THÉODORE VAROPOULOS

**Sur la croissance et les zéros d'une classe de fonctions transcendantes**

*Thèses de l'entre-deux-guerres*, 1923

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1923__38__1_0>

D'ORDRE :
1746

# THÈSES

PRÉSENTÉES

## A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE ~~GRADE~~ titre DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

**Par M. Théodore VAROPOULOS**

ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE PARIS

---

1re THÈSE. — SUR LA CROISSANCE ET LES ZÉROS D'UNE CLASSE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES.

2e THÈSE. — LES SURFACES MINIMA.

---

**Soutenues le 11 mai 1923, devant la Commission d'examen**

---

| | | |
|---|---|---|
| *Commission* | MM. E. VESSIOT, | *Président.* |
| | P. MONTEL | *Examinateurs* |
| | G. JULIA | |



PARIS

LES PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

49, Boulevard Saint-Michel, 49

1923

# Faculté des Sciences de l'Université de Paris

MM.

| | | |
|---|---|---|
| *Doyen* | MOLLIARD, *Professeur.* | Physiologie végétale. |
| *Doyen honoraire* | P. APPELL. | |
| *Professeurs honoraires* | P. PUISEUX. | |
| | VÉLAIN. | |
| | BOUSSINESQ | |
| | PRUVOT. | |
| *Professeurs* | Emile PICARD | Analyse supérieure et algèbre supérieure. |
| | KŒNIGS | Mécanique physique et expérimentale. |
| | GOURSAT | Calcul différentiel et calcul intégral. |
| | HALLER | Chimie organique. |
| | JOANNIS | Chimie (Enseignement P. C. N.). |
| | JANET | Electrotechnique générale. |
| | WALLERANT | Minéralogie. |
| | ANDOYER | Astronomie. |
| | PAINLEVÉ | Mécanique analytique et mécanique céleste. |
| | HAUG | Géologie. |
| | H. LE CHATELIER | Chimie générale. |
| | Gabriel BERTRAND | Chimie biologique. |
| | Mme P. CURIE | Physique générale et radioactivité. |
| | CAULLERY | Zoologie (Evolution des êtres organisés) |
| | C. CHABRIÉ | Chimie appliquée. |
| | G. URBAIN | Chimie minérale |
| | Emile BOREL | Calcul des probabilités et Physique mathém. |
| | MARCHIS | Aviation. |
| | Jean PERRIN | Chimie physique. |
| | ABRAHAM | Physique. |
| | CARTAN | Mécanique rationnelle. |
| | Cl. GUICHARD | Géométrie supérieure. |
| | LAPICQUE | Physiologie. |
| | GENDIL | Géographie physique. |
| | VESSIOT | Théorie des groupes et calcul des variations. |
| | COTTON | Physique générale. |
| | DRACH | Application de l'analyse à la géométrie |
| | C. FABRY | Physique. |
| | Charles PÉREZ | Zoologie. |
| | Léon BERTRAND | Géologie appliquée et géologie régionale. |
| | DANGEARD | Botanique. |
| | LESPIEAU | Théories chimiques. |
| | LEDUC | Physique théorique et physique céleste. |
| | MONTEL | Mathématiques générales |
| | MAURAIN | Physique du globe. |
| | WINTREBERT | Anatomie et physiologie comparées. |
| | HÉROUARD | Zoologie. |
| | Rémy PERRIER | Zoologie (Enseignement P. C. N.). |
| | SAGNAC | Physique théorique et physique céleste. |
| | RABAUD | Biologie expérimentale. |
| | PORTIER | Physiologie. |
| | BLAISE | Chimie organique. |
| | PÉCHARD | Chimie (Enseignement P. C. N.). |
| | AUGER | Chimie analytique. |
| | M. GUICHARD | Chimie minérale. |
| | GUILLET | Physique. |
| *Secrétaire* | Daniel TOMBECK | |

A mes Protecteurs

Madame et Monsieur EMMANUEL A. BÉNACHI

Hommage de reconnaissance
et profond respect.

# PREMIÈRE THÈSE

## Sur la croissance et les zéros d'une classe de fonctions transcendantes

## INTRODUCTION

**1**. La première partie de ce travail est consacrée à un domaine de la théorie de grandeur des fonctions croissantes et positives d'une variable réelle et positive qui, pour toute valeur finie de la variable indépendante, sont finies, continues et non décroissantes. Les résultats de MM. Boutroux et Lindelöf (1) bien connus sur les fonctions entières d'ordre *fini* devaient être étendus aux fonctions d'ordre infini. La première tentative la plus importante et plus décisive se trouve dans la thèse de M. Denjoy : *Sur les produits canoniques d'ordre infini* (1909) qui est parvenu à obtenir la généralisation dans des cas très généraux.

Or, les bases de la théorie des fonctions entières d'ordre infini ont été posées dans le célèbre mémoire de M. Borel : *Sur les zéros des fonctions entières* (2) dans lequel se trouve un théorème fondamental sur les fonctions croissantes continues $\mu(x)$ le suivant :

*Étant donné un nombre $\theta$ positif et supérieur à l'unité, quelconque, s'il*

---

(1) Sur quelques propriétés des fonctions entières (*Acta Mathematica*, t. 28, 1904), *Acta Soc. Jenn.*, t. 31, 1902.
(2) *Acta Mathematica*, 1897, t. 20.

*existe des valeurs de $x$ ne satisfaisant pas à l'inégalité*

$$\mu\left[x + \frac{1}{\log \mu(x)}\right] < \mu(x)^{\theta}$$

*ces valeurs que nous pouvons appeler exceptionnelles, remplissent des intervalles d'étendue totale finie. La longueur totale d'une suite d'intervalles exceptionnels situés à droite d'une valeur $x_0$ ne dépasse pas la quantité*

$$\frac{\theta}{\theta - 1} \cdot \frac{1}{\log \mu(x_0)}.$$

Ce théorème a permis à M. Blumenthal de préciser les résultats du mémoire de M. Borel et donner moyennant les fonctions *types* un exposé de la théorie bien didactique.

Dans la première partie de ce travail je me propose la tâche de compléter le théorème ci-dessus énoncé de M. Borel et j'ai pu obtenir la *précision la plus extrême, semble-t-il, qu'on puisse exiger de ce théorème*, ce qui m'a permis d'obtenir de nouveaux résultats qui précisent et complètent certaines propriétés des fonctions entières, avantageuses surtout pour les cas d'ordre *infini*, et indépendantes de celles de M. Denjoy. Pour cela il m'a fallu faire usage d'une fonction introduite par M. Rémoundos et qui est à croissance transcendante.

En dehors de cette proposition, j'ai réussi à compléter le théorème bien connu de M. Borel sur la croissance de la dérivée logarithmique d'une fonction croissante (continue) $\mu(x)$ et positive.

J'expose quelques applications intéressantes à la théorie des fonctions uniformes qui complètent en certains points de vue des théorèmes connus.

Dans le troisième chapitre, j'aborde le problème intéressant de trouver les quantités $m(x)$ les plus générales possible dont l'addition à la variable indépendante *altère ou n'altère pas* l'ordre de croissance de la fonction croissante et continue $\mu(x)$. J'y signale les divers cas importants qui se rattachent au but que nous nous sommes proposé.

