$$

On déduit facilement des équations (15) et (16) pour les valeurs des quantités  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $V_1$  et  $V_2$  des expressions de la forme suivante :

$$\begin{aligned} U_1 &= a \cos(u - \alpha) + a_1, & U_2 &= a \sin(u - \alpha) + a_2, \\ V_1 &= b \cos(v - \beta) + b_1, & V_2 &= b \sin(v - \beta) + b_2, \end{aligned}$$

$a$ ,  $b$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  désignant des quantités constantes.

Pour que ces solutions conviennent il est nécessaire et suffisant qu'elles satisfassent à l'équation (9).

En faisant la substitution on obtient la condition

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 = a^2 + b^2,$$

On satisfait évidemment à cette équation en posant

$$\begin{aligned} a &= v \cos \zeta, & b &= v \sin \zeta, \\ a_1 + b_1 &= v \cos \zeta_1, & a_2 + b_2 &= v \sin \zeta_1, \end{aligned}$$

$v$ ,  $\zeta$  et  $\zeta_1$  désignant trois constantes arbitraires.

D'après cela on aura, tous calculs faits, pour la forme cherchée de l'expression (7), la valeur suivante :

$$P = v e^{\zeta_1} (e^{u(u-\alpha-\zeta_1)} \cos \zeta + e^{v(v-\beta-\zeta_1)} \sin \zeta + 1). \quad (17)$$

Nous avons supposé dans ce qui précède que  $m$  avait une valeur finie; s'il en était autrement, on poserait  $m = \frac{1}{m}$ , dans les équations (10), et l'on arriverait encore à la même conclusion.

La relation

$$t g \frac{\varphi'}{2} = - \frac{U_2 + V_2}{U_1 + V_1}$$

donne, en se servant des imaginaires,

$$\varphi' = \frac{1}{i} L \frac{U_1 + V_1 - i(U_2 + V_2)}{U_1 + V_1 + i(U_2 + V_2)}.$$

On a donc, d'après les équations (5) et (17), en prenant comme variables indépendantes les quantités  $u - \alpha - \zeta_1$  et  $v - \beta - \zeta_1$ , ce qui ne modifie pas les conditions  $U' = V' = 1$ ,

$$\varphi = u + v + c^{te} + \frac{1}{i} L \frac{e^{-u} \cos \zeta + e^{-v} \sin \zeta + 1}{e^{u} \cos \zeta + e^{v} \sin \zeta + 1}. \quad (18)$$

En résumé, les valeurs initiales des fonctions  $\varphi$  sont données par les expressions

$$\varphi = c^{te}, \quad \varphi = v + c^{te} \quad \varphi = u + c^{te} \quad (18 \text{ bis})$$

et par l'équation (18)

6°. — Revenons à la résolution du système (2). Les équations (3) et (4) montrent que si l'équation (1) est de rang  $n$ , les expressions de  $z'_1$  et  $t'_1$  et par suite de  $z'$  et  $t'$  sont au plus de rang  $n+1$  par rapport à chacune des variables; il en est par conséquent de même de celles de  $z$  et  $t$  qui sont respectivement adjointes des précédentes.

Il résulte de cela que la suite de Laplace relative aux équations qui donnent  $z$  et  $t$  est limitée dans les deux sens.

Remarquons enfin que si les solutions du système (2) sont au plus de rang  $p$  par rapport à  $u$  et de rang  $q$  par rapport à  $v$ , l'équation (1) sera d'un rang au plus égal au plus petit des deux nombres  $p$  et  $q$ .

Ces résultats étant acquis, nous nous appuierons, pour la résolution du système (2), sur les propriétés des fonctions  $H$  et  $\theta$  considérées par Darboux dans ses solutions nouvelles sur les équations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par la méthode de Laplace (1).

On a relativement à ces fonctions,  $p$  désignant un nombre entier quelconque, les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_p}{\partial u} \theta_p - H_p \frac{\partial \theta_p}{\partial u} &= H_{p-1} \theta_{p+1}, \\ H_p \frac{\partial \theta_{p+1}}{\partial v} - \frac{\partial H_p}{\partial v} \theta_{p+1} &= H_{p+1} \theta_p, \\ H_{p-1} H_{p+1} &= H_p^2 \frac{\partial^2 L H_p}{\partial u \partial v}, \\ \theta_{p-1} \theta_{p+1} &= \theta_p^2 \frac{\partial^2 L \theta_p}{\partial u \partial v}. \end{aligned} \tag{19}$$

Si l'on pose, d'une façon générale,

$$\frac{\theta_p}{z_p} = \frac{\theta_{p+1}}{t_p} = H_p, \tag{20}$$

on peut remplacer les deux premières équations (19) par les suivantes :

$$\frac{\partial z_p}{\partial u} + t_p \frac{H_{p-1}}{H_p} = 0, \quad \frac{\partial t_p}{\partial v} - z_p \frac{H_{p+1}}{H_p} = 0. \tag{21}$$

On a de plus les relations

$$t_p H_p = z_{p+1} H_{p+1} = \theta_{p+1}. \tag{22}$$

Les deux équations (21) montrent que  $z_p$  et  $t_p$  donneront les solutions du système (2) si l'on peut déterminer trois fonctions  $H_{p-1}$ ,  $H_p$  et  $H_{p+1}$ , satisfaisant à la troisième équation (19) ainsi qu'aux deux relations

$$\frac{H_{p-1}}{H_p} = \frac{\partial \varpi}{\partial u}, \quad \frac{H_{p+1}}{H_p} = \frac{\partial \varpi}{\partial v}.$$

Il est facile de voir, d'après l'équation

$$\frac{\partial^2 L \varpi^2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varpi}{\partial u} \frac{\partial \varpi}{\partial v},$$

---

(1) DARBOUX, Théorie générale des surfaces, t. II, 2<sup>e</sup> édit., p. 135 et suivantes.

que l'on peut prendre pour les fonctions cherchées

$$H_{p-1} = \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad H_p = \rho^2, \quad H_{p+1} = \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \quad (23)$$

Pour la symétrie dans les calculs ultérieurs nous donnerons la valeur zéro à l'indice  $p$  pour lequel le système (21) est identique au système (2); autrement dit, nous poserons:

$$z = z_0, \quad t = t_0, \\ H_{-1} = \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad H_0 = \rho^2, \quad H_1 = \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \quad (24)$$

La suite de Laplace relative aux équations qui donnent  $z$  et  $t$  étant limitée dans les deux sens, il en est de même, d'après les propriétés des fonctions  $H$ , de la suite formée par ces fonctions; autrement dit, il existe deux nombres entiers et positifs  $n$  et  $n'$  tels que l'on ait, pour tout entier  $q$  positif ou nul,

$$H_{n+q} = 0, \quad H_{-(n'+q)} = 0.$$

D'un autre côté, les équations

$$H_n = 0, \quad H_{-n'} = 0$$

expriment que la fonction  $z_0$  est de rangs  $n'-1$  par rapport à  $u$  et  $n$  par rapport à  $v$ , et la fonction  $t_0$  de rangs  $n'$  par rapport à  $u$  et  $n-1$  par rapport à  $v$ .

L'équation (1) sera par suite d'un rang au plus égal au plus petit des deux nombres  $n$  et  $n'$ .

Ces résultats étant acquis, les fonctions  $\theta$  sont données par la formule générale :

$$\theta_{n-1} = D_n \left( U_1, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial v} \dots \frac{\partial^{(q-1)} \alpha}{\partial v^{q-1}} \right) + \frac{\lambda_m^r}{\mu_m^q \Delta'} D_v \left( V_1, \beta, \frac{\partial \beta}{\partial u} \dots \frac{\partial^{(r-1)} \beta}{\partial u^{r-1}} \right). \quad (25)$$

Dans cette expression,  $U_1$  et  $V_1$  sont respectivement des fonctions arbitraires et réelles de  $u$  et  $v$ ,  $q$  et  $r$  des nombres entiers ayant pour somme la quantité constante  $n+n'-3$  que nous représentons par  $m-1$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  des fonctions de  $u$  et  $v$  définies par les relations

$$\alpha = \Pi_{-(n'-2)}, \quad \beta = (-1)^{m-1} \frac{\mu_m^{m-1} \Delta'}{\lambda_m \Delta} H_{n-2},$$

enfin  $\lambda_m$  et  $\Delta$  des fonctions de  $u$  et  $\mu_m$  et  $\Delta'$  des fonctions de  $v$  que nous allons déterminer.

L'expression de  $\beta$  montre que cette quantité sera donnée, comme la fonction  $\alpha$ , par un élément de la suite des fonctions H si l'on peut satisfaire à la relation

$$(-1)^{m-1} \frac{\mu_m^{m-1} \Delta'}{\lambda_m \Delta} = 1;$$

c'est-à-dire, d'après la nature des quatre fonctions  $\lambda_m$ ,  $\Delta$ ,  $\mu_m$  et  $\Delta'$ , aux équations

$$(-1)^{m-1} \mu_m^{m-1} \Delta' = \lambda_m \Delta = c, \tag{26}$$

$c$  désignant une quantité constante.

Pour résoudre cette question, remarquons que l'on peut écrire

$$\alpha = H_{-(n-2)} = \sum_{i=1}^{i=m} u_i \zeta_i,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & u_m \\ u'_1 & u'_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & u'_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & u_m^{(m-1)} \end{vmatrix},$$

les quantités  $u_i$  et  $\zeta_i$  désignant respectivement des fonctions de  $u$  et de  $v$  linéairement indépendantes.

On a ensuite, en posant

$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \zeta_m \\ \zeta'_1 & \zeta'_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \zeta'_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \zeta_1^{(m-1)} & \zeta_2^{(m-1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \zeta_m^{(m-1)} \end{vmatrix}.$$

$$\Delta^* \Delta'_1 = \frac{1}{\mu_m^m}.$$

D'après cela, on peut remplacer les équations (26) par les suivantes :

$$\frac{(-1)^{m-1}}{\mu_m \Delta^m} = \lambda_m \Delta = c,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\mu_m = \frac{(-1)^{m-1}}{c \Delta^m}, \quad \lambda_m = \frac{c}{\Delta}, \quad \Delta^m = \frac{c^{m-1}}{c^m}.$$

On obtient ainsi les valeurs de  $\lambda_m$ ,  $\mu_m$  et  $\Delta^m$  en fonction des éléments de la quantité  $H_{-(n-2)}$ .

Il résulte de ce qui précède que la formule (25) donne, en faisant rentrer une constante convenable dans la fonction  $V_1$  et en adoptant les dernières notations,

$$\begin{aligned} \theta_p = & D_u \left( U_1, H_{-(n'-2)}, \frac{\partial}{\partial v} H_{-(n'-2)} \dots \frac{\partial^{(n'+p-3)}}{\partial v^{n'+p-3}} H_{-(n'-2)} \right) \\ & + \frac{1}{\Delta^{n-p-2} \Delta^{n-p-1}} D_v \left( V_1, H_{n-2}, \frac{\partial}{\partial u} H_{n-2} \dots \frac{\partial^{(n-p-2)}}{\partial u^{n-p-2}} H_{n-2} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

On a en particulier, pour les solutions du système (2) ;

soit

$$z_0 = \frac{\theta_0}{H_0}, \quad t_0 = -\frac{H_0}{H_{-1}} \frac{\partial z_0}{\partial u}, \quad (28)$$

soit

$$t_0 = \frac{\theta_1}{H_0}, \quad z_0 = \frac{H_0}{H_1} \frac{\partial t_0}{\partial v}. \quad (29)$$

Si l'on avait à la fois  $H_1 = H_1 = 0$  la solution ne pourrait être obtenue par aucun des deux systèmes (28) ou (29) ; mais les équations (2) donnent dans ce cas

$$z_0 = V_1, \quad t_0 = U_1. \quad (30)$$

Les résultats précédents montrent que les premiers éléments à calculer sont les trois fonctions  $\rho^2$ ,  $\rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial u}$  et  $\rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial v}$ . Il est facile de voir que l'on peut éviter ce calcul et obtenir directement ces fonctions par voie de récurrence, comme il a été fait pour les fonctions  $\varphi$  correspondantes.



