EDGAR B. SCHIELDROP

Sur une classification des accélérations avec applications aux théorèmes généraux

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1922

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1922__31__1_0>

N° D ORDRE
1714

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES,

PAR EDGAR B. SCHIELDROP,

Maitre de Conferences,
Ingénieur des Ponts et Chaussées

1re THESE — SUR UNE CLASSIFICATION DES ACCELERATIONS AVEC APPLICATIONS AUX THEOREMES GENÉRAUX

2e THESE — PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 1922, devant la Commission d'examen.

MM E CARTAN, *Président*
J DRACH, MONTEL, *Examinateurs*

CHRISTIANIA
EN COMMISSION CHEZ JACOB DYBWAD
1922

ES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen	MOLLIARD, *Professeur*.	Physiologie végétale.
Doyen honoraire	P. APPELL.	
Professeurs honoraires	P. PUISEUX.	
	VÉLAIN.	
	BOUSSINESQ.	
	BOUTY.	
Professeurs	E. PICARD	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	Gaston BONNIER	Botanique.
	KOENIGS	Mécanique physique et expérimentale.
	GOURSAT	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	HALLER	Chimie organique.
	JOANNIS	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET	Electrotechnique générale.
	WALLERANT	Minéralogie.
	ANDOYER	Astronomie.
	PAINLEVÉ	Mecanique analytique et Mécanique céleste.
	HAUG	Geologie.
	H. LE CHATELIER	Chimie générale.
	Gabriel BERTRAND	Chimie biologique.
	M^{me} P. CURIE	Physique générale.
	CAULLERY	Zoologie (Evolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ	Chimie appliquée.
	G. URBAIN	Chimie minérale.
	Émile BOREL	Calcul des probabilités et Physique mathém.
	MARCHIS	Aviation.
	Jean PERRIN	Chimie physique.
	G. PRUVOT	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	ABRAHAM	Physique.
	CARTAN	Mécanique rationnelle.
	Cl. GUICHARD	Géométrie supérieure.
	LAPICQUE	Physiologie generale.
	GENTIL	Géographie physique.
	VESSIOT	Théorie des groupes et Calcul des variations.
	COTTON	Physique.
	DRACH	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	C. FABRY	Physique.
	Charles PÉREZ	Zoologie, Anatomie, Physiologie comparée.
	Léon BERTRAND	Géologie appliquée et Géologie régionale.
	MAURAIN	Physique du globe.
	DANGEARD	Botanique (Enseignement P. C. N.).
	N....	Botanique.
	N....	Physique théorique et Physique céleste.
	N...	Mathématiques générales.
	LEDUC	Physique.
	HÉROUARD	Zoologie.
	Rémy PERRIER	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	LESPIEAU	Chimie.
	SAGNAC	Physique théorique et Physique céleste.
	RABAUD	Biologie expérimentale.
	PORTIER	Physiologie.
	BLAISE	Chimie organique.
	PÉCHARD	Chimie (Enseignement P. C. N.).
Secrétaire	Daniel TOMBECK.	

SUR UNE CLASSIFICATION DES ACCÉLÉRATIONS AVEC APPLICATIONS AUX THÉORÈMES GÉNÉRAUX

PAR

EDGAR B. SCHIELDROP

(VIDENSKAPSSELSKAPETS SKRIFTER I MAT NATURV KLASSE 1922 No 2)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

CHRISTIANIA
EN KOMMISSION CHEZ JACOB DYBWAD
1922

Fremlagt i Fællesmotet den 24de Marts 1922 af Prof. Palmstrøm

A. W. BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

A

Messieurs ***R. Birkeland*** *et* ***E. Cartan,***

Homage de profonde et respectueuse reconnaissance.

TABLE DES MATIÈRES.

Première Partie.

Deuxième Partie.

PREMIÈRE PARTIE.

I. Remarques préliminaires.

Nous caractériserons dans la suite comme "système matériel" un ensemble de points matériels liés à un mécanisme quelconque sans masse, qui exerce sur les points une contrainte cinématique exprimée par certaines équations linéaires par rapport aux composantes des vitesses. (Nous écartons donc le cas des relations non linéaires entre ces quantités étudie par M. Appell et d'autres). Pour que deux systèmes matériels soient égaux, il faut et il suffit que ces équations et les masses soient les mêmes.

En adoptant cette définition on sait que le mouvement des points sera indépendant de la nature du système auxiliaire qui réalise matériellement les liaisons. On peut donc supprimer ce système auxiliaire dans les calculs.

C'est M. DELASSUS qui a attiré l'attention sur des questions de cet ordre. Pour que la réalisation matérielle des liaisons n'intervienne pas dans les équations finales du mouvement, il faut, suivant l'observation faite par cet auteur dans un mémoire remarquable ("*Sur les liaisons et les mouvements des systèmes matériels.*" *Ann. d. l'Ecole Normale*, 1912, p. 305), adopter la définition suivante de ce que nous appelons une réalisation matérielle des liaisons:

"Les liaisons sont réalisées matériellement quand les déplacements virtuels du système, considéré comme portion d'une système plus étendu, sont les mêmes que ceux définis par ses équations de liaisons".

D'après cette définition il faut donc considérer comme équivalentes deux réalisations matérielles qui admettent pour les points matériels les mêmes déplacements virtuels pour la même configuration initiale. Or dans le cas général où les liaisons dépendent du temps, les contraintes cinématiques des points ne sont pas complètement caractérisées par les équations homogènes auxquelles doivent satisfaire les déplacements virtuels, mais par les équations non homogènes entre les vitesses réelles. On sait, en effet, que pour passer des dernières équations aux premières, il suffit de supprimer les seconds membres. Or le passage inverse n'est pas déterminé (APPELL: *Traité de Mécanique rationnelle* 3ieme éd., tome III, § 435).

En modifiant alors la définition de M. Delaussus dans le sens indiqué ci-dessus, on est conduit à la définition d'un système matériel que je viens de formuler, et dans laquelle on fait intervenir les vitesses réelles.

Considérons donc un système de points matériels, dont les coordonnées, référées à un trièdre rectangulaire fixe dans l'espace, sont $x_1, x_1, \ldots, x_n$, c'est à dire, où les coordonnées du premier point matériel sont désignées par x_1, x_2, x_3; celles du second par $x_4, x_5, x_6; \ldots$; celle du $\left(\frac{n}{3}\right)^{\text{ième}}$ et dernier par x_{n-2}, x_{n-1}, x_n. Nous désignerons indifféremment la masse du premier point par m_1, m_2, m_3; celle du second par $m_4, m_5, m_6; \ldots$; et celle du dernier par m_{n-2}, m_{n-1}, m_n. Nous adoptons ici une manière d'écrire employée par Henri Poincaré (*Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tome I, p. 9) qui confère dans certains cas aux formules analytiques la concision des expressions vectorielles.

Nous supposerons que la nature des liaisons du système est exprimée par les équations suivantes entre les projections des vitesses:

$$(1) \qquad a_{j1}\, x_1' + a_{j2}\, x_2' + \cdots + a_{jn}\, x_n' = \alpha_j\,, \qquad (j = 1, 2, \ldots \nu)$$

où les a_{ji} et les α_j sont des fonctions connues de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et du temps, t. Les liaisons sont dites indépendantes du temps, quand les coefficients en sont indépendants, et les α_j s'annulent. Nous convenons aussi que les liaisons sont sans frottement d'après la conception générale (APPELL, *loc. cit.*, I, § 164).

Les déplacements virtuels du système satisferont alors aux équations:

$$(2) \qquad a_{j1}\, \delta x_1 + a_{j2}\, \delta x_2 + \cdots + a_{jn}\, \delta x_n = 0 \cdot \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

Nous adopterons pour les forces données une désignation analogue à celle des coordonnées, en appelant X_1, X_2, X_3 les projections sur les directions positives de x_1, x_2, x_3 de la résultante des forces données, appliquées au premier point, et $X_4, X_5, X_6; \ldots; X_{n-2}, X_{n-1}, X_n$ les forces correspondantes appliquées aux points consécutifs du système. Les X_i sont des fonctions connues de $x_1, x_2, \ldots, x_n; x_1', x_2', \ldots, x_n'$ et du temps.

Pour les composantes des forces de liaisons nous écrirons de la même manière $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Les forces elles mêmes seront désignées par P pour les forces données, et Q pour les forces de liaisons.

II. Accélérations de forces et accélérations de liaisons.

Le problème de déterminer le mouvement du système matériel, peut, on le sait, être ramené à celui de trouver n fonctions du temps, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui satisfassent aux équations (1) et qui annulent l'expression:

$$(3) \qquad \Sigma (X_i - m_i\, x_i'')\, \delta x_i$$

pour toutes les valeurs des δx_i compatibles avec les équations (2).

On peut cependant limiter le problème en cherchant les projections des accélérations $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ en fonction des données du problème, des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de leurs dérivées premières. Des résultats de ces calculs on peut, nous le verrons plus loin, tirer quelques conclusions intéressantes. C'est surtout dans le domaine des théorèmes généreaux de la mécanique qu'on peut espérer que ces résultats rendront des services. Ces théorèmes, portant sur la mise en équation des problèmes, sont, par conséquent, au fond des énoncés sur les accélérations et leur distribution. Pour des études de ces théorèmes et des sujets analogues, une analyse générale de la structure des systèmes d'accélérations pourrait être utile.

En ajoutant aux équations:

$$(4) \qquad m_i x_i'' = X_i + \lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \cdots + \lambda_\nu a_{\nu i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

que donne la méthode des multiplicateurs de Lagrange, les équations suivantes:

$$(1\,\mathrm{a}) \qquad a_{j1} x_1'' + a_{j2} x_2'' + \cdots + a_{jn} x_n'' = \alpha_j' - \{a_{j1}' x_1' + a_{j2}' x_2' + \cdots a_{jn}' x_n'\}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

obtenues par dérivation des équations (1) par rapport au temps, il résulte $n + \nu$ équations linéaires entre les quantités $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$. Dans (1 a) a_{ji}' signifie la dérivée totale par rapport au temps, c'est à dire

$$a_{ji}' = \frac{\partial a_{ji}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_k} x_k'.$$

Si l'on porte les valeurs $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$, tirées des équations (4), dans les équations (1 a), on obtient:

$$(5) \qquad A_{j1} \lambda_1 + A_{j2} \lambda_2 + \cdots + A_{j\nu} \lambda_\nu = P_j + V_j,$$

où

$$(5\,\mathrm{a}) \qquad \begin{cases} A_{jk} = \sum_i \dfrac{a_{ji} a_{ki}}{m_i}, \\ P_j = -\sum_i \dfrac{a_{ji} X_i}{m_i}, \\ V_j = \alpha_j' - \sum_i a_{ji}' x_i'. \end{cases}$$

Les P_j sont des fonctions linéaires et homogènes des X_i et ne contiennent pas *explicitement* les vitesses. Les V_j ne dépendent pas des forces données.

Des équations (5) on peut tirer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$.
Il vient

$$\lambda_j = \mathfrak{P}_j + \mathfrak{V}_j \,, \tag{6}$$

où

$$\mathfrak{P}_j = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \ldots & A_{1j-1} & P_1 & A_{1j+1} \ldots & A_{1\nu} \\ A_{21} & A_{22} \ldots & A_{2j-1} & P_2 & A_{2j+1} \ldots & A_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\nu 1} & A_{\nu 2} \ldots & A_{\nu j-1} & P_\nu & A_{\nu j+1} \ldots & A_{\nu\nu} \end{vmatrix} \tag{6 a}$$

$$= \frac{1}{D} E_j(P_1, P_2, \ldots, P_\nu) \,,$$

et

$$\mathfrak{V}_j = \frac{1}{D} E_j(V_1, V_2, \ldots, V_\nu) \,, \tag{6 b}$$

où le determinant D est le mutiplicateur jacobien, M, des équations du mouvement. (Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, 1[iere] éd., p. 137 et p. 141).

En portant les valeurs (6) des λ_j dans les équations (4), on obtient pour x_i'' les expressions:

$$x_i'' = \frac{1}{m_i}[X_i + a_{1i}\mathfrak{P}_1 + a_{2i}\mathfrak{P}_2 + \cdots + a_{\nu i}\mathfrak{P}_\nu] + \frac{1}{m_i}[a_{1i}\mathfrak{V}_1 + a_{2i}\mathfrak{V}_2 + \cdots + a_{\nu i}\mathfrak{V}_\nu] \,. \tag{7}$$

A fin d'abréger, introduisons les désignations suivantes:

$$\begin{cases} F_i(X, x, t) = \dfrac{1}{m_i}[X_i + a_{1i}\mathfrak{P}_1 + a_{2i}\mathfrak{P}_2 + \cdots + a_{\nu i}\mathfrak{P}_\nu] \\ L_i(x', x, t) = \dfrac{1}{m_i}[a_{1i}\mathfrak{V}_1 + a_{2i}\mathfrak{V}_2 + \cdots + a_{\nu i}\mathfrak{V}_\nu] , \end{cases} \tag{8}$$

et nous pourrons mettre le résultat sous la forme:

$$x_i'' = F_i(X, x, t) + L_i(x', x, t). \tag{9}$$

Les équations (9) mettent bien en évidence les deux parties remarquables qu'on doit distinguer dans les composantes des accélérations x_i''.

L'une $F_i(X, x. t)$, est une fonction linéaire et homogène des projections des forces données et ne dépend pas *explicitement* des vitesses.

L'autre, $L_i(x', x, t)$, est indépendante des forces données mais contient les vitesses explicitement.

Je vais appeler

accélérations de forces (donnees)

les vecteurs, $\bar{a}_f$, dont les projections sur les axes de coordonnées sont $F_1, F_2, F_3; F_4, F_5, F_6; \ldots; F_{n-2}, F_{n-1}, F_n$, et

accélérations de liaisons

les vecteurs, $\bar{a}_l$, dont les projections correspondantes sont $L_1, L_2, L_3; L_4, L_5, L_6; \ldots; L_{n-2}, L_{n-1}, L_n$.

Les définitions que nous venons d'établir, ne reposent pas sur la distinction habituelle entre les forces dônnées et les forces de liaisons, de telle manière qu'on obtiendrait, par exemple, les accélérations de liaisons en divisant les forces de liaisons par les masses. Qu'il n'en est pas ainsi, on le reconnaît en remarquant que les forces de liaisons dépendent des forces données, tandis que les accélérations de liaisons en sont indépendantes.

Nous venons bien plutôt d'introduire une *distinction entre deux groupes composants de forces de liaisons.* La force de liaison qui agit sur la masse m_i dans la direction de x_i, se compose, comme le montre la formule (7), de deux parties dont l'une,

$$a_{1i}\mathfrak{P}_1 + a_{2i}\mathfrak{P}_2 + \cdots + a_{\nu i}\mathfrak{P}_\nu, \tag{10 a}$$

est la réaction que produisent les forces données, et, par conséquent, égale, et de signe contraire, à la composante correspondante de ces forces qui est neutralisée par le contact avec le système matériel, et dont l'autre,

$$a_{1i}\mathfrak{B}_1 + a_{2i}\mathfrak{B}_2 + \cdots + a_{\nu i}\mathfrak{B}_\nu, \tag{10 b}$$

exprime la force de liaison que nécessitent les vitesses et le caractère des liaisons. Il est utile de remarquer que, dans le cas où les seconds membres des équations (1) dépendent explicitement du temps, les $\mathfrak{B}_j$ ne s'annulent pas avec les vitesses. En effet, les $\mathfrak{B}_j$ sont des fonctions linéaires et homogènes des V_j, et celles-ci sont, comme le montrent les formules (5 a) des fonctions du second degré par rapport aux vitesses, et dans lesquelles figurent les derivées partielles $\dfrac{\partial a_j}{\partial t}$ comme termes du degré zéro.

On pourrait caractériser les accélérations de liaisons comme étant les accélérations qu'on obtiendrait, si l'on supprimait brusquement les forces données. Ce système d'accélération peut, par conséquent, être réalisé seul, quelle que soit la configuration actuelle du système matériel. Quant aux accélérations de forces données, il n'en est pas de même.

En effet, les accélérations de liaisons, formant un système d'accélérations réalisable d'un point de vue cinématique, doivent satisfaire aux équations (1 a). C'est à dire, qu'on doit avoir

$$(11) \qquad a_{j1} L_1 + a_{j2} L_2 + \cdots + a_{j\nu} L_\nu = V_j . \qquad (j = 1, 2 \ldots, \nu)$$

Or, les accélérations réelles étant

$$x_i'' = F_i + L_i \ ,$$

on a également

$$a_{j1} (F_1 + L_1) + a_{j2} (F_2 + L_2) + \cdots + a_{jn} (F_n + L_n) = V_j \ ,$$

et, par conséquent,

$$(12) \qquad a_{j1} F_1 + a_{j2} F_2 + \cdots + a_{jn} F_n = 0 .$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse, dans une configuration donnée, réaliser les accélérations de forces comme seul système d'accélération, est alors

$$V_1 = V_2 = \cdots = V_\nu = 0 .$$

On peut remarquer, que, si dans

$$V_j \equiv \alpha_j' - \sum^i a_{ji}' \, x_i' \equiv \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} + \sum^i \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \div a_{ji}' \right) x_i'$$

les $\dfrac{\partial \alpha_j}{\partial t}$ sont nuls, les V_j s'annulent avec les vitesses. Or les x_i' ne peuvent pas toutes être zéro, si les α_j (voir (1)) ne le sont pas.

Par conséquent, si l'on a en même temps

$$(13) \qquad \alpha_j = 0 \, , \ \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} = 0 \ ,$$

on peut réaliser les accélérations de forces en supprimant les vitesses des points. La condition (13) est remplie pendant tout le mouvement, si l'on a α_j constamment égal à zéro. Mais on doit remarquer qu'il n'est pas, pour cela, nécessaire que les liaisons soient indépendantes du temps. (Voir une remarque faite plus haut à propos de l'équation (1)).

Pour un instant donné on peut attacher à chaque système matériel un système auxiliaire, dont les équations de liaisons (1) sont à coefficients constants et égaux aux valeurs numériques des coefficients du système considéré. Appelons *système tangent* ce système auxiliaire. On peut donc définir:

Les accélérations de forces sont égales aux accélérations totales du système tangent.

En effet, pour le système auxiliaire les seconds membres des équations (1 a), c'est à dire les V_J, sont tous nuls, et les accélérations de liaisons disparaissent. Quant aux accélérations de forces, ne dépendant que des coefficients a_{ji} et des forces données, elles auront les mêmes valeurs que les accélérations correspondantes du système original.

III. Quelques propriétés caractéristiques des accélérations de forces et des accélérations de liaisons.

Nous allons désigner par les vecteurs $\bar{a}_f$ et $\bar{a}_l$ deux accélérations quelconques appertenant aux deux groupes que nous venons de définir dans le paragraphe précédent, et par x_f'' et x_l'' leurs composantes suivant les axes de coordonnées. Ayant ainsi supprimé l'indice qui fait voir à quel point matériel appartiennent ces accélérations, nous ne serons amenés à aucune ambiguïté dans l'usage que nous allons en faire, si nous convenons de désigner par

$$\Sigma f(\bar{a}_f, \bar{a}_l) = \Sigma g(x_f'', x_l'')$$

la somme des valeurs que prend la fonction $f(\bar{a}_f, \bar{a}_l)$ ou la fonction $g(x_f'', x_l'')$ pour chacue point du système matériel considéré.

En s'appuyant sur les définitions (8) on peut facilement démontrer le théorème suivant:

Théorème 1.

Les accélérations de forces $(\bar{a}_f)$ *et les accélérations de liaisons* $(\bar{a}_l)$ *d'un même système matériel satisfont, à chaque instant, à une condition d'orthogonalité:*

$$\Sigma m\bar{a}_f\bar{a}_l = \Sigma m x_f'' x_l'' = 0. \tag{14}$$

Prenons pour illustration le cas très special d'un seul point matériel en mouvement sur une surface fixe, les forces données qui agissent sur le mobile, étant quelconques. L'accélération $\bar{a}_l$ est dirigée suivant la normale de la surface. En effet, on l'obtient en supprimant les forces données. L'accélération composante, qu'il taut ajouter à $\bar{a}_l$ pour former l'accélération totale, est contenue dans le plan tangent. Mais cette accélération est précisément l'accélération de force, $\bar{a}_f$. Les vecteurs $\bar{a}_f$ et $\bar{a}_l$ sont alors rectangulaires, et satisfont bien à la condition $m \cdot \bar{a}_f \cdot \bar{a}_l = 0$.

Démonstration:

Les équations (8) nous permettent d'écrire

$$\Sigma m\bar{a}_f\,\bar{a}_l = \Sigma^i m_i F_i L_i = \Sigma^i F_i \Sigma^j a_{ji}\mathfrak{V}_j = \Sigma^j \mathfrak{V}_j \Sigma^i a_{ji} F_i\,;$$

or, d'après (12),

$$\Sigma\, a_{ji} F_i = 0\,.$$

Donc

$$\Sigma m\bar{a}_f \cdot \bar{a}_l = 0\,.$$

Il est utile de formuler dans un énoncé spéciale, la propriété des accélérations de forces de satisfaire aux équations (12), que nous venons d'appliquer.

THÉORÈME 2.

Les accélérations de forces d'un système matériel quelconque forment un système de déplacements virtuels et inversement.

En effet, les équations (12) sont les équations de liaisons (1) sans seconds membres, et les F_i étant choisies conformement aux équations (12), les équations (9) donnent les forces correspondantes.

En adoptant un raisonnement d'ordre mécanique, on peut donc démontrer le Théorème 1 en remarquant que les $m\bar{a}_l$ sont certaines forces de liaisons, (non nécessairement les forces de liaisons actuelles!) dont le travail est nul pour un déplacement virtuel. Donc

$$\Sigma m x_f'' \, x_l'' \;=\; \Sigma (m x_l'')\, \delta x = 0\,.$$

Remarque.

La différence de deux systèmes des accélérations doit satisfaire aux équations (1 a) sans seconds membres, c'est à dire aux équations (2) des déplacements virtuels. Il résulte du Théorème 2, qu'en passant d'un système d'accélérations à un autre, on ajoute toujours un système d'accélérations de forces. Donc les variations

$$\delta x,\ \delta x'',\ \delta x_f''.$$

et les accélérations de forces

$$x_f''$$

appartiennent au même ensemble de $(n - \nu)$ dimensions. Cet ensemble contient aussi les $\delta x'$ qui sont par définition équivalentes aux déplacements virtuels. Pour les $\delta x'$ on suppose les coordonnées et le temps constant, pour les $\delta x''$, outre ces quantités, les vitesses ne varient non plus. En formant les $\delta x_f''$ les vitesses n'interviennent pas, puisque les accélérations de forces en sont indépendantes. Nous ferons usage de ces remarques plus loin.

La proposition (14):

$$\Sigma m x_f'' x_l'' = 0,$$

ne constitue qu'une conséquence spéciale d'un théorème plus général qu'on peut établir de la manière suivante: D'après l'équation (9) on a

$$x_l'' = x'' - x_f'',$$

et cette quantité, on se le rappelle, ne dépend pas des forces données. Soient P et P' deux systèmes de telles forces, et désignons par $x''(P)$, $x_f''(P)$; $x''(P')$, $x_f''(P')$ les accélérations totales et les accélérations de forces correspondantes. On aura

$$x''(P) - x_f''(P) = x''(P') - x_f''(P') = x_l''.$$

En écrivant que le Théorème 1 est vrai pour les deux systèmes de forces P et P', il vient

$$\Sigma m \{x''(P') - x_f''(P')\} x_f''(P) = 0$$

$$\Sigma m \{x''(P) - x_f''(P)\} x_f''(P') = 0.$$

En retranchant les deux équations, on en tire

$$\Sigma m x''(P) \cdot x_f''(P') = \Sigma m x''(P') \cdot x_f''(P). \tag{15}$$

Pour $P' = 0$, les $x_f''(P')$ s'annulent, et les $x''(P')$ se reduisent à x_l''. L'égalité (15) prend la forme

$$\Sigma m x_f''(P) \cdot x_l'' = 0.$$

La proposition (14) et donc bien contenue dans (15).

Les $mx''(P)$ et $mx''(P')$ sont égales aux composantes des forces totales (forces données et forces de liaisons) dans les deux cas à considérer. Or, les $x_f''(P)$ et $x_f''(P')$ formant, d'après le Théorème 2, deux systèmes de déplacements virtuels, les forces de liaisons disparaissent de l'équation (15), qui devient

$$\Sigma X \cdot x_f''(X') = \Sigma X' \cdot x_f''(X), \tag{16}$$

en introduisant les composantes X et X' au lieu des forces P et P' elles mêmes. On peut donc formuler le

Théorème de réciprocité des accélérations de forces (Premier énoncé).

Deux systèmes de forces données déterminent, par leurs accélérations de forces, deux systèmes de déplacements virtuels. Les deux travaux virtuels réciproques qu'on peut former avec chaque système de forces pour les déplacements de l'autre, sont égaux.

Voilà le théorème général dont celui de LORD KELVIN dans la théorie des percussions, n'est qu'une application spéciale. Citons ici le théorème de l'illustre physicien:

Etant donné, dans *l'état de repos*, un système matériel, dont les liaisons sont *indépendantes du temps*. Soient X_p et X_p' deux systèmes de percussions, et $x'(X_p)$ et $x'(X_p')$ les vitesses correspondantes, produites au premier instant. On a

$$\Sigma X_p \cdot x'(X_p') = \Sigma X_p' \cdot x'(X_p)\,. \tag{17}$$

Je dis que l'équation (17) est une conséquence du théorème que nous venons de formuler plus haut.

En effet, les percussions

$$X_p \text{ et } X_p'$$

sont équivalentes à

$$X \cdot \tau \text{ et } X' \cdot \tau'\,,$$

où X et X' sont les forces moyennes, et τ et τ' les durées des percussions. Les deux conditions dans le théorème de Lord Kelvin suffisent pour qu'on ait au premier instant

$$x'' = x_f''\,,$$

$$x'(X_p) = x''(X)\,\tau = x_f''(X)\,\tau\,;\;\; x'(X_p') = x''(X')\,\tau' = x_f''(X')\,\tau'\,.$$

Donc, en multipliant les deux membres de l'équation (16) par $\tau \cdot \tau'$, on obtient

$$\Sigma X \cdot \tau \cdot x_f''(X') \cdot \tau' = \Sigma X' \cdot \tau' \cdot x_f''(X) \cdot \tau\,,$$

et, par conséquent,

$$\Sigma X_p \cdot x'(X_p') = \Sigma X_p' \cdot x'(X_p)\,.$$

L'égalité (16) permet de tirer une conséquence intéressante, qu'on pourra regarder comme une autre manière d'exprimer cette propriété des accélérations de forces sur laquelle repose, au fond, le théorème de réciprocité de ces accélérations.

Fixons deux points, i et k, arbitrairement choisis, du système matériel, et deux directions, ii' et kk', en ces deux points. Appliquons ensuite la proposition (16) au cas où les systèmes de forces, P et P, sont respectivement une force égale à l'unité en i, suivant la direction ii', et une force pareille en k, suivant kk'. Si l'on désigne par $a_{i_{f_k}}$ l'accélération de force en i, suivant ii', de la force en k, et par $a_{k_{f_i}}$ la notion inverse, le théorème de réciprocité des accélérations de forces donne immédiatement

$$a_{i_{f_k}} = a_{k_{f_i}}$$

Pour formuler ce résultat dans un énoncé concis et aussi général que possible, il faut remarquer que les accélérations de forces, constituant un effet des forces données en considération, qui se produit indépendamment de l'existence simultanée d'autres systèmes de forces, cela a un sens bien défini de parler des "*accélérations produites par un système des forces données*", même dans le cas où ces forces ne sont pas les seules en action.

Cela étant, on peut interpréter le résultat (18) de la manière suivante:

THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ DES ACCÉLÉRATIONS DE FORCES. (DEUXIÈME ÉNONCÉ).

Deux forces égales produisent, l'une suivant la direction de l'autre, des accélérations égales.

Les deux énoncés du principe de réciprocité des accélérations de forces sont analogues réspectivement au théorème de BETTI (APPELL: *Mécanique rationnelle* 3ieme éd., tome III, p. 623) et à celui de MAXWELL dans la théorie de l'élasticité.

L'existence de ces théorèmes analogues dans les deux domaines pourra, peut-être, rendre des services dans des recherches sur des liaisons réalisées matériellement, en se plaçant dans une hypothèse analogue, mais plus générale que celle de M. Delassus (*loc. cit.*), c'est à dire, en admettant que dans tous cas physiquement réalisables les liaisons soient pourvues, non seulement de la masse, mais aussi de l'élasticité. Donc les problèmes idéalisés de la mécanique rationnelle doivent se présenter comme des cas limits des problèmes réels, en y faisant tendre vers zéro la masse du système auxiliaire qui réalise les liaisons, et vers l'infini son coefficient d'élasticité.

La proposition fondamentale dans la partie précédente est sans doute celle exprimée par l'équation (15). Cette égalité renferme, outre le théorème d'orthogonalité, (Théorème 1) aussi les deux énoncés du principe de réciprocité. Par opposition à ce dernier principe qui porte sur les accélérations de forces seulement, on pourra appeler simplement:

PRINCIPE DE RÉCIPROCITÉ DES ACCÉLÉRATIONS, l'égalité:

$$\Sigma m x''(P) \cdot x_f''(P') = \Sigma m x''(P') \cdot x_f''(P) .$$

IV. Sur les valeurs que prend la fonction S, ou "l'énergie d'accélération", pour les deux groupes d'accélérations.

La forme générale des équations du mouvement convenant à tous les systèmes holonomes ou non holonomes, donnée par M. APPELL (*Comptes Rendus*, séanse 7 août, 1899), à bien montré le rôle important qui doit jouer cette fonction S, dont le nom, d' "*énergie d'accélération*" a été proposé par M. SAINT-GERMAIN. (*Comptes Rendus*, séance 30 avril, 1900).

Dans les recherches de M. Appell, qui constituent la seule application importante de la fonction qu'on ait faite jusqu'ici, il s'agit de la valeur de $S \equiv \frac{1}{2} \Sigma m a^2$ pour les accélérations *totales* du système. Je me propose dans la suite d'étudier les valeurs *spéciales* qu'on obtient, en remplaçant les accélérations totales, soit par les accélérations de forces, soit par les accélérations de liaisons.

Commençons par les dernières. En caractérisant comme "*possible au point de vue cinématique*", un système d'accélérations dont les projections satisfont aux équations (1 a) on peut formuler le théorème suivant:

Théorème 5.

Dans le domaine constitué par les systèmes d'accélérations possibles au point de vue cinématique, la fonction S, énergie d'accélération, atteint un minimum pour les accélérations de liaisons actuelles.

En effet, pour que la variation

$$\delta S = \Sigma^i \, m_i \, x_i'' \, \delta x_i''$$

s'annule, les variables indépendantes étant soumises aux conditions

$$(19) \qquad f_j = a_{j1} \, x_1'' + a_{j2} \, x_2'' + \cdots + a_{jn} \, x_n'' - V_j = 0 \, , \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

il faut qu'on puisse trouver ν quantités, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ telles que

$$(20) \qquad m_i \, x_i'' - \lambda_1 \, a_{1i} - \lambda_2 \, a_{2i} - \cdots - \lambda_\nu \, a_{\nu i} = 0 \cdot \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ce problème n'est qu'un cas particulier d'un problème plus général, que nous avons résolu plus haut. En effet, les équations (1 a) et (4), dont la solution générale était (voir (7))

$$x_i'' = \frac{1}{m_i} \{ X_i + \Sigma^j \, a_{ji} \, \mathfrak{P}_j + \Sigma^j \, a_{ji} \, \mathfrak{B}_j \} \, ,$$

se confondent avec les équations (19) et (20) dans le cas où les X_i s'annulent. On obtient alors la solution de ces dernières équations en égalant les X_i à zéro dans la formule au-dessus. En se rappelant que les $\mathfrak{P}_j$ sont des fonctions homogènes en X_i, on a pour $X_i = 0$

$$x_i'' = \frac{1}{m_i} \Sigma^j \, a_{ji} \, \mathfrak{B}_j$$

qui exprime, nous l'avons déjà vu, les projections des accélérations de liaisons.

Les conditions du premier ordre pour un extremum lié, sont donc remplies. Pour se rendre compte qu'il s'agit d'un minimum, on n'a qu'à former la fonction

$$f = S - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 - \cdots - \lambda_\nu f_\nu \, ,$$

et examiner la forme

$$\Phi(dx_1'', dx_2'', \ldots, dx_n'') = \sum^{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i'' \, \partial x_k''} dx_i'' \, dx_k'' ,$$

les dx'' étant liées par les équations

$$\sum \frac{\partial f_j}{\partial x_i''} dx_i'' = a_{j1} \, dx_1'' + a_{j2} \, dx_2'' + \cdots + a_{jn} \, dx_n'' .$$

(Voir: HADAMARD, *Calcul des variations,* t. I; p. 20).

Dans le cas actuel on a

$$\Phi = m_1 \, dx_1''^2 + m_2 \, dx_2''^2 + \cdots + m_n \, dx_n''^2 ,$$

ce qui est bien une forme quadratique, définie positive.

Remarque.

Le Théorème 5 peut aussi être considéré comme une conséquence du théorème général de M. Appell. Ce théorème affirme, on le sait, que les accélérations totales rendent la fonction

$$R = S - (Q_1 \, q_1'' + Q_2 \, q_2'' + \cdots + Q_k \, q_k'')$$

minimum. Or les Q s'annulent avec les forces données. Donc les accélérations de liaisons, étant les accélérations totales dans le mouvement sans forces données, rendent bien minimum la fonction S. (Voir APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. II, § 468 et *Comptes Rendus*, Séance 11 sept. 1899).

Les conditions du premier ordre pour un extremum de $\frac{1}{2} \Sigma m x_l''^2$ étaient déjà contenues dans le principe d'orthogonalité:

$$\Sigma m x_l'' \, x_f'' = 0 .$$

D'après une remarque que nous avons faite plus haut, les variations $\delta x''$ d'un système d'accélérations sont toujours équivalentes à un système d'accélérations de forces. Puisque le principe d'orthogonalité est vrai pour toutes les x_f'' possibles, il entraine

$$\Sigma m x_l'' \, \delta x_l'' = 0 , \text{ ou } \delta \frac{1}{2} \, \Sigma m x_l''^2 = 0 .$$

Le principe d'orthogonalité est donc un théorème général pour les mouvements sans forces données, c'est à dire, il permet d'écrire les équations du mouvement. Le principe affirme que les accélérations x_l'' sont telles, que *l'application d'un système quelconque des forces données* INFINIMENT PETITES *ne change pas la valeur de l'énergie d'accélération.* Nous reviendrons sur cette remarque plus tard.

On peut aussi supprimer toutes ces considérations intermédiaires, et se servir directement de l'équation

$$\Sigma m x_l'' \, x_f'' = 0 \,.$$

Puisque les x_f'' peuvent être choisies arbitrairement dans un ensemble de $(n - \nu)$ dimensions, l'équation au-dessus est équivalente à $(n - \nu)$ équations distinctes en x_l'', ce qui forment, avec les équations de liaisons, les équations du mouvement.

Revenons à la démonstration qui nous a servi plus haut (voir page 14), pour établir le principe d'orthogonalité. Les valeurs des $\mathfrak{V}_j$ n'intervenaient pas dans ce raisonnement, et on pouvait y substituer ν autres quantités quelconques. Mettons $\mathfrak{V}_j + \mathfrak{P}_j$ au lieu de $\mathfrak{V}_j$, et il vient

$$\Sigma^i F_i \, \Sigma^j a_{ji} (\mathfrak{V}_j + \mathfrak{P}_j) = \Sigma^j (\mathfrak{V}_j + \mathfrak{P}_j) \, \Sigma^i a_{ji} F_i = 0 \,.$$

Or, d'après (7),

$$\Sigma^j a_{ji} (\mathfrak{V}_j + \mathfrak{P}_j) = m_i x_i'' - X_i \,.$$

Donc

$$\Sigma^i F_i (m_i x_i'' - X_i) = \Sigma^i (m_i x_i'' - X_i) \, x_{i_f}'' = 0 \,.$$

Ou, en supprimant les indices,

$$\Sigma (m x'' - X) \, x_f'' = 0 \,. \tag{21}$$

Ce résultat se prête, comme le faisait l'équation $\Sigma m x_l'' \, x_f'' = 0$, à deux interprétations différentes. Ou l'on peut dire que, les x_f'' étant quelconques dans un ensemble de $(n - \nu)$ dimensions, (21) est une manière concise d'écrire $(n - \nu)$ équations distinctes en x'' et X, et on retrouve l'équation générale de la dynamique de LAGRANGE—D'ALEMBERT. Ou, puisque l'ensemble des x_f'' et celui des $\delta x''$ se confondent, l'équation (21) exprime que

$$\delta \frac{1}{2} \, \Sigma m \left(x'' - \frac{1}{m} X \right)^2 = \delta \left(\Sigma \frac{1}{2} m x''^2 - X x'' \right) = 0 \,,$$

et on découvre de nouveau les théorèmes de GAUSS et de M. APPELL. La liaison entre ces théorèmes, la proposition (21) et l'équation générale de la dynamique, à savoir entre

$$\Sigma m \left(x'' - \frac{1}{m} X \right) \delta x'' = 0 \,; \quad \Sigma m \left(x'' - \frac{1}{m} X \right) x_f'' = 0 \,; \quad \Sigma m \left(x'' - \frac{1}{m} X \right) \delta x = 0$$

est donc établie par la remarque que les $\delta x''$, x_f'' et δx appertiennent au même ensemble.

Au sujet du théorème de la moindre contrainte on pourra faire l'observation suivante. Ce beau théorème est au fond un énoncé sur les forces de liaisons, Q. En effet, la "contrainte", dont il parle, est exercée par ces forces, et on peut écrire le principe sous la forme:

$$\delta \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m} Q^2 = 0 \,.$$

Les Q sont considérées comme des *fonctions des forces données et des accélérations* en admettant le principe de d'Alembert

$$Y = mx'' - X, \text{ ou } Q = m\bar{a} - P \,.$$

Nous venons de faire plus haut (voir 10 a) et (10 b)) une distinction entre deux parties des forces de liaisons, à savoir

$$Y_c = \Sigma j\, a_{ji}\, \mathfrak{B}_j \,, \tag{10' a}$$

qu'on pourrait appeler "*partie cinématique*", et

$$Y_d = \Sigma j\, a_{ji}\, \mathfrak{P}_j \,, \tag{10' b}$$

dont "*partie dynamique*" serait peut-être un nom convenable. Par définition on a

$$Y_c = mx_l'', \ \ Y_d = mx_f'' - X \,.$$

Or de la proposition (21) on tire

$$\Sigma m \left(x'' - \frac{1}{m} X\right) x_f'' = \Sigma m \left(x_f'' + x_l'' - \frac{1}{m} X\right) x_f'' = \Sigma m \left(x_f'' - \frac{1}{m} X\right) x_f'' = 0$$

en vertu du principe d'orthogonalité. Donc par le même raisonnement dont nous avons fait usage plus haut, on établit

$$\Sigma m\left(x_f'' - \frac{1}{m} X\right) \delta x_f'' = 0; \ \Sigma m\left(x_f'' - \frac{1}{m} X\right) x_f'' = 0; \ \Sigma m \left(x_f'' - \frac{1}{m} X\right) \delta x = 0 \tag{21'}$$

Les trois énoncés s'appliquent alors, soit aux *accélérations totales*, soit aux *accélérations de forces*.

Quant au théorème de Gauss sous la forme

$$\delta \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m} Q^2 = 0$$

il est vrai non seulement pour les forces de liaisons *totales*, mais aussi pour les deux parties composantes Q_c et Q_d *séparément*. En Effet,

$$\delta \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m} Q_c^2 = \delta \frac{1}{2} \Sigma m x_l''^2 = 0$$

d'après le Théorème 5, et

$$\delta \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m} Q_d^2 = \delta \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m} \left(m x_f'' - X \right)^2 = \delta \frac{1}{2} \Sigma m \left(x_f'' - \frac{1}{m} X \right)^2 = 0 ,$$

d'après (21').

Le dernier résultat n'est pas sans intérêt. Il constitue *un théorème de la moindre contrainte spécialisé pour les accélérations directement produites par* UNE PARTIE *du système des forces totales.*

Revenons à l'étude de la fonction S. Il va sans dire que dans le domaine des accélérations de forces, assujetties à des conditions exprimées par des équations linéaires et homogènes, la forme quadratique à termes positifs, qui est l'énergie d'accélération, n'atteint aucun extremum à l'exception de la solution triviale $S = 0$, pour $x_f'' = 0$.

Je vais donc limiter le champ de variation, en ajoutant une nouvelle condition qui, du premier abord, paraîtra peut-être un peu arbitraire. Nous en verrons la signification plus loin. Je me propose donc de démontrer le

THÉORÈME 6.

Les accélérations de forces sont contenues dans un domaine, D,

$$g_0 = \Sigma X_i x_i'' - \Sigma m_i x_i''^2 = 0 , \tag{22}$$

$$g_j = a_{j1} x_1'' + a_{j2} x_2'' + \cdots + a_{jn} x_n'' = 0 , \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{23}$$

et rendent la fonction $S = \frac{1}{2} \Sigma m x_i''^2$ maximum dans ce domaine.

Le fait que les accélérations de forces satisfont au ν dernières équations, à déjà été énoncé dans le Théorème 2. La première égalité peut être vérifiée directement en utilisant l'expression (8)

$$x_{i_f} = \frac{1}{m_i} \{ X_i + a_{1i} \mathfrak{P}_1 + a_{2i} \mathfrak{P}_2 + \cdots + a_{\nu i} \mathfrak{P}_\nu \} \cdot \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

En multipliant ces équations respectivement par $m_1 x_{1_f}''$, $m_2 x_{2_f}''$, ..., $m_n x_{n_f}''$ et en ajoutant, on obtient

$$\Sigma^i m_i x_{i_f}''^2 = \Sigma^i X_i x_{i_f}'' + \Sigma^i x_{i_f}'' \{ a_{1i} \mathfrak{P}_1 + a_{2i} \mathfrak{P}_2 + \cdots + a_{\nu i} \mathfrak{P}_\nu \} .$$

Or

$$\Sigma^i x_{i_f}'' \Sigma^j a_{ji} \mathfrak{P}_j = \Sigma^j \mathfrak{P}_j \Sigma^i a_{ji} x_{i_f}'' = 0 .$$

Donc

$$\Sigma m_i x_{i_f}''^2 = \Sigma X_i x_{i_f}'' .$$

Les accélérations de forces sont donc bien contenues dans D.

Les conditions du premier ordre d'un extremum de la fonction S dans ce domaine, sont

$$m_i x_i'' + \lambda_0 (X_i - 2m_i x_i'') + \lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \cdots + \lambda_\nu a_{\nu i} = 0\,; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

d'où on tire

$$x_i'' = \frac{1}{(2\lambda_0 - 1)\, m_i} \{\lambda_0 X_i + \lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \cdots + \lambda_\nu a_{\nu i}\}\,. \tag{25}$$

Si l'on met ces valeurs dans l'équation (22), en se rappelant que les λ doivent être déterminés d'une manière que les équations (23) soient remplies, on obtient:

$$\Sigma X_i\, x_i'' = \frac{1}{2\lambda_0 - 1} \Sigma \frac{1}{m_i} \{\lambda_0 X_i + \lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \cdots + \lambda_\nu a_{\nu i}\}\, X_i\,,$$

$$\Sigma m_i\, x_i''^2 = \frac{\lambda_0}{(2\lambda_0 - 1)^2} \Sigma \frac{1}{m_i} \{\lambda_0 X_i + \lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \cdots + \lambda_\nu a_{\nu i}\}\, X_i\,.$$

Pour avoir

$$\Sigma X_i\, x_i'' = \Sigma m_i\, x_i''^2\,,$$

il faut que

$$\frac{1}{2\lambda_0 - 1} = \frac{\lambda_0}{(2\lambda_0 - 1)^2}\,,$$

équation qui admet deux solutions distinctes

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\,, \quad \lambda_0 = 1\,.$$

Premier cas: $\lambda_0 = \dfrac{1}{2}$.

Les équations (24) prennent la forme

$$\lambda_0 X_i + \lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \cdots + \lambda_\nu a_{\nu i} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{24 a}$$

et pour les x_i'' on obtient des expressions indéterminées $\dfrac{0}{0}$ (Voir (25)).

Deux possibilités se présentent. Ou les équations (24 a) sont contradictoires, et la solution $\lambda_0 = \dfrac{1}{2}$ est exclue. Ou l'on peut trouver ν quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ telles que les n équations ($n > \nu$) soient compatibles. Or dans ce cas les équations (24 a) constituent la condition suffisante pour que

$$\Sigma X_i\, x_i'' = 0 \tag{26}$$

pour toutes valeurs de x_i'' qui satisfont aux équations (23), c'est à dire, dans tout le domaine considéré. Cela entraîne

$$\Sigma m_i \, x_i''^2 = 0,$$

ce qui n'est possible que pour

$$x_1'' = x_2'' = \cdots = x_n'' = 0 \, .$$

Le domaine D ne referme donc qu'un seul système de valeurs, et il constitue ainsi un "champ singulier".

Ces valeurs, $x_1'' = x_2'' = \cdots = x_n'' = 0$, sont nécessairement les accélérations de forces actuelles. L'équation (26) exprime, en effet, qu'il y a équilibre.

Deuxième cas: $\lambda_0 = 1$.

Les équations (24) deviennent

$$\text{(24 b)} \quad m_i \, x_i'' = X_i + \lambda_1 \, a_{1i} + \lambda_2 \, a_{2i} + \cdots + \lambda_\nu \, a_{\nu i} \, , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ce qui avec (23) donnent les $(n + \nu)$ équations nécessaires pour déterminer les x_i'' et λ_j. Ces équations sont identiques aux systèmes d'équations (4) et (1 a), dans le cas où les V_j disparaissent. On obtient donc la solution des équations (24 b) et (23) en faisant $V_1 = V_2 = \cdots = V_\nu = 0$ dans la formule générale (7). Les $\mathfrak{V}_j$ étant des fonctions homogènes des V_j, il vient

$$x_{i_f}'' = \frac{1}{m_i} [X_i + a_{1i} \, \mathfrak{P}_1 + a_{2i} \, \mathfrak{P}_2 + \cdots + a_{\nu i} \, \mathfrak{P}_\nu] \, .$$

Or ces expressions sont précisément les projections des accélérations de forces.

Les conditions nécessaires d'un extremum sont donc bien remplies. Quant aux conditions suffisantes, il faut former

$$f = S + \lambda_0 \, g_0 + \lambda_1 \, g_1 + \lambda_2 \, g_2 + \cdots + \lambda_\nu \, g_\nu \, ,$$

et examiner la forme

$$\Phi \, (dx_1'', dx_2'', \ldots, dx_n'') = \sum^{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i'' \, \partial x_k''} dx_i'' \, dx_k'' = \Sigma m_i \, (1 - 2\lambda_0) \, dx_i''^2 \, .$$

Pour $\lambda_0 = 1$, on a

$$\Phi = - \Sigma m_i \, dx_i''^2 \, ,$$

ce qui est toujours une forme quadratique, définie négative. Il s'agit donc d'un maximum.

V. Le théorème des forces vives de vitesses et le théorème des forces vives d'accélérations.

Le but du paragraphe présent est d'établir quelques propositions qui vont nous servir plus tard pour donner à la condition introduite dans le Théorème 6, une signification mécanique.

Le théorème des forces vives sous la forme:

"La différentielle de la demi-force vive du système est égale à la somme des traveaux élémentaires des forces données",

applicable aux systèmes de points matériels dont les liaisons, supposées parfaites, ne dépendent pas du temps, doit, on le sait, son utilité surtout au fait qu'il ne fait intervenir que les forces *données*.

Pour un système quelconque on conserve l'énoncé en y ajoutant un terme complémentaire, à savoir les traveaux des forces de liaisons. Or, cela revenant à considérer le système matériel comme un ensemble de points libres, sollicités par les forces totales, on pourra affirmer qu'il n'existe en réalité aucun théorème des forces vives dans le cas général, où les laisons dépendent du temps.

On pourra tenter une autre généralisation en remarquant que, dans le cas spécial, l'accroissement de la demi-force vive est dû aux forces données, et que, par conséquent, le théorème ci-dessus pourra être regardé comme l'application à ce cas d'un théorème plus général sur cet accroissement *partiel* de l'énergie cinétique.

Voilà comment on pouvait établir ce théorème général. Nous caractérisons un système matériel par les équations

$$a_{j1}\, x_1' + a_{j2}\, x_2' + \cdots + a_{jn}\, x_n' = \alpha_j\,,$$

et leur conséquences

$$a_{j1}\, x_1'' + a_{j2}\, x_2'' + \cdots + a_{jn}\, x_n'' = \beta_j\,.$$

J'ai démontré que les accélérations peuvent s'exprimer

$$x_i'' = x_{i_f}'' + x_{i_l}''\,,$$

avec

$$m_i\, x_{i_f}'' = X_i + \Sigma j\; a_{ji}\, \mathfrak{P}_j\,; \qquad m_i\, x_{i_l}'' = \Sigma j\; a_{ji}\, \mathfrak{V}_j\,,$$

où

$$\mathfrak{P}_j = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} A_{11} \ldots & P_1 \ldots & A_{1\nu} \\ . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \\ . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \\ A_{\nu 1} \ldots & P_\nu \ldots & A_{\nu\nu} \end{vmatrix}\,; \quad \mathfrak{V}_j = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} A_{11} \ldots & V_1 \ldots & A_{1\nu} \\ . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \\ . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & . \quad . \\ A_{\nu 1} \ldots & V_\nu \ldots & A_{\nu\nu} \end{vmatrix}\,,$$

en convenant que

$$A_{jk} = \Sigma_i \frac{a_{ji}\, a_{ki}}{m_i}\,,\quad P_j = -\Sigma_i \frac{a_{ji}\, X_i}{m_i}\,,\quad V_j = \beta_j = \Sigma_i \frac{a_{ji}(X_i + Y_i)}{m_i}\,,\ D = |A_{jk}|\,,$$

les X_i et Y_i étant les composantes des forces données et des forces de liaisons.

Pour un système en mouvement *sans forces données* le théorème des forces vives donne, en divisant par dt,

$$\Sigma_i\, m_i\, x_i'\, x_{i_l}'' = \Sigma_i\, x_i'\, \Sigma_j\, a_{ji}\, \mathfrak{V}_j\,.$$

Envisageons maintenant le même système, assujetti à des *forces données quelconques,* et il vient

$$\Sigma_i\, m_i\, x_i'\, x_i'' = \Sigma_i\, X_i\, x_i' + \Sigma_i\, x_i'\, \Sigma\, a_{ji}(\mathfrak{P}_j + \mathfrak{V}_j)\,.$$

En suivant une idée analogue à celle qui nous a amené plus haut à une classification des accélérations, nous cherchons ici cet accroissement de l'énergie cinétique qu'on peut attribuer à l'existence des forces données. En retranchant les deux équations précédentes, et en désignant par $\Delta_f E$ l'accroissement, pour l'unité du temps, de l'énergie de vitesse dû aux forces données, on obtient:

$$\Delta_f E = \Sigma_i\, m_i\, x_i'\, x_{i_f}'' = \Sigma_i\, X_i\, x_i' + \Sigma_i\, x_i'\, \Sigma_j\, a_{ji}\, \mathfrak{P}_j\,. \tag{27}$$

En écrivant (voir 10′ a), page 11)

$$R_{i_f} = \Sigma_j\, a_{ji}\, \mathfrak{P}_j\,, \tag{28}$$

et en introduisant le tenseur

$$T(\xi_i) = \Sigma_i \left\{ X_i + R_{i_f} - m_i\, x_{i_f}'' \right\} \xi_i, \tag{29}$$

on peut écrire (27) sous la forme

$$T(x_i') = 0\,. \tag{30}$$

Voilà ce *théorème des forces vives généralisé*, dont nous venons de parler plus haut. — On doit remarquer que les x_{i_f}'' et les R_{i_f}, qui figurent dans les coefficients du tenseur (29), sont respectivement les accélérations et les réactions dans les liaisons *produites par les forces données*, X_i. Pour un système de points libres, les R_{i_f} sont nulles, puisque les liaisons, c'est à dire les a_{ji} (voir (28)) disparaissent et le tenseur se simplifie

$$T(\xi_i) = \Sigma \{ X_i - m_i\, x_i'' \}\, \xi_i\,. \tag{29′}$$

Cette remarque suffit pour démontrer que l'équation (30) renferme aussi l'énoncé habituel du théorème des forces vives. En effet, en regardant les points du système comme libres et sollicités par les forces totales, $X_i + Y_i$, on peut appliquer la forme (29′), et on obtient

$$T(x_i') \equiv \Sigma \{X_i + Y_i - m_i x_i''\} x_i' = 0 ;$$

d'où on tire

$$\Sigma \{X_i + Y_i\} x_i' = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \Sigma m_i x_i'^2 .$$

D'autre part l'énoncé (29) permet d'établir certaines propriétés cinétiques des systèmes matériels, qui sont, peu-être, moins évidentes quand on emploie la forme habituelle combinée avec les équations du mouvement.

J'indique au titre d'example:

L'équation (30) donne immediatement (voir aussi (27))

$$\Delta_f E - \Sigma X_i x_i' = \Sigma R_{i_f} x_i' = \Sigma_i x_i' \Sigma_j a_{ji} \mathfrak{P}_j = \Sigma_j \mathfrak{P}_j \Sigma_i a_{ji} x_i' = \Sigma_j \mathfrak{P}_j \alpha_j .$$

Donc:

L'accroissement de la demi-force vive DÛ AUX FORCES DONNÉES, *est égal aux traveaux élémentaires de ces forces, à un terme près* INDÉPENDANT DES VITESSES.

Pour trouver la valeur de ce terme, il suffit donc d'évaluer

$$\Delta_f E - X_i x_i'$$

pour un système de valeurs, x_i' convenablement choisi. Dans le cas spécial (liaisons indépendantes du temps) les valeurs $x_i' = 0$ constituent un système possible. La fonction ci-dessus, étant homogène en x_i', s'annule pour $x_i' = 0$, et, par conséquent, pour toutes autres valeurs possibles des vitesses.

Une autre observation est la suivante: Au sujet du travail des forces de liaisons, il semble du premier abord, que les vitesses interviennent de deux manières différentes, premièrement, en déterminant les déplacements des points, et deuxièmement, par l'intermédiaire des forces de liaisons, qui en dépendent. Or il est assez intéressant de remarquer qu'il n'en est pas ainsi. En effet, nous avons écrit les forces de liaisons sous la forme (voir (10 a) et (10 b))

$$Y_i = \Sigma_j a_{ji} \{\mathfrak{P}_j + \mathfrak{B}_j\} .$$

Donc les traveaux élémentaires intérieurs sont

$$dA_l = \Sigma_i x_i' dt \Sigma_j a_{ji} (\mathfrak{P}_j + \mathfrak{B}_j) = dt \Sigma_j (\mathfrak{P}_j + \mathfrak{B}_j) \Sigma_i a_{ji} x_i' = dt \Sigma_j (\mathfrak{P}_j + \mathfrak{B}_j) \alpha_j .$$

Or

$$\mathfrak{P}_j + \mathfrak{V}_j = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} A_{11} \ldots P_1 + V_1 \ldots A_{1\nu} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ A_{\nu 1} \ldots P_\nu + V_\nu \ldots A_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

où

$$P_j + V_j = -\Sigma_i \frac{a_{ji} X_i}{m_i} + \Sigma_i \frac{a_{ji}(X_i + Y_i)}{m_i} = \Sigma_i \frac{a_{ji} Y_i}{m_i}.$$

Il en résulte que:

Les traveaux élémentaires des forces de liaisons dépendent de ces forces, mais non EXPLICITEMENT *des vitesses:*

En résumant:

LES TRAVEAUX ÉLÉMENTAIRES DES FORCES DONNÉES =

$=\begin{cases} (\alpha) & \textit{l'accroissement de la demi-force vive, } \text{DÛ AUX FORCES DONNÉES} \\ & + \textit{ un terme qui ne dépend pas des vitesses.} \\ (\beta) & \textit{l'accroissement } \text{TOTAL} \textit{ de la demi-force vive + un terme qui ne} \\ & \textit{dépend pas } \text{EXPLICITEMENT} \textit{ des vitesses.} \end{cases}$

Le théorème des forces vives sous la forme généralisée revient donc à affirmer qu'un certain tenseur,

$$T(\xi_i),$$

est égal à zéro pour $\xi_i = x_i'$. Il est vrai que ce tenseur est identiquement nul, si l'on tient compte des équations du mouvement. Mais si l'énoncé (30) n'est pas quand même banal, c'est parceque le terme $\Sigma m x' x_f'' = \left(\frac{dE}{dt}\right)_f$ $\left[\text{respectivement } \Sigma m x' x'' = \left(\frac{dE}{dt}\right)\right]$ a une signification intéressante et intrinsèque.

Ce qui donne à cette forme du théorème un intérêt de plus, c'est qu'il existe un théorème par rapport aux accélérations, à savoir

$$(31) \qquad T(x_i'') = 0,$$

qui peut être interprété d'une manière tout à fait analogue. En effet, revenant au théorème (30)

$$T(x_i') = \Sigma\left(X_i + R_{i_f} - m_i x_{i_f}''\right) x_i' = 0,$$

et écrivons

$$(32) \qquad W(\xi_i) = \Sigma(X_i + R_{i_f})\, \xi_i.$$

On peut donc mettre (30) sous la forme

$$\Delta_f E \cdot = W(x_\iota') . \tag{33}$$

Le dernier terme est le travail *total,* pour l'unité de temps, qu'on peut attribuer à l'existence des forces données. Il renferme, en effet, le travail produit, soit par ces forces elles-mêmes, soit par les réactions créées par elles. Les x_ι' sont les chemins que parcourraient les points dans l'unité de temps en vertu de leurs vitesses, supposées constantes dès le moment actuel. Désignons, pour plus de symmétrie dans la suite, par δx_v ces déplacements, et l'équation (33) prendra la forme

$$\Delta_f E = W(\delta x_v) . \tag{33'}$$

Le premièr terme de cette équation signifie, nous l'avons vu plus haut, l'accroissement de l'energie *de vitesse* dû aux forces données. De la même manière, l'énergie *d'accélération* subit, en vertu de l'existence des forces données, une augmentation (brusque), à savoir

$$\Delta_f S = \frac{1}{2} \Sigma m_\iota (x_{\iota f}'' + x_{\iota l}'')^2 - \frac{1}{2} \Sigma m_\iota \, x_{\iota l}''^2 = \frac{1}{2} \Sigma m_\iota (x_{\iota f}'' + x_{\iota l}'') \, x_{\iota f}'' + \\ + \frac{1}{2} \Sigma m_\iota \, x_{\iota f}'' \, x_{\iota l}'' = \frac{1}{2} \Sigma m_\iota \, x_\iota'' \, x_{\iota f}'' .$$

En introduisant cette notion dans l'équation (31), on obtient

$$\Delta_f S = W\left(\frac{1}{2} x_\iota''\right) . \tag{34}$$

Nous venons d'introduire plus haut les déplacements, δx_v, dus aux *vitesses* supposées constantes. Désignons maintenant par δx_a les déplacements des points pendant la seconde prochaine, dus aux *accélérations* actuelles, supposées à leur tour constantes. On a

$$\delta x_a = \frac{1}{2} x_\iota'' ,$$

et l'équation (34) devient

$$\Delta_f S = W(\delta x_a) . \tag{34'}$$

Les deux énoncés analogues (33') et (34') nous permettent de donner aux théorèmes

$$T(x_\iota') = 0 , \quad T(x_\iota'') = 0 \tag{30), (31}$$

l'interprétation mécanique suivante:

On peut attribuer à l'existence des forces données un accroissement (pour l'unité de temps) de l'énergie de VITESSE, *et une augmentation (brusque) de l'énergie d'*ACCÉLÉRATION. *Le premier est la même fonction des déplacements δx_v, dus aux* VITESSES, *qu'est l'autre des déplacements δx_a, dus aux* ACCÉLÉRATIONS. *Cette fonction commune est le travail total des forces données pour ces deux groupes de déplacements.*

On peut rendre les théorèmes (30) et (31) encore un peu plus généraux. Dans l'expression du tenseur

$$T(\xi_i) = \Sigma (X_i + R_{i_f} - m_i x_{i_f}'') \xi_i$$

les R_{i_f} et les x_{i_f}'' sont, on le sait, les réactions et les accélérations créées par le systèmes de forces données, X_i, celui-ci étant supposé renfermer *toutes* les forces données. Or il suffit d'entendre par X_i un système quelconque, total ou partiel, de ces forces. Pour le démontrer, on n'a qu'à remarquer que les coefficients du tenseur sont des fonctions linéaires et homogènes des forces données.

Le théorème (30) donne alors des renseignements d'ordre cinétique, plus détaillés que l'énoncé habituel du théorème des forces vives. L'équation (30) rattache toujours, et non seulement dans le cas spécial (liaisons indépendantes du temps) un accroissement de la force vive directement aux traveaux qui l'ont produit.

Je propose d'appeler $T(\xi_i)$ *le tenseur du théorème des forces vives*; et comme on parle déjà d'une "énergie d'accélération", en pourra aussi, en conservant un nom inopportun, mais traditionnel, introduire la locution: "force vive d'accélération". On aura donc les deux théorèmes analogues

$T(x_i') = 0$. *Théorème des forces vives de vitesses.*

$T(x_i'') = 0$. *Théorème des forces vives d'accélérations.*

Ce dernier théorème va nous fournir une interprétation de la condition supplémentaire, introduite dans le paragraphe precédent. Mais puisque ces considérations auront un intérêt spécial à propos d'un théorème général tenté par WILHELM OSTWALD, et auquel je vais consacrer quelques pages dans la suite, je ne reviendrai à cette interprétation que plus loin.

DEXIÈME PARTIE.

VI. Le théorème de Wilhelm Ostwald. Historique.

Dans son "Lehrbuch der allgemeinen Chemie" (II. Band, 1. Teil, p. 37) WILH. OSTWALD a, on le sait, énoncé un principe très général, qui serait applicable, d'après la proposition de son auteur, à tous les phénomènes de la nature. Il devait en particulier constituer un théorème général pour la mécanique.

Pour fixer les idées, Ostwald fait d'abord la remarque, qu'un point matériel libre qui tombe dans le champ de gravitation, et qui, assujetti à la seule condition de respecter le théorème des forces vives, pourrait se mouvoir de plusieures manières différentes, suit la trajectoire qui donne, à chaque instant, la plus grande transmission de l'énergie ("Energieumsatz") pour l'unité de temps. Il énonce ensuite le théorème suivant:

"*Von allen möglichen Energieumwandlungen wird diejenige eintreten, welche in gegebener Zeit den größt möglichen Umsatz ergibt.*"

(Parmi toutes les transformations d'énergies possibles, celle qui se présente réellement, donne, pour un intervalle de temps donné, la plus grande transmission (d'énergie)).

Tout phénomène dans la nature est une transmission d'énergie, une quantité d'énergie qui passe d'une forme à une autre. C'est cette quantité par rapport au temps que le grand "énergéticien", qui fut Wilhelm Ostwald, envisage dans son théorème. On pourrait emprunter à l'hydrodynamique et à l'electromagnetisme le mot *flux*, et dire que le théorème ostwaldien affirme que, dans tous les phénomènes de la nature, le "*flux d'énergie*" est toujours le plus grand possible.

Il s'agit evidemment d'un maximum lié, puisq'il faut d'abord écarter l'ensemble des transformations d'énergies dites "impossibles". Outre les conditions spéciales qui s'imposent dans chaque cas particulier (liaisons), il existe cette condition universelle que constitue la loi de la conservation de l'énergie. Tous les phénomènes doivent se présenter comme des vraies "transformations", et non comme des pertes ou des créations d'énergies. Pour les problèmes de la mécanique, cela revient à dire que le théorème des forces vives doit être respecté.

Ostwald a formulé son principe analytiquement de la manière suivante:

$$\delta\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right) = 0\,,$$

où ΔE est l'énergie transmise pendant le temps Δt, et δ signifie une différentiation totale par rapport à tous les paramètres dont dépend l'ensemble des transformations d'énergies possibles au moment donné. Ostwald remarque que cet énoncé fait voir seulement que $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ atteint un extremum. Il ajoute qu'un minimum peut se présenter dans certains cas.

Aucune démonstration de ce théorème hardi n'a, à ma connaissance, été publiée par l'illustre savant, et le principe a fait naître une discussion assez vive. Néamoins, la question n'a point été tranchée définitivement. Le mathématicien hongrois, M. Z. Gyösö, a prononcé il-y-a dix huit ans, dans "*Ann. der Physik*" un jugement apparemment décisif. Malheureusement, le point de depart de M. Gyösö était, nous le verrons plus loin, inexact.

C. NEUMANN a consacré à ce sujet un article intitulé: "*Das Ostwald'sche Axiom des Energieumsatzes*" (*Berichte d. säch. Gesellschaft d. Wissenschaften*, Band 44 (1892) p. 184), qui commence ainsi: "Prof. Ostwald hat in seinem neusten Werk (Lehrbuch der Chemie) ein gewisses Axiom aufgestellt über den Umsatz der Energie, d. i. über dasjenige Quantum von Energie, welches binnen einer gegebenen Zeit aus der potentiellen (distantiellen) Form in die kinetische Form übergeht. Auf Veranlassung meines hochgeehrten Collegen habe ich dieses Axiom einer näheren Untersuchung unterworfen, allerdings unter der beschränkenden Voraussetzung, daß das gegebene, materielle System zu Anfang sich in Ruhe befindet, und daß die von dieser Ruhelage aus beginnende Bewegung nur während ihres ersten Zeitelementes in Betracht gezogen werden soll."

Neumann arive à la conclusion suivante: "Ein beliebigen Bediugungen unterworfenes materielles System bewege sich unter dem Einfluß gegebener Kräfte, die ein Potential besitzen.

Befindet sich dieses System zu Anfang eines unendlich kleinen Zeitelementes τ in Ruhe, so wird unter allen mit jenen Bedingungen verträglichen, virtuellen Bewegungen eine vorhanden sein, deren lebendige Kraft zu Ende der gegebenen Zeit τ am größten ist. Diese letztere wird alsdann diejenige sein, welche unter dem Einfluß der gegebenen Kräfte während der Zeit τ in Wirklichkeit eintritt."

Or cet énoncé est un peu plus général que ne justifient les calculs. Par "*beliebige Bedingungen*" il faut entendre des liaisons quelconques qui *ne dépendent pas du temps*. Ce qu'a fait Neumann c'est donc de retrouver le théorème fameux de LAGRANGE (*Mécanique Analytique*, 2. partie, 3. section, § 37) et de DELAUNAY (*Journal de Mathématiques pures et appliqués*, tome V (1840) p. 255) sur l'énergie cinétique que prend au premièr moment un système matériel qui, à partir d'un état de repos, se met en mouvement sous l'action des percussions quelconques données. La condition que les liaisons soient indépendantes du temps, est essentielle, soit pour le théorème de Lagrange-Delaunay (Lagrange, *Loc. cit.*, II, 3, § 33. Delaunay *Loc. cit.*, p. 261) soit por la démonstration de Neumann (*Loc. cit.*, p. 185. Les équations (3)).

L. BOLTZMANN, en utilisant le résultat de Neumann, a tenté de faire du théorème ostwaldien un principe général incontestable. Il n'a cependant, réussi qu'en se plaçant dans l'hypotèse d'une mécanique célèste atomique. Voici ce qu'il observe: ("*Ein Wort der Mathematik an die Energetik.*" *Ann. d. Physik.* Neue Folge, Band 57 (1896) p. 44). "Bei diesem Stand der Dinge mag man es entschuldigen, wenn ich auf die Gefahr hin, zu irren, selbst Herrn Ostwalds Ideen einheitlich zu fassen suche. Mann kann die Mechanik, wie ich glaube, einwurfsfrei aus folgenden Principen erhalten:

1⁰. Die mechanischen Systeme bestehen aus materiellen Punkten, deren kinetische Energie in bekannter Weise gleich $\frac{1}{2} \Sigma m v^2$ ist, und deren potentielle (Distanz-) Energie eine Summe von Functionen der Entfernungen je zweier ist.

2^0. Wenn alle materielle Punkte anfangs ruhen, so bewegen sie sich während des nächst folgenden unendlich kleinen Zeitteilchens so, daß unter Wahrung des Energieprincips ein Maximum potentieller Energie sich in kinetische umwandelt. (Neumann).

3^0. Wenn sich die materiellen Punkte schon anfangs bewegten, so superponiert sich die Geschwindigkeit, welche sie schon haben, während jedes Zeitmomentes mit der, welche sie nach 2. erhalten würden, wenn sie sich zu Anfang des betreffenden Zeitmomentes in gleicher, relativer Lage in Ruhe befänden."

Boltzmann ne fut point un "énergéticien", et il admettait volontiers l'imperfection de cet énoncé, qu'il croyait néamoins être le meilleur que pouvaient fournir les idées d'Ostwald.

Cette énergie potentielle dont il parle dans le premier énoncé, on ne la connaît pas pour un système quelconque, un corps solide par exemple. Boltzmann fait à propos de cette faiblesse, l'observation critique suivante (*Loc. cit.* p. 45). "Eine direkte Ableitung der allgemeinen Euler'schen Bewegungsgleichungen für starre Körper aus energetischen Principien ohne den Umweg über die atomistische Hypothese, ist mir nicht bekannt."

Je ne me propose pas de discuter ici la service que pourra rendre le théorème ostwaldien sous la forme que lui a donné Boltzmann. Il suffit de remarquer que cet énoncé ne constitue certainement pas un principe général de la mécanique. Voici pourquoi: en se trouvant dans l'impossibilité de donner aucun renseignement sur l'énergie potentielle dont nous venons de parler, le principe Ostwald-Boltzmann ne nous permet pas d'écrire, dans un cas concret, les équations du mouvement. Ni Neumann, ni Boltzmann, n'ont donc, on l'admettra, dit rien de définitif. Le théorème d'Ostwald est resté entouré d'une atmosphère de mysticisme, Il a été accepté dans certains milieux comme une vérité universelle. C'est alors en 1903 que le mathématicien hongrois, a qui nous avons fait allusion plus haut a tenté de répondre finalement à la question pendante.

M. Zemplén Gyösö s'est proposé ("*Ueber den Energieumsatz in der Mechanik*" *Ann. d. Physik*, 4. Folge, 10. Band 1903, p. 419) le problème suivant. Un point matériel se meut sur une surface $\varphi(x, y, z) = 0$ sous l'action d'une force, dont les composantes X, Y, Z, ne dépendent pas du temps. En applicant le théorème d'Ostwald, quelles sont les équations du mouvement, et dans quels cas ces équations et les équations ordinaires se confondent-elles?

M. Gyösö appelle u, v, w, les composantes de la vitesse a l'époque t, et $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ leurs valeurs pour $t + \tau$, et il cherche les $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ qui rendent maximum

$$T_{t+\tau} - T_t = \frac{1}{2} m \{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 - u^2 - v^2 - w^2\},$$

sous les deux conditions qu'imposent le théorème des forces vives et la liaison. Il exprime ces conditions sous la forme

$$(35)\quad \frac{1}{2} m \{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 - u^2 - v^2 - w^2\} \div \frac{\tau}{2}\{X(\bar{u}+u) + Y(\bar{v}+v) + \\ + Z(\bar{w}+w)\} = 0 ,$$

$$(36)\qquad \frac{\tau}{2}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\bar{u}+u) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\bar{v}+v) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\bar{w}+w)\right\} = 0 ,$$

les x, y, z; X, Y, Z; u, v, w; τ étant regardées comme des constantes.

Or ici l'auteur est dans l'erreur. En effet, il est facile de faire voir que ces conditions (35) et (36) ne sont pas, dans certains cas, satisfaites par des mouvements réels. Prenons un point qui se meut sur une sphère du rayon R, et dont le centre est à l'orgine et faisons:

$$x = 0 ,\ y = 0 ,\ z = R;\ u = u ,\ v = 0 ,\ w = 0;\ X = 0,\ Y = 0,\ Z = Z,$$

et, par conséquent:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 ; \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2R .$$

Les conditions (35) et (36) deviennent:

$$(35')\qquad \frac{1}{2} m \{\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2 - u^2\} - \frac{\tau}{2} Z \bar{w} = 0 ,$$

$$(36')\qquad \tau R \cdot \bar{w} = 0 ,$$

et ces équations doivent être remplies identiquement pour les termes en τ^2. Or dans le mouvement réel on trouve

$$\bar{u} = u\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{u^2}{R^2}\tau^2 + \cdots\right\},\ \bar{v} = 0 ,\ \bar{w} = -\frac{u^2}{R}\tau + \cdots$$

et, si l'on met ces valeurs dans les expressions (35') et (36') on obtient

$$(35'')\qquad \frac{\tau^2}{2} Z \frac{u^2}{R} + \cdots = 0 ,$$

$$(36'')\qquad -\tau^2 u^2 + \cdots = 0 .$$

Il n'y a donc rien d'étonnant que M. Gyösö puisse tirer de ses équations finales la conclusion qu'elles ne représentent pas dans le cas général le mouvement réel. Mais en vertu de son point départ inexact, ses recherches ne fournissent aucun critère applicable au théorème ostwaldien.

VII. Discussion du théorème ostwaldien.

Dans son théorème, Ostwald envisage les différents mouvements possibles pendant un intervalle donné ("in gegebener Zeit"). D'après l'énoncé il n'est nullement clair si l'on doit entendre par là un intervalle fini ou infinement petit, mais constant, c'est à dire, le même pour tous les mouvements considérés.

Ostwald affirme que le mouvement réel réalise

$$\delta\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right) = 0 \tag{37}$$

parmi tous les mouvements possibles au point de vue énergétique (Théorème des forces vives) et cinématique (liaisons).

Avec $E = \dfrac{1}{2}\Sigma m v^2$, on a

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \Sigma m \bar{v}\cdot\bar{a} + \frac{1}{2}\Sigma m\,(\bar{v}\cdot\bar{a}' + \bar{a}^2)\,\Delta t + \frac{1}{3!}\Sigma m\,(\bar{v}\cdot\bar{a}'' + 3\bar{a}\cdot\bar{a}')\,\Delta t^2 + \\ + \frac{1}{4!}\Sigma m\,(\bar{v}\cdot\bar{a}''' + 4\bar{a}\cdot\bar{a}'' + 3\bar{a}'^2)\,\Delta t^3 + \cdots, \tag{38}$$

en désignant par $\bar{a}$ les vecteurs accélérations, et par $\bar{a}'$, $\bar{a}''$, ... les dérivées totales supérieures.

La durée Δt étant arbitraire, la condition (37) entraine

$$\text{(39)}\qquad \begin{cases} \text{(a)} & \delta\Sigma m\bar{v}\cdot\bar{a} = 0 \\ \text{(b)} & \delta\Sigma m\,(\bar{v}\cdot\bar{a}' + \bar{a}^2) = 0 \\ \text{(c)} & \delta\Sigma m\,(\bar{v}\cdot\bar{a}'' + 3\bar{a}\cdot\bar{a}') = 0 \\ \text{(d)} & \delta\Sigma m\,(\bar{v}\cdot\bar{a}''' + 4\bar{a}\cdot\bar{a}'' + 3\bar{a}'^2) = 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Une première remarque est la suivante. Les coordonnées, les vitesses des points et le temps étant les mêmes pour tous les mouvements constituant le "champ de variation", l'opération δ doit nécessairement signifier

$$\delta F(x, x', x'', x''', \ldots, t) = \Sigma\frac{\partial F}{\partial x_i''}\,\delta x_i'' + \Sigma\frac{\partial F}{\partial x_i'''}\,\delta x_i''' + \cdots. \tag{39'}$$

Quant aux équations qui lient les variations $\delta x_i''$, $\delta x_i'''$, ... entre elles, on a:

1^0 *Les conditions cinématiques.*

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\text{(a)} & a_{j1}\, x_1'' + a_{j2}\, x_2'' + \cdots + a_{jn}\, x_n'' = \beta_j\,, \\
\text{(b)} & a_{j1}\, x_1''' + a_{j2}\, x_2''' + \cdots + a_{jn}\, x_n''' + \Sigma^i \left(a_{ji}' - \dfrac{\partial \beta_j}{\partial x_i'}\right) x_i'' = \delta_j\,, \\
\text{(c)} & a_{j1}\, x_1'''' + a_{j2}\, x_2'''' + \cdots + a_{jn}\, x_n'''' + \Sigma^i\, c_{ji}\, x_i''' + d\,(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'') = \gamma_j\,. \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Les seconds membres ne dépendent pas des x_i'' et des dérivées supérieures. Donc:

$$(40')\quad \left\{\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \Sigma^i\, a_{ji}\, \delta x_i'' = 0\,, \\
\text{(b)} & \Sigma^i\, a_{ji}\, \delta x_i''' + \Sigma^i\, b_{ji}\, \delta x_i'' = 0\,, \\
\text{(c)} & \Sigma^i\, a_{ji}\, \delta x_i'''' + \Sigma^i\, c_{ji}\, \delta x_i''' + \Sigma^i\, d_{ji}\, \delta x_i'' = 0\,. \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

2^0 *Les conditions énergétiques.*

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \Sigma m\bar{v} \cdot \bar{a} = \overline{P} \cdot \bar{v} \equiv A_1\,, \\
\text{(b)} & \Sigma m\,(\bar{v} \cdot \bar{a}' + \bar{a}^2) = \Sigma \overline{P} \cdot \bar{a} + \Sigma \overline{P'} \cdot \bar{v} \equiv A_2\,, \\
\text{(c)} & \Sigma m\,(\bar{v} \cdot \bar{a}'' + 3\bar{a} \cdot \bar{a}') = \Sigma \overline{P} \cdot \bar{a}' + 2\Sigma \overline{P'} \cdot \bar{a} + \Sigma \overline{P''} \cdot \bar{v} \equiv A_3\,, \\
\text{(d)} & \Sigma m\,(\bar{v} \cdot \bar{a}''' + 4\bar{a} \cdot \bar{a}'' + 3\bar{a}'^2) = \Sigma \overline{P} \cdot \bar{a}'' + 3\Sigma \overline{P'} \cdot \bar{a}' + \\
 & \qquad\qquad + 3\Sigma \overline{P''} \cdot \bar{a} + \overline{P'''} \cdot \bar{v} \equiv A_4\,, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

d'où on tire:

$$(41')\quad \left\{\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \Sigma m\bar{v} \cdot \delta\bar{a} = \delta \Sigma \overline{P} \cdot \bar{v} \equiv \delta A_1\,, \\
\text{(b)} & \Sigma m\bar{v} \cdot \delta\bar{a}' + 2\Sigma m\bar{a} \cdot \delta\bar{a} = \Sigma \overline{P} \cdot \delta\bar{a} + \delta \Sigma \overline{P'} \cdot \bar{v} \equiv \delta A_2\,, \\
\text{(c)} & \Sigma m\bar{v} \cdot \delta\bar{a}'' + 3\Sigma m\bar{a} \cdot \delta\bar{a}' + 3\Sigma m\bar{a}' \cdot \delta\bar{a} = \Sigma \overline{P} \cdot \delta\bar{a}' + \delta\,(2\Sigma \overline{P'} \cdot \bar{a} + \\
 & \qquad\qquad + \Sigma \overline{P''} \cdot \bar{v}) \equiv \delta A_3\,, \\
\text{(d)} & \Sigma m\bar{v} \cdot \delta\bar{a}''' + 4\Sigma m\bar{a} \cdot \delta\bar{a}'' + 4\Sigma m\bar{a}'' \cdot \delta\bar{a} + 6\Sigma m\bar{a}' \cdot \delta\bar{a}' = \\
 & \qquad = \Sigma \overline{P} \cdot \delta\bar{a}'' + \delta\,(3\Sigma \overline{P'} \cdot \bar{a}' + 3\Sigma \overline{P''} \cdot \bar{a} + \Sigma \overline{P'''} \cdot \bar{v}) \equiv \delta A_4\,. \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Dans le cas général les $\overline{P}$ sont les forces totales, tant extérieures qu'intérieures. Or de ces dernières on ne sait rien *a priori*. Elles font, en effet, partie des inconnues du problème. Dans les variations (39) n'entrent que les $\bar{a}, \bar{a}', \ldots$ Les forces de liaisons, dont on peut disposer arbitrairement, figurent dans les conditions (41), et par ce fait ces équations cessent d'imposer des restrictions sur l'ensemble des $\bar{a}, \bar{a}', \ldots$ Cette indétermination se fait voir dans les calculs par la présence d'un système d'équation homogène en les multiplicateurs correspondant aux équations (41'). On obtient donc une solution en égalant à zéro tous ces multiplicateurs, ce qui revient à dire que les dites conditions n'entrent pas effectivement dans le problème. On peut donc constater:

Le principe d'Ostwald constitue dans le cas où les liaisons dépendent du temps, un problème indéterminé.

Bornons nous alors au cas où les forces de liaisons ne figurent pas dans les équations (41) et (41') (Liaisons parfaites, indépendantes du temps). On voit d'abord que la première variation (39 a)

$$\delta A_1 = \delta \Sigma m \bar{v} \cdot \bar{a}$$

et nécessairement nulle, puisque, d'après (41' a), elle est égale à la variation d'une quantité qui ne dépend pas des accélérations et des dérivées supérieures (Voir (39')).

Passons maintenant à la variation (39 b)

$$\delta A_2 = \delta \Sigma m \, (\bar{v} \cdot \bar{a}' + \bar{a}^2) \, .$$

Remarquons d'abord que, si l'on supprimait les conditions énergétiques, la fonction $\Sigma m \, (\bar{v} \cdot \bar{a}' + \bar{a}^2)$ pourrait prendre une valeur quelconque, donnée d'avance, même en supposant les accélérations fixes, *sauf dans le cas où les vitesses sont toutes nulles.* (Hypothèse de Neumann!) En effet, soient

$$x_{\iota 0}'' \, , \; x_{\iota 0}''' \, , \, \ldots$$

un système des accélérations et des dérivees supérieures, qui satisfait aux conditions (40), et qui rend

$$\Sigma m \, (\bar{v} \cdot \bar{a}' + \bar{a}^2) = \Sigma m x_\iota' \, x_\iota''' + \Sigma m x_\iota''^2 = \omega \; ,$$

et soient

$$x_{\iota 0}'' \, , \; x_{\iota 0}''' + x_{\iota 1}''' \, , \, \ldots$$

un autre système des mêmes quantités, ce qui entraîne que les $x_{\iota 1}'''$, sont des déplacements virtuels (Voir (40 b)). Les vitesses, x_ι' .qui, par hypothèse, ne sont pas toutes nulles, constituent un tel système des déplacements virtuels, puisque les liaisons sont indépendantes du temps. En mettant

$$x_{\iota 1}''' = \frac{1}{2} \, \frac{A - \omega}{E} \cdot x_\iota' \, ,$$

il vient

$$\Sigma m \, (\bar{v} \cdot \bar{a}' + \bar{a}^2) = \omega + \frac{A - \omega}{E} \, \frac{1}{2} \, \Sigma m_\iota \, x_\iota'^2 = A \, ,$$

où A est un nombre prescrit d'avance. — Si la variation δA_2 est quand même zéro, elle l'est en vertu de la restriction qu'impose la condition énergétique

$$\Sigma m\,(\bar{v}\cdot\bar{a}' + \bar{a}^2) = \Sigma\overline{P}\cdot\bar{a} + \Sigma\overline{P'}\cdot\bar{v}\,. \tag{41 b}$$

Or le second membre ne dépend que des accélérations. Pour que δA_2 s'annule, il est donc nécessaire et suffisant que la variation du second membre soit égale à zéro sous les seules conditions (40 a) et (41 a). En effet, les x_i''', x_i'''', ..., étant d'abord quelconques, on peut toujours satisfaire aux équations (40 b), (40 c) ... quelles que soient les x_i'', le déterminant $|a_{ji}|$ étant nécessairement $\neq 0$. Pour satisfaire aux équations (41 b), (41 c) ... il sufit, en vertu des termes $\Sigma m\bar{v}\bar{a}'$, $\Sigma m\bar{v}\bar{a}''$ qui, par hypothèse, y figurent effectivement, d'ajouter aux valeurs x_i''', x_i'''' ... déjà déterminées, des systèmes des déplacements virtuels convenablement choisis, ce qui ne change rien dans les équations (40 b), (40 c) ...

Le problème se présente alors sous la forme: Trouver les conditions pour que

$$dA_2 = \delta\,(\Sigma\overline{P}\cdot\bar{a} + \Sigma\overline{P'}\cdot\bar{v}) = 0\,,$$

les variations $\delta\bar{a}$ étant assujetties aux équations

$$\Sigma a_{ji}\,\delta x_i'' = 0\,, \tag{40' a}$$

$$\Sigma m_i\,x_i'\,\delta x_i'' \equiv \delta A_1 = 0\,. \tag{41' a}$$

On a

$$\delta A_2 = \delta\,(\Sigma\overline{P}\cdot\bar{a} + \Sigma\overline{P'}\cdot\bar{v}) = \Sigma X_i\,\delta x_i'' + \Sigma x_i'\,\delta X_i'\,,$$

$$\delta X_i' = \delta\left(\frac{\partial X_i}{\partial t} + \Sigma^h\frac{\partial X_i}{\partial x_h}x_h' + \Sigma^k\frac{\partial X_i}{\partial x_k'}x_k''\right) = \Sigma^k\frac{\partial X_i}{\partial x_k'}\,\delta x_k''\,.$$

Donc

$$\delta A_2 = \Sigma X_i\,\delta x_i'' + \Sigma^i\,x_i'\,\Sigma^k\frac{\partial X_i}{\partial x_k'}\,\delta x_k'' = \Sigma^i\left(X_i + \Sigma^k\frac{\partial X_k}{\partial x_i'}x_k'\right)\delta x_i'' =$$

$$= \Sigma^i\left(\frac{\partial}{\partial x_i'}\Sigma^k X_k\,x_k'\right)\delta x_i''\,.$$

Pour que δA_2 soit nulle, il faut qu'on puisse trouver $(\nu+1)$ nombres, λ_{1j} et ς_1 tels que

$$\frac{\partial}{\partial x_i'}\sum_1^n{}^k X_k\,x_k' - \varsigma_1\,m_i\,x_i' + \sum_1^\nu{}^j\,\lambda_{1j}\,a_{ji} = 0\,. \tag{42}$$

Dans le cas général ce n'est pas possible sauf pour

$$n = \nu + 1$$

c'est à dire, pour des *systèmes à liaisons complètes.* Or pour ces systèmes le principe d'Ostwald est superflu, puisque le théorème des forces vives seul suffit pour déterminer le mouvement. Si

$$n > \nu + 1$$

on voit que *l'extremum ostwaldien exige,* comme condition nécessaire, *l'existence de certaines relations entre les forces et les vitesses,* c'est à dire entre les données du problème. Les accélérations n'y entrent pas.

Le théorème d'Ostwald n'est donc point général. Son champ d'application est limité par les conditions (42). Reste à savoir si ces conditions sont remplies pour des types de problèmes d'une certaine généralité.

Supposons d'abord que les *forces soient indépendantes des vitesses.* Les équations (42) deviennent

$$(42') \qquad \varsigma_1 \left[m_\iota x_\iota'\right] = X_\iota + \Sigma_j \lambda_{1j} a_{j\iota} ,$$

où j'écris $[m_\iota x_\iota']$ pour souligner qu'il s'agit des valeurs numériques des quantités de mouvements, et non des relations fonctionnelles. Passons maintenant à la variation

$$\delta A_8 = \delta \Sigma m (\bar{v} \cdot \bar{a}'' + 3\bar{a} \cdot \bar{a}') = \delta (\Sigma \overline{P} \cdot \bar{a}' + 2\Sigma \overline{P'} \cdot \bar{a} + \Sigma \overline{P''} \cdot \bar{v}) .$$

D'après un raisonnement analogue à celui qui nous a servi plus haut, le problème suivant se pose: Trouver les conditions pour que

$$(43) \qquad \delta (\Sigma \overline{P} \cdot \bar{a}' + 2\Sigma \overline{P'} \cdot \bar{a} + \Sigma \overline{P''} \cdot \bar{v}) = 0$$

sous les restrictions (40 a), (40 b); (41 a), (41 b) en tenant compte que les variations des seconds membres de ces deux dernières équations sont nulles en vertu des conditions déjà remplies.

Les équations qui exprimeront les conditions cherchées, contiendront les accélérations et determineront les valeurs "ostwaldiennes" de ces quantités en fonctions des vitesses, des forces données et *des dérivées premières de ces dernières par rapport aux coordonnées et du temps.* En effet, les $\overline{P'}$ et $\overline{P''}$ figurent dans la variation (43), qui peut s'écrire

$$(43') \qquad \Sigma X_\iota \, \delta x_\iota''' + 2\Sigma X_\iota' \, \delta x_\iota'' + \Sigma_\iota \, x_\iota' \, \Sigma_k \frac{\partial X_\iota}{\partial x_k} \, \delta x_k'' = 0 ,$$

puisque les forces sont par hypothèse indépendantes des vitesses, ci qui entraîne

$$\delta X_i' = 0\,,\quad \delta X_i'' = \Sigma_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\,\delta x_k''\,.$$

Les dérivées totales X_i' et les dérivées partielles $\frac{\partial X_i}{\partial x_k}$ interviendront donc dans les équations qui, par la méthode des multiplicateurs, détermineront les inconnues, c'est-à-dire les accélérations. C'est donc une condition nécessaire pour que les accélérations ostwaldiennes et celles du mouvement réel puissent se confondre, que ces dérivées disparaissent dans le résultat. La seule hypothèse simple, me semble-t-il, qui pourra réaliser cette condition[1], est de supposer

$$X_i' = 0\,,\quad \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = 0\,.$$

En se plaçant dans cette hypothèse, l'équation (43′) devient

$$\delta \Sigma X_i\, x_i''' = \Sigma X_i\, \delta x_i''' = 0\,. \tag{43″}$$

Il faut donc qu'on puisse trouver $2(\nu + 1)$ quantités ς_1', ς_2'; λ_{1j}', λ_{2j}' telles que

$$\begin{cases} \text{(a)} & \varsigma_2'\, m_i\, x_i' = X_i + \Sigma_j\ \lambda_{2j}'\, a_{ji} \\ \text{(b)} & 2\varsigma_2'\, m_i\, x_i'' = \varsigma_1'\, m_i\, x_i' + \Sigma_j\ \lambda_{1j}'\, a_{ji} + \Sigma_j\ \lambda_{2j}'\, b_{ji}\,. \end{cases} \tag{44}$$

Les équations (44 a) sont déjà supposées satisfaites. En effet avec

$$\varsigma_2' = \varsigma_1\,,\quad \lambda_{2j}' = \lambda_{1j}\,,$$

les équations (44 a) et (42′) se confondent.

Il reste donc les $(\nu + n + 1)$ équations (44 b), (40 a) et (41 a) pour déterminer les inconnues λ_{1j}', x_i'' et ς_1'.

Il faut d'abord que les b_{ji} soient nulles, puisque les accélérations réelles ne dépendent que des coefficients a_{ji} et non de leurs dérivées (Voir les équations (4)). Les équations (44 b) deviennent

$$2\varsigma_2'\, m_i\, x_i'' = \varsigma_1'\, m_i\, x_i' + \Sigma_j\ \lambda_{1j}'\, a_{ji}\ . \tag{44′ b}$$

On peut satisfaire à cette équation et aux équations (40 a) et (41 a) en faisant

$$\varsigma_1' = 2\varsigma_2'^2\,,\quad \lambda_{1j}' = 0\,.$$

De (44′ b) on tire

$$\varsigma_2'\, m_i\, x_i' = m_i\, x_i''\,, \tag{45}$$

[1] Voir une note p. 46.

et en mettant ce résultat dans les équations (44 a), on obtient

(46) $$m_i \, x_i'' = X_i + \Sigma \lambda_{2j}' \, a_{ji} \; .$$

Remarque.

Dans le cas d'équilibre les forces sont de la forme

$$X_i = \Sigma_j \; \lambda_j \; a_{ji}$$

et les ς_2' sont, par conséquent, nuls. (Voir (42') et (44 a) en se souvenant que $\varsigma_2' = \varsigma'$). Lès accélérations ne figurent donc pas effectivement dans les équations (44' b), et nos conclusions sont en détaut. Dans ce cas le théorème d'Ostwald ne donne aucune détermination du mouvement.

Nous avons dû supposer plus haut que les

$$b_{ji} \equiv a_{ji}' - \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i'} = 0 \; .$$

En faisant les calculs, on trouve

$$b_{ji} = \Sigma_k \left(2 \, \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} \right) x_k' \; .$$

(Voir les équations (1) et (1 a) p. 8 et p. 9. On se souvient que les liaisons sont supposées indépendantes du temps, ce qui entraîne que les α_j des équations (1) disparaissent). Si l'on veut écarter des suppositions tout à fait artificielles, il faut, pour que les b_{ji} soient nuls, que les coefficients a_{ji} ne dépendent pas des coordonnées, c'est à dire, que

$$\frac{\partial a_{ji}}{\partial x_k} = 0 \; .$$

Comme les a_{ji} sont déjà supposés indépendants du temps, il faut donc qu'ils soient des constantes numériques. On aura ainsi au lieu des équations (40), le tableau suivant:

(40'') $$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(a)} & \Sigma_i \; a_{ji} \, x_i'' \; = 0 \; , \\ \text{(b)} & \Sigma_i \; a_{ji} \, x_i''' = 0 \; , \\ \text{(c)} & \Sigma_i \; a_{ji} \, x_i'''' = 0 \; , \\ . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array} \right.$$

Toutes les dérivées supérieures doivent donc satisfaire aux équations de liaisons.

Dans notre résultat (46) les λ_{2j}' sont donnés d'avance. Il s'agit de démontrer que les x_i'' ainsi déterminées, satisfassent aux équations (40″ a) et à l'équation (41 a). De l'égalité (45) il suit que

$$x_i'' = \varsigma_2' \, x_i' \, ,$$

et puisque les vitesses satisfont aux équations de liaisons

$$\Sigma i \; a_{ji} \, x_i' = 0 \, ,$$

les accélérations doivent bien satisfaire aux équations (40″ a). Il en résulte que les x_i'' sont les accélérations dans le mouvement réel. En effet, il suffit pour cela qu'elles puissent s'écrire sous la forme (46), et qu'elles satisfassent aux équations de liaisons. Elles sont donc conformes à l'exigence du théorème des forces vives, c'est à dire elles satisfont aussi à l'équation (41 a).

Si l'on pousse les recherches plus loin en envisageant les variations successives, δA_4, $\delta A_5, \ldots$, c'est facile à voir qu'en supposant que les dérivées supérieures des forces par rapport au temps soient nulles, et en faisant toutes les dérivées x_i''', x_i'''', ... égales à zéro, on peut satisfaire, de proche en proche, à toutes les conditions qui se posent. Par exemple pour que la variation δA_4 s'annule sous les restrictions du problème, il faut, notre raisonnement habituel le démontre, que

$$\delta A_4 = \delta\,(\Sigma \overline{P} \cdot \bar{a}'' + 3 \Sigma \overline{P'} \cdot \bar{a}' + 3 \Sigma \overline{P''} \cdot \bar{a} + \Sigma \overline{P'''} \cdot \bar{v}) = 0 \, .$$

Cette variation peut s'écrire

$$\delta A_4 = \Sigma X_i \; \delta x_i'''' + 3 \Sigma X_i'' \, \delta x_i'' + \Sigma x_i' \, \delta X_i''' \, ,$$

puisque d'après les hypothèses déja faites, X_i', $\delta X_i'$ et $\delta X_i''$ s'annulent. En se plaçant toujours dans ces hypothèses, on trouve

$$\delta X_i''' = \Sigma k \left\{ 2 \frac{\partial^2 X_i}{\partial t \, \partial x_k} + 3 \Sigma h \, \frac{\partial^2 X_i}{\partial x_k \, \partial x_h} \, x_h' \right\} \delta x_k'' \, .$$

On aura donc

$$\text{(48)} \quad \delta A_4 = \Sigma X_i \; \delta x_i'''' + 3 \Sigma i \left\{ X_i'' + \Sigma k \left(2 \frac{\partial^2 X_k}{\partial t \, \partial x_i} + 3 \Sigma h \, \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_h \, \partial x_i} \, x_h' \right) x_k' \right\} \delta x_i'' .$$

Cette variation doit être nulle sous les conditions (40″ a, b, c) et (41 a, b, c). Il s'agit donc de trouver $3\;[\nu + 1]$ quantités λ_{1j}'', λ_{2j}'', λ_{3j}''; ς_1'', ς_2'', ς_3'' telles que

$$
(49) \begin{cases}
(a) \quad X_i + \Sigma_j \lambda_{3j}'' a_{ji} + \varsigma_3'' m_i x_i' = 0 , \\
(b) \quad \Sigma_j \lambda_{2j}'' a_{ji} + 3\varsigma_3'' m_i x_i'' + \varsigma_2'' m_i x_i' = 0 , \\
(c) \quad 3X_i'' + 3\Sigma_k \left(2 \frac{\partial^2 X_k}{\partial t \, \partial x_i} + 3\Sigma_h \frac{\partial^2 X_l}{\partial x_h \, \partial x_i} x_h' \right) x_k' + \Sigma_j \lambda_{1j}'' a_{ji} + \\
\qquad\qquad + 3\varsigma_3'' m_i x_i''' + 2\varsigma_2'' m_i x_i'' + \varsigma_1'' m_i x_i' = 0 .
\end{cases}
$$

Ces équations avec (40″ a, b, c) et (41 a, b, c) constituent un système de $3(n + \nu + 1)$ équations entre les $3(\nu + 1)$ multiplicateurs et les $3n$ quantités, x_i'', x_i''', x_i''''.

Les deux premiers systèmes des équations (49), étant identiques aux équations (44 a) et (44′ b), sont déjà satisfaits par les accélérations dans le mouvement réel. Il suffit de mettre

$$\lambda_{2j}'' = \lambda_{1j}' = 0 , \;\; \lambda_{3j}'' = \lambda_{2j}', \;\; \varsigma_3'' = - \varsigma_2', \;\; \varsigma_2'' = \frac{3}{2} \varsigma_1' .$$

Les équations (40″ a) et (41 a) sont donc aussi remplies. Quant aux quantités x_i'''', elles ne figurent que dans (41 c). Nous avons démontré plus haut qu'on peut toujours satisfaire à cette équation en mettant $x_i'''' = \alpha \cdot x_i'$, où α est un nombre convenablement choisi. Or ces valeurs de x_i'''' satisfont bien aux équations (40″ c).

Il reste donc les dernières équations (49 c) et les conditions (40″ b) et (41 b) entre les inconnues x_i''', λ_{1j}'' et ς_1''. Il faut que les x_i''', ainsi déterminées, soient les dérivées des x_i'' données par les équations (46). Elles ne doivent donc pas dépendre des X_i'', des $\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_k \, \partial x_h}$ et des $\frac{\partial^2 X_i}{\partial x_k \, \partial t}$ Il faut, par conséquent, que ces quantités disparaissent des équations (49 c). Comme plus haut, il ne se présente qu'une seule hypothèse simple, à savoir:

$$X_i'' = 0 , \;\; \frac{\partial X_i}{\partial x_k \, \partial x_h} = 0 , \;\; \frac{\partial X_i}{\partial t \, \partial x_k} = 0 .$$

Il en résulte qu'on doit avoir aussi

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2} = 0 ,$$

puisque les forces sont indépendantes des vitesses.

Les équations (49 c) deviennent

$$(49' \text{ c}) \qquad \Sigma_j \lambda_{1j}'' a_{ji} + 3\varsigma_3'' m_i x_i''' + 2\varsigma_2'' m_i x_i'' + \varsigma_1'' m_i x_i' = 0 .$$

En résolvant les équations linéaires en question, on trouve

$$x_i''' = 0 , \;\; \lambda_{1j}'' = 0 , \;\; \varsigma_1'' = - 2\varsigma_2'' \cdot \varsigma_2' = - 3\varsigma_2' \varsigma_1' .$$

En effet, les équations (49′ c) se reduisent aux équations (45), et l'équation (41 b) sera remplie en vertu des égalités (46) en tenant compte des équations (40″ a).

Or $x_i''' = 0$ sont bien les valeurs des dérivées des composantes d'accélérations dans le mouvement réel. En effet, nous avons trouvé

$$x_i'' = \frac{1}{m_i}\{X_i + \Sigma_j \lambda_{2j}' a_{ji}\}. \tag{46'}$$

Les dérivées par rapport au temps des seconds membres sont nulles puis- $X_i' = 0$, et les λ_{2j}' sont des polynomes linéaires des X_i à coefficients constants numériques (Voir les formules (6), (6 a), (6 b) et (5 a), en se souvenant que les a_{ji} sont des constants et que les a_{ji} disparaissent.)

En passant ensuite aux variations δA_5, δA_6 on trouve de proche en proche qu'il faut supposer les dérivées supérieures X_i''', X_i'''', ... zéro, et que dans cette hypothèse la détermination ostwaldienne donne $x_i'''' = x_i^{\text{v}} = \cdots = 0$, ce qui sont les vraies valeurs. En effet les forces et les liaisons étant constantes, les accélérations le seront également, et les dérivées supérieures s'annuleront.

Nous avons écarté plus haut le cas où les forces dépendent des vitesses. Ce cas ne peut entrer en considération, puisqu'il faut, nous l'avons vu, que les forces soient constantes.

En récapitulant on peut énoncer les conclusions suivantes:

En faisant abstraction des systèmes dont les liaisons dépendent du temps, et pour lesquelles le théorème ostwaldien représente un problème indéterminé, et des systèmes à liaisons complètes où le théorème est superflu, la proposition d'Ostwald est vrai:

1°. *Si les vitesses sont nulles,*
dans tous les cas.

2°. *Si les vitesses ne sont pas toutes nulles,*
pour des systèmes dont les équations de liaisons,

$$a_{j1}\,\delta x_1 + a_{j2}\,\delta x_2 + \cdots + a_{jn}\,\delta x_n = 0,$$

sont à coefficients constants, et qui sont sollicités par des forces constantes, dont les valeurs peuvent s'exprimer sous la forme

$$X_i = \varsigma\,[m_i\,x_i'] + \Sigma_j\,\lambda_j\,a_{ji}$$

où $\varsigma \neq 0$, et les λ_j sont des paramètres arbitraires ($\varsigma = 0$ corresponde au cas d'équilibre où le principe comme l'ont montré nos recherches, ne donne aucune détermination du mouvement).

Dans le cas 2^0 le théorème est vrai pendant tout le mouvement. En effet, les accélérations sont constantes et proportionelles aux vitesses en un instant arbitraire, mais fixe,

$$x_i'' = \varsigma x_i' .$$

Après τ secondes, les vitesses initiales, x_i', seront devenues

$$x_{i_\tau}' = x_i' + \tau\varsigma x_i' = (\tau + \varsigma\tau)\, x_i' ,$$

et les forces, qui sont par hypothèse

$$X_i = \varsigma\, [m_i\, x_i'] + \Sigma_j\, \lambda_j\, a_{ji} ,$$

pourront s'écrire

$$X_i = \frac{\varsigma}{1 + \tau\varsigma}\, [m_i\, x_{i_\tau}'] + \Sigma_j\, \lambda_i\, a_{ji} = \varsigma_\tau\, [m_i\, x_{i_\tau}'] + \Sigma_j\, \lambda_j\, a_{ji} .$$

Les conditions (42') sont dons remplies à chaque instant. Cela fournit la réponse à une question, posée au commencement de ce chapitre, concernant la notion "in gegebner Zeit" dans le théorème ostwaldien. Dans le cas 2^0 le théorème est vrai aussi pour des intervalles finis.

Les conditions (42') peuvent être interprétées de la manière suivante: Il faut que l'introduction de la nouvelle liaison

$$[m_1\, x_1']\, \delta x_1 + [m_2\, x_2']\, \delta x_2 + \cdots + [m_n\, x_n']\, \delta x_n = 0$$

établisse l'équilibre.

Appliquons notre résultat, à titre d'exemple, au cas d'un point matériel qui tombe dans l'espace (Exemple classique d'Ostwald). Soit l'axe de coordonnées Oz verticale de haut en bas, Ox et Oy horizontales. Si la vitesse est verticale, la nouvelle liaison se présente sous la forme

$$[mv]\, \delta z = 0 .$$

Les déplacements virtuels sont donc tous contenus dans le plan horizontal Oxy et, la force étant verticale, il y a bien équilibre. Le théorème est vrai. Si, au contraire, la vitesse est quelconque, les déplacements virtuels sont dans un plan incliné. Il n'y donc pas d'équilibre, et le théorème ostwaldien est en défaut.

Pour faire voir *le caractère très artificiel de la condition* (42'), il suffit d'examiner le cas de deux points matériels égaux, qui tombent sous l'action de la pesanteur avec des vitesses initiales verticales, mais différentes, v_1 et $v_2 = \varsigma v_1$. La liaison à introduire, sera

$$v_1\, \delta z_1 + v_2\, \delta z_2 = 0 ,$$

ou

$$\delta z_1 + \varsigma \delta z_2 = 0 .$$

Les forces étant égales et verticales, il n'y a pas d'équilibre, et le théorème ne s'applique pas. Or le théorème est vrai, appliqué séparément à chacun des deux points.

Par un raisonnement direct on pourra facilement se rendre compte de ce résultat. La condition de respecter le théorème des forces vives,

$$mgv_1 + mgv_2 = mv_1\, a_1 + mv_2\, a_2$$

porte sur l'ensemble des accélérations. Nous supposons *a priori* que les accélérations soient verticales, ce champ de variation limité étant suffisant pour le raisonnement qui va suivre. D'après Ostwald il faut choisir a_1 et a_2 telles que la "transmission d'énergie"

$$\frac{1}{2}\,\Sigma m\,(v + a\tau)^2 - \frac{1}{2}\,\Sigma mv^2 = m\,(v_1\, a_1 + v_2\, a_2)\,\tau + \frac{1}{2}\,m\,(a_1^{\,2} + a_2^{\,2})$$

soit la plus grande possible. En faisant les calculs, on trouve:

$$a_1 = gv_1\,\frac{v_1 + v_2}{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}\,, \quad a_2 = gv_2\,\frac{v_1 + v_2}{v_1^{\,2} + v_2^{\,2}}\,.$$

Pour $v_1 = v_2$ on a

$$a_1 = a_2 = g\,.$$

Or dans ce cas notre liaison hypothétique établit l'équilibre, et le théorème est bien vrai.

Note. Les hypothèses dans lesquelles nous nous sommes placés dans le cas où les vitesses ne sont pas toutes nulles (des forces constantes et des équations de liaisons à coefficients constants) sont des hypothèses *suffisantes*. Leur nécessité n'a pas été démontree, et la question se pose si elles peuvent être remplacees par des conditions plus larges.

Remarquons d'abord que la condition initiale

$$(42') \qquad \varsigma\,[m_i\, x_i'] = X_i + \Sigma_j\, \lambda_j\, a_{ji}\,,$$

dont nous avons fait voir le caractère très artificiel, est *nécessaire*, et qu'elle est aussi suffisante pour que le theorème soit vrai *pendant un intervalle infinement petit*. (x_i' non toutes $= 0$!)

Pour que le théorème ostwaldien s'applique pendant tout le mouvement, il faut donc qu'une équation analogue à (42') ait lieu à chaque instant, ce qui est obtenu par les conditions que les forces et les a_{ji} sont des constants. Ces conditions portent sur les forces données et le caractère cinématique du système *séparément*, et il est donc *a priori* très probable qu'on peut y substituer d'autres, moins étroites mais plus compliquées, qui portent sur l'ensemble des forces données et des liaisons de manière a faire dépendre les forces données de ces dernières.

M. Cartan m'a indiqué à cet égard une rédaction fort élégante. Le théorème ostwaldien est vrai pour des systèmes holonomes et à liaisons indépendantes du temps, lorsque:

1⁰ il y a une fonction de forces, et

2⁰ lorsque les lignes de forces sont des geodesiques avec la condition supplémentaire que le déplacement correspondant au vitesses initiales se fait dans le sens d'une ligne de force.

Pour un système à n paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ une *ligne de force* est définie dans l'espace à n dimensions par le système d'équations différentielles

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial (dq_1)}}{\frac{\partial U}{\partial q_1}} = \frac{\frac{\partial T}{\partial (dq_2)}}{\frac{\partial U}{\partial q_2}} = \cdots \frac{\frac{\partial T}{\partial (dq_n)}}{\frac{\partial U}{\partial q_n}},$$

en désignant par $\frac{2T(q;\,dq)}{dt^2}$ la force vive. L'expression *géodésiques* s'entend dans le même espace, ds^2 étant représenté par la forme $2T(q;\,dq)$. Autrement dit le point $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ décrit une géodésique si la trajectoire du système peut être obtenue sans forces données.

Je me propose de revenir sur ces questions dans un autre travaile. Bornons nous ici à remarquer que la condition supplémentaire de M. Cartan relative aux déplacements initials est identique à la condition (42'), dont nous venons de parler plus haut. Je croi aussi qu'on puisse étendre les considérations (pp. 49, 50) sur la liaison entre le théorème ostwaldien et le théorème 6 de la thèse actuelle aux conditions envisagées par M. Cartan.

VIII. Conclusions. Principe de la plus grande action.

Qu'est-ce qu'a observé Ostwald? Il a remarqué que le mouvement d'un point matériel qui tombe sous l'action de la pesanteur et avec une vitesse initiale verticale, jouit de la propriété suivante: Le théorème des forces vives est respecté, et $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ est maximum, ΔE étant "der Energieumsatz", c'est à dire, la quantité d'énergie qui passe d'une forme à une autre pendant la durée Δt.

Si, en partant de ce fait, on veut tenter une généralisation, il faut d'abord remarquer, comme nous l'avons fait plus haut pour le cas général, que le probléme posé n'a pas une solution unique si la force donnée (la pesanteur) est nulle. N'importe quelle trajectoire parcourue avec une vitesse constante en grandeur, obéit aux conditions exigées. Le théorème est donc incomplet, et il ne pourra, au plus, que déterminer l'effet que produisent les forces données, le mouvement sans ces forces étant prescrit par un autre procédé. En généralisant, il faut donc entendre par ΔE *l'accroissement de la demi-force vive dû aux forces données.* Nous écrivons, en modifiant légèrement la signification d'un symbole introduit plus haut, (voir (27) p. 26) $\Delta_f E$ pour désigner cet accroissement partiel. Dans le cas simple d'un point libre ΔE et $\Delta_f E$ se confondent, est la généralisation indiquée est donc admissible.

Au commencement du chapitre précédent nous avons de plus fait la remarque que dans le cas général où les liaisons dépendent du temps, la restriction de respecter le théorème des forces vives, n'a aucun sens.

Si l'on voulait alors essayer de préciser le théorème ostwaldien en se plaçant dans l'hypothèse la plus favorable au point de vue de l'interprétation de la proposition de l'illustre savant, on pourrait l'énoncer de la manière suivante:

Le mouvement réel rend extremum $\Delta_f E$ sous la condition $T(x_i') = 0$.

On se souviendra que la restriction $T(x_i') = 0$ a un sens même si les liaisons dépendent du temps, puisque les forces de liaisons inconnues n'y figurent pas. Le théorème modifié est, lui aussi, en défaut, sauf dans les cas très spéciaux, mentionés plus haut. Mais en y substituant le mot: *accélération* au lieu du mot: *vitesse*, on obtient le théorème suivant:

Le mouvement réel rend extremum $\Delta_f S$ sous la condition $T(x_i'') = 0$.

Or ce théorème est vrai. On a en effet,

$$\Delta_f S = \frac{1}{2} \Sigma i \; m_i (x_{i_l}'' + x_{i_f}'')^2 - \frac{1}{2} \Sigma i \; m_i \, x_{i_l}''^2 = \frac{1}{2} \Sigma i \; m_i \; x_{i_f}''^2 \; ,$$

puisque les x_{i_l}'' sont supposées déjà trouvées, et que, par conséquent, $\Sigma i \; m_i \; x_{i_l}'' \, x_{i_f}'' = 0$ pour toutes les x_{i_f}'' cinématiquement réalisables. On a de plus

$$T(x_i'') \equiv \Sigma i \; (X_i + R_{i_f} - m_i \, x_{i_f}'') \, x_i'' = 0 \, ,$$

d'où on tire, en se souvenant que les $R_{i_f} = \Sigma j \; a_{ji} \; \mathfrak{P}_j$,

$$\Sigma i \; X_i \; x_{i_f}'' - \Sigma i \; m_i \; x_{i_f}''^2 = - \Sigma i \; (X_i + R_{i_f}) \, x_{i_l}'' \equiv - \Sigma i \; (X_i + \Sigma j \; a_{ji} \, \mathfrak{P}_j) \, x_{i_l}''.$$

Or le second membre est nul, puisque $(X_i + \Sigma j \; a_{ji} \, \mathfrak{P}_j)$ est égal à $m_i \, x_{i_f}''$ dans le mouvement réel (voir (8)), ce qui entraîne

$$\Sigma i \; (X_i + \Sigma j \; a_{ji} \, \mathfrak{P}_j) \, x_{i_l}'' = \Sigma i \; m_i \; x_{i_f}'' \; x_{i_l}'' = 0 \, .$$

Le problème qui se pose, est alors le suivant: Trouver les x_{i_f}'' qui rendent

$$\frac{1}{2} \Sigma i \; m_i \; x_{i_f}''^2$$

extremum, sous la condition

$$\Sigma i \; X_i \; x_{i_f}'' - \Sigma m_i \; x_{i_f}''^2 = 0 \, .$$

J'ai démontré plus haut (Théorème 6, p. 22) que le seul système x_{i_f}'' qui satisfasse, à ces conditions, est l'ensemble des accélérations de forces dans le mouvement réel.

La liaison entre le théorème dont nous venons de nous occuper, et le principe ostwaldien n'est point purement formelle. Il est facile de faire voir que les conditions envisagées par nous[1] sous lesquelles le dernier principe est vrai, sont aussi les conditions pour que les deux théorèmes se réduisent aux mêmes problèmes.

En effet, si les vitesses sont toutes nulles, (premier cas, p. 44) la "transmission d'énergie" est bien proportionnelle à $\frac{1}{2}\,\Sigma m_i\, x_{i_f}''^2$, est le théorème des forces vives se présente sous la forme

$$\Sigma X_i\, x_{i_f}'' - \Sigma m_i\, x_{i_f}''^2 = 0\,.$$

L'identité des deux principes est donc évidente

Dans l'autre cas (deuxième cas, p. 44) les forces supposées constantes, sont de la forme

$$X_i = \varsigma\,[m_i\, x_i'] + \Sigma\,\lambda_j\, a_{ji}\,,$$

et cela suffit, avec la condition supplémentaire que les équations de liaisons

$$a_{j1}\, x_1' + a_{j2}\, x_2' + \cdots + a_{jn}\, x_n' = 0$$

sont à coefficients constants, pour qu'on puisse toujours écrire

$$\Sigma X_i\, x_i^{(p)} = \varsigma \Sigma m_i\, x_i'\, x_i^{(p)}\,.$$

On se souviendra que les premières des variations (39), non nécessairement nulles (Voir p. 37), étaient

$$\delta A_2 \equiv \delta \Sigma m\,(\bar{v}\cdot\bar{a}' + \bar{a}^2)\,,$$

$$\delta A_3 \equiv \delta \Sigma m\,(\bar{v}\cdot\bar{a}'' + 3\bar{a}\cdot\bar{a}')\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Ces variations devaient être nulles sous les restrictions

$$A_2 = \Sigma\overline{P}\cdot\bar{a}\,,$$

$$A_3 = \Sigma\overline{P}\cdot\bar{a}'\,,$$

$$\cdots\cdots$$

Or puisque $\Sigma\overline{P}\cdot\bar{a}' = \varsigma\Sigma m\bar{v}\cdot\bar{a}'$, on doit avoir séparément

$$\delta\Sigma m\bar{v}\cdot\bar{a}' = 0\,,$$

$$\delta\Sigma m\bar{a}^2 \equiv \delta\Sigma m_i\, x_{i_f}''^2 = 0$$

[1] Voir la note p. 46.

$(x_{i_l}'' = 0;\ x_i'' = x_{i_f}'')$ sous les conditions

$$\delta A_2 - \delta \Sigma \overline{P} \cdot \bar{a} \equiv \delta\,(\Sigma m_i\, x_{i_f}''^2 - \Sigma X_i\, x_{i_f}'') = 0\,.$$

Et puisque, de plus, le "point" $x_{i_f}'' = x_{i_f}''' = \cdots = x_{i_f}^{(P)} = 0$ est contenu dans le champ de variation, la valeur constante de la fonction $\Sigma m_i\, x_{i_f}''^2 - \Sigma X_i\, x_{i_f}''$ doit être zéro. Les accélérations sont donc déterminées par les exigences

$$\delta \frac{1}{2} \Sigma m_i\, x_{i_f}''^2 = 0\,,\ \ \Sigma m_i\, x_{i_f}''^2 - \Sigma X_i\, x_{i_f}'' = 0\,.$$

La vérité au fond du théorème ostwaldien dans les cas considérés est donc, on l'admettra, *la propriété de l'énergie d'accélération (de force) envisagée dans le Théorème 6.* C'est facile à comprende que deux énoncés si différents ne pourront amener aux mêmes expressions analytiques que dans des cas très spéciaux et assez artificiels.

Remarque finale.

Le Théorème 6 fournit un procédé pour déterminer les accélérations complémentaires créées par les forces données, les accélérations de liaisons étant données, par exemple, par le Théorème 5. On pourra tenter une synthèse de ces deux théorèmes en formulant le principe général qui est le suivant

Théorème 7.

Les forces données portent l'énergie d'accélération d'un minimum à un maximum en respectant le théorème des forces vives d'accélération.

Après ce qui précède, on comprendra le sens de cet énoncé. Le point de vue que les forces données ne produisent qu'une variation d'une situation prescrite d'avance, est essentiel. L'augmentation de l'énergie d'accélération, créée par un système d'accélération complémentaire quelconque, $\Delta x_i''$, est toujours

$$\Delta S = \frac{1}{2} \Sigma m_i\,(x_{i_l}'' + \Delta x_i'')^2 - \frac{1}{2} \Sigma m_i\, x_{i_l}''^2 = \frac{1}{2} \Sigma m_i\, \Delta x_i''^2\,,$$

puisque

$$\frac{1}{2} \Sigma m_i x_{i_l}''\, \Delta x_i'' = 0\,.$$

Or pour $\Delta x_i'' = x_{i_f}''$

$$\frac{1}{2} \Sigma m_i\, \Delta x_i''^2$$

est maximum, et la valeur finale de S est donc aussi la plus grande qu'on puisse obtenir en partant, bien entendu, de S_{min} comme le prescrit le théorème.

Le Théorème 7 fournit, pour ainsi dire, un "*principe de la plus grande action*".

Vu et approuvé :
Paris, le 23 Janvier 1922.
LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MOLLIARD.

Vu et permis d'imprimer :
Paris, le 23 Janvier 1922.
LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
P. APPELL.