Raymond Jacques

Sur les surfaces telles que les axes des cercles osculateurs à une famille de lignes de courbure appartiennent à un complexe linéaire

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1922

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1922__30__1_0>

N° D'ORDRE :
1717

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. R. JACQUES

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

1re THÈSE. — SUR LES SURFACES TELLES QUE LES AXES DES CERCLES OSCULATEURS A UNE FAMILLE DE LIGNES DE COURBURE APPARTIENNENT A UN COMPLEXE LINÉAIRE.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 mai 1922, devant la Commission d'examen

MM. KŒNIGS, *Président*.
CLAUDE GUICHARD } *Examinateurs*.
VESSIOT }

PARIS

LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

49, Boulevard Saint-Michel, 49

1922

A Monsieur Cl. GUICHARD

Membre Correspondant de l'Institut

Professeur de Géométrie supérieure a la Sorbonne

Hommage respectueux

R. JACQUES

A MES PARENTS

TABLE DES MATIÈRES

Première Thèse

Deuxième Thèse

PREMIÈRE THÈSE

SUR LES SURFACES TELLES
QUE LES AXES DES CERCLES OSCULATEURS
A UNE FAMILLE DE LIGNES DE COURBURE
APPARTIENNENT
A UN COMPLEXE LINÉAIRE

INTRODUCTION

Dans son cours de Géométrie supérieure (1920-1921), M. Guichard a établi une série de résultats nouveaux relatifs à la géométrie infinitésimale du complexe linéaire.

Je me suis proposé, dans ce travail, d'appliquer les méthodes qu'il a indiquées à la détermination des surfaces qui sont telles que les axes des cercles osculateurs à une famille de lignes de courbure appartiennent à un complexe linéaire.

On sait que si les normales à une surface appartiennent à un complexe linéaire, les surfaces considérées sont des hélicoïdes. Le problème envisagé traite le cas où l'une des premières congruences qui dérive de la congruence de normales par la méthode de Laplace appartient à un complexe linéaire.

Il est bien évident que si l'on considère une surface particulière S, tout mouvement hélicoïdal dont l'axe est l'axe central du complexe linéaire permettra de déduire de S des surfaces S' jouissant de la même propriété. Il est donc naturel, pour caractériser la surface S, de rechercher les éléments relatifs à cette surface qui demeurent invariants dans cette transformation.

Deux méthodes peuvent être envisagées, dont nous allons exposer brièvement les principes.

Si l'on projette sur un plan perpendiculaire à l'axe du complexe la congruence formée par les normales à la surface S, on obtient une congruence que nous désignerons par H [1]. A cette congruence sont conjuguées deux séries de réseaux O. Les rotations d'un de ces réseaux fournissent manifestement des éléments considérés.

Nous nous sommes proposé de caractériser ces réseaux O. Le calcul fournit aisément une équation aux dérivées partielles du troisième ordre. Il est intéressant de remarquer que l'on peut, étant données une solution de cette équation et une surface particulière correspondante, obtenir uniquement par des quadratures une infinité de surfaces nouvelles.

On sait aussi qu'à toute surface S on peut faire correspondre un déterminant orthogonal dont les éléments sont les cosinus directeurs de la normale et des tangentes aux deux lignes de courbure. Les rotations de ce déterminant fournissent des éléments qui se conservent dans les transformations indiquées. Nous avons déterminé les relations nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre ces éléments.

Nous nous sommes proposé ensuite de déterminer les surfaces particulières, solutions du problème, qui sont des hélicoïdes. Dans ce cas le réseau focal C_1 décrit par le premier centre de courbure de la surface est tel que les deux tangentes aux courbes du réseau appartiennent à des complexes linéaires. Il en est alors de même des tangentes aux courbes des réseaux obtenus en transformant le réseau C_1 par la méthode de Laplace, en particulier des tangentes au réseau C_2 decrit par le deuxième centre de courbure. Des résultats généraux relatifs à ces réseaux ont été publiés par M. Wilezynski aux Mémoires de l'Académie Royale de Belgique en 1911.

On obtient ainsi comme surfaces particulières les hélicoïdes minima et les hélicoïdes à courbure totale constante [2], et l'on est ainsi conduit à ces propriétés que nous croyons nouvelles.

---

(1) Les notations employées sont définies dans le Mémoire de M. Guichard publié aux *Annales de l'École Normale*, 1903.

(2) Ces surfaces ont été étudiées à un autre point de vue par M. Darboux. Leçons sur les systèmes triples, orthogonaux, par M. Haag. — Thèse.

Les congruences qui dérivent par la méthode de Laplace de la congruence formée par les normales à un hélicoïde minima ou à un hélicoïde à courbure totale constante appartiennent à un complexe linéaire.

Nous signalons en outre qu'une propriété analogue existe pour les congruences qui dérivent par la méthode de Laplace des congruences décrites par les tangentes aux lignes de courbure d'un hélicoïde à courbure totale constante.

Ces propriétés se rattachent à une transformation des réseaux de Wilezynski que nous mentionnons dans ce travail et qui sera étudiée par la suite.

En dehors des hélicoïdes nous avons déterminé par les transformations que nous avons indiquées des surfaces nouvelles, telles que la congruence fournie par les normales à ces surfaces soit parallèle à la congruence formée par les normales à un hélicoïde.

On peut caractériser facilement le groupe de surfaces ainsi obtenu. Le réseau rectangulaire formé par les tangentes aux lignes de courbure est associé à un réseau O plan, les fonctions d'association se réduisant à des constantes (1). Nous avons déduit un certain nombre de propriétés de ces surfaces, nous signalons en particulier ce résultat. Étant donné un hélicoïde à courbure totale constante, on peut par une dilatation convenable de la troisième coordonnée transformer le réseau focal décrit par un des centres de courbure en un réseau rectangulaire correspondant à un deuxième helicoïde à courbure totale constante.

Une transformation analogue permet de déduire du réseau formé par les lignes de courbure d'un hélicoïde à courbure totale constante le réseau focal d'un nouvel hélicoïde à courbure totale constante.

Ces propriétés sont encore vraies pour les réseaux qui dérivent des précédents par la méthode de Laplace.

Dans les cas particuliers que nous avons envisagés, les transformations indiquées nous permettent toujours de déduire des surfaces nouvelles.

Pour les hélicoïdes à courbure totale constante, ces surfaces seraient telles que si la congruence formée par les axes des cercles osculateurs à la première famille de lignes de courbure appartenait à un complexe linéaire, les axes des cercles osculateurs à la deuxième famille formeraient une congruence parallèle à une congruence appartenant à un complexe.

Nous avons étudié à ce sujet les réseaux tels que les congruences formées

---

(1) Mémoire de M. Guichard, *Annales É. N. S.*, 1903.

par les tangentes et leurs transformées par la méthode de Laplace appartiennent de deux en deux à des complexes linéaires, et donné pour ces réseaux un certain nombre de propriétés analogues à celles qui ont été données pour les réseaux de Wilezynski.

Dans un dernier chapitre, nous envisageons le problème plus général de la détermination de deux surfaces $\Sigma\Sigma'$ telles que la congruence formée par les axes des cercles osculateurs à une famille de lignes de courbure de l'une soit conjuguée par rapport à un complexe linéaire de la congruence formée par les axes des cercles osculateurs à une famille de lignes de courbure de l'autre.

Deux cas sont alors à envisager. L'un d'eux conduit à la recherche de six solutions d'une équation de Moutard telles que l'on ait

$$\Sigma\,\xi^2 = 1$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 = 0$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\right)^2 = 0.$$

Le problème se trouve ainsi rattaché aux travaux publiés par M. Guichard relatifs aux équations de Moutard admettant un groupe de solutions liées par une relation quadratique (1).

M. Guichard a bien voulu s'intéresser à ces recherches. La bienveillance qu'il m'a toujours témoignée et les précieux conseils dont il m'a guidé m'ont permis de réaliser ce modeste travail. Il me permettra de lui exprimer ici mes sentiments de très sincère reconnaissance.

(1) *Annales É. N. S.*, 1903.

MISE EN ÉQUATION ET TRANSFORMATIONS DU PROBLÈME

Première méthode. — Nous désignerons par S une surface telle que les axes des cercles osculateurs à la deuxième famille de lignes de courbure appartiennent à un complexe linéaire.

Le réseau C_2 décrit par le deuxième centre de courbure est caractérisé par le fait que sa première tangente décrit une congruence appartenant à un complexe linéaire, et que sa deuxième tangente décrit une congruence de normales.

Nous projetterons le réseau C_2 sur un plan perpendiculaire à l'axe du complexe. La congruence formée par les premières tangentes au réseau C_2, ainsi obtenu est une congruence L_{00}, celle qui est formée par les deuxièmes tangentes est une congruence H.

On sait déterminer pour toute congruence plane H deux familles de réseaux O conjugués. Si l'on désigne par M un de ces réseaux, ce réseau est tel qu'il se transforme par la méthode de Laplace en allant de u vers v en un réseau qui, conjugué à une congruence L_{00} est un réseau Ω_{00}.

Nous allons traduire analytiquement cette propriété.

Les paramètres normaux d'un réseau O plan sont définis par les égalités

$$\xi_1 = \cos\varphi \qquad \xi_2 = \sin\varphi$$
$$\eta_1 = -\sin\varphi \qquad \eta_2 = \cos\varphi$$

désignant l'angle avec ox de la tangente à la courbe obtenue lorsque l'on fait varier le premier paramètre u.

Les rotations de ce réseau sont les quantités

$$M = -\frac{\partial\varphi}{\partial u} \qquad N = \frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Pour le réseau dérivé, on calcule aisément les quantités analogues

$$[\xi_1] = -\sin\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\;\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\cos\varphi$$

$$[\xi_2] = \cos\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\;\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\sin\varphi$$

$$[\eta_1] = \frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\cos\varphi$$

$$[\eta_2] = \frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\sin\varphi$$

$$[\mathrm{M}] = \frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}} \qquad [\mathrm{N}] = -\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial^2\mathrm{L}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\partial u\,\partial v}\right).$$

Ce réseau est Ω_{00} si l'on peut choisir les variables de façon telle que l'on ait la relation

$$[\xi_1]\,[\eta_2] - [\xi_2]\,[\eta_1] = [\mathrm{N}] - [\mathrm{M}]\ (^1)$$

que l'on peut écrire

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial^2\mathrm{L}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial u} + 1 = 0.$$

Le fait que la fonction φ n'intervient que par ses dérivées partielles correspond à la propriété géométrique des surfaces S de se transformer en surfaces jouissant de la même propriété par une rotation constante arbitraire autour du troisième axe de coordonnées.

Il résulte donc de ce qui précède, qu'à toute surface S on peut faire correspondre deux solutions φ de l'équation aux dérivées partielles. Nous allons montrer qu'inversement de toute solution φ on peut déduire des surfaces S.

(1) Si les variables sont quelconques, cette condition s'écrit

$$[\xi_1]\,[\eta_2] - [\xi_2]\,[\eta_1] = [\mathrm{N}]\,\mathrm{V} - [\mathrm{M}]\,\mathrm{U}$$

U V étant deux fonctions arbitraires de u et de v.

Nous nous proposerons tout d'abord de déterminer les éléments du réseau O plan C_2 correspondant.

Si $x_1 x_2$ sont deux fonctions de u et de v définissant les coordonnées du point qui décrit ce réseau, on pourra toujours écrire (1)

$$x_1 = q \cos \varphi - r \sin \varphi$$
$$x_2 = q \sin \varphi + r \cos \varphi.$$

La détermination des fonctions x_1, x_2 étant équivalente à celle des fonctions $q\, r$.

On devra avoir des relations de la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= h \cos \varphi \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} &= h \sin \varphi \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -l \sin \varphi \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} &= l \cos \varphi. \end{aligned}\right.$$

On trouve ainsi que

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial u} &= -q \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial q}{\partial v} &= r \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} h &= \frac{\partial q}{\partial u} - r \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ l &= \frac{\partial r}{\partial v} + q \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Les coordonnées $y_1\, y_2$ du point qui décrit le réseau dérivé Ω_{00} sont alors

$$y_1 = x_1 - \frac{l}{N} \cos \varphi$$
$$y_2 = x_2 - \frac{l}{N} \sin \varphi.$$

En remplaçant x_1, x_2, h, l, N par leurs valeurs on obtient, après simplification les expressions

$$\left\{\begin{aligned} y_1 &= -\frac{\dfrac{\partial r}{\partial v}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}} \cos \varphi - r \sin \varphi. \\ y_2 &= -\frac{\dfrac{\partial r}{\partial v}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}} \sin \varphi + r \cos \varphi. \end{aligned}\right.$$

(1) Nous écartons le cas particulier, que nous étudierons directement dans la suite, où le réseau O considéré serait le réseau focal de la congruence H.

On vérifie facilement que ces expressions vérifient les relations

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = [h][\xi_1] \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = [l][\eta_1]$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = [h][\xi_2] \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = [l][\eta_2]$$

où l'on a

$$[h] = -q - \frac{\dfrac{\partial r}{\partial v}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}$$

$$[l] = -r\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\dfrac{\partial r}{\partial v}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}\right).$$

Les quantités y_1 y_2 définissent les paramètres d'une congruence conjuguée au réseau Ω_{00}.

M. Guichard a établi dans son cours que la condition nécessaire et suffisante pour que cette congruence soit une congruence L_{00} s'exprimait par la relation

$$y_1[\xi_2] - y_2[\xi_1] = h,$$

condition qui, avec les expressions indiquées, devient

$$\frac{\partial r_1}{\partial v}\left(1 - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + q\frac{\partial \varphi}{\partial v} + r\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Les quantités q et r doivent donc satisfaire aux équations

$$\frac{\partial q}{\partial v} - r\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial v}\left(1 - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + q\frac{\partial \varphi}{\partial v} + r\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} + q\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0.$$

Et si l'on exprime que les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v}$ sont égales, on obtient la relation nouvelle

$$\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + q\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}}{1 - \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}} + r\left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2\,\partial v} + \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}}{1 - \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(1 - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\right] = 0$$

qui forme avec les trois équations précédentes, en tenant compte de la relation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction φ, un système complet.

La solution d'un tel système dépend de deux constantes arbitraires. Il faut toutefois remarquer que, si l'on multiplie les fonctions q et r par une même constante, les réseaux O et Ω_{00} considérés se transforment en réseaux homothétiques et que les congruences conjuguées à ces réseaux demeurent inchangées.

La solution ne fait donc intervenir en définitive qu'une constante arbitraire et l'on obtient ainsi une simple infinité de congruences conjuguées au réseau.