L'équation

$$\varphi_1 = \varphi - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{z}$$

donne en effet, en dérivant par rapport à  $u$ ,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} - 2 \frac{z \frac{\partial t}{\partial u} - t \frac{\partial z}{\partial u}}{z^2 + t^2},$$

c'est-à-dire, en tenant compte des relations

$$\frac{\partial t}{\partial u} - z \frac{\partial \varphi}{\partial u} = z', \quad \frac{\partial z}{\partial u} + t \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = - \frac{\partial \varphi}{\partial u} - 2 \frac{z z'}{z^2 + t^2}$$

ou encore, en remarquant que l'on a

$$\rho_1^2 = \rho^2 (z^2 + t^2) \tag{31}$$

$$\rho_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = - \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} (z^2 + t^2) - 2 z z' \rho^2. \tag{32}$$

On aurait de même

$$\rho_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = - \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} (z^2 + t^2) + 2 t t' \rho^2. \tag{33}$$

Les équations (31), (32) et (33) donnent les formules de récurrence cherchées.

Nous avons montré précédemment que l'on pouvait obtenir toutes les fonctions  $\varphi$  en partant des valeurs initiales données par les équations (18) et (18 bis). En ce qui concerne la détermination des valeurs initiales correspondantes de la fonction  $\rho^2$ , il est facile de voir que l'on peut adopter, dans le cas de l'équation (18),

$$\rho^2 = \frac{1}{2v^2} \left[ (U_1 + V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 \right].$$

c'est-à-dire, toutes réductions faites,

$$\rho^2 = (1 + \cos \zeta \cos u) (1 + \sin \zeta \sin v) + \sin \zeta \cos \zeta \sin u \sin v, \tag{34}$$

et dans celui des équations (18 bis),

$$\rho^2 = 1.$$

Comme application des résultats précédents, nous allons vous proposer de calculer les solutions du système (2) relatives aux équations du second rang et à la quatrième forme des relations (6).

Les équations (18) et (34) donnent, tous calculs faits,

$$H_{-1} = \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \sin \zeta (\sin \zeta + \cos v),$$

$$H_1 = \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \cos \zeta (\cos \zeta + \cos u)$$

On a par suite

$$H_{-2} = H_1 = 0;$$

d'où l'on déduit

$$n = n' = 2, \quad H_{-(n-2)} = H_{n-2} = H_0 = \rho^2$$

D'après cela, l'équation (27) donne, par exemple,

$$\theta_1 = \left| \begin{array}{c} U_1 \quad U'_1 \\ \rho^2 \quad \frac{\partial \rho^2}{\partial u} \end{array} \right| + \Delta V_1,$$

Or, l'équation (34) montre que l'on peut prendre

$$\Delta = \left| \begin{array}{cc} 1 + \cos \zeta \cos u & \cos \zeta \sin u \\ -\cos \zeta \sin u & \cos \zeta \cos u \end{array} \right| = \cos \zeta (\cos \zeta + \cos u) = \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

On a donc, d'après les équations (29),

$$t = \frac{\theta_1}{H_0} = U_1 \frac{\partial L \rho^2}{\partial u} - U'_1 + V_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad (35)$$

$$z = \frac{H_0}{H_1} \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}} \left( U_1 \frac{\partial^2 L \rho^2}{\partial u \partial v} + V_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + V'_1 \frac{\partial v}{\partial v} \right);$$

c'est-à-dire, pour la valeur de  $z$ , en remarquant que l'on a

$$\frac{\partial^2 L \rho^2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial L \rho^2}{\partial v},$$

$$z = U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} - V_1 \frac{\partial L \rho^2}{\partial v} + V'_1. \quad (36)$$

On déduit des équations (35) et (36), tous calculs faits, pour la solution correspondante de l'équation (1)

$$z + it = 2 \frac{U_1 e^{iv} \cos \zeta - i V_1 e^{iv} \sin \zeta}{e^{iv} \cos \zeta + e^{iv} \sin \zeta + 1} + \frac{(V_1 e^{iv})'}{e^{iv}} + i \frac{(U_1 e^{iu})'}{e^{iu}}. \quad (37)$$

7°. — Nous avons fait remarquer, à la fin du Chapitre précédent, que l'on passait du système (2) aux équations

$$\frac{\partial z'}{\partial v} + t' \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial u} - z' \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0 \quad (38)$$

en remplaçant les dérivées des inconnues prises par rapport à  $u$  par celles prises par rapport à  $v$  et réciproquement.

D'après cela, si l'on veut obtenir directement les quantités  $z'$  et  $t'$  on est conduit à considérer les fonctions  $\theta'$  définies par les égalités

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_p}{\partial v} \theta'_p - H_p \frac{\partial \theta'_p}{\partial v} &= H_{p-1} \theta'_{p+1}, \\ H_p \frac{\partial \theta'_{p+1}}{\partial u} - \frac{\partial H_p}{\partial u} \theta'_{p+1} &= H_{p+1} \theta'_p \end{aligned} \quad (39)$$

et qui satisfont, comme les fonctions  $\theta$ , à la formule de récurrence

$$\theta'_{p-1} \theta'_{p+1} = \theta'_p \frac{\partial^2 L \theta'_p}{\partial u \partial v}$$

Posons, par analogie avec ce qui a été fait dans le paragraphe précédent,

$$\frac{\theta'_p}{z'_p} = \frac{\theta'_{p+1}}{t'_p} = H_p; \quad (40)$$

les équations (39) donnent

$$\frac{\partial z'_p}{\partial v} + t'_p \frac{H_{p-1}}{H_p} = 0, \quad \frac{\partial t'_p}{\partial u} - z'_p \frac{H_{p+1}}{H_p} = 0. \quad (41)$$

On a de plus les relations

$$t'_p H_p = z'_{p+1} H_{p+1} = \theta'_{p+1}. \quad (42)$$

D'un autre côté, les propriétés corrélatives des fonctions  $\theta$  et  $\theta'$  montrent que la fonction  $\theta_p$  étant donnée par l'équation (27) on a

$$\begin{aligned} \theta'_p &= D_v \left( V_2, H_{-(n'-2)}, \frac{\partial}{\partial u} H_{-(n'-2)}, \dots, \frac{\partial^{(n'+p-3)}}{\partial u^{n'+p-3}} H_{-(n'-2)} \right) \\ &+ \Delta^{n'+p-3} \Delta'^{n'+p-2} D_u \left( U_2, H_{n-2}, \frac{\partial}{\partial v} H_{n-2}, \dots, \frac{\partial^{(n-p-2)}}{\partial v^{n-p-2}} H_{n-2} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

les quantités  $U_2$  et  $V_2$  étant respectivement des fonctions réelles des variables  $u$  et  $v$ .

Les équations (40) donnent en particulier pour les solutions du système (38),

soit

$$z'_0 = \frac{\theta'_0}{H_0}, \quad l'_0 = -\frac{H_0}{H_{-1}} \frac{\partial z'_0}{\partial v}; \quad (44)$$

soit

$$l'_0 = \frac{\theta'_1}{H_0}, \quad z'_0 = \frac{H_0}{H_1} \frac{\partial l'_0}{\partial u}. \quad (45)$$

Si l'on avait à la fois  $H_{-1} = H_1 = 0$  les valeurs de  $z'_0$  et  $l'_0$  seraient obtenues par les deux expressions

$$z'_0 = U_1, \quad l'_0 = V_2. \quad (46)$$

8°. — Les équations (20), (21), (22) et (24) montrent qu'à toute valeur de la fonction  $\theta_p$  donnée par la formule (27) correspond, par voie récurrente, un système de solution des équations (2), linéaire et homogène par rapport aux deux fonctions arbitraires  $U_1$  et  $V_1$  ainsi qu'à un certain nombre de leurs dérivées ; de même, à toute fonction  $\theta'_p$  définie par la formule (43) correspond un système de solutions des équations (38) jouissant de la même propriété par rapport aux fonctions  $U_2$  et  $V_2$ .

D'après cela, l'équation

$$d(z + it)e^{-i\varphi} = (z' du - i l' dv)e^{-i\varphi}$$

est une relation différentielle, linéaire et homogène par rapport aux quatre fonctions  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $V_1$  et  $V_2$ . On en déduit,  $a$  et  $b$  désignant deux constantes réelles et arbitraires,

$$z + it = ae^{i(\varphi+b)} + e^{i\varphi} \int (z' du - i l' dv) e^{-i\varphi}$$

ou encore, en égalant les parties réelles et les parties imaginaires et tenant compte des équations (20),

$$\theta_0 = aH_0 \cos(\varphi + b) + F(U_2, V_2),$$

$$\theta_1 = aH_0 \sin(\varphi + b) + \Phi(U_2, V_2).$$

les expressions  $F$  et  $\Phi$  étant des fonctions connues de  $U_2$  et de  $V_2$  et nulles identiquement pour  $U_2 = V_2 = 0$ .

Les équations précédentes permettent d'obtenir, de proche en proche, au moyen des deux premières équations (19) et par des seules opérations de dérivation, pour une fonction  $\theta_p$  quelconque, une expression de la forme

$$\theta_p = f(u, v) + \psi(U_1, V_1),$$

$f$  désignant une fonction connue et  $\psi$  une expression qui comme  $F$  et  $\phi$  est nulle identiquement pour  $U_2 = V_2 = 0$ .

Or, on peut déterminer le nombre  $p$  de manière que la fonction  $\theta_p$  ne contienne, par exemple, aucune dérivée de la fonction  $U_1$ . On a d'après cela

$$U_1 = \chi(V_1) + f(u, v) + \psi(U_2 V_2),$$

$\chi$  désignant une expression différentielle linéaire et homogène par rapport à la fonction  $V_1$ .

Appelons  $U_{1,0}$  et  $V_{1,0}$  un système de valeurs de  $U_1$  et de  $V_1$  qui correspondent respectivement à  $U_2 = 0$  et  $V_2 = 0$ ; l'équation précédente peut s'écrire

$$U_1 = \chi(V_{1,0}) + f(u, v) + \psi(U_2, 0)$$

ou encore, en remarquant que l'on doit avoir

$$U_{1,0} = \chi(V_{1,0}) + f(u, v), \quad (47)$$

$$U_1 = U_{1,0} + \psi(U_2, 0). \quad (48)$$

On trouverait de même pour les fonctions  $V_{1,0}$  et  $V_1$  des expressions de la forme

$$V_{1,0} = \chi_1(U_{1,0}) + f_1(u, v), \quad (49)$$

$$V_1 = V_{1,0} + \psi_1(0, V). \quad (50)$$

Les équations (48) et (50) montrent que l'on obtiendra les valeurs de  $U_1$  et de  $V_1$ , respectivement en fonction de  $U_2$  et de  $V_2$ , lorsque les quantités  $U_{1,0}$  et  $V_{1,0}$  seront déterminées. C'est la question que nous allons maintenant traiter.

Considérons pour cela les deux équations (47) et (49); la forme des fonctions  $\theta$  montre que l'on peut les écrire

$$U_{1,0} = \sum_i u_i f_i(V_{1,0}), \quad V_{1,0} = \sum_j v_j \varphi_j(U_{1,0}), \quad (51)$$

$u_i$  et  $v_j$  désignant respectivement des fonctions des variables  $u$  et  $v$  linéairement indépendantes,  $f_i$  et  $\varphi_j$  des expressions différentielles et linéaires par rapport aux deux fonctions  $V_{1,0}$  et  $U_{1,0}$ .

Pour que les équations précédentes puissent être vérifiées, il est nécessaire et suffisant que l'on ait, quels que soient  $i$  et  $j$ ,  $a_i$  et  $b_j$  désignant des quantités constantes

$$f_i(V_{1,0}) = a_i, \quad \varphi_j(U_{1,0}) = b_j$$

D'après cela, les équations (51) donnent pour  $U_{1,0}$  et  $V_{1,0}$  des expressions de la forme

$$U_{1,0} = \sum a_i u_i, \quad V_{1,0} = \sum b_j v_j. \quad (52)$$

les quantités  $a_i$  et  $b_j$  devant satisfaire au système d'équations linéaires certainement compatibles

$$f_i(\sum v_j b_j) = a_i, \quad \varphi_j(\sum u_i a_i) = b_j,$$

Ces résultats montrent que les fonctions  $U_{1,0}$  et  $V_{1,0}$  ne dépendent, en réalité, que d'un seul système de constantes  $a_i$  ou  $b_j$  dont plusieurs d'entre elles peuvent être prises arbitrairement; car, s'il en était autrement, la fonction  $ac^{(\varphi+b)}$  ne pourrait contenir aucune constante arbitraire.

Il n'est pas inutile de remarquer que les valeurs  $U_{1,0}$  et  $V_{1,0}$  de  $U_1$  et de  $V_1$  sont celles qui correspondent, à un facteur constant près, aux solutions de module égal à l'unité de l'équation (1).