**2.** Dans la deuxième partie, j'étudie les zéros d'une classe remarquable des fonctions transcendantes. On sait que le célèbre théorème de M. Picard sur les zéros des fonctions uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel, découvert en 1880, a subi, surtout dans les cas des fonctions entières des généralisations très variées et bien connues. Ces généralisations ne concernaient que les fonctions *uniformes* jusqu'en 1903, date où M. Rémoundos a établi l'extension, aux fonctions *multiformes*, du théorème de M. Picard et de ces généralisations.

Le premier théorème, et fondamental, de M. Remoundos est le suivant :

*Une transcendante algébroïde ayant* $\nu$ *branches prend dans le voisinage de l'infini une infinité de fois toutes les valeurs, sauf* $2\nu$ *au plus* (l'infini compris) (1).

Ce théorème a été généralisé dans divers sens et, récemment, dans le sens important de M. Landau. Enfin, tout récemment, M. Remoundos a établi l'extension de son théorème aux fonctions ayant un nombre fini de branches $\nu$ dans le voisinage d'un point singulier essentiel *quelconque;* il a généralisé aussi ce théorème pour quelques classes des fonctions ayant une infinité de branches.

Soit $$u^\nu + A_1(x)u^{\nu-1} + \cdots + A_{\nu-1}(x)u + A_\nu(x) = 0$$

une équation algébrique en $u$ qui définit une fonction $u = a(x)$ algébroïde dans tout le plan de $x$. Je suppose que les coefficients $A_1(x)$, $A_2(x)$, ... $A_n(x)$ sont des fonctions entières ou méromorphes non liées par aucune relation : $R(c, A_i(x)) = 0$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, \nu)$, qui soit algébrique par rapport à $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_\nu(x)$ et à coefficients constants. Pour cette classe des fonctions transcendantes, je démontre dans le premier chapitre le théorème suivant :

*Une telle transcendante algébroïde à* $\nu$ *branches prend dans le domaine de l'infini* (qui est le point essentiel) *toutes les valeurs sauf, peut-être,* $\nu + 1$ *au plus, l'infini compris. Si le nombre de ces valeurs exceptionnelles est supérieur à* $\nu + 1$ *la fonction n'est pas transcendante, elle est algébrique.*

J'étudie aussi les zéros d'une classe étendue de fonctions multiformes, ayant un nombre infini de branches dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé, pour lesquelles le nombre des valeurs exceptionnelles est limité.

Dans le chapitre II, je signale une classe des transcendantes algébroïdes *quelconques*, pour lesquelles l'abaissement du nombre des valeurs exceptionnelles est immédiat, et la limite pour les fonctions indiquées plus haut se confond avec celle que nous considérons.

J'expose quelques applications à la théorie des équations différentielles en rattachant ces considérations aux zéros des intégrales des équations en question.

---

(1) Sur les zéros d'une classe des fonctions transcendantes, Paris, 1903 et *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e s., t. VIII.

Enfin, en faisant usage de la généralisation bien connue du théorème de M. Picard, dans la direction de M. Landau, j'étudie une classe de fonctions admettant le point $x = 0$ comme point *critique*, autour duquel un nombre infini de branches se permutent, et par la même méthode j'indique comment peut-on obtenir l'extension d'une proposition remarquable de M. Montel aux fonctions algébroïdes dans le voisinage du point $x = 0$.

Dans le chapitre III, je cherche une relation très précise entre le module maximum $m(r)$ d'une fonction $u = a(x)$ algébroïde et le plus grand des modules maxima des coefficients de l'équation

$$u^{\nu} + A_1(x)u^{\nu-1} + \cdot \cdot + A_{\nu-1}(x)u + A_{\nu}(x) = 0,$$

qui définit la transcendante $u = \mathrm{a}(x)$, sur la circonférence $|x| = r$.

**3**. Je suis heureux de pouvoir rendre ici publiquement témoignage de la profonde reconnaissance que je dois à mon maître, M. G. Rémoundos qui m'a donné la culture mathématique, a guidé mes pas dans les domaines de la pensée scientifique et eut l'idée de mon admission à l'Ecole Normale Supérieure de Paris, cette célèbre Ecole, où j'ai pu profiter de ces moyens scientifiques, bien connus et de son excellente hospitalité.

J'adresse ici mes remerciements respectueux à M. Jacques Hadamard, dont la bienveillance m'a beaucoup encouragé dans ce travail, à M. Ernest Vessiot, Directeur de la Section Scientifique pour son excellente hospitalité et sa sollicitude paternelle. En particulier, qu'il me soit permis d'adresser mes bien vifs remerciements à M. Paul Montel pour l'accueil excellent qu'il a bien voulu faire à mes recherches.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans quelques notes insérées dans les *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*.

# PREMIÈRE PARTIE

## CHAPITRE I

## UN THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES FONCTIONS CROISSANTES

**1**. Soit $\mu(x)$ une fonction réelle et positive de la variable réelle et positive $x$, qui, pour toute valeur finie de $x$, est finie, continue, et non décroissante. Je suppose de plus que $\mu(x)$ tende vers l'infini avec $x$

$$\lim_{x=\infty} \mu(x) = \infty .$$

La croissance de ces fonctions malgré son extrême variété, est soumise à certaines lois sur lesquelles, M. Borel a été le premier à attirer l'attention, dans son remarquable mémoire « *Sur les zéros des fonctions entières* ».

Ces lois sont une conséquence de la seule continuité.

Dans ce mémoire, M. Borel a jeté les bases d'une théorie comprenant toutes les fonctions entières d'ordre infini. On y trouve un théorème fondamental sur les fonctions croissantes continues $\mu(x)$, le suivant :

*Une fonction croissante quelconque* $\mu(x)$ *vérifie l'inégalité*

$$\mu\left(x + \frac{1}{\log \mu(x)}\right) < \mu(x)^{1+\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0 \quad \textit{quelconque}$$

*partout, sauf, au plus dans des intervalles d'étendue totale finie.*

**2**. Dans ce qui va suivre, nous allons préciser ce théorème en remplaçant la quantité $\frac{1}{\log \mu(x)}$ par une autre dont la décroissance est moins rapide, (quand on conserve le second membre $\mu(x)^{1+\varepsilon}$ invariable), ce qui nous permettra d'obtenir de nouveaux résultats qui complètent certaines propriétés des fonctions entières. Ces résultats nous fournissent des inégalités beaucoup plus avantageuses que celles bien connues de M. Borel.

Considérons la fonction croissante $\mu(x)$. Si on ajoute à $x$ la fonction décroissante

$$\frac{1}{\log \mu(x) \log_2 \mu(x) \ldots \log_\nu^\alpha \mu(x)}$$

$\nu$ étant un nombre entier aussi grand que l'on veut, mais fini, et $\alpha$ un nombre supérieur à l'unité quelconque, on trouve la fonction croissante

$$\mu\left[x + \frac{1}{\log \mu(x) \log_2 \mu(x) \ldots \log_\nu^\alpha \mu(x)}\right] = f(x)$$

nous démontrerons que les deux fonctions $\mu(x)$ et $f(x)$ sont du même ordre de grandeur.

*Nous remarquons d'abord que la fonction $f(x)$ est constamment* (1) *supérieure* à la fonction $\mu(x)$, il nous suffit donc de démontrer l'inégalité

$$f(x) < \theta\mu(x)$$

$\theta$ étant un nombre quelconque supérieur à l'unité.

