J. LEBEL

Sur les surfaces isothermiques et les systèmes cycliques

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1921

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1921__24__1_0>

N° D'ORDRE
1675.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. J. LEBEL,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Dijon

1re THÈSE. — SUR LES SURFACES ISOTHERMIQUES ET LES SYSTÈMES CYCLIQUES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le avril 1921 devant la Commission d'Examen.

MM. KOENIGS, *Président.*

CL. GUICHARD, HADAMARD, *Examinateurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1921

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
Doyen	MOLLIARD, profess...	Physiologie végétale.
Doyen honoraire	P. APPELL.	
Professeurs honoraires	P. PUISEUX, VELAIN, BOUSSINESQ, BOUTY.	
Professeurs	LIPPMANN	Physique.
	E. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	GASTON BONNIER	Botanique.
	KŒNIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET	Électrotechnique générale.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVÉ	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
	HAUG	Géologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie générale.
	GABRIEL BERTRAND	Chimie biologique.
	Mme P. CURIE	Physique générale.
	CAULLERY	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie minérale.
	EMILE BOREL	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	MARCHIS	Aviation.
	JEAN PERRIN	Chimie physique.
	G. PRUVOT	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	MATRUCHOT	Botanique.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Mécanique rationnelle.
	CL. GUICHARD	Géométrie supérieure.
	LEBESGUE	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	LAPICQUE	Physiologie.
	GENTIL	Géographie physique.
	VESSIOT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	COTTON	Physique théorique et Physique céleste.
	DRACH	Mathématiques générales.
	C. FABRY	Physique.
	N	Histologie.
	N	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
Professeurs adjoints	LEDUC	Physique.
	HÉROUARD	Zoologie.
	LÉON BERTRAND	Géologie.
	RÉMY PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	LESPIEAU	Chimie.
	SAGNAC	Physique théorique et physique céleste.
	PEREZ	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
	RABAUD	Biologie générale.
	PORTIER	Physiologie.
	BLAISE	Chimie organique.
	PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
Secrétaire	D. TOMBECK.	

64931 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LES SURFACES ISOTHERMIQUES

ET

LES SYSTÈMES CYCLIQUES

INTRODUCTION.

Il s'agit moins, dans ce qui va suivre, d'un exposé méthodique des travaux publiés jusqu'à ce jour sur les surfaces isothermiques, que d'un essai de contribution à de nouvelles recherches à un double point de vue.

On sait que la détermination générale de ces surfaces dépend de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, formée pour la première fois par M. Weingarten.

L'impossibilité où l'on se trouvait d'obtenir l'intégrale générale de cette équation, puisque l'on est déjà arrêté par le cas particulier des surfaces à courbure moyenne constante, a donc donné une importance bien compréhensible à la recherche des solutions qui pouvaient présenter le plus d'étendue. Les classes les plus vastes que l'on connaît aujourd'hui sont provisoirement les surfaces minima et plus généralement, au moins comme définition, les surfaces à courbure moyenne constante, puis les surfaces de

M. Darboux, relatives au roulement d'une quadrique, et les surfaces de M. Thybaut. Chacune de ces classes dépend de deux fonctions arbitraires.

Mais il est permis de dire que là n'est pas le seul intérêt de la question, surtout maintenant que l'on possède des éléments considérables, avec la possibilité d'en obtenir de nouveaux par les transformations déjà connues, telles que l'inversion indéfiniment répétée, et les transformations de M. Guichard. Les surfaces isothermiques, d'une façon générale, et certaines d'entre elles avec un caractère spécial, ont des propriétés géométriques curieuses. Si le théorème de Christoffel a paru remarquable lorsque ces surfaces ne se distinguaient encore qu'au point de vue analytique par la forme de leur ds^2, on peut le considérer aujourd'hui comme un fait isolé, et nous essaierons de donner un aperçu de ce que l'on peut espérer de ce côté.

Si l'on se préoccupe d'abord de la seule recherche des surfaces isothermiques, puisqu'il faut renoncer au problème général, on devra faire choix d'un caractère qui mette en évidence une catégorie particulière. Il pourra arriver qu'il n'existe aucune solution correspondante, ou que l'on ne puisse trouver que des surfaces isolées. Celles-ci pourront toutefois trouver un complément d'intérêt dans leurs propriétés géométriques spéciales. Il ne semble pas que l'étude directe du ds^2 soit la plus féconde, quoiqu'elle se rattache directement à la définition des surfaces dont il s'agit. Cependant elle fera l'objet de notre première Partie. Dans celle-ci, nous discuterons l'équation fonctionnelle susceptible de remplacer le système des formules de Codazzi dans l'étude de la déformation d'un réseau orthogonal que l'on veut essayer de transformer en lignes de courbure. Après avoir montré le parti que l'on peut en tirer pour une surface quelconque, et complété même la classification d'O. Bonnet, nous signalons la forme particulièrement simple que prend cette équation dans le cas d'une surface isothermique. Elle présente l'avantage de rendre inutiles les démonstrations des théorèmes de Bour et Christoffel. Enfin, elle peut conduire à des classes de surfaces isothermiques, par la possibilité d'effectuer *a priori* certaines quadratures symboliques. C'est ainsi que les solutions primitives s'imposent d'elles-mêmes. D'autres problèmes se présentent naturellement, mais se compliquent de difficultés plus ou moins grandes. Parmi ceux que nous avons énoncés, nous n'en avons développé qu'un seul conduisant à une solution nouvelle, celle des surfaces spirales isothermiques, qui présentent la double particularité de former des couples de Bonnet, gardant leurs lignes de courbure dans une certaine déformation, et de se correspondre à elles-mêmes dans la transformation de Bour.

Ces surfaces spirales peuvent dégénérer en hélicoïdes applicables sur l'alysséide. J'ai remplacé la définition ponctuelle que l'on donne ordinairement de ces derniers par une définition tangentielle presque identique à celle de l'alysséide.

La seconde Partie est consacrée aux propriétés géométriques des surfaces isothermiques, et aux nouvelles solutions qu'elles donnent lieu de rechercher. Les systèmes cycliques paraissent jouer le principal rôle dans la question. Ainsi, M. Darboux a montré qu'à toute surface isothermique on peut associer une autre surface de même nature, formant avec la première les deux nappes d'une enveloppe de sphères, sur lesquelles les lignes de courbure se correspondent. L'un des systèmes cycliques les plus remarquables, dont la détermination n'exige aucune intégration, dérive des sphères harmoniques tangentes à la surface, et dont le centre est conjugué harmonique du point de contact par rapport aux centres de courbure principaux. Nous les caractérisons par une propriété angulaire qui explique leur conservation dans une transformation par inversion. Si l'on veut que les deux nappes de l'enveloppe des sphères harmoniques soient isothermiques, avec similitude des infiniment petits, il faut, comme l'indique d'ailleurs le théorème de M. Cosserat, que les points focaux de la corde des contacts soient conjugués harmoniques par rapport à ces deux contacts, ou que les deux points focaux coïncident avec un point fixe.

Dans le premier cas, la seconde nappe est une sphère et la première est une surface de M. Thybaut. Dans l'autre cas, la sphère harmonique est orthogonale à une sphère fixe et les deux nappes sont des figures inverses.

Les surfaces de M. Thybaut constituent une singularité d'une catégorie plus étendue de surfaces isothermiques, difficiles à déterminer dans toute leur généralité. Ces dernières surfaces se rattachent, dans un même système cyclique, à des groupes de six surfaces orthogonales aux mêmes cercles, trois de ces surfaces étant isothermiques, et alternant avec les secondes nappes des enveloppes de leurs sphères harmoniques, qui passent toutes les trois par un même cercle. Les six points déterminés sur chaque cercle du système cyclique donnent lieu à trois divisions harmoniques.

Chacun de ces systèmes de six surfaces est relié à une surface auxiliaire à courbure totale constante. Nous avons traité le cas où cette surface est de révolution. L'une des trois surfaces isothermiques est cerclée et devient la transformée par inversion d'un certain cône.

Dans le cas des surfaces de M. Thybaut, trois surfaces consécutives du système sont confondues; généralement, une surface double est forcément triple et ne peut donner qu'une sphère. Si l'on passe de la surface initiale à la surface conjuguée de Christoffel, on trouve que son réseau harmonique est le réseau moyen de la seconde nappe des sphères harmoniques, et cette propriété est aussi caractéristique.

Une autre singularité est réalisée avec une des trois surfaces isothermiques réduite à un point. Les deux autres sont alors les inverses, par rapport à ce point, de deux surfaces parallèles à courbure moyenne constante. Cinq surfaces se réduisent à un point si l'on part de l'inverse d'une surface minima.

Le cas où la sphère harmonique d'une surface isothermique est orthogonale à une sphère fixe sera traité ici aussi complètement que possible, à l'aide d'un changement de variables qui ramène à une question connue. Nous avons substitué aux lignes de courbure les lignes que nous appellerons *équilatères*, et qui sont tangentes en chaque point aux bissectrices des lignes de courbure, par suite aux tangentes à l'intersection de la surface et de la sphère harmonique du point considéré. Dans le cas actuel, ces lignes correspondent aux asymptotiques du réseau harmonique. Nous chercherons donc d'abord cette déférente, pour en déduire le couple de surfaces isothermiques inverses. Nous constaterons que la polaire réciproque par rapport à la sphère d'inversion est une autre interprétation de l'agencement des quatre surfaces isothermiques signalées par M. Thybaut, et se manifestant dans le même système cyclique.

Après avoir traité le cas où la déférente est réglée, et qui fournit des surfaces isothermiques engendrées par des cercles qui ne sont pas des lignes de courbure, nous montrerons que la solution générale donne les déférentes constituées par les surfaces que M. Darboux (t. III, Chap. XIV) appelle *surfaces* (M), et qui admettent deux familles de lignes conjuguées dont les tangentes touchent une même sphère fixe. L'élégant procédé que donne M. Darboux pour déduire chacune de ces surfaces d'une surface à courbure totale constante donne, aussi complètement que possible, la solution de la question. On peut ajouter qu'aux transformations connues des surfaces à courbure totale constante correspondent indirectement des transformations des surfaces isothermiques dont il s'agit ici.

Dans les généralités sur les surfaces isothermiques, qui se trouvent développées dans cette seconde Partie, nous avons donné une extension détaillée au théorème de Christoffel, en réunissant les éléments, presque impossibles à séparer, des deux systèmes cycliques harmoniques relatifs aux deux surfaces isothermiques qui ont même représentation sphérique, avec inversion du ds^2. On verra que deux surfaces de même paramètre, prises dans les deux systèmes, ont toujours leurs plans tangents parallèles.

Enfin, dans une généralisation des surfaces isothermiques, nous avons réuni les deux systèmes dans un ensemble continu, dont toutes les surfaces se constituent en familles, avec même représentation sphérique.

Dans la troisième Partie, assez brève, nous avons appliqué la méthode de l'équation fonctionnelle, développée dans la première Partie, à la discussion des systèmes cycliques que l'on peut déduire, par l'application du théorème de Dupin, d'un réseau conjugué dont on connaît le ds^2. Nous avons établi, avec cet élément, la classification de M. Guichard.

PREMIÈRE PARTIE.

RECHERCHE DIRECTE DES ds^2 ISOTHERMIQUES.

1. Je me propose de développer quelques-unes des particularités que présente, dans le cas d'une surface isothermique, l'équation fonctionnelle par laquelle on peut remplacer le système des formules de Codazzi, qui caractérisent un élément linéaire rapporté à des lignes de courbure.

Nous allons d'abord établir cette équation pour une surface quelconque. Nous poserons, pour l'élément linéaire,

$$ds^2 = A^2\,du^2 + B^2\,dv^2$$

et nous désignerons par R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux, par ρ_1 et ρ_2 leurs inverses.

Pour que le réseau de lignes coordonnées puisse coïncider avec celui des lignes de courbure, dans une déformation convenable, il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions ρ_1 et ρ_2 de u et v, destinées à remplir le rôle indiqué, et qui vérifient les relations de Codazzi :

$$\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial v} = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial v}, \qquad \frac{1}{\rho_1-\rho_2}\frac{\partial\rho_2}{\partial u} = \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial u},$$

$$AB\rho_1\rho_2 + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial u}\right) = 0.$$

La dernière équation définit la courbure totale de Gauss $k = \rho_1\rho_2$. Les deux premières peuvent s'écrire

$$\frac{\partial(A^2\rho_1^2)}{\partial v} = k\frac{\partial(A^2)}{\partial v}, \qquad \frac{\partial(B^2\rho_2^2)}{\partial u} = k\frac{\partial(B^2)}{\partial u},$$

de sorte que si l'on pose

$$I = \int_{v_0}^{v} k \frac{\partial (A^2)}{\partial v} dv, \qquad J = \int_{u_0}^{u} k \frac{\partial (B^2)}{\partial u} du,$$

il devra exister deux fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(v)$ telles que

$$A^2 \rho_1^2 = \varphi(u) + I, \qquad B^2 \rho_2^2 = \psi(v) + J,$$

et pouvant se prêter à la multiplication

$$(1) \qquad A^2 B^2 k^2 = [\varphi(u) + I][\psi(v) + J].$$

L'équation fonctionnelle ainsi obtenue donne tout ce qui est nécessaire pour l'étude du ds^2.

Au lieu de prendre pour I et J deux intégrales qui s'annulent identiquement, l'une pour $v = v_0$, l'autre pour $u = u_0$, nous pourrons leur ajouter respectivement deux fonctions arbitraires $\Phi(u)$ et $\Psi(v)$. L'équation (1) conservera la même forme : il suffira donc que I et J vérifient les deux conditions

$$\frac{\partial I}{\partial v} = k \frac{\partial (A^2)}{\partial v}, \qquad \frac{\partial J}{\partial u} = k \frac{\partial (B^2)}{\partial u}.$$

Ceci permettra à l'occasion, dans certaines hypothèses, de simplifier soit les fonctions φ et ψ, soit les fonctions I et J elles-mêmes.

2. Remarquons que l'équation fonctionnelle ne fait intervenir que l'élément linéaire de la représentation sphérique. Si nous posons

$$M = A\rho_1, \qquad N = B\rho_2,$$

nous aurons pour celle-ci

$$d\sigma^2 = M^2 du^2 + N^2 dv^2.$$

Or le système fondamental suffirait à permettre de poser encore

$$P = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{1}{N} \frac{\partial M}{\partial v}, \qquad Q = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{1}{M} \frac{\partial N}{\partial u},$$

expressions qui, à un signe près, représentent deux des rotations du trièdre mobile associé aux lignes de courbure. On en déduit

$$k = \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u}\right).$$

On peut prendre alors, en particulier :

$$I = -\int_{v_0}^{v} P\left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u}\right)dv \qquad \text{ou} \qquad -\left[\frac{P^2}{2}\right]_{v_0}^{v} + \int_{v_0}^{v} P\,\frac{\partial Q}{\partial u}\,dv,$$

$$J = \int_{u_0}^{u} Q\left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u}\right)du \qquad \text{ou} \qquad -\left[\frac{Q^2}{2}\right]_{u_0}^{u} + \int_{u_0}^{u} Q\,\frac{\partial P}{\partial v}\,du.$$

L'équation (1) sera donc formée exclusivement avec M et N et leurs dérivées, et ne dépendra ainsi, au fond, que de la représentation sphérique.

Lorsque les fonctions inconnues $\varphi(u)$ et $\psi(v)$, qu'elle a pour but de définir, seront déterminées, on aura pour la sphère

$$d\sigma^2 = [\varphi(u) + I]\,du^2 + [\psi(v) + J]\,dv^2.$$

3. Une autre simplification des fonctions φ et ψ résultera d'un choix convenable des variables coordonnées, si elles ne sont pas imposées par d'autres considérations. Reprenons l'équation

$$A^2\rho_1^2 = \varphi(u) + I$$

et remplaçons la variable u par une fonction u_1 de u. Si nous posons

$$A_1^2 = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 = A^2\left(\frac{du}{du_1}\right)^2,$$

nous pourrons écrire

$$A_1^2\rho_1^2 = \varphi(u)\left(\frac{du}{du_1}\right)^2 + \left[\int_{v_0}^{v} k\,\frac{\partial(A_1^2)}{\partial v}\,dv + \Phi(u)\left(\frac{du}{du_1}\right)^2\right].$$

En général, la fonction φ étant ainsi remplacée par $\varphi(u)\cdot\left(\frac{du}{du_1}\right)^2$ pourra, par le choix de u, se transformer en toute autre fonction que l'on voudra, et en particulier en une constante. On aura $\varphi = 1$ en prenant

$$u_1 = \int\sqrt{\varphi(u)}\,du.$$

Ceci suppose que la fonction φ n'était pas tout d'abord nulle; car alors elle conserverait la valeur zéro quelle que soit la variable u_1.

Certaines formes de I et J nous autoriseront, dans la suite, à considérer comme singulières des solutions correspondant à $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$.

4. Avant d'aborder spécialement l'étude des surfaces isothermiques, nous allons exposer, relativement à l'équation (1), un procédé de discussion qui sera repris avec plus de détails dans la dernière Partie, pour la détermination des systèmes cycliques que peut donner l'application du théorème de Dupin à un réseau conjugué donné. Il s'agit de reprendre rapidement le problème d'O. Bonnet et de rechercher les surfaces qui peuvent admettre comme lignes de courbure un réseau orthogonal déterminé, mais déformable. Tous les résultats, qui ne dépendent que de la représentation sphérique, seront immédiatement donnés par l'équation fonctionnelle. Dans la suite, nous constaterons une correspondance complète entre ce problème et celui que nous avons en vue, les conclusions se classant absolument de la même manière.

Supposons connus les coefficients A et B, et par suite k, puis I et J. On peut, par une différentiation, faire disparaître l'une des fonctions inconnues φ ou ψ. L'existence de ψ, par exemple, équivaut à la condition

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{A^2B^2k^2}{\varphi(u)+I} - J\right] = 0$$

qui prend la forme

$$\varphi' + H\varphi^2 + 2K\varphi + L = 0. \tag{2}$$

Si l'on pose AB $k = R$, on aura

$$H = \frac{k}{R^2}\frac{\partial(B^2)}{\partial u}, \qquad K = -\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{kI}{R^2}\frac{\partial(B^2)}{\partial u},$$
$$L = \frac{\partial I}{\partial u} - 2\frac{I}{R}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{kI^2}{R^2}\frac{\partial(B^2)}{\partial u}.$$

Nous sommes en présence des résultats suivants :

1° Si H, K, L ne dépendent pas de v, nous avons une équation de Riccati donnant une infinité de fonctions φ qui dépendent d'un paramètre. D'après la manière dont nous avons obtenu l'équation (2), la constante arbitraire figurera dans $\psi(v)$ par addition.

Il n'y aurait pas lieu de former l'équation (2) si la courbure totale était nulle, car l'équation primitive se réduisant à $\varphi\psi = 0$, l'une des fonctions φ ou ψ serait nulle et l'autre arbitraire. Il s'agit d'une surface développable.

2° Si la variable v ne disparaît pas des coefficients H, K, L, l'équation (2) donne, par différentiation,

$$\frac{\partial H}{\partial v}\varphi^2 + 2\frac{\partial K}{\partial v}\varphi + \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

Celle-ci n'étant pas identique, on aura au plus deux solutions. Pour qu'une fonction φ ainsi définie convienne, il ne suffit pas qu'elle soit indépendante de v; elle transformera l'expression $H\varphi^2 + 2K\varphi + L$ en une certaine fonction de u, mais il faut encore que cette fonction soit égale à $-\varphi'$.

5. Caractérisons d'abord la déformation qui dépend d'un paramètre. Nous pouvons écrire successivement (¹)

$$H = \frac{k}{R^2}\frac{\partial(B^2)}{\partial u} = U, \qquad K = -\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u} + U I,$$

$$\frac{\partial K}{\partial v} = -\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log R + U k\frac{\partial(A^2)}{\partial v} = 0,$$

$$L = \frac{\partial I}{\partial u} - 2\frac{I}{R}\frac{\partial R}{\partial u} + U I^2.$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial^2 I}{\partial u\,\partial v} - 2I\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log R - \frac{2}{R}\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial I}{\partial v} + 2UIk\frac{\partial(A^2)}{\partial v} = 0.$$

La dernière condition donnera, par combinaison avec la précédente,

$$\frac{1}{\dfrac{\partial I}{\partial v}}\frac{\partial^2 I}{\partial u\,\partial v} - \frac{2}{R}\frac{\partial R}{\partial u} = 0,$$

(¹) Dans tout ce qui suit, U désignera une fonction de u, et V une fonction de v.

d'où

$$k \frac{\partial(\mathrm{A}^2)}{\partial v} = \mathrm{V}\,\mathrm{B}^2.$$

En résumé, nous avons les trois conditions

$$\frac{1}{\mathrm{B}} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} = \mathrm{V}\,\mathrm{AB}k, \qquad \frac{1}{\mathrm{A}} \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u} = \mathrm{U}\,\mathrm{AB}k,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log(\mathrm{AB}k) - \frac{2}{\mathrm{AB}} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u} = 0.$$

Elles ne sont compatibles que si l'une des fonctions U ou V est nulle. Si $\mathrm{V} = 0$, on peut choisir la variable u de manière à avoir $\mathrm{A} = 1$, d'où

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{B}^2\, dv^2,$$

avec

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u} = 0.$$

On peut déterminer la variable v de manière à avoir

$$\mathrm{B} = \mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1,$$

ce qui caractérise les *surfaces moulures cylindriques*.

Il importe d'établir la loi de variation des fonctions φ et ψ dans la déformation. Imaginons deux solutions particulières quelconques (φ_0, ψ_0) et (φ_1, ψ_1). L'équation fonctionnelle

$$\frac{1}{\varphi} \left(\frac{\partial^2 \mathrm{B}}{\partial u^2} \right)^2 = \psi - \left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u} \right)^2$$

appliquée à ces deux solutions et à la solution générale donne

$$\frac{\dfrac{1}{\varphi} - \dfrac{1}{\varphi_0}}{\dfrac{1}{\varphi} - \dfrac{1}{\varphi_1}} = \frac{\psi - \psi_0}{\psi - \psi_1} = \mu,$$

μ étant forcément constant. Donc

$$\frac{1-\mu}{\varphi} - \frac{1}{\varphi_0} + \frac{\mu}{\varphi_1} = 0, \qquad (1-\mu)\psi - \psi_0 + \mu\psi_1 = 0.$$

On peut écrire

$$\frac{\lambda}{\varphi}+\frac{\lambda_0}{\varphi_0}+\frac{\lambda_1}{\varphi_1}=0, \qquad \lambda\psi+\lambda_0\psi_0+\lambda_1\psi_1=0,$$

λ, λ_0 et λ_1 étant trois constantes assujetties à la seule condition

$$\lambda+\lambda_0+\lambda_1=0.$$

6. Supposons que l'équation (2) doive donner *deux solutions distinctes* φ_1, φ_2. Le choix de I, avec addition d'une fonction convenable de u, permettra d'annuler $\varphi_1+\varphi_2$ et de prendre ensuite $\varphi_1=1$, d'où $\varphi_2=-1$. Alors

$$K=0, \qquad H+L=0.$$

La première condition donne successivement

$$H=\frac{1}{IR}\frac{\partial R}{\partial u}, \qquad L=\frac{\partial I}{\partial u}-\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u}$$

et la seconde

$$0=H+L=\frac{\partial I}{\partial u}+\left(\frac{1}{I}-I\right)\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u},$$

$$I^2-1=VR^2.$$

Si le facteur V n'est pas nul, le choix de la variable v permettra de le prendre égal à 1. Alors, en posant $I=\operatorname{ch} 2\omega$, nous pourrons écrire

$$R=\operatorname{sh} 2\omega.$$

L'équation $K=0$ devient

$$\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial u}=\frac{\partial\omega}{\partial u}.$$

Puis on a

$$\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial v}=\frac{1}{2R}\frac{\partial I}{\partial v}=\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

de sorte que ω est donné par l'équation de Gauss

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}+\operatorname{sh} 2\omega=0.$$

Les représentations sphériques des deux surfaces applicables sont données par

$$d\sigma^2 = 2\,\mathrm{ch}^2\omega\, du^2 + 2\,\mathrm{sh}^2\omega\, dv^2,$$
$$d\sigma'^2 = 2\,\mathrm{sh}^2\omega\, du^2 + 2\,\mathrm{ch}^2\omega\, dv^2,$$

et conviennent à des surfaces à courbure totale ou moyenne constante.

7. Ossian Bonnet ne s'est pas occupé du cas, pourtant très intéressant, où les deux surfaces applicables tendraient à se confondre. Nous y sommes conduits en considérant la solution singulière double donnée par $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, et les conditions correspondantes

$$L = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial v} = 0$$

ou

$$\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial u} - \frac{2}{R}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{I}{R^2}\frac{\partial J}{\partial u} = 0, \qquad \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{I}{R^2}\frac{\partial J}{\partial u} = \frac{U'}{U}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial u} - \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{U'}{U}, \qquad I = \frac{U}{V}R.$$

On peut aussi supposer nulle la fonction ψ, de sorte que

$$J = \frac{V}{U}R$$

et pour la représentation sphérique

$$d\sigma^2 = R\left(\frac{U}{V}\,du^2 + \frac{V}{U}\,dv^2\right).$$

Il s'agit donc des surfaces dont les lignes de courbure sont représentées sur la sphère par un réseau isotherme.

Réciproquement, si une surface possède une pareille représentation sphérique, un choix convenable des variables permettra de prendre $M = N$, d'où, φ_0 et ψ_0 étant les fonctions correspondantes

$$\varphi_0 + I = \psi_0 + J = R,$$
$$H = \frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial u}, \qquad K = -\frac{\varphi_0}{R^2}\frac{\partial R}{\partial u}, \qquad L = -\varphi'_0 + \frac{\varphi_0^2}{R^2}\frac{\partial R}{\partial u},$$

de sorte que l'équation (2) prendra la forme

$$\varphi' - \varphi'_0 + \mathrm{H}(\varphi - \varphi_0)^2 = 0.$$

Si nous écartons le cas de la déformation continue, où H ne dépend pas de v, la différentiation par rapport à cette variable conduira à l'équation

$$(\varphi - \varphi_0)^2 = 0$$

et l'on aura une solution double.

8. Appelons (S_0) une surface double. Ces surfaces, que l'on rencontre fréquemment en Géométrie, ont été étudiées à divers points de vue. M. Darboux les a déterminées comme enveloppes d'un plan, au moyen de quatre solutions d'une même équation harmonique. M. Thybaut a obtenu spécialement celles de ces surfaces qui conservent leur caractère dans une inversion.

Une propriété importante, qui permet de définir les surfaces (S_0), va se rattacher directement à ce qui précède. Ce sont les seules surfaces qui, dans une déformation infiniment petite, sont susceptibles d'avoir leurs lignes de courbure transformées en lignes conjuguées. En se bornant à certains infiniment petits, on peut dire que les lignes de courbure sont conservées (V. Bianchi, 1re et 2e édition). Il est facile de compléter ce résultat par une interprétation rigoureuse d'éléments finis.

Deux surfaces applicables d'Ossian Bonnet se relient toujours l'une à l'autre, au moyen d'une transformation continue qui les fait converger avec une surface (S_0). Considérons une intégrale quelconque de l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + e^{2\theta} - t^2 e^{-2\theta} = 0,$$

où t^2 désigne un paramètre, et posons

$$d\sigma^2 = (e^\theta + te^{-\theta})^2 du^2 + (e^\theta - te^{-\theta})^2 dv^2,$$
$$d\sigma'^2 = (e^\theta - te^{-\theta})^2 du^2 + (e^\theta + te^{-\theta})^2 dv^2.$$

Ces deux formules conviennent aux représentations sphériques d'un couple quelconque de surfaces applicables, qui varient avec t, et viennent se confondre avec une surface (S_0) pour $t = 0$.

Si, dans le ds^2 commun, A et B sont des fonctions paires de t, les coordonnées d'un point M de l'une des deux surfaces ayant des développements de la forme

$$x = x_0 + t x_1 + t^2 x_2 + \ldots, \qquad y = y_0 + t y_1 + t^2 y_2 + \ldots,$$
$$z = z_0 + t z_1 + t^2 z_2 + \ldots,$$

il suffira de changer t en $-t$ pour avoir les coordonnées

$$x' = x_0 - t x_1 + t^2 x_2 - \ldots, \qquad y' = y_0 - t y_1 + t^2 y_2 - \ldots,$$
$$z' = z_0 - t z_1 + t^2 z_2 - \ldots$$

du point correspondant M′ d'une surface égale à la seconde. Comme les deux surfaces (M) et (M′) sont applicables, on a

$$\Sigma(dx_0 + t\,dx_1 + t^2\,dx_2 + \ldots)^2 = \Sigma(dx_0 - t\,dx_1 + t^2\,dx_2 + \ldots)^2,$$

et la comparaison des termes du premier degré en t donne

$$dx_0\,dx_1 + dy_0\,dy_1 + dz_0\,dz_1 = 0.$$

On conclut de là que *les courbes* (C) *qui joignent les points correspondants des surfaces variables admettent comme tangentes, aux points où elles percent la surface* S_0 (x_0, y_0, z_0), *les directrices d'une déformation infiniment petite de celle-ci.*

Cette déformation se trouve définie par la suppression des termes de degré supérieur à 1, par rapport à t, dans les développements de x, y, z. C'est précisément celle qui conserve les lignes conjuguées. En effet, x, y, z sont solutions d'une équation de Laplace, dont les coefficients, exprimés avec A et B, sont aussi des fonctions paires de t,

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = (\alpha_0 + t^2\alpha_1 + t^4\alpha_2 + \ldots)\frac{\partial\theta}{\partial u} + (\beta_0 + t^2\beta_1 + t^4\beta_2 + \ldots)\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Si l'on substitue x, et si l'on considère les termes du premier degré, on trouve

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} = \alpha_0\frac{\partial x_1}{\partial u} + \beta_0\frac{\partial x_1}{\partial v}.$$

Même conclusion pour y_1 et z_1. Donc la surface S_1 (x_1, y_1, z_1) est rapportée à un système conjugué, dont l'équation de Laplace est la même que pour la surface (S_0). Il en sera encore ainsi pour la surface $(x_0 + t\,x_1,\ y_0 + t\,y_1, z_0 + t\,z_1)$.

Cette hypothèse est réalisée avec

$$A = B = e^{\theta}, \qquad \rho_1 = 1 + t e^{-2\theta}, \qquad \rho_2 = 1 - t e^{-2\theta}.$$

On a une surface à courbure moyenne constante et égale à 2, la surface (S_0) étant une sphère de rayon 1.