Proposons-nous maintenant le problème inverse de celui que nous venons de traiter c'est-à-dire de déterminer  $U_2$  et  $V_2$  respectivement en fonction de  $U_1$  et de  $V_1$ .

Les équations

$$\frac{\partial t}{\partial u} - z \frac{\partial \varphi}{\partial u} = z', \quad \frac{\partial z}{\partial v} + t \frac{\partial \varphi}{\partial v} = t'$$

donnent, en tenant compte des relations (40),

$$\theta'_0 = F'(U_1, V_1), \quad \theta'_1 = \Phi'(U_1, V_1),$$

$F'$  et  $\Phi'$  étant des expressions différentielles linéaires et homogènes par rapport aux fonctions  $U_1$  et  $V_1$ .

Les équations précédentes permettent d'obtenir, de proche en proche, au moyen des relations (39), pour une fonction  $\theta'_p$  quelconque, une expression de la forme

$$\theta''_p = \psi'(U_1, V_1),$$

$\psi'$  désignant une fonction de même nature que  $F'$  et  $\Phi'$ .

On en déduit, pour une valeur convenable de  $p$ ,

$$V_2 = \mathcal{X}'(U_2) + \psi'(U_1, V_1)$$

ou, en remarquant que l'on a

$$\begin{aligned} 0 &= \chi'(U_2) + \psi'(U_1, V_{1,0}) \\ V_2 &\equiv \psi'(0, V_1 = V_{1,0}). \end{aligned} \tag{53}$$

On obtiendrait de même

$$U_2 = \psi_1'(U_1 - U_{1,0}, 0). \tag{54}$$

Les fonctions  $U_{1,0}$  et  $V_{1,0}$  ayant été déterminées précédemment, les équations (53) et (54) donnent la solution du problème.

---

## CHAPITRE III

---

### **Considérations sur les surfaces successives obtenues par application de la méthode de transformation de Laplace en prenant comme point de départ les lignes de courbure d'une surface réelle.**

9°. — Soient  $\Sigma$  une surface réelle et  $u$  et  $v$  les coordonnées curvilignes de ses lignes de courbure.

La théorie des congruences rectilignes <sup>(1)</sup> montre que le système conjugué  $u = c^{te}$  et  $v = c^{te}$  tracé sur la surface  $\Sigma$  permet d'obtenir, de proche en proche, une suite illimitée ou non de surfaces

$$\dots \Sigma_{-p}, \Sigma_{-(p-1)} \dots \Sigma_{-1}, \Sigma, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{q-1}, \Sigma_q, \dots \quad (1)$$

Nous supposerons que ces surfaces sont déterminées, dans le sens des indices croissants, en partant des tangentes aux courbes  $v = c^{te}$ .

Enfin, nous désignerons respectivement par  $\Gamma_n$  et  $\Delta_n$  les courbes  $v = c^{te}$  et  $u = c^{te}$  qui passent en un point  $M_n$  de  $\Sigma_n$  correspondant à  $M$  de  $\Sigma$  et par  $A_{n+1}, A'_{n+1}, A''_{n+1}$  les paramètres directeurs de la tangente commune aux courbes  $\Gamma_n$  et  $\Delta_{n+1}$  aux points  $M_n$  et  $M_{n+1}$ .

Aux surfaces de la suite (1) nous associerons les surfaces

$$\dots S_{-p}, S_{-(p-1)} \dots S_{-1}, S, S_1, \dots, S_{q-1}, S_q, \dots \quad (2)$$

obtenues de la même manière et définies de la façon suivante :

La surface  $S$  sera le lieu des centres de courbure de la surface  $\Sigma$  le long des courbes  $\Gamma$  et le sens des indices croissants sera encore déterminé en partant des tangentes aux courbes  $v = c^{te}$ .

Enfin, nous désignerons respectivement par  $C_n$  et  $D_n$  les courbes  $v = c^{te}$  et  $u = c^{te}$  qui passent en un point  $P_n$  de  $S_n$  correspondant encore à  $M$  de  $\Sigma$  et

---

<sup>(1)</sup> DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. II, 2<sup>e</sup> édit., p. 16 et 17.



par  $B_n, B'_n, B''_n$ , les paramètres directeurs de la tangente commune aux courbes  $C_n$  et  $D_{n+1}$ , aux points  $P_n$  et  $P_{n+1}$ .

Il est à remarquer que la surface  $S_1$  sera le lieu des centres de courbure de la surface  $\Sigma$  le long des courbes  $\Delta$ .

Cela posé, considérons quatre suites de courbes  $\Gamma_n, \Delta_n, C_n$  et  $D_n$  passant par les points  $M_n$  et  $P_n$  des surfaces  $\Sigma_n$  et  $S_n$ ; nous allons démontrer, relativement à ces courbes, un certain nombre de propriétés qui résultent de leur définition même.

Les surfaces  $S$  et  $S_1$  (voir fig. p. 41) représentant le lieu des centres de courbure de la surface  $\Sigma$ , la tangente commune aux courbes  $D_1$  et  $C$  est perpendiculaire au plan tangent à  $\Sigma$  en  $M$ ; de plus, les binormales à ces courbes sont respectivement parallèles aux tangentes aux courbes  $\Gamma$  et  $\Delta$ .

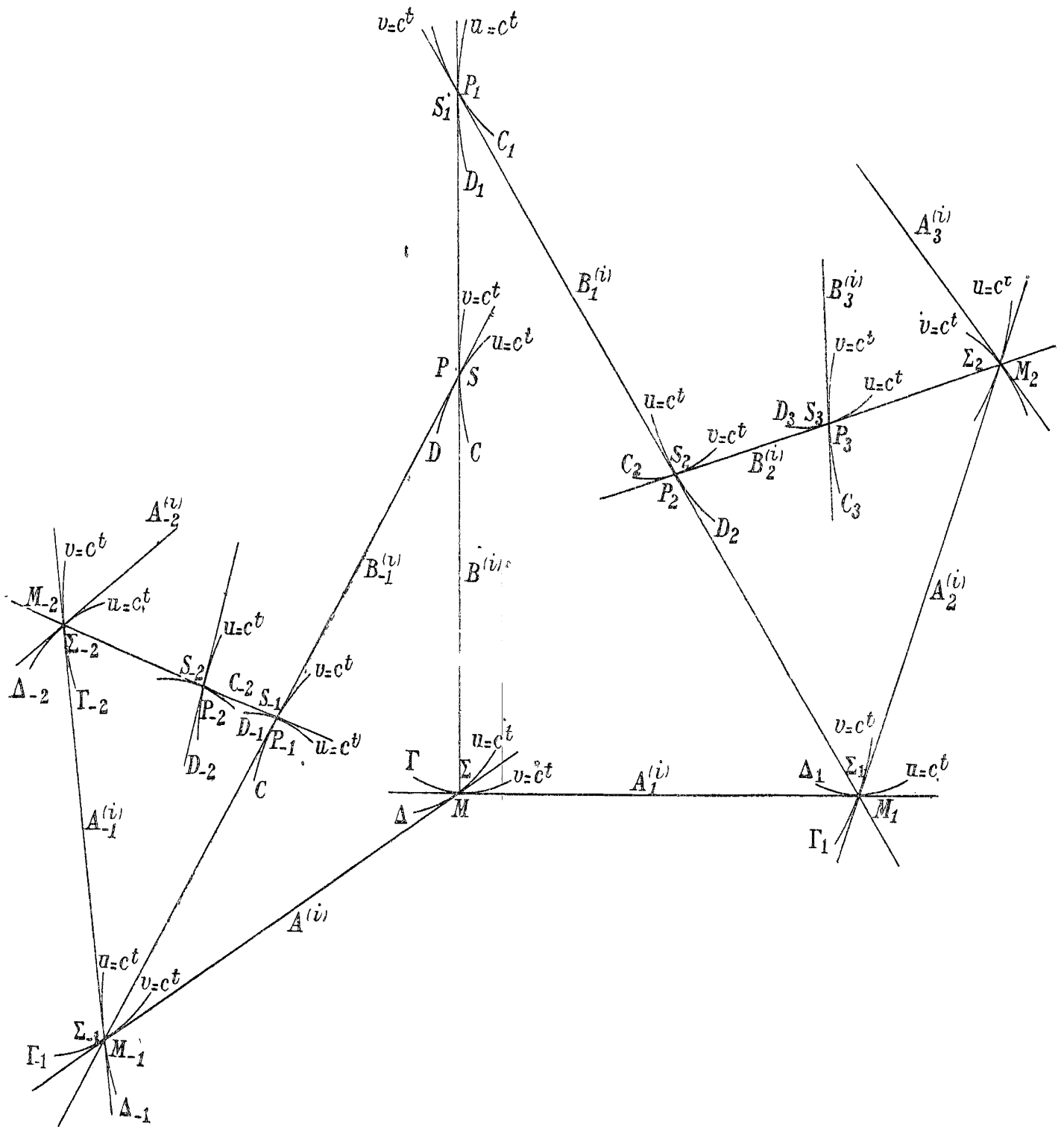
On déduit immédiatement de ces propriétés que la tangente commune aux courbes  $D$  et  $C_{-1}$ , qui n'est autre chose que la caractéristique du plan osculateur à la courbe  $D_1$  quand  $u$  varie, est perpendiculaire au plan osculateur à la courbe  $\Gamma$  ou encore au plan tangent à  $\Sigma_1$  en  $M_1$ ; par suite, la binormale à la courbe  $D$  est parallèle à la caractéristique du plan osculateur à la courbe  $\Gamma$  quand  $v$  varie, c'est-à-dire à la tangente à la courbe  $\Gamma_1$ ; enfin, la binormale à la courbe  $C_{-1}$  étant perpendiculaire au plan tangent à  $S$  en  $P$  est parallèle à la tangente commune aux courbes  $\Gamma$  et  $\Delta_1$ .

Il résulte de ce qui précède que les propriétés corrélatives que nous avons énoncées relativement aux surfaces  $S_1$ .  $S$  et  $\Sigma$  se retrouvent sur les surfaces  $S, S_{-1}$  et  $\Sigma_1$  et par conséquent, de proche en proche, sur un groupe quelconque de surfaces  $S_{-(n-1)}, S_{-n}$  et  $\Sigma_n$ .

On peut donc, d'après cela, adopter pour les paramètres directeurs des binormales aux quatre suites de courbes que nous avons envisagées les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_n, & \quad B_{-(n+1)}, \quad B'_{-(n+1)}, \quad B''_{-(n+1)}, \\
 \Delta_n, & \quad B_{-(n-1)}, \quad B'_{-(n-1)}, \quad B''_{-(n-1)}, \\
 C_n, & \quad A_{-n}, \quad A'_{-n}, \quad A''_{-n}, \\
 D_n, & \quad A_{-(n-2)}, \quad A'_{-(n-2)}, \quad A''_{-(n-2)}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

On sait que toute droite  $P_n P_{n+1}$  passe par le point correspondant  $M_n$  de  $\Sigma_n$ ; de plus, nous démontrerons dans le Chapitre iv que les deux tangentes aux courbes  $\Gamma_n$  et  $\Delta_n$  aux points  $M_n$  et  $M_{-n}$  sont rectangulaires.



10°. — Les résultats précédents montrent l'importance des deux séries de paramètres directeurs  $A_n, A'_n, A''_n; B_n, B'_n, B''_n$ , qui donnent à la fois les directions des tangentes et des plans osculateurs aux quatre suites de courbes  $\Gamma_n, \Delta_n, C_n$  et  $D_n$ .

Nous allons nous proposer, dans ce paragraphe, de montrer comment on peut obtenir ces quantités, de proche en proche, en fonction des cosinus directeurs  $a, a', a''; b, b', b''$  et  $c, c', c''$  des tangentes aux courbes  $\Gamma$  et  $\Delta$  et de la normale à la surface  $\Sigma$ .