D'autre part, la forme même des équations obtenues montre aussi que si l'on connaît une solution particulière q_0 r_0 du système complet, le changement de variables

$$\begin{aligned} q &= \lambda q_0 + h \\ r &= \lambda r_0. \end{aligned}$$

conduira à un nouveau système complet en λ et h. Ce système nouveau admettra la solution $\lambda = 1$. On en déduit facilement que la solution générale pourra être obtenue par quadratures.

Nous allons indiquer maintenant comment l'on peut, de la connaissance d'une solution particulière q_0 r_0 qui détermine la congruence H conjuguée au réseau O, déduire des congruences de normales correspondant à des familles de surfaces parallèles S.

On sait que la détermination d'une congruence de normales projetée sur un plan suivant une congruence dont les paramètres x_1 x_2, sont des quantités données revient à la détermination de deux solutions nouvelles x_3 x_4 de l'équation de Laplace à laquelle satisfont les premières quantités et qui sont telles que l'on ait

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Dans le cas particulier que nous considérons, le point de coordonnées x_1 x_2 décrit un réseau rectangulaire. L'équation de Laplace à laquelle satisfont les paramètres admet la solution

$$X = x_1^2 + x_2^2 = q^2 + r^2.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} x_3 + i x_4 &= e^{\omega}(q^2 + r^2) \\ x_3 - i x_4 &= -e^{-\omega}, \end{aligned}$$

ω désignant une constante quelconque on définit deux solutions nouvelles x_3 x_4 de l'équation de Laplace qui satisfont à la relation indiquée. On obtient ainsi une infinité de congruences de normales qui se projettent suivant une congruence donnée. Les cosinus directeurs de la normale à une surface (S) correspondant à une solution particulière seront les quantités

$$\frac{x_1}{ix_4} \quad \frac{x_2}{ix_4} \quad \frac{x_3}{ix_4}.$$

Deuxième méthode. — On sait que, étant donné un point M d'une surface, si l'on désigne par α_1 α_2 α_3 les cosinus directeurs de la normale, par β_1 β_2 β_3 les cosinus directeurs de la tangente à la première ligne de courbure M R, par γ_1 γ_2 γ_3 les cosinus directeurs de la tangente à la deuxième ligne de courbure M S, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

est un déterminant orthogonal (1).

Si l'on désigne par $a\,b\,m\,n$ les rotations de ce déterminant, on a les relations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\alpha_i}{\partial u} &= a\beta_i \\ \frac{\partial\alpha_i}{\partial v} &= b\gamma_i \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\beta_i}{\partial u} &= -a\alpha_i - m\gamma_i \\ \frac{\partial\beta_i}{\partial v} &= \quad n\gamma_i \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\gamma_i}{\partial u} &= m\beta_i \\ \frac{\partial\gamma_i}{\partial u} &= -b\alpha_i - n\beta_i \end{aligned}\right. \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial v} &= bm \\ \frac{\partial b}{\partial u} &= an \end{aligned}\right.$$

$$ab + \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial v} = 0.$$

Nous nous proposons de déterminer la relation supplémentaire qui doit exister entre les quantités a b $m.n$ lorsque ce déterminant correspond à une surface S.

Considérons le réseau décrit par le deuxième centre de courbure de la

---

(1) *Annales É. N. S.*, 1903. Mémoire de M. Guichard.

surface. Les paramètres normaux des tangentes à ce réseau sont les quantités

$$\xi_i = \beta_i - \frac{n}{b}\alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

$$\eta_i = \frac{\alpha_i}{b}$$

$$[m] = \frac{a}{b}$$

$$[n] = -b\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{n}{b}\right).$$

Il faut exprimer que la congruence plane définie par les quantités, ξ_1 ξ_2 est une congruence L_{00}. M. Guichard a établi que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi se traduisait par la relation (1)

$$\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = [n].$$

On obtient ainsi

$$\alpha_3 = b^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{n}{b}\right).$$

On obtiendrait donc une relation nouvelle entre les quantités a b m n en exprimant que la valeur ainsi obtenue pour α_3 satisfait à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v}$$

relation qui permettrait avec les trois équations déjà obtenues de déterminer les quatre quantités considérées.

Les rotations du déterminant orthogonal étant connues on pourrait calculer la quantité α_3, on en déduirait aisément les expressions de β_3 et de γ_3.

On aurait ainsi les éléments d'une colonne du déterminant orthogonal, le calcul des autres éléments peut s'achever par des quadratures.

Il suffit de poser pour cela

$$\alpha_1 + i\,\alpha_2 = e^x(1 + \alpha_3)$$
$$\alpha_1 - i\,\alpha_2 = e^{-x}(1 - \alpha_3).$$

(1) Cette relation suppose un choix convenable des variables.

On en déduit après quelques calculs faciles les égalités

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a\ \frac{\beta_3 + i\gamma_3}{\alpha_3^2 - 1}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = b\ \frac{\gamma_3 - i\beta_3}{\alpha_3^2 - 1}.$$

Le système ainsi obtenu est un système complet. La quantité x étant déterminée on déduit les expressions de α_1, α_2 puis de $\beta_1\, \beta_2,\ \gamma_1\, \gamma_2$. On a donc tous les éléments du déterminant.

Nous allons montrer maintenant comment l'on peut déterminer, en partant de là, les éléments du réseau rectangulaire plan considéré dans la première méthode.

Les quantités $\alpha_1\ \alpha_2$ sont les paramètres de la projection sur le plan $x_1\ o x_2$ de la normale à la surface. Elles sont solutions en même temps que les quantités α_3 et i de l'équation de Laplace que nous avons considérée. Elles définissent donc une congruence H et les points M M' dont les coordonnées sont

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{\alpha_1}{1-\alpha_3} \\ x_2 &= \frac{\alpha_2}{1-\alpha_3} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x'_1 &= \frac{\alpha_1}{1+\alpha_3} \\ x'_2 &= \frac{\alpha_2}{1+\alpha_3} \end{aligned}\right.$$

décrivent des réseaux O conjugués à cette congruence.

Ces réseaux se correspondent dans une inversion ayant pour pôle l'origine et pour puissance l'unité.

Les premières égalités donnent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{a}{1+\alpha_3}\quad \frac{\beta_1 - \gamma_2}{1-\alpha_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} &= \frac{a}{1-\alpha_3}\quad \frac{\beta_2 + \gamma_1}{1-\alpha_3} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial v} &= \frac{b}{1-\alpha_3}\quad \frac{\gamma_1 + \beta_2}{1-\alpha_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} &= \frac{b}{1-\alpha_3}\quad \frac{\gamma_2 - \beta_1}{1+\alpha_3}. \end{aligned}\right.$$

On pourra prendre

$$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{\beta_1 - \gamma_2}{1 - \alpha_3} \\ \xi_2 = \dfrac{\beta_2 + \gamma_1}{1 - \alpha_3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_1 = -\dfrac{\gamma_1 + \beta_2}{1 - \alpha_3} \\ \eta_2 = -\dfrac{\gamma_2 - \beta_1}{1 - \alpha_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = \dfrac{a}{1 - \alpha_3} \\ l = -\dfrac{b}{1 - \alpha_3}. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que l'on a

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$$
$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$$
$$\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1 = 0.$$

de sorte que l'on peut écrire

$$\cos \varphi = \frac{\beta_1 - \gamma_2}{1 - \alpha_3}$$
$$\sin \varphi = \frac{\beta_2 + \gamma_1}{1 - \alpha_3}.$$

On calcule les rotations M N qui sont égales à

$$M = \frac{(m\,\alpha_3 - a\,\gamma_3) - m}{1 - \alpha_3}$$
$$N = \frac{(n\,\alpha_3 - b\,\beta_3) - n)}{(1 - \alpha_3)},$$

puis les quantités q et r.

$$q = \frac{\beta_3}{1 - \alpha_3}$$
$$r = \frac{\gamma_3}{1 - \alpha_3}.$$

Des calculs analogues pourraient être faits pour le deuxième réseau. Nous remarquerons simplement que la connaissance d'une solution q et r relative au réseau M permet de déduire une solution particulière q' et r' relative au réseau M'.

Les raisonnements faits plus haut s'appliquent à ce nouveau réseau. On définit donc ainsi une première transformation du problème qui se poursuit indéfiniment par quadrature.

Nous allons indiquer maintenant une deuxième transformation qui permet de déduire d'un déterminant orthogonal particulier une infinité d'autres déterminants.

Les quantités α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 = i$ sont solutions d'une même équation de Laplace et sont liées par la relation

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 0.$$

Si l'on désigne par ϖ une constante donnée il en sera de même des quantités

$$\alpha_1 \qquad \alpha_2 \qquad \alpha_3 \, \mathrm{C}h\,\varpi + \mathrm{S}h\,\varpi \qquad i\,(\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi).$$

Les expressions

$$[\alpha_1] = \frac{\alpha_1}{\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi}$$

$$[\alpha_2] = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi}$$

$$[\alpha_3] = \frac{\alpha_3 \, \mathrm{C}h\,\varpi + \mathrm{S}h\,\varpi}{\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi}$$

qui vérifient la relation

$$[\alpha_1]^2 + [\alpha_2]^2 + [\alpha_3]^2 = 1$$

sont solutions d'une même équation de Laplace analogue à la première et peuvent être considérées comme les cosinus directeurs de la normale à une surface.

Remarquons dès maintenant que les quantités $[\alpha_1]$ $[\alpha_2]$ étant proportionnelles aux quantités α_1 α_2 les éléments nouveaux ainsi définis correspondront à une nouvelle surface (S).

Il est facile de compléter le déterminant orthogonal. On pourra prendre

$$[a] = \frac{a}{\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi} \qquad [b] = \frac{b}{\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi}$$

et on en déduit

$$[m] = m - \frac{a\,\gamma_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi}{\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi}$$

$$[n] = n - \frac{b\,\beta_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi}{\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi}$$

$$\left\{\begin{aligned} [\beta_1] &= \beta_1 - \frac{\alpha_1 \beta_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi}{\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi} \\ [\beta_2] &= \beta_3 - \frac{\alpha_2 \beta_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi}{\alpha_2 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi} \\ [\beta_3] &= \frac{\beta_3}{\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} [\gamma_1] &= \gamma_1 - \frac{\alpha_1 \gamma_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi}{\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi} \\ [\gamma_3] &= \gamma_2 - \frac{\alpha_2 \gamma_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi}{\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi} \\ [\gamma_3] &= \frac{\gamma_3}{\alpha_3 \, \mathrm{S}h\,\varpi + \mathrm{C}h\,\varpi}. \end{aligned}\right.$$

Chaque valeur de ϖ permet de déterminer une surface S nouvelle. On a ainsi une nouvelle infinité de surfaces (1).

Nous n'avons défini jusqu'à maintenant que les éléments de direction du réseau focal C_2 décrit par le deuxième centre de courbure. Il reste à déterminer effectivement ce réseau (2).

Si l'on désigne par $x_1\ x_2\ x_3$ les coordonnées de C_2, l'axe du complexe étant le troisième axe de coordonnées, on déterminera $x_1\ x_2$ par les égalités

$$x_1\,(b\,\beta_2 - n\,\alpha_2) - x_2\,(b\,\beta_1 - n\,\alpha_1) \qquad = \lambda\,(b\,\beta_3 - n\,\alpha_3)$$
$$x_2\,\frac{\partial}{\partial u}\,(b\,\beta_2 - n\,\alpha_2) - x_2\,\frac{\partial}{\partial u}\,(b\,\beta_2 - n\,\alpha_1) = \lambda\,\frac{\partial}{\partial u}\,(b\,\beta_3 - n\,\alpha_3).$$

On vérifie que les expressions $x_1\ x_2$ ainsi obtenues satisfont à des relations de la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= h\,(b\,\beta_1 - n\,\alpha_1) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} &= h\,(b\,\beta_2 - n\,\alpha_2) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial v} &= l\,\alpha_1 \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} &= l\,\alpha_2 \end{aligned}\right.$$

et que le système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_3}{\partial u} &= h\,(b\,\beta_3 - n\,\alpha_3) \\ \frac{\partial x_3}{\partial v} &= l\,\alpha_3 \end{aligned}\right.$$

est un système complet.

L'intégration de ces équations déterminera le réseau C_2. La détermination des surfaces S trajectoires orthogonales de la première tangente est classique. Remarquons que la constante introduite par cette dernière intégration correspond à une translation parallèlement à l'axe du complexe.

---

(1) La transformation indiquée revient à la transformation de Ribaucour, étudiée avec les notations de M. Guichard.

(2) La méthode a été indiquée d'une façon générale par M. Guichard.

ÉTUDE DE SURFACES PARTICULIÈRES

Nous envisagerons d'abord le cas, écarté au début, où le réseau focal C_2 de la congruence de normales se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe du complexe suivant un réseau O.

En conservant les notations employées, la condition pour que la première tangente au réseau O soit parallèle à la projection d'une congruence appartenant à un complexe linéaire qui s'exprime par l'égalité,

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = n$$

lorsque les variables ont été convenablement choisies devient

$$n = 1.$$

On doit donc avoir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 1.$$

Par suite on pourra prendre

$$\varphi = u + v.$$

Le réseau O sera défini par les quantités

$$\begin{array}{lll} \xi_1 = \cos(u+v) & \xi_2 = \sin(u+v) & m = -1 \\ \eta_1 = -\sin(u+v) & \eta_2 = \cos(u+v) & n = 1. \end{array}$$

On peut remarquer, en se reportant aux expressions qui définissent les paramètres normaux du réseau dérivé que ce réseau est aussi un réseau O dont les paramètres ont la même forme que ceux du réseau primitif. Il en résulte que le réseau que nous considérons a la propriété, qui le caractérise d'ailleurs, de se transformer indéfiniment par la méthode de Laplace, en des réseaux O analogues.

L'équation de Laplace à laquelle satisfont les paramètres des deuxièmes tangentes d'un réseau s'écrit

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{m}\,\frac{\partial m}{\partial v}\,\frac{\partial \eta}{\partial u} + mn\,\eta$$

et se réduit dans le cas particulier que nous considérons à

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\, \partial v} + \eta = 0.$$

Un calcul simple montre alors que l'on peut pour définir la congruence de normales prendre les paramètres complémentaires

$$\eta_3 = \mathrm{S}h\left(\omega\, u - \frac{1}{\omega}\, v + \alpha\right) \qquad \eta_4 = \mathrm{C}h\left(\omega\, u - \frac{1}{\omega}\, v + \alpha\right),$$

ω et α étant deux constantes arbitraires.