De même, avec

$$A = -B = e^{-\theta}, \qquad \rho_1 = t + e^{2\theta}, \qquad \rho_2 = t - e^{2\theta},$$

on a une surface à courbure moyenne constante et égale à $2\,t$, (S_0) étant une surface minima.

Mais si l'on prend, par exemple,

$$A = e^{\theta} - t e^{-\theta}, \qquad B = e^{\theta} + t e^{-\theta},$$

d'où

$$\rho_1 = \frac{e^{\theta} + t e^{-\theta}}{e^{\theta} - t e^{-\theta}}, \qquad \rho_2 = \frac{e^{\theta} - t e^{-\theta}}{e^{\theta} + t e^{-\theta}},$$

on obtiendra une famille de surfaces à courbure totale constante et égale à 1, A et B n'étant pas des fonctions paires de t. Généralement, lorsqu'il en est ainsi, le résultat doit être présenté d'une autre manière. En changeant t en $-t$, on transforme la première surface S (x, y, z) en une surface $(\bar{S})$ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ qui admet la seconde représentation sphérique possible pour (S) dans la déformation indiquée. Cette représentation convient donc à la surface (S') (x', y', z') pour laquelle nous poserons

$$x' = x_0 + t x'_1 + \ldots, \qquad y' = y_0 + t y'_1 + \ldots, \qquad z' = z_0 + t z'_1 + \ldots.$$

Puis en changeant t en $-t$, nous aurons la surface $(\bar{S}')$ $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ applicable sur $(\bar{S})$ et ayant ses plans tangents parallèles à ceux de (S).

Cela étant, les surfaces applicables (S) et (S') nous donnent

$$\Sigma(dx_0 + t\,dx_1 + \ldots)^2 = \Sigma(dx_0 + t\,dx'_1 + \ldots)^2,$$

d'où, en égalant les termes en t,

$$\Sigma\, dx_0(dx_1 - dx'_1) = 0.$$

Comme on a

$$\frac{x - x'}{t} = x_1 - x'_1 + t(x_2 - x'_2) + \ldots,$$

on conclut que si t tend vers zéro

$$\lim \frac{x - x'}{t} = x_1 - x'_1.$$

Donc encore, *les droites* $\overline{\mathrm{MM}'}$ *ont pour positions limites les directrices d'une déformation infiniment petite de* (S_0).

Celle-ci conserve aussi le système conjugué. Car (S) et (S′) ayant même ds^2, x, y, z et x', y', z' sont solutions de la même équation du deuxième ordre, ainsi que $x - x'$, $y - y'$ et $z - z'$. On n'a plus qu'à faire tendre t vers zéro.

9. Nous allons maintenant nous occuper spécialement des surfaces isothermiques, dont nous mettrons l'élément linéaire sous la forme

$$ds^2 = e^{2\alpha}(du^2 + dv^2).$$

Il s'agit de déterminer les fonctions α répondant à la question. Si nous introduisons, pour abréger, le symbole

$$\Delta\alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2},$$

nous aurons, avec les notations du n° 2,

$$\mathrm{P} = \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad \mathrm{Q} = \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \qquad k = -e^{-2\alpha}\Delta\alpha.$$

L'équation fonctionnelle à discuter prendra provisoirement l'une des formes

$$(3) \qquad (\Delta\alpha)^2 = \left[\varphi(u) - 2\int \Delta\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v} dv\right]\left[\psi(v) - 2\int \Delta\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u} du\right],$$

$$(3') \qquad (\Delta\alpha)^2 = \left[\varphi(u) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)^2 - 2\int \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2}\frac{\partial \alpha}{\partial v} dv\right] \times \left[\psi(v) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)^2 - 2\int \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2}\frac{\partial \alpha}{\partial u} du\right],$$

les intégrales pouvant être modifiées comme il a été dit.

10. Un premier avantage de cette équation unique, c'est qu'elle rend inutile toute démonstration des théorèmes de Bour et de Christoffel. En effet, cette équation reste la même quand on change α en $-\alpha$, et cette transformation n'altère pas les facteurs du second membre, qui donnent la représentation sphérique.

Ensuite l'impossibilité où l'on est d'obtenir la solution générale suggère naturellement l'idée de chercher des solutions particulières, en essayant des formes de la fonction α qui permettent de calculer *a priori* l'une au moins des intégrales I ou J. On constate que certaines solutions les plus connues se présentent ainsi naturellement, et que la méthode est susceptible de donner des solutions nouvelles. C'est ainsi qu'elle nous conduit directement aux *surfaces spirales isothermiques*, qui présentent plusieurs particularités intéressantes.

11. Nous laisserons de côté les résultats évidents fournis par les cônes, les cylindres et les surfaces de révolution. Nous indiquerons aussi simplement l'équivalence de l'équation (3), avec l'hypothèse d'un système de lignes de courbure planes, et du système intégré par M. Darboux (t. IV, p. 217) pour la détermination complète des surfaces de cette catégorie.

L'hypothèse la plus immédiate, où l'on est conduit par la forme des intégrales

$$\mathrm{I} = -2\int \Delta\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial v}\, dv, \qquad \mathrm{J} = -2\int \Delta\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u}\, du,$$

est naturellement celle où $\Delta\alpha$ serait une fonction de α. Nous poserons, dans ce cas,

$$\Delta\alpha = f'(\alpha), \qquad \mathrm{I} = \mathrm{J} = -2f(\alpha),$$

d'où l'équation

$$f'^2 = (\varphi - 2f)(\psi - 2f).$$

Prenons d'abord pour φ et ψ deux constantes. En ajoutant à f une constante convenable, on pourra poser $\varphi = 2a$, $\psi = -2a$, d'où

$$f'^2 = 4(f^2 - a^2).$$

On en déduit, pour $a \neq 0$,

$$f(\alpha) = -\frac{m^2}{2} e^{2\alpha} - \frac{n^2}{2} e^{2\alpha}, \qquad f'(\alpha) = -m^2 e^{-2\alpha} + n^2 e^{-2\alpha},$$

m et n étant deux constantes dont le produit est égal à a. La fonction α est alors déterminée par l'équation

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} + m^2 e^{2\alpha} - n^2 e^{-2\alpha} = 0.$$

On reconnaît les surfaces à *courbure moyenne constante.*

Si $a = 0$, les fonctions $\pm \alpha$ donnent une *sphère* et une *surface minima.*

On n'a pas à supposer constante une seule des fonctions φ ou ψ, car α ne pourrait dépendre que d'une seule variable, et la surface serait de révolution. Il est probable que l'on obtiendrait des solutions nouvelles et intéressantes, en prenant deux fonctions φ et ψ variables. Malheureusement la question est compliquée par l'impossibilité d'intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} = f'(\alpha),$$

le cas de l'équation de Liouville étant seul bien étudié, et ne conduisant qu'à la sphère ou la surface minima.

12. Les autres solutions les plus anciennement connues rentrent dans le type

$$ds^2 = (\mathrm{U} - \mathrm{V})^{2n}(du^2 + dv^2),$$

n désignant une constante. Toutes les surfaces de cette catégorie jouissent de la propriété, signalée par M. Pellet (*C. R.*, 1897) de former des familles dépendant d'un paramètre, et admettant une même représentation sphérique. Notre équation fondamentale va nous permettre de limiter les valeurs possibles pour n, et de déterminer toutes les surfaces correspondantes, aucune d'ailleurs n'étant nouvelle.

Les calculs habituels donnent successivement

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = n\frac{U'}{U-V}, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial v} = n\frac{-V'}{U-V},$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} = n\left[\frac{U''}{U-V} - \frac{U'^2}{(U-V)^2}\right], \qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2} = n\left[\frac{-V''}{U-V} - \frac{V'^2}{(U-V)^2}\right],$$

$$\int\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}\frac{\partial\alpha}{\partial v}dv = n^2\left[\frac{U'^2}{2(U-V)^2} - \frac{U''}{U-V}\right],$$

$$\int\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}\frac{\partial\alpha}{\partial u}du = n^2\left[\frac{V'^2}{(U-V)^2} + \frac{V''}{U-V}\right],$$

d'où l'équation

$$(4) \qquad \left[\frac{U''-V''}{U-V} - \frac{U'^2+V'^2}{(U-V)^2}\right]^2$$
$$= n^2\left[\varphi + \frac{2U''}{U-V} - \frac{U'^2+V'^2}{(U-V)^2}\right]\left[\psi - \frac{2V''}{U-V} - \frac{U'^2+V'^2}{(U-V)^2}\right],$$

où nous avons remplacé, pour plus de simplicité, φ et ψ par $n^2\psi$ et $n^2\psi$. On peut l'écrire

$$\begin{aligned} & n^2\varphi\psi(U-V)^4 + 2n^2(\psi U'' - \varphi V'')(U-V)^3 \\ & - [(U''-V'') + 4n^2U''V'' + n^2(\varphi+\psi)(U'^2+V'^2)](U-V)^2 \\ & + (1-n^2)(U'^2+V'^2)[2(U''-V'')(U-V) - (U'^2+V'^2)] = 0. \end{aligned}$$

13. Le cas où $n^2 = 1$ demande à être étudié à part. L'équation se réduit à

$$\varphi\psi(U-V)^2 + 2(\psi U'' - \varphi V'')(U-V) - [(U''+V'')^2 + (\varphi+\psi)(U'^2+V'^2)] = 0$$

ou

$$(4') \qquad \left[\left(U + \frac{U''}{\varphi}\right) - \left(V + \frac{V''}{\psi}\right)\right]^2 = \left(\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\psi}\right)\left[\left(\frac{U''^2}{\varphi} + U'^2\right) + \left(\frac{V''^2}{\psi} + V'^2\right)\right].$$

Étant donnée généralement une équation de la forme

$$(5) \qquad (U_1 - V_1)^2 = (U_2 - V_2)(U_3 - U_2) = 0,$$

on y satisfait d'abord, d'une façon particulière, en posant

$$U_1 = V_1 = a_1 \quad \text{et} \quad U_2 = V_2 = a_2 \quad \text{ou} \quad U_3 = V_3 = a_3,$$

a_1, a_2, a_3 étant des constantes arbitraires.

Commençons par appliquer ces deux résultats à l'équation (4'). Le premier donne

$$U + \frac{U''}{\varphi} = a_1, \qquad V + \frac{V''}{\psi} = a_1, \qquad \frac{1}{\varphi} = -\frac{1}{\psi} = a_2.$$

Éliminons φ et ψ,

$$U - a_1 + a_2 U'' = 0, \qquad V - a_1 - a_2 V'' = 0.$$

La constante a_1, qui disparaît dans $U - V$, peut être supposée nulle, et l'on a, en désignant par p, q, m, p', q', m' des constantes,

$$U = p\, e^{mu} + q\, e^{-mu}, \qquad V = p' e^{m'v} + q' e^{-m'v}$$

avec

$$m^2 = -m'^2 = -\frac{1}{a_2}, \qquad \varphi = -m^2, \qquad \psi = -m'^2.$$

Le second résultat correspond à

$$U + \frac{U''}{\varphi} = a_1, \qquad V + \frac{V''}{\psi} = a_1, \qquad \frac{U''^2}{\varphi} + U'^2 = -\frac{V''^2}{\psi} - V'^2 = a_3.$$

On peut encore supposer $a_1 = 0$, et l'on obtient les combinaisons

$$UU'' + U'^2 + a_3 = 0, \qquad VV'' - V'^2 - a_3 = 0,$$

d'où l'on tire encore les mêmes formes pour U et V, et les mêmes expressions de φ et ψ. Quant aux relations entre les constantes, on a

$$a_3 = -4m^2 pq = 4m'^2 p' q', \qquad \text{d'ou} \qquad m^2 pq + m'^2 p' q' = 0.$$

Abordons la solution générale. L'équation (5), différentiée par rapport à u, puis par rapport à v, donne

$$2U_1' V_1' = U_2' V_3' + U_3' V_2'.$$

Donnons à v deux valeurs particulières quelconques, et soient λ_1, λ_2, λ_3 et μ_1, μ_2, μ_3 les valeurs correspondantes prises par V_1', V_2', V_3'. On aura les deux relations

$$2\lambda_1 U_2' = \lambda_3 U_2' + \lambda_2 U_3', \qquad 2\mu_1 U_1' = \mu_3 U_2' + \mu_2 U_2'.$$

Si tous les déterminants formés avec les constantes sont forcément nuls, les fonctions V_1', V_2', V_3' sont proportionnelles. Sinon, ce seront les fonctions U'_1, U'_2, U'_3 qui le seront. Dans cette dernière hypothèse, par exemple, comme on a déjà étudié le cas où $U_1 = V_1 = 0$, on peut poser

$$U_2 = aU_1 + c, \qquad U_3 = bU_1 + d,$$

a, b, c, d étant quatre constantes, et par substitution directe dans (5)

$$(U_1 - V_1)^2 = (aU_1 - V_2 + c)(bU_1 - V_3 + d),$$
$$(1 - ab)U_1^2 - [2V_1 - b(V_2 - c) - a(V_3 - d)]U_1 + V_1^2 - (V_1 - c)(V_3 - d) = 0.$$

Si U_1, et par suite U_2 et U_3, se réduisent à des constantes, on a une seule relation en V_1, V_2 et V_3, et deux de ces fonctions sont arbitraires. Si U_1 est variable, la dernière relation est identique en U_1, et l'on aura

$$1 - ab = 0, \quad 2V_1 - b(V_2 - c) - a(V_3 - d) = 0, \quad V_1^2 - (V_2 - c)(V_3 - d) = 0.$$

L'une des fonctions V_1, V_2, V_3 sera encore arbitraire.

Appliquons à l'équation (4'). Pour rendre constantes les trois fonctions de u

$$U + \frac{U''}{\varphi}, \quad \frac{1}{\varphi}, \quad \frac{U''^2}{\varphi} + U'^2,$$

on n'obtient pas de nouvelle forme de U. Essayons la seconde hypothèse. Il faut d'abord

$$\frac{1}{\varphi} = a\left(U + \frac{U''}{\varphi}\right) + c, \qquad \frac{U''^2}{\psi} + U'^2 = b\left(U + \frac{U''}{\varphi}\right) + d.$$

Éliminons φ, en tenant compte de la relation $ab = 1$, et faisons $c = 0$, puisqu'il est permis d'ajouter une constante à U,

$$UU'' - U'^2 + bU + d = 0.$$

L'intégrale de cette équation est encore de la forme

$$U = p\,e^{mu} + q\,e^{-mu} + r$$

et entraîne $\varphi = -m^2$. Les trois fonctions U_1, U_2, U_3 se réduisant toujours à des constantes, *la fonction* V *est complètement arbitraire*, et il lui correspond toujours une fonction ψ. Comme on peut faire rentrer r dans V, on conclut de là que *les formules*

$$ds^2 = (p\,e^{mu} + q\,e^{-mu} - V)^2\,(du^2 + dv^2),$$
$$ds^2 = \frac{1}{(p\,e^{mu} + q\,e^{-mu} - V)^2}\,(du^2 + dv^2)$$

définissent, quelle que soit la fonction arbitraire V *de* v, *des surfaces rapportées à leurs lignes de courbure.*

Pour la seconde forme, on trouve

$$\rho_2^2 = - m^2 V^2 - V'^2 + 4m^2pq.$$

Cette expression étant indépendante de u, *les lignes* (v) *sont des cercles.* Ces surfaces ont été obtenues pour la première fois par Ossian Bonnet (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXV, p. 143). Nous les utiliserons dans la seconde Partie pour constituer un groupe de trois surfaces isothermiques.

Lorsque V a la même forme que U, à une constante près, on a la *cyclide de Dupin.*

14. Le cas où $n^2 = 1$ étant complètement traité, revenons à l'équation générale

$$(4'')\qquad \begin{aligned}&[(U - V)(U'' - V'') - (U'^2 + V'^2)]^2\\ &\quad = n^2[(U - V)^2\varphi + 2U''(U - V) - (U'^2 + V'^2)]\\ &\qquad \times[(U - V)^2\psi - 2V''(U - V) - (U'^2 + V'^2)],\end{aligned}$$

et posons

$$U'^2 = f(U),\qquad V'^2 = -g(V),\qquad \text{d'où}\qquad 2U'' = f'(U),\qquad 2V'' = -g'(V).$$

L'équation prend la forme

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{U - V}{2}[f'(U) + g'(V)] - [f(U) - g(V)]\right\}^2\\ &\quad = n^2[(U - V)^2\varphi + (U - V)f'(U) - f(U) + g(V)]\\ &\qquad \times[(U - V)^2\psi + (U - V)g'(V) - f(U) + g(V)].\end{aligned}$$

Nous allons la discuter en prenant pour variables U et V; nous aurons ensuite, pour les exprimer en u et v, les formules

$$u = \int \frac{dU}{\sqrt{f(U)}},\qquad v = \int \frac{dV}{\sqrt{-g(V)}}.$$

Remarquons d'abord que si l'on fait $U = V$, il vient

$$[f(U)-g(U)]^2 = n^2[f(U)-g(U)]^2.$$

Avec $n^2 \neq 1$, il faut donc que $f(U) = g(U)$. *Les fonctions f et g sont identiques.* On aura donc

$$\left\{\frac{U-V}{2}[f'(U)+f'(V)]-[f(U)-f(V)]\right\}^2$$
$$= n^2[(U-V)^2\varphi+(U-V)f'(U)-f(U)+f(V)]$$
$$\times[(U-V)^2\psi+(U-V)f'(V)-f(U)+f(V)].$$

Faisons successivement $V = 0$, $U = 0$,

$$\left\{\frac{U}{2}[f'(U)+f'_0]-[f(U)-f_0]\right\}^2$$
$$= n^2[U^2\varphi+Uf'(U)-f(U)+f_0][U^2\psi_0+Uf'_0-f(U)+f_0],$$
$$\left\{\frac{V}{2}[f'(V)+f'_0]-[f(V)-f_0)]\right\}^2$$
$$= n^2[V^2\varphi_0-Vf'_0+f(V)-f_0][V^2\psi-Vf'(V)+f(V)-f_0] = 0.$$

Ces deux formules définissent les fonctions φ et ψ.

Nous supposerons que la fonction f soit développable en série entière, et pour cela nous ajouterons, s'il y a lieu, une constante convenable à U et V. Il nous faut connaître les valeurs prises par φ et ψ lorsque la variable est nulle; or les deux dernières formules donnent, après division par U^4 et V^4,

$$\left(\frac{U}{12}f''_0+\ldots\right)^2 = n^2\left(\varphi+\frac{1}{2}f''_0+\ldots\right)\left(\psi_0-\frac{1}{2}f''_0-\ldots\right),$$
$$\left(\frac{V}{12}f'''_0+\ldots\right)^2 = n^2\left(\varphi_0+\frac{1}{2}f''_0+\ldots\right)\left(\psi-\frac{1}{2}f''_0-\ldots\right).$$

Toutes deux, pour une variable nulle conduisent à

$$0 = \left(\varphi_0+\frac{1}{2}f''_0\right)\left(\psi_0-\frac{1}{2}f''_0\right).$$

Or les deux facteurs sont nuls. Car si le second est supposé nul, on divisera par U dans la première équation; et pour $U = 0$, on retombera sur

$$\varphi_0+\frac{1}{2}f''_0 = 0.$$

On a donc

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2}f''_0, \qquad \psi_0 = \frac{1}{2}f''_0,$$

d'où, par substitution,

$$\varphi = -\frac{f'(U)}{U} + \frac{f(U)-f_0}{U^2} + \frac{\left\{\frac{U}{2}[f'(U)+f'_0]-[f(U)-f_0]\right\}^2}{n^2U^2\left[\frac{U^2}{2}f''_0+Uf'_0-f(U)+f_0\right]},$$

$$\psi = \frac{f'(V)}{V} - \frac{f(V)-f_0}{V^2} - \frac{\left\{\frac{V}{2}[f'(V)+f'_0]-[f(V)-f_0]\right\}^2}{n^2V^2\left[\frac{V^2}{2}f''_0+Vf'_0-f(V)+f_0\right]}.$$

On constate que $\varphi(U) = -\psi(U)$. Les développements donnent

$$\varphi = -\frac{1}{2}f''_0 - \frac{U}{3}\left(1+\frac{1}{8n^2}\right)f'''_0 + \ldots, \qquad \psi = \frac{1}{2}f''_0 + \frac{V}{3}\left(1+\frac{1}{8n^2}\right)f'''_0 + \ldots.$$

Substituons dans l'équation fondamentale (4''), et ordonnons par rapport aux puissances croissantes de U et V. Le premier membre est du sixième ordre, et a, comme termes d'ordre inférieur, le groupe $\left[\frac{(U-V)^3}{12}f'''_0\right]^2$. Les deux facteurs du second membre sont du troisième ordre et débutent par

$$\frac{1}{6}(U-V)^2\left(V-\frac{U}{4n^2}\right)f'''_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{6}(U-V)^2\left(\frac{V}{4n^2}-U\right)f'''_0.$$

Comme le zéro n'est pas déterminé, si l'on avait $f''' = 0$, f se réduirait à un polynome du deuxième degré. On retombe, pour $n^2 = 1$, sur des solutions déjà obtenues, et pour n quelconque, sur des développables. Cette hypothèse écartée, l'identification des termes d'ordre inférieur donne

$$\frac{(U-V)^2}{4} = n^2\left(V-\frac{U}{4n^2}\right)\left(\frac{V}{4n^2}-U\right),$$

ce qui exige que $n^2 = \frac{1}{4}$.

On voit donc, en résumé, que *n^2 ne peut pas prendre d'autres valeurs que* 1 *et* $\frac{1}{4}$.

Soit donc $n^2 = \frac{1}{4}\cdot$ Prolongeons les développements

$$4\left[\frac{(U-V)^3}{12}f'''_0+\frac{(U-V)^3(U+V)}{24}f^{\text{IV}}_0+\frac{(U-V)^3(3U^2+4UV+3V^2)}{240}f^{\text{V}}_0+\ldots\right]^2$$
$$=\left[-\frac{(U-V)^3}{6}f'''_0-\frac{(U-V)^3(3U+V)}{24}f^{\text{IV}}_0\right.$$
$$\left.-\frac{(U-V)^3(6U^2+3UV+V^2)}{120}f^{\text{V}}_0-\frac{(U-V)^2U^3}{24}\frac{(f^{\text{IV}}_0)^2}{f'''_0}+\ldots\right]$$
$$\times\left[-\frac{(U-V)^3}{6}f'''_0-\frac{(U-V)^3(U+3V)}{24}f^{\text{IV}}_0\right.$$
$$\left.-\frac{(U-V)^3(U^2+3UV+6V^2)}{120}f^{\text{V}}_0+\frac{(U-V)^2V^3}{24}\frac{(f^{\text{IV}}_0)^2}{f'''_0}+\ldots\right].$$

Les termes du septième ordre sont d'eux-mêmes identiques dans les deux membres. En égalant ceux du huitième ordre, on trouve, après suppression du facteur $(U - V)^6$,

$$\frac{(U+V)^2}{4}(f^{\text{IV}}_0)^2+\frac{3U^2+4UV+3V^2}{10}f'''_0f^{\text{V}}_0$$
$$=\frac{6U^2+5UV+6V^2}{20}f'''_0f^{\text{V}}_0+\frac{4U^2+11UV+4V^2}{16}(f^{\text{IV}}_0)^2.$$

Le coefficient de $U^2 + V^2$ étant le même de part et d'autre, il suffit d'égaler les coefficients de UV. On obtient ainsi

$$4f'''_0f^{\text{V}}_0-5(f^{\text{IV}}_0)^2=0.$$

On a une première solution avec $f^{\text{IV}}_0 = 0$. On constate, en effet, que si f est un polynome du troisième degré, et si l'on pose

$$f(U)=\alpha U^2+\beta U+\gamma U+\delta,\qquad \varphi=-(3\alpha U+\beta),\qquad \psi=3\alpha V+\beta,$$

l'équation (4″) sera vérifiée quelles que soient les constantes α, β, γ, δ. Mais la surface se réduit à une sphère dont le rayon est égal à l'unité de longueur, si le ds^2 est mis sous la forme

$$ds^2=\frac{U-V}{2}\left[\frac{dU^2}{(a-U)(b-U)(c-U)}-\frac{dV^2}{(a-V)(b-V)(c-V)}\right].$$

En renversant la fraction $\frac{U-V}{2}$, on aurait une surface minima.

La dernière solution est donnée par

$$4\frac{f^{\text{V}}(U)}{f^{\text{IV}}(U)}=5\frac{f^{\text{IV}}(U)}{f'''(U)},\qquad f(U)=\frac{\alpha}{U-U_0}+\beta U^2+\gamma U+\delta.$$

Si l'on fait $U_0 = 0$, il vient, avec trois constantes arbitraires a, b, c,

$$f(U) = 4\frac{(a-U)(b-U)(c-U)}{U}$$

et pour $n = \frac{1}{2}$

$$ds^2 = \frac{U-V}{4}\left[\frac{U\,dU^2}{(a-U)(b-U)(c-U)} - \frac{V\,dV^2}{(a-V)(b-V)(c-V)}\right].$$

On reconnaît les *quadriques*, rapportées aux coordonnées elliptiques de Lamé, et qui sont généralisées par les *cyclides de M. Darboux.*

Toutes les surfaces du type considéré sont donc connues.

15. Mais voici l'un des cas les plus importants où, en essayant d'effectuer les quadratures de l'équation fonctionnelle d'une manière simple, on peut être conduit à des solutions nouvelles.

Nous avons trouvé

$$I = -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)^2 - 2\int\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\,dv, \qquad J = -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)^2 - 2\int\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}\frac{\partial\alpha}{\partial u}\,du.$$

Dans les termes non effectués se trouvent associées des dérivées de α prises par rapport à des variables différentes, tandis que les premiers termes ont été calculés avec des dérivées de même nature. La difficulté disparaît si les dérivées secondes $\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}$ et $\frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2}$ sont liées par une relation linéaire à coefficients constants, permettant de faire l'échange de ces dérivées dans les expressions où elles figurent. Nous n'étudierons pas le cas général, mais nous nous bornerons à celui où la relation linéaire est homogène, et devient l'équation des cordes vibrantes. On a alors

$$\alpha = f(au + bv) + g(au - bv),$$

a et b étant deux constantes. Nous supposerons que l'on a $a^2 + b^2 = 1$, et nous aurons l'équation correspondante

$$(f'' + g'')^2 = [\varphi - (f' - g')^2][\psi - (f' + g')^2] \tag{6}$$

dans laquelle nous n'attribuerons à φ et ψ que des valeurs constantes.

Écartant tout d'abord les solutions singulières provenant de constantes nulles, nous choisirons u et v de manière à avoir $\varphi\psi = 1$, et nous poserons alors

$$\varphi = e^{2h}, \qquad \psi = e^{-2h}, \qquad f' - g' = e^h \sin\lambda, \qquad f' + g' = e^{-h} \sin\mu,$$

ce qui ramène l'équation (6) à la forme

$$f'' + g'' = \cos\lambda \cos\mu. \tag{7}$$

Si l'on en tient compte, la différentiation des formules précédentes donne

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = b\, e^h \cos\mu, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial u} = a\, e^h \cos\lambda.$$

Mais, d'autre part,

$$2f' = e^h \sin\lambda + e^{-h} \sin\mu, \qquad 2g' = -e^h \sin\lambda + e^{-h} \sin\mu.$$

Exprimons que ces fonctions dépendent respectivement de $au + bv$ et $au - bv$:

$$e^h \cos\lambda\left(b\frac{\partial\lambda}{\partial u} - a\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right) + e^{-h}\cos\mu\left(b\frac{\partial\mu}{\partial u} - a\frac{\partial\mu}{\partial v}\right) = 0,$$
$$-e^h \cos\lambda\left(b\frac{\partial\lambda}{\partial u} + a\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right) + e^{-h}\cos\mu\left(b\frac{\partial\mu}{\partial u} + a\frac{\partial\mu}{\partial v}\right) = 0.$$

Ceci n'ajoute qu'une nouvelle condition

$$b\, e^h \cos\lambda \frac{\partial\lambda}{\partial u} - a\, e^{-h} \cos\mu \frac{\partial\mu}{\partial v} = 0$$

permettant de poser

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = a\theta\, e^{-h} \cos\mu, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial v} = b\theta\, e^h \cos\lambda,$$

d'où

$$d\lambda = e^{-h}\cos\mu(a\theta\, du + b\, dv), \qquad d\mu = e^h \cos\lambda(a\, du + b\theta\, dv).$$

Il faut et il suffit que ces expressions deviennent des différentielles exactes. Les conditions sont

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = a\, e^{-h}(\theta^2 - 1)\,\mathrm{tang}\lambda \cos\mu, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial v} = b\, e^h(\theta^2 - 1)\,\mathrm{tang}\mu \cos\lambda.$$

On aperçoit la solution $\theta = \pm 1$ évidente *a priori*. S'il en existait d'autres, elles devraient correspondre à

$$\frac{d\theta}{\theta^2 - 1} = a\, e^{-h} \operatorname{tang} \lambda \cos \mu \, du + b\, e^{h} \operatorname{tang} \mu \cos \lambda \, dv.$$

Pour que le second membre soit une différentielle exacte, on a la nouvelle condition

$$\frac{\cos^4 \mu}{\cos^4 \lambda} = e^{4h}.$$

Mais si le rapport $\frac{\cos \mu}{\cos \lambda}$ était constant, on pourrait simplifier la différentielle, et la nouvelle condition d'intégrabilité est impossible. On a donc uniquement $\theta = \pm 1$. Nous allons supposer $\theta = 1$, et λ et μ seront deux fonctions de la même variable $t = au + bv$. Alors

$$d\lambda = e^{-h} \cos \mu \, dt, \qquad d\mu = e^{h} \cos \lambda \, dt.$$

La combinaison

$$e^{h} \cos \lambda \, d\lambda - e^{-h} \cos \mu \, d\mu = 0$$

montre que g' se réduira bien à une constante m, et g sera une fonction *linéaire* de $au + bv$.

Pour calculer les fonctions auxiliaires λ et μ, nous avons les relations

$$\frac{d(\lambda + \mu)}{dt} = e^{h} \cos \lambda + e^{-h} \cos \mu, \qquad \frac{d(\lambda - \mu)}{dt} = - e^{h} \cos \lambda + e^{-h} \cos \mu,$$

$$2m = - e^{-h} \sin \lambda + e^{-h} \sin \mu,$$

d'où

$$\left[\frac{d(\lambda + \mu)}{dt}\right]^2 + 4m^2 = e^{2h} + e^{-2h} + 2 \cos(\lambda + \mu),$$

$$\left[\frac{d(\lambda - \mu)}{dt}\right]^2 + 4m^2 = e^{2h} + e^{-2h} - 2 \cos(\lambda - \mu).$$

Posons

$$4m^2 - (e^{2h} + e^{-2h}) = 6\beta, \qquad \cos(\lambda + \mu) = \beta - 2y_1, \qquad \cos(\lambda - \mu) = 2y_2 - \beta;$$

y_1 et y_2 vérifieront la même équation

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4(y + \beta)\left(y - \frac{\beta - 1}{2}\right)\left(y - \frac{\beta + 1}{2}\right).$$

Soient donc

$$e_1 = -\beta, \qquad e_2 \mp \frac{\beta - 1}{2}, \qquad e_3 = \frac{\beta + 1}{2}, \qquad g_2 = 3\beta^2 + 1, \qquad g_3 = \beta(\beta^2 - 1),$$

il viendra

$$y = \pm \wp(t + c),$$

c désignant une constante que l'on pourra prendre arbitrairement, en disposant de l'origine de t. Nous la choisirons telle que

$$\cos(\lambda + \mu) = 2\varepsilon \wp(t + c) + \beta, \quad \cos(\lambda - \mu) = 2\varepsilon' \wp(t - c) - \beta \quad (\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1).$$

Poursuivons l'identification. Nous avons

$$'' = \cos\lambda \cos\mu = \frac{1}{2}[\cos(\lambda + \mu) + \cos(\lambda - \mu)] = \varepsilon \wp(t + c) + \varepsilon' \wp(t - c),$$

$$f' = -\varepsilon \zeta(t + c) - \varepsilon' \zeta(t - c) + n,$$

$$f = \varepsilon \log \sigma(t + c) - \varepsilon' \log \sigma(t - c) + nt.$$

D'autre part,

$$f'^2 - m^2 \sin\lambda \sin\mu = \frac{1}{2}[\cos(\lambda - \mu) - \cos(\lambda + \mu)]$$
$$= \varepsilon' \wp(t - c) - \varepsilon \wp(t + c) - \beta,$$

$$2f'f'' = \varepsilon' \wp'(t - c) - \varepsilon \wp'(t + c), \qquad f' = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon' \wp'(t - c) - \varepsilon \wp'(t + c)}{\varepsilon \wp(t - c) + \varepsilon' \wp(t - c)}.$$

Pour vérifier l'identité

$$\frac{\varepsilon \wp'(t + c) - \varepsilon' \wp'(t - c)}{\varepsilon \wp(t + c) + \varepsilon' \wp(t - c)} = 2[\varepsilon \zeta(t + c) + \varepsilon' \zeta(t - c) - n],$$

on prendra

$$\varepsilon = -1, \qquad \varepsilon' = 1, \qquad n = \zeta(2c).$$

Finalement

$$f' = \zeta(t - c) - \zeta(t - c) - \zeta(2c) = \frac{-\wp'(c)}{\wp'(t) - \wp(c)} + 2\zeta(c) - \zeta(2c),$$

$$f = \log \frac{\sigma(t + c)}{\sigma(t - c)} - t\zeta(2c),$$

$$e^{\alpha} = e^{m(au + bv) + n(au - bv)} \frac{\sigma(au + bv + c)}{\sigma(au + bv - c)}.$$

Tel est le coefficient du ds^2 de nos surfaces isothermiques.

Pour la représentation sphérique,

$$d\sigma^2 = e^{2h}\cos^2\lambda\, du^2 + e^{-2h}\cos^2\mu\, dv^2.$$

Les rayons de courbure principaux sont

$$R_1 = \frac{e^{\alpha-h}}{\cos\lambda}, \qquad R_2 = -\frac{e^{\alpha+h}}{\cos\mu}.$$

Ces formules suffisent à mettre en évidence des *surfaces spirales.*

16. Nous remarquons que λ et μ sont définis au moyen de $\cos(\lambda+\mu)$ et $\cos(\lambda-\mu)$, qui dépendent eux-mêmes des paramètres β et c. Or les égalités

$$6\beta = 4m^2 - (e^{2h} + e^{-2h}), \qquad 2m = -e^h \sin\lambda + e^{-h}\sin\mu$$

montrent que l'on peut changer h en $-h$ sans modifier β, et remplacer λ et μ par — et $\mu - \lambda$, sans altérer m. Pour un même ds^2, nous avons donc deux σ^2 dont les deux coefficients s'échangent. Ainsi :

Les surfaces spirales isothermiques sont des surfaces de Bonnet, susceptibles d'une déformation qui conserve leurs lignes de courbure.

Elles jouissent d'une autre propriété remarquable. Si l'on change u et v en $-u$ et $-v$, on change α en $-\alpha$. Donc :

Les surfaces spirales isothermiques se correspondent à elles-mêmes dans la transformation de Bour.

17. On peut calculer assez facilement les coordonnées de la représentation sphérique, qui est de révolution comme pour les hélicoïdes, les parallèles ayant pour paramètre $t = au + bv$, seule variable dont dépende le $d\sigma^2$. Avec des axes convenables, on pourra écrire les coordonnées de la sphère

$$\xi = \sin u_1 \cos v_1, \qquad \eta = \sin u_1 \sin v_1, \qquad \zeta = \cos v_1,$$

d'où

$$d\sigma^2 = du_1^2 + \sin^2 u_1\, dv_1^2.$$

Pour revenir aux variables primitives, il suffit de réaliser l'identité

$$du_1^2 + \sin^2 u_1\, dv_1^2 = M^2\, du^2 + N^2\, dv^2$$

avec

$$M = e^h \cos\lambda, \qquad N = e^{-h} \cos\mu,$$

en considérant u_1 comme une fonction de t. Dans tous les cas analogues, on aura les trois conditions

$$a^2\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + \sin^2 u_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 = M^2, \qquad b^2\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + \sin^2 u_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 = N^2,$$
$$ab\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + \sin^2 u_1 \frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} = 0$$

qui équivalent à

$$u_1 = \int \frac{MN\, dt}{\sqrt{b^2 M^2 + a^2 N^2}}, \qquad v_1 = \int \frac{bM^2\, du - aN^2\, dv}{\sin u_1 \sqrt{b^2 M^2 + a^2 N^2}}.$$

La constante à ajouter à v_1 est indifférente, car elle correspond simplement à l'origine des longitudes. Quant à u_1, on le détermine sans intégration, par la condition que v_1 soit intégrable. Posons

$$H = \sin u_1 \sqrt{b^2 M^2 + a^2 N^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial v_1}{\partial u} = \frac{bM^2}{H}, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial v} = -\frac{aN^2}{H}.$$

La condition d'intégrabilité donne

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dt} = 2\,\frac{b^2 M \dfrac{dM}{dt} + a^2 N \dfrac{dN}{dt}}{b^2 M^2 + a^2 N^2}, \qquad KH = b^2 M^2 + a^2 N^2,$$

K désignant une certaine constante. Par comparaison

$$\sin u_1 = \frac{1}{K}\sqrt{b^2 M^2 + a^2 N^2},$$
$$v_1 = K\int \frac{bM^2\, du - aN^2\, dv}{b^2 M^2 + a^2 N^2} = bu - av + ab\int \frac{M^2 - N^2}{b^2 M^2 + a^2 N^2}\, dt.$$

Pour calculer K, soit $R = \sqrt{b^2 M^2 + a^2 N^2}$. La condition d'intégrabilité pour v_1 s'écrit

$$\frac{2}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{R}\frac{dR}{dt} + \cot u_1 \frac{du_1}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dR}{dt} + \frac{MN}{R}\cot u_1,$$
$$\cot u_1 = \frac{1}{MN}\frac{dR}{dt}.$$

C'est là une seconde formule qui définit u_1 sans intégration. La première donne

$$K^2 = R^2\left[1 + \frac{1}{M^2 N^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right] = b^2 M^2 + a^2 N^2 + \left(\frac{b^2}{N}\frac{dM}{dt} + \frac{a^2}{M}\frac{dN}{dt}\right)^2.$$

L'égalité qui exprime que K est bien une constante est précisément celle qui donne la courbure totale de la sphère.

Appliquons ces résultats à nos surfaces spirales. Nous aurons ici

$$R^2 = a^2 e^{-2h}\cos^2\mu + b^2 e^{2h}\cos^2\lambda,$$

$$-R\frac{dR}{dt} = a^2 e^{-2h}\cos\mu\sin\mu\frac{d\mu}{dt} + b^2 e^{2h}\cos\lambda\sin\lambda\frac{d\lambda}{dt}$$
$$= \cos\lambda\cos\mu(a^2 e^{-h}\sin\mu + b^2 e^h\sin\lambda),$$

$$K^2 = (a^2 e^{-h}\sin\mu + b^2 e^h \sin\lambda)^2 + a^2 e^{-2h}\cos^2\mu + b^2 e^{2h}\cos^2\lambda$$
$$= a^2 e^{-2h} + b^2 e^{2h} - a^2 b^2 (e^h\sin\lambda - e^{-h}\sin\mu)^2 = a^2 e^{-2h} + b^2 e^{2h} - 4a^2 b^2 m^2.$$

On trouve bien ainsi une constante. Puis

$$\sin u_1 = \frac{R}{K}\sqrt{a^2 e^{-2h}\cos^2\mu + b^2 e^h \cos^2\lambda},$$

$$\frac{v_1}{} = bu - av + ab\int \frac{e^{2h}\cos^2\lambda - e^{-2h}\cos^2\mu}{b^2 e^{2h}\cos^2\lambda + a^2 e^{-2h}\cos^2\mu}\,dt$$
$$= bu - av + ab\int\frac{e^{2h} - e^{-2h} + 2m(e^h\sin\lambda + e^{-h}\sin\mu)}{K^2 - (a^2 e^{-h}\sin\mu + b^2 e^h \sin\lambda)^2}\,dt$$
$$= bu - av - ab\int\frac{e^{2h} - e^{-2h} + 4mf'}{[f' + (a^2 - b^2)m]^2 - K^2}\,dt.$$

L'intégrale se calcule au moyen des fonctions elliptiques. On peut l'écrire

$$A\int\frac{dt}{f' + (a^2 - b^2)m + K} + B\int\frac{dt}{f' + (a^2 - b^2)m - K}$$

avec

$$A = 2m + \frac{1}{K}\left[2(a^2 - b^2)m - \frac{e^h - e^{-2h}}{2}\right],$$
$$B = 2m - \frac{1}{K}\left[2(a^2 - b^2)m - \frac{e^{2h} - e^{-2h}}{2}\right].$$

Pour le premier terme, introduisons une constante d définie par

$$2\zeta(c) - \zeta(2c) + (a^2 - b^2)m + K = -\frac{\wp'(c)}{\wp(c) - \wp(d)}.$$

Nous aurons

$$\int \frac{dt}{f'+(a^2-b^2)m+\mathrm{K}}$$
$$=\int \frac{dt}{\frac{-\wp'(c)}{\wp(t)-\wp(c)}-\frac{\wp'(c)}{\wp(c)-\wp(d)}}=-\frac{\wp(c)-\wp(d)}{\wp'(c)}\int \frac{\wp(t)-\wp(c)}{\wp(t)-\wp(d)}dt$$
$$=-\frac{\wp(c)-\wp(d)}{\wp'(c)}t+\frac{[\wp(c)-\wp(d)]^2}{\wp'(c)\wp'(d)}\int \frac{\wp'(d)}{\wp(t)-\wp(d)}dt$$
$$=-\frac{\wp(c)-\wp(d)}{\wp'(c)}t-\frac{[\wp(c)-\wp(d)]^2}{\wp'(c)\wp'(d)}\int [\zeta(t+d)-\zeta(t-d)-2\zeta(d)]\,dt$$
$$=\frac{\wp(c)-\wp(d)}{\wp'(c)}\left[2\zeta(d)\frac{\wp(c)-\wp(d)}{\wp'(d)}-1\right]t-\frac{[\wp(c)-\wp(d)]^2}{\wp'(d)}\log\frac{\sigma(t+d)}{\sigma(t-d)}.$$

On calcule de même le second terme avec une nouvelle constante auxiliaire.

18. Nous allons traiter un cas particulier, dans lequel les fonctions elliptiques dégénèrent, et nous achèverons complètement le calcul des coordonnées d'un point de la surface. Reprenons les équations

$$\left[\frac{d(\lambda+\mu)}{dt}\right]^2=e^{2h}+e^{-2h}-4m^2+2\cos(\lambda+\mu),$$
$$\left[\frac{d(\lambda-\mu)}{dt}\right]^2=e^{2h}+e^{-2h}-4m^2-2\cos(\lambda-\mu).$$

Les fonctions elliptiques disparaissent si l'on a

$$e^{2h}+e^{-2h}-4m^2=\pm 2, \qquad m^2=\frac{(e^h\pm e^{-h})^2}{4}.$$

Soit, par exemple, $m=\frac{e^h-e^{-h}}{2}\cdot$ Mais remarquons dès maintenant que nous ne modifierons pas le système en changeant h en $-h$, la valeur de m^2 étant conservée. Ceci correspond à la double déformation de la surface, comme dans le cas général. Le système devient

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^2=\cos^2\frac{\lambda+\mu}{2}, \qquad \left(\frac{d}{dt}\frac{\lambda-\mu}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\lambda-\mu}{2}.$$

On peut disposer de l'origine de t pour écrire, avec une constante arbitraire c,

$$\operatorname{tang}\frac{\pi+\lambda+\mu}{4}=e^{t+c} \qquad \operatorname{tang}\frac{\lambda-\mu}{4}=e^{t-c},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda+\mu}{2}=\operatorname{sh}(t+c), \qquad \cot\frac{\lambda-\mu}{2}=-\operatorname{sh}(t-c),$$

$$\cos(\lambda+\mu)=1-2\operatorname{th}^2(t+c), \qquad \cos(\lambda-\mu)=2\operatorname{th}^2(t-c)-1.$$

Posons, pour simplifier,

$$X=\operatorname{th}(t+c), \qquad Y=\operatorname{th}(t-c).$$

Nous aurons

$$f''=\cos\lambda\cos\mu=Y^2-X^2, \qquad f'^2-m^2=\sin\lambda\sin\mu=X^2+Y^2-1.$$

$$f'f''=X(1-X^2)+Y(1-Y^2)=(X+Y)[1-(X^2+XY+Y^2)],$$

$$f'=\frac{X^2+XY+Y^2-1}{X-Y}=X-Y-\frac{1-XY}{X-Y}=\operatorname{th}(t+c)-\operatorname{th}(t-c)-\frac{1}{\operatorname{th}2c},$$

$$f=\log\frac{\operatorname{ch}(t+c)}{\operatorname{ch}(t-c)}-\frac{t}{\operatorname{th}2c}.$$

Les constantes m et c ne sont pas indépendantes dans le ds^2, car on a

$$m^2=f'^2-\sin\lambda\sin\mu=\left(X-Y-\frac{1}{\operatorname{th}2c}\right)^2-(X^2+Y^2-1)$$

$$=-2\left(X-\frac{1}{\operatorname{th}2c}\right)\left(Y+\frac{1}{\operatorname{th}2c}\right)-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 2c}=\frac{1}{\operatorname{sh}^2 2c}.$$

Si l'on a, par exemple,

$$m=\frac{1}{\operatorname{sh}2c}=\frac{e^h-e^{-h}}{2},$$

on aura pour e^h l'une des valeurs $-\operatorname{th}c$ ou $\frac{1}{\operatorname{th}c}$. Nous adopterons cette dernière valeur. Alors

$$e^\alpha=e^{\frac{au-bv}{\operatorname{sh}2c}-\frac{au+bv}{\operatorname{th}2c}}\frac{\operatorname{ch}(au+bv+c)}{\operatorname{ch}(au+bv-c)}=e^{-\left(au\operatorname{th}c+\frac{bv}{\operatorname{th}c}\right)}\frac{\operatorname{ch}(au+bv+c)}{\operatorname{ch}(au+bv-c)}.$$

Pour la sphère

$$\mathrm{M}^2 = e^{2h} - (f' - m)^2 = \frac{1}{\mathrm{th}^2 c} - \left[\frac{\mathrm{sh}\, 2c}{\mathrm{ch}(t+c)\,\mathrm{ch}(t-c)} - \frac{1}{\mathrm{th}\, c}\right]^2$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sh}\, 2c\, \mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{th}\, c\, \mathrm{ch}^2(t+c)\, \mathrm{ch}^2(t-c)},$$

$$\mathrm{N}^2 = e^{-2} - (f' + m)^2 = \mathrm{th}^2 c - \left[\frac{\mathrm{sh}\, 2c}{\mathrm{ch}\,(t+c)\,\mathrm{ch}(t-c)} - \mathrm{th}\, c\right]^2$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sh}\, 2c\, \mathrm{th}\, c\, \mathrm{sh}^2 t}{\mathrm{ch}^2(t+c)\,\mathrm{ch}^2(t-c)},$$

$$d\sigma^2 = \frac{4}{\mathrm{ch}^2(t+c)\,\mathrm{ch}^2(t-c)}(\mathrm{ch}^2 c\, \mathrm{ch}^2 t\, du^2 + \mathrm{sh}^2 c\, \mathrm{sh}^2 t\, dv^2).$$

On voit que si l'on change u et v en $-u$ et $-v$, on change α en $-\alpha$, mais on conserve le $d\sigma^2$.

Pour le signe de la courbure totale, nous prendrons

$$\mathrm{M} = \frac{2\,\mathrm{ch}\, c\, \mathrm{ch}\, t}{\mathrm{ch}(t+c)\,\mathrm{ch}(t-c)}, \qquad \mathrm{N} = \frac{2\,\mathrm{sh}\, c\, \mathrm{sh}\, t}{\mathrm{ch}(t+c)\,\mathrm{ch}\,(t-c)}$$

et nous aurons les rayons de courbure principaux

$$\mathrm{R}_1 = e^{\alpha}\frac{\mathrm{ch}(t+c)\,\mathrm{ch}(t-c)}{2\,\mathrm{ch}\, c\, \mathrm{ch}\, t}, \qquad \mathrm{R}_2 = e^{\alpha}\frac{\mathrm{sh}(t+c)\,\mathrm{sh}(t-c)}{2\,\mathrm{sh}\, c\, \mathrm{sh}\, t}.$$

Calculons d'abord les coordonnées de la sphère. On trouve, toutes réductions faites,

$$\mathrm{K} = a^2\,\mathrm{th}\, c + \frac{b^2}{\mathrm{th}\, c} = \frac{a^2\,\mathrm{sh}^2 c + b^2\,\mathrm{ch}^2 c}{\mathrm{sh}\, c\, \mathrm{ch}\, c},$$

$$\mathrm{K}^2 \sin^2 u_1 = \mathrm{K}^2 - [f' + (a^2 - b^2)m]^2,$$

$$\zeta = \cos u_1 = -\frac{1}{\mathrm{K}}[f' - (a^2 - b^2)m] = -\frac{1}{\mathrm{K}}\left(f' + \frac{a^2 - b^2}{\mathrm{sh}\, 2c}\right).$$

Il en résulte immédiatement l'expression du z d'un point de la surface. Car

$$d\zeta = -\frac{1}{\mathrm{K}} f''\, dt = \frac{\mathrm{sh}\, 2c\, \mathrm{sh}\, 2t}{\mathrm{K}\,\mathrm{ch}^2(t+c)\,\mathrm{ch}^2(t-c)}\, dt$$

$$dz = -\mathrm{R}_1\frac{\partial\zeta}{\partial u}du - \mathrm{R}_2\frac{\partial\zeta}{\partial v} = -\frac{\mathrm{sh}\, 2c\, \mathrm{sh}\, 2t . e^{\alpha}}{2\mathrm{K}\,\mathrm{ch}\,(t+c)\,\mathrm{ch}(t-c)}\left(\frac{a\, du}{\mathrm{ch}\, c\, \mathrm{ch}\, t} - \frac{b\, dv}{\mathrm{sh}\, c\, \mathrm{sh}\, t}\right).$$

$$z = \frac{\mathrm{sh}\, 2c}{\mathrm{K}\,\mathrm{ch}\,(t-c)}\, e^{-\left(au\,\mathrm{th}\, c + \frac{bv}{\mathrm{th}\, c}\right)}.$$

Pour avoir x et y, calculons d'abord la longitude sphérique

$$\int \frac{M^2 - N^2}{b^2 M^2 + a^2 N^2} dt = \int \frac{\operatorname{ch}^2 c \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 c \operatorname{sh}^2 t}{b^2 \operatorname{ch}^2 c \operatorname{ch}^2 t + a^2 \operatorname{sh}^2 c \operatorname{sh}^2 t} dt$$
$$= \frac{1}{K}\left[\frac{t}{\operatorname{sh} c \operatorname{ch} c} + \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b} \operatorname{th} c \operatorname{th} t\right)\right],$$
$$v_1 = K(bu - av) + \frac{ab}{\operatorname{sh} c \operatorname{ch} c}(au + bv) + \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{a}{b} \operatorname{th} c \operatorname{th}(au + bv)\right]$$
$$= \frac{bu}{\operatorname{th} c} - av \operatorname{th} c + \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{a}{b} \operatorname{th} c \operatorname{th}(au + bv)\right].$$

Si nous posons

$$\omega = -\left(au \operatorname{th} c + \frac{bv}{\operatorname{th} c}\right),$$

nous pourrons écrire

$$v_1 = \frac{K}{ab} \operatorname{sh} c \operatorname{ch} c . \omega$$
$$+ \frac{a^2 \operatorname{sh}^4 c + b^2 \operatorname{ch}^4 c}{ab \operatorname{sh} c \operatorname{ch} c}(au + bv) + \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{a}{b} \operatorname{th} c \operatorname{th}(au + bv)\right].$$

Dès lors, d'après la forme de v_1, les facteurs e^{ω} dans R_1, R_2 et z, et $e^{2\omega}$ dans le ds^2 étant les seuls qui ne soient pas des fonctions de t, la nature de la surface spirale est mise en évidence. Nous aurons le droit de poser

$$x = (\lambda \cos v_1 - \mu \sin v_1) e^{\omega}, \qquad y = (\lambda \sin v_1 + \mu \cos v_1) e^{\omega},$$

λ et μ étant des fonctions de t. Cette remarque conduit facilement aux expressions complètes de x et y. On a

$$\lambda e^{\omega} = x \cos v_1 + y \sin v_1, \qquad \mu e^{\omega} = - x \sin v_1 + y \cos v_1,$$
$$e^{\omega} d\lambda = \quad dx \cos v_1 + dy \sin v_1 + e^{\omega}(\mu\, dv_1 - \lambda\, d\omega),$$
$$e^{\omega} d\mu = - dx \sin v_1 + dy \cos v_1 - e^{\omega}(\lambda\, dv_1 + \mu\, d\omega).$$

Écrivons que λ et μ sont fonctions de t :

$$\left(b\frac{\partial x}{\partial u} - a\frac{\partial x}{\partial v}\right)\cos v_1 + \left(b\frac{\partial y}{\partial u} - a\frac{\partial y}{\partial v}\right)\sin v_1$$
$$+ e^{\omega}\left[\mu\left(b\frac{\partial v_1}{\partial u} - a\frac{\partial v_1}{\partial v}\right) - \lambda\left(b\frac{\partial \omega}{\partial u} - a\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)\right] = 0,$$
$$-\left(b\frac{\partial x}{\partial u} - a\frac{\partial x}{\partial v}\right)\sin v_1 + \left(b\frac{\partial y}{\partial u} - a\frac{\partial y}{\partial v}\right)\cos v_1$$
$$- e^{\omega}\left[\lambda\left(b\frac{\partial v_1}{\partial u} - a\frac{\partial v_1}{\partial v}\right) + \mu\left(b\frac{\partial \omega}{\partial u} - a\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)\right] = 0.$$

Or

$$b\frac{\partial\omega}{\partial u} - a\frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{ab'}{\operatorname{sh} c \operatorname{ch} c}, \qquad b\frac{\partial v_1}{\partial u} - a\frac{\partial v_1}{\partial v} = \mathrm{K},$$

d'où les combinaisons

$$b\frac{\partial x}{\partial u} - a\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{K}y - \frac{ab}{\operatorname{sh} c \operatorname{ch} c}x = 0, \qquad b\frac{\partial y}{\partial u} - a\frac{\partial y}{\partial v} - \mathrm{K}x - \frac{ab}{\operatorname{sh} c \operatorname{ch} c}y = 0.$$

$$\left(\mathrm{K}^2 + \frac{a^2b^2}{\operatorname{sh}^2 c \operatorname{ch}^2 c}\right)x = \frac{ab}{\operatorname{sh} c \operatorname{ch} c}\left(b\frac{\partial x}{\partial u} - a\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \mathrm{K}\left(b\frac{\partial y}{\partial u} - a\frac{\partial y}{\partial v}\right),$$

$$\left(\mathrm{K}^2 + \frac{a^2b^2}{\operatorname{sh}^2 c \operatorname{ch}^2 c}\right)y = \frac{ab}{\operatorname{sh} c \operatorname{ch} c}\left(b\frac{\partial y}{\partial u} - a\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \mathrm{K}\left(b\frac{\partial x}{\partial u} - a\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

On a ainsi x et y en termes finis, si l'on remplace dans les seconds membres leurs dérivées déduites de la sphère.

On vérifie qu'elles sont bien de la forme annoncée, avec

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{K}^2 + \frac{a^2b^2}{\operatorname{sh}^2 c \operatorname{ch}^2 c}\right)\lambda e^{\omega} \\ &= -\frac{ab}{\operatorname{sh} c \operatorname{ch} c}\left(b\mathrm{R}_1\frac{\partial u_1}{\partial u} - a\mathrm{R}_2\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)\cos u_1 - \mathrm{K}\left(b\mathrm{R}_1\frac{\partial v_1}{\partial u} - a\mathrm{R}_2\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)\sin u_1,\\ &\left(\mathrm{K}^2 + \frac{a^2b^2}{\operatorname{sh}^2 c \operatorname{ch}^2 c}\right)\mu e^{\omega} \\ &= \frac{ab}{\operatorname{sh} c \operatorname{ch} c}\left(b\mathrm{R}_1\frac{\partial v_1}{\partial u} - a\mathrm{R}_2\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)\sin u_1 - \mathrm{K}\left(b\mathrm{R}_1\frac{\partial u_1}{\partial u} - a\mathrm{R}_2\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)\cos u_1.\end{aligned}$$

19. Les solutions ($\varphi\psi = 0$) ne peuvent donner que des surfaces imaginaires. Notons cependant, pour sa simplicité, celle qui provient de deux constantes nulles. Elle dépend de l'équation

$$f'' + g'' = f'^2 - g'^2 \qquad \text{ou} \qquad f'^2 - f'' = g'^2 + g'' = m^2,$$

m^2 étant évidemment une constante. Donc on peut écrire

$$\begin{aligned} f' &= m \operatorname{tang}(au + bv), & g' &= -m \operatorname{tang}(au - bv),\\ f &= -\log\cos m(au + bv), & g &= \log\cos m(au - bv),\end{aligned}$$

$$ds^2 = \frac{\cos^2(a'u - b'v)}{\cos^2(a'u + b'v)}(du^2 + dv^2) \qquad (a = ma,\ b' = mb).$$

Soient

$$u' = a'u + b'v. \qquad v = a'u - b'v,$$

$$e^{\alpha} = \frac{\cos v'}{\cos u'},$$

$$e^{\alpha}\rho_1 = im(\operatorname{tang} u' + \operatorname{tang} v') = im\frac{\sin(u'+v')}{\cos u' \cos v'} = \quad im\frac{\sin 2a'u}{\cos u' \cos v'},$$

$$e^{\alpha}\rho_2 = im(\operatorname{tang} u' - \operatorname{tang} v') = im\frac{\sin(u'-v')}{\cos u' \cos v'} = -\, im\frac{\sin 2b'v}{\cos u' \cos v'},$$

$$\rho_1 = im\frac{\sin 2a'u}{\cos^2 v'}, \qquad \rho_2 = -\, im\frac{\sin 2b'v}{\cos^2 v'},$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = -\frac{\sin 2a'u}{\sin 2b'v}.$$

Pour la représentation sphérique

$$d\sigma^2 = -\frac{m^2}{\cos^2 u' \cos^2 v'}(\sin^2 2au'\, du^2 + \sin^2 2bv'\, dv^2).$$

On voit qu'*elle* est constituée par des lignes isothermes, qui sont des cercles imaginaires ayant pour rayon de courbure géodésique constant ai pour les lignes (u), et bi pour les lignes (v). On a ainsi une surface double (S_0) imaginaire (n° 8), tandis que les solutions normales étaient des surfaces de Bonnet à deux formes distinctes.

20. Les surfaces spirales isothermiques dégénèrent en hélicoïdes lorsque la fonction linéaire $g\,(au - bv)$ dégénère elle-même en une constante; car le ds^2 ne dépend plus que de $au + bv$. La méthode de l'équation fonctionnelle s'applique avec la plus grande facilité; mais le résultat est bien connu, car il s'agit des hélicoïdes à courbure moyenne constante.

Nous ferons seulement quelques remarques sur le cas où la courbure moyenne est nulle. On a alors des surfaces minima, qui sont des hélicoïdes applicables sur l'alysséide, et qui ont été étudiés depuis longtemps par Lamarle, Scherck, Catalan, Bour, etc. Toutefois, ces géomètres les ont définis par l'équation compliquée d'une section plane, tandis que le résultat est, au fond, d'une remarquable simplicité. Nous allons voir, en effet, que la définition tangentielle est presque identique à celle de l'alysséide.

Avec les variables $u' = au + bv$ et $v' = au - bv$, on trouve sans difficulté les coordonnées

$$x = \cos\varphi \operatorname{ch} u' \cos v' + \sin\varphi \operatorname{sh} u' \sin v',$$
$$y = \cos\varphi \operatorname{ch} u' \sin v' - \sin\varphi \operatorname{sh} u' \cos v',$$
$$z = u' \cos\varphi + v' \sin\varphi,$$

après avoir posé $a = \cos\frac{\varphi}{2}$, $b = \sin\frac{\varphi}{2}\cdot$ L'élément linéaire

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 u'(du^2 + dv^2) = \operatorname{ch}^2 u'(du'^2 + dv'^2)$$

sera conservé si, partant de u' et v', on fait varier φ, en définissant u et v par les formules

$$u = au' + bv' = u' \cos\frac{\varphi}{2} + v' \sin\frac{\varphi}{2}, \qquad v = bu' - av' = u' \sin\frac{\varphi}{2} - v' \cos\frac{\varphi}{2}\cdot$$

On a ainsi une infinité de réseaux pouvant se transformer en lignes de courbure isothermes. C'est une conséquence du théorème de S. Lie relatif aux surfaces à courbure moyenne constante. Les surfaces extrêmes réalisées sont l'alysséide pour $\varphi = 0$, et l'hélicoïde normal pour $\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot$

La représentation sphérique

$$d\sigma^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u'}(du'^2 + dv'^2)$$

étant indépendante de φ, dans la déformation continue de l'hélicoïde, chaque plan tangent pourra se déplacer parallèlement à lui-même. En particulier, la ligne de contour apparent relative à la direction Oy sera toujours définie, comme la méridienne de l'alysséide, par $v' = 0$. Ses différents points auront pour coordonnées

$$x = \operatorname{ch} u' \cos\varphi, \qquad y = -\operatorname{sh} u' \sin\varphi, \qquad z = u' \cos\varphi.$$

Elles donnent lieu aux combinaisons

$$x = \operatorname{ch}\left(\frac{z}{\cos\varphi}\right)\cos\varphi, \qquad y = -\operatorname{sh}\left(\frac{z}{\cos\varphi}\right)\sin\varphi,$$
$$\frac{x^2}{\cos^2\varphi} - \frac{y^2}{\sin^2\varphi} - 1 = 0\cdot$$

qui définissent les projections sur les plans de coordonnées.