Tout d'abord, les propriétés du trièdre mobile attaché à une surface et formé en chaque point par les tangentes aux lignes de courbure et la normale à la surface (1) montrent que les neuf cosinus directeurs précédents satisfont aux deux systèmes d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial b^{(i)}}{\partial u} = -a^{(i)}r, \quad \frac{\partial a^{(i)}}{\partial v} = b^{(i)}r_1; \quad (4)$$

$$\frac{\partial c^{(i)}}{\partial u} = a^{(i)}q, \quad \frac{\partial c^{(i)}}{\partial v} = -b^{(i)}p_1; \quad (5)$$

$$i=1,2,3.$$

$p_1, q, r$  et  $r_1$  désignant des quantités qui vérifient les relations

$$\frac{\partial p_1}{\partial u} = -qr_1, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = rp_1. \quad (6)$$

Les équations (4) et (5) donnent, par des éliminations convenables, en tenant compte du système (6), les trois équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a^{(i)}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial a^{(i)}}{\partial v} \frac{\partial Lr_1}{\partial u} + a^{(i)} rr_1 &= 0 \\ \frac{\partial^2 b^{(i)}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial b^{(i)}}{\partial u} \frac{\partial Lr}{\partial v} + b^{(i)} rr_1 &= 0 \\ \frac{\partial^2 c^{(i)}}{\partial u \partial v} - \frac{\partial c^{(i)}}{\partial u} \frac{\partial Lq}{\partial v} - \frac{\partial c^{(i)}}{\partial v} \frac{\partial Lp_1}{\partial u} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

D'autre part, on a pour la courbe  $\Gamma$ , par exemple, d'après la définition même du plan osculateur

$$\sum a^{(i)} B_i = 0, \quad \sum \frac{\partial a^{(i)}}{\partial u} B_i = 0. \quad (8)$$

---

(1) DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. I, 2<sup>e</sup> édit., p. 65 et 66 et t. II, 2<sup>e</sup> édit. p. 384.

Dérivons ces deux dernières équations par rapport à  $v$ ; on obtient, en tenant compte des équations (7) et (8),

$$\begin{aligned} \sum a^{(v)} \frac{\partial B_i^{(v)}}{\partial v} + \sum B_i^{(v)} \frac{\partial a^{(v)}}{\partial v} &= 0 \\ \sum_{B^{-1}} \frac{\partial a^{(v)}}{\partial v} \frac{\partial L r_1}{\partial u} + \sum \frac{\partial a^{(v)}}{\partial u} \frac{\partial B_i^{(v)}}{\partial v} &= 0. \end{aligned}$$

En combinant convenablement les quatre équations précédentes on en déduit les deux relations

$$\begin{aligned} \sum \left( \frac{\partial a^{(v)}}{\partial u} - a^{(v)} \frac{\partial L r_1}{\partial u} \right) B_i^{(v)} &= 0 \\ \sum \left( \frac{\partial a^{(v)}}{\partial u} - a^{(v)} \frac{\partial L r_1}{\partial u} \right) \frac{\partial B_i^{(v)}}{\partial v} &= 0, \end{aligned}$$

qui expriment que la direction définie par les quantités entre parenthèses est celle de la binormale à la courbe  $D$ , c'est-à-dire de la tangente à la courbe  $\Gamma_1$ .

On conclut aisément de ce qui précède que la loi de succession des directions  $A_n, A'_n, A''_n$  n'est autre chose que celle qui résulte de l'application de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre

On obtiendrait évidemment un résultat identique en ce qui concerne les directions  $B_n, B'_n, B''_n$  des tangentes communes aux courbes  $C_n$  et  $D_{n+1}$ .

Cela étant, reprenons le système (4) et posons

$$\begin{aligned} \frac{A^{(v)}}{b^{(v)}} = \frac{A_1^{(v)}}{a^{(v)}} = \tau & \quad (9) \\ r_1 = \frac{\tau_1}{\tau}, \quad r = \frac{\tau_1}{\tau}, & \end{aligned}$$

les quantités  $\tau, \tau_1$ , et  $\tau_{-1}$ , étant assujetties à satisfaire à la relation

$$\tau_1 \tau_{-1} = \tau^2 \frac{\partial^2 L \tau}{\partial u \partial v}.$$

Il est facile de voir que dans ces conditions les équations (4) et (9) sont

tout à fait analogues aux équations (20) et (21) du Chapitre II. On peut donc écrire d'une façon générale

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_p}{\partial u} A_p^{(v)} - \tau_p \frac{\partial A_p^{(v)}}{\partial u} &= \tau_{p-1} A_{p-1}^{(v)}, \\ \tau_p \frac{\partial A_{p+1}^{(v)}}{\partial v} - \frac{\partial \tau_p}{\partial v} A_{p+1}^{(v)} &= \tau_{p+1} A_p^{(v)}, \\ \tau_{p-1} \tau_{p+1} &= \tau_p^2 \frac{\partial^2 \mathbf{L} \tau_p}{\partial u \partial v}. \end{aligned} \quad (10)$$

Il résulte de ce qui précède que la détermination des paramètres directeurs  $A_n, A'_n, A''_n$  revient, au fond, à celle des fonctions  $\tau_n$ . C'est cette question que nous allons maintenant résoudre.

On sait <sup>(1)</sup> que les cosinus directeurs de la normale à une surface sont donnés par les expressions

$$c = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \quad c' = \frac{i(\beta - \alpha)}{1 + \alpha\beta}, \quad c'' = \frac{\alpha\beta - 1}{1 + \alpha\beta} \quad (11)$$

dans lesquelles  $\alpha$  et  $\beta$  désignent les quantités définies par les équations (27) du Chapitre I.

Cela étant, dérivons les équations (11) successivement par rapport à  $u$  et par rapport à  $v$ ; on obtient, tous calculs faits et en posant pour simplifier l'écriture

$$\gamma = 1 + \alpha\beta, \quad (12)$$

$$\frac{\partial c}{\partial u} = \frac{2\lambda'}{\gamma} (\cos \varphi - \mu c), \quad \frac{\partial c'}{\partial u} = \frac{2\lambda'}{\gamma} (-\sin \varphi - \mu c'), \quad \frac{\partial c''}{\partial u} = \frac{2\lambda'}{\gamma} [(1 - c'')\mu]; \quad (13)$$

$$\frac{\partial c}{\partial v} = -\frac{2\mu'}{\gamma} (-\sin \varphi - \lambda c), \quad \frac{\partial c'}{\partial v} = -\frac{2\mu'}{\gamma} (-\cos \varphi - \lambda c'), \quad \frac{\partial c''}{\partial v} = -\frac{2\mu'}{\gamma} [(1 - c'')\lambda]. \quad (14)$$

Si l'on compare ces résultats aux équations (5) et si de plus on remarque que les quantités entre parenthèses ont pour chacun des systèmes (13) et (14) une somme de carrés égale à un et forment avec  $c, c', c''$  un déterminant de valeur un, on en conclut que l'on doit avoir

$$p = -\frac{2\mu'}{\gamma}, \quad q = \frac{2\lambda'}{\gamma}$$

---

<sup>(1)</sup> DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. I, 2<sup>e</sup> édit., p. 297.

D'après cela, le système (6) et les équations (40) du Chapitre précédent donnent, en adoptant pour  $\tau$  la valeur

$$\tau = H\gamma, \quad (15)$$

les deux relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial v} \theta' - \tau \frac{\partial \theta'}{\partial v} &= \tau_{-1} \theta'_{-1}, \\ \tau \frac{\partial \theta'_{-1}}{\partial u} - \frac{\partial \tau}{\partial u} \theta'_{-1} &= \tau_1 \theta'. \end{aligned} \quad (16)$$

On en conclut, d'après les équations (39) du Chapitre II, que l'on peut écrire d'une façon générale

$$\frac{\partial \tau_{\mu}}{\partial v} \theta'_{\mu} - \tau_{\mu} \frac{\partial \theta'_{\mu}}{\partial v} = \tau_{\mu-1} \theta'_{\mu+1}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\mu} \frac{\partial \theta'_{\mu+1}}{\partial u} - \frac{\partial \tau_{\mu}}{\partial u} \theta'_{\mu+1} &= \tau_{\mu+1} \theta'_{\mu}, \\ \tau_{\mu-1} \tau_{\mu+1} &= \tau_{\mu}^2 \frac{\partial L \tau_{\mu}}{\partial u \partial v}. \end{aligned} \quad (18)$$

De plus, la théorie des équations adjointes permet d'obtenir les deux autres séries de relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{\mu}}{\partial u} \theta_{\mu} - \tau_{\mu} \frac{\partial \theta_{\mu}}{\partial u} &= \tau_{\mu-1} \theta_{\mu+1}, \\ \tau_{\mu} \frac{\partial \theta_{\mu+1}}{\partial v} - \frac{\partial \tau_{\mu}}{\partial v} \theta_{\mu+1} &= \tau_{\mu+1} \theta_{\mu}. \end{aligned} \quad (19)$$

Il résulte de ce qui précède que les fonctions  $\tau_n$  définies par les équations (15) et (17) ou (19) satisfont à la question que nous nous étions posée.

Sans entrer dans le détail des calculs en ce qui concerne la détermination des paramètres directeurs  $B_n, B'_n, B''_n$ , on verrait facilement qu'en posant

$$e^{(\iota)} \tau = B^{(\iota)} \quad (20)$$

dans la troisième équation (7) on peut écrire, d'une façon générale, les deux séries de relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_p^{(\iota)}}{\partial v} \theta'_{\mu} - B_p^{(\iota)} \frac{\partial \theta'_{\mu}}{\partial v} &= B_{\mu-1}^{(\iota)} \theta'_{\mu+1}, \\ B_p^{(\iota)} \frac{\partial \theta'_{\mu+1}}{\partial u} - \frac{\partial B_p^{(\iota)}}{\partial u} \theta'_{\mu+1} &= B_{\mu+1}^{(\iota)} \theta'_{\mu}, \end{aligned} \quad (21)$$

qui, avec l'équation (20), permettent d'obtenir les paramètres directeurs cherchés.

De même que dans le cas des fonctions  $\tau_n$ , la théorie des équations adjointes donne les deux autres séries de relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_p^{(*)}}{\partial u} \theta_p - B_p^{(*)} \frac{\partial \theta_p}{\partial u} &= B_{p-1}^{(*)} \theta_{p+1} \\ B_p^{(*)} \frac{\partial \theta_{p+1}}{\partial v} - \frac{\partial B_p^{(*)}}{\partial v} \theta_{p+1} &= B_{p+1}^{(*)} \theta_p \end{aligned} \quad (22)$$

11°. — Nous terminerons ce Chapitre de généralités en montrant comment on peut obtenir, par voie récurrente, les coordonnées cartésiennes  $x_n, y_n, z_n$ ;  $X_n, Y_n, Z_n$  des surfaces  $\Sigma_n$  et  $S_n$  en fonction des éléments qui déterminent la surface  $\Sigma$ .

On sait (\*) que les coordonnées  $x, y, z$  de la surface  $\Sigma$  et  $X, Y, Z$  de la surface  $S$  sont données par les formules

$$x - iy = \frac{\beta g}{\gamma} - p, \quad x + iy = \frac{\alpha g}{\gamma} - q, \quad z = -\frac{g}{\gamma}; \quad (23)$$

$$X - iY = -p + \beta(s + \sqrt{rt}), \quad X + iY = -q + \alpha(s + \sqrt{rt}), \quad Z = -g + (\gamma - 2)(s + \sqrt{rt}). \quad (24)$$

De plus, le rayon de courbure de  $\Sigma$ , le long des courbes  $\Gamma$ , est donné par l'expression

$$2R = -g + \gamma(s + \sqrt{rt}). \quad (25)$$

Dans les formules précédentes les notations sont celles adoptées dans le Chapitre I et les quantités  $r, s, t$  représentent les trois dérivées partielles du second ordre de  $\xi$  par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$ ; enfin on a posé pour simplifier l'écriture,

$$p\alpha + q\beta - \xi = g, \quad 1 + \alpha\beta = \gamma. \quad (26)$$

Cela étant, nous allons d'abord mettre les formules (24) sous une forme plus simple qui ne renfermera plus les fonctions  $r, s$  et  $t$ .

Pour cela, nous remarquerons que l'on a, d'après les formules d'Olinde Rodrigue,

$$\frac{\partial z}{\partial u} + R \frac{\partial c''}{\partial u} = 0. \quad (27)$$

---

(\*) DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. I, 2<sup>e</sup> édit., p. 297.