En effet, si cette inégalité n'était pas vérifiée quel que soit $\theta$, pourvu qu'il reste supérieur à l'unité, alors, à partir d'une certaine valeur de $x$, il existerait un nombre $\theta > 1$ tel que l'on ait

$$f(x) > \theta\mu(x)$$

pour une infinité de valeurs de $x$ croissant indéfiniment.

Cette infinité de valeurs ne peut être dénombrable, car, si $x'$ est l'une de ces valeurs, en diminuant $\theta$, s'il est nécessaire, les fonctions $f(x)$, $\mu(x)$ étant continues par hypothèse, l'inégalité serait vérifiée dans un petit intervalle comprenant la valeur $x'$.

Nous nous contenterons de démontrer que l'inégalité $f(x) > \theta\mu(x)$ ne peut être vérifiée pour les valeurs de $x$ remplissant des intervalles dont la somme soit infinie.

(1) Nous supposons toujours que la fonction $\mu(x)$ est positive.

L'inégalité en question peut s'écrire sous la forme

$$\mu\left[x + \frac{1}{\log \mu(x) \log_2 \mu(x) \ \ldots \ \log_\nu^\alpha \mu(x)}\right] > \theta \,.\, \mu(x).$$

*a*) Supposons d'abord, pour fixer les idées, que cette inégalité soit vérifiée pour toute valeur de $x$ à partir d'une certaine valeur $x = x_0$.

Posons

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 + \dfrac{1}{\log \mu(x_0) \log_2 \mu(x_0) \ldots \log_\nu \mu(x_0)^\alpha} = x_1 \\ x_1 + \dfrac{1}{\log \mu(x_1) \log_2 \mu(x_1) \ \ldots \log_\nu \mu(x_1)^\alpha} = x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} + \dfrac{1}{\log \mu(x_{n-1}) \log_2 \mu(x_{n-1}) \ldots \log_\nu \mu(x_{n-1})^\alpha} = x_n , \end{array}\right.$$

ainsi d'après l'hypothèse faite

$$\begin{array}{l} \mu(x_1) > \theta \,.\, \mu(x_0) \\ \mu(x_2) > \theta \,.\, \mu(x_1) \\ \mu(x_3) > \theta \,.\, \mu(x_2) \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \mu(x_n) > \theta \,.\, \mu(x_{n-1}), \end{array}$$

en multipliant, nous obtenons

$$\mu(x_n) > \theta^n \mu(x_0)$$

et, par conséquent, pour les logarithmes :

$$\begin{array}{l} \log \mu(x_n) > n \log \theta \\ \log_2 \mu(x_n) > \log n \\ \ldots\ldots\ldots \\ \log_\nu \mu(x_n)^\alpha > \log_k n^\alpha. \end{array}$$

Or

$$x_n \leqslant x_0 + \frac{1}{\log \mu(x_0) \log_2 \mu(x_0) \ldots \log_\nu \mu(x_0)^\alpha} + \frac{1}{\log \mu(x_1) \log_2 \mu(x_1) \ldots \log_\nu \mu(x_1)^\alpha} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{\log \mu(x_{n-1}) \log_2 \mu(x_{n-1}) \ldots \log_\nu \mu(x_{n-1})^\alpha}.$$

En faisant tendre $n$ vers l'infini, et, tenant compte des inégalités précédentes, on en conclut

$$x_n < x_0 + \frac{2}{\log \mu(x_0) \log_2 \mu(x_0) \dots \log_\nu \mu(x_0)^\alpha} + \frac{1}{\log \theta} \sum_2^\infty \frac{1}{n \cdot \log n \log_2 n \dots \log_k^\alpha n}.$$

$\alpha$ étant quelconque, supérieur à l'unité. Comme la série (Série de Bertrand) converge, nous avons finalement

$$x_n < a$$

$a$ étant un nombre fixe aisé à calculer

Alors $$\mu(a) > \mu(x_n) > \theta^n \mu(x_0),$$

ce qui est évidemment absurde, puisque $a$ est fixe et $n$ peut être pris aussi grand que l'on veut.

*b*) Il reste à examiner le cas où l'inégalité $f(x) > \theta\mu(x)$ ne serait pas vérifiée pour *toutes les valeurs* de $x$.

Faisons parcourir à $x$ les valeurs de $0$ à $\infty$ et soit $x_0$ la première valeur telle que

$$f(x_0) \geqslant \theta\mu(x_0),$$

alors nous excluons de l'intervalle $0 \dots \infty$ tout intervalle $(x_0 x'_0)$. Pour la valeur $x'_0$, deux cas peuvent se présenter : ou bien $x'_0$ satisfait à l'inégalité

$$f(x'_0) < \theta\mu(x'_0),$$

ou bien il y a encore pour $x_0$ croissance exceptionnelle et dans ce cas je considère la valeur

$$x_1 = x'_0 + \frac{1}{\log \mu(x'_0) \log_2 \mu(x'_0) \dots \log_\nu \mu(x'_0)^\alpha}$$

et ainsi de suite.

D'après ce que nous avons démontré dans le premier cas, nous sommes sûrs d'arriver à une valeur de $x$ ayant un indice fini vérifiant l'inégalité

$$f(x) < \theta\mu(x),$$

après avoir construit les valeurs, en nombre fini, $n+1$ par exemple,

$$x_0, x_1, x_2, \dots x_n.$$

Nous excluons alors de l'intervalle total $0 \dots \infty$ l'intervalle $(x_0 x_n)$.

Maintenant partons de la valeur $x_n$ et soit $x_P$ la première valeur à droite de $x_n$ telle que

$$f(x_P) \geqslant \theta\mu(x_P)$$

par les mêmes procédés, on arrivera à une valeur ayant un indice fini vérifiant de nouveau l'inégalité $f(x) < \theta\mu(x)$ et on construira les valeurs

$$x_P, \quad x_{P+1}, \quad x_{P+2}, \quad \dots ; \quad x_{P+\lambda}$$

Nous excluons l'intervalle total $(x_P x_{P+\lambda})$.

Continuant ainsi, supposons que nous ayons trouvé successivement et exclu de l'intervalle $0\dots\infty$ les intervalles

$$\left\{\begin{array}{ccccc} (x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n) \\ (x_P & x_{P+1} & x_{P+2} & \dots & x_{P+\lambda}) \\ (x_\rho & x_{\rho+1} & x_{\rho+2} & \dots & x_{\rho+k}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

Il est évident qu'en dehors de ces intervalles nous avons toujours l'inégalité

$$f(x) < \theta\mu(x),$$

par conséquent l'ensemble des intervalles exceptionnels fait partie de l'ensemble des intervalles en question.