Sur le plan des xz, nous trouvons, quel que soit φ, une *chaînette* ayant pour base Oz. Le contour apparent est donc toujours le même que pour une alysséide. La projection sur xOy est une hyperbole ayant son centre à l'origine, et dont la demi-distance focale est égale à l'unité de longueur. De là la définition suivante :

Si une chaînette se meut d'un mouvement hélicoïdal quelconque, de manière que sa base reste fixe, le cylindre dont elle est la section droite enveloppe la surface minima hélicoïdale la plus générale. La caractéristique de l'enveloppe est située sur un cylindre du second degré.

On voit immédiatement que *cette caractéristique est une hélice du cylindre*, car toutes ses tangentes font avec le plan xOz le même angle égal à φ.

Enfin, *dans la déformation signalée de l'hélicoïde, les foyers des sections droites des cylindres hyperboliques restent fixes.*

(*Voir* à la fin la planche qui représente les deux projections correspondantes de la surface dans le cas où, avec $\varphi = \frac{\pi}{4}$, l'hyperbole est équilatère.)

Généralisation des surfaces isothermiques.

21. Imaginons une surface qui, rapportée à ses lignes de courbure, aurait un ds^2 de la forme

$$ds^2 = (m\,e^{\alpha} + n\,e^{-\alpha})^2\,du^2 + (m\,e^{\alpha} - n\,e^{-\alpha})^2\,dv^2,$$

m et n étant des constantes quelconques. Lorsque l'une d'elles est nulle, la surface est isothermique. Dans le cas général, on a

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\mathrm{B}}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad \mathrm{Q} = \frac{1}{\mathrm{A}}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial u},$$

$$-\mathrm{AB}\,k = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial v} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} = \Delta\alpha.$$

L'équation fonctionnelle

$$(\Delta\alpha)^2 = \left[\varphi(u) - 2\int \Delta\alpha\,\frac{\partial \alpha}{\partial v}\,dv\right]\left[\psi(v) - 2\int \Delta\alpha\,\frac{\partial \alpha}{\partial v}\,dv\right],$$

indépendante des constantes m et n, est la même que pour les surfaces isothermiques.

Nous avons donc affaire à des surfaces plus générales que les surfaces isothermiques, mais dont la recherche est absolument équivalente à celle des surfaces isothermiques. La représentation sphérique est d'ailleurs la même que pour la surface

$$ds^2 = e^{2\alpha}(du^2 + dv^2).$$

On peut ajouter à α une constante arbitraire, à la condition de modifier m et n. Si aucune de ces constantes n'est nulle, on ramènera toujours l'élément linéaire à la forme

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2\alpha\, du^2 + \operatorname{sh}^2\alpha\, dv^2$$

et la surface isothermique sera simplement remplacée par une surface semblable.

On trouvera, à la fin de la seconde Partie, l'interprétation générale de ces résultats.

A chaque classe de surfaces isothermiques correspond une classe de surfaces généralisées. Ainsi, aux surfaces de M. Darboux, qui ont un système de lignes de courbure planes, correspondent des surfaces ayant la même propriété, puisque la représentation sphérique comprend une famille de cercles. Les surfaces à courbure *moyenne* constante conduisent aux surfaces à courbure totale constante. Nos surfaces spirales donnent d'autres surfaces spirales.

DEUXIÈME PARTIE.

RECHERCHES BASÉES SUR LES PROPRIÉTÉS HARMONIQUES DES SURFACES ISOTHERMIQUES.

22. Des considérations purement analytiques qui précèdent, nous passons à une étude géométrique des surfaces isothermiques, basée sur un système cyclique particulier, déjà envisagé par M. Darboux et par M. Thybaut. Nous en déduirons une généralisation du théorème de Christoffel pour une double infinité de surfaces reliées à une surface isothermique dans ce système cyclique, et nous verrons comment une classe étendue de surfaces isothermiques, dépendant de deux fonctions arbitraires, se trouve être complètement déterminée quand on connaît les surfaces (M) que M. Darboux (*Leçons*, t. III, Chap. XIV) rattache aux surfaces à courbure totale constante.

En expliquant la véritable raison pour laquelle on a dû renoncer à transformer directement les surfaces isothermiques en associant les deux nappes de l'enveloppe des *sphères harmoniques*, nous serons conduits à des groupements de six surfaces orthogonales à une même congruence de cercles, sur lesquels elles déterminent trois divisions harmoniques. Trois de ces surfaces sont isothermiques et alternent avec les trois autres, de manière à constituer avec elles les doubles nappes de trois enveloppes de sphères. Ces sphères sont harmoniques pour les trois surfaces isothermiques et ont un cercle commun.

De pareils systèmes sont liés aux surfaces à courbure totale constante, mais paraissent difficiles à déterminer dans toute leur généralité. Un exemple particulier nous sera fourni par certaines surfaces admettant un système de lignes de courbure circulaires.

Des singularités sont réalisées : 1° par les inverses des surfaces à courbure moyenne constante, avec une des six surfaces réduite à un point; 2° par les surfaces de M. Thybaut dont les deux associées viennent coïncider avec la surface intermédiaire pour donner une sphère triple.

23. On conçoit que les propriétés géométriques d'une famille de surfaces dérivant d'un système cyclique pourront être d'autant plus intéressantes, que les réseaux de lignes de courbure auront sur ces surfaces des propriétés métriques plus caractérisées. Les surfaces isothermiques étant des plus remarquables à ce point de vue, on ne doit pas être surpris si leur étude devient féconde dans cet ordre d'idées.

Une question qui devait naturellement se poser à l'origine est la suivante : Étant donnée une surface isothermique quelconque, est-il possible de lui adjoindre une autre surface de même nature, de manière à constituer les deux nappes d'une enveloppe de sphères, avec correspondance des lignes de courbure? M. Darboux (*C. R.*, 1899) a démontré que le problème admet toujours une infinité de solutions dépendant de quatre paramètres. Si donc on savait déterminer, pour l'application du théorème de Dupin, les réseaux conjugués correspondants tracés par les développables normales à la surface donnée, on en déduirait une méthode de transformation des surfaces isothermiques.

D'après cela, nous devons déjà attribuer une grande importance à la détermination des réseaux conjugués dont les lignes appartiennent à ces développables. Or il en est un dont la connaissance n'exige aucune intégration. M. Darboux a remarqué, en effet, que si l'on prend le conjugué harmonique S de chaque point M d'une surface par rapport aux deux centres de courbure principaux en ce point, il faut et il suffit que la surface lieu de S possède un système conjugué correspondant aux lignes de courbure de la première, pour que celle-ci soit isothermique. Le réseau (S) a alors ses invariants ponctuels égaux; nous l'appellerons *réseau harmonique*. Les sphères tangentes à la surface (M) et dont les centres décrivent le réseau (S) sont les *sphères harmoniques* de cette surface (M). On peut les considérer dans une surface quelconque, en faisant abstraction des lignes conjuguées sur le lieu des centres.

La seconde nappe de l'enveloppe de ces sphères, comme il a été dit plus haut, ne peut pas être isothermique comme la première, quand elle ne se réduit pas à une sphère, ou que les sphères harmoniques ne sont pas orthogonales à une sphère fixe. Le réseau harmonique ne se rattache donc pas, en général, à la solution de M. Darboux. Après avoir exposé, dans le cas général, les propriétés des deux systèmes cycliques correspondants, qui donnent une généralisation du théorème de Christoffel, nous insisterons spécialement sur les deux cas singuliers.

24. Nous commencerons par donner un caractère des sphères harmoniques basé sur une propriété angulaire, et donnant par suite une raison immédiate de la conservation de ces sphères dans une inversion. Au point M où l'une de ces sphères touche son enveloppe, l'intersection des deux surfaces présente un point double dont les deux branches, *a priori*, sont toujours réelles, puisque d'après la position du centre de la sphère par rapport aux centres de courbures principaux, les deux lignes de courbure, dans le voisinage de M, sont l'une intérieure et l'autre extérieure à cette sphère. Mais nous allons démontrer, de plus, que les tangentes au point double sont *rectangulaires*, et qu'inversement il n'en est ainsi que pour une sphère harmonique.

On s'assure d'abord immédiatement que ces tangentes sont dans les plans des sections normales qui ont un rayon de courbure égal au rayon l de la sphère. L'orientation de ces plans étant donnée par la formule d'Euler

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{R_1}\cos^2\omega + \frac{1}{R_2}\sin^2\omega,$$

avec $\omega = \pm\frac{\pi}{4}$, on a bien

$$\frac{2}{l} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

ce qui définit la sphère harmonique.

L'enveloppe des tangentes considérées se compose de deux familles de lignes orthogonales tracées sur la surface (M), et que nous aurons à considérer dans la suite. Nous les appellerons, pour abréger, *lignes équilatères*. Dans le cas d'une surface isothermique, elles constituent un second réseau isotherme.

25. Le théorème de M. Darboux, relatif aux réseaux harmoniques, peut être considéré comme une conséquence du théorème suivant, dû à M. Kœnigs :

Si les développables d'une congruence de droites découpent sur une surface un réseau conjugué à invariants ponctuels égaux, elles traceront un réseau analogue sur la surface lieu du conjugué harmonique de chaque point de la première par rapport aux points focaux de la droite correspondante.

Réciproquement, *si deux réseaux conjugués, tracés par les développables de la congruence divisent harmoniquement les segments focaux, ces deux réseaux ont leurs invariants ponctuels égaux.*

Reprenons rapidement la démonstration en vue de la suite. Soient x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 les coordonnées homogènes des points focaux F_1 et F_2 d'une droite (D) appartenant à une congruence dont les développables ont pour paramètres u et v. Ces coordonnées vérifient d'abord des relations de la forme

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \mu_1(x_1 - x_2), \qquad \frac{\partial x_2}{\partial v} = \mu_2(x_2 - x_1).$$

Nous supposerons que $t_1 = t_2 = 1$. Les coordonnées d'un point quelconque de la droite seront

$$x = x_1 + \lambda x_2, \qquad y = y_1 + \lambda y_2, \qquad z = z_1 + \lambda z_2, \qquad t = t_1 + \lambda t_2.$$

Cherchons à déterminer λ de manière que x, y, z, t soient solutions d'une même équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = a\frac{\partial \theta}{\partial u} + b\frac{\partial \theta}{\partial v} + c\theta.$$

Le procédé ordinaire donne les quatre conditions

$$a = \mu_2 + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}, \qquad b = \mu_1, \qquad c = \lambda\frac{\partial\left(\frac{\mu_1}{\lambda}\right)}{\partial v} - \frac{\partial(\lambda\mu_2)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = a\frac{\partial\lambda}{\partial u} + b\frac{\partial\lambda}{\partial v} + c(1+\lambda),$$

pour déterminer a, b, c et λ.

L'élimination de a, b, c donne, pour définir λ, la condition

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial\mu_2}{\partial u} - \frac{\partial\mu_1}{\partial v} = \frac{\partial\left(\frac{\mu_1}{\lambda}\right)}{\partial u} - \frac{\partial(\lambda\mu_2)}{\partial v}.$$

D'autre part, l'égalité des invariants s'exprime par

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial\mu_2}{\partial u} - \frac{\partial\mu_1}{\partial v} = 0.$$

Dans le cas des invariants égaux, on pourra donc remplacer l'équation (1) par la combinaison

$$(3) \qquad \frac{\partial\left(\frac{\mu_1}{\lambda}\right)}{\partial v} = \frac{\partial(\lambda\mu_2)}{\partial u}.$$

Les solutions λ communes aux équations (2) et (3) feront connaître les réseaux à invariants ponctuels égaux tracés par les développables de la congruence des droites (D).

Or on arrive également à l'équation (3) en écrivant que l'équation (1) est vérifiée par deux valeurs de λ égales et de signes contraires, d'où résultent les mêmes valeurs de a et b. Donc l'égalité des invariants équivaut à l'association de deux réseaux divisant harmoniquement le segment des points focaux de la droite (D), tous deux ayant ce même caractère des invariants.

Comme une surface isothermique constitue un pareil réseau, il en sera de même du lieu des centres des sphères harmoniques. Et réciproquement si les centres des sphères harmoniques décrivent un réseau conjugué correspondant aux lignes de courbure de la surface proposée, celle-ci est isothermique.

26. Soit λ_0 une solution commune aux équations (2) et (3). On peut se demander s'il en existe une autre λ différente de $-\lambda_0$. Or, d'après (2), on devra avoir

$$\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 \log\lambda_0}{\partial u\,\partial v}, \qquad \lambda = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}\lambda_0.$$

Puis, d'après (3), on pourra poser

$$\frac{\mu_1}{\lambda_0} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial u}, \qquad \lambda_0\mu_2 = \frac{\partial\varphi_0}{\partial v}, \qquad \frac{\mu_1}{\lambda} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \qquad \lambda\mu_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

d'où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}\frac{\partial\varphi_0}{\partial v}.$$

Tout se réduit à la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}}\frac{\partial\varphi_0}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}}\frac{\partial\varphi_0}{\partial v}\right).$$

Écartons la solution $\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{V}} = -1$. Si la fonction U était seule variable, on pourrait prendre $\mathrm{V} = 1$, d'où

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial v} = \frac{\mathrm{V}'_1}{\sqrt{1-\mathrm{U}^2}}, \qquad \varphi_0 = \frac{\mathrm{V}_1}{\sqrt{1-\mathrm{U}^2}} + \mathrm{U}_1 = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2\mathrm{V}_1.$$

Si cette forme est réalisée par φ_0, on aura une infinité de solutions dépendant d'un paramètre, car U_2 ou V_1 ne sera connu qu'à un facteur constant près.

Si U et V sont variables, et si l'on pose $\mathrm{X} = \mathrm{U}^2$, $\mathrm{Y} = \mathrm{V}^2$, on tombe sur l'équation

$$\mathrm{E}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \qquad 2(\mathrm{X}-\mathrm{Y})\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\mathrm{X}\,\partial\mathrm{Y}} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial\mathrm{X}} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial\mathrm{Y}} = 0.$$

Tout système de fonctions X et Y qui vérifie cette condition en fait connaître une infinité d'autres, puisqu'on peut leur ajouter une même constante arbitraire.

En dehors de ces deux cas, les deux réseaux harmoniques l'un à l'autre donneront les deux seules solutions du problème.

27. Dans l'étude des systèmes cycliques déduits des réseaux

harmoniques, nous ferons apparaître plus directement les éléments nouveaux que nous avons en vue, en donnant une forme particulière aux résultats, d'ailleurs conformes aux formules usuelles, que nous établirons à l'aide du trièdre de M. Darboux.

Considérons d'abord une surface quelconque rapportée à ses lignes de courbure

$$ds^2 = A^2\,du^2 + B^2\,dv^2.$$

En reprenant les notations du n° 2, nous écrirons, dans tout ce qui suit, pour la représentation sphérique.

$$d\sigma^2 = M^2\,du^2 + N^2\,dv^2,$$

et nous poserons toujours

$$P = \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{1}{N}\frac{\partial M}{\partial v}, \qquad Q = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial u}.$$

Nous retrouvons immédiatement la détermination des réseaux de Dupin en appliquant les formules du n° 25. Prenons sur la normale en M à la surface donnée le segment MS $= l$. Si nous voulons que le point S décrive un réseau en question, il faudra prendre

$$\lambda = -\frac{l - R_1}{l - R_2},$$

$$\mu_1 = \frac{1}{R_1 - R_2}\frac{\partial R_1}{\partial u}, \qquad \mu_2 = \frac{1}{R_2 - R_1}\frac{\partial R_2}{\partial v}.$$

L'équation (1) que doit vérifier λ se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial l}{\partial u}}{l - R_1}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial l}{\partial v}}{l - R_2}\right) \tag{4}$$

et définira tous les systèmes cycliques dont les cercles sont normaux à la surface proposée.

On peut la remplacer par le système

$$\frac{\frac{\partial l}{\partial u}}{l - R_1} = -\frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}, \qquad \frac{\frac{\partial l}{\partial v}}{l - R_2} = -\frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

θ étant une certaine fonction de u et de v qui, pour l'intégrabilité de l, devra être solution de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

la même que celle qui est relative à la représentation sphérique.

Enfin, si l'on pose $l = \frac{\sigma}{\theta}$, le même système devient

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = R_1 \frac{\partial \theta}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = R_2 \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

la condition d'intégrabilité pour σ étant toujours la même. On constate ainsi que l'on peut, en partant d'une solution quelconque, ajouter à θ une constante arbitraire sans modifier la fonction σ. On vérifiera plus loin qu'on obtient de la sorte toutes les solutions relatives au même système cyclique.

28. Attachons maintenant à la surface le trièdre mobile relatif à ses lignes de courbure. Par rapport à ce trièdre, le point S (o, o, l) aura comme composantes de sa vitesse, suivant que l'on fera varier u ou v,

$$\left(A - Ml, \, 0, \, \frac{\partial l}{\partial u}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(0, \, B - Nl, \, \frac{\partial l}{\partial v}\right).$$

Le plan tangent au réseau (S) aura donc pour équation, dans le même système,

$$z = px + qy + l$$

avec

$$p = \frac{\frac{\partial l}{\partial u}}{A - Ml} = \frac{1}{M\theta} \frac{\partial \theta}{\partial u}, \qquad q = \frac{\frac{\partial l}{\partial v}}{B - Nl} = \frac{1}{N\theta} \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Soit N le point de contact de la sphère (S) avec la seconde nappe. Un point quelconque de la droite MN aura des coordonnées de la forme λp, λq, et $-\lambda$. En particulier, pour le point N lui-même.

$$\lambda = -\frac{2l}{p^2 + q^2 + 1}.$$

Les projections de la vitesse du point quelconque, relativement aux variations de u et v seront

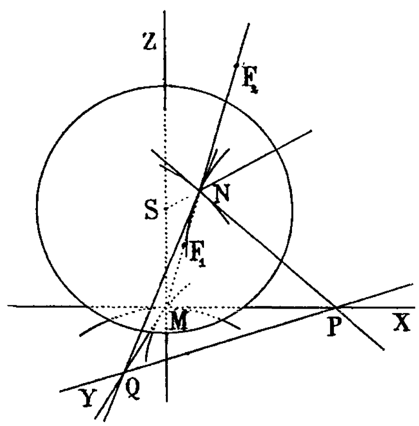
$$X_u = \frac{\partial(\lambda p)}{\partial u} + \lambda(M + Pq) + A, \qquad X_v = \frac{\partial(\lambda p)}{\partial v} - \lambda Q q,$$

$$Y_u = \frac{\partial(\lambda q)}{\partial u} - \lambda P p, \qquad Y_v = \frac{\partial(\lambda q)}{\partial v} + \lambda(N + Qp) + B,$$

$$Z_u = -\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \lambda M p, \qquad Z_v = -\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda N q.$$

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs de λ qui définissent les points focaux F_1 et F_2 de la droite MN. Si nous exprimons que le premier décrit une

Fig. 1.



courbe tangente à MN lorsque n varie, nous trouvons les deux conditions

$$\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial u} + M + Pq + \frac{A}{\lambda_1}\right) = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial q}{\partial u} - Pp\right) = -Mp.$$

La comparaison des deux derniers membres donne

$$(5) \qquad \frac{\partial q}{\partial u} - p(P - Mq) = 0 \qquad \text{ou} \qquad Y_u + qZ_u = 0,$$

condition indépendante de λ_1, qui met en évidence un premier plan focal de la droite MN, mené par la tangente à la ligne (v) de la surface (M) perpendiculairement au plan tangent au réseau (S). La comparaison des membres extrêmes donne alors

$$(6) \qquad -\frac{A}{\lambda_1} = \frac{\partial p}{\partial u} + M(1+p^2) + Pq.$$

De même, avec la condition

$$(7) \qquad \frac{\partial p}{\partial v} - q(Q - Np) = 0 \qquad \text{ou} \qquad X_v + pZ_v = 0,$$

le second point focal F_2 sera défini par

$$(8) \qquad -\frac{B}{\lambda_2} = \frac{\partial q}{\partial v} + N(1+q^2) + Qp.$$

Il est évident que les conditions (5) et (7) sont remplies d'elles-mêmes dans l'hypothèse d'un système cyclique défini par la sphère (S). Inversement, elles entraînent l'existence de ce système cyclique, car elles font correspondre les lignes de courbure sur les deux nappes (M) et (N) par l'intermédiaire des développables de la congruence des droites MN.

Si, dans les formules des vitesses, on remplace les dérivées de p et q par les expressions tirées des quatre dernières équations, on trouve

$$\begin{aligned}
X_u &= \lambda p \left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}\right) + \lambda A\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1}\right),\\
Y_u &= \lambda q \left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}\right),\\
Z_u &= -\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}\right);\\[1ex]
X_v &= \lambda p \left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial v}\right),\\
Y_v &= \lambda q \left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial v}\right) + \lambda B\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_2}\right),\\
Z_v &= -\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial v}\right).
\end{aligned}$$

On retrouve immédiatement un théorème de Ribaucour, en remarquant que le point de la droite MN défini par $\lambda = 0$ a ses vitesses parallèles à celles de M et décrit une surface dont les lignes de courbure ont même représentation sphérique que celles de la surface (M).

Considérons spécialement le point N. La seconde normale SN a pour cosinus directeurs

$$\frac{2p}{p^2+q^2+1}, \quad \frac{2q}{p^2+q^2+1}, \quad \frac{p^2+q^2-1}{p^2+q^2+1}.$$

Si nous posons $\lambda = \theta e^{\omega}$, d'où

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial v},$$

les relations de perpendicularité entre SN et les lignes de courbure de la nappe (N)

$$2p\mathrm{X}_u + 2q\mathrm{Y}_u + (p^2+q^2-1)\mathrm{Z}_u = 0, \qquad 2p\mathrm{X}_v + 2q\mathrm{Y}_v + (p^2+q^2-1)\mathrm{Z}_v = 0$$

donneront

$$(p^2+q^2+1)\frac{\partial\omega}{\partial u} + 2p\mathrm{A}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1}\right) = 0,$$
$$(p^2+q^2+1)\frac{\partial\omega}{\partial v} + 2q\mathrm{B}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda\mathrm{A}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1}\right) = \frac{l}{p}\frac{\partial\omega}{\partial u}, \qquad \lambda\mathrm{B}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{l}{q}\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

d'où nous déduisons, pour les vitesses de N, les formules encore plus simplifiées

$$\mathrm{X}_u = \left(\lambda p + \frac{l}{p}\right)\frac{\partial\omega}{\partial u}, \qquad \mathrm{X}_v = \lambda p\frac{\partial\omega}{\partial v},$$
$$\mathrm{Y}_u = \lambda q\frac{\partial\omega}{\partial u}, \qquad \mathrm{Y}_v = \left(\lambda q + \frac{l}{q}\right)\frac{\partial\omega}{\partial v},$$
$$\mathrm{Z}_u = -\lambda\frac{\partial\omega}{\partial u}, \qquad \mathrm{Z}_v = -\lambda\frac{\partial\omega}{\partial v}.$$

L'élément linéaire de la surface (N) est ainsi défini par

$$
(9) \qquad \begin{aligned} ds^2 &= l^2\left[\frac{1}{p^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2 du^2 + \frac{1}{q^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2 dv^2\right] \\ &= \lambda^2\left[\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1}\right)^2 A^2\, du^2 + \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_2}\right)^2 B^2\, dv^2\right]. \end{aligned}
$$

Ceci donne lieu de remarquer que, par une rotation autour d'un axe parallèle à l'intersection des plans tangents en M et N, on peut amener l'élément de la surface (N) à avoir ses tangentes coordonnées parallèles à celles de la surface (M). On se rend compte ainsi comment on peut, pour évaluer le ds^2, négliger une vitesse composante dirigée suivant MN, comme s'il s'agissait de la surface de Ribaucour précédemment citée.

Remarquons que le plan tangent à la surface (S) détermine sur les tangentes aux lignes de courbure de (M) les segments $-\frac{l}{p}$ et $-\frac{l}{q}$. Or, en posant, comme plus haut $l = \frac{\sigma}{\theta}$, nous obtenons

$$
\frac{p}{l} = \frac{\sigma}{M}\frac{\partial\theta}{\partial u}, \qquad \frac{q}{l} = \frac{\sigma}{N}\frac{\partial\theta}{\partial v}.
$$

Donc, si l'on ajoute à θ une constante variable, l'intersection des plans tangents en M et N sera une droite fixe, axe d'un cercle invariable qui sera bien normal à toutes les surfaces (N).

29. On étudie la représentation sphérique des surfaces (M) et (N) comme ces surfaces elles-mêmes. Il suffit de remplacer les fonctions A et B par — M et — N, et de faire $l = -1$, puisque le rayon de la sphère, compté à partir du centre, est parallèle à la direction positive de la normale. Si m et n sont les points qui représentent M et N, chaque point de la droite mn aura des coordonnées de la forme $\mu\, p$, $\mu\, q$ et $-\mu$, et en particulier pour m, on aura

$$
\mu = \frac{2}{p^2 + q^2 + 1} = -\frac{\lambda}{l}.
$$

Les points focaux de mn sont définis par

$$
\mu_1 = -\frac{M}{A}\lambda_1 = -\frac{\lambda_1}{R_1}, \qquad \mu_2 = -\frac{N}{B}\lambda_2 = -\frac{\lambda_2}{R_2}.
$$

Donc, pour les vitesses d'un point quelconque de mn,

$$X_u = \mu p \left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) - M\left(1 - \frac{\mu}{\mu_1}\right) = \left(\mu p - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right),$$

$$Y_u = \mu q \left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right),$$

$$Z_u = -\mu\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right);$$

$$X_v = \mu p \left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial v} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right),$$

$$Y_v = \mu q \left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial v} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) - N\left(1 - \frac{\mu}{\mu_2}\right) = \left(\mu q - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial v} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right),$$

$$Z_v = -\mu\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial v} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right).$$

Pour le second élément linéaire sphérique

$$\begin{aligned} d\sigma_1^2 &= M^2\left(1 - \frac{\mu}{\mu_1}\right)^2 du^2 + N^2\left(1 - \frac{\mu}{\mu_2}\right)^2 dv^2 \\ &= \frac{1}{p^2}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 du^2 + \frac{1}{q^2}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial v} - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 dv^2. \end{aligned}$$

Cette expression étant de la forme $M_1^2\,du^2 + N_1^2\,dv^2$, remarquons que si nous partions de la seconde nappe de l'enveloppe des sphères, nous pourrions conserver p, q et μ, en employant un trièdre symétrique du premier. Il y aurait lieu de considérer une fonction θ_1 telle que

$$M_1 = \frac{1}{p\theta_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \qquad N_1 = \frac{1}{q\theta_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial v}.$$

Par comparaison

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{1}{\theta_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial u} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{1}{\theta_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial v} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial v}.$$

Comme θ et θ_1 ne sont définis qu'à un facteur constant près, on peut supposer la relation

$$\theta\theta_1 = \mu.$$

Propriétés générales d'un couple de surfaces de Christoffel.

30. Considérons deux surfaces isothermiques

$$ds^2 = e^{\pm 2\alpha}(du^2 + dv^2).$$

dont nous supposerons les plans tangents correspondants parallèles, et que, pour abréger, nous nommerons *conjuguées*. La représentation sphérique étant la même pour les deux, nous n'aurons qu'un seul système de valeurs des fonctions M et N. Mais il faut observer que si les éléments des lignes (v), par exemple, sont parallèles et de même sens dans deux surfaces conjuguées, les éléments (u) seront parallèles et de sens contraires. Nous poserons donc respectivement, pour ces deux surfaces (M) et (M′),

$$A = B = e^{\alpha}, \qquad A' = -B' = e^{-\alpha}.$$

Généralement, nous désignerons par des accents tout ce qui se rapporte à (M′). Ainsi nous aurons

$$M = e^{\alpha}\rho_1 = e^{-\alpha}\rho'_1, \qquad N = e^{\alpha}\rho_2 = -e^{-\alpha}\rho'_2,$$

d'où

$$\rho'_1 = e^{2\alpha}\rho_1, \qquad \rho'_2 = -e^{2\alpha}\rho_2.$$

Le réseau harmonique de (M) correspondra à

$$l = \frac{2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{2e^{2\alpha}}{\rho'_1 - \rho'_2},$$

et celui de (M′) à

$$l' = \frac{2}{\rho'_1 + \rho'_2} = \frac{2e^{-2\alpha}}{\rho_1 - \rho_2}$$

avec la relation

$$ll' = \frac{4}{M^2 - N^2}.$$

Nous allons établir une proposition qui sera la base de notre étude. Différentions les formules précédentes :

$$-\frac{2}{l^2}\frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial \rho_1}{\partial u} + \frac{\partial \rho_2}{\partial u},$$

$$-\frac{2}{l'^2}\frac{\partial l'}{\partial u} = e^{2\alpha}\left[\frac{\partial \rho_1}{\partial u} - \frac{\partial \rho_2}{\partial u} + 2(\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right] = e^{2\alpha}\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial u} + \frac{\partial \rho_2}{\partial u}\right).$$

On trouve ainsi

$$\frac{e^{-\alpha}}{l^2}\frac{\partial l}{\partial u} = \frac{e^{\alpha}}{l'^2}\frac{\partial l'}{\partial u}.$$

On aurait de même, en différentiant par rapport à v

$$\frac{e^{-\alpha}}{l^2}\frac{\partial l}{\partial v} = -\frac{e^{\alpha}}{l'^2}\frac{\partial l'}{\partial v}.$$

Or, pour la première surface,

$$p = \frac{\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}}{e^{\alpha}\left(\frac{1}{l} - \rho_1\right)} = \frac{\frac{2}{l}\frac{\partial l}{\partial u}}{\rho_2 - \rho_1} e^{-\alpha} = -\frac{l'}{l} e^{\alpha} \frac{\partial l}{\partial u},$$

$$q = \frac{\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial v}}{e^{\alpha}\left(\frac{1}{l} - \rho_2\right)} = \frac{\frac{2}{l}\frac{\partial l}{\partial v}}{\rho_1 - \rho_2} e^{-\alpha} = \frac{l'}{l} e^{\alpha} \frac{\partial l}{\partial v}.$$

Pour la seconde surface,

$$p' = \frac{\frac{1}{l'}\frac{\partial l'}{\partial u}}{e^{-\alpha}\left(\frac{1}{l'} - \rho'_1\right)} = \frac{\frac{2}{l'}\frac{\partial l'}{\partial u}}{\rho'_2 - \rho'_1} e^{\alpha} = -\frac{l}{l'} e^{-\alpha} \frac{\partial l'}{\partial u},$$

$$q' = \frac{\frac{1}{l'}\frac{\partial l'}{\partial v}}{e^{-\alpha}\left(\frac{1}{l'} - \rho'_2\right)} = \frac{\frac{2}{l'}\frac{\partial l'}{\partial v}}{\rho'_1 - \rho'_2} e^{\alpha} = -\frac{l}{l'} e^{-\alpha} \frac{\partial l'}{\partial v}.$$

Par suite des remarques primitives, on constate que

$$p' = p, \qquad q' = q.$$

Les fonctions p et q sont communes à deux surfaces conjuguées de Christoffel.

Il en résulte immédiatement la proposition fondamentale suivante : *Les réseaux harmoniques relatifs à deux surfaces conjuguées ont leurs plans tangents parallèles. En même temps, les surfaces qui constituent les autres nappes des enveloppes des sphères harmoniques ont aussi leurs plans tangents parallèles.* Nous avons déjà là une proposition analogue au théorème de Christoffel, mais celui-ci va recevoir encore une généralisation.

31. Appliquons les formules précédentes au calcul de la fonction θ. Elles donnent, pour la surface (M),

$$\frac{p}{l'}e^{\alpha} = -\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}, \qquad \frac{q}{l'}e^{-\alpha} = \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial v}$$

ou

$$(\mathrm{M}-\mathrm{N})p = -\frac{2}{l}\frac{\partial l}{\partial u}, \qquad (\mathrm{M}-\mathrm{N})q = \frac{2}{l}\frac{\partial l}{\partial v},$$

et de même, pour la surface (M′),

$$(\mathrm{M}+\mathrm{N})p = -\frac{2}{l'}\frac{\partial l'}{\partial u}, \qquad (\mathrm{M}+\mathrm{N})q = -\frac{2}{l'}\frac{\partial l'}{\partial v}.$$

On déduit de là

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} = \mathrm{M}p = -\left(\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{1}{l'}\frac{\partial l'}{\partial u}\right), \qquad \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v} = \mathrm{N}q = -\left(\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial v} + \frac{1}{l'}\frac{\partial l'}{\partial v}\right),$$

ce qui permet de prendre

$$\theta = \frac{4}{ll'} = \mathrm{M}^2 - \mathrm{N}^2,$$

$$p = \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\partial}{\partial u}\log(\mathrm{M}^2 - \mathrm{N}^2), \qquad q = \frac{1}{\mathrm{N}}\frac{\partial}{\partial v}\log(\mathrm{M}^2 - \mathrm{N}^2).$$

On tire aussi des mêmes formules

$$\mathrm{N}p = \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u} - \frac{1}{l'}\frac{\partial l'}{\partial u}, \qquad \mathrm{M}q = \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial v} - \frac{1}{l'}\frac{\partial l'}{\partial v};$$

$$p = \frac{1}{\mathrm{N}}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{l}{l'}, \qquad q = \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{l}{l'}.$$

Les vitesses des centres S et S′ des deux sphères harmoniques donnent les éléments linéaires des réseaux harmoniques :

$$ds^2 = \frac{(\mathrm{M}-\mathrm{N})^2}{(\mathrm{M}+\mathrm{N})^2}e^{2\alpha}\,(du^2 + dv^2) + dl^2,$$

$$ds'^2 = \frac{(\mathrm{M}+\mathrm{N})^2}{(\mathrm{M}-\mathrm{N})^2}e^{-2\alpha}(du^2 + dv^2) + dl'^2.$$

Nous sommes amenés à introduire la fonction β de u et de v

définie par

$$e^{\beta} = \frac{\mathrm{M}-\mathrm{N}}{\mathrm{M}+\mathrm{N}}\, e^{\alpha}, \tag{10}$$

que nous retrouverons souvent. Elle permet d'écrire, pour ces deux réseaux,

$$ds^2 = e^{2\beta}(du^2 + dv^2) + dl^2, \qquad ds'^2 = e^{-2\beta}(du^3 + dv^2) + dl'^2.$$

Enfin,

$$\frac{\partial l}{\partial u} = -\frac{pl}{2}(\mathrm{M}-\mathrm{N}) = -p\,\frac{\mathrm{M}-\mathrm{N}}{\rho_1+\rho_2} = -p\,\frac{\mathrm{M}-\mathrm{N}}{\mathrm{M}+\mathrm{N}}\, e^{\alpha} = -p\, e^{\beta}.$$

De même,

$$\frac{\partial l}{\partial v} = q\, e^{\beta}, \qquad \frac{\partial l'}{\partial u} = -p\, e^{-\beta}, \qquad \frac{\partial l'}{\partial v} = -q\, e^{-\beta},$$

$$ds^2 = e^{2\beta}\,[du^2 + dv^2 + (p\,du - q\,dv)^2],$$

$$ds'^2 = e^{-2\beta}[du^2 + dv^2 + (p\,du + q\,dv)^2].$$

Par comparaison

$$ds^2 + 2pq\, e^{\beta}\, du\, dv = e^{4\beta}[ds'^2 - 2pq\, e^{-2\beta}\, du\, dv].$$

Les réseaux (S) *et* (S′) *sont divisés par les lignes coordonnées en parallélogrammes infiniment petits semblables, mais non semblablement disposés.* Les angles correspondants sont supplémentaires, et si les éléments (v) sont parallèles et de même sens, les éléments (u) sont parallèles et de sens contraires.

32. Nous pouvons maintenant donner au théorème de Christoffel l'extension annoncée. L'expression $\theta = \mathrm{M}^2 - \mathrm{N}^2$, ne dépendant que de la représentation sphérique, convient pour les deux systèmes cycliques harmoniques provenant des deux surfaces isothermiques conjuguées. Dans chacun de ces deux systèmes, toute autre surface orthogonale aux mêmes cercles sera une enveloppe de sphères obtenue en ajoutant à θ une constante a, qui sera le paramètre de cette surface. D'après les formules générales

$$p = \frac{1}{\mathrm{M}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}, \qquad q = \frac{1}{\mathrm{N}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

tous les couples de surfaces qui auront même paramètre dans les deux systèmes auront leurs plans tangents parallèles.

33. On peut déduire des formules

$$dl = - e^{\beta}(p\,du - q\,dv), \qquad dl' = - e^{-\beta}(p\,du + q\,dv),$$

une nouvelle méthode de recherche des surfaces isothermiques. On voit d'abord immédiatement que l'élément linéaire

$$ds^2 = dl\,dl' = p^2\,du^2 - q^2\,dv^2$$

convient à un réseau plan orthogonal dont les lignes de longueur nulle ont pour paramètres l et l'. La connaissance de ce réseau permet de retrouver la surface isothermique par de simples quadratures. Les conditions d'intégrabilité pour l et l' donnent

$$\frac{\partial\beta}{\partial u} = -\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial v}, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial v} = -\frac{1}{p}\frac{\partial q}{\partial u}.$$

La fonction β, pour être intégrable, n'exige que la condition

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial q}{\partial u}\right) = 0$$

exprimant justement que le réseau orthogonal d'où l'on est parti a une courbure totale nulle.

On a ensuite, après avoir calculé l et l',

$$\frac{l}{l'} = \frac{\rho'_1 + \rho'_2}{\rho_1 + \rho_2} = e^{2\alpha}\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = e^{2\alpha}\frac{\mathrm{M} - \mathrm{N}}{\mathrm{M} + \mathrm{N}} = e^{\alpha+\beta}.$$

$$e^{\alpha} = \frac{l}{l'}e^{-\beta}.$$

On connaît donc les ds^2 du couple de surfaces isothermiques conjuguées, bien déterminé, qui se rattache au réseau plan.

Il en est de même de celui de la représentation sphérique, qui peut prendre plusieurs formes.

D'abord les deux relations

$$\frac{\mathrm{M} - \mathrm{N}}{\mathrm{M} + \mathrm{N}} = e^{\beta - \alpha}, \qquad \mathrm{M}^2 - \mathrm{N}^2 = \frac{4}{ll'}$$

permettent de prendre

$$\mathrm{M} + \mathrm{N} = \frac{2}{\sqrt{ll'}} e^{\frac{\alpha-\beta}{2}}, \qquad \mathrm{M} - \mathrm{N} = \frac{2}{\sqrt{ll'}} e^{\frac{\beta-\alpha}{2}},$$

d'où

$$\mathrm{M} = \frac{2}{\sqrt{ll'}} \operatorname{ch} \frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \mathrm{N} = \frac{2}{\sqrt{ll'}} \operatorname{sh} \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Nous avons d'autres expressions. Il résulte de formules antérieures que

$$\mathrm{M} = -\frac{1}{p}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{1}{l'}\frac{\partial l'}{\partial u}\right), \qquad \mathrm{N} = -\frac{1}{q}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial v} + \frac{1}{l'}\frac{\partial l'}{\partial v}\right),$$

ce qui peut s'écrire

$$\mathrm{M} = \frac{e^{\beta}}{l} + \frac{e^{-\beta}}{l'}, \qquad \mathrm{N} = -\frac{e^{\beta}}{l} + \frac{e^{-\beta}}{l'}.$$

Nous avons vu que ces formules équivalaient aussi bien à

$$\mathrm{M} = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial v} - \frac{1}{l'}\frac{\partial l'}{\partial v}\right), \qquad \mathrm{N} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u} - \frac{1}{l'}\frac{\partial l'}{\partial u}\right).$$

Si l'on tient compte des relations

$$\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial l'}{\partial u} = p^2, \qquad \frac{\partial l}{\partial v}\frac{\partial l'}{\partial v} = -q^2,$$

on aura encore

$$\mathrm{M} = -p\left(\frac{1}{l'\frac{\partial l}{\partial u}} + \frac{1}{l\frac{\partial l'}{\partial u}}\right), \qquad \mathrm{N} = q\left(\frac{1}{l'\frac{\partial l}{\partial v}} + \frac{1}{l\frac{\partial l'}{\partial v}}\right). \tag{11}$$

Enfin, en combinant avec

$$\frac{l}{l'} = e^{\alpha+\beta},$$

on pourra encore prendre, à volonté,

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{M} &= \frac{e^{\alpha}+e^{\beta}}{l} = \frac{e^{-\alpha}+e^{-\beta}}{l'} = \frac{e^{\alpha}}{l} + \frac{e^{-\alpha}}{l'}, \\ \mathrm{N} &= \frac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{l} = \frac{e^{-\alpha}+e^{-\beta}}{l'} = \frac{e^{\alpha}}{l} - \frac{e^{-\alpha}}{l'}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Les inverses des rayons de courbure des deux surfaces isothermiques ont pour expressions

$$(13)\qquad \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{1}{l} + \dfrac{e^{-2\alpha}}{l'}, & \rho'_1 = \dfrac{e^{2\alpha}}{l} + \dfrac{1}{l'}, \\ \rho_2 = \dfrac{1}{l} - \dfrac{e^{-2\alpha}}{l'}, & \rho'_2 = -\dfrac{e^{2\alpha}}{l} + \dfrac{1}{l'}. \end{cases}$$

On vérifie bien les relations harmoniques

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{2}{l}, \qquad \rho'_1 + \rho'_2 = \frac{2}{l'}.$$

34. Tous ces calculs si simples peuvent provisoirement s'effectuer sur deux fonctions p et q provenant d'un réseau plan orthogonal quelconque. Il est dès lors naturel de chercher quel peut être le caractère d'un réseau plan qui permette d'en déduire les ds^2 d'un couple de surfaces isothermiques.

Comme il ne s'agit que de réaliser des lignes de courbure, essayons directement si le ds^2 provisoire peut vérifier les trois formules fondamentales de Codazzi. On a d'abord

$$\rho_1 = \frac{1}{l} + \frac{e^{-2\alpha}}{l'}, \qquad \frac{\partial \rho_1}{\partial v} = -\frac{1}{l^2}\frac{\partial l}{\partial v} - \frac{e^{-2\alpha}}{l'^2}\frac{\partial l'}{\partial v} - \frac{2}{l'}e^{-2\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial v}$$

avec

$$-\frac{e^{-2\alpha}}{l'^2}\frac{\partial l'}{\partial v} = \frac{e^{-2\alpha}}{l^2}\,\frac{l^2}{l'^2}e^{-2\beta}\frac{\partial l}{\partial v} = \frac{1}{l^2}\frac{\partial l}{\partial v}.$$

Il reste

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial v} = -\frac{2}{l'}e^{-2\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial v} = (\rho_2 - \rho_1)\frac{\partial \alpha}{\partial v}.$$

On trouve de même

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial u} = (\rho_1 - \rho_2)\frac{\partial \alpha}{\partial u}.$$

Il en résulte donc que *les deux premières formules de Codazzi sont vérifiées d'elles-mêmes.*

Il reste l'unique condition

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} - \mathrm{MN} = 0,$$

dans laquelle réside le caractère des réseaux plans conduisant aux surfaces isothermiques les plus générales, réserve faite pour les seules surfaces à courbure moyenne constante, pour lesquelles

$$p = q = 0.$$

Il est clair que l'on pourra obtenir des solutions particulières, se rattachant à des réseaux plans qui auraient *a priori* un caractère spécial. Ce n'est que dans ces conditions que l'on peut se proposer de trouver là une nouvelle méthode de recherche.

35. Considérons, par exemple, le cas où p est une fonction de u, et q une fonction de v. Alors $\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u} = 0$ et β se réduit à une constante que l'on peut supposer nulle. Car si l'on ajoute généralement à β une constante arbitraire, on passe à de nouvelles surfaces semblables aux premières.

Posons donc

$$p = \mathrm{U}', \qquad q = \mathrm{V}',$$

d'où

$$l = \mathrm{V} - \mathrm{U}, \qquad l' = -(\mathrm{U} + \mathrm{V}), \qquad ll' = \mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2, \qquad e^{\alpha} = \frac{l}{l'} = \frac{\mathrm{U} - \mathrm{V}}{\mathrm{U} + \mathrm{V}},$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\mathrm{V} - \mathrm{U}}\left(1 + \frac{\mathrm{U} + \mathrm{V}}{\mathrm{U} - \mathrm{V}}\right) = -\frac{2\mathrm{U}}{(\mathrm{U} - \mathrm{V})^2},$$

$$\rho_2 = \frac{1}{\mathrm{V} - \mathrm{U}}\left(1 - \frac{\mathrm{U} + \mathrm{V}}{\mathrm{U} - \mathrm{V}}\right) = \frac{2\mathrm{V}}{(\mathrm{U} - \mathrm{V})^2},$$

$$\mathrm{M} = -\frac{2\mathrm{U}}{\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2}, \qquad \mathrm{N} = \frac{2\mathrm{V}}{\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2}.$$

On a ensuite

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{2\mathrm{U}'\mathrm{V}}{\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2}, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = -\frac{2\mathrm{U}\mathrm{V}'}{\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2},$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} = \frac{2\mathrm{U}''\mathrm{V}}{\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2} - \frac{4\mathrm{U}\mathrm{V}\mathrm{U}'^2}{(\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} = -\frac{2\mathrm{U}\mathrm{V}''}{\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2} - \frac{4\mathrm{U}\mathrm{V}\mathrm{V}'^2}{(\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2)^2},$$

d'où la condition

$$\frac{2(\mathrm{U}''\mathrm{V} - \mathrm{U}\mathrm{V}'')}{\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2} - \frac{4\mathrm{U}\mathrm{V}(\mathrm{U}'^2 + \mathrm{V}'^2)}{(\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2)^2} - \frac{4\mathrm{U}\mathrm{V}}{(\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2)^2} = 0,$$

$$(\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2)\left(\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}} - \frac{\mathrm{V}''}{\mathrm{V}}\right) - 2(\mathrm{U}'^2 + \mathrm{V}'^2 + 1) = 0.$$

L'intégration de cette équation fonctionnelle, suivant le procédé déjà employé, donne

$$U'^2 = a U^4 + b U^2 - \cos^2 c, \qquad V'^2 = - a V^4 - b V^2 - \sin^2 c,$$

a, b, c étant des constantes arbitraires.

Après l'introduction des fonctions elliptiques, les éléments linéaires des surfaces isothermiques correspondantes prendront les formes

$$ds^2 = \frac{(U \mp V)^2}{(U \pm V)^2}\left[\frac{dU^2}{aU^4 + bU^2 - \cos^2 c} - \frac{dV^2}{aV^4 + bV^2 + \sin^2 c}\right].$$

On voit qu'on passe de l'une à l'autre en changeant V en — V.

Pour la représentation sphérique commune

$$d\sigma^2 = \frac{4}{(U^2 - V^2)^2}(U^2 du^2 + V^2 dv^2).$$

La sphère est donc *isothermique*.

Plus généralement, on peut former l'équation fonctionnelle dont dépendent les surfaces isothermiques pour lesquelles le réseau plan correspondant est isotherme.

Posons

$$p = U' e^{\gamma}, \qquad q = V' e^{\gamma},$$

d'où

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = - \frac{U'}{V'}\frac{\partial \gamma}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial v} = - \frac{U'}{V'}\frac{\partial \gamma}{\partial u},$$

$$dl = e^{\gamma+\beta}(dV - dU), \qquad dl' = - e^{\gamma-\beta}(dU + dV).$$

Les conditions d'intégrabilité donnent directement les formes des fonctions $\gamma \pm \beta$. Mais il suffit de remarquer que l'on peut poser

$$\frac{1}{l} = f(U - V), \qquad \frac{1}{l'} = g(U + V),$$

d'où immédiatement

$$e^{2\beta} = \frac{\dfrac{\partial l}{\partial u}}{\dfrac{\partial l'}{\partial u}} = \frac{g^2 f'}{f^2 g'}, \qquad e^{2\alpha} = \frac{l^2}{l'^2} e^{-2\beta} = \frac{g'}{f'},$$

$$M = f e^{\alpha} + g e^{-\alpha}, \qquad N = f e^{\alpha} - g e^{-\alpha},$$

$$MN = f^2 e^{2\alpha} - g^2 e^{-2\alpha} = \frac{f^2 g'^2 - g^2 f'^2}{f' g'},$$

On obtient ainsi l'équation demandée

$$(15)\qquad 2\frac{f^2 g'^2 - g^2 f'^2}{f' g'} - (U'' - V'')\frac{f'}{f'} \\ + (U'' + V')\frac{g''}{g'} - (U'^2 + V'^2)\left[\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \left(\frac{g''}{g'}\right)'\right] = 0.$$

Elle dépend des quatre fonctions inconnues U (u), V (v), f (U — V) et g (U + V), et semble très difficile à intégrer complètement. Elle admet *a priori* les solutions de la précédente, et l'on s'assure qu'il n'y a que ce moyen de prendre pour l et $\pm l'$ une même puissance de U — V et U + V. Cependant, si l'on prend, comme plus haut,

$$l = V - U, \qquad l' = -(U + V),$$

on a une seconde solution, en prenant pour U et V des fonctions linéaires telles que

$$U'^2 + V'^2 + 1 = 0.$$

La représentation sphérique est encore isothermique.

La forme de l'équation suggère encore l'idée de réaliser pour $\frac{f''}{f'}$ et $\frac{g''}{g'}$ des valeurs constantes et alors forcément égales en valeur absolue. Si l'on prend, par exemple,

$$f = e^{a(U-V)}, \qquad g = e^{a(U+V)},$$

a désignant une constante quelconque, le premier membre de l'équation se réduit à $2\,a\,V''$. De sorte que si V est une fonction linéaire, U sera une fonction arbitraire. On obtient ainsi tous les cônes.

Enfin, on va constater que la cyclide de Dupin se rattache à la classe actuelle, et fournit une autre solution de l'équation fonctionnelle. Prenons l'élément linéaire sous la forme

$$ds^2 = \frac{1}{(U - V)^2}(du^2 + dv^2)$$

avec

$$U = p\,e^{mu} + q\,e^{-mu} + r, \qquad V = p'\,e^{m'v} + q'\,e^{-m'v} + r'.$$

On a vu que la cyclide est caractérisée par

$$(r - r')^2 = 4\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m'^2}\right)(m^2 pq + m'^2 p'q').$$

Alors, en posant

$$K = \frac{m^2 r + m'^2 r'}{m^2 + m'^2},$$

on pourra prendre

$$M = i\sqrt{m^2 + m'^2}\,\frac{V - K}{U - V}, \qquad N = -\, i\sqrt{m^2 + m'^2}\,\frac{U - K}{U - V},$$

d'où

$$\theta = M^2 - N^2 = (m^2 + m'^2)\,\frac{U + V - 2K}{U - V},$$

$$p = \frac{1}{M\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{2i}{\sqrt{m^2 + m'^2}}\,\frac{U'}{U + V - 2K},$$

$$q = \frac{1}{N\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial v} = -\frac{2i}{\sqrt{m^2 + m'^2}}\,\frac{V'}{U + V - 2K}.$$

La relation

$$\frac{p}{q} = -\frac{U'}{V'}$$

montre que le réseau plan est bien isotherme.

Les expressions des rayons de courbure donnent

$$l = \frac{2i}{\sqrt{m^2 + m'^2}}\,\frac{1}{U + V - 2K}, \qquad l' = \frac{2i}{\sqrt{m^2 - m'^2}}(U - V).$$

Il suffit de changer le signe de V pour retrouver la forme primitive des fonctions f et g. La seconde est linéaire, et la première est l'inverse d'une fonction linéaire.

Réciproquement, ces formes caractérisent la cyclide de Dupin. Car, en altérant U et V d'une même constante, on peut toujours poser

$$f = \frac{1}{l} = a(U + V + c), \qquad g = \frac{1}{l'} = \frac{1}{b(U - V)}.$$

La relation

$$e^{2\alpha} = \frac{g'}{f'} = -\frac{1}{ab(U - V)^2}$$

indique déjà que l'on a affaire à une des surfaces considérées au n° 13. Pour déterminer les fonctions U et V, substituons dans l'équation (15) après y avoir changé V en — V,

$$-\frac{a}{b(U-V)^2}[(U+V+c)^2-(U-V)^2]+\frac{U''-V''}{U-V}-\frac{U'^2+V'^2}{(U-V)^2}=0,$$

$$a[4UV+2c(U+V)+c^2]+b[U'^2+V'^2-(U-V)(U''-V'')]=0.$$

On peut écrire

$$4aUV+b(UV''+VU'')=-2ac(U+V)-ac^2-b(U'^2+V'^2-UU''-VV'').$$

Le second membre étant la somme d'une fonction de u et d'une fonction de v, il doit en être de même du premier, ce qui donne la condition

$$4aU'V'+b(U'V'''+V'U''')=0 \qquad \text{ou} \qquad 4a+b\left(\frac{U'''}{U'}+\frac{V'''}{V'}\right)=0.$$

Chacun des rapports $\frac{U'''}{U'}$ et $\frac{V'''}{V'}$ étant constant, on a les formes

$$U=p\,e^{mu}+q\,e^{-mu}+r, \qquad V=p'\,e^{m'v}+q\,e^{-m'v}+r'.$$

Par substitution directe, et après élimination de a, b, c, on obtient, entre les constantes, la relation propre à la cyclide.

Première classe de surfaces isothermiques déduites du système cyclique harmonique.

36. La seconde nappe de l'enveloppe des sphères harmoniques n'étant pas isothermique, réserve faite pour le cas, que nous considérerons, où elle se réduit à une sphère, cherchons si, parmi les surfaces orthogonales à notre congruence de cercles, il peut exister d'autres surfaces isothermiques se rattachant à la proposée avec similitude des infiniment petits ou correspondance des lignes de longueur nulle. L'élément linéaire est donné généralement par

$$ds^2=l^2\left[\frac{1}{p^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2du^2+\frac{1}{q^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2dv^2\right],$$

d'où la condition d'isothermie

$$\frac{1}{p}\frac{\partial\omega}{\partial u}=\pm\frac{1}{q}\frac{\partial\omega}{\partial v}.$$

Pour interpréter le double signe, remarquons que l'on a

$$\frac{l}{p}\frac{\partial\omega}{\partial u}=\lambda A\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_1}\right),\qquad \frac{l}{q}\frac{\partial\omega}{\partial v}=\lambda B\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_2}\right).$$

Si la surface initiale est isothermique avec $A = B$, le signe $+$ donne $\lambda_1 = \lambda_2$. La droite MN passe par un point fixe avec lequel sont confondus ses deux points focaux. Les deux surfaces (M) et (N) sont inverses par rapport à ce point. Avec le signe —, nous avons

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}=\frac{2}{\lambda}.$$

Les points focaux de la droite MN sont conjugués harmoniques par rapport à M et N. Ces conclusions sont conformes au théorème de M. Cosserat. Le premier cas étant réservé pour la suite, nous examinerons d'abord la seconde hypothèse, qui correspond à

$$\frac{1}{p}\frac{\partial\omega}{\partial u}+\frac{1}{q}\frac{\partial\omega}{\partial v}=0.$$

Considérons chaque surface orthogonale aux cercles du système cyclique comme la seconde nappe de l'enveloppe d'une sphère de rayon l et de paramètre a, qui sera relative à la fonction

$$\theta = M^2 - N^2 + a.$$

Il lui correspondra, dans le système cyclique conjugué, une sphère de rayon l'. Nous poserons, pour les sphères harmoniques de paramètre nul,

$$l_0=\frac{2}{\rho_1+\rho_2}=\frac{2\,e^{\alpha}}{M+N},\qquad l'_0=\frac{2}{\rho'_1+\rho'_2}=\frac{2\,e^{-\alpha}}{M-N},$$

$$\theta_0 = M^2 - N^2,$$

$$\sigma = l_0\theta_0 = 2(M-N)\,e^{\alpha},\qquad \sigma' = l'\theta_0 = 2(M+N)\,e^{-\alpha}.$$

Pour la sphère de paramètre a,

$$l=\frac{2(M-N)\,e^{\alpha}}{M^2-N^2+a},\qquad l'=\frac{2(M+N)\,e^{-\alpha}}{M^2-N^2+a}.$$

On peut écrire

$$2\frac{e^{\alpha}}{l} = M + N + \frac{a}{M - N}, \qquad 2\frac{e^{-\alpha}}{l'} = M - N + \frac{a}{M + N}$$

ou encore

$$\frac{2}{l} = \frac{2}{l_0} + a\frac{l'_0}{2}, \qquad \frac{2}{l'} = \frac{2}{l_0} + a\frac{l_0}{2}.$$

On remarque que si l et l_1 sont deux valeurs de l qui correspondent à deux valeurs de a égales et de signes contraires, on a

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l_1} = \frac{2}{l_0}.$$

Donc *les centres de deux sphères de paramètres* $\pm a$, *tangentes en un même point* M *de la première surface isothermique, sont conjugués harmoniques par rapport à* M *et au centre* S *de la sphère harmonique. Les surfaces correspondantes déterminent sur chaque cercle du système cyclique un couple de points appartenant à l'involution dont les points doubles sont sur la sphère harmonique.*

37. Nous pouvons maintenant traduire directement la relation

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{2}{\lambda},$$

en nous reportant aux résultats du n° 28. On va constater qu'on est conduit ainsi à un caractère remarquable de la surface isothermique initiale.

Multiplions les deux membres par $-e^{\alpha}$, en remarquant que

$$-2\frac{e^{\alpha}}{\lambda} = -2\frac{e^{\alpha}}{l}\frac{l}{\lambda} = \left(M + N + \frac{a}{M - N}\right)\frac{p^2 + q^2 + 1}{2}.$$

Il vient

$$\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial v} + M(1 + p^2) + N(1 + q^2)$$
$$+ Pp + Qq - \left(M + N + \frac{a}{M - N}\right)\frac{p^2 + q^2 + 1}{2} = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u} + \mathrm{Q}p\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial v} + \mathrm{P}q\right)$$
$$- (\mathrm{M}q^2 + \mathrm{N}p^2) + \left(\mathrm{M} + \mathrm{N} + \frac{a}{\mathrm{M} - \mathrm{N}}\right)\frac{p^2 + q^2 + 1}{2} = 0,$$

$$e^{-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial u}(p\,e^{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial v}(q\,e^{\alpha})\right]$$
$$- (\mathrm{M}q^2 + \mathrm{N}p^2) + \left(\mathrm{M} + \mathrm{N} + \frac{a}{\mathrm{M} - \mathrm{N}}\right)\frac{p^2 + q^2 + 1}{2} = 0$$

Si l'on observe que

$$\frac{\mathrm{M}\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} - \mathrm{N}\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial u}}{\mathrm{M}(\mathrm{M} - \mathrm{N})} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} - \dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial u}}{\mathrm{M} - \mathrm{N}} + \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\log[(\mathrm{M} + \mathrm{N})\,e^{\alpha}],$$

on pourra écrire

$$p\,e^{\alpha} = \frac{2(\mathrm{M} - \mathrm{N})\,e^{\alpha}}{\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 + a}\;\frac{\mathrm{M}\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial u} - \mathrm{N}\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial u}}{\mathrm{M}(\mathrm{M} + \mathrm{N})} = l\frac{\partial}{\partial u}\log[(\mathrm{M} - \mathrm{N})\,e^{\alpha}],$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(p\,e^{\alpha}) = l\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log[(\mathrm{M} - \mathrm{N})\,e^{\alpha}] + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\,p\,e^{\alpha}$$
$$= l\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log[(\mathrm{M} - \mathrm{N})\,e^{\alpha}] + \frac{a - (\mathrm{M} - \mathrm{N})^2}{2(\mathrm{M} - \mathrm{N})}\,p^2 e^{\alpha}.$$

De même

$$\frac{\partial}{\partial v}(q\,e^{\alpha}) = l\frac{\partial^2}{\partial v^2}\log[(\mathrm{M} - \mathrm{N})\,e^{\alpha}] + \frac{a + (\mathrm{M} - \mathrm{N})^2}{2(\mathrm{M} - \mathrm{N})}\,q^2 e^{\alpha}.$$

La relation devient

$$\frac{2(\mathrm{M} - \mathrm{N})}{\mathrm{M}^2 - \mathrm{N}^2 + a}[\Delta\log(\mathrm{M} - \mathrm{N}) - \mathrm{MN}] + \frac{\mathrm{M}^2 - \mathrm{N}^2 - a}{2(\mathrm{M} - \mathrm{N})} = 0$$

ou enfin

(16) $$\Delta\log(\mathrm{M} - \mathrm{N}) + \frac{(\mathrm{M} - \mathrm{N})^4 - a^2}{4(\mathrm{M} - \mathrm{N})^2} = 0.$$

Pour la surface conjuguée, la condition serait

(16′) $$\Delta\log(\mathrm{M} + \mathrm{N}) + \frac{(\mathrm{M} + \mathrm{N})^4 - a^2}{4(\mathrm{M} + \mathrm{N})^2} = 0.$$

On constate que ces deux relations ne font intervenir que la représentation sphérique des deux surfaces isothermiques primitives. Elles s'interprètent très simplement, car chacune d'elles exprime que :

L'une des surfaces

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left(M \pm N + \frac{a}{M \pm N}\right)^2 du^2 + \frac{1}{4}\left(M \pm N - \frac{a}{M \pm N}\right)^2 dv^2$$

rapportée à ses lignes de courbure, a une courbure totale constante et égale à 1.

38. Les surfaces isothermiques douées du caractère que nous venons d'établir, donnent lieu à des ensembles qui ont de curieuses propriétés harmoniques.

D'abord, les fonctions M et N étant données et convenables par hypothèse, la relation (16), par exemple, ne peut être vérifiée que par une seule valeur de la constante a^2, mais alors elle l'est par deux valeurs de a égales et de signes contraires. Donc :

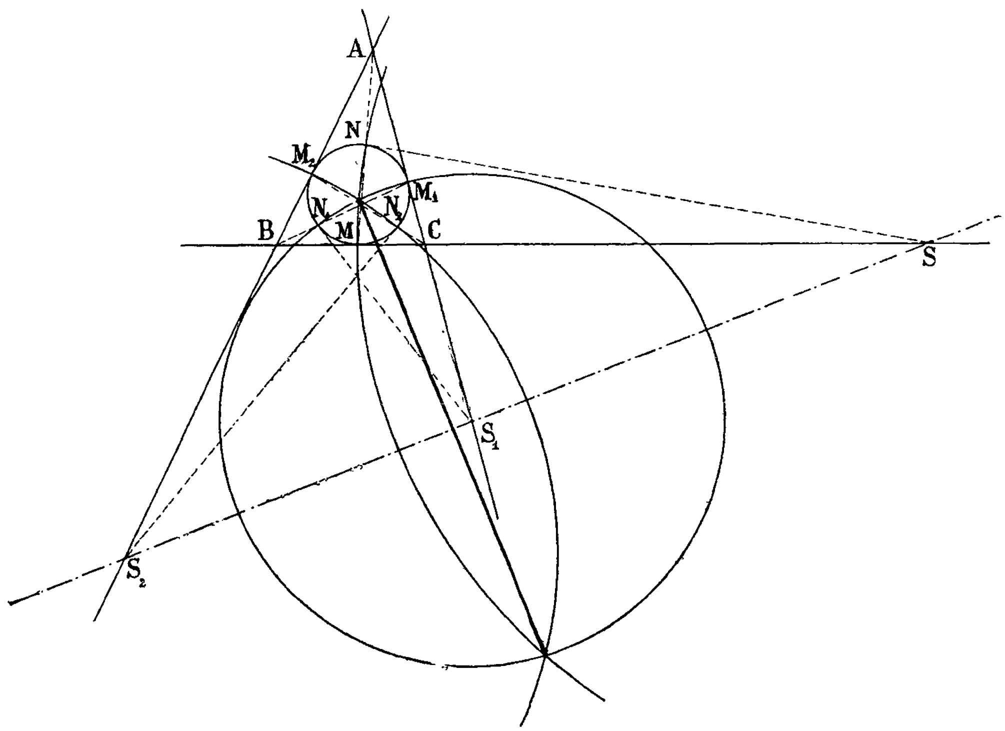
Si, parmi les surfaces normales aux cercles d'un système cyclique harmonique, il y a plus d'une surface isothermique, il y en a exactement trois.

La conclusion ne s'applique pas aux surfaces qui se correspondent par inversion. Ce cas a été réservé pour être étudié plus loin.

A remarquer que *les deux surfaces à courbure totale constante, qui se rattachent aux deux surfaces isothermiques de paramètres* $\pm a$, *sont applicables sur deux sphères qui représentent un couple applicable d'Ossian-Bonnet.*

L'ensemble des trois surfaces isothermiques de paramètres (o, a, $-a$) forme un groupe symétrique, qui peut être défini de trois manières à l'aide de sphères harmoniques. Considérons, sur un cercle de la congruence, les points M, M_1, M_2 qui proviennent de ces trois surfaces. D'après une remarque antérieure, les paramètres des deux dernières étant égaux et de signes contraires, la sphère harmonique ($\dot{S}$) de la première passera par le point N, conjugué harmonique de M par rapport à M_1 et M_2. Ce point N engendrera la seconde nappe de l'enveloppe de cette sphère (S). Prenons le conjugué N_1 de M_1 par rapport à M et M_2. D'après le

Fig. 2.



théorème de Ribaucour, le rapport anharmonique des quatre points étant constant, le point N_1 décrira une autre surface orthogonale aux mêmes cercles. Il en sera de même du conjugué N_2 de M_2 par rapport à M et M_1. Il s'agit de montrer que les sphères (S_1) et (S_2) orthogonales au cercle considéré, respectivement en M_1 et N_1, puis M_2 et N_2, sont les sphères harmoniques des surfaces isothermiques (M_1) et (M_2).

D'une manière générale, nous allons établir la proposition suivante :

Si les cercles (C) *d'une congruence sont normaux à trois surfaces* *isothermiques, les trois systèmes cycliques harmoniques de celles-ci coïncident avec celui qui est défini par les premiers cercles.*

Soient M, M_1, M_2 les points où un cercle (C) est rencontré par les trois surfaces isothermiques. Nous leur associerons les points N, N_1, N_2 définis comme précédemment, et nous aurons six points décrivant des surfaces orthogonales aux mêmes cercles. Considérons, par exemple, les surfaces (M) et (N) qui constitueront les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère (S) de rayon l_0. La surface (N) dérivera d'une fonction θ_0 avec un paramètre nul, et nous allons chercher le paramètre a de l'une des autres surfaces isothermiques, en reprenant les derniers calculs, mais avec une autre notation. Sans supposer aucun rapport entre l_0 et les rayons de courbure principaux de (M), on pourra définir la surface (a) comme enveloppe d'une sphère de rayon l, donnant toujours lieu à la relation

$$(p^2+q^2+1)\frac{e^\alpha}{l} = e^{-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial u}(p\,e^\alpha) + \frac{\partial}{\partial v}(q\,e^\alpha)\right] + \mathrm{M}(1+p^2)+\mathrm{N}(1+q^2).$$

Or, avec les notations du n° 28,

$$p\,e^\alpha = \frac{e^\alpha}{\mathrm{M}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{\mathrm{R}}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} = \frac{l}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial u} = l\frac{\partial\log\sigma}{\partial u},$$

$$\frac{\partial(p\,e^\alpha)}{\partial u} = l\frac{\partial^2\log\sigma}{\partial u^2} + p\,e^\alpha\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u} = l\frac{\partial^2\log\sigma}{\partial u^2} + p^2 e^\alpha\left(\frac{e^\alpha}{l} - \mathrm{M}\right),$$

$$\frac{\partial(q\,e^\alpha)}{\partial v} = l\frac{\partial^2\log\sigma}{\partial v^2} + q^2 e^\alpha\left(\frac{e^\alpha}{l} - \mathrm{N}\right).$$

L'équation prend ainsi la forme

$$\frac{e^{2\alpha}}{l^2} - (\mathrm{M}+\mathrm{N})\frac{e^\alpha}{l} - \Delta\log\sigma = 0$$

ou

$$\frac{e^{2\alpha}}{\sigma^2}(\theta_0+a)^2 - (\mathrm{M}+\mathrm{N})\frac{e^\alpha}{\sigma}(\theta_0+a) - \Delta\log\sigma = 0. \tag{17}$$

Elle est du deuxième degré en a, et par hypothèse elle doit bien être vérifiée par deux valeurs constantes de a qui sont les paramètres des surfaces (M_1) et (M_2). Mais comme les points M_1 et M_2 sont conjugués par rapport à M et N, les deux racines a sont égales et de signes contraires. Donc

$$2\frac{\theta_0}{\sigma}e^{\alpha}-(M+N)=0, \qquad \frac{2}{l_0}=\rho_1+\rho_2.$$

La sphère (S) est donc bien harmonique pour la surface (M), et l'on a des résultats analogues pour (M_1) et (M_2).

Remarquons sur la figure précédente que, d'après une propriété d'un cercle inscrit à un triangle, les trois sphères harmoniques (S_1), (S_2), (S_3), orthogonales au cercle (C), ont leurs centres en ligne droite et *ont un cercle commun*, c'est-à-dire *appartiennent à un même faisceau*. Ce cercle (C_1) a son plan orthogonal à celui du cercle (C), et l'intersection des deux plans est un diamètre commun, divisé harmoniquement par les deux cercles.

Enfin nous rapprocherons de nos six surfaces celles qui leur correspondent par rayons parallèles dans les trois systèmes cycliques conjugués. On a ainsi un ensemble de vingt-quatre surfaces, dont six isothermiques, admettant six représentations sphériques, qui déterminent, pour chaque système de valeurs de u et v, trois divisions harmoniques sur un grand cercle de la sphère, et même six comme on le constatera plus loin.

39. Il semble bien difficile de déterminer toutes les surfaces pourvues du caractère harmonique, que nous venons de signaler, et que nous appellerons, pour abréger, surfaces (H). Elles paraissent former une classe très étendue, comprenant comme variétés singulières les surfaces de M. Thybaut, qui dépendent de deux fonctions arbitraires, et les inverses des surfaces à courbure moyenne constante. Nous ajouterons un exemple particulier ne présentant pas les mêmes singularités.

On peut ramener le problème général à la recherche des solutions communes à certaines équations aux dérivées partielles du second ordre. Nous avons vu qu'à toute surface (H), on peut associer une surface à courbure totale constante. Inversement, cherchons si, d'une surface à courbure totale constante, on peut déduire une surface (H).

Soit θ une intégrale connue de l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+\operatorname{sh}\theta\operatorname{ch}\theta=0,$$

les variables ayant été choisies de manière que l'on ait $a=1$. Nous poserons, en désignant par θ' une autre fonction de u et de v,

$$M-N=e^{\theta},\qquad M+N=e^{\theta'},$$

d'où

$$M=\frac{e^{\theta'}+e^{\theta}}{2},\qquad N=\frac{e^{\theta'}-e^{\theta}}{2},$$

et nous chercherons à déterminer θ' de manière que l'élément linéaire

$$d\sigma^2=M^2\,du^2+N^2\,dv^2$$

convienne à une sphère de rayon 1, représentant la surface isothermique

$$ds^2=e^{2\alpha}(du^2+dv^2).$$

Pour cela, il faut que l'on puisse avoir

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial u},\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial v}=\frac{1}{N}\frac{\partial M}{\partial v},\qquad \frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2}+MN=0.$$

Introduisons la fonction auxiliaire $\omega=\theta+\theta'$. Les deux premières conditions deviennent

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\frac{e^{\theta'}\frac{\partial\theta'}{\partial u}-e^{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}}{e^{\theta'}+e^{\theta}}=\frac{e^{\omega-\theta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}-\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)-e^{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}}{e^{\omega-\theta}+e^{\theta}}=\frac{\frac{\partial\omega}{\partial u}}{1+e^{2\theta-\omega}}-\frac{\partial\theta}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\frac{e^{\theta'}\frac{\partial\theta'}{\partial v}+e^{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}}{e^{\theta'}-e^{\theta}}=\frac{e^{\omega-\theta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}-\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)+e^{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}}{e^{\omega-\theta}-e^{\theta}}=\frac{\frac{\partial\omega}{\partial v}}{1-e^{2\theta-\omega}}-\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Pour que ces formules soient intégrables, on doit pouvoir poser

$$(18)\qquad \frac{\partial\omega}{\partial u}+(1+e^{2\theta-\omega})\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0,\qquad \frac{\partial\omega}{\partial v}+(1-e^{2\theta-\omega})\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0,$$

et l'on aura α par la formule

$$\alpha=-(\varphi+\theta)$$

La fonction φ sera assujettie à la double condition de satisfaire à une condition d'intégrabilité, et de vérifier l'équation de courbure

$$(19)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}-\frac{e^{2(\omega-\theta)}-e^{2\theta}}{4}=0$$

ou, en tenant compte de l'équation initiale qui définit θ,

$$(20)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\frac{e^{-2\theta}-e^{2(\omega-\theta)}}{4}=0.$$

Les équations (18) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial(\omega+\varphi)}{\partial u}=-e^{2\theta-\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial u},\qquad \frac{\partial(\omega+\varphi)}{\partial v}=e^{2\theta-\omega}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial u}(e^{\omega+\varphi})=-e^{2\theta}\frac{\partial(e^{\varphi})}{\partial u},\qquad \frac{\partial}{\partial v}(e^{\omega+\varphi})=e^{2\theta}\frac{\partial(e^{\varphi})}{\partial v},$$

d'où la condition d'intégrabilité

$$(21)\qquad \frac{\partial^2(e^{\varphi})}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial(e^{\varphi})}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial(e^{\varphi})}{\partial v}=0.$$

A chaque intégrale de cette équation à invariants égaux correspond une fonction ω, déterminée à l'aide d'une quadrature. Mais il faut que les trois fonctions θ, φ, ω, ainsi obtenues, vérifient l'équation

$$(22)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\frac{e^{-2\theta}}{4}(1-e^{2\omega})=0.$$

L'élément linéaire de la surface (H) est alors donné par

$$ds^2=e^{-2(\varphi+\theta)}(du^2+dv^2).$$

40. Les calculs, dans le cas général, sont trop compliqués pour qu'on puisse les poursuivre sous cette forme. Bornons-nous à des résultats particuliers.

On a toujours la solution évidente $\varphi=\omega=0$, qui conduit à

$$\theta'=-\theta,\qquad M=\operatorname{ch}\theta,\qquad N=-\operatorname{sh}\theta.$$

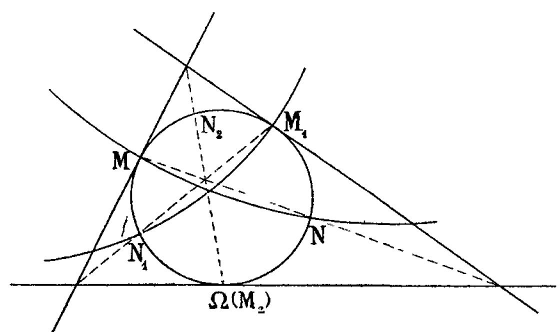
On tombe sur une surface à courbure moyenne constante

$$ds^2 = e^{-2\theta}(du^2 + dv^2).$$

Ces surfaces avaient été réservées dans les calculs antérieurs, à cause des valeurs constamment nulles de p et q. Nous éviterons l'objection en les transformant par inversion, ce qui mettra d'ailleurs plus de netteté dans la solution.

Les surfaces à courbure moyenne constante s'associent deux à deux, de manière que chacune d'elles soit le réseau harmonique de l'autre, et le milieu du segment limité par deux points correspondants décrit une surface à courbure totale constante. Dans une inversion quelconque, les normales communes se transforment en des cercles (C) passant par le pôle Ω, et les sphères harmoniques, qui conservent leur caractère, sont orthogonales à ces cercles en des points M et M_1 qui décrivent deux surfaces isothermiques, puis en d'autres points N et N_1 engendrant deux autres surfaces normales aux mêmes cercles. L'inverse de la surface à courbure totale constante est décrite par le point N_2 conjugué harmonique du pôle Ω par rapport à M et M_1, sur le cercle (C). En effet, sur la figure du cas général, M_2 et N_2 sont les deux points qui divisent

Fig. 3.



harmoniquement les deux arcs MM_1 et NN_1. Car si l'on considère, sur le cercle, l'involution qui a pour points doubles M_2 et N_2 et dont M et M_1 sont des points homologues, les droites MN et $M_1 N_1$, qui se coupent sur la droite des points doubles, déterminent un autre couple de points homologues N, N_1. L'inversion conservant les divisions harmoniques, si nous revenons au système des surfaces à courbure moyenne constante, que nous ferons correspondre au premier avec des accents, les surfaces (M'_2) et (N'_2) seront le plan de l'infini et la surface à courbure totale constante, qui seules peuvent réaliser les divisions harmoniques dont il s'agit. La première correspond à un point unique, qui est le pôle Ω, auquel se réduira l'une des trois surfaces isothermiques (M_2). Son associée (N_2) dérivera ainsi de la surface à courbure totale constante.

Réciproquement, toutes les fois que, dans l'un de nos systèmes de six surfaces, l'une des surfaces isothermiques se réduira à un point Ω, l'inversion par rapport à ce point pris comme pôle ramènera à un couple de surfaces à courbure moyenne constante, les cercles du système cyclique étant transformés en droites.

Cette première solution dépend de *deux fonctions arbitraires*. Il est à remarquer qu'en transformant une surface minima, on aurait cinq surfaces réduites à un point, et dérivant du plan de l'infini.

41. Examinons, en second lieu, le cas où la fonction θ ne dépendrait que de l'une des variables coordonnées, v par exemple, et serait déterminée par l'équation

$$\theta'' + \frac{e^{2\theta} - e^{-2\theta}}{4} = 0.$$

Nous aurons alors

$$\frac{\partial^2(e^\varphi)}{\partial u\, \partial v} + \theta' \frac{\partial(e^\varphi)}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial(e^\varphi)}{\partial u} = \mathrm{U}' e^{-\theta},$$
$$e^\varphi = (\mathrm{U} - \mathrm{V})\, e^{-\theta}, \qquad e^{\varphi+\theta} = \mathrm{U} - \mathrm{V},$$

et pour l'élément linéaire de la surface isothermique

$$ds^2 = \frac{1}{(\mathrm{U} - \mathrm{V})^2}(du^2 + dv^2).$$

Nous avons discuté cette forme d'une manière complète dans la première Partie, et nous avons conclu, avec Ossian Bonnet, que l'une des fonctions U, V était de nature déterminée, l'autre étant arbitraire. Or la formule de Codazzi

$$\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\,\frac{\partial\rho_2}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\log(\mathrm{M}-\mathrm{V})=\frac{\partial\theta}{\partial u}$$

montre que c'est ρ_2 qui ne dépendra pas de u. Nous prendrons donc

$$\mathrm{U}=p\,e^{u}+q\,e^{-u},$$

p et q étant des constantes quelconques, d'où, d'après des calculs antérieurs, (13),

$$\rho_2^2=4pq-(\mathrm{V}^2+\mathrm{V}'^2),$$
$$\rho_1\rho_2=(\mathrm{U}-\mathrm{V})(\mathrm{U}''-\mathrm{V}'')-(\mathrm{U}'^2+\mathrm{V}'^2)=\mathrm{V}\mathrm{V}''-\mathrm{V}'^2+4pq-\mathrm{U}(\mathrm{V}+\mathrm{V}'')$$

et par soustraction

$$\rho_2(\rho_1-\rho_2)=-(\mathrm{U}-\mathrm{V})(\mathrm{V}+\mathrm{V}''),$$
$$e^{\theta}=\mathrm{M}-\mathrm{V}=\frac{\rho_1-\rho_2}{\mathrm{U}-\mathrm{V}}=-\frac{\mathrm{V}+\mathrm{V}''}{\rho_1}=\frac{d\rho_1}{d\mathrm{V}}.$$

La fonction θ étant connue pour une surface de révolution à courbure totale constante, ou, si l'on veut, une sphère rapportée à des méridiens et des parallèles, on aura ainsi, pour déterminer la fonction V, une équation différentielle du second ordre. Cette fonction serait définie directement par une équation du quatrième ordre, que l'on forme immédiatement, mais qui ne présente aucun intérêt. Nous allons présenter le résultat d'une autre manière.

D'abord, si l'on se borne aux surfaces réelles, l'expression de ρ^2 indique que les constantes p et q auront le même signe. En disposant de l'origine de u, et en passant à une surface semblable, on pourra prendre $p=q=\frac{1}{2}$, d'où $\mathrm{U}=\mathrm{ch}\,u$. Alors

$$ds^2=\frac{du^2+dv^2}{(\mathrm{ch}\,u-\mathrm{V})^2},\qquad \rho_2^2=1-\mathrm{V}^2-\mathrm{V}'^2.$$

Nous allons vérifier que les surfaces d'Ossian Bonnet sont identiques aux transformées, par inversion, des cônes quelconques.

Prenons comme unité de longueur la distance du pôle, pris comme origine, au sommet du cône qui sera situé sur l'axe des x. Les coordonnées d'un point du cône seront

$$x=1+\lambda\alpha,\qquad y=\lambda\beta,\qquad z=\lambda\gamma,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs d'une génératrice. D'où, pour l'élément linéaire du cône,

$$ds_0^2 = d\lambda^2 + \lambda^2(d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2) = d\lambda^2 + \lambda^2\, dv^2.$$

v étant l'angle développable du cône. Avec une puissance égale à 2, nous aurons, pour l'élément linéaire de la surface inverse,

$$ds^2 = \frac{4(d\lambda^2 + \lambda^2\, dv^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{4(d\lambda^2 + \lambda^2\, dv^2)}{(\lambda^2 + 1 + 2\lambda\alpha)^2} = \frac{\dfrac{d\lambda^2}{\lambda^2} + dv^2}{\left[\dfrac{1}{2}\left(\lambda + \dfrac{1}{\lambda}\right) + \alpha\right]^2}.$$

Si l'on pose $\lambda = e^u$, d'où $\dfrac{d\lambda}{\lambda} = du$, il vient

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(\operatorname{ch} u + \alpha)^2}.$$

On retrouve les surfaces d'Ossian Bonnet en posant $\alpha = \mathrm{V}$, α n'étant fonction que de v.

On a en même temps l'interprétation géométrique de la fonction V. La surface a deux points coniques O et O', par lesquels passent tous les cercles (v), transformés des génératrices du cône. Le premier est au pôle, l'autre, inverse du sommet I du cône, est symétrique de O par rapport à ce point I. Les cercles faisant avec la droite OO' le même angle δ que les génératrices correspondantes du cône, nous aurons $\mathrm{V} = \cos\delta$.

La surface est complètement définie par le lieu décrit par le centre du cercle dans le plan perpendiculaire en I à OO'. D'abord le rayon vecteur issu de I est égal à $\cot\delta = \dfrac{\mathrm{V}}{\sqrt{1-\mathrm{V}^2}}\cdot$ Puis, si l'on revient au cône, l'angle polaire ω, qui est l'angle dont tourne le plan passant par OO' et une génératrice, pourra être défini par

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\gamma}{\beta}, \qquad \text{d'où} \qquad d\omega = \frac{\beta\, d\gamma - \gamma\, d\beta}{\beta^2 + \gamma^2},$$

$$\begin{aligned}(1-\alpha^2)^2\, d\omega^2 &= (\beta^2+\gamma^2)(d\beta^2 + d\gamma^2) - (\beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma)^2\\ &= (1-\alpha^2)(dv^2 - d\alpha^2) - \alpha^2\, d\alpha^2 = (1-\sigma^2)\, dv^2 - d\alpha^2,\end{aligned}$$

$$d\omega^2 = \frac{1 - \mathrm{V}^2 - \mathrm{V}'^2}{(1-\mathrm{V}^2)^2}\, dv^2, \qquad d\omega = \frac{\rho_2}{1-\mathrm{V}^2}\, dv.$$

Un calcul facile donne pour la différentielle de l'arc de la courbe

$$d\Sigma = \frac{dv}{1 - V^2} = \frac{d\omega}{\rho_2}.$$

La surface étant aussi une enveloppe de sphères passant par O et O′, on peut également définir cette surface en cherchant la déférente dans le même plan. On l'obtient directement, à l'aide de l'expression de ρ_1, qui est l'inverse du rayon de la sphère, et du rayon de courbure géodésique du cercle, qui est égal à $-\frac{1}{V}$. Mais la courbe en question se rattache aussi à la précédente, dont elle est l'antipodaire. Les divers éléments de ces deux courbes donnent lieu à plusieurs interprétations relatives aux fonctions V et θ.

Nous nous bornerons à celle qui suit. Comme l'inversion conserve le caractère du système cyclique, nous pouvons revenir au cône lui-même, identique à celui des tangentes aux cercles (v) en un point conique de la surface cerclée correspondante. Tout revient à déterminer la nature de ce cône, d'où résulte la loi de distribution des cercles. Considérons donc un cône (K)

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2),$$

pour lequel λ désigne le segment de génératrice compté à partir du sommet, dv l'angle de deux génératrices voisines. La représentation sphérique se réduisant à une courbe (S) tracée par le cône réciproque (K′) dont le sommet est au centre de la sphère, on a $M = 0$, et le caractère en question s'applique à la fonction $e^\theta = N$. Remarquons que dv est l'angle de contingence pour l'élément de la courbe (S) et que N est son rayon de courbure géodésique. L'égalité

$$e^\theta = \operatorname{ch}\theta + \operatorname{sh}\theta$$

conduit à la définition infinitésimale suivante de la courbe (S). La sphère de rayon égal à l'unité ayant son élément linéaire mis sous la forme

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2\theta\, du^2 + \operatorname{sh}^2\theta\, dv^2 \qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0\right)$$

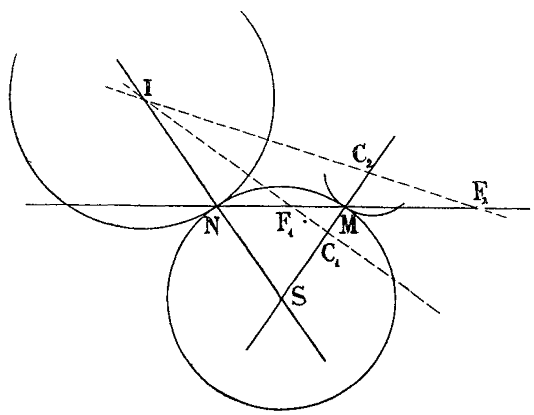
peut être divisée en rectangles infinitésimaux tels que la différence des carrés de deux côtés consécutifs soit constante. La somme des mêmes côtés, pour les rectangles situés entre deux cercles (u) infiniment voisins, donnera les éléments successifs d'une courbure (S), qu'il faudra assembler de manière que tous leurs angles de contingence soient égaux à $d\varphi$.

On observe que l'orientation du cône n'a aucune influence. Donc, de toute surface cerclée répondant à la question, on pourra déduire une infinité de surfaces analogues, dépendant de deux paramètres. On n'aura qu'à faire tourner autour de son sommet le cône des tangentes en un point conique.

42. Comme dernier exemple, nous rattacherons aux groupes de six surfaces celles qui ont été étudiées par M. Thybaut dans un intéressant Mémoire, paru dans les *Annales de l'Ecole Normale* en 1901.

La surface (N), associée à une surface isothermique (M) par l'intermédiaire de la sphère harmonique, n'est pas normalement isothermique. Car si le système cyclique harmonique conduit à plus d'une surface isothermique, on a un groupe de six surfaces, et (N) ne peut être isothermique qu'en venant se confondre avec

Fig. 4.



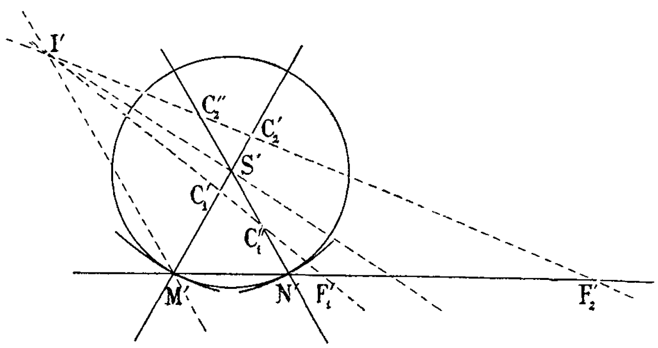
(M_1) et par suite (M_2). On n'a plus alors que deux surfaces isothermiques distinctes.

Nous allons démontrer que *si deux surfaces consécutives du groupe coïncident, elles se réduisent à une sphère.* Si la surface (N) se confond avec (M_1) et devient isothermique, comme avec (M) il y a correspondance des lignes de longueur nulle, et que nous réservons l'inversion, le segment MN est divisé harmoniquement par les points focaux F_1, F_2. Les centres de courbure principaux C_1 et C_2 de la surface (M) sont aussi conjugués harmoniques par rapport au point M et au centre S de la sphère harmonique tangente à (M) et (N). Les deux divisions ayant un point commun M, les droites $C_1 F_1$ et $C_2 F_2$ vont concourir en un point I avec la normale SN de la seconde surface. Comme ce sont les caractéristiques de l'enveloppe du plan des deux normales SM, SN quand on fait varier u ou v, la normale SN a ses deux points focaux confondus en I, et le point N décrit une sphère de centre I.

Ceci explique pourquoi il a fallu renoncer à chercher une transformation des surfaces isothermiques dans l'échange des deux nappes de l'enveloppe des sphères harmoniques.

43. Voici une autre propriété caractéristique des surfaces de M. Thybaut, et qui concerne les surfaces conjuguées de Chris-

Fig. 5.



toffel : *Le réseau harmonique* (S′) *de celles-ci est en même temps le réseau moyen pour la seconde nappe de l'enveloppe des sphères harmoniques.*

Comparons les figures qui concernent les deux surfaces conjuguées, et soit, sur la seconde, I' l'intersection des caractéristiques $I'\,C'_1$ et $I'\,C'_2$ de l'enveloppe du plan des deux normales $S'\,M'$ et $S'\,N'$, lesquelles sont parallèles à IC_1 et IC_2. Les deux divisions harmoniques $(MS,\ C_1\,C_2)(M'\,S',\ C'_1\,C'_2)$ sont semblables avec échange des deux premiers points; par suite, les faisceaux harmoniques de sommets I et I', déterminés par ces deux divisions, ont leurs rayons parallèles. En particulier, $I'\,M'$ est parallèle à IN et $S'\,N'$, et les centres de courbure principaux C'_1, C''_2 de la surface (N'), situés sur les deux caractéristiques, sont équidistants de S'.

A priori, la représentation sphérique des lignes de courbure de la surface (N') étant donnée par la sphère isothermique (N), le réseau moyen de cette surface (N') est conjugué, en vertu d'un théorème de M. Guichard. Nous venons de démontrer qu'il coïncide avec le réseau (S').

44. M. Thybaut, dans le Mémoire cité, remarque que l'on peut, par une inversion, transformer la sphère (N) en un plan. On obtient alors les surfaces isothermiques dont les sphères harmoniques sont tangentes à un plan fixe, sur lequel un système isotherme correspond aux lignes de courbure, avec représentation conforme. Nous mentionnerons quelques conséquences géométriques de cette inversion.

Lorsque la surface (N) dégénère en un plan, la surface conjuguée (N'), qui a ses normales parallèles aux siennes, dégénère aussi en un plan parallèle au premier. Il est visible qu'aucune condition n'est à imposer à l'un de ces plans pour que la surface dont la sphère harmonique touche ce plan soit une surface de M. Thybaut. Car les segments MN, $M'\,N'$ sont divisés harmoniquement par les points focaux de ces droites, et il y a représentation conforme de (M) à (N), comme de (M') à (N'). Donc, *quand* N *décrit un plan, les deux surfaces conjuguées* (M) *et* (M') *possèdent le même caractère.*

Nous allons établir une réciproque. Pour que la seconde nappe de l'enveloppe des sphères harmoniques, qui a pour paramètre

$a = 0$, soit isothermique dans les deux systèmes, nous aurons, en appliquant les formules (16) et (16′) du n° 37, les deux relations

$$\Delta \log(M - N) + \frac{(M - N)^2}{4} = 0, \qquad \Delta \log(M + N) + \frac{(M + N)^2}{4} = 0.$$

Elles expriment respectivement que les deux éléments linéaires

$$ds^2 = \frac{(M \pm N)^2}{4}(du^2 + dv^2)$$

conviennent à des sphères isothermiques de rayon égal à l'unité. Elles donnent par soustraction la combinaison

$$\Delta \log \frac{M - N}{M + N} = MN = -\Delta\alpha, \qquad \Delta \log\left(\frac{M - N}{M + N} e^{\alpha}\right) = 0,$$
$$\Delta\beta = 0,$$

que nous interpréterons. Mais cherchons, plus généralement, dans quels cas les deux surfaces de même paramètre a sont isothermiques dans les deux systèmes cycliques conjugués, ce qui s'exprime (n° 36) par

$$\frac{1}{p}\frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{1}{q}\frac{\partial\omega}{\partial v} = 0, \qquad \frac{1}{p}\frac{\partial\omega'}{\partial u} - \frac{1}{q}\frac{\partial\omega'}{\partial v} = 0.$$

Nous pourrons poser

$$p = -h\frac{\partial\omega}{\partial u} = h'\frac{\partial\omega'}{\partial u}, \qquad q = h\frac{\partial\omega}{\partial v} = h'\frac{\partial\omega'}{\partial v},$$

h et h' étant deux fonctions de u et de v. Pour les calculer, nous avons les combinaisons

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial\omega}{\partial u} - \frac{\partial\omega'}{\partial u}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\lambda'}\frac{\partial\lambda'}{\partial u} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{l'}\frac{\partial l'}{\partial u} - \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\right),$$
$$\frac{1}{h} - \frac{1}{h'} = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial\omega}{\partial v} - \frac{\partial\omega'}{\partial v}\right) = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \frac{1}{\lambda'}\frac{\partial\lambda'}{\partial v}\right) = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial v} - \frac{1}{l'}\frac{\partial l'}{\partial v}\right),$$

qui deviennent

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} = -N\frac{M^2 - N^2 + a}{M^2 - N^2}, \qquad \frac{1}{h} - \frac{1}{h'} = M\frac{M^2 - N^2 + a}{M^2 - N^2},$$

d'où

$$\frac{1}{h} = \frac{M^2 - N^2 + a}{2(M+N)} = \frac{e^{-\alpha}}{l'}, \qquad \frac{1}{h'} = -\frac{M^2 - N^2 + a}{2(M-N)} = -\frac{e^{\alpha}}{l}.$$

On en déduit les éléments linéaires des deux surfaces isothermiques conjuguées de paramètre a :

$$ds^2 = \frac{l^2}{l'^2} e^{-2\alpha}(du^2 + dv^2) = \frac{(M-N)^2}{(M+N)^2} e^{2\alpha}(du^2+dv^2) = e^{2\beta}(du^2+dv^2),$$

$$ds'^2 = \frac{l'^2}{l^2} e^{2\alpha}(du^2+dv^2) = \frac{(M+N)^2}{(M-N)^2} e^{-2\alpha}(du^2+dv^2) = e^{-2\beta}(du^2+dv^2).$$

Si l'on suppose que $a = 0$, l'équation $AB = 0$ indique que la courbure de ces deux surfaces est nulle, et qu'elles se réduisent à deux plans.

Mais il est facile de voir qu'il n'y a pas d'autre hypothèse possible. En effet, le résultat ne contient pas trace du paramètre a. Rien ne sera donc changé si l'on passe aux deux surfaces de paramètre $-a$, qui, *a priori*, jouissent des mêmes propriétés. On conçoit donc qu'elles doivent coïncider avec les précédentes, et que l'on a nécessairement $a = 0$. On a donc affaire à des surfaces de M. Thybaut.

On peut le voir encore autrement. Dans les formules

$$\lambda e^{\alpha}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1}\right) = \frac{l}{p}\frac{\partial\omega}{\partial u}, \qquad \lambda e^{\alpha}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{l}{q}\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

nous aurons à faire

$$-\frac{1}{p}\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{1}{q}\frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{e^{-\alpha}}{l'},$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_1} &= \frac{l}{\lambda} e^{-\alpha}\left(\frac{e^{\alpha}}{l} + \frac{e^{-\alpha}}{l'}\right)\\ &= -\frac{p^2+q^2+1}{4}\left[\left(M + N + \frac{a}{M-N}\right) + \left(M - N + \frac{a}{M+N}\right)\right] e^{-\alpha}\\ &= -\frac{p^2+q^2+1}{2} M e^{-\alpha}\left(1 + \frac{a}{M^2-N^2}\right).\end{aligned}$$

De même

$$\frac{1}{\lambda_2} = -\frac{p^2+q^2+1}{2} N e^{-\alpha}\left(1 + \frac{a}{M^2-N^2}\right).$$

Donc enfin

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{N}{M} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Ceci indique que les deux caractéristiques principales de l'enveloppe du plan du cercle sont parallèles, et ont par conséquent une direction invariable. Le centre du cercle décrit un plan perpendiculaire, qui est l'une des surfaces du système, et en même temps un plan de symétrie pour ces surfaces. Comme le nombre des surfaces isothermiques est impair, il faut que deux d'entre elles soient confondues avec le plan. On est donc bien dans le cas d'une surface double.

Seconde classe de surfaces isothermiques.

45. En appliquant la seconde conclusion du théorème de M. Cosserat, nous allons maintenant examiner les couples de surfaces isothermiques qui constituent les deux nappes d'une enveloppe de sphères harmoniques, de telle sorte que la corde des contacts aille passer par un point fixe O. La sphère est alors orthogonale à une sphère fixe de centre O, et les deux nappes, inverses par rapport à ce point, possèdent les mêmes sphères harmoniques.

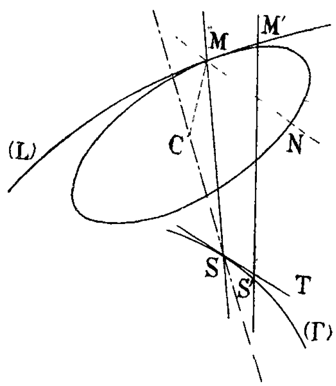
Nous allons montrer que le problème est complètement résolu à l'aide d'une classe de surfaces que M. Darboux déduit des surfaces à courbure totale constante. Mais, pour cela, nous aurons à faire un changement de variables coordonnées basé sur la considération des *lignes équilatères*.

Nous avons ainsi appelé deux familles de lignes orthogonales tracées sur une surface, et dont les tangentes sont les bissectrices de celles des lignes de courbure. Ce sont les tangentes à l'intersection de la surface et de la sphère harmonique correspondante, et l'on peut définir cette sphère par la double condition d'être tangente à la surface, puis de contenir le cercle osculateur de l'une des lignes équilatères, et par suite de l'autre.

Elle est aussi déterminée par ces deux cercles, qui auront ainsi toujours un second point commun.

46. Considérons les sphères relatives à deux points voisins M, M′ d'une ligne équilatère (L). Les centres S, S′ sont situés sur la surface polaire de la courbe, puisque chacun d'eux se trouve sur l'axe du cercle osculateur correspondant. Les éléments MM′, SS′ sont donc rectangulaires, et l'on pourra mener par le premier

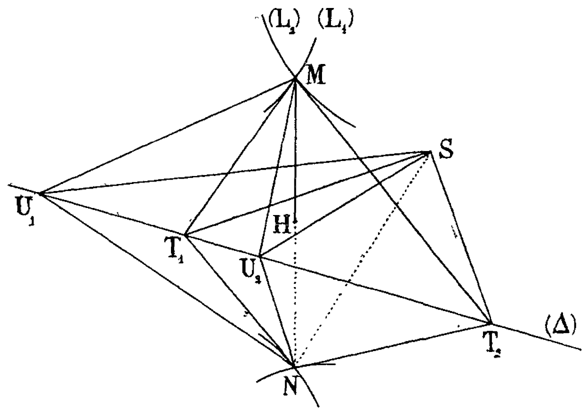
Fig. 6.



un plan perpendiculaire à l'autre; ce sera le plan radical des deux sphères. La position limite de l'intersection de ces deux sphères est donc un cercle (C) tangent en M à (L), et dont le plan (P) est perpendiculaire à la tangente ST à la courbe (Γ) décrite par le centre de la sphère. Ce cercle contient aussi le second point N où la sphère touche son enveloppe. Celle du plan (P), quand M décrit la ligne (L), est la surface développable engendrée par la perpendiculaire abaissée de M sur le plan osculateur de (Γ). Le second point où cette droite rencontre le cercle (C) est, en général, distinct de N; mais s'il arrive que les deux points coïncident, la droite MN, perpendiculaire au plan tangent à la surface des centres, l'est en même temps au plan osculateur de (L). Donc : *A la famille des lignes* (L) *de même système correspond sur la surface harmonique une famille de lignes asymptotiques.*

Lorsque les deux familles de lignes (Γ) correspondant aux deux familles de lignes équilatères d'une surface (M) sont formées de lignes asymptotiques, cette surface (M) est isothermique. D'abord les lignes équilatères se correspondent en M et N sur les deux nappes de l'enveloppe des sphères. Leurs tangentes se coupent en T_1 et T_2 sur l'intersection (Δ) des deux plans tangents. Leurs bissectrices, qui sont les tangentes aux lignes de courbure, s'y rencontrent également en U_1 et U_2. La correspondance des lignes de courbure sur les nappes montre que les lignes tracées par les

Fig. 7.



développables normales sur la surface harmonique sont conjuguées. C'est le caractère des surfaces isothermiques.

On vérifie d'ailleurs cette propriété sur la figure. Le trièdre M (ST_1T_2) étant trirectangle, les droites ST_2, ST_1, respectivement perpendiculaires à MT_1 et MT_2, sont les tangentes asymptotiques de la surface des centres, et forment un faisceau harmonique avec SU_1 et SU_2; ces deux dernières droites sont donc des tangentes conjuguées.

Les deux surfaces isothermiques (M) et (N) ont les mêmes sphères harmoniques, car elles sont inverses par rapport au point fixe O avec lequel sont confondus les deux points focaux de MN, et cette inversion échange en elles-mêmes les sphères harmoniques, orthogonales à la sphère d'inversion.

La réciproque est évidente.

47. M. Thybaut a démontré, d'une manière générale, que si les sphères harmoniques d'une surface coupent une sphère fixe sous

un angle constant, cette surface est isothermique. Lorsque l'angle est droit, comme dans le cas de l'article précédent où il est nul, on peut encore transformer la sphère fixe en un plan, par une inversion qui n'altère pas le caractère dont il s'agit. Le réseau harmonique devient alors plan, et les deux nappes de l'enveloppe des sphères deviennent deux surfaces isothermiques symétriques par rapport à ce plan. Mais la simplification apparente que l'on obtient nous ferait perdre tout le bénéfice des propriétés de la sphère que nous allons utiliser. Au lieu de chercher l'une des nappes de l'enveloppe, nous allons chercher la déférente, d'où les deux nappes se déduiront immédiatement.

Tout d'abord, nous pouvons définir cette déférente par une équation aux dérivées partielles du second ordre. Prenons le pôle d'inversion comme origine, et soit K la puissance d'inversion qui permet d'échanger les deux nappes. La sphère de centre S (x, y, z) orthogonale à la sphère d'inversion a pour équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2xX - 2yY - 2zZ + K = 0.$$

Le point S décrivant la déférente cherchée, et z étant considéré comme une fonction de x et de y ayant pour dérivées p, q, r, s, t, les cosinus directeurs α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 des tangentes asymptotiques seront solutions du système

$$p\alpha + q\beta - \gamma = 0, \qquad r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0.$$

Il suffit d'exprimer que les plans perpendiculaires à ces tangentes menés par l'origine

$$\alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z = 0, \qquad \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z = 0$$

sont conjugués par rapport à la sphère (S), de manière à la couper suivant deux cercles orthogonaux. Nous aurons là la propriété angulaire caractérisant la sphère harmonique de l'enveloppe. La condition se traduit par

$$\begin{aligned}&(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z)\\ &\quad - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)(x^2 + y^2 + z^2 - K) = 0\end{aligned}$$

ou

$$[x + pz + m_1(y + qz)][x + pz + m_2(y + qz)]$$
$$- [1 + m_1 m_2 + (p + m_1 q)(p + m_2 q)](x^2 + y^2 + z^2 - \mathrm{K}) = 0$$

avec

$$m_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \qquad m_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \qquad \text{d'où} \qquad m_1 + m_2 = -\frac{2s}{t}, \qquad m_1 m_2 = \frac{r}{t}.$$

On a finalement

$$(23) \qquad t(x + pz)^2 - 2s(x + pz)(y + qz) + r(y + qz)^2$$
$$- [t(1 + p^2) - 2pqs + r(1 + q^2)](x^2 + y^2 + z^2 - \mathrm{K}) = 0.$$

Telle est l'équation du deuxième ordre dont l'intégration donnerait la solution complète du problème. Nous allons commencer par examiner quelques résultats particuliers.

48. La forme de l'équation obtenue suggère d'abord l'idée de chercher parmi les solutions celles qui donnent des surfaces minima. Elles doivent convenir à la fois aux deux équations

$$t(x + pz)^2 - 2s(x + pz)(y + qz) + r(y + qz)^2 = 0,$$
$$t(1 + p^2) - 2pqs + r(1 + q^3) = 0.$$

Le problème peut recevoir un énoncé géométrique. Pour que deux plans rectangulaires, comme ceux qui sont perpendiculaires aux tangentes asymptotiques d'une déférente minima, soient conjugués par rapport à une sphère, il faut et il suffit que l'un d'eux passe par le centre de cette sphère. Il contient alors l'une des tangentes asymptotiques, et l'autre ligne asymptotique, qui lui est normale, étant une trajectoire orthogonale de plans passant par un point fixe O, est tracée sur une sphère dont ce point est le centre.

Il faut donc chercher une surface minima, ayant une famille de lignes asymptotiques tracées sur des sphères concentriques.

49. Nous allons déterminer toutes les surfaces réglées définies par l'équation (23). Elles présentent une particularité intéressante. Car si le point S décrit une droite, la sphère (S) passe par un cercle fixe orthogonal à la sphère d'inversion. *On obtient ainsi des surfaces*

isothermiques anallagmatiques engendrées par des cercles qui ne sont pas des lignes de courbure.

Nous n'avons à considérer que les surfaces *gauches*, pour lesquelles les deux familles d'asymptotiques sont distinctes. Si nous appliquons directement la définition de la déférente pour le point à l'infini, sur une génératrice rectiligne, nous voyons immédiatement que le plan central doit toujours passer par le pôle O. Si nous prenons la projection de O sur la génératrice, nous voyons de même qu'en ce point la ligne asymptotique non rectiligne est normale à la droite, et qu'ainsi la surface est un *conoïde droit*, dont la directrice rectiligne passe par O. Prenons-la comme axe des x; l'équation du conoïde sera de la forme

$$z = y\,f(x),$$

d'où

$$p = yf'(x), \qquad q = f(x), \qquad r = yf''(x), \qquad s = f'(x), \qquad t = 0.$$

La substitution conduit à l'équation

$$\frac{f''}{f'} - \frac{2f'f''}{1+f^2} + \frac{2x}{x^2+K} = 0$$

qui, suivant que l'on pose $K = \pm a^2$, s'intègre sous l'une ou l'autre des formes

$$f(x) = \operatorname{tang}\left(m \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}\right), \qquad f(x) = \operatorname{tang}\left(m \operatorname{arg\,th}\frac{x}{a}\right).$$

On sait que les lignes asymptotiques du conoïde $z = y\,f(x)$ sont déterminées par l'équation

$$y^2 f'(x) = \lambda,$$

λ désignant un paramètre. On pourra donc, sans nouvelle intégration, rapporter la surface isothermique à ses lignes équilatères, qui forment un système isotherme. Si u' et v' sont leurs paramètres, ceux des lignes de courbure seront $u = u' + v'$ et $v = u' - v'$.

Par exemple, pour $m = 1$, la première forme donne le paraboloïde $xy = az$. Nous avons à chercher l'enveloppe de la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2xX - 2yY - 2\frac{xy}{a}Z - a^2 = 0.$$

en adjoignant les équations dérivées

$$aX + yZ = 0, \qquad aY + xZ = 0.$$

L'élimination de x et y donne

$$Z(X^2 + Y^2 + Z^2 - a^2) + 2aXY = 0.$$

On obtient pour l'ensemble des deux nappes isothermiques une *cyclide du troisième degré.*

Les paramètres des génératrices rectilignes du paraboloïde étant x et y, rapportons la cyclide à ces deux variables.

Nous avons

$$X = -\frac{y}{a}Z, \qquad Y = -\frac{x}{a}Z,$$

Z étant défini par

$$(x^2 + y^2 + a^2)Z^2 + 2axyZ - a^4 = 0.$$

La différentiation de ces formules conduit à

$$ds^2 = \frac{Z^2}{a^2}\left(\frac{y^2 + a^2}{x^2 + a^2}dx^2 + \frac{x^2 + a^2}{y^2 + a^2}dy^2\right).$$

Si l'on pose $x = a \operatorname{tang} u'$, $y = a \operatorname{tang} v'$, on obtient

$$ds^2 = \frac{Z^2}{\cos^2 u' \cos^2 v'}(du'^2 + dv'^2)$$

avec

$$Z = a\frac{\pm 1 - \sin u' \sin v'}{\cos u' \cos v'}.$$

Enfin, par rapport aux lignes de courbure

$$ds^2 = a^2\frac{[1 \pm \sin(u + v)\sin(u - v)]^2}{2\cos^4(u + v)\cos^4(u - v)}(du^2 + dv^2).$$

Les deux signes correspondent aux deux nappes inverses.

Les conoïdes de la première catégorie qui correspondent aux diverses valeurs du paramètre m ont entre eux une relation géométrique très simple. On peut poser

$$x = a \operatorname{tang} \varphi', \qquad y = \rho \cos m\varphi', \qquad z = \rho \sin m\varphi'.$$

Si l'on part de l'une de ces surfaces, par exemple du paraboloïde qui provient de $m = 1$, toutes les autres s'en déduiront en altérant dans un rapport constant les azimuts relatifs à un plan passant par la directrice rectiligne Ox.

Pour avoir les lignes asymptotiques non rectilignes, on remarquera qu'avec la dernière notation

$$f(x) = \operatorname{tang} m\varphi', \qquad f'(x) = \frac{\dfrac{df}{d\varphi'}}{\dfrac{dx}{d\varphi'}} = \frac{m}{a}\,\frac{\cos^2\varphi'}{\cos^2 m\varphi'}.$$

Nous obtiendrons donc l'équation

$$\rho \cos \varphi' = \lambda,$$

λ étant une constante arbitraire. Chaque ligne est donc définie par les équations

$$x = a \operatorname{tang} \varphi', \qquad y = \lambda \frac{\cos m\varphi'}{\cos \varphi'}, \qquad z = \lambda \frac{\sin m\varphi'}{\cos \varphi'}.$$

Elle peut se déduire d'une génératrice du paraboloïde initial rencontrant Ox, par la transformation des azimuts indiquée.

On aperçoit la combinaison

$$a^2(y^2 + z^2) - \lambda^2(x^2 + a^2) = 0,$$

en vertu de laquelle toutes les courbes obtenues sont tracées sur des hyperboloïdes indépendants de m. *A priori*, toutes les déformées d'une même génératrice du paraboloïde sont situées sur l'hyperboloïde qu'elle engendre en tournant autour de Ox.

Toutes ces lignes asymptotiques sont algébriques si m est rationnel. Il en est de même des lignes équilatères des deux nappes isothermiques.

50. Revenons au cas général. M. Thybaut avait montré, par

d'autres considérations, que les cercles du système cyclique harmonique sont orthogonaux à quatre surfaces isothermiques, deux à deux inverses. On va voir comment se présente leur association, par l'intermédiaire des déférentes et de leurs positions relatives remarquables.

Soit S un point de la déférente. Si nous transformons par polaires réciproques, relativement à la sphère d'inversion (O), le plan polaire (Π) du point S sera le plan radical de la sphère (S) et de la précédente, puisqu'elles sont orthogonales. Les tangentes asymptotiques Δ, Δ_1 en S ont pour conjuguées, par rapport à la sphère (O), les tangentes asymptotiques Δ', Δ'_1 de la transformée, au point S'. Ces dernières sont les intersections du plan (Π) et des plans menés par O perpendiculairement à Δ et Δ_1. Comme ces plans sont, par hypothèse, conjugués par rapport à la sphère (S) et menés par le point O, pôle du plan (Π), les droites Δ', Δ'_1 seront conjuguées par rapport au cercle (K) déterminé par le plan (Π) dans la sphère (S).

On peut donc chercher la surface (S') au moyen de cette propriété de ses tangentes asymptotiques, équivalente à celle de la déférente (S). Soient α'_1, β'_1, γ'_1 et α'_2, β'_2, γ'_2 les cosinus directeurs des deux droites, x', y', z' les coordonnées de S'. Celles d'un point d'une tangente menée de S' au cercle (K) seront de la forme

$$x'+\lambda(\alpha'_1+\mu\alpha'_2),\qquad y'+\lambda(\beta'_1+\mu\beta'_2),\qquad z'+\lambda(\gamma'_1+\mu\gamma'_2).$$

L'équation aux λ des points de rencontre avec la sphère (O)

$$\Sigma[x'+\lambda(\alpha'_1+\mu\alpha'_2)]^2+K=0$$

ou

$$\lambda^2\Sigma(\alpha'_1+\mu\alpha'_2)^2+2\lambda\Sigma x'(\alpha'_1+\mu\alpha'_2)+x'^2+y'^2+z'^2+K=0$$

aura une racine double si

$$(x'^2+y'^2+z'^2+K)\Sigma(\alpha'_1+\mu\alpha'_2)^2-[\Sigma x'(\alpha'_1+\mu\alpha'_2)]^2=0.$$

Les deux valeurs de μ correspondant aux deux tangentes devront être égales et de signes contraires; nous obtenons donc la condition

$$\begin{aligned}(x'^2+y'^2+z'^2+K)(\alpha'_1\alpha'_2+\beta'_1\beta'_2+\gamma'_1\gamma'_2)&\\ -(\alpha'_1x'+\beta'_1y'+\gamma'_1z')(\alpha'_2x'+\beta'_2y'+\gamma'_2z')&=0.\end{aligned}$$

On constate que c'est le même caractère que pour la première surface. Donc :

Si les sphères harmoniques d'une surface isothermique sont orthogonales à une sphère fixe, la polaire réciproque de la déférente par rapport à cette sphère est la déférente d'une seconde enveloppe de sphères harmoniques orthogonales à la même sphère fixe.

Dans le nouveau système, les deux points inverses des deux nappes isothermiques sont les centres des sphères de rayon nul qui passent par le cercle (K). On en conclut que *les lignes équilatères des deux nappes ont pour perspectives les lignes asymptotiques de la première déférente* (S), *le point de vue étant placé en* O.

De plus, *les deux sphères harmoniques* (S) *et* (S') *sont orthogonales*, puisque leurs centres sont deux points conjugués par rapport à la sphère (O).

La trace Ω de l'axe radical des trois sphères sur le plan des centres est un point qui a même puissance par rapport à ces sphères; c'est le centre d'un cercle situé dans ce plan, et qui est orthogonal aux quatre nappes isothermiques. On vérifie qu'*elles dérivent d'un même système cyclique*, dont les cercles sont situés dans des plans passant par le point fixe O.

51. Il nous reste à développer un nouveau changement de variables, consécutif au premier, et qui nous permettra de déduire toutes les surfaces que nous avons en vue, d'une classe que l'on trouvera étudiée en détail dans les Leçons de M. Darboux (t. III, Chap. XIV), sous la dénomination de *surfaces* (M).

Le caractère de la déférente, c'est qu'elle admet en chaque point deux tangentes conjuguées qui touchent une sphère fixe. Les enveloppes de ces droites constituent un système conjugué dont les tangentes s'appuient sur la sphère. M. Darboux appelle généralement *surfaces* (M) celles qui jouissent de cette propriété relativement à une quadrique quelconque. On est d'ailleurs ramené au cas de la sphère par une transformation homographique convenable. Nous allons résumer rapidement les résultats dont tous les développements sont exposés dans le Chapitre indiqué.

Soit

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$$

l'équation de la quadrique rapportée à un tétraèdre conjugué. Si l'on mutiplie les quatre coordonnées par un même facteur tel que l'on ait

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1,$$

les lignes dont les tangentes touchent cette quadrique seront définies par l'équation différentielle

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2 = 0.$$

Les paramètres des deux familles obtenues étant α et β, il faut que x, y, z, t soient solutions d'une même équation du second ordre relative à ces deux variables. On trouve qu'elle doit avoir ses invariants égaux, et prendre la forme réduite

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = C\theta.$$

Toute la question revient donc à trouver quatre fonctions de α et β, dont la somme des carrés soit égale à l'unité, et qui vérifient une même équation de la forme précédente.

La solution de M. Darboux est basée sur ce fait, que la première condition exige la vérification par x, y, z, t d'une autre équation du second ordre. Elle ne sera compatible avec la première que si l'on a

$$\frac{\partial^2 \log C}{\partial\alpha\,\partial\beta} = C - \frac{1}{C}.$$

Les solutions communes dépendant alors de paramètres, on les choisira dans les expressions de x, y, z, t de manière à avoir

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

Chaque surface (M) se rattache ainsi à une surface à courbure totale constante. L'échange de C et $\frac{1}{C}$ correspond à la transformation par polaires réciproques dont il a été question plus haut.

On trouvera encore, dans le même Chapitre, tous les détails géométriques, du plus haut intérêt, qui concernent les relations géométriques entre la surface (M) relative à une sphère (O), et l'enveloppe des sphères orthogonales à celle-ci dont les centres décrivent la surface (M). A chaque propriété de la première, dans la Géométrie de M. Cayley, correspond pour la seconde la même propriété dans la Géométrie euclidienne. En particulier, aux lignes conjuguées de (M) dont les tangentes s'appuient sur la sphère (O) correspondent les lignes de longueur nulle de l'enveloppe. Cette seule remarque aurait pu conduire à la solution du problème de la détermination de nos surfaces isothermiques. Car les tangentes aux lignes conjuguées de la surface (M) formant un faisceau harmonique avec les tangentes asymptotiques, les lignes correspondantes de l'enveloppe sont conjuguées par rapport aux lignes de longueur nulle, et forment un système orthogonal. C'est le caractère des lignes équilatères, et les sphères enveloppées sont harmoniques.

En résumé, nous n'avons plus à reprendre une étude déjà faite d'une manière aussi complète qu'élégante. Mais il restait à signaler ce fait important qu'on aboutit à des surfaces isothermiques.

Surfaces isothermiques généralisées.

52. Terminons par une interprétation géométrique de la généralisation des surfaces isothermiques mentionnée au n° 21 de la première Partie.

Prenons sur deux surfaces conjuguées de Christoffel deux points correspondants variables M (x, y, z) et M' (x', y', z') dont les plans tangents seront parallèles. Nous aurons respectivement, pour ces deux surfaces,

$$ds^2 = e^{2\alpha}(du^2 + dv^2), \qquad ds'^2 = e^{-2\alpha}(du^2 + dv^2),$$

et, d'après les conventions faites au n° 30,

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = e^{-2\alpha}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial v} = -e^{-2\alpha}\frac{\partial x}{\partial v},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Soit alors M″ (X, Y, Z) le point qui partage MM′ dans un rapport constant donné. Ses coordonnées sont de la forme

$$X = mx + nx', \qquad Y = my + n'y', \qquad Z = mz + nz',$$

m et n désignant deux constantes dont la somme est égale à 1. Calculons l'élément linéaire de la surface décrite par ce point:

$$\Sigma\, dX^2 = m^2 \Sigma\, dx^2 + n^2 \Sigma\, dx'^2 + 2mn \Sigma\, dx\, dx',$$

$$\Sigma\, dx\, dx' = e^{-2\alpha} \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du - \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) = du^2 - dv^2,$$

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = (m\, e^{\alpha} + n\, e^{-\alpha})^2\, du^2 + (m\, e^{\alpha} - n\, e^{-\alpha})^2\, dv^2.$$

On obtient ainsi toutes les surfaces en question, car, en passant à des surfaces semblables, on peut supprimer la restriction $m + n = 1$.

En particulier, si M″ est le milieu de MM′, on a, avec $m = n = \frac{1}{2}$,

$$dS^2 = \mathrm{ch}^2 \alpha\, du^2 + \mathrm{sh}^2 \alpha\, dv^2.$$

Mais on a vu que cette forme convient à toutes es lautres surfaces de la famille, excepté pour les deux surfacesiso thermiques qui dégénèrent, et donnent les deux seules singularités.

Une seule des surfaces (M″) permet de reconstituer tout l'ensemble précédent, aussi bien qu'avec l'une des surfaces isothermiques, puisqu'elle donne la fonction α, à une constante près, qui correspond à un rapport de similitude. Celui-ci prenant deux valeurs inverses pour les deux surfaces isothermiques, une surface (M″) donnée à l'avance pourra toujours devenir le lieu du milieu de MM′.

Toutes les surfaces (M″) ont leurs plans tangents parallèles à ceux de (M) et (M′), et leurs centres de courbure sont répartis sur deux droites, qui sont les caractéristiques principales de l'enveloppe du plan des normales.