On déduit de cette relation, en remarquant que les équations (26) donnent, d'après les résultats du Chapitre I,

$$\begin{aligned} d\gamma &= 2(\mu\lambda'du + \lambda\mu'dv), \\ dg &= 2(\mu l'du + \lambda m'dv) \end{aligned} \quad (28)$$

la valeur du rayon de courbure principal R

$$R = \frac{1}{2} \left( \gamma \frac{l'}{\lambda'} - g \right).$$

Cette dernière équation, comparée à la relation (25), montre que l'on a

$$s + \sqrt{rl} = \frac{l'}{\lambda'}.$$

D'après cela, on peut écrire les formules (24) sous la forme suivante qui ne renferme plus les dérivés  $r$ ,  $s$  et  $t$  :

$$X - iY = \beta \frac{l'}{\lambda'} - p, \quad X + iY = \alpha \frac{l'}{\lambda'} - q, \quad 2Z = (\gamma - 2) \frac{l'}{\lambda'} - g. \quad (29)$$

Ce résultat étant acquis, considérons d'abord le cas de la surface  $\Sigma_n$ .

On a les deux systèmes d'équations

$$\frac{A_{n+1}}{\frac{\partial x_n}{\partial u}} = \frac{A'_{n+1}}{\frac{\partial y_n}{\partial u}} = \frac{A''_{n+1}}{\frac{\partial z_n}{\partial u}} = K_n, \quad (30)$$

$$\frac{A_n}{\frac{\partial x_n}{\partial v}} = \frac{A'_n}{\frac{\partial y_n}{\partial v}} = \frac{A''_n}{\frac{\partial z_n}{\partial v}} = K'_n,$$

$K_n$  et  $K'_n$  désignant les valeurs communes des rapports précédents.

Les deux premières équations (10) et les équations (30) donnent,  $\sigma_n$  représentant l'une quelconque des coordonnées  $x_u, y_u, z_u$ , les deux équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial u \partial v} + \frac{\partial L}{\partial v} \frac{K_n}{\tau_n} \frac{\partial \sigma_n}{\partial u} - \frac{\tau_{n+1} K'_n}{\tau_n K_n} \frac{\partial \sigma_n}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_n}{\partial u \partial v} + \frac{\partial L}{\partial u} \frac{K'_n}{\tau_n} \frac{\partial \sigma_n}{\partial v} + \frac{\tau_{n-1} K_n}{\tau_n K'_n} \frac{\partial \sigma_n}{\partial u} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$



Or les courbes  $u$  et  $v$  tracent sur la surface  $\Sigma_n$  un système conjugué, on a donc les relations de récurrence (\*)

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1} &= \sigma_n - \frac{K_n \tau_n}{K'_n \tau_{n+1}} \frac{\partial \sigma_n}{\partial u}, \\ \sigma_{n-1} &= \sigma_n + \frac{K'_n \tau_n}{K_n \tau_{n-1}} \frac{\partial \sigma_n}{\partial v}. \end{aligned} \tag{32}$$

Le problème que nous avons en vue revient donc à la détermination du rapport  $\frac{K_n}{K'_n}$ .

Pour effectuer ce calcul, nous remarquerons tout d'abord que les équations (5) et (13) donnent

$$a'' = \frac{2\mu}{\gamma} = \frac{2\theta_1}{\tau};$$

c'est-à-dire, en tenant compte des équations (9),

$$A''_1 = 2\theta_1.$$

Les relations (10) et (19) donnent par suite

$$A''_n = 2\theta_n. \tag{33}$$

Il résulte de cela que l'on a, d'après les équations (30 et (32),

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n - \frac{\theta_{n+1} \tau_n}{\theta_n \tau_{n+1}} \frac{\partial z_n}{\partial v}, \\ z_{n-1} &= z_n + \frac{\theta_{n+1} \tau_{n-1}}{\theta_n \tau_n} \frac{\partial z_n}{\partial u}. \end{aligned} \tag{34}$$

Posons d'une manière générale

$$z_n \tau_n = -t_n.$$

Les équations précédentes donnent, en tenant compte des relations (19),

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_n}{\partial u} \theta_n - t_n \frac{\partial \theta_n}{\partial u} &= t_{n-1} \theta_{n+1}, \\ t_n \frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial v} - \frac{\partial t_n}{\partial v} \theta_{n+1} &= t_{n-1} \theta_n. \end{aligned} \tag{35}$$

On obtient ainsi, par voie récurrente, toutes les fonctions  $t_p$  en partant de la valeur initiale

$$t = Hg \tag{36}$$

déduite de la dernière équation (23).

(\*) DARBOUX, *Theorie générale des surfaces* t. II 2<sup>e</sup> édit., p. 18 et 19.

Les équations (30) donnent par suite, d'après ce qui précède,

$$\frac{K_n}{K'_n} = \frac{\theta_{n+1} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{t_n}{\tau_n} \right)}{\theta_n \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{t_n}{\tau_n} \right)} \quad (37)$$

On peut donc écrire les équations (32)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\frac{\partial \sigma_n}{\partial u}} &= - \frac{\theta_{n+1} \tau_n \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{t_n}{\tau_n} \right)}{\theta_n \tau_{n+1} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{t_n}{\tau_n} \right)} \\ \frac{\sigma_{n-1} - \sigma_n}{\frac{\partial \sigma_n}{\partial v}} &= \frac{\theta_n \tau_n \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{t_n}{\tau_n} \right)}{\theta_{n+1} \tau_{n-1} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{t_n}{\tau_n} \right)} \end{aligned} \quad (38)$$

Considérons maintenant le cas des surfaces  $S_n$  et posons

$$\frac{B_n}{\frac{\partial X_n}{\partial u}} = \frac{B'_n}{\frac{\partial Y_n}{\partial u}} = \frac{B''_n}{\frac{\partial Z_n}{\partial u}} = M_n, \quad (39)$$

$$\frac{B_{n-1}}{\frac{\partial X_n}{\partial v}} = \frac{B'_{n-1}}{\frac{\partial Y_n}{\partial v}} = \frac{B''_{n-1}}{\frac{\partial Z_n}{\partial v}} = M'_n,$$

En raisonnant comme dans le cas précédent on verrait que l'on peut écrire,  $s_n$  désignant l'une quelconque des coordonnées  $X_n, Y_n, Z_n$ ,

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= s_n - \frac{M_n \theta'_n}{M'_n \theta'_{n+1}} \frac{\partial s_n}{\partial u}, \\ s_{n+1} &= s_n + \frac{M'_n \theta'_n}{M_n \theta'_{n-1}} \frac{\partial s_n}{\partial v}. \end{aligned} \quad (40)$$

Pour déterminer le rapport  $\frac{M_n}{M'_n}$  nous remarquerons d'abord que l'on a, d'après la troisième équation (11),

$$c''\gamma = \gamma - 2;$$

c'est-à-dire, en tenant compte des équations (15) et (20)

$$B'' = \tau - 2H.$$

Les relations (17) et (21) et les équations (39) du chapitre précédent donnent ensuite d'une manière générale

$$B''_n = \tau_n - 2H_n. \quad (41)$$

D'après cela, les équations (39) et (40) donnent

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= Z_n - \frac{(\tau_n - 2H_n)\theta'_n}{(\tau_{n-1} - H_{n-1})\theta'_{n+1}} \frac{\partial Z_n}{\partial v}, \\ Z_{n-1} &= Z_n + \frac{(\tau_{n-1} - 2H_{n-1})\theta'_n}{(\tau_n - 2H_n)\theta'_{n-1}} \frac{\partial Z_n}{\partial u}. \end{aligned} \quad (42)$$

Je dis de plus que si l'on désigne par  $h'$  la fonction  $\theta'$  qui correspond à  $\lambda = l$  on a, quel que soit l'indice  $p$ ,

$$2Z_p = \frac{\tau_p - 2H_p h'_p}{H_p \theta_p} - \frac{t_p}{H_p} = \frac{\tau_{p-1} - 2H_{p-1} h'_p}{H_{p-1} \theta'_p} - \frac{t_{p-1}}{H_{p-1}}, \quad (43)$$

$$2 \frac{\partial Z_p}{\partial u} = \frac{\tau_p - 2H_p}{H_p} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h'_p}{\theta'_p} \right), \quad 2 \frac{\partial Z_p}{\partial v} = \frac{\tau_{p-1} - 2H_{p-1}}{H_{p-1}} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h'_p}{\theta'_p} \right). \quad (44)$$

En effet, les équations (19) et (39) du Chapitre II et (17) et (19) de ce chapitre donnent, par des combinaisons convenables,

$$\begin{aligned} \frac{H_{p+1}\tau_p - \tau_{p+1}H_p}{\theta_{p+1}\theta'_{p+1}} &= \frac{H_p\tau_{p-1} - \tau_p H_{p-1}}{\theta_p\theta'_p} = K, \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\tau_p}{H_p} \right) &= K \frac{\theta_p\theta'_{p+1}}{H_p^2}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\tau_p}{H_p} \right) = K \frac{\theta_{p+1}\theta'_p}{H_p^2}, \end{aligned}$$

$K$  désignant une fonction indépendante de  $p$ ,

Or, on déduit de la première équation (28)

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\tau}{H_0} \right) = 2 \frac{\theta_1\theta'_0}{H_0^2}.$$

On a donc

$$K = 2$$

et par suite

$$H_p\tau_{p-1} - \tau_p H_{p-1} = 2\theta_p\theta'_p, \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\tau_p}{H_p} \right) = 2 \frac{\theta_p\theta'_{p+1}}{H_p^2}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\tau_p}{H_p} \right) = 2 \frac{\theta_{p+1}\theta'_p}{H_p^2}. \quad (46)$$

On aurait de même pour les fonctions  $t_p$  les relations analogues

$$H_p t_{p-1} - t_p H_{p-1} = 2\theta_p h'_p, \quad (47)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{t_p}{H_p} \right) = 2 \frac{\theta_p h'_{p+1}}{H_p^2}, \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{t_p}{H_p} \right) = 2 \frac{\theta_{p+1} h'_p}{H_p^2}. \quad (48)$$

Ces résultats étant acquis, les relations (45) et (47) montrent de suite que si la première équation (43) est satisfaite il en est de même de la seconde et réciproquement.

D'après cela, supposons que les équations (43) soient vérifiées pour  $p = n$ ; on trouve sans difficulté, au moyen des relations (46) et (48), qu'il en est de même des équations (44).

Enfin, si l'on remplace  $\frac{\partial Z_n}{\partial u}$  et  $\frac{\partial Z_n}{\partial v}$  par leurs valeurs dans les relations (42), on obtient la seconde équation (43) pour  $p = n + 1$  et la première pour  $p = n - 1$ ; comme cette équation est vérifiée pour  $p = 0$ , d'après la troisième équation (24), la proposition est démontrée.

Il résulte de ce qui précède que les équations (39) donnent

$$\frac{M_n}{M'_n} = \frac{H_n \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h'_n}{\theta'_n} \right)}{H_{n-1} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h'_n}{\theta'_n} \right)}. \quad (49)$$

On peut donc écrire les équations (40)

$$\frac{s_{n+1} - s_n}{\frac{\partial s_n}{\partial u}} = - \frac{\theta'_n H_n \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h'_n}{\theta'_n} \right)}{\theta'_{n+1} H_{n-1} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h'_n}{\theta'_n} \right)}, \quad (50)$$

$$\frac{s_{n-1} - s_n}{\frac{\partial s_n}{\partial v}} = \frac{\theta'_n H_{n-1} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{h'_n}{\theta'_n} \right)}{\theta'_{n-1} H_n \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{h'_n}{\theta'_n} \right)}.$$



## CHAPITRE IV

---

### **Application des résultats précédents au cas où la suite des surfaces $\Sigma_p$ est limitée.**

12. — Considérons parmi toutes les suites de surfaces  $\Sigma_p$ , qui ont été envisagées au Chapitre précédent, et qui correspondent à une même fonction  $\theta_0$ , celle dont la surface initiale  $\sigma$  se réduit à une sphère de rayon un, c'est-à-dire à la représentation sphérique des surfaces  $\Sigma$  répondant à la fonction  $\theta_0$ .

Les deux droites  $MM_1$  et  $MM_{-1}$  sont polaires réciproques par rapport à la sphère.

Supposons, d'une manière générale, deux droites  $D$  et  $D'$  polaires réciproques par rapport à une sphère. Si la droite  $D$  enveloppe une courbe  $C$ , la droite  $D'$  enveloppe une courbe  $C'$  polaire réciproque de la courbe  $C$ , et le point de contact  $P'$  de la droite  $D'$  avec son enveloppe est le pôle du plan osculateur au point correspondant  $P$  de la courbe  $C$ ; de même, le point  $P$  est le pôle du plan osculateur en  $P'$  à la courbe  $C'$ .