Je vais démontrer que *l'étendue totale de ces intervalles est finie.* Voici la démonstration analytique :

Nous avons :

$$(x_0 x_n) = (x_n - x_0) = \frac{1}{\log \mu(x_0) \dots \log_\nu \mu(x_0)^\alpha} + \frac{1}{\log \mu(x_1) \dots \log_\nu \mu(x_1)^\alpha} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{\log \mu(x_{n-1}) \dots \log_\nu \mu(x_{n-1})^\alpha}$$

en tenant compte de l'inégalité

$$\log \mu(x_n) \log_2 \mu(x_n) \dots \log_\nu \mu(x_n) > \log \theta . n \log n \log_2 n \dots \log_{\nu-1} n^\alpha,$$

*nous écrivons*

$$(x_0 x_n) < \frac{2}{\log \mu(x_0) \log_2 \mu(x_0) \dots \log_\nu \mu(x_0)^\alpha}$$
$$+ \frac{1}{\log \theta} \left\{ \frac{1}{2 \log 2 \log_2 2 \dots \log_{\nu-1} 2^\alpha} + \frac{1}{3 \log 3 \log_2 3 \dots \log_{\nu-1} 3^\alpha} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(n-1) \log (n-1) \log_2 (n-1) \dots \log_{\nu-1} (n-1)^\alpha} \right\}.$$

De même

$$(x_P x_{P+\lambda}) = x_{P+\lambda} - x_P = \frac{1}{\log \mu(x_P) \ldots \log_\nu \mu(x_P)^a} + \frac{1}{\log \mu(x_{P+1}) \ldots \log_\nu \mu(x_{P+1})^a} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{\log \mu(x_{P+\lambda-1}) \ldots \log_\nu \mu(x_{P+\lambda-1})^a}.$$

Or

$$\mu(x_{P+\lambda}) \geqslant \theta^\lambda \mu(x_P)$$

parce que la valeur $x_{P+\lambda}$ est exceptionnelle, et comme

$$\mu(x_P) \geqslant \mu(x_n) > \theta^n \mu(x_0), \qquad (x_P > x_n),$$

on en déduit

$$\mu(x_{P+\lambda}) > \theta^{\lambda+n} \mu(x_0)$$

par conséquent

$$\log \mu(x_{P+\lambda}) \log_2 \mu(x_{P+\lambda}) \ldots \log_\nu \mu(x_{P+\lambda})^a > \log \theta . (n+\lambda) \log (n+\lambda) \log_2 (n+\lambda) \ldots \log_{\nu-1} (n+\lambda)^a$$
$$\lambda \mid 0, 1, \ldots, \lambda - 1$$

Alors pour la longueur $(x_P x_{P+\lambda})$ nous avons

$$(x_P x_{P+\lambda}) < \frac{1}{\log \theta} \left\{ \frac{1}{n \log n \ldots \log_{\nu-1} n^a} + \frac{1}{(n+1) \log (n+1) \ldots \log_{\nu-1} (n+1)^a} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(n+\lambda-1) \log (n+\lambda-1) \ldots \log_{\nu-1} (n+\lambda-1)^a} \right\}.$$

Pour l'intervalle $(x_\rho x_{\rho+k})$ nous avons :

$$(x_\rho x_{\rho+k}) = x_{\rho+k} - x_\rho = \frac{1}{\log \mu(x_\rho) \ldots \log_\nu \mu(x_\rho)^a} + \frac{1}{\log \mu(x_{\rho+1}) \ldots \log_\nu \mu(x_{\rho+1})^a} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{\log \mu(x_{\rho+k-1}) \ldots \log_\nu \mu(x_{\rho+k-1})^a}$$

On sait que

$$\mu(x_{\rho+k}) > \theta^k \mu(x_\rho)$$
$$\mu(x_\rho) \geqslant \mu(x_{P+\lambda}) > \theta^{n+\lambda} \mu(x_0) \qquad (x_\rho > x_{P+\lambda})$$
$$\mu(x_{\rho+k}) > \theta^{n+\lambda+k} \mu(x_0).$$

Par conséquent

$$\log \mu(x_{\rho+k}) \log_2 \mu(x_{\rho+k}) \ldots \log_\nu \mu(_{\rho+k})^a > \log \theta . (n+\lambda+k) \log (n+\lambda+k) \ldots \log_{\nu-1} (n+\lambda+k)^a$$
$$k \mid 0, 1, 2, \ldots k-1$$

On en déduit alors

$$(x_\rho x_{\rho+k}) < \frac{1}{\log \theta} \left\{ \frac{1}{(n+\lambda) \log (n+\lambda) \ldots \log_{\nu-1} (n+\lambda)^a} \right.$$
$$+ \frac{1}{(n+\lambda+1) \log (n+\lambda+1) \ldots \log_{\nu-1} (n+\lambda+1)^a} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(n+\lambda+k-1) \log (n+\lambda+k-1) \ldots \log_{\nu-1} (n+\lambda+k-1)^a}$$

On voit finalement que la longueur totale des intervalles exceptionnels

$$(x_0 x_n) + (x_p x_{p+\lambda}) + (x_\rho x_{\rho+k}) + \cdots < \frac{2}{\log \mu(x_0) \ldots \log_\nu \mu(x_0)}$$
$$+ \frac{1}{\log \theta} \left\{ \frac{1}{2 \log 2 \ldots \log_{\nu-1} 2^a} + \frac{1}{3 \log 3 \ldots \log_{\nu-1} 3^a} + \cdots \right\}$$

et comme la série

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n \log n \log_2 n \ldots \log_{\nu-1} n^a} \qquad a > 1 \quad \text{quelconque}$$

converge, nous constatons que l'étendue totale des intervalles exclus est bien finie. Notre proposition est la suivante :

*Étant donnés deux nombres $\theta$, $a$ positifs et supérieurs à l'unité quelconques s'il existe des valeurs de $x$ ne satisfaisant pas à l'inégalité :*

$$\mu \left\{ x + \frac{1}{\log \mu(x) \log_2 \mu(x) \ldots \log_\nu \mu(x)^a} \right\} < \theta . \mu(x).$$

*$\mu(x)$ étant une fonction croissante et positive quelconque, et $\nu$ entier quelconque, ces valeurs exceptionnelles remplissent des intervalles d'étendue totale finie. La longueur totale d'une suite d'intervalles exceptionnels situés à droite d'une valeur $x_0$ ne dépasse pas la quantité*

$$\frac{2}{\log \mu(x_0) \log_2 \mu(x_0) \ldots \log_\nu \mu(x_0)^a} + \frac{1}{\log \theta} \sum_2^\infty \frac{1}{n \log n \log_2 n \ldots \log_{\nu-1} n^a}$$

**3**. On peut donner à ce théorème d'autres formes qui, peut-être, dans d'autres recherches, remplaceront avantageusement celle que nous venons de démontrer.

Ainsi posons

$$\mu(x) = \log f(x),$$

$f(x)$ est encore une fonction continue croissante et appliquons à la fonction $f(x)$ le théorème démontré; alors notre inégalité prendra la forme

$$f\left(x + \frac{1}{\log_2 f(x) \log_3 f(x) \ldots \log_\nu f(x)^a}\right) < f(x)^\theta.$$

Ce qui nous fait voir que *la quantité* $\frac{1}{\log_2 f(x) \log_3 f(x) \ldots \log_\nu f(x)^a}$ *additionné à $x$ n'altère pas l'ordre de croissance de la fonction croissante $f(x)$.*

Il est évident que cette quantité tend vers zéro moins rapidement que la quantité $\frac{1}{\log f(x)}$ considérée par M. Borel ce qui, parfois, a des conséquences intéressantes.

Posons encore
$$\mu(x) = e^{\varphi(x)}$$
notre théorème est encore applicable à la fonction $\varphi(x)$ et nous trouvons l'inégalité

$$\varphi\left(x + \frac{1}{\varphi(x) \log \varphi(x) \log_2 \varphi(x) \ldots \log_\nu \varphi(x)^\alpha}\right) < \varepsilon + \varphi(x),$$

$\varepsilon$ étant un nombre positif quelconque.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que ces résultats sont plus avantageux que l'inégalité

$$\mu\left(x + \frac{1}{\log \mu(x)}\right) < \mu(x)^\theta, \qquad \theta > 1 \quad \text{quelconque}$$

de M. Borel.

## Application aux fonctions entières

**4**. Nous allons maintenant voir comment le théorème que nous venons de démontrer nous permet de compléter, sur certains points, les théories classiques sur les fonctions uniformes pour obtenir des résultats plus avantageux.

Soit $M(r)$ le module maximum d'une fonction entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \cdot$$

En dehors du théorème classique de Cauchy exprimé par les inégalités

$$| a_m | < \frac{M(r)}{r^m}$$

nous avons une autre relation en sens contraire, entre $M(r)$ et le module des termes de la série qui définit la fonction $f(x)$.

C'est la proposition suivante :

*Si nous avons les inégalités*

$$| a_m | r^m < \mu(r),$$

*le module* $\mathcal{M}(r)$ *maximum de la fonction* $f(x) = \Sigma a_m x^m$ *satisfait à l'inégalité*

$$\mathcal{M}(r) < \frac{r_1 \mu(r_1)}{r_1 - r}$$

*avec* $r_1 > r$ *et quelconque.*

Nous prenons $r_1 = r + \frac{1}{\log \mu(x)}$ et nous appliquons à la fonction $\mu(r)$ le théorème de M. Borel exprimé par l'inégalité

$$\mu\left(x + \frac{1}{\log \mu(x)}\right) < \mu(r)^{1+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0 \quad \text{quelconque})$$

nous arriverons facilement à l'inégalité asymptotique

$$\mathfrak{M}(r) < \mu(r)^{1+\varepsilon}$$

satisfaite pour toutes les valeurs suffisamment grandes de $r$, sauf, peut-être, quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale finie.

Mais si nous posons

$$r_1 = r + \frac{1}{\log \mu(r) \log_2 \mu(r) \ldots \log_\nu \mu(r)^\alpha}, \qquad \alpha > 1 \quad \text{quelconque},$$

en vertu de notre inégalité

$$\mu(r_1) < \theta\mu(r), \qquad \theta > 1 \text{ quelconque},$$

nous aurons la relation asymptotique

$$\mathfrak{M}(r) < \theta.\mu(r)[1 + r \log \mu(r) \log_2 \mu(r) \ldots \log_\nu \mu(r)^{1+\varepsilon_1}] \qquad (\varepsilon_1 > 0 \quad \text{quelconque})$$

ce qui nous donne l'inégalité beaucoup plus avantageuse

$$\mathfrak{M}(r) < r\mu(r) \log \mu(r) \log_2 \mu(r) \ldots \log_\nu \mu(r)^{1+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > \varepsilon_1)$$

et nous arrivons ainsi à l'énoncé suivant.

*Si les coefficients d'une fonction entière*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m +$$

*satisfont à l'inégalité*

$$| a_m | < \frac{\mu(r)}{r^m},$$

*à partir d'une valeur de* $|x| = r$, *où* $\mu(x)$ *est une fonction quelconque croissante positive et continue, en désignant par* $\mathfrak{M}(r)$ *le module maximum de la fonction entière pour* $|x| = r$, *l'inégalité*

$$(1) \qquad \mathfrak{M}(r) < r\mu(r) \log \mu(r) \log_2 \mu(r) \ldots \log_\nu \mu(r)^{1+\varepsilon}$$

*sera satisfaite pour une infinité de valeurs de* $r$ *croissant indéfiniment,* $\nu$ *étant un nombre entier quelconque et* $\varepsilon$ *positif et quelconque.*

**5**. Nous pouvons encore compléter ce résultat et en *obtenir* un autre plus avantageux. Voici comment :

Considérons, avec M. Rémoundos (1), une fonctions $q(r)$ croissant plus vite que toute puissance finie de $r$. Une telle croissance sera dite *transcendante* puisque son ordre d'infinitude par rapport à $r$ considéré comme infiniment grand est infini. La croissance de $q(r)$ étant transcendante, le rapport $q(r) : r^m$ tend vers l'infini pour chaque valeur finie de $m$. D'autre part, la fonction $\frac{q(x)}{r^m}$ est croissante pour toutes les valeurs de $r$ qui satisfont à l'inégalité

$$\left[\frac{q(r)}{r^m}\right]' = \frac{r^m q'(r) - m r^{m-1} q(r)}{r^{2m}} > 0$$

ou bien

$$\frac{rq'(r)}{q(r)} > m.$$

Nous appelons la quantité $\frac{rq'(x)}{q(x)}$ ordre de la croissance de la fonction croissante $q(r)$ suivant la terminologie de M Rémoundos.

La série $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \quad + a_m x^m + \quad$ qui définit la fonction $f(x)$ converge *uniformément* dans tout cercle $|x| \leqslant r$, alors, si nous posons

$$R_m(x) = a_{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} +$$

à tout nombre $\varepsilon$ positif, nous pouvons faire correspondre un entier $\mu$ tel que pour $m \geqslant \mu$ et pour tous les points du cercle $|x| \leqslant r$, on ait l'inégalité

$$|R_m(x)| < \varepsilon;$$

la quantité $\mu = \alpha(r, \varepsilon)$ dépend évidemment de $|x|$ et *du nombre* $\varepsilon$ et dépasse toute quantité (autrement la fonction $f(x)$ ne serait qu'un polynôme).

Elle peut s'appeler *caractéristique de la convergence uniforme* de la fonction $f(x)$. Supposons maintenant que, à partir d'une valeur de $r$, nous ayons

$$\frac{rq'(r)}{q(r)} > \alpha(r, \varepsilon) + \theta$$

$\theta$ étant un nombre quelconque et supérieur à l'unité

Alors aussi grand que soit $r$, nous pouvons toujours définir un nombre $\mu$ *entier* tel que

$$\frac{rq'(r)}{q(r)} > \mu > \alpha(r,\varepsilon).$$

(1) *Comptes Rendus*, t 170, p 831, 6 avril 1920

La fonction $\frac{q(r)}{r^m}$ sera pour $m \leqslant \mu$ croissante à partir de la valeur r, et, en même temps pour $m \geqslant \mu$ et pour toutes les valeurs de $|x| = r$, nous aurons l'inégalité

$$| R_m(x) | < \varepsilon.$$

Cela étant, l'inégalité

$$| a_m | < \frac{\mu(r)}{r^m}$$

peut s'écrire *à fortiori*

$$| a_m | < \mu(r) \frac{q(r)}{r^m}$$

ou encore

$$| a_m | < \mu(r) \frac{q(r_1)}{r_1{}^m} \qquad \text{pour} \qquad m \leqslant \mu$$

et $r_1 > r$ et quelconque.

J'écris

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_\mu x^\mu + R_\mu(x)$$

et je prends les modules des deux membres pour $|x| = r$.

$$| f(x) | \leqslant | a_0 | + | a_1 | r + | a_2 | r^2 + \cdots + | a_\mu | r^\mu + | R_\mu(x) | .$$

En tenant compte des inégalités précédentes (qui sont bien valables pour $m \leqslant \mu$), on en déduit

$$| f(x) | < \mu(r) q(r_1) \left[ 1 + \frac{r}{r_1} + \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 + \cdots + \left( \frac{r}{r_1} \right)^\mu \right] + \varepsilon$$

ou bien

$$| f(x) | < \mu(r) q(r_1) \left\{ 1 + \frac{r}{r_1} + \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 + \cdots + \left( \frac{r}{r_1} \right)^\mu + \cdots \right\} + \varepsilon$$

ou encore

$$| f(x) | < \mu(r) q(r_1) \frac{r_1}{r_1 - r} + \varepsilon.$$

Maintenant, j'utilise notre proposition fondamentale en prenant

$$r_1 = r + \frac{1}{\log q(r) \log_2 q(r) \ldots \log_\nu q(r)^\alpha} \qquad (\alpha > 1 \quad \text{quelconque})$$

et je trouve

$$|f(x)| < \theta\mu(r)q(r)[1 + r \log q(r) \log_2 q(r) \dots \log_\nu q(r)^\alpha] + \varepsilon \quad (\theta > 1 \quad \text{quelconque})$$

ce qui peut s'écrire

$$|f(x)| < r\mu(r)q(r) \log q(r) \log_2 q(r) \log_\nu q(r)^\delta \qquad \text{avec} \quad \delta > \alpha$$

Nous obtenons donc le théorème suivant :

*Soit*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + \cdots$$

*une fonction entière, et considérons la fonction majorante relative à f(x)*

$$\mathfrak{M}(r) = |a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + \cdots + |a_m| r^m + \cdots.$$

*Si, à partir d'une valeur de r, nous avons l'inégalité*

$$|a_m| r^m < \mu(r)$$

*la quantité* $\mathfrak{M}(r)$ *à partir d'une valeur de r satisfait à l'inégalité*

$$\mathfrak{M}(r) < r\mu(r)q(r) \log q(r) \log_2 q(r) \dots \log_\nu q(r) \tag{2}$$

$\delta > 1$ *quelconque, q(r) étant une fonction à croissance transcendante, dont l'ordre dépasse, à partir d'une valeur de r une caractéristique de la convergence uniforme de la série* $\Sigma a_m x^m$ *qui définit la fonction f(x), d'un excès supérieur à l'unité.*

*Critique de ce résultat.* — L'avantage fourni par la formule (2) substituée à la place de l'inégalité (1) consiste en ce que nous fait, *en choisissant convenablement la transcendante* q(*r*), gagner *en grandeur*, et même, si q(*r*) est à croissance typique, nous gagnons *en régularité*, à cause de l'absence des intervalles exceptionnels, ce qui est quelquefois un avantage considérable.

**6**. Considérons la fonction $f(x) = \Sigma a_m x^m$ et posons

$$x = r(\cos\theta + i \sin\theta), \qquad a_m = \alpha_m + ib_m$$

nous aurons

$$f(x) = P(r, \theta) + iQ(r, \theta)$$

si A(*r*) désigne le maximum des valeurs *positives* de P(*r*, θ), lorsque, *r* étant constant, θ varie de 0 à 2π, et B(*r*) le maximum de valeurs *positives* de — P(*r*, θ) pour *r* constant et θ variable, nous pouvons établir, en nous servant toujours de l'inégalité

$$\mu\left(r + \frac{1}{\log \mu(r) \log_2 \mu(r) \dots \log_\nu \mu(r)^\alpha}\right) < \theta . \mu(r) \qquad [\alpha, \theta > 1 \quad \text{quelconques}]$$

les formules suivantes

$$\mathcal{M}(r) < rA(r) \log A(r) \ldots \log_\nu A(r)^{1+\varepsilon}$$
$$\mathcal{M}(r) < rB(r) \log B(r) \ldots \log_\nu B(r)^{1+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0 \quad \text{quelconque}$$

$\mathcal{M}(r)$ étant le module maximum de la fonction $f(x)$ pour $|x| = r$

## Complément d'un théorème classique de M. Hadamard.

**7** Désignons par $f(x)$ la fonction entière et $\mathcal{M}(r)$ le maximum de son module pour $|x| = r$, nous supposons que la fonction $\mathcal{M}(r)$ vérifie *pour toute valeur* de $r$ l'inégalité

$$\mathcal{M}(r) < e^{\mu(r)}$$

$\mu(r)$ étant une fonction donnée

Si $n$ est le nombre des zéros de la fonction $f(x)$ dont le module est inférieur à $r$, nous avons (1)

$$n < \frac{\mu(r)}{\log r - \log r_n}$$

Considérons une fonction $\varphi(r)$ croissante quelconque qui croît plus vite que $\log r$, alors nous aurons

$$n < \mu(r) \frac{\varphi(r)}{\log r - \log r_n}$$

$r_n$ étant le module de la $n^{ième}$ racine $a_n$ de la fonction $f(x)$.

Nous avons *a fortiori*

$$n < \mu(r) \frac{\varphi(r_1)}{\log r_1 - \log r_n} \tag{3}$$

où $r_1$ est plus grand que $r$ et quelconque.

Je prends

$$r_1 = r_n + \frac{1}{\log \varphi(r_n)^\alpha} \qquad (\alpha > 1 \quad \text{quelconque})$$

d'où

$$\frac{r_1}{r_n} = 1 + \frac{1}{r_n \log \varphi(r_n)^\alpha}, \quad \log r_1 - \log r_n = \log\left(1 + \frac{1}{r_n \log \varphi(r_n)^\alpha}\right)$$

(1) Otto Blumenthal *Principes de la theorie des fonctions entières d'ordre infini*, 1910, Gauthier-Villars, p 46

et comme

$$\left| \frac{1}{r_n \log \varphi(r_n)^\alpha} \right| < 1$$

on en déduit

$$\log r_1 - \log r_n > \frac{1}{r_n \log \varphi(r_n)^\alpha} - \frac{1}{r_n^2 \log \varphi(r_n)^{2\alpha}}$$

$$\log r_1 - \log r_n > \frac{1}{r_n^2 \log \varphi(r_n)^{2\alpha}};$$

d'autre part, conformément à notre théorème,

$$\varphi(r_1) < \theta . \varphi(r_n) \qquad (\theta > 1 \text{ quelconque})$$

et l'inégalité (3) devient finalement

$$n < \theta\mu(r)\varphi(r_n) 2 r_n^2 \log \varphi(r_n)^{2\alpha}$$

ou bien

$$n < r_n^2 \mu(r)\varphi(r_n) \log \varphi(r_n)^{2+\varepsilon} \qquad \varepsilon > 0 \text{ quelconque}$$

Je signale que s'il existe une suite d'intervalles exceptionnels commençant par $r_0$, par exemple, leur longueur totale ne dépasse pas la quantité

$$\frac{2}{\log \varphi(r_0)^\alpha} + \frac{1}{\log \theta^\alpha}$$

Nous sommes arrivés à l'énoncé suivant :

*Si pour* $|x| = r$, *nous avons l'inégalité*

$$| f(x) | < e^{\mu(r)}$$

*le nombre n des zéros dont le module est inférieur ou égal à r vérifie l'inégalité suivante*

$$n < r^2 \mu(r)\varphi(r) \log \varphi(r)^{2+\varepsilon}$$

$\varepsilon$ *étant un nombre positif et quelconque, et* $\varphi(r)$ *désigne une fonction croissante arbitraire assujettie à la condition de croître plus vite que* log $r$.

*S'il existe des intervalles exceptionnels leur longueur est négligeable.*

Cette inégalité est beaucoup plus avantageuse, elle nous fait gagner en grandeur et en régularité, cela dépend de la fonction $\varphi(r)$.

**8**. Soit une fonction croissante quelconque $\mu(x)$ et un nombre $\nu$ entier et quelconque, la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{\log_2 \mu(x)} [\log_3 \mu(x) + \log_4 \mu(x) + \cdots + (1+\varepsilon) \log_\nu \mu(x)] \qquad (\varepsilon > 0 \quad \text{quelconque})$$

est visiblement décroissante.