Les cosinus directeurs α_1 α_2 α_3 seront alors

$$\alpha_1 = -\frac{\sin\,(u + v}{\mathrm{C}h\left(\omega\, u - \frac{1}{\omega}\, v + \alpha\right)} \qquad \alpha_2 = -\frac{\cos\,(u + v)}{\mathrm{C}h\left(\omega\, v - \frac{1}{\omega}\, v + \alpha\right)} \qquad \alpha_3 = \mathrm{T}h\left(\omega\, u - \frac{1}{\omega}\, v + \alpha\right).$$

Les paramètres complémentaires correspondants ξ_3 ξ_4 définis par l'égalité

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = m\,\xi$$

seront

$$\xi_3 = -\,\omega\,\mathrm{C}h\left(\omega u - \frac{1}{\omega}\, v + \alpha\right) \qquad \xi_4 = -\,\omega\;\mathrm{S}h\left(\omega\, u - \frac{1}{\omega}\, v + \alpha\right).$$

On peut remarquer que la congruence plane définie par les paramètres $\eta_1\,\eta_2$ peut être considérée comme la projection d'une double infinité de congruences de normales. Il en résulte que l'on pourra déterminer une double infinité de familles de réseaux de rectangulaires parallèles conjugués à cette congruence.

Ces réseaux sont déterminés par les quantités

$$x_1 = -\,e^{\left(\omega\, u - \frac{1}{\omega}\, v + \alpha\right)} \sin\,(u + v) \qquad x_2 = e^{\left(\omega\, u - \frac{1}{\omega}\, v + \alpha\right)} \cos\,(u + v).$$

Leurs paramètres normaux peuvent être pris égaux à

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} [\cos(u+v) + \omega \sin(u+v)]$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} [\sin(u+v) - \omega \cos(u+v)]$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} [\omega \cos(u+v) - \sin(u+v)]$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} [\omega \sin(u+v) + \cos(u+v)].$$

Ils se déduisent donc du réseau focal primitif par une rotation convenable, et se transforment comme lui par l'application de la méthode de Laplace en des réseaux O.

De plus, on voit que sans diminuer la généralité du problème on peut supposer que la constante α est réduite à zéro. Il suffit pour cela de faire le changement de variables

$$U = u + \lambda \qquad V = v - \lambda$$

et de déterminer λ par la condition

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)\lambda + \alpha = 0.$$

Nous prendrons donc comme cosinus directeurs de la normale les quantités

$$\alpha_1 = -\frac{\sin(u+v)}{Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right)} \qquad \alpha_2 = \frac{\cos(u+v)}{Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right)} \qquad \alpha_3 = Th\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \text{(1)}.$$

Les coordonnées x_1 x_2 du même réseau focal C_0 seront déterminées par les équations

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 \sin(u+v) - x_2 \cos(u+v) = \lambda Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \\ x_2 \cos(u+v) + x_2 \sin(u+v) = \lambda \omega \, Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right). \end{cases}$$

(1) Le déterminant orthogonal correspondant à ces surfaces particulières sera déterminé dans la suite.

On a

$$x_1 = \lambda \left[\quad Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \sin(u+v) + \omega\, Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \cos(u+v) \right]$$

$$u_2 = \lambda \left[- Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \cos(u+v) + \omega\, Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \sin(u+v) \right].$$

On vérifie que

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \quad h \cos(u+v) \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -l \sin(u+v) \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial u} &= h \sin(u+v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} &= l \cos(u+v) \end{aligned} \right.$$

égalités dans lesquelles les expressions h et l sont

$$h = \lambda(1+\omega^2)\, Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right)$$

$$l = \lambda \frac{(1+\omega^2)}{\omega} Sh\left(\omega n - \frac{1}{\omega} v\right).$$

La troisième coordonnée x_3 sera obtenue en intégrant le système

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} = -\lambda\omega\,(1+\omega^2)\, Ch^2\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial v} = \quad \lambda\, \frac{(1+\omega^2)}{\omega} Sh^2\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right).$$

On pourra prendre

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}(1+\omega^2)\left[\frac{1}{2} Sh\, 2\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) + \omega u + \frac{1}{\omega} v\right].$$

Des équations (1) on peut déduire les propriétés suivantes :

La deuxième équation montre que la première tangente au réseau focal C_2 appartient à un complexe linéaire ayant pour axe OX_3. Les surfaces (S) correspondantes sont des hélicoïdes. Il en est de même de la surface focale C_2 et de toutes les surfaces correspondant aux réseaux qui se déduisent de C_2 par la méthode de Laplace.

D'autre part, le réseau C_2 est un réseau de Wilezynski. Il en sera de même de tous les réseaux qui en dérivent. La forme même des équations montre que si l'on considère les projections sur le plan $X_1\, OX_2$ du réseau C_2 et de tous les réseaux qui en dérivent, on a une suite de réseaux plans que nous désignerons par $\ldots c'_2\ c'_2\ c_2\ c_1\ c'_1\ c'_1$ qui sont de deux en deux homothétiques par rapport à l'origine O. Le rapport d'homothétie étant égal à ω^2.

On sait de plus, que si l'on considère des valeurs de u et de v déterminées, les points de la suite de Laplace se trouvent sur deux droites déterminées qui, dans le cas particulier que nous considérons rencontrent l'axe Ox_3 et sont parallèles au plan $x_1\ ox_2$. Nous remarquerons aussi que dans le cas où ω est solution d'une équation

$$\omega^n = 1$$

la série de réseaux déduite du réseau focal C_2 par la méthode de Laplace est une série comprenant un nombre limité de réseaux (1).

Il nous reste à déterminer les surfaces S correspondant à la congruence de normales. Cette étude pourrait être faite directement mais elle peut être simplifiée par la remarque suivante.

Nous avons vu que par un choix convenable des paramètres l'équation de Laplace pouvait être ramenée à la forme

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\, \partial v} + \eta = 0.$$

La congruence de normales est donc une congruence de Ribaucour et nous déterminerons le réseau décrit par le point central.

Désignons par $z_1\ z_2\ z_3$ les coordonnées de ce point. On peut exprimer ces quantités en fonctions des valeurs de $x_1\ x_2\ x_3$ précédemment calculées par les égalités

$$z_1 = x_1 - \frac{h}{2\,m}\,\eta_1$$

$$z_2 = x_2 - \frac{h}{2\,m}\,\eta_2$$

$$z_3 = x_3 - \frac{h}{2\,m}\,\eta_3.$$

On obtient de cette façon

$$z_1 = \lambda\left[\omega\, Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right)\cos(u+v) + \frac{1-\omega^2}{2}\, Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right)\sin(u+v)\right]$$

$$z_2 = \lambda\left[\omega\, Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right)\sin(u+v) - \frac{1-\omega^2}{2}\, Ch\left(\omega n - \frac{1}{\omega} v\right)\cos(u+v)\right]$$

$$z_3 = -\frac{\lambda}{2}(1+\omega^2)\left(\omega u + \frac{1}{\omega} v\right).$$

(1) Propriété signalée par M. Demoulin.

Nous allons vérifier que les tangentes aux courbes coordonnées du réseau sont rectangulaires.

On obtient (1).

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{\lambda(1+\omega^2)}{2}\left[Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega}v\right)\cos(u+v) - \omega\, Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega}v\right)\sin(u+v)\right]$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial u} = \frac{\lambda(1+\omega^2)}{2}\left[Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega}v\right)\sin(u+v) + \omega\, Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega}v\right)\cos(u+v)\right]$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial u} = -\frac{\lambda}{2}\omega(1+\omega^2)$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial v} = -\frac{\lambda(1+\omega^2)}{2}\left[Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega}v\right)\cos(u+v) + \frac{1}{\omega}Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega}v\right)\sin(u+v)\right]$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial v} = \frac{\lambda(1+\omega^2)}{2}\left[-Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega}v\right)\sin(u+v) + \frac{1}{\omega}Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega}v\right)\cos(u+v)\right]$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial v} = -\frac{\lambda}{2}\frac{(1+\omega^2)}{\omega}.$$

On vérifie sans peine que l'on a

$$\frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} + \frac{\partial z_2}{\partial u}\frac{\partial z_2}{\partial v} + \frac{\partial z_3}{\partial u}\frac{\partial z_3}{\partial v} = 0$$

$$\eta_1\frac{\partial z_1}{\partial} + \eta_2\frac{\partial z_2}{\partial u} + \eta_3\frac{\partial z_3}{\partial u} = 0$$

$$\eta_1\frac{\partial z_1}{\partial v} + \eta_2\frac{\partial z_2}{\partial v} + \eta_3\frac{\partial z_3}{\partial v} = 0.$$

Égalités qui montrent que la surface moyenne de la congruence de normales est une surface orthogonale particulière. Les courbes coordonnées sont les lignes de courbure de cette surface. On obtient donc comme surface (S) particulière un hélicoïde minima. Nous nous contenterons de signaler que l'on peut obtenir ainsi tous ces hélicoïdes. On vérifie immédiatement que dans le cas où l'on a $\omega = 1$ on obtient l'hélicoïde minima réglé. La série des réseaux se ferme après quatre opérations.

Il résulte donc de ce qui précède que si l'on considère les hélicoïdes minima où les surfaces parallèles à ces hélicoïdes, les congruences formées par les normales à ces surfaces sont telles que toutes les congruences qui en dérivent appartiennent à des complexes linéaires.

---

(1) Ces expressions représentent à un facteur constant près les éléments β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3, du déterminant orthogonal.

On pourrait se proposer d'appliquer à ces surfaces particulières la transformation de Ribaucour.

Il est manifeste que cette transformation ne donnerait pas de surface nouvelle. Elle permettrait de passer d'une congruence de normales définie par les paramètres

$$-\sin(u+v) \qquad \cos(u+v) \qquad \mathrm{S}h\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right)$$

à une congruence de normales dont les paramètres seraient

$$-\sin(u+v) \qquad \cos(u+v) \qquad \mathrm{S}h\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v + \alpha\right).$$

Nous avons remarqué que par un changement de variables convenable, on pouvait réduire la constante α à zéro.

ÉTUDE GÉNÉRALE DES HÉLICOÏDES

L'étude des hélicoïdes nous donnera de nouveaux exemples de surfaces S caractérisées par le fait que les deux tangentes aux réseaux décrits par les centres de courbure appartiennent à des complexes linéaires [1].

Nous appliquerons à cette étude la deuxième méthode et nous déterminerons d'abord les propriétés du déterminant orthogonal relatif aux hélicoïdes.

Les quantités α satisfont à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{a}\,\frac{\partial a}{\partial v}\,\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\frac{1}{b}\,\frac{\partial b}{\partial u}\,\frac{\partial\alpha}{\partial v}.$$

Si la normale à une surface appartient à un complexe linéaire, les quantités α_1 α_2 satisfont aux relations

$$\alpha_1\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}-\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}=a^2\,\mathrm{U}$$

$$\alpha_1\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}-\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial v_1}=b^2\,\mathrm{V}.$$

L'une de ces relations est la conséquence de l'autre. Par un choix convenable des variables on peut réduire les fonctions U V de la variable u et de la variable v à l'unité.

On en déduit alors

$$\beta_3=b$$

$$\gamma_3=a.$$

---

(1) Nous n'envisageons que le cas où les complexes nécessairement différents ont leurs axes parallèles à l'axe O X_3.

On a

$$\frac{\partial\beta_3}{\partial v} = n\gamma_3 = na$$

$$\frac{\partial b}{\partial u} = an = \frac{\partial\beta_3}{\partial u}.$$

Donc

$$\frac{\partial\beta_3}{\partial u} = \frac{\partial\beta_3}{\partial v}.$$

Par suite

$$\beta_3 = b = g\,(u+v).$$

On verrait de même que

$$\gamma_3 = a = f\,(u+v).$$

L'égalité

$$\frac{\partial\gamma_3}{\partial u} = -b\,\alpha_3 - n\,\beta_3 = m\,\beta_3 = \frac{\partial\gamma_3}{\partial v}$$

montre que

$$\alpha_3 = -(m+n).$$

Les égalités

$$a' = bm \qquad b' = an \qquad a^2 + b^2 + (m+n)^2 = 1$$

qui montrent que les quantités m et n sont des fonctions de $(u+v)$ et qui entraînent la condition

$$ab + m' + n' = 0\ .$$

donnent les relations nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre quatre fonctions de $u+v$ pour que ces fonctions soient les rotations d'un déterminant orthogonal correspondant à un hélicoïde.

Pour qu'un hélicoïde soit une surface (S) il faut que la relation

$$\beta_3 = a^2\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{m}{a}\right)\mathrm{U}$$

soit vérifiée. On voit que la fonction U doit se réduire nécessairement à une constante et l'on peut écrire

$$b = \lambda\,(m'a - bm')$$

ou

$$\frac{\lambda m'}{1+\lambda m^2}=\frac{b}{a}.$$

On déduit

$$\frac{\lambda mm'}{1+\lambda m^2}=\frac{bm}{a}=\frac{a'}{a}$$

et une intégration donne

$$C^2a^2 = 1+\lambda m^2$$
$$C^2a^2-\lambda m^2 = 1.$$

On a par suite entre les quantités a et m une relation de la forme

$$\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\mu^2}=1$$

qui traduit analytiquement la propriété du réseau focal C_2 d'avoir sur le plan X_1OX_2 même projection qu'un réseau de Wilezynski.