D'après cela, si l'on se déplace sur une courbe  $\Delta$  de la sphère  $\sigma$ , le point  $M_1$  est le pôle du plan osculateur à la courbe  $\Delta$  en  $M$ , c'est-à-dire du plan  $MM_{-1}M_{-2}$ ; de même, le point  $M_{-1}$  est le pôle du plan  $MM_1M_2$ ; enfin, à deux positions infiniment voisines du point  $M_1$ , quand  $u$  varie, c'est-à-dire à la droite  $M_1M_2$ , correspond comme polaire réciproque, d'après la théorie des tangentes conjuguées de Dupin, la droite  $M_{-1}M_{-2}$  intersection du plan osculateur en  $M$  à la courbe  $\Delta$  avec le plan osculateur infiniment voisin.

On démontrerait de la même manière que la propriété précédente a lieu, d'une façon générale, pour deux droites correspondantes quelconques  $M_pM_{p+1}$  et  $M_{-p}M_{-(p+1)}$  qui sont par suite rectangulaires.

Ces résultats étant acquis, nous allons nous proposer de chercher dans quelles conditions la suite des surfaces  $\sigma_p$ , et par conséquent celle des surfaces  $\Sigma_p$ , est limitée.

Supposons, pour fixer les idées, que la surface  $\sigma_m$  ( $m \geq 0$ ) soit la dernière de la suite dans le sens des indices croissants,

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que cette dernière surface se réduise à une développable de génératrice  $\Gamma_m$  ou à une courbe unique  $\Gamma_m$

Dans la première hypothèse l'arête de rebroussement  $\Delta_{m+1}$  de la surface  $\sigma_m$  admet, quel que soit  $u$ , comme polaire réciproque par rapport à la sphère  $\sigma$  la courbe  $\Delta_{-m}$ ; la surface  $\sigma_{-m}$  doit donc se réduire à une courbe unique  $\Delta_{-m}$ . On démontrerait de la même manière que dans la seconde hypothèse la surface  $\sigma_{-(m+1)}$  se réduit à une courbe unique  $\Gamma_{-(m+1)}$ ; par suite, la surface  $\sigma_{-m}$  se réduit à une développable de génératrices  $\Delta_{-m}$ .

Il résulte de ce qui précède que si la suite des surfaces  $\sigma_p$  est limitée dans un sens par une surface développable, elle se termine dans le sens opposé par une courbe unique et réciproquement.

D'après cela, nous pouvons toujours supposer, sans restreindre la généralité, que la surface limite  $\sigma_m$  est une développable de génératrices  $\Gamma_m$ ; les courbes  $\Gamma_{m-1}$  sont alors des courbes planes.

Plusieurs cas peuvent se présenter suivant la nature de la développable  $\sigma_m$ .

a) La surface  $\sigma_m$  est une développable quelconque.

Dans cette hypothèse, la surface  $\sigma_{-m}$  se réduit à une courbe gauche  $\Delta_{-m}$ .

b) La surface  $\sigma_m$  est un cône.

Si le sommet de ce cône ne coïncide pas avec le centre de la sphère  $\sigma$  la surface  $\sigma_{-m}$  se réduit à une courbe plane  $\Delta_{-m}$ ; dans le cas contraire, le plan de la courbe  $\Delta_{-m}$  est rejeté à l'infini, les tangentes aux courbes  $\Delta_{-(m-1)}$  le long d'une même courbe  $\Gamma_{(m-1)}$  sont parallèles et les courbes  $\Delta_{-(m-1)}$  sont gauches; la surface  $\sigma_{-(m-1)}$  est alors la dernière de la suite dans le sens des indices décroissants.

c) La surface  $\sigma_m$  est un cylindre.

Cette hypothèse peut être considérée comme un cas particulier de la précédente en supposant que le sommet du cône est rejeté à l'infini; la surface  $\sigma_{-m}$  se réduit donc encore à une courbe plane  $\Delta_{-m}$ ; de plus, le plan de cette courbe passe par le centre de la sphère  $\sigma$  et est normal aux génératrices du cylindre  $\sigma_m$ .

d) La surface  $\sigma_m$  est réduite à une droite unique  $\Gamma_m$ .

Si cette droite ne passe pas par le centre de la sphère  $\sigma$  la surface  $\sigma_{-m}$  est également réduite à une droite  $\Delta_{-m}$  normale à la droite  $\Gamma_m$  et les courbes  $\Delta_{-(m-1)}$  sont planes; dans le cas contraire, la droite  $\Delta_{-m}$  est rejetée à l'infini et les plans des courbes  $\Delta_{-(m-1)}$  sont parallèles et normaux à la droite  $\Gamma_m$ ; la surface  $\sigma_{-(m-1)}$  est alors la dernière de la suite dans le sens des indices décroissants.

Les résultats que nous venons d'obtenir pour les suites de surfaces  $\sigma_p$  permettent d'énoncer, relativement aux suites correspondantes de surfaces  $\Sigma_p$ , les propriétés corrélatives suivantes :

Lorsqu'une suite de surfaces  $\Sigma_p$  définie au début du Chapitre III est limitée, elle se termine toujours dans un sens, que nous adopterons pour celui des indices croissants, par une surface développable  $\Sigma_m$  ( $m \geq 0$ ) de génératrices  $\Gamma_m$  et les courbes  $\Gamma_{m-1}$  sont planes.

Dans le cas où la surface  $\Sigma_m$  est une développable non cylindrique, ou bien les courbes  $\Delta_{-m}$  ou  $\Delta_{-(m-1)}$  sont gauches et leurs tangentes le long d'une même courbe  $\Gamma_{-m}$  ou  $\Gamma_{-(m-1)}$  sont parallèles, ou bien les courbes  $\Delta_{-m}$  sont planes et situées dans des plans parallèles.

Si au contraire la surface  $\Sigma_m$  se réduit à un cylindre, ou bien les courbes  $\Delta_{-m}$  ou  $\Delta_{-(m-1)}$  sont planes et situées dans des plans normaux aux génératrices du cylindre, ou bien la surface  $\Sigma_{-m}$  se réduit à un cylindre de génératrices  $\Delta_{-m}$  normales à celles du cylindre  $\Sigma_m$  et les courbes  $\Delta_{-(m-1)}$  sont planes.

Pour terminer ces considérations géométriques, nous remarquerons que les propriétés corrélatives des tangentes et des binormales aux quatre séries de courbes  $\Gamma_p$ ,  $\Delta_p$ ,  $C_p$  et  $D_p$  permettent d'énoncer, relativement aux surfaces  $S_p$ , les propriétés suivantes qui entraînent leurs réciproques :—

Si la surface  $\Sigma_m$  est une développable non cylindrique, les tangentes aux courbes  $D_{-(m-1)}$  le long d'une même courbe  $C_{-(m-1)}$  sont parallèles et les courbes  $D_{-(m-1)}$  sont gauches ; de plus, la surface  $S_{m+1}$  ou  $S_m$  est une développable de génératrices  $C_{m+1}$  ou  $C_m$ , suivant que la suite des surfaces  $\Sigma_p$  se termine dans le sens des indices décroissants à la surface  $\Sigma_{-m}$  ou  $\Sigma_{-(m-1)}$  et les courbes  $C_m$  ou  $C_{m-1}$  sont planes ; enfin, la développable  $S_{m+1}$  se réduit à un cylindre si les courbes  $\Delta_{-m}$  sont planes.

Si au contraire  $\Sigma_m$  est une surface cylindrique, et que les courbes  $\Delta_{-m}$  ne se réduisent pas à des droites, les conclusions sont les mêmes que dans le cas précédent sauf que les courbes  $D_{-(m-1)}$  sont planes et situées dans des plans parallèles et que la surface  $S_{m+1}$  ou  $S_m$  se réduit toujours à un cylindre.

Enfin, si la suite des surfaces  $\Sigma_p$  se termine dans les deux sens par une surface cylindrique, les courbes  $D_{-(m-1)}$  et  $C_m$  sont planes et situées dans deux séries de plans parallèles rectangulaires.

Il résulte de ce qui précède que si la suite des surfaces  $\Sigma_p$  est limitée il en est de même de celle des surfaces  $S_p$  et réciproquement.



13°. — Nous allons nous proposer maintenant de chercher les expressions analytiques des résultats géométriques que nous venons de trouver en supposant que la surface  $\Sigma_m$  ( $m \geq 0$ ) se réduit à une développable de génératrices  $\Gamma_m$ .

Le problème que nous avons à résoudre revient au fond à la détermination de fonctions  $\theta_0$  telles que la suite des surfaces  $\sigma_p$ , correspondant à chacune d'elles, satisfasse à l'un quelconque des différents résultats que nous avons obtenus par la voie géométrique.

Pour traiter cette question nous remarquerons d'abord, d'après les équations (20) et (21) du Chapitre précédent, que si l'on désigne par  $c_p, c'_p$  et  $c''_p$  les coordonnées d'un point quelconque d'une surface  $\sigma_p$ , on a, quel que soit l'indice  $p$ ,

$$c_p = \frac{B_p}{\tau_p}, \quad c'_p = \frac{B'_p}{\tau_p}, \quad c''_p = \frac{B''_p}{\tau_p}. \quad (1)$$

De plus, le tableau (3) du même Chapitre montre que l'on peut prendre comme paramètres directeurs des binormales aux courbes  $\sigma_p$  les quantités  $B_{-(p+1)}, B'_{-(p+1)}, B''_{-(p+1)}$ .

Cela posé, nous avons d'abord à exprimer que les courbes  $\Gamma_{m-1}$  sont planes et que la surface  $\sigma_m$  est située à distance finie.

Ce qui précède montre que si l'on désigne par  $V, V', V''$  trois fonctions indépendantes de  $u$ , les conditions nécessaires et suffisantes pour que les courbes  $\Gamma_{m-1}$  soient planes sont données par les équations

$$\frac{B_{-m}}{V} = \frac{B'_{-m}}{V'} = \frac{B''_{-m}}{V''}. \quad (2)$$

D'après cela, si l'on représente par  $K$  la valeur commune des rapports précédents, la deuxième équation (21) du Chapitre III donne

$$B_{-m} \left[ \frac{\partial \theta'_{-(m-1)}}{\partial u} - \theta'_{-(m-1)} \frac{\partial \text{LK}}{\partial u} \right] = B_{-(m-2)}^{(u)} \theta'_{-m}.$$

Or, cette dernière relation ne peut être satisfaite que si la fonction  $\theta'_{-m}$  est nulle ; car, s'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$\frac{B_{-m}}{B_{-(m-2)}} = \frac{B'_{-m}}{B'_{-(m-2)}} = \frac{B''_{-m}}{B''_{-(m-2)}},$$

c'est-à-dire que les courbes  $\Gamma_{m-1}$  seraient des lignes asymptotiques de la surface  $\Sigma_{m-1}$ , ce qui est impossible.

Réciproquement, si la fonction  $\theta'_{-m}$  est nulle et que de plus la fonction  $\theta'_{-(m-1)}$  est différente de zéro, l'équation (21) précitée donne des relations de la forme (2).

On a donc les deux conditions

$$\theta'_{-(m-1)} \neq 0, \quad \theta'_{-m} = 0. \quad (3)$$

Si l'on conserve les notations du Chapitre II, ce résultat montre que les fonctions  $\theta_0$  cherchées sont de rang  $m$  ou  $m-1$  par rapport à  $u$  suivant que l'on a

$$U = U_{1,0} \quad \text{ou} \quad U_1 \neq U_{1,0}.$$

On démontrerait de la même manière que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les courbes  $\Delta_{-m}$  ou  $\Delta_{-(m-1)}$  soient planes sont données par les systèmes de relations

$$\theta'_{m+2} = 0, \quad \theta'_{m+1} \neq 0, \quad (4)$$

ou

$$\theta'_{m-1} = 0, \quad \theta'_{m-1} \neq 0. \quad (5)$$

D'autre part, les équations (1) montrent que si les trois paramètres directeurs  $B_p$ ,  $B'_p$  et  $B''_p$  ne sont pas nuls simultanément, c'est-à-dire si les courbes  $C_p$  sont déterminées, la surface  $\sigma_p$  sera ou non située à distance finie suivant que l'on aura

$$\tau_p \neq 0 \quad \text{ou} \quad \tau_p = 0.$$

Il résulte de cela et des considérations géométriques précédentes sur les surfaces  $S_p$  que la condition nécessaire et suffisante pour que la surface  $\sigma_m$  soit située à distance finie est donnée par la relation

$$\tau_m \neq 0. \quad (6)$$

Cette condition et les résultats obtenus aux Chapitres II et III montrent que la fonction  $H_m$  peut être nulle, mais que la fonction  $H_{m-1}$  est certainement différente de zéro.