Si alors on considère la fonction décroissante $\sigma(x)$ qui décroît moins vite que la fonction $\varphi(x)$, nous aurons à partir d'une valeur de $x$

$$\sigma(x) > \varphi(x)$$

ou
$$\log_2 \mu(x) \cdot \sigma(x) > \log_3 \mu(x) + \log_4 \mu(x) + \cdots + (1+\varepsilon) \log \mu(x)$$

$$\log \mu(x)^{\sigma(x)} > \log_2 \mu(x) \cdot \log_3 \mu(x) \cdots \log_\nu \mu(x)^{1+\varepsilon}$$

par conséquent

$$\mu\left[x + \frac{1}{\log \mu(x)^{\sigma(x)}}\right] < \mu\left[x + \frac{1}{\log_2 \mu(x) \log_3 \mu(x) \cdots \log_\nu \mu(x)^{1+\varepsilon}}\right]$$

et, en appliquant notre inégalité établie au début de ce travail, nous aurons

$$\mu \left\{ x + \frac{1}{\log \mu(x)^{\sigma(x)}} \right\} < \mu(x)^{1+\varepsilon}.$$

*Si la fonction décroissante $\sigma(x)$ décroît moins vite que*

$$\frac{\log_3 \mu(x) + \log_4 \mu(x) + \cdots + (1+\varepsilon) \log_\nu \mu(x)}{\log_2 \mu(x)}$$

*$\mu(x)$ étant une fonction croissante quelconque, l'inégalité*

$$\mu\left(x + \frac{1}{\log \mu(x)^{\sigma(x)}}\right) < \mu(x)^{1+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0 \quad \text{quelconque})$$

*est vérifiée partout, sauf, peut-être, quelques intervalles exceptionnels d'étendue totale finie.*

CHAPITRE II

# CROISSANCE DE LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION CROISSANTE ET POSITIVE

---

**1.** Nous allons établir une relation intéressante qui existe entre une fonction positive croissante et sa dérivée, plus précise que celle de M. Borel, donnée dans son mémoire « *Sur les zéros des fonctions entières* ».

Considérons une fonction croissante et positive $\mu(x)$ ; alors la fonction $\log_\nu \mu(x)$ est aussi croissante, $\nu$ étant un nombre entier quelconque.

Supposons que, à partir d'une valeur $x = x_0$ dans l'intervalle $x_0 \ldots x_1$, l'on ait

$$[\log_\nu \mu(x)]' > \log_\nu \mu(x)^{1+\alpha} \qquad (\alpha > 0 \quad \text{quelconque})$$

ou bien

$$\mu'(x) > \mu(x) \log \mu(x) \log_2 \mu(x) \ldots \log_\nu \mu(x)^{1+\alpha}$$

L'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d\mu(x)}{\mu'(x)} = x_1 - x_0,$$

en vertu de l'inégalité précédente, donne

$$x_1 - x_0 < \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\mu(x)}{\mu(x) \log \mu(x) \ldots \log_\nu \mu(x)^{1+\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \Big[ \log_\nu \mu(x)^{-\alpha} \Big]_{x_1}^{x_0}$$

ou bien

$$x_1 - x_0 < \frac{1}{\alpha \log_\nu \mu(x_0)^\alpha}$$

donc l'intervalle $x_1 - x_0$ ne peut pas dépasser $\dfrac{1}{a \log_\nu \mu(x_0)^\alpha}$, et, par conséquent, doit être considéré exceptionnel, puisque $a$ étant donné quelque petit que soit, on peut convenablement choisir $x_0$ de sorte que $\dfrac{1}{a \log_\nu \mu(x_0)^\alpha}$ soit inférieur à un nombre aussi petit que l'on voudra.

Nous avons la proposition suivante :

*Si $\mu(x)$ désigne une fonction croissante quelconque (positive) l'inégalité*

$$\mu'(x) < \mu(x) \log \mu(x) \log_2 \mu(x) \ldots \log_\nu \mu(x)^{1+\varepsilon}$$

*est satisfaite à partir d'une valeur de $x$, sauf, peut-être quelques intervalles exceptionnels à étendue totale inférieure à*

$$\frac{1}{a \log_\nu \mu(x_0)^a}$$

*$a$ étant un nombre positif et quelconque et $\nu$ un entier quelconque aussi grand que l'on veut, mais fixe.*

La subtitution de la fonction croissante $\log_\nu \mu(x)$ à $\mu(x)$ constitue le point principal de cette méthode.

## Fonctions et dérivées

**2**. En m'appuyant sur le résultat ci-dessus obtenu, je puis maintenant compléter la relation classique qui existe entre le module maximum $\mathcal{M}(r)$ d'une fonction entière $f(x)$ et celui $\mathcal{M}_1(r)$ de sa dérivée $f'(x)$ pour $|x| = r$.

Considérons un rayon $r' > r$ et écrivons l'intégrale de Cauchy

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r'}} \frac{f(x')}{(x'-x)^2}\, dx' \qquad \text{où} \qquad |x'| = r'.$$

Prenons les modules

$$\mathcal{M}_1(r) < \frac{1}{2\pi} \frac{\mathcal{M}(r')}{(r'-r)^2} 2\pi r' = \mathcal{M}(r') \frac{r'}{(r'-r)^2}$$

et maintenant pour trouver une inégalité valable entre les quantités $\mathcal{M}(r)$ et $\mathcal{M}_1(r)$, posons

$$r' = r + \frac{1}{\log \mathcal{M}(r)^\alpha} \qquad (\alpha > 1 \quad \text{quelconque})$$

alors tenant compte de l'inégalité

$$\mathcal{M}(r') < \theta \cdot \mathcal{M}(r) \qquad (\theta > 1 \quad \text{quelconque})$$

nous obtenons

$$\mathcal{M}_1(r) < \theta\mathcal{M}(r)[1 + r \log \mathcal{M}(r)^\alpha] \log \mathcal{M}(r)^\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{M}_1(r) < r\mathcal{M}(r) \log \mathcal{M}(r)^{2+\varepsilon}$$

$\varepsilon$ étant positif et quelconque.

Voilà un résultat plus avantageux que celui de M. Borel.

**3**. Considérons la fonction majorante relative à $f(x)$

$$| \mathcal{M}(r) | = | \alpha_0 | + | \alpha_1 | r + | \alpha_2 | r^2 + \cdot + | \alpha_m | r^m + \cdot \cdot$$

nous avons

$$| f'(x) | < | \alpha_1 | + 2 | \alpha_2 | r + \cdot + m | \alpha_m | r^{m-1} + \cdots$$

c'est-à-dire

$$| f'(x) | < \mathcal{M}'(r)$$

Et puisque

$$\mathcal{M}'(r) < \mathcal{M}(r) \log \mathcal{M}(r) \log_2 \mathcal{M}(r) \ldots \log_\nu \mathcal{M}(r)^{1+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0 \quad \text{quelconque}),$$

comme nous l'avons démontré plus haut, pour la croissance de la dérivée d'une fonction croissante et positive, on en déduit

$$| f'(x) | < \mathcal{M}(r) \log \mathcal{M}(r) \log_2 \mathcal{M}(r) \ldots \log_\nu \mathcal{M}(r)^{1+\varepsilon}$$

Or

$$\mathcal{M}(r) < \mu(r) q(r)^{1+\varepsilon}$$

$q(r)$ étant une transcendante qui croît plus vite que toute puissance finie de $r$ et $\mu(r)$ une croissante quelconque telle que

$$| \alpha_m | r^m < \mu(r);$$

par conséquent

$$\log \mathcal{M}(r) < \log \mu(r) \left[ 1 + (1 + \varepsilon) \frac{\log q(r)}{\log \mu(r)} \right]$$

$$\log_2 \mathcal{M}(r) < \log_2 \mu(r) \left\{ 1 + \frac{1}{\log_2 \mu(r)} \log \left[ 1 + (1 + \varepsilon) \frac{\log q(r)}{\log \mu(r)} \right] \right\}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Nous aurons donc finalement la relation asymptotique

$$| f'(x) | < \mu(r) \log \mu(r) \log_2 \mu(r) \ldots \log_\nu \mu(r)^{1+a} q(r)^{1+\varepsilon}$$

$a$, $\varepsilon$ étant des nombres positifs et quelconques.

Nous avons le théorème suivant qui complète l'inégalité précédente pour le même sujet établi.

*Soit une fonction entière*

$$-f(x) | = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \cdot \cdot$$

*si nous avons*

$$| \alpha_m | r^m < \mu(r) \qquad | x | = r.$$

*Le module* $\mathcal{M}_1(r)$ *maximum de la fonction* $f'(x)$ *satisfait à l'inégalité*

$$\mathcal{M}_1(r) < \mu(r) \log \mu(r) \log_\nu \mu(r)^{1+a} q(r)^{1+\varepsilon} ;$$

$a$, $\varepsilon$ *sont positifs quelconques,* $\nu$ *aussi grand que l'on veut, mais fixe et entier, et* $q(r)$ *une fonction à croissance transcendante.*

*S'il y a des intervalles exceptionnels, leur étendue totale est négligeable.*

Nous pouvons encore aller plus loin.

**4**. Je réussis à remplacer l'inégalité démontrée par la suivante :

$$\mathcal{M}_1(r) < \mu(r) q(r)^{1+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0 \quad \text{quelconque})$$

dans laquelle ne figurent plus de facteur logarithmique de la fonction $\mu(r)$.

Voici la démonstration

Je pars de la relation

$$\mathcal{M}_1(r) < \mathcal{M}'(r)$$

qui peut s'écrire

$$\mathcal{M}_1(r) < | \alpha_1 | + 2 | \alpha_2 | r^2 + 3 | a_3 | r^3 + \cdots + m | \alpha_m | r^{m-1} + \cdots ;$$

d'autre part

$$| a_m | < \frac{\mu(r)}{r^m} < \mu(r) \frac{q(r)}{r^m}$$

et *à fortiori*

$$| a_m | < \mu(r) \frac{q(r_1)}{{r_1}^m}$$

avec $r_1 > r$ et quelconque, $\dfrac{q(r)}{r^m}$ étant une fonction croissante à cause de la nature de la fonction $q(r)$.

Par conséquent, nous avons

$$\mathfrak{M}_1(r) < \mu(r)q(r_1)\left[\frac{1}{r_1} + \frac{2r}{r_1^2} + \frac{3r^2}{r_1^3} + \cdots + \frac{mr^{m-1}}{r_1^m} + \cdots\right]$$
$$= \mu(r)\frac{q(r_1)}{r_1}\left[1 + 2\left(\frac{r}{r_1}\right) + 3\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 + \cdots + m\left(\frac{r}{r_1}\right)^{m-1} + \cdots\right]$$
$$= \mu(r)\frac{q(r_1)}{r_1}\left(\frac{r_1}{r_1 - r}\right)^2$$

ou bien

$$\mathfrak{M}_1(r) < \mu(r)q(r_1)\frac{r_1}{(r_1 - r)^2},$$

où la nouvelle valeur $r_1$ ne figure plus dans le facteur $\mu(r)$.

En prenant

$$r_1 = r + \frac{1}{\log \mu(r)^\alpha} \qquad (\alpha > 1 \quad \text{quelconque})$$

et appliquant le théorème

$$\mu(r_1) < \theta\mu(r), \qquad \theta > 1,$$

nous arrivons à l'inégalité asymptotique

$$\mathfrak{M}_1(r) < \mu(r).\theta q(r)[1 + r \log q(r)^\alpha] \log q(r)^\alpha$$

ce qui nous donne

$$\mathfrak{M}_1(r) < r\mu(r)q(r) \log q(r)^{2+\varepsilon} \qquad (\varepsilon < 0 \quad \text{quelconque})$$

qui peut bien se mettre sous la forme

$$\mathfrak{M}_1(r) < \mu(r)q(r)^{1+\varepsilon}$$

puisque le rapport $q(r)^\varepsilon : r \log q(r)^{2+\varepsilon}$ tend vers l'infini.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

*Soit une fonction*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + \cdots$$

*avec*

$$|\alpha_m| r^m < \mu(r).$$

*si on considère une fonction $q(r)$ quelconque à croissance transcendante, le module maximum $\mathfrak{M}_1(r)$ de la dérivée $f'(x)$ satisfait à partir d'une valeur de $r$ à l'inégalité suivante :*

$$\mathfrak{M}_1(r) < r\mu(r)q(r) \log q(r)^{2+\varepsilon}$$

$\varepsilon$ *étant un nombre positif quelconque, avec, peut-être, une suite des intervalles exceptionnels dont l'étendue totale est finie.*

Si la fonction $q(r)$ est à croissance typique, il n'existe pas d'intervalles exceptionnels à partir d'une valeur de $x$ et notre inégalité nous fait gagner en *régularité*. D'autre part si $q(r)$ est d'ordre de grandeur inférieur à $\mu(r)$ nous gagnons encore *en grandeur*, ce qui est un avantage considérable quelquefois.

CHAPITRE III

# QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS CROISSANTES ET POSITIVES

**1**. On sait que, étant donnée une fonction croissante et positive $\mu(x)$, l'inégalité

$$\mu(x') < \theta . \mu(x) \qquad x' = x + \frac{1}{\log \mu(x) \log_2 \mu(x) \ldots \log_\nu \mu(x)^\alpha} .$$

$\theta$, $a$ étant des nombres supérieurs à l'unité et quelconques, est satisfaite pour une infinité de valeurs de $x$ croissant indéfiniment sauf, peut-être, des intervalles exceptionnels négligeables. Autrement dit :

*L'addition à $x$ de* $\dfrac{1}{\log \mu(x) \log_2 \mu(x) \ldots \log_\nu \mu(x)^\alpha}$ *n'altère pas l'ordre de la croissance de la fonction croissante $\mu(x)$.*

**2**. Le théorème ci-dessus énoncé suggère le problème intéressant suivant : *Chercher les quantités $m(x)$ les plus générales possible, indépendantes de la fonction donnée $\mu(x)$ dont l'addition à $x$ altère ou n'altère pas la croissance de la fonction $\mu(x)$.*

J'ai entrepris des recherches dans cette voie, encouragé par M. Hadamard, et j'ai pu obtenir quelques résultats que j'expose ici et qui donnent une idée du problème général que je signale.

Théorème I. — *Pour toutes les fonctions croissantes $\varphi(x)$ satisfaisant à l'inégalité $\varphi(x) > x^\rho$ ($\varrho > 0$ quelconque) à partir