Enfin, aux deux systèmes cycliques définis par les sphères harmoniques des deux surfaces isothermiques correspond un système cyclique pour chaque surface (M″), et les surfaces de même paramètre, dans tous ces systèmes, auront toujours leurs plans tangents parallèles. On les obtient d'ailleurs en prenant les surfaces de même paramètre (N), (N′) qui se rattachent aux deux surfaces (M) et (M′), et en prenant la surface (N″) lieu du point N″ qui partage NN′ dans le rapport constant correspondant à la surface (M″) choisie.

On voit donc que le théorème de Christoffel ne signale qu'un fait très isolé, et se rattache à des résultats beaucoup plus importants.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE AUX SYSTÈMES CYCLIQUES.

53. M. Guichard a établi une classification des réseaux conjugués, relativement aux systèmes cycliques que l'on en peut déduire, en faisant de ces réseaux des déférentes d'enveloppes de sphères dont les lignes de courbure correspondent aux lignes conjuguées. Il a montré que le problème n'est pas possible en général, et que s'il l'est, il y a une solution unique (réseaux O), ou deux solutions (réseaux 2O), ou une infinité dépendant d'un paramètre.

Les conclusions étant de même nature que pour la déformation d'un réseau orthogonal que l'on veut transformer en lignes de courbure, il semble assez naturel qu'il existe des rapprochements possibles entre les deux problèmes. C'est ce que nous allons faire ressortir, en basant la classification sur le seul ds^2 du système conjugué, et en appliquant les mêmes principes que pour les lignes de courbure dans la première Partie.

54. Soient

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\omega'}\frac{\partial \omega'}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} \tag{1}$$

l'équation à laquelle doivent satisfaire les coordonnées ponctuelles x, y, z du réseau, et

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$$

le carré de l'élément linéaire. Les relations

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} = \frac{2}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial v}\mathrm{E} + \frac{2}{\omega'}\frac{\partial \omega'}{\partial u}\mathrm{F}, \qquad \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} = \frac{2}{\omega'}\frac{\partial \omega'}{\partial u}\mathrm{G} + \frac{2}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial v}\mathrm{F}$$

indiquent d'abord que l'on a

$$E = \omega^2\left(U + 2\int_{v_0}^{v} \frac{F}{\omega^2}\frac{\partial\omega'}{\partial u}dv\right), \qquad G = \omega'^2\left(V + 2\int_{u_0}^{u} \frac{F}{\omega'^2}\frac{\partial\omega}{\partial v}du\right).$$

Soit l le rayon de la sphère dont l'enveloppe sert à définir le système cyclique. Ce sera une nouvelle solution de l'équation (1) qui devra en même temps vérifier l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v} = F.$$

C'est ce que M. Guichard interprète en disant que les réseaux répondant à la question sont les projections de réseaux orthogonaux de l'espace à quatre dimensions.

Or l'équation (1), où l'on substitue l, devient, si l'on multiplie par $\frac{2}{\omega^2}\frac{\partial l}{\partial u}$, en remplaçant $\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v}$ par F,

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 - 2\frac{F}{\omega^2}\frac{1}{\omega'}\frac{\partial\omega'}{\partial u} = 0,$$

d'où

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 = \omega^2\left[\varphi(u) + 2\int_{v_0}^{v} \frac{F}{\omega^2}\frac{1}{\omega'}\frac{\partial\omega'}{\partial u}dv\right].$$

On aurait de même

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2 = \omega'^2\left[\psi(v) + 2\int_{u_0}^{u} \frac{F}{\omega'^2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial v}du\right].$$

Nous remarquons déjà que ces deux expressions sont exactement de la même forme que celles de E et G. On déduit de là les relations

$$E = \left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 + (U - \varphi)\omega^2, \qquad G = \left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2 + (V - \psi)\omega'^2.$$

Le ds^2 du réseau prend la forme

$$ds^2 = dl^2 + (U - \varphi)\omega^2 du^2 + (V - \psi)\omega'^2 dv^2.$$

Le choix des variables, ainsi que des fonctions ω et ω', permettra d'écrire

$$ds^2 = dl^2 + \omega^2 du^2 + \omega'^2 dv^2.$$

Cette forme a été réalisée en particulier (n° 31) pour le réseau décrit par les centres des sphères harmoniques d'une surface isothermique, avec

$$\omega = \omega' = e^\beta.$$

Ceci fournit une nouvelle interprétation de la fonction β, qui s'est imposée dans nos calculs antérieurs.

On avait aussi trouvé, dans ce cas,

$$\frac{\partial l}{\partial u} = -p\, e^\beta, \qquad \frac{\partial l}{\partial v} = q\, e^\beta.$$

On en déduit

$$F = -pq\, e^{2\beta}, \qquad \frac{F}{\omega^2} = -pq.$$

On constate alors que les formules (3) et (4) équivalent à celles que nous avions établies (n° 33) :

$$\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{\partial \beta}{\partial u}, \qquad \frac{1}{p}\frac{\partial q}{\partial u} = -\frac{\partial \beta}{\partial v}$$

et que l'on pourrait rapprocher de celles qui donnent deux rotations relatives aux lignes de courbure isothermes.

Revenons aux formules qui donnent $\frac{\partial l}{\partial u}$ et $\frac{\partial l}{\partial v}$. Les fonctions φ et ψ devront pouvoir donner lieu à l'identité

$$(5) \qquad F^2 = \omega^2\omega'^2\left[\varphi(u) + 2\int_{v_0}^{v} \frac{F}{\omega^2}\,\frac{1}{\omega'}\,\frac{\partial \omega'}{\partial u}\,dv\right]\left[\psi(v) + 2\int_{u_0}^{u} \frac{F}{\omega'^2}\,\frac{1}{\omega}\,\frac{\partial \omega}{\partial u}\,du\right]$$

obtenue par multiplication, et tout à fait analogue à notre équation fonctionnelle des lignes de courbure.

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Car si elle est vérifiée, et si l'on calcule $\frac{\partial^2 l}{\partial u\, \partial v}$ en différentiant l'une quelconque des deux formules d'où elle provient, on retombera sur l'équation

$$\frac{\partial^2 l}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial l}{\partial u} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v}.$$

Les deux résultats étant identiques, $\frac{\partial l}{\partial u}$ et $\frac{\partial l}{\partial v}$, avec des signes convenables prévus par (2), seront bien les dérivées partielles d'une intégrale l de l'équation (1), et auront pour produit F.

L'identité (5) se discute comme celle des lignes de courbure dans le cas le plus général. Mais, pour abréger, nous ne reproduirons les calculs que dans le cas des invariants égaux, qui se rattache d'ailleurs plus directement aux surfaces isothermiques.

55. Soit donc l'équation

$$(5') \qquad F^2 = \omega^4\left[\varphi(u) - \int_{v_0}^{v} F\frac{\partial\left(\frac{1}{\omega^2}\right)}{\partial u}dv\right]\left[\psi(v) - \int_{u_0}^{u} F\frac{\partial\left(\frac{1}{\omega^2}\right)}{\partial v}du\right].$$

Posons

$$I = \int_{v_0}^{v} F\frac{\partial\left(\frac{1}{\omega^2}\right)}{\partial u}dv, \qquad J = \int_{u_0}^{u} F\frac{\partial\left(\frac{1}{\omega^2}\right)}{\partial v}du,$$

d'où

$$F^2 = \omega^4(\varphi - I)(\psi - J).$$

En faisant disparaître ψ par une différentiation, on tombera sur l'équation équivalente

$$(6) \qquad \varphi' + H\varphi^2 + 2K\varphi + L = 0$$

dans laquelle

$$H = \frac{1}{F}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial v},$$

$$K = -\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial u} - \frac{I}{F}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\omega^2}{F} - \frac{I}{F}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial v},$$

$$L = -\frac{\partial I}{\partial u} + 2I\left[\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial u}\right] + \frac{I^2}{F}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial v}$$
$$= \frac{I^2}{F}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial v} - 2I\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\omega^2}{F} - \frac{\partial I}{\partial u}.$$

Les fonctions φ seront données en termes finis par l'équation

$$\frac{\partial H}{\partial v}\varphi^2 + 2\frac{\partial K}{\partial v}\varphi + \frac{\partial L}{\partial v} = 0. \tag{7}$$

56. Cherchons d'abord s'il peut exister une infinité de solutions. L'équation (7) deviendra une identité si les coefficients H, K, L sont indépendants de v. Dans ce cas, nous aurons de proche en proche

$$H = \frac{1}{F}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial v} = U,$$

$$K = \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\omega^2}{F} - UI, \qquad 0 = \frac{\partial K}{\partial v} = \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{\omega^2}{F} - U\frac{\partial I}{\partial v},$$

$$L = UI^2 - 2I\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\omega^2}{F} - \frac{\partial I}{\partial u}, \qquad 0 = \frac{\partial L}{\partial v} = -2I\frac{\partial K}{\partial v} - 2\frac{\partial I}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\omega^2}{F} - \frac{\partial^2 I}{\partial u\,\partial v}.$$

On tire de la dernière équation

$$\frac{\partial I}{\partial v} = -V\frac{F^2}{\omega^4} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{F}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial u} = V.$$

La comparaison des résultats extrêmes donne d'abord

$$U\frac{\partial(\omega^2)}{\partial u} = V\frac{\partial(\omega^2)}{\partial v}. \tag{8}$$

Nous allons montrer que l'une des fonctions U, V est certainement nulle.

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait disposer des variables de manière à avoir $U = V = 1$, d'où

$$\omega^2 = f(u+v), \qquad F = f'(u+v).$$

La troisième condition $\frac{\partial K}{\partial v} = 0$ devient

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{f'}{f} - \frac{f'^2}{f^2} = 0$$

et donne, avec des variables convenables,

$$\omega^2 = f = m^2 \,\mathrm{th}\,\frac{u+v}{2}, \qquad F = f' = \frac{m^2}{2\,\mathrm{ch}^2\frac{u+v}{2}},$$

$$I = \frac{1}{\mathrm{th}(u+v)}, \qquad H = 1, \qquad K = 0, \qquad L = -1,$$

$$\varphi' + \varphi^2 - 1 = 0, \qquad \varphi = \frac{1}{\mathrm{th}(u+a)},$$

$$dl = \sqrt{F\,\mathrm{sh}(u+a)\,\mathrm{sh}(v-a)}\left[\frac{du}{\mathrm{sh}(u+a)} + \frac{dv}{\mathrm{sh}(v-a)}\right].$$

Prenons comme nouvelles variables

$$u' = \frac{1}{2}\int\frac{du}{\mathrm{sh}(u+a)} = \frac{1}{2}\log\mathrm{th}\,\frac{u+a}{2}, \quad v' = \frac{1}{2}\int\frac{dv}{\mathrm{sh}(v-a)} = \frac{1}{2}\log\mathrm{th}\,\frac{v-a}{2},$$

d'où

$$e^{u+a} = -\frac{1}{\mathrm{th}\,u'}, \qquad e^{v-a} = -\frac{1}{\mathrm{th}\,v'},$$

$$\mathrm{sh}(u+a) = -\frac{1}{\mathrm{sh}\,2u'}, \qquad \mathrm{sh}(v-a) = -\frac{1}{\mathrm{sh}\,2v'},$$

$$e^{u+v} = e^{u+a}\,e^{v-a} = \frac{1}{\mathrm{th}\,u'\,\mathrm{th}\,v'}.$$

Nous aurons finalement

$$l = 2m\int\frac{d(u'+v')}{\mathrm{ch}(u'+v')} = 2m \text{ arc tang } e^{u'+v'}$$

et pour le réseau

$$ds^2 = \frac{m^2}{\mathrm{ch}^2(u'+v')}(du'^2 + dv'^2) + m^2\frac{\mathrm{ch}(u'-v')}{\mathrm{ch}(u'+v')}(dU_0^2 + dV_0^2),$$

U_0 et V_0 étant respectivement des fonctions de u et v. Supposons qu'une pareille forme de ds^2 soit réalisée par un réseau conjugué. Elle devra être indépendante du paramètre a qui figure dans l'expression de φ. Or on peut écrire, en faisant $m = 1$, ce qui est toujours possible,

$$ds^2 = 2\,\frac{\mathrm{sh}(u+a)\,\mathrm{sh}(v-a)}{\mathrm{ch}^2\frac{u+v}{2}}\left[\frac{du}{\mathrm{sh}(u+a)} + \frac{dv}{\mathrm{sh}(v-a)}\right]^2$$
$$+ \mathrm{th}\,\frac{u+v}{2}(dU_0^2 + dV_0^2).$$

On voit que le coefficient de du^2

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{u+v}{2}} \left[2\frac{\operatorname{sh}(v-a)}{\operatorname{sh}(u+a)} + \frac{1}{2}\operatorname{sh}(u+v)\mathrm{U}_0'^2 \right]$$

ne peut être débarrassé de a, quelle que soit la manière dont ce paramètre figure dans U_0'.

La solution est donc à rejeter, et ce fait correspond à une hypothèse analogue faite dans l'étude de la déformation continue des lignes de courbure, et ne comportant pas de résultat.

L'une des fonctions U ou V doit donc être nulle. Soit $\mathrm{U} = 0$, $\mathrm{V} = 1$. La fonction ω ne dépend plus que de u, et il nous reste les deux conditions

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \frac{\omega^2}{\mathrm{F}} = 0, \qquad \mathrm{F} = \frac{d(\omega^2)}{du} = 2\omega\omega',$$

dont la première est une conséquence de la seconde. Il vient

$$\mathrm{I} = -4v\frac{\omega'^2}{\omega^2}, \qquad \mathrm{H} = 0, \qquad \mathrm{K} = -\frac{d}{du}\log\frac{\omega'}{\omega}, \qquad \mathrm{L} = 0,$$

$$\varphi' - 2\varphi\frac{d}{du}\log\frac{\omega'}{\omega} = 0, \qquad \varphi = 4a\frac{\omega'^2}{\omega^2}, \qquad l = 2\omega\sqrt{v+a}.$$

La sphère enveloppée dépendra du paramètre a.

Jusqu'ici, nous n'avons pas choisi u. Nous avons le droit de prendre $\omega = e^u$, et l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

aura pour intégrale générale

$$\theta = (\mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1 i)\, e^u.$$

Il vient alors

$$l = 2e^u\sqrt{v+a}, \qquad \mathrm{F} = 2e^u,$$

$$ds^2 = e^{2u}\left[4\left(\sqrt{v+a}\,du + \frac{dv}{2\sqrt{v+a}}\right)^2 + d\mathrm{U}_1^2 + d\mathrm{V}_1^2\right]$$

$$= e^{2u}\left[4\,du\,(v\,du + dv) + d\mathrm{U}_0^2 + d\mathrm{V}_0^2\right].$$

La seconde forme du ds^2 ne dépend plus du paramètre a. On revient à la première par une identification. Il s'agit de réaliser la seconde forme, en prenant pour x, y, z trois fonctions θ telles que, d'après la formule différentielle

$$d\theta = e^u[(U_i + U_i' + V_i)\,du + V_i'\,dv],$$

on ait les trois conditions

$$\Sigma(U_i + U_i' + V_i)^2 = U_0'^2 + 4v, \qquad \Sigma(U_i + U_i' + V_i)V_i' = 2, \qquad \Sigma V_i'^2 = V_0'^2.$$

Les fonctions U_0 et V_0 n'étant pas imposées, on peut négliger la dernière condition, et remplacer la première par l'équation dérivée par rapport à v. Or celle-ci est identique à la seconde, qui reste l'unique condition. Différentions-la par rapport à v :

$$(U_1' + U_1'')V_1' + (U_2' + U_2'')V_2' + (U_3' + U_3'')V_3' = 0.$$

On peut obtenir cette relation de trois manières :

1° D'abord les trois parenthèses peuvent être nulles, et comme on peut ajouter une constante aux U, on prendra

$$U_1 = a_1 e^{-u}, \qquad U_2 = a_2 e^{-u}, \qquad U_3 = a_3 e^{-u},$$

et la condition complète s'écrira

$$V_1V_1' + V_2V_2' + V_3V_3' = 2, \qquad \text{d'où} \qquad V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = 4v + b.$$

Alors

$$x = a_1 + V_1 e^u, \qquad y = a_2 + V_2 e^u, \qquad z = a_3 + V_3 e^u.$$

La surface est un cône de sommet S (a_1, a_2, a_3), dont les génératrices rectilignes sont les courbes (v), tandis que les courbes (u) sont homothétiques par rapport au sommet. L'une de ces courbes est quelconque dans l'espace, et la relation qui subsiste ne sert qu'à définir la variable v.

2° Lorsque les parenthèses $U_i' + U_i''$ ne sont pas toutes nulles, les fonctions V_i' sont proportionnelles, et il en sera de même des fonctions V_i, si l'on ajoute aux U_i des constantes convenables.

Soit donc

$$\frac{V_1}{a_1} = \frac{V_2}{a_2} = \frac{V_3}{a_3} = V.$$

On doit avoir, en remontant à l'équation initiale,

$$V'[\Sigma a_i(U_i + U'_i) + \Sigma a_i^2 V] = 2,$$

$$\Sigma a_i(U_i + U_i) = \frac{2}{V'} - V \Sigma a_i^2 = \beta,$$

β désignant une constante. Donc

$$a_1 U_1 + a_2 U_2 + a_3 U_3 = \alpha e^{-u} + \beta \qquad (V_0 \Sigma a_i^2 + \beta) V' = 2.$$

Ces relations ne servent qu'à définir les variables u et v. On a finalement un système conjugué tracé sur une surface engendrée d'une manière quelconque par une courbe qui reste homothétique à une courbe fixe, les diverses positions de cette génératrice constituant l'une des familles conjuguées.

Le cas du cône rentre dans celui-ci; il correspond à un centre d'homothétie fixe, qui est le sommet S du cône. L'expression de l montre que *toutes les sphères qui ont leurs centres sur la courbe* $u = 0$ *sont orthogonales, à une sphère fixe de centre* S *et de rayon* $\sqrt{b - 4a}$. Les autres sphères sont homothétiques et ont pour enveloppes d'autres cônes de sommet S. Le paramètre du système correspond au choix du rayon de la sphère initiale (S).

Dans le cas général, on constate de même que *toutes les sphères de paramètres u sont orthogonales à une même sphère* dont le centre a pour coordonnées $-U'_1 e^u$, $-U'_2 e^u$, $-U'_3 e^u$, et dont le carré du rayon est égal à

$$[\Sigma(U_i + U'_i)^2 + b - 4a] e^{2u}.$$

Supposons enfin que les deux fonctions U et V de l'équation (8) soient nulles. Alors ω se réduit à une constante, et l'équation de Laplace à

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = 0.$$

Nous aurons des coordonnées de la forme $U_i + V_i$. Il s'agit de surfaces qui peuvent être engendrées de deux manières par la translation d'une courbe invariable, ou par le milieu d'une corde limitée à deux courbes fixes.

L'équation fonctionnelle correspondante

$$F^2 = \omega^4 \varphi\psi$$

sera toujours vérifiée si l'on a

$$F = \frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v} = U'_4 V'_4,$$

et l'on pourra introduire dans φ un facteur constant arbitraire. Tout revient donc à vérifier l'identité

$$(9) \qquad U'_1 V'_1 + U'_2 V'_2 + U'_3 V'_3 = U'_4 V'_4.$$

Nous distinguerons deux cas :

1° Si les fonctions V'_1, V'_2, V'_3 ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène, les fonctions U'_1, U'_2, U'_3 donneront lieu aux équations

$$U'_1 = a_1 U'_4, \qquad U'_2 = a_2 U'_4, \qquad U'_3 = a_3 U'_4,$$

d'où

$$U_1 = a_1 U_4, \qquad U_2 = a_2 U_4, \qquad U_3 = a_3 U_4,$$

puisque l'on peut ajouter des constantes à V_1, V_2, V_3. Donc

$$\frac{x - V_1}{a_1} = \frac{y - V_2}{a_2} = \frac{z - V_3}{a_3} = U_4.$$

Les lignes (v) sont des *droites parallèles*, et la surface est *cylindrique*. Si Ox est parallèle aux génératrices, $a_2 = a_3 = 0$, d'où

$$x = a_1 U_4 + V_1, \qquad y = V_2, \qquad z = V_3,$$

et la condition complète se réduit à

$$a_1 V'_1 = V'_4, \qquad \text{d'où} \qquad V_4 = a_1 V_1.$$

Le cylindre est quelconque, et la fonction

$$l = \frac{1}{a_1} U_1 + a_1 V_1$$

dépendra du paramètre a_1 qui fera varier inversement ses deux dérivées partielles, comme on l'avait prévu avec φ et ψ.

Le cylindre est engendré par la translation d'une courbe (u), de forme arbitraire, dans le sens des génératrices. Pour $a_1 = 1$, on voit que $l = x$. *Toutes les sphères sont tangentes au plan* yOz, *perpendiculaire aux génératrices*. Pour a_1 quelconque, la relation

$$l = a_1\left[x - \left(1 - \frac{1}{a_1^2}\right)\mathrm{l}_1\right]$$

montre que, tout le long d'une courbe (u), le rayon de la sphère est proportionnel à la distance du centre au plan

$$x = \left(1 - \frac{1}{a_1^2}\right)\mathrm{l}_1,$$

également perpendiculaire aux génératrices.

2° Si les fonctions V'_1, V'_2, V_3 ne sont pas proportionnelles, ce qui nous ramènerait au cas précédent, par l'échange des U et des V, et si l'on écarte les conclusions de ce cas pour les deux variables, on peut affirmer qu'il existe entre V_1, V'_2, V'_3 une relation linéaire et homogène. Car si l'on donne à v trois valeurs quelconques, et si l'on porte dans l'équation (9), on obtiendra trois équations à coefficients constants entre U'_1, U'_2, U'_3, U'_4. Si le déterminant des coefficients du premier membre n'était pas nul, U'_1, U'_2 et U'_3 seraient proportionnelles à U'_4, ce que nous ne supposons pas. Ce déterminant étant nul, si nous faisons varier v dans la première ligne, nous aurons la relation annoncée, qui pourra s'écrire, par exemple,

$$V'_3 = a_1 V'_1 + a_2 V'_2;$$

D'où, en disposant d'un transport d'origine, pour annuler des constantes,

$$V_3 = a_1 V_1 + a_2 V_2,$$
$$z - \mathrm{l}_3 = a_1(x - \mathrm{l}_1) + a_2(y - \mathrm{l}_2).$$

Les courbes (u) *sont des lignes planes situées dans des plans parallèles.* Il en sera de même des lignes (v) pour la même raison. On peut le vérifier.

Substituons directement dans la relation (9)

$$(U'_1 + a_1 U'_3) V'_1 + (U'_2 - a_2 U'_3) V'_2 = U'_4 V'_4.$$

Les parenthèses ne pouvant pas être toutes deux nulles, si l'on donne à u une valeur constante, on aura une relation de la forme

$$V'_4 = b_1 V'_1 + b_2 V'_2,$$

d'où

$$(U'_1 + a_1 U'_3 - b_1 U'_4) V'_1 + (U'_2 + a_2 U'_3 - b_2 U'_4) V'_2 = 0.$$

On a séparément

$$U'_1 + a_1 U'_3 - b_1 U'_4 = 0, \qquad U'_2 + a_2 U'_3 - b_2 U'_4 = 0,$$
$$U_1 + a_1 U_3 - b_1 U_4 = 0, \qquad U_2 + a_2 U_3 - b_2 U_4 = 0,$$

d'où, par l'élimination de U_4,

$$b_2 U_1 - b_1 U_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) U_3 = 0.$$

Cette relation conduit à la même interprétation que pour les V.

On constate que l'on conserve x, y, z en remplaçant U_4 par $\frac{U_4}{a}$, a étant un paramètre, à la condition de remplacer b_1 et b_2 par ab_1 et ab_2, et par suite V_4 par aV_4.

57. Occupons-nous maintenant des réseaux d'où dérivent *deux* systèmes cycliques.

On peut toujours, sans modifier la forme de l'équation fonctionnelle fondamentale, ajouter à I une fonction de u, de manière que les deux valeurs de φ soient égales et de signes contraires. Nous distinguerons deux cas, suivant qu'elles seront distinctes ou égales:

1° Si les deux valeurs de φ sont distinctes, le choix de la variable u permettra de prendre l'une d'elles égale à 1, et l'autre à -1. L'équation (6) devant s'identifier avec $\varphi^2 - 1 = 0$, on aura

$$\mathbf{K} = 0, \qquad \mathbf{H} + \mathbf{L} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\omega^2}{\mathbf{F}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{F}} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial v},$$

$$(1 + \mathbf{I}^2) \frac{1}{\mathbf{F}} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial v} - 2\mathbf{I} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\omega^2}{\mathbf{F}} - \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial u} = 0.$$

On a la combinaison

$$\frac{I\dfrac{\partial I}{\partial u}}{1 - I^2} = \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\omega^2}{F}, \qquad \text{d'où} \qquad 1 - I^2 = V\frac{F}{\omega^4}.$$

Soit d'abord $V = 0$. Alors

$$I = \pm 1, \qquad \frac{\partial I}{\partial v} = F\frac{\partial\left(\dfrac{1}{\omega^2}\right)}{\partial u} = 0.$$

Si $F = 0$, le réseau est formé de lignes de courbure isothermes. Le rayon de la sphère est constant, et l'on ne peut avoir comme enveloppes que des surfaces parallèles.

D'ailleurs, on est forcé de faire cette hypothèse, car l'une des valeurs de φ conduira toujours à

$$\varphi - I = 0, \qquad F = 0.$$

Si la fonction V n'est pas nulle, on peut choisir v de manière à avoir $V = 1$, et écrire

$$I^2 = 1 - \frac{F^2}{\omega^4}.$$

Posons

$$F = \omega^2 \sin\theta, \qquad \text{d'où} \qquad I = \cos\theta,$$

$$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{\partial I}{\partial v} = F\frac{\partial\left(\dfrac{1}{\omega^2}\right)}{\partial u} = -\sin\theta\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial v} = \frac{2}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial v}.$$

La condition qui reste devient, après réductions,

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = -\frac{2}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial v}.$$

Donc

$$\theta = -2\int\frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}du - \frac{\partial\omega}{\partial u}dv\right).$$

La fonction ω est assujettie à vérifier la condition d'intégrabilité

$$\Delta\log\omega = 0,$$

d'où l'on tire

$$\omega^2 = e^{f(u+vi)+g(u-vi)}, \qquad \theta = -i[f(u+vi) - g(u-vi)].$$

Avec $\varphi = 1$,

$$\left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 = 2\omega^2 \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad \left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2 = 2\omega^2 \cos^2\frac{\theta}{2},$$

$$l = \sqrt{2}\int \omega\left(\sin\frac{\theta}{2}\,du + \cos\frac{\theta}{2}\,dv\right).$$

Si $\varphi = -1$,

$$l = i\sqrt{2}\int \omega\left(\cos\frac{\theta}{2}\,du - \sin\frac{\theta}{2}\,dv\right).$$

Enfin, si les deux valeurs de φ étaient égales, et par suite nulles, on aurait

$$L = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial v} = 0.$$

D'après la première condition,

$$-K = \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\omega^2}{F} + \frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial u} = \frac{U'}{U}, \qquad \frac{I\omega^2}{F} = UV$$

et le choix des variables permettra d'avoir

$$F = I\omega^2, \qquad K = 0,$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{\partial(\omega^2)}{\partial v}\,du + \frac{\partial(\omega^2)}{\partial u}\,dv\right].$$

On aura une différentielle exacte avec

$$\omega^2 = e^{f(u+v)+g(u-v)}, \qquad \text{d'où} \qquad I = e^{-f+g}, \qquad F = I\omega^2 = e^{2g},$$

$$\left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2 = -I\omega^2 = -e^{2g}.$$

On voit que l sera une fonction de $u - v$.

Cette propriété est caractéristique de nos réseaux. Car elle nous donne, en prenant la fonction φ nulle,

$$\left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2 = -I\omega^2 = -F,$$

et comme on a

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial v} = \mathrm{F}\frac{\partial\left(\frac{1}{\omega^2}\right)}{\partial u},$$

il viendra

$$\frac{1}{\mathrm{I}}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial v} = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial u}.$$

D'autre part, $\mathrm{F} = \frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial l}{\partial v}$ sera aussi une fonction de $u - v$, ce qui donnera, par comparaison avec le dernier résultat,

$$\frac{1}{\mathrm{I}}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial u} = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial(\omega^2)}{\partial v}.$$

On retrouve les équations qui ont servi à établir la forme de ω. Puis on en déduit

$$\mathrm{K} = \mathrm{L} = 0.$$

Nous interpréterons ce résultat de la façon suivante. Divisons membre à membre les deux égalités

$$\mathrm{M}p = \frac{\frac{\partial l}{\partial u}}{\mathrm{R}_1 - l}, \qquad \mathrm{N}q = \frac{\frac{\partial l}{\partial v}}{\mathrm{R}_2 - l}$$

du n° 27. Nous aurons ici

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\frac{p}{q} = -\frac{l - \mathrm{R}_2}{l - \mathrm{R}_1} = \frac{1}{\lambda},$$

— λ désignant le rapport dans lequel le réseau divise le segment limité par les centres de courbure principaux d'une nappe de l'enveloppe des sphères. Or, en appliquant les calculs du n° 25, on met l'équation de Laplace relative au réseau sous la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\log[\mathrm{M}(l - \mathrm{R}_1)]\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\log[\mathrm{N}(l - \mathrm{R}_2)]\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Si h et k sont les invariants,

$$h - k = \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\log\left(\lambda\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\right) = \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\log\frac{q}{p}.$$

Donc les invariants seront égaux lorsqu'on aura une égalité de la forme

$$\frac{p}{U} = \frac{q}{V}$$

(*voir* n° 34).

Enfin l'interprétation de ω nous permettra de faire un dernier rapprochement avec la dernière singularité de la déformation des réseaux de lignes de courbure, conduisant à des surfaces doubles (S_0), qui donnent un couple double de Bonnet.

Si l'on pose $\theta = \omega\theta'$, l'équation de Laplace devient

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial u\, \partial v} + \left(\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} - \frac{2}{\omega^2}\frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)\theta' = 0$$

ou

$$4\frac{\partial^2 \theta'}{\partial u\, \partial v} + [(2f'' - f'^2) - (2g'' - g'^2)]\theta' = 0.$$

Comme $\frac{1}{\omega}$ est aussi solution de cette équation, on voit donc que *chaque point du réseau admet pour coordonnées homogènes* $\frac{x}{\omega}$, $\frac{y}{\omega}$, $\frac{z}{\omega}$, $\frac{1}{\omega}$, *quatre solutions d'une équation harmonique.*

Vu et approuvé :

Paris, le 15 janvier 1921.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

M. MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer

Paris, le 15 janvier 1921.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

P. APPELL.

SURFACE MINIMA