De plus, la surface  $\sigma_{m+1}$  étant la dernière de la suite dans le sens des indices croissants les équations (1) doivent donner pour les coordonnées  $c_{m+2}$ ,  $c'_{m+2}$  et  $c''_{m+2}$  des formes indéterminées ; on a donc en particulier, d'après l'équation (41) du Chapitre III,

$$\tau_{m+2} = 0 \quad H_{m+2} = 0. \quad (7)$$

Les deux résultats précédents montrent que les fonctions  $\theta_0$  cherchées sont d'un rang au moins égal à  $m$  et au plus égal à  $m+2$  par rapport à  $v$ .

Il ne nous reste plus pour avoir en main tous les éléments nécessaires au classement des fonctions  $\theta_0$ , d'après leur signification géométrique, qu'à chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que les courbes  $\Gamma_{m+1}$  ou  $\Delta_{-m}$  soient rejetées à l'infini.

Pour obtenir ces résultats il suffit d'exprimer que les directions des tangentes aux courbes  $\Gamma_m$  ou  $\Delta_{-(m-1)}$  sont les unes indépendantes de  $v$  et les autres indépendantes de  $\dot{u}$ .

On trouve ainsi respectivement, d'après les équations (10) du Chapitre III et en utilisant un raisonnement analogue à celui qui a servi à obtenir les conditions (3), les deux systèmes de relations

$$\tau_{m+1}=0, \quad \tau_m \neq 0; \quad (8)$$

$$\tau_{-m}=0 \quad \tau_{-(m-1)} \neq 0. \quad (9)$$

Sous cette forme ces conditions ont l'inconvénient de se prêter difficilement au classement des fonctions  $\theta_0$ . Les équations (17), (18) et (45) du Chapitre III permettent de les remplacer par un certain nombre d'autres qui ne renferment que les fonctions  $\theta_p$ ,  $\theta'_p$  et  $H_p$ .

On obtient ainsi, suivant la valeur de l'indice  $p$  pour lequel la première fonction  $H_p$  est nulle, les résultats suivants :

$$1^\circ \quad \tau_{m+1}=0, \quad \tau_m \neq 0.$$

$$a). \quad H_{(m+2)}=0, \quad H_{m+1} \neq 0; \quad \theta_{m+2}=0, \quad \theta'_{m+2}=0.$$

$$b). \quad H_{m+1}=0, \quad H_m \neq 0; \quad \theta'_{m+1}=0 \quad \text{ou} \quad \theta_{m+1}=0. \quad (10)$$

$$c). \quad H_m=0, \quad H_{m-1} \neq 0.$$

$$2^\circ \quad \tau_{-m}=0, \quad \tau_{-(m-1)} \neq 0.$$

$$a). \quad H_{-(m+1)}=0, \quad H_{-m} \neq 0; \quad \theta_{-m}=0, \quad \theta'_{-m}=0.$$

$$b). \quad H_{-m}=0, \quad H_{-(m-1)} \neq 0; \quad \theta'_{-(m-1)}=0 \quad \text{ou} \quad \theta_{-(m-1)}=0. \quad (11)$$

$$c). \quad H_{-(m-1)}=0, \quad H_{-(m-2)} \neq 0.$$

Nous remarquerons enfin que les fonctions  $\theta_0$  cherchées se trouvent parmi celles qui ont été définies au Chapitre II. Réciproquement, à toute fonction  $\theta_0$  de ce Chapitre, correspond une suite finie de fonctions  $\tau_p$  et  $B'_p$  et par conséquent, d'après les équations (1), une suite limitée de surfaces  $\sigma_p$ .

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour résoudre la question que nous nous sommes posée au début de ce paragraphe.

On trouve ainsi, en désignant par  $\theta_0 [U_1(p), V_1(q)]$  une fonction  $\theta_0$  de rang  $p$  par rapport à  $u$  et  $q$  par rapport à  $v$ , les résultats suivants :

1° La surface  $\Sigma_m$  est une développable non cylindrique de génératrices  $\Gamma_m$ .

a) La surface  $\Sigma_{-m}$  est la dernière de la suite dans le sens des indices décroissants.

On a, si les courbes  $\Delta_{-m}$  sont gauches,

$$\theta_0 [U_{1,0}(m), V_1(m+2)], \quad V_1 \neq V_{1,0}, \quad (12)$$

et si ces courbes sont planes,

$$\theta_0 [U_{1,0}(m), V_{1,0}(m+2)]$$

ou

$$\theta_0 [U_{1,0}(m), V_1(m+1)], \quad V_1 \neq V_{1,0} \quad (13)$$

ou enfin

$$\theta_0 [U_1(m-1), V_1(m+1)] \quad U_1 \neq U_{1,0}, \quad V_1 \neq V_{1,0}.$$

b) La surface  $\Sigma_{-(m-1)}$  est la dernière de la suite dans le sens des indices décroissants ; les courbes  $\Delta_{-(m-1)}$  sont alors des courbes gauches

On a dans ce cas

$$\theta_0 [U_{1,0}(m), V_1(m+2)], \quad (14)$$

2° La surface  $\Sigma_m$  est un cylindre de génératrices  $\Gamma_m$ .

a) La surface  $\Sigma_{-m}$  est la dernière de la suite dans le sens des indices décroissants.

On a, si les courbes  $\Delta_{-m}$  sont planes,

$$\theta_0 [0(m), V_{1,0}(m+2)] \quad (15)$$

ou

$$\theta_0 [0(m), V_1(m+1)], \quad V_1 \neq V_{1,0}, \quad (15)$$

et si ces courbes se réduisent à des droites, c'est-à-dire si la surface  $\Sigma_{-m}$  se réduit à un cylindre,

$$\theta_0 [U_{1,0}(m), V_{1,0}(m+1)]$$

ou

$$\theta_0 [U_1(m-1), V_{1,0}(m+1)], \quad U_1 \neq U_{1,0}$$

ou

$$\theta_0[\mathbf{U}_{i,0}(m), \mathbf{V}_i(m)], \quad \mathbf{V}_i \neq \mathbf{V}_{i,0} \quad (16)$$

ou enfin

$$\theta_0[\mathbf{U}_i(m-1), \mathbf{V}_i(m)], \quad \mathbf{U}_i \neq \mathbf{U}_{i,0}, \quad \mathbf{V}_i \neq \mathbf{V}_{i,0}.$$

b) La surface  $\Sigma_{-(m-1)}$  est la dernière de la suite dans le sens des indices décroissants et les courbes  $\Delta_{-(m-1)}$  sont planes.

On a dans ce cas

$$\theta_0[\mathbf{U}_{i,0}(m), \mathbf{0}(m+1)] \quad (17)$$

ou

$$\theta_0[\mathbf{U}_i(m-1), \mathbf{0}(m+1)], \quad \mathbf{U}_i \neq \mathbf{U}_{i,0}.$$

Si la suite des surfaces  $\Sigma_p$  était limitée dans le sens des indices décroissants à une surface développable  $\Sigma_{-m}$  de génératrices  $\Delta_{-m}$ , on obtiendrait des résultats analogues aux précédents en remplaçant  $\theta_0$  par  $\theta_1$  et en permutant les courbes  $\Gamma_p$  et  $\Delta_{-p}$  ainsi que les variables  $u$  et  $v$ .

Il est important de remarquer que les fonctions  $\mathbf{U}_{i,0}$  et  $\mathbf{V}_{i,0}$ , qui rentrent dans une même fonction  $\theta_0$  et qui sont données par les équations (52) du Chapitre II, ne doivent pas satisfaire aux équations (47) ou (49) de ce Chapitre, car, s'il en était ainsi, la surface  $\Sigma$  se réduirait à un plan.

Les différentes formes que nous venons d'obtenir pour les fonctions  $\theta_0$  ou  $\theta_1$  montrent que la solution

$$\lambda + i\mu = \frac{1}{H_0}(\theta_0 + i\theta_1)$$

de l'équation (1) du Chapitre II est d'un rang au plus égal à  $m+1$  par rapport à l'une des fonctions arbitraires et  $m+2$  par rapport à l'autre, l'équation (1) est donc elle-même d'un rang au plus égal à  $m+1$ .

14°. — Les résultats que nous avons obtenus au paragraphe précédent ne permettent évidemment de déterminer que la représentation sphérique des surfaces répondant aux hypothèses envisagées. Pour obtenir les surfaces elles-mêmes il faut joindre à chaque fonction  $\theta_0$  une fonction  $h_0$ , de même rang par rapport à  $u$  et par rapport à  $v$ , dans laquelle les fonctions  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{V}_1$  ont des valeurs arbitraires que nous désignerons par  $\mathbf{U}_3$  et  $\mathbf{V}_3$ . Il est bien évident que lorsque ces dernières fonctions varient les surfaces  $\Sigma_p$  et  $S_p$  se déforment tout en conservant les mêmes directions de tangentes aux courbes  $u=c^{te}$  et  $v=c^{te}$ .

Nous allons nous proposer, dans ce paragraphe, de chercher quelles valeurs il est nécessaire de donner aux fonctions  $\mathbf{U}_3$  et  $\mathbf{V}_3$  pour que la suite

des surfaces  $\Sigma_p$  ou  $S_p$  se termine, au moins dans un sens, par une courbe ou par une surface réduite à un point.

Nous supposons, comme il a été fait précédemment, que la surface  $\Sigma_m$  ( $m \geq 0$ ) est une développable de génératrices  $\Gamma_m$ .

Dans le cas des suites de surfaces  $\Sigma_p$  nous remarquerons tout d'abord que l'arête de rebroussement de la surface  $\Sigma_m$  peut être considérée comme la surface  $\Sigma_{m+1}$  réduite à une courbe  $\Delta_{m+1}$ . Si cette dernière courbe est située à distance finie, et si nous exprimons qu'elle a une longueur nulle, la surface  $\Sigma_m$  se réduira à un cône ayant le point  $M_{m+1}$  comme sommet; si au contraire elle est rejetée à l'infini la surface  $\Sigma_m$  se réduira à une droite unique  $\Gamma_m$  pourvu que la longueur des courbes  $\Delta_m$  soit nulle.

Dans le sens des indices décroissants, et suivant les circonstances, la surface  $\Sigma_{-m}$  ou  $\Sigma_{-(m-1)}$  se réduira à une courbe unique  $\Delta_{-m}$  ou  $\Delta_{-(m-1)}$  si les courbes  $\Gamma_{-m}$  ou  $\Gamma_{-(m-1)}$  ont une longueur nulle.

Il résulte de ce qui précède que le problème analytique revient à exprimer qu'un élément de courbe  $\Delta_p$  ou  $\Gamma_{-p}$  ( $p \geq 0$ ) est identiquement nul.

Pour que la première condition soit réalisée il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{\partial x_p}{\partial v} = \frac{\partial y_p}{\partial v} = \frac{\partial z_p}{\partial v} = 0. \quad (18)$$

Or les équations (30) et (33) du chapitre précédent et la relation

$$z_p \tau_p = -t_p$$

donnent :

$$\frac{\partial x_p}{\partial v} = \frac{\partial y_p}{\partial v} = \frac{\partial z_p}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{t_p}{\tau_p} \right)$$

Si l'on remarque de plus que les trois paramètres directeurs  $A_p$ ,  $A'_p$ ,  $A''_p$  ne peuvent être nuls en même temps et que la fonction  $\theta_p$  est certainement différente de zéro, on en conclut que l'on peut remplacer les équations (18) par la relation unique

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{t_p}{\tau_p} \right) = 0;$$

c'est-à-dire, en désignant par  $U$  une fonction indépendante de  $V$

$$t_p = U \tau_p. \quad (19)$$

Les équations (19) et (35) du Chapitre III ainsi que les relations (45) et (47) donnent, par des combinaisons convenables et en tenant compte de l'équation (19),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{t_{p-1} - U\tau_{p-1}}{\theta_p} \right) &= 0, \\ 2\theta_p(h'_p - U\theta'_p) &= H_p(t_{p-1} - U\tau_{p-1}), \\ \theta_p U' &= \frac{\theta_{p+1}}{\tau_p} (t_{p-1} - U\tau_{p-1}). \end{aligned}$$

On déduit de ces relations, en désignant par  $U_*$  une fonction indépendante de  $v$  et différente de zéro,

$$\begin{aligned} 2(h'_p - U\theta'_p) &= H_p U_*, \\ \tau_p U' &= \theta_{p+1} U_*. \end{aligned}$$

La dernière équation montre que si  $\theta_{p+1}$  est nul la fonction  $U$  doit se réduire à une constante et réciproquement ; dans ce cas, la fonction  $U_*$  peut être prise arbitrairement ; si au contraire  $\theta_{p+1}$  est différent de zéro, on a

$$U_* = \frac{\tau_p}{\theta_{p+1}} U'.$$

La deuxième équation (19) du Chapitre III et les relations (7) et (8) montrent d'ailleurs que dans ce dernier cas l'expression  $\frac{\tau_p}{\theta_{p+1}}$  est bien une fonction de  $u$ .

Il résulte de ce qui précède que la condition (19) peut être remplacée par les deux relations

$$\begin{aligned} h'_p &= U\theta'_p + \frac{1}{2} H_p U_*, \\ \tau_p U' &= \theta_{p+1} U_*, \end{aligned} \tag{20}$$

qui déterminent dans tous les cas la forme de la fonction  $h'_p$ .

Cette deuxième fonction une fois connue, les résultats obtenus au Chapitre II permettent de calculer la fonction  $h'_0$  ainsi que la fonction  $h_0$  correspondante.

On trouverait de même pour que l'élément de courbe  $\Gamma_{-p}$  soit identiquement nul, en désignant par  $V$  et  $V_*$  deux fonctions indépendantes de  $u$ ,

la dernière devant être différente de zéro, les deux relations de condition

$$\begin{aligned} h'_{-(p-1)} &= \mathbf{V}\theta'_{-(p-1)} + \frac{1}{2}\mathbf{H}_{-p}\mathbf{V}_i, \\ \tau_{-p}\mathbf{V}' &= \theta_{-p}\mathbf{V}_i. \end{aligned} \tag{21}$$

Examinons maintenant le cas des suites finies de surfaces  $S_p$  en supposant, comme précédemment, que la suite des surfaces  $\Sigma_p$  se termine dans le sens des indices croissants par une développable de génératrices  $\Gamma_m$ .

On remarque de suite, d'après ce qui a été dit au paragraphe 12, que la surface  $S_{-(m-1)}$  peut se réduire à une courbe unique  $D_{(m-1)}$ ; de plus, si la surface  $\Sigma_{-m}$  est différente d'un cylindre, la suite des surfaces  $S_p$  peut être limitée dans le sens des indices croissants à un cône  $S_{m+1}$  ou  $S_m$  on a une droite unique  $C_{m+1}$  ou  $C_m$ , suivant que la suite des surfaces  $\Sigma_p$  est elle-même limitée dans le sens des indices décroissants à la surface  $\Sigma_{-m}$  ou  $\Sigma_{-(m-1)}$ ; enfin, si  $\Sigma_{-m}$  est une surface cylindrique, la surface  $S_m$  peut se réduire à une courbe unique  $C_m$ .

Il est facile de voir que l'on pourra réaliser analytiquement les conditions précédentes si l'on sait exprimer que les courbes  $C_{-(m-1)}$ ,  $D_{m+2}$ ,  $D_{m+1}$  ou  $D_m$  ont des longueurs nulles.

Un raisonnement analogue à celui qui a servi à établir l'équation (19) montrerait pour qu'il en soit ainsi que l'on doit avoir respectivement,  $U$  désignant une fonction indépendante de  $v$  et  $V$  une fonction indépendante de  $u$ ,

$$h'_{-(m-1)} = \mathbf{V}\theta'_{-(m-1)}, \tag{22}$$

$$h'_q = \mathbf{U}\theta'_q, \quad (q = m+2, m+1, m) \tag{23}$$

15°. — Pour terminer cette étude nous allons donner quelques applications des résultats obtenus dans les deux paragraphes précédents.

a) Cas de  $m = 0$ . Dans cette hypothèse les surfaces  $\Sigma$  sont des développables de génératrices  $\Gamma$ .

La fonction

$$\theta_0[\mathbf{U}_{i,0}(0), \mathbf{V}_i(2)], \quad \mathbf{V}_i \neq \mathbf{V}_{i,0},$$

correspond aux développables les plus générales. Ces surfaces se réduisent à des cônes quelconques si l'on a de plus

$$h'_1 = \mathbf{U}\theta'_1 + \frac{\mathbf{H}_1\tau_1}{2\theta_2}\mathbf{U}',$$



Quant aux fonctions

$$\theta_0[U_{1,0}(0), V_{1,0}(2)]$$

et

$$\theta_0[U_{1,0}(0), V_1(1)], \quad V_1 \neq V_{1,0},$$

elles correspondent aux hélicoïdes développables qui se réduisent à des cônes de révolution si l'on a, dans le cas de la première fonction,

$$h'_1 = U\theta'_1 + \frac{H_1 r_1}{2\theta_2} U',$$

et dans celui de la seconde

$$| h'_1 = U\theta'_1, \quad U = C^{10}.$$

Enfin les fonctions

$$\theta_0[0(0), V_{1,0}(2)]$$

et

$$\theta_0[0(0), V_1(1)], \quad V_1 \neq V_{1,0}$$

correspondent aux surfaces cylindriques. Ces cylindres seront de révolution si la surface  $S_1$  se réduit à une droite unique  $C_1$ , c'est-à-dire, si l'on a

$$h'_1 = U\theta'_1.$$

b) Cas de  $m = 1$ . Dans cette hypothèse les surfaces  $\Sigma$  ont leurs lignes de courbure planes au moins dans le système  $\Gamma$ .

Les fonctions (12), (13), (14) et (15) correspondent aux surfaces à lignes de courbure planes dans le seul système  $\Gamma$  ; si l'on a de plus

$$h'_1 = U\theta'_1,$$

ces lignes de courbure sont circulaires.

Les fonctions (16) et (17), au contraire, correspondent aux surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes ; si l'on a de plus

$$h'_1 = U\theta'_1, \quad h'_0 = V\theta'_0 \quad (24)$$

on obtient les cyclides.

Les deux relations précédentes ne sont pas forcément compatibles quelles que soient les fonctions  $U$  et  $V$ . Nous allons chercher dans quelles conditions elles peuvent être vérifiées simultanément.

Les équations (39) du Chapitre II, qui sont vraies pour les fonctions  $h'_p$  comme pour les fonctions  $\theta'_p$ , donnent les deux groupes de relations

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{(V-U)\theta'_1}{H_0} \right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{(V-U)\theta'_0}{H_0} \right] = 0; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (V-U)H_1\theta'_0 &= H_0\theta'_1U', \\ (V-U)H_{-1}\theta'_1 &= H_0\theta'_0V'. \end{aligned} \quad (26)$$

On déduit immédiatement des relations (26) que si le produit  $H_1 H_{-1}$  est nul l'une au moins des deux fonctions  $U$  et  $V$  doit se réduire à une constante; de plus, les équations (39) précitées montrent que s'il en est ainsi on doit avoir

$$U = V = C^{te}.$$

Supposons maintenant que le produit  $H_1 H_{-1}$  soit différent de zéro et que la fonction  $H_0$  ne contienne aucun facteur fonction de  $u$  ou fonction de  $v$ . Les équations (25) donnent dans ce cas,  $c$  désignant un facteur constant, la relation unique

$$V - U = cH_0. \quad (27)$$

Cette dernière équation montre que si  $H_0$  n'est pas de la forme  $V_1 - U_1$ , ces quantités désignant des fonctions respectives de  $v$  et de  $u$ , le facteur  $c$  doit être nul et l'on a encore

$$U = V = C^{te}.$$

Dans le cas contraire, l'équation (27) peut s'écrire

$$V - cV_1 = U - cU_1.$$

et donne, en désignant par  $c_1$  une nouvelle constante,

$$U = cU_1 + c_1, \quad V = cV_1 + c_1.$$

Il est important de remarquer que les fonctions (14) et (17) donnent les surfaces de Monge, les dernières correspondant aux surfaces moulures; si l'on a de plus

$$h'_1 = U\theta'_1$$

les fonctions (17) donnent les surfaces de révolution.

c) Cas de  $m = 2$ . Dans cette hypothèse la surface  $S_{-1}$  peut se réduire à une courbe unique  $D_{-1}$  si la condition

$$h'_{-1} = V\theta'_{-1} \quad (28)$$

est vérifiée

Or, il est facile de démontrer géométriquement que les surfaces  $S_{-1}$  et  $S_2$  sont respectivement les lieux des centres des sphères osculatrices aux courbes  $\Gamma$  et  $\Delta$ .

D'après cela, les fonctions  $\theta_0$  trouvées au paragraphe 13 permettent de déterminer, en tenant compte de l'équation (28), les surfaces à lignes de courbure sphériques dans le système  $\Gamma$ .

On verrait de même que si l'on a en outre

$$h'_2 = U\theta'_2 \tag{29}$$

les fonctions (16) et (17) permettent d'obtenir les surfaces à lignes de courbure sphériques dans les deux systèmes.

Nous allons chercher, comme précédemment, dans quelles conditions les équations (28 et (29) peuvent être vérifiées simultanément.

Les équations (39) du Chapitre II donnent ici les deux relations

$$(h'_1 - U\theta'_1)H_2 = \theta'_1 H_1 U'$$

$$(h'_0 - V\theta'_0)H_{-2} = \theta'_{-1} H_{-1} V'.$$

On en déduit immédiatement que si le produit  $H_2 H_{-2}$  est nul l'une au moins des deux fonctions  $U$  et  $V$  doit se réduire à une constante; de plus, s'il en est ainsi, on doit avoir comme dans le cas précédent

$$U = V = C^{te}.$$

Supposons maintenant que le produit  $H_2 H_{-2}$  soit différent de zéro.

Les équations (39) précitées montrent que les fonctions  $U$  et  $V$  doivent satisfaire aux deux équations

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{H_1^2}{H_0 H_2} \frac{\partial (U\theta'_2)}{\partial u} \left( \frac{U}{H_1} \right) \right] + \frac{H_1 H_{-1}^2}{H_0 H_2^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{V\theta'_{-1}}{H_{-1}} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{H_{-1}^2}{H_{-2} H_0} \frac{\partial (V\theta'_{-1})}{\partial v} \left( \frac{V}{H_{-1}} \right) \right] - \frac{H_{-1} H_1^2}{H_{-2} H_0^2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{U\theta'_2}{H_1} \right) = 0,$$

Pour résoudre ce système nous remarquerons qu'on peut le mettre sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=p} u_i \varphi_i(V) = \sum_{j=1}^{j=q} v_j f_j(U),$$

$$\sum_{i=1}^{i=p'} u'_i \varphi'_i(V) = \sum_{j'=1}^{j'=q} v'_{j'} f'_{j'}(U).$$

les quantités  $u_i, u'_i, v_j, v'_j$ , désignant respectivement des fonctions de  $u$  et de  $v$  linéairement indépendantes, dans chacune des deux équations et  $\varphi_i(\mathbf{V}), \varphi'_i(\mathbf{V}), f_j(\mathbf{U}), f'_j(\mathbf{U})$  des fonctions linéaires et homogènes par rapport à  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{U}$  ainsi qu'à un certain nombre de leurs dérivées.

Les équations précédentes ne peuvent évidemment être satisfaites que si l'on a, en désignant par les lettres  $a$  et  $b$ , affectées d'indices inférieurs et supérieurs, des quantités constantes,

$$f_j(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{i=p} a_i^j u_i, \quad (j=1, 2, \dots, q); \quad \varphi_i(\mathbf{V}) = \sum_{j=1}^{j=q} a_i^j v_j, \quad (i=1, 2, \dots, p);$$

$$f'_j(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{i=p'} b_i^j u'_i, \quad (j=1, 2, \dots, q'); \quad \varphi'_i(\mathbf{V}) = \sum_{j=1}^{j'=q'} b_i^j v'_j, \quad (i=1, 2, \dots, p').$$

Si ces équations sont compatibles on obtient pour  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  des fonctions linéaires et homogènes par rapport à un certain nombre de constantes arbitraires ; dans le cas contraire, le problème n'admet que la solution

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{C}^{te}.$$

*Vu et approuvé :*

Paris, le 10 Juillet 1920.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,  
F. HOUSSAY.

*Vu et permis d'imprimer :*

Paris, le 10 Juillet 1920.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,  
P. APPELL.