On sait que si cette propriété existe pour un réseau elle existe pour tous les réseaux qui en dérivent par la méthode de Laplace. Il est donc certain que la relation précédente entraîne une relation analogue entre les quantités b et n. On peut le vérifier directement en tenant compte de la relation

$$ab+m'+n'=0. \qquad \text{(A)}$$

Nous opérerons d'une façon différente et nous donnant *a priori* les relations

$$\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\mu^2}=1$$
$$\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{n^2}{\nu^2}=1$$

nous chercherons quelles relations doivent lier $\alpha\ \beta\ \mu\ \nu$ pour que l'égalité

$$ab+m'+n'=0$$

soit identiquement vérifiée

On peut poser

$$\begin{cases} a=\alpha\cos\varphi \\ m=\mu\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} b=\beta\cos\psi \\ n=\nu\sin\psi \end{cases}$$

De

$$a' = bm$$

on déduit

$$\varphi' = -\frac{\beta\mu}{\alpha}\cos\psi.$$

On aurait de même

$$\psi' = -\frac{\alpha\nu}{\beta}\cos\varphi.$$

Entre φ et ψ on doit donc avoir

$$\frac{\alpha\nu}{\beta}\sin\varphi = \frac{\beta\mu}{\alpha}\sin\psi + C.$$

L'égalité (A) est vérifiée si l'on a

$$\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2} = 1.$$

Nous prendrons

$$\mu = \alpha\cos\omega \qquad \nu = \beta\sin\omega$$

et nous aurons

$$\begin{cases} a = \alpha\cos\varphi \\ m = \alpha\cos\omega\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \beta\cos\psi \\ n = \beta\sin\omega\sin\psi. \end{cases}$$

Enfin la constante C doit être choisie de façon que l'on ait

$$a^2 + b^2 + (m+n)^2 = 1.$$

on vérifie qu'il suffit de prendre

$$C = \xi\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1} \ .$$
$$\xi = \pm 1$$

et la relation qui lie φ et ψ prend la forme

$$\alpha\sin\omega\sin\varphi - \beta\cos\omega\sin\psi = \xi\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}.$$

Les conditions qui ont été exprimées sont des conditions nécessaires. Elles ne sont pas en général suffisantes. Si les quantités $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ étaient déterminées on pourra déterminer les coordonnées x_1, x_2, du point qui décrit le réseau C_2 par les conditions.

$$x_1 \alpha_2 - x_2 \alpha_1 = \alpha_3$$
$$x_1 \beta_2 - x_2 \beta_1 = \beta_3$$

et, dans ces conditions, la congruence formée par les normales appartiendra à un complexe linéaire.

Si l'on considère le cas où la congruence formée par les axes des cercles osculateurs appartient à un complexe de même axe, il faudra que des deux équations précédentes on puisse déduire l'équation nouvelle

$$x_1 (m \alpha_2 - a \gamma_2) - x_2 (m \alpha_1 - a \gamma_1) = \lambda (m \alpha_3 - a \gamma_3),$$

on obtient ainsi la condition

$$(\lambda - 1)(m \alpha_3 - a \gamma_3) = 1$$
$$\alpha \sin \omega \sin \varphi [\alpha \sin \omega \sin \varphi - \beta \cos \omega \sin \psi] = \frac{1}{\lambda - 1} + \alpha^2$$

qui n'est compatible avec la relation précédemment trouvée que dans le cas où l'on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Nous prendrons

$$\alpha = \cos \theta \qquad \beta = \sin \theta$$

et nous aurons pour définir φ et ψ les égalités

$$\sin \omega \cos \theta \sin \varphi = \sin \theta \cos \omega \sin \psi$$
$$\varphi' = - \sin \theta \cos \omega \cos \psi$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d \varphi}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \omega}{\operatorname{tg}^2 \theta} \sin^2 \varphi}} = \pm \sin \theta \cos \omega \, d x.$$

Nous distinguerons différents cas.

I. Si $\omega = \theta$ φ peut être déterminé par les fonctions élémentaires. On voit que l'on a

$$\sin \varphi = \sin \psi$$

et l'on peut supposer

$$\varphi = \psi.$$

On pourra prendre ensuite

$$\alpha_3 = -(m + n) = -\sin\varphi = Th[\sin\theta\cos\theta\,(u + v)]\,.$$

$$\beta_3 = b = \frac{\sin\theta}{Ch\,[\sin\theta\cos\theta\,(u + v)]} \qquad m = -\cos^2\theta\; Th\,[\sin\theta\cos\theta\,(u + v)]$$

$$\gamma_3 = a = \frac{\cos\theta}{Ch\,[\sin\theta\cos\theta\,(u + v)]} \qquad n = -\sin^2\theta\; Th[\sin\theta\cos\theta\,(u + v)].$$

La méthode générale indiquée permet de calculer

$$\alpha_1 = \frac{\cos\,(\cos^2\theta\, u - \sin^2\theta\, v)}{Ch[\sin\theta\,\cos\theta\,(u + v)]}$$

$$\alpha_2 = \frac{\sin\,(\cos^2\theta\, u - \sin^2\theta\, v)}{Ch[\sin\theta\cos\theta\,(u + v)]}.$$

On calculerait facilement $\beta_1\; \beta_2\; \gamma_1\; \gamma_2$. Nous n'insisterons pas devantage sur ce cas particulier. On reconnaît qu'un changement de notation donnerait les congruences de normales définies dans le premier exemple.

II. Nous envisagerons le cas où $\theta \neq \omega$. On peut supposer d'ailleurs $\theta > \omega$. Il suffit de permuter φ et ψ pour intervertir le rôle des deux constantes.

φ est donné en fonction de $(u + v)$ par une intégrale elliptique. On pourra poser dans ce cas

$$\sin\varphi = -sn\,[\sin\theta\cos\omega\,(u + v)]$$

et on en déduira.

$$\gamma_3 = a = \cos\theta\; cn\,[\sin\theta\cos\omega\;(u + v)] \qquad m = -\cos\theta\cos\omega\; sn\,[\sin\theta\cos\omega\;(u + v)]$$

$$\beta_3 = b = \sin\theta\; dn\,[\sin\theta\cos\omega\;(u + v)] \qquad n = m\,\mathrm{tg}^2\,\omega$$

$$\alpha_3 = -(m + n) = \frac{\cos\omega}{\cos\theta}\, sn\,[\sin\theta\cos\omega\,(u + v)].$$

Si l'on désigne par $\pi\,(x)$ l'intégrale elliptique de troisième espèce défini par

$$\pi\,(x) = (\cos^2\theta - \cos^2\omega)\int \frac{dx}{1 - \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\, sn^2\,(\sin\theta\cos\omega\, x)}.$$

on trouve facilement

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \sqrt{1-\alpha_3^2}\cos\left[\cos^2\omega\, u - \sin^2\omega\, v + \pi\,(u+v)\right] \\ \alpha_2 = \sqrt{1-\alpha_3^2}\sin\left[\cos^2\omega\, u - \sin^2\omega\, v + \pi\,(u+v)\right] \\ \alpha_3 = \dfrac{\cos\omega}{\cos\theta}\, sn\left[\sin\theta\cos\omega\,(u+v)\right]. \end{array}\right.$$

On a ensuite

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_1 = \dfrac{-\alpha_3\beta_3\cos\left[F(u,v)\right] - \sin\left[F(u,v)\right]\gamma_3}{\sqrt{1-\alpha_3^2}} \\ \beta_2 = \dfrac{-\alpha_3\beta_3\sin\left[F(u,v)\right] + \cos\left[F(u,v)\right]\gamma_3}{\sqrt{1-\alpha_3^2}} \\ \beta_3 = \quad \sin\theta\; dn\;\left[\sin\theta\cos\omega\,(u+v)\right] \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_1 = \dfrac{-\gamma_3\alpha_3\cos\left[F(u,v)\right] + \beta_3\sin\left[F(u,v)\right]}{\sqrt{1-\alpha_3^2}} \\ \gamma_2 = \dfrac{-\gamma_3\alpha_3\sin\left[F(u.v)\right] - \beta_3\cos\left[F(u,v)\right]}{\sqrt{1-\alpha_3^2}} \\ \gamma_3 = \quad \cos\theta\; cn\;\left[\sin\theta\cos\omega\,(u+v)\right). \end{array}\right.$$

Expressions dans lesquelles on a désigné par F $(u,\ v)$ la fonction

$$F\,(u,v) = \cos^2\omega\, u - \sin^2\omega\, v + \pi\,(u+v).$$

Enfin, entre $a\ b\ m\ n$ on a les relations

$$\frac{a^2}{\cos^2\theta} + \frac{m^2}{\cos^2\theta\cos^2\omega} = 1$$

$$\frac{b^2}{\sin^2\theta} + \frac{n^2}{\sin^2\theta\sin^2\omega} = 1.$$

Pour déterminer le réseau focal C_1 nous aurons les équations

$$x_1\,\alpha_2 - x_2\,\alpha_1 = \lambda\,\alpha_3$$

$$x_1\,\beta_2 - x_2\,\beta_1 = \lambda\,\beta_3$$

qui donnent

$$x_1 = -\lambda\,\frac{\gamma_2}{\gamma_3} \qquad x_2 = \lambda\,\frac{\gamma_1}{\gamma_3}.$$

Si l'on remarque que l'on a les égalités

$$\frac{m\,\alpha_1 - a\,\gamma_1}{n\,\alpha_1 - b\,\beta_1} = \frac{m\,\alpha_2 - a\,\gamma_2}{n\,\alpha_2 - b\,\beta_2} = -1$$

on déduit facilement

$$h = -\frac{\lambda m}{\gamma_3^2} \qquad l = -\frac{\lambda}{\gamma_3^2}$$

et la troisième coordonnée x_3 doit être déterminée par

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} = -\lambda \frac{m \alpha_3}{\gamma_3^2}$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial v} = -\frac{\lambda}{\gamma_3^2}(m \alpha_3 - a \gamma_3)$$

ou encore

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} = \lambda \left(\frac{\cos^2 \theta}{\gamma_3^2} - 1\right)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial v} = \lambda \frac{\cos^2 \theta}{\gamma_3^2};$$

x_3 est exprimé par une intégrale elliptique de troisième espèce.

Les coordonnées d'un point d'une surface S sont de la forme

$$X = x + \rho \alpha.$$

Si l'on exprime que les quantités $\frac{\partial X}{\partial u}$ $\frac{\partial X}{\partial v}$ sont proportionnelles à $\beta_1 \gamma_1$ on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{\partial \rho}{\partial v} = \lambda \frac{m}{\gamma_3^2}$$

et par suite

$$\rho = \frac{\lambda}{\cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 \omega - \sin^2 \theta} \frac{\beta_3}{\gamma_3} + \text{constante.}$$

Il nous reste maintenant à caractériser les surfaces S. Si nous nous reportons aux éléments du déterminant orthogonal correspondant aux surfaces S on voit que l'on a les égalités

$$\alpha_3 = -\frac{m}{\cos^2 \omega} = -\frac{n}{\sin^2 \omega}.$$

Ces égalités ont une interprétation géométrique immédiate. Elles expriment que le réseau formé par les lignes de courbure des surfaces (S) est projeté sur le plan $X_1 O X_2$ suivant un réseau dont les deux tangentes décrivent des congruences L_{00}.

Il est naturel de chercher si parmi les surfaces (S) parallèles ainsi déterminées, il existe des surfaces particulières pour lesquelles les tangentes aux deux familles de lignes de courbure appartiennent à un complexe linéaire.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que l'on puisse choisir la constante d'intégration qui figure dans l'expression de la quantité ρ de manière que l'on ait identiquement

$$(x_1 + \rho\alpha_1)\beta_2 - (x_2 + \rho\alpha_2)\beta_1 = K\beta_3 \quad (B)$$

K étant une constante.

Si l'on tient compte de l'égalité

$$x_1\beta_2 - x_2\beta_1 = \lambda\beta_3.$$

on voit que l'on doit avoir

$$\rho\gamma_3 = (K - \lambda)\beta_3.$$

Il en résulte que la solution particulière

$$\rho = \frac{\lambda}{\cos^2\theta\, tg^2\omega - \sin^2\theta}\,\frac{\beta_3}{\gamma_3}$$

détermine une surface (S) pour laquelle les tangentes aux premières lignes de courbure appartiennent à un complexe linéaire. On vérifie immédiatement qu'il en est de même des tangentes aux deuxièmes lignes de courbure de cette surface (1).

La quantité ρ ainsi définie détermine l'un des rayons de courbure principaux de la surface particulière S. On calcule facilement le deuxième rayon de courbure principal et on obtient ainsi

$$R_1 = -\frac{\lambda}{\cos^2\theta\, tg^2\omega - \sin^2\theta}\,\frac{\beta_3}{\gamma_3}$$

$$R_2 = -\frac{\lambda\, tg^2\omega}{\cos^2\theta\, tg^2\omega - \sin^2\theta}\,\frac{\gamma_3}{\beta_3}.$$

---

(1) Ces résultats peuvent être rattachés à une propriété générale des réseaux de Wilezynski. Si les premières tangentes d'un réseau appartiennent à un complexe linéaire C_1 et que les deuxièmes tangentes appartiennent à un complexe C_2 il existe parmi les congruences harmoniques au réseau une infinité de congruences appartenant à des complexes linéaires. Soit G l'une d'entre elles. Le complexe C auquel elle appartient fait nécessairement partie du faisceau défini par les complexes C_1 C_2. On démontre que les congruences qui dérivent de G par la transformation de Laplace appartiennent à des complexes linéaires, et d'une façon plus générale encore que deux congruences G_1 G_2 particulières se coupent en un point M qui décrit un réseau de Wilezynski.

Par suite si l'égalité (B) est vérifiée, les tangentes aux secondes lignes de courbure appartiennent forcément à un complexe linéaire.

On a donc la relation

$$R_1 R_2 = \frac{\lambda^2 \operatorname{tg}^2 \omega}{(\cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 \omega - \sin^2 \theta)^2}$$

qui montre que la surface particulière (S) ainsi définie est un hélicoïde à courbure totale constante. On vérifierait que l'on obtient ainsi tous ces hélicoïdes [1].

Remarque I. — On aurait pu se proposer, relativement aux hélicoïdes minima une question analogue. Nous nous contenterons d'indiquer le résultat.

Il n'existe pas de surfaces parallèles à ces hélicoïdes qui soient telles que les tangentes aux deux familles de lignes de courbure appartiennent à un complexe linéaire.

Si l'on cherche les réseaux parallèles au réseau formé par les lignes de courbure de ces surfaces dont les tangentes appartiennent à un complexe on obtient les réseaux homothétiques au réseau qui correspond à la représentation sphérique de ces surfaces.

Remarque II. — On pourrait essayer de déterminer les surfaces (S) particulières pour lesquelles les normales et les axes des cercles osculateurs à une famille de lignes de courbure appartiennent à des complexes ayant leurs axes parallèles au troisième axe de coordonnées.

Nous signalerons que si les axes des deux complexes sont différents, les calculs montrent qu'il ne peut exister de solution. Il en résulte qu'il n'y a pas en dehors des hélicoïdes à courbure totale constante et des hélicoïdes minima, d'autres hélicoïdes qui soient solution du problème que nous nous sommes proposé.

Nous allons envisager maintenant le cas où les quantités α β ne vérifient plus la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Dans ce cas les surfaces S sont encore caractérisées par des propriétés analogues à celles que nous avons déjà rencontrées.

Les tangentes au réseau plan c_2 projection du réseau focal C_2 de la congruence de normale dérivent des congruences L_{00}. Cette propriété existe également pour le réseau plan c_1 et pour tous les réseaux dérivés par la méthode de Laplace.

---

(1) Darboux. Système triple, orthogonaux, Haag. — Thèse.

D'autre part entre les rotations $a\ b\ m\ n$ du déterminant orthogonal on a toujours des relations de la forme

$$\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{m^2}{\mu^2}=1$$

$$\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{n^2}{\nu^2}=1$$

$$\alpha^2\nu^2 m-\beta^2\mu^2 n=\alpha\beta\mu\nu\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}.$$

Les constantes $\alpha\ \beta\ \mu\ \nu$ vérifiant l'égalité.

$$\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}=1.$$

On pourrait déterminer directement ces surfaces. On voit d'ailleurs rapidement que l'on a à envisager deux cas différents. La détermination des quantités $a\ b\ m\ n$ peut être faite dans le cas général à l'aide des fonctions elliptiques, mais si l'on établit entre les constantes une relation convenable, cette détermination ne fait plus intervenir que les fonctions élémentaires.

Nous serons amené d'une façon plus simple à cette étude en appliquant aux surfaces particulières obtenues les transformations indiquées au premier chapitre.

Nous appliquerons d'abord au déterminant orthogonal qui correspond aux hélicoïdes à courbure totale constante la transformation de Ribaucour.

Il est évident géométriquement que cette transformation qui substitue aux quantités $\alpha_1\ \alpha_2$ des quantités proportionnelles ne change pas les éléments de direction des réseaux $C_1\ C_2$ et de tous les réseaux dérivés. On vérifie d'ailleurs que l'on a

$$[m\alpha_1-a\gamma_1]=\frac{m\alpha_1-a\gamma_1}{\alpha_3\,\mathrm{Sh}\,\varpi+\mathrm{Ch}\,\varpi}$$

$$[m\alpha_2-a\gamma_2]=\frac{m\alpha_2-a\gamma_2}{\alpha_3\,\mathrm{Sh}\,\varpi+\mathrm{Ch}\,\varpi}$$

$$[m\alpha_3-a\gamma_3]=\frac{\mathrm{Ch}\,\varpi\,(m\alpha_3-a\gamma_3)+m\,\mathrm{Sh}\,\varpi}{\alpha_3\,\mathrm{Sh}\,\varpi+\mathrm{Ch}\,\varpi}.$$

On voit aussi que les éléments du nouveau déterminant orthogonal vérifient les relations qui ont été établies pour les hélicoïdes. Des égalités

$$\gamma_3=a \qquad \beta_3=b \qquad \alpha_3=-(m+n).$$

on déduit

$$[\gamma_3] = [a] \qquad [\beta_3] = [b] \qquad [\alpha_3] = -([m] + [n]).$$

Si l'on se reporte aux expressions de a b m n précédemment trouvées on obtient

$$[a] = \frac{\cos\theta\, cn\,[\sin\theta\cos\omega\,(u+v)]}{\frac{\cos\theta}{\cos\omega} Sh\,\varpi\, sn\,[\sin\theta\cos\omega\,(u+v)] + Ch\,\varpi}$$

$$[b] = \frac{\sin\theta\, dn\,[\sin\theta\cos\omega\,(u+v)]}{\frac{\cos\theta}{\cos\omega} Sh\,\varpi\, sn\,[\sin\theta\cos\omega\,(u+v)] + Ch\,\varpi}$$

$$[m] = -\frac{\cos^2\theta\, Sh\,\varpi + \cos\theta\cos\omega\, Ch\,\varpi\, sn\,[\sin\theta\cos\omega\,(u+v)]}{\frac{\cos\theta}{\cos\omega} Sh\,\varpi\, sn\,[\sin\theta\cos\omega\,(u+v) + Ch\,\varpi}$$

$$[n] = -\frac{\sin^2\theta\, Sh\,\varpi + \cos\theta\cos\omega\, tg^2\omega\, Ch\,\varpi\, sn\,[\sin\theta\cos\omega\,(u+v)]}{\frac{\cos\theta}{\cos\varpi} Sh\,\varpi\, sn\,[\sin\theta\cos\omega\,(u+v)] + Ch\,\varpi}.$$

On en déduit les relations

$$[a]^2\,(Ch^2\varpi\cos^2\omega - Sh^2\varpi\cos^2\theta) + [m]^2 = \cos^2\theta\cos^2\omega$$
$$[b]^2\,(Ch^2\varpi\sin^2\omega - Sh^2\varpi\sin^2\theta) + [n]^2 = \sin^2\theta\sin^2\omega$$
$$(Ch^2\varpi\sin^2\omega - Sh^2\varpi\sin^2\theta)\,m - (Ch^2\varpi\cos^2\omega - Sh^2\varpi\cos^2\theta)\,n$$
$$= Sh\,\varpi\, Ch\,\varpi\,(\cos^2\theta - \cos^2\omega).$$

On obtient donc bien des relations ayant la forme indiquée. Désignons par x_1 x_2 x_3 les coordonnées du premier centre de courbure c_1 des surfaces (S). Pour déterminer x_1 x_2 nous aurons les relations

$$x_1\,(m\,\alpha_2 - a\,\gamma_2) - x_2\,(m\,\alpha_1 - a\,\gamma_1) = \lambda\,[Ch\,\varpi\,(m\,\alpha_3 - a\,\gamma_3) + m\,Sh\,\varpi]$$

que nous écrirons sous la forme équivalente

$$-x_1\,(n\,\alpha_2 - b\,\beta_2) + x_2\,(n\,\alpha_1 - b\,\beta_1) = \lambda\,[Ch\,\varpi\,\mathrm{cotg}^2\theta\,(n\,\alpha_3 - b\,\beta_3) + n\,Sh\,\varpi\,\mathrm{cotg}^2\varpi]$$

et

$$-x_1\,\alpha_2 \qquad + x_2\,\alpha_1 \qquad = \lambda\,[Ch\,\varpi\,\mathrm{cotg}^2\theta\,\alpha_3 + Sh\,\varpi\,\mathrm{cotg}^2\omega].$$

On obtient ainsi

$$x_1 = \lambda \left[- Ch\,\varpi \,\text{cotg}^2\theta \,\frac{\gamma_2}{\gamma_3} + Sh\,\varpi\,\text{cotg}^2\omega\,\frac{\beta_1}{\gamma_3}\right]$$

$$x_2 = \lambda \left[\quad Ch\,\varpi \,\text{cotg}^2\theta \,\frac{\gamma_1}{\gamma_3} + Sh\,\varpi\,\text{cotg}^2\omega\,\frac{\beta_2}{\gamma_3}\right].$$

On déduit de là

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\lambda}{\gamma_3^2}\left[Ch\,\varpi\,\text{cotg}^2\theta\, m - Sh\,\varpi\,\text{cotg}^2\omega\,\cos^2\theta\right]\alpha_1$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\lambda}{\gamma_3^2}\left[Ch\,\varpi\,\text{cotg}^2\theta + \alpha_3\, Sh\,\varpi\,\text{cotg}^2\omega\right](m\,\alpha_1 - a\,\gamma_1).$$

Des expressions analogues seraient obtenues pour $\frac{\partial x_2}{\partial u}$ $\frac{\partial x_2}{\partial v}$ et pour déterminer x_3 on a à intégrer le système complet

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} = \frac{\lambda}{\gamma_3^2}\left[Ch\,\varpi\,\text{cotg}^2\theta\, m - Sh\,\varpi\,\text{cotg}^2\varpi\,\cos^2\theta\right](\alpha_3\, Ch\,\varpi + Sh\,\varpi)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial v} = \frac{\lambda}{\gamma_3^2}\left[Ch\,\varpi\,\text{cotg}^2\theta + \alpha_3\, Sh\,\varpi\,\text{cotg}^2\varpi\right](m\, Sh\,\varpi - Ch\,\varpi\,\cos^2\theta).$$

Après développement on a

$$\frac{\partial x_3}{\partial u} = \frac{\lambda}{\gamma_3^2}\Big[Ch^2\varpi\,\text{cotg}^2\theta\,\gamma_3^2 + Sh\,\varpi\, Ch\,\varpi\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta\,\sin^2\omega}\,(\sin^2\theta + \sin^2\omega)\, m$$
$$- (Ch^2\varpi\,\text{cotg}^2\theta + Sh^2\varpi\,\text{cotg}^2\omega)\cos^2\theta\Big]$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial v} = \frac{\lambda}{\gamma_3^2}\Big[Sh^2\varpi\,\text{cotg}^2\omega\,\gamma_3^2 + Sh\,\varpi\, Ch\,\varpi\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta\,\sin^2\omega}\,(\sin^2\theta + \sin^2\omega)\, m$$
$$- (Ch^2\varpi\,\text{cotg}^2\theta + Sh^2\varpi\,\text{cotg}^2\omega)\cos^2\theta\Big].$$

On voit que la détermination de x_3 n'introduit aucune transcendante nouvelle. Les quadratures à effectuer ayant déjà été rencontrées dans l'étude des hélicoïdes à courbure totale constante.

Si l'on désigne par X_1 X_2 X_3 les coordonnées du point qui décrit la surface S et que l'on pose comme précédemment

$$X = x + \rho\,\alpha$$

on a pour déterminer S le système

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = -\frac{\lambda}{\gamma_3^2}\left[Sh\,\varpi\,Ch\,\varpi\,\mathrm{cotg}^2\,\theta\,\gamma_3^2 + m\left(Sh^2\,\varpi\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\omega} + Ch^2\,\varpi\,\mathrm{cotg}^2\,\theta\right)\right.$$
$$\left. - Sh\,\varpi\,Ch\,\varpi\cos^2\theta\,(\mathrm{cotg}^2\,\omega + \mathrm{cotg}^2\,\theta)\right]$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = -\frac{\lambda}{\gamma_3^2}\left[Sh\,\varpi\,Ch\,\varpi\,\mathrm{cotg}^2\,\omega\,\gamma_3^2 + m\left(Sh^2\,\varpi\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\omega} + Ch^2\,\varpi\,\mathrm{cotg}^2\,\theta\right)\right.$$
$$\left. - Sh\,\varpi\,Ch\,\varpi\cos^2\theta\,(\mathrm{cotg}^2\,\omega + \mathrm{cotg}^2\,\theta)\right].$$

Nous signalerons que dans le cas où l'on prend

$$Ch\,\varpi = o \qquad Sh\,\varpi = i$$

on obtiendrait comme surface particulière (S) un hélicëide à courbure totale constante.

Désignons par x''_1 x''_2 x''_3 les coordonnées du réseau dérivé C''_1 de C'_1 par la méthode de Laplace en allant de v vers u. Les coordonnées x''_1 x''_2 sont déterminées par les équations

$$x'_1\,(m\,\alpha_2 - a\,\gamma_2) - x'_2\,(m\,\alpha_1 - a\,\gamma_1) = \lambda\,[Ch\,\varpi\,(m\,\alpha_3 - a\,\gamma_3) + m\,Sh\,\varpi]$$
$$x'_1\,\alpha_2 \qquad\qquad - x'_2\,\alpha_1 \qquad\qquad = \lambda\,[Ch\,\varpi\,\alpha_3 \quad + Sh\,\varpi].$$

Désignons de même par x''_1 x''_2 x''_3 les coordonnées du réseau C''_1 dérivé de C''_1 par la même transformation. On aura pour déterminer x''_1 x''_2 les équations

$$x''_1\,\alpha_2 - x''_2\,\alpha_1 = \lambda\,[Ch\,\varpi\,\alpha_3 + Sh\,\varpi]$$
$$x''_1\,\beta_2 - x''_2\,\beta_1 = \lambda\;Ch\,\varpi\,\beta_3.$$

Ces dernières équations sont précisément celles qui seraient obtenues si l'on voulait obtenir le réseau focal Γ_1, d'une congruence parallèle à la congruence de normales définie par les paramètres

$$\alpha_1 \qquad \alpha_2 \qquad Ch\,\varpi\,\alpha_3 + Sh\,\varpi$$

appartenant à un complexe linéaire.

Les surfaces trajectoires orthogonales seraient des hélicoïdes. Le réseau focal Γ_1 de ces hélicoïdes serait parallèle au réseau focal C_1 des surfaces (S) obtenues. La transformation de Laplace faite deux fois en allant de v vers u permet de passer de la projection c_1 du réseau C_1 sur le plan $x_1\,ox_2$ à la projection γ_1 du réseau Γ_1.

TRANSFORMATION DES HÉLICOÏDES MINIMA

Rappelons les valeurs des paramètres normaux et des rotations des réseaux O trouvés dans l'étude des hélicoïdes minima.

$$\xi_1 = \cos(u+v) \qquad \xi_2 = \sin(u+v) \qquad m = -1$$
$$\eta_1 = -\sin(u+v) \qquad \eta_2 = \cos(u+v) \qquad n = 1.$$

On peut écrire

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 1 = \frac{(1+\alpha)}{2} n - \frac{1-\alpha)}{2} m,$$

α désignant une constante arbitraire.

Cette relation prouve que les réseaux O particuliers ainsi définis peuvent être d'une infinité de manières considérés comme des réseaux Ω_{00} et nous nous proposerons de déterminer les conséquences L_{00} qui sont conjuguées à ces réseaux.

Désignons par X_1 X_2 les paramètres de ces congruences. Ces quantités devront satisfaire aux relations

$$X_1 \sin(u+v) - X_2 \cos(u+v) = \frac{1-\alpha}{2} h$$
$$X_1 \cos(u+v) + X_2 \sin(u+v) = \frac{1+\alpha}{2} l.$$

On devra avoir en outre

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= h\xi \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= l\eta \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial v} &= -l \\ \frac{\partial l}{\partial u} &= \quad h. \end{aligned} \right.$$

On déduit de là

$$X_1 = \frac{1-\alpha}{2} h \sin (u+v) + \frac{1+\alpha}{2} l \cos (u+v)$$

$$X_2 = -\frac{1-\alpha}{2} h \cos (u+v) + \frac{1+\alpha}{2} l \sin (u+v).$$

Par suite les quantités h l vérifieront les relations différentielles

$$\left\{\begin{aligned} &(1-\alpha)\frac{\partial h}{\partial u} - (1+\alpha)\, l = 0 \\ &(1+\alpha)\frac{\partial l}{\partial v} + (1+\alpha)\, h = 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial h}{\partial v} = -l \\ &\frac{\partial l}{\partial u} = \quad h. \end{aligned}\right.$$

On voit que

$$(1-\alpha)\frac{\partial h}{\partial u} + (1+\alpha)\frac{\partial h}{\partial v} = 0.$$

On a donc

$$h = F\,[(1+\alpha)\, u - (1-\alpha)\, v].$$

Comme

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u\, \partial v} + h = 0.$$

On pourra prendre

$$h = \frac{2}{1-\alpha}\, Ch\, \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\, [(1+\alpha)\, u - (1+\alpha)\, v].$$

Les quantités X_1 X_2 ne sont définies qu'à un facteur de multiplication pris. On a déjà remarqué, d'autre part, que par un changement de variables convenable, on peut supprimer la deuxième constante d'intégration qui devrait figurer dans l'expression de h

Nous poserons

$$\omega = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\alpha}}.$$

On a alors

$$h = \frac{2}{1-\alpha}\, Ch\, (\omega u - \frac{1}{\omega} v).$$

Les équations qui déterminent X_1 X_2 deviennent

$$X_1 \sin (u+v) - X_2 \cos (u+v) = Ch \left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right)$$

$$X_1 \cos (u+v) + X_2 \sin (u+v = \omega\, Sh \left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right).$$

On reconnaît les équations trouvées lors de la détermination du réseau focal C correspondant aux hélicoïdes minima.

On en déduit facilement que toutes les congruences qui dérivent de la congruence ainsi déterminées par la méthode de Laplace sont aussi des congruences L_{0_0}.

Nous allons définir, maintenant les paramètres directeurs des normales aux surfaces (S). On a

$$X_1 = Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \sin(u+v) + \omega Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \cos(u+v)$$

$$X_2 = -Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \cos(u+v) + \omega Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \sin(u+v).$$

On prendra

$$X_3 + i X_4 = e^{\alpha}\left[Ch^2\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) + \omega^2 Sh^2\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right)\right]$$

$$X_3 - i X_4 = -e^{-\alpha}.$$

D'où l'on déduit

$$\xi_1 = \cos(u+v)$$

$$\xi_2 = \sin(u+v)$$

$$\xi_3 + i\xi_4 = 2 e^{\alpha} \omega Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right).$$

Ce résultat se rattache à la propriété déjà signalée des réseaux de Wilezynski.

$$\xi_3 - i\xi_4 = 0.$$

Nous désignerons par $Y_1\ Y_2\ Y_3\ Y_4$ les paramètres correspondant à $X_1\ X_2\ X_3\ X_4$ pour la congruence dérivée par la méthode de Laplace en allant de u vers v. On peut écrire

$$Y_i = X_i - l\,\xi_i \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

On obtient ainsi

$$Y_1 = Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \sin(u+v) - \frac{1}{\omega} Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \cos(u+v)$$

$$Y_2 = -Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \cos(u+v) - \frac{1}{\omega} Sh\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right) \sin(u+v)$$

$$Y_3 + i Y_4 = e^{\alpha}\left[1 - (1+\omega^2) Sh^2\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right)\right]$$

$$Y_3 - i Y_4 = -e^{-\alpha}.$$

Les quantités Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 ainsi définies permettront de déterminer une surface (S) telle que les axes des cercles osculateurs à une famille de ligne de courbure appartiennent à un complexe linéaire.

Cette surface S serait telle que la congruence formée par les normales à cette surface soit parallèle à une congruence appartenant à un complexe linéaire.

Il en est de même de toutes les congruences que l'on déduit de la congruence primitive par la méthode de Laplace. En particulier, la congruence formée par les axes des cercles osculateurs à la deuxième famille de lignes de courbure est parallèle à une congruence appartenant à un complexe linéaire.

Nous avons établi qu'il était impossible de choisir la constante α qui figure dans les formules indiquées de manière que la congruence formée par les normales à la surface appartienne à un complexe.

Nous avons vérifié également qu'il était impossible de choisir cette même constante de façon que la congruence formée par les axes des cercles osculateurs à la deuxième famille de ligne de courbure appartienne aussi à un complexe.

Nous signalons enfin que si l'on détermine le deuxième réseau O conjugué à la congruence obtenue en projetant la congruence des normales à la surface S, réseau décrit par le point dont les coordonnées sont

$$\frac{X_1}{X_1^2 + X_2^2} \qquad \frac{X_2}{X_1^2 + X_2^2}\,.$$

ce réseau définit une solution φ de l'équation aux dérivées partielles qui est nouvelle.

On vérifie immédiatement, en effet, que ce réseau ne peut se transformer par la méthode de Laplace en des réseaux O analogues.

On obtiendrait donc des surfaces S différentes de celles qui ont été déterminées jusqu'à présent en appliquant à ce nouveau réseau la même transformation.

PROPRIÉTÉS DES HÉLICOÏDES ET DES SURFACES ADMETTANT MÊME REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE QU'UN HÉLICOÏDE

Nous avons étudié jusqu'à maintenant tous les cas dans lesquels le réseau focal décrit par l'un des centres de courbure d'une surface (S) se projette sur le plan $x_1 \, O \, x_2$ suivant un réseau dont les deux tangentes décrivent des congruences L_{00}.

Les surfaces S ainsi obtenues sont ou des hélicoïdes ou des surfaces admettant même représentation sphérique que des hélicoïdes.

Nous allons indiquer quelques propriétés de ces surfaces.

On peut remarquer que l'on a toujours entre les quantités $a \; b \; m \; n$ des relations de la forme

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\mu^2} = 1$$

$$\frac{b^2}{\beta^2} + \frac{n^2}{\nu^2} = 1.$$

L'une de ces relations est la conséquence de l'autre. Les constantes $\alpha \; \beta \; \mu \; \nu$ étant liées par :

$$\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2} = 1.$$

Si on différentie la première équation par rapport à v, on a

$$\frac{ab}{\alpha^2} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial m}{\partial v} = 0.$$

Ou

$$\frac{\partial m}{\partial v} = -\frac{\mu^2}{\alpha^2} ab.$$

De même on obtient

$$\frac{\partial n}{\partial u} = -\frac{\nu^2}{\beta^2} ab.$$

On a donc entre $\frac{\partial m}{\partial u}$ et $\frac{\partial n}{\partial v}$ la relation

$$\frac{\nu^2}{\beta^2}\frac{\partial m}{\partial v} = \frac{\mu^2}{\alpha^2}\frac{\partial n}{\partial u}$$

qui permet de poser

$$\left\{\begin{aligned} m &= \frac{\mu^2}{\alpha^2}\frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ n &= \frac{\nu^2}{\beta^2}\frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Considérons les quantités M N définies par

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= -i\frac{\mu\nu}{\alpha\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\frac{\partial \Phi}{\partial u} \\ \mathrm{N} &= \quad i\frac{\mu\nu}{\alpha\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{aligned}$$

elles définiront les rotations d'un réseau O plan. Les paramètres normaux des tangentes à ce réseau étant définis par

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \cos\Phi & \xi_2 &= \sin\Phi \\ \eta_1 &= -\sin\Phi & \eta_2 &= \cos\Phi \end{aligned}$$

les deux réseaux rectangulaires définis par les paramètres normaux

$$\left\{\begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{matrix}\right.$$

sont donc deux réseaux associés (1).

On voit que les quantités β ξ satisfont à une même équation de Laplace, et qu'il en est de même des quantités γ η.

---

(1) Voir Mémoire de M. Guichard, *Annales É. N. S.*, 1903.

Il résulte de là que la congruence formée par les tangentes aux premières lignes de courbure des surfaces S considérées est une congruence 20. Les paramètres complémentaires qui rendent cette congruence 20 étant les quantités

$$i \cos \Phi \qquad i \sin \Phi.$$

Il en est de même des tangentes aux deuxièmes lignes de courbure de la surface (S). Les paramètres complémentaires sont d'ailleurs les mêmes.

A une congruence 20 sont conjuguées deux séries de réseaux O. On vérifiera que les points de coordonnées

$$\begin{matrix} e^{i\Phi}\beta_1 & e^{i\Phi}\beta_2 & e^{i\Phi}\beta_3 \\ e^{i\Phi}\gamma_1 & e^{i\Phi}\gamma_2 & e^{i\Phi}\gamma_3 \end{matrix}$$

décrivent des réseaux rectangulaires conjugués aux deux congruences. De plus, ces réseaux sont tels que l'un d'eux se transforme par la méthode de Laplace en un réseau parallèle à l'autre.

La loi d'orthoganalité des éléments permet de déduire de ces propriétés des propriétés nouvelles.

La congruence formée par les tangentes à la première famille de lignes de courbure est orthogonale au premier réseau focal de la congruence de normales aux surfaces S. Il résulte donc de là que le premier réseau focal est un réseau 20. Il en est évidemment de même du second.

Nous allons établir directement cette propriété, ce qui nous permettra de définir les paramètres complémentaires qui rendent le réseau focal C_1 O.

Nous avons établi que d'une façon générale on avait entre les quantités m n une relation qui s'écrit

$$\frac{\alpha\nu}{\beta\mu} m - \frac{\beta\mu}{\alpha\nu} n = \varepsilon \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}.$$

Comme on a aussi

$$\alpha_3 = -(m+n)$$

On en déduit

$$\alpha_3 = -\left(\frac{\alpha^2}{\mu^2} m - \varepsilon \frac{\alpha\nu}{\beta\mu} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\right).$$

Les quantités α_1 α_2 α_3 sont solution de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v}.$$

Cette équation admet la solution m.

Si on considère la congruence définie par les paramètres

$$X_1 = \alpha_1, \quad X_2 = \alpha_2, \quad X_3 = \alpha_3, \quad X_4 = i\frac{m}{\mu},$$

on aura

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 1 - \frac{m^2}{\mu^2} = \frac{a^2}{\alpha^2}.$$

Relation qui montre que le premier réseau focal de cette congruence est un réseau O.

Nous allons étudier la congruence dérivée de la congruence de normales dont les paramètres sont

$$Y_1 = m\,\alpha_1 - a\,\gamma_1 \qquad Y_2 = m\,\alpha_2 - a\,\gamma_2 \qquad Y_3 = m\,\alpha_3 - a\,\gamma_3.$$

A la solution $\alpha = k$ correspondra pour cette congruence la solution

$$Y_4 = km.$$

A la solution $\alpha = m$ correspondra la solution

$$Y_5 = \mu^2.$$

L'équation de Laplace à laquelle satisfont les quantités γ s'écrira

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}.$$

Les quantités

$$Y_1 \qquad Y_2 \qquad Y_3 \qquad Y_4 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\mu^2} - 1}\; m$$

qui sont liées par la relation

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 = \alpha^2$$

définissent dans un espace à quatre dimensions les paramètres d'une droite qui décrit une congruence O.

Les congruences formées par les axes des cercles osculateurs aux lignes de courbure des surfaces considérées sont donc des congruences 2O.

La loi d'orthogonalité montre que les réseaux qui dérivent du réseau formé par les lignes de courbure des surfaces S donnent après une transformation par la méthode de Laplace des réseaux 2O.

Nous signalerons enfin que, si l'on considère la trace de la congruence formée par les tangentes aux premières lignes de courbure sur le plan $X_1 O X_2$, cette trace décrit un réseau orthogonal au réseau obtenu en projetant sur ce plan le premier réseau focal C_1 de la congruence de normales. Nous utiliserons cette propriété dans les études particulières qui vont suivre.

Il faut remarquer également que la propriété du réseau formé par les lignes de courbure des surfaces (S) étudiées d'être associé à un réseau O plan est une propriété caractéristique de ces surfaces.

Nous allons envisager maintenant les propriétés particulières aux hélicoïdes minima et aux hélicoïdes à courbure totale constante.

1° *Étude des hélicoïdes minima.* — Nous avons remarqué que le réseau focal C_1 de la congruence de normale se projette sur le plan $X_1 O X_2$ suivant un réseau O dont les congruences focales sont H.

Ce réseau donne par la transformation de Laplace des réseaux O analogues. Il en résulte que toutes les congruences qui dérivent de la congruence de normales par la méthode de Laplace sont projetées sur le plan $X_1 O X_2$ suivant des congruences H. Les réseaux focaux de ces congruences étant des réseaux O.

La congruence formée par les axes des cercles osculateurs à la deuxième famille de lignes de courbure est une congruence 2O. On voit, en effet, que les paramètres directeurs d'une droite de cette congruence peuvent être pris égaux à

$$X_1 = -\sin (u + v \qquad X_2 = \cos (u + v) \qquad X_3 = -\omega \, Ch\left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right).$$

Il suffira de prendre comme paramètre complémentaire la quantité

$$X_4 = i \sqrt{1 + \omega^2} \;\; Ch \left(\omega u - \frac{1}{\omega} v\right).$$

On montrerait de même que toutes les congruences qui dérivent de la congruence de normales par la méthode de Laplace sont des congruences 2O.

On peut remarquer que si l'on désigne par x_1 x_2 x_3 les coordonnées du deuxième centre de courbure d'un des hélicoïdes, on peut en choisissant convenablement la constante λ déterminer un point de coordonnées

$$x'_1 = x_1 \qquad x'_2 = x_2 \qquad x'_3 = \lambda x_3$$

qui décrit un réseau dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. La première tangente à ce réseau décrivant une congruence de normales.

Une transformation analogue peut s'appliquer à tous les réseaux déduits du réseau focal C_2 par la méthode de Laplace. Le facteur constant peut être alors choisi de façon que l'une ou l'autre des tangentes au réseau transformé décrive une congruence de normales.

Il serait facile d'étudier directement la congruence formée par les tangentes à la première famille de lignes de courbure des surfaces considérées, de déterminer les paramètres complémentaires $\cos\Phi$ $\sin\Phi$, qui permettraient le calcul des éléments des réseaux O conjugués à cette congruence.

Nous avons remarqué que la trace de cette congruence sur le plan $X_1 O X_2$ décrit un réseau orthogonal au réseau obtenu en projetant sur ce plan le premier réseau focal C_1.

Il résulte de là que la trace des premières tangentes à un hélicoïde minima sur le plan $X_1 O X_2$ décrit un réseau O qui se transforme indéfiniment en des réseaux O analogues par l'application de la méthode de Laplace.

On voit ainsi, que la quantité Φ peut être définie par la relation

$$e^{i\Phi} = \beta_3.$$

Le point qui a pour coordonnées

$$x_1 = \beta_1 \beta_3 \qquad x_2 = \beta_2 \beta_3 \qquad x_3 = \beta_3^2$$

décrira un réseau O parallèle aux réseaux O de la deuxième famille qui sont conjugués à la congruence considérée.

2° *Étude des hélicoïdes à courbure totale constante.* — Nous établirons tout d'abord que les congruences focales du réseau c_1 obtenu en projetant sur un plan perpendiculaire à l'axe du complexe le réseau C_1 décrit par le premier centre de courbure de la surface sont des congruences H.

Il suffit d'établir cette propriété pour la congruence obtenue en projetant la congruence formée par les axes des cercles osculateurs à la première famille de ligne de courbure dont les paramètres sont :

$$Y_1 = m\,\alpha_1 - a\,\gamma_1 \qquad Y_2 = m\,\alpha_2 - a\,\gamma_2.$$

Nous remarquerons que l'on a

$$Y_3 = m\,\alpha_3 - a\,\gamma_3 = -\frac{m^2}{\cos^2\omega} - a^2 = -\cos^2\theta.$$

L'équation de Laplace à laquelle satisfont les paramètres $\gamma_1\ \gamma_2$ admet la solution

$$\mathrm{Y} = m \operatorname{tg} \omega.$$

On vérifie que

$$\mathrm{Y}_1^2 + \mathrm{Y}_2^2 + \mathrm{Y}^2 = \frac{m^2}{\cos^2 \omega} + a^2 - \cos^4 \theta = \sin^2 \theta \cos^2 \theta.$$

Par suite la congruence de paramètre $\gamma_1\ \gamma_2$ est une congruence H.

Nous allons vérifier que le réseau c_1 est un réseau 2O. Si l'on prend en effet comme troisième paramètre la quantité α définie par l'égalité

$$\alpha = i \frac{m}{\cos \omega} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \omega}},$$

on obtient

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha^2 = 1 - \frac{m^2}{\cos^2 \omega \cos^2 \theta} = \frac{a^2}{\cos^2 \theta}$$

qui montre que le premier réseau focal de la congruence définie par les paramètres $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ est un réseau O.

Le réseau c_1 est donc un réseau 2O dont les deux congruences focales sont des congruences H.

On peut remarquer aussi que tous les réseaux qui se déduisent de c_1 par la méthode de Laplace possèdent la même propriété.

La quantité α qui a été ainsi définie est proportionnelle au troisième paramètre α_3 qui correspond à la congruence de normales.

On peut écrire

$$\alpha = \mathrm{K} \alpha_3 \qquad \mathrm{K} = i \cos \omega \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos^2 \omega}}.$$

On pourra de même définir une quantité $m\alpha - a\gamma$ correspondante qui sera proportionnelle à $m\alpha_3 - a\gamma_3$

$$m\alpha - a\gamma = \mathrm{K}\,(m\alpha_3 - a\gamma_3).$$

Les quantités

$$\alpha_1, \qquad \alpha_2, \qquad \alpha$$

$$m\alpha_1 - a\gamma_1, \qquad m\alpha_2 - a\gamma_2, \qquad m\alpha - a\gamma$$

définissent les tangentes à un réseau. On voit que si x_1 x_2 x_3 désignent les coordonnées du centre de courbure C_1 le point de coordonnées

$$X_1 = x_1 \qquad X_2 = x_2 \qquad X = K x_3$$

décrira un réseau rectangulaire dont les deux tangentes appartiennent à un complexe linéaire.

On pourra prendre comme paramètres directeurs de la normale à ce réseau les quantités

$$K \beta_1, \qquad K \beta_2, \qquad \beta_3.$$

Ces expressions montrent que la normale au réseau appartient aussi à un complexe linéaire.

Le réseau O considéré est par suite le réseau formé par les lignes de courbure d'un hélicoïde à courbure totale constante.

On obtient donc cette propriété.

Étant donné un hélicoïde à courbure totale constante les surfaces des centres de courbure de cet hélicoïde sont des surfaces homologiques d'hélicoïde à courbure totale constante.

Cette propriété s'étend immédiatement à tous les réseaux déduits du réseau décrit par le premier centre de courbure, par la méthode de Laplace.

On voit aussi que par une homologie convenable on pourra transformer le réseau rectangulaire formé par les lignes de courbure de l'hélicoïde à courbure totale constante en un réseau qui pourra être considéré comme le réseau décrit par un des centres de courbure d'un deuxième hélicoïde à courbure totale constante.

Cette propriété est encore vraie pour tous les réseaux que l'on obtient en appliquant au réseau précédent la transformation de Laplace. Elle montre de plus que si l'on projette ces réseaux sur le plan $X_1 O X_2$ on obtient une suite indéfinie de réseaux 2O dont les congruences focales sont des congruences H.

Les traces des congruences considérées sur le même plan donnent également des réseaux 2O dont les congruences focales sont H. Il en est de même des réseaux obtenus en prenant les traces sur le plan X_1 $O X_2$ de la congruence formée par les normales à l'hélicoïde et des congruences qui en dérivent par la transformation de Laplace.

Proposons-nous de déterminer les cosinus directeurs de la congruence de normales définie par les paramètres

$$K \beta_1 \qquad K \beta_2 \qquad \beta_3.$$

Si l'on remarque que dans le cas des hélicoïdes à courbure totale constante, les relations

$$\frac{m^2}{\cos^2\omega} + \gamma_3^2 = \cos^2\theta$$

$$\frac{n^2}{\sin^2\omega} + \beta_3^2 = \sin^2\theta$$

$$n = m\ \mathrm{tg}^2\,\omega$$

permettent d'écrire

$$\gamma_3^2 \sin^2\omega - \beta_3^2\cos^2\omega = \cos^2\theta\sin^2\omega - \sin^2\theta\cos^2\omega\,;$$

on vérifie que

$$K^2(\beta_1^2 + \beta_2^2) + \beta_3^2 = \gamma_3^2\,\frac{\sin^2\omega}{\cos^2\theta}.$$

Les quantités

$$K\,\frac{\cos\theta}{\sin\omega}\,\frac{\beta_1}{\gamma_3} \qquad K\,\frac{\cos\theta}{\sin\omega}\,\frac{\beta_2}{\gamma_3} \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\omega}\,\frac{\beta_3}{\gamma_3}$$

définissent donc le système de cosinus directeurs de la normale.

Nous pouvons conclure de là que la quantité γ_3 est une solution de l'équation de Laplace, à laquelle satisfont les quantités β.

La vérification de ce fait est d'ailleurs immédiate. Elle tient à ce que γ_3 est une fonction de $u + v$ et qu'entre m et n, on a la relation indiquée plus haut.

On voit de plus que la relation

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$$

peut s'écrire

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \frac{\gamma_3^2\sin^2\omega}{\sin^2\theta\cos^2\omega - \sin^2\omega\cos^2\theta} - \frac{\beta_3^2\cos^2\omega}{\sin^2\theta\cos^2\omega - \sin^2\omega\cos^2\theta} = 0$$

et que l'on peut poser

$$\sin\Phi = \frac{i\,\gamma_3\sin\omega}{\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\omega - \sin^2\omega\cos^2\theta}}$$

$$\cos\Phi = \frac{\beta_3\cos\omega}{\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\omega - \sin^2\omega\cos^2\theta}}.$$

Les quantités $\sin\Phi$ $\cos\Phi$ sont les paramètres complémentaires qui montrent que la congruence β_1 β_2 β_3 est une congruence 20.

Les réseaux O conjugués à cette congruence seront obtenus en considérant les points ayant pour coordonnées

$$(\gamma_3 \sin \omega \pm \beta_3 \cos \omega)\, \beta_1, \qquad (\gamma_3 \sin \omega \pm \beta_3 \cos \omega)\, \beta_2, \qquad (\gamma_3 \sin \omega \pm \beta_3 \sin \omega)\, \beta_3.$$

La trace de ces réseaux sur le plan $X_1\, O\, X_2$ donne la congruence de paramètre $-\beta_2\, \beta_1$. Ces réseaux ont même trace que les réseaux O conjugués à la congruence de normales de paramètres $K\beta_1\ K\beta_2\ \beta_3$.

Nous avons remarqué au début de ce chapitre que la congruence formée par les axes des cercles osculateurs à une famille de lignes de courbure était une congruence 2O.

On peut se proposer d'étudier les réseaux O conjugués à cette congruence. Nous nous bornerons à signaler les résultats auxquels nous sommes parvenu.

Le déterminant orthogonal correspondant à ces réseaux est le déterminant orthogonal correspondant à une famille d'hélicoïdes. Toutefois la relation qui lie les rotations m et n est de la forme

$$\mu_0\, m + \nu_0\, n = \text{constante}.$$

Ce réseau O peut donc être attaché à un hélicoïde qui se déduirait d'un hélicoïde à courbure totale constante par la transformation de Ribaucour. On établit ainsi une nouvelle relation géométrique entre ces deux familles de surfaces.

Signalons aussi que la façon dont nous avons obtenu les surfaces admettant même représentation sphérique qu'un hélicoïde permet de déduire que le réseau obtenu en projetant sur le plan $X_1\, O\, X_2$, le réseau décrit par un des centres de courbure de cette surface est un réseau 2O dont les tangentes décrivent des congruences H et qu'il en est de même pour tous les réseaux déduits du précédent par la méthode de Laplace.

TRANSFORMATION DES HÉLICOÏDES A COURBURE TOTALE CONSTANTE

On pourrait se proposer de rechercher si en appliquant la transformation que nous avons indiquée aux réseaux O plans des hélicoïdes à courbure totale constante on ne peut obtenir de congruences H nouvelles qui seraient la projection de congruences formées par les normales à un hélicoïde.

Les calculs que nous avons faits, nous permettent de répondre négativement. Nous caractériserons les surfaces transformées en cherchant à déterminer les fonctions φ qui déterminent les surfaces S dont les axes des cercles osculateurs aux deux familles de lignes de courbure appartiennent à un complexe linéaire.

Nous définirons le réseau O par les équations

$$x_1 = q\cos\varphi - r\sin\varphi$$
$$x_2 = q\sin\varphi + r\cos\varphi,$$

les quantités q et r doivent vérifier les égalités

$$\frac{\partial q}{\partial v} - r\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$$
$$\frac{\partial r}{\partial u} + q\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0.$$

Si les axes des cercles osculateurs à la deuxième famille de lignes de courbure appartiennent à un complexe linéaire on doit avoir en outre

$$\frac{\partial r}{\partial v}\left(1 - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + q\frac{\partial \varphi}{\partial v} + r\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Si la même propriété appartient aux axes des cercles osculateurs à la première famille de lignes de courbure il faudra ajouter la condition nouvelle.

$$\frac{\partial q}{\partial u}\left(1-\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)+q\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial r}-r\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}=0.$$

Exprimons que les valeurs de $\frac{\partial^2 q}{\partial u\,\partial r}$ et $\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial r}$ sont égales. On obtient ainsi les conditions

$$q\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\mathrm{L}\left|\frac{1-\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{1-\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\right|+r\left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2\,\partial v}-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(1-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)+\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{1-\frac{\partial \varphi}{\partial v}}+\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}}{1-\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\right]=0$$

$$r\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\mathrm{L}\left|\frac{1-\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{1-\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\right|+q\left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u\,\partial v^2}-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(1-\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)+\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{1-\frac{\partial \varphi}{\partial u}}+\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}}{1-\frac{\partial \varphi}{\partial v}}\right]=0.$$

Nous n'envisagerons que le cas où ces relations sont identiquement vérifiées. Le système forme alors un système complet et il existe une simple infinité de congruences H telles que les premières congruences dérivées par la méthode de Laplace soit en allant de u vers v soit en allant de v vers u, soient des congruences L_{00}.

Le cas où l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}=a \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v}=b$$

a et b étant deux constantes liées par la relation

$$ab=a+b$$

a été envisagé dans la transformation des hélicoïdes minima.

D'une façon plus générale on peut étudier le cas où l'expression

$$\frac{1-\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{1-\frac{\partial \varphi}{\partial u}}=\text{constante}.$$

Nous écrirons cette relation sous la forme

$$b\,\frac{\partial \varphi}{\partial u}-a\,\frac{\partial \varphi}{\partial v}=b-a.$$

La fonction φ s'écrit alors

$$\varphi = (u + v) - f(au + bv).$$

Elle doit satisfaire aux deux équations

$$a\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial u\,\partial v^2}\left(1-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(1-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right]+b\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0$$

$$b\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\,\partial v}\left(1-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(1-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right]+a\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0.$$

L'une de ces équations est une conséquence de l'autre. Si ces relations sont vérifiées, le réseau O se transforme par la méthode de Laplace en un réseau Ω_{00} quel que soit le sens dans lequel est faite la transformation.

La première relation a une interprétation géométrique immédiate. Elle exprime que le réseau O est un réseau Ω_{00}.

On vérifie facilement que la fonction $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ est une fonction elliptique de u et de v, et on retrouve ainsi comme fonctions particulières les fonctions déterminées pour les réseaux rectangulaires des hélicoïdes à courbure totale constante. Il suffit de choisir d'une manière convenable certaine constante d'intégration.

La transformation appliquée aux hélicoïdes à courbure totale constante conduit donc à des surfaces nouvelles. Ces surfaces pourront être choisies de telle façon que si la congruence formée par les axes osculateurs à la première famille de lignes de courbure appartient à un complexe linéaire la congruence formée par les axes des cercles osculateurs à la deuxième famille de lignes de courbure soit parallèle à une congruence appartenant à un complexe linéaire ou appartienne elle-même à un complexe linéaire.

Nous sommes amené ainsi à étudier les réseaux pour lesquels les congruences décrites par les tangentes et les congruences dérivées par la méthode de Laplace appartiennent de deux en deux à des complexes linéaires

Considérons un réseau M, désignons par R_1 R_2 . . . les réseaux qui dérivent de M par la méthode de Laplace en allant de ce u vers v par S_1 S_2 . . . les réseaux qui dérivent de M en allant de v vers u et supposons que la congruence décrite par la tangente M R_1 et que la congruence décrite par la tangente R_2 R_3 appartiennent toutes deux à des complexes linéaires.

Les propriétés des réseaux étant projectives nous pourrons toujours supposer que par une transformation homographique convenable on ait ramené les deux complexes à avoir même axe central. Cet axe sera pris pour troisième axe de coordonnées.

La congruence décrite par la tangente S_1 S_2 est conjuguée par rapport au complexe linéaire auquel appartient la tangente $M R_1$ de la congruence décrite par la tangente R_2 R_3.

Il résulte donc de là que la congruence décrite par la tangente S_1 S_2 appartient à un complexe linéaire et que ce complexe fait partie du faisceau défini par les deux complexes primitifs.

Ainsi le seul fait que les tangentes $M R_1$, R_2 R_3 appartiennent à deux complexes linéaires entraîne comme conséquence que les congruences déduites par la méthode de Laplace des congruences décrites par les tangentes au réseau M appartiennent de deux en deux à des complexes linéaires faisant partie d'un même faisceau.

On voit de plus que le réseau R_1 est conjugué du réseau M par rapport au complexe linéaire auquel appartient la tangente $M R_1$. Le réseau R_2 est conjugué du réseau M par rapport au complexe auquel appartient la droite R_1 R_3 ainsi de suite.

Les points ... S_7 S_3 R_1 R_5 ... se trouvent sur une même droite qui rencontre l'axe central commun des complexes linéaires et qui lui est perpendiculaire.

On voit ainsi que si l'on donne à u et v deux valeurs déterminées, les points qui décrivent les réseaux se trouvent sur quatre droites rencontrant l'axe $o x_3$ et parallèles au plan x_1 $o x_2$.

Projetons maintenant les réseaux sur le plan x_1 $o x_2$. Les points ... s_7 s_3 r_1 r_5 ... projections de ... S_7 S_3 R_1 R_5 ... se trouvent sur une droite passant par O, les tangentes au réseau r_1 sont parallèles aux tangentes aux réseaux s_7 s_3 r_5. Ces différents réseaux se déduisent donc les uns des autres par une homothétie convenable par rapport à o.

On en déduit que pour des valeurs déterminées de u et de v les droites S_3 S_2 R_1 R_2 R_5 R_6 sont génératrices d'un même paraboloïde.

Dans le cas où les complexes n'auraient pas même axe, ces droites seraient génératrices d'une même quadrique et se correspondraient dans une transformation homographique.

On peut remarquer aussi que l'on montre ainsi que les complexes auxquels appartiennent les tangentes $M R_1$ et R_1 R_2 doivent nécessairement être différents. Si l'angle des deux complexes est commensurable avec π la suite de réseaux déduite par la méthode de Laplace du réseau M est limitée, on revient au réseau primitif après un nombre fini d'opérations.

Les propriétés signalées sont analogues aux propriétés connues des réseaux de Wilezynski.

CAS OÙ LA CONGRUENCE FORMÉE PAR LES AXES DES CERCLES OSCULATEURS A UNE FAMILLE DE LIGNES DE COURBURE D'UNE SURFACE ADMET POUR CONJUGUÉE PAR RAPPORT A UN COMPLEXE LINÉAIRE LA CONGRUENCE FORMÉE PAR LES AXES DES CERCLES OSCULATEURS A UNE FAMILLE DE LIGNES DE COURBURE D'UNE AUTRE SURFACE.

Nous avons considéré le cas où la congruence formée par les axes des cercles osculateurs à une famille de lignes de courbure d'une surface appartient à un complexe linéaire.

Nous allons étudier le cas où la congruence conjuguée de la congruence précédente par rapport à un complexe linéaire est la congruence formée par les axes des cercles osculateurs à une deuxième surface, et nous montrerons que ce problème admet des transformations analogues à celles qui ont été étudiées dans le premier chapitre.

Rappelons, tout d'abord, que si deux congruences sont conjuguées par rapport à un complexe linéaire, le premier réseau focal de l'une est conjugué du deuxième réseau focal de l'autre.

Deux cas seront alors à distinguer.

Considérons les axes des cercles osculateurs à la première famille de lignes de courbure d'une surface (Σ) et supposons que la congruence conjuguée par rapport à un complexe linéaire soit formée des axes des cercles osculateurs à la deuxième famille de lignes de courbure d'une surface (Σ').

Dans ces conditions, la congruence formée par les normales aux surfaces (Σ) admet pour conjuguée par rapport au complexe linéaire la congruence formée par les normales aux surfaces (Σ).

Nous supposerons toujours l'axe du complexe pris comme troisième axe de coordonnées.

La congruence formée par la normale aux surfaces Σ se projette alors sur le plan $X_1 O X_2$ suivant une congruence H, la congruence formée par les normales aux surfaces Σ' se projette elle aussi suivant une congruence H. M. Guichard a établi que les deux congruences ainsi obtenues se correspondaient dans la transformation par orthogonalité des éléments qu'il a définie.

Il en résulte que les deux congruences projetées ont en même temps les caractères de congruences H et de congruences C_1. Un réseau O conjugué à cette congruence sera donc en même temps un réseau K et un réseau L.

Inversement, si l'on connaît un réseau O jouissant des propriétés précédentes on pourra déterminer des congruences conjuguées à ce réseau qui seront en même temps H et C, leur faire correspondre par orthogonalité des éléments des congruences ayant les mêmes caractères et en déduire des surfaces Σ possédant la propriété indiquée.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce cas. Nous signalerons seulement que la détermination des réseaux plans qui sont en même temps O et L revient à la détermination des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

Envisageons maintenant le cas où la congruence formée par les axes des cercles osculateurs à la deuxième famille de lignes de courbure d'une surface Σ admet pour congruence conjuguée par rapport à un complexe linéaire la congruence formée par les axes des cercles osculateurs à la deuxième famille de lignes de courbure d'une surface Σ'.

Nous désignerons par C_2 le réseau décrit par le deuxième centre de courbure de Σ par C'_2 le réseau déduit de C_2 par la méthode de Laplace en allant de u vers v.

La congruence formée par les normales à surface Σ' aura pour conjuguée par rapport au complexe linéaire la congruence formée par les premières tangentes au réseau C'_2.

Projetons la figure sur un plan perpendiculaire à l'axe du complexe et désignons par c_2 c'_2 les réseaux projections des réseaux C_2 C'_2.

La deuxième tangente au réseau c_2 qui décrit la congruence obtenue en projetant la congruence de normales à Σ décrit une congruence H.

La congruence décrite par la première tangente au réseau C'_2 est orthogonale à la congruence en projetant la congruence formée par les normales à la surface Σ'. Cette congruence est donc une congruence C.

Soit M un réseau O conjugué à la congruence H considérée. Il se transforme par la méthode de Laplace, appliquée deux fois, en allant de u vers v, en un réseau R qui, conjugué à une congruence C, est un réseau K.

Nous obtiendrons donc une condition nécessaire en traduisant analytiquement cette condition.

Désignons par

$$\begin{array}{ccc} |\xi_1| & |\xi_2| & |M| \\ |\eta_1| & |\eta_2| & |N| \end{array}$$

les valeurs des paramètres normaux et des rotations du réseau R exprimées en fonction de l'exposition $\varphi(u, v)$ qui définit le réseau M. La condition indiquée s'écrit

$$\sum_{i=1}^{i=2} |\xi_i| \ |\eta_i| + \frac{\partial}{\partial u} |M| + \frac{\partial}{\partial v} |N| = 0.$$

On obtient ainsi une équation aux dérivées partielles du sixième ordre à laquelle doit satisfaire $\varphi(u, v)$, dont dépend la solution.

Inversement, supposons déterminée une solution particulière φ de cette équation.

Les paramètres normaux du réseau R sont ainsi définis et il faudra rechercher tout d'abord les congruences C qui sont conjuguées à ce réseau.

Cette détermination fait intervenir le calcul des éléments d'un déterminant orthogonal de l'espace à quatre dimensions dont on connaît les rotations

$$\begin{array}{ccc} |\xi_1| & |\eta_1| & |M| \\ |\xi_2| & |\eta_2| & |N| \end{array}$$

à toute combinaison isotrope des éléments des deux premières lignes de ce déterminant correspond une congruence C particulière conjuguée au réseau R. Nous aurons donc ainsi un système doublement infini de congruences.

Nous remarquerons que la connaissance de deux solutions particulières permettra de ramener à des quadratures la détermination de la solution générale du problème proposé.

Désignons par l une congruence C conjuguée au réseau R. La transformation de Laplace fera correspondre une congruence g qui, conjuguée au réseau M qui est un réseau O, sera une congruence H.

La loi d'orthogonalité des éléments permettra de déduire une congruence g' orthogonale à l qui sera par suite une congruence H qui se transforme par l'application de la méthode de Laplace répétée deux fois en une congruence l' orthogonale à G qui sera une congruence C.

Nous avons montré dans la première partie comment l'on pouvait d'une congruence plane H déduire une infinité de congruences de normales dont elle est la projection.

Nous désignerons par G l'une quelconque des congruences de normales projetée suivant g par G' l'une quelconque des congruences de normales projetée suivant g'.

On pourra déterminer, dans les conditions précédents, une surface Σ telle que la congruence formée par les normales à Σ soit une congruence parallèle à G et une surface Σ' telle que la congruence formée par les normales soit parallèle à G'. Les axes des cercles osculateurs aux deuxièmes familles de lignes de courbures de ces deux surfaces décrivant deux congruences conjuguées par rapport à un complexe linéaire.

On voit aussi, comme dans la première partie, que la deuxième série de réseaux O conjuguée à la congruence g fournit une nouvelle solution de l'équation aux dérivées partielles.

Soit M, un de ces réseaux. R, le réseau K qui en dérive. On connaît une congruence C particulière conjuguée au réseau R. Il suffira d'une solution nouvelle pour déterminer la solution générale par quadratures.

Ce problème est une généralisation de celui que nous nous sommes proposé au début.

Dans le cas où les axes des cercles osculateurs à la deuxième famille de ligne de courbure d'une surface appartiennent à un complexe linéaire les réseaux rectangulaires conjugués à la congruence H obtenue en projetant la congruence de normales sur un plan perpendiculaire à l'axe du complexe donnent par la transformation de Laplace appliquée deux fois en allant de u vers v des réseaux K. On a donc ainsi des solutions particulières du problème plus général. La détermination des surfaces (S) considérées dans la première partie, détermine un groupe de congruences C conjuguées au réseau K. Il suffit alors de connaître une congruence particulière du groupe pour détruire par quadratures toutes les autres congruences appartenant à ce groupe et pour déterminer par quadratures toutes les congruences C conjuguées au réseau.

On peut traiter ce problème par une deuxième méthode qui permet de le rattacher aux travaux de M. Guichard relatifs aux équations de Moutard admettant un groupe de solutions quadratiques.

Considérons dans l'espace à quatre dimensions une congruence I qui par la méthode de Laplace se transforme après deux opérations en une congruence C. Désignons par X_1 X_2 X_3 X_4 les paramètres de la première congruence, par Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 les paramètres correspondants de la seconde. Les quantités X sont liées par la relation

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0$$

et si les quantités Y satisfont à l'équation

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} + RY$$

on a en choisissant convenablement h et l

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + h^2 + l^2 = 0.$$

Désignons par M le réseau plan décrit par le point

$$x_1 = \frac{X_1}{X_3 + i X_4} \qquad x_2 = \frac{X_2}{X_3 + i X_4}.$$

Ce réseau est un réseau qui par la méthode de Laplace se transforme en un réseau R décrit par le point

$$y_1 = \frac{Y_1}{Y_3 + i Y_4} \qquad y_2 = \frac{Y_2}{Y_3 + i Y_4}.$$

On vérifie en effet que si l'on désigne par ξ_1 ξ_2 η_1 η_2 les paramètres nouveaux des tangentes au premier réseau par ξ'_1 ξ'_2 η'_1 η'_2 les paramètres normaux des tangentes au deuxième réseau, par m n les fonctions de u et v définies par les égalités

$$\frac{\partial h}{\partial v} = lm$$

$$\frac{\partial l}{\partial u} = hn$$

on a les relations

$$\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 = 0$$

$$\xi_1' \eta_1' + \xi_2' \eta_2' + \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial v} = 0.$$

Relations qui prouvent que le réseau M est un réseau O et que le réseau R est un réseau K.

Inversement on peut démontrer que si un réseau O plan se transforme comme il a été indiqué en un réseau K on peut trouver dans un espace à quatre dimensions une congruence I qui par la méthode de Laplace se transforme par les opérations correspondantes en une congruence C.

Pour passer des congruences aux réseaux, il suffit de prendre les traces des congruences points parallèles car l'hyperplan dont l'équation est

$$x_3 + i x_4 = 0$$

et de projeter le réseau obtenu sur le premier plan de coordonnées.

Le problème se transforme de façon analogue par un passage à un espace à six dimensions.

Une congruence I dans un espace à quatre dimensions peut d'une infinité de manières être obtenu en prenant la trace d'un réseau nul situé dans un espace à six dimensions sur un hyperplan isotrope et en projetant cette trace sur l'hyperespace primitif.

A la congruence C on pourra faire correspondre de la même manière une infinité de réseaux rectangulaires situés dans un espace d'ordre six. La congruence C se déduisant de ces réseaux par des opérations correspondantes à celles qui ont permis de déduire la congruence I des réseaux nuls.

Enfin on peut choisir un réseau nul particulier de manière qu'en lui appliquant deux fois la transformation de Laplace, il se transforme en un réseau O.

Nous ramenons ainsi le problème à la détermination dans un espace d'ordre six de réseaux O qui donnent par la méthode de Laplace après deux opérations des réseaux nuls.

Nous supposerons que la transformation a lieu en allant de *u* vers *v* et nous désignerons par

$$\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \xi_4 \quad \xi_5 \quad \xi_6$$

les paramètres normaux de la première tangente ou réseau O considéré. On doit avoir

$$\sum_{i=1}^{i=6} \xi_i^2 = 1.$$

Les paramètres normaux des tangentes au réseau nul considéré sont alors les quantités

$$[\xi_i] = \frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\xi_i$$

$$[[\xi_i]] = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\xi_i\right) - \frac{\partial}{\partial u} \mathrm{L} \left\{ n \left(m n - \frac{\partial^2 \mathrm{L} n}{\partial u \, \partial v}\right) \right\} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\xi_i\right)$$

où on donne à i les valeurs 1, 2, 3, 5, 4, 6.

On devra avoir

$$\sum_{i=1}^{i=6} [\xi_i]^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=6} [[\xi_i]]^2 = 0.$$

Conditions qui s'écrivent

$$\sum_{i=1}^{i=6} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\xi_i\right)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=1} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\xi_i\right)\right]^2 = 0.$$

Rappelons que les quantités ξ satisfont à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + m n \xi.$$

On transforme alors facilement les conditions indiquées.

Si on dérive la première équation par rapport à v on voit que l'on a à envisager les deux hypothèses suivantes.

1° $$m n - \frac{\partial^2 \mathrm{L} n}{\partial u \, \partial v} = 0$$

2° $$\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{L}\, n) = 0.$$

La première hypothèse correspond au cas où les expressions

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial u} \xi_i$$

sont fonctions de la seule variable u. On ne peut dans ces conditions déduire du réseau O considéré des solutions du problème.

Dans la deuxième hypothèse, l'équation de Laplace à laquelle satisfont les quantités ξ est une équation de Moutard

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial v} = A \, \xi.$$

Les conditions se simplifient, et l'on voit alors que la détermination des réseaux revient à la recherche de six solutions d'une équation de Moutard telles que l'on ait

$$\Sigma \, \xi^2 = 1$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 = 0$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\right)^2 = 0.$$

295-22. — IMPRIMERIE « LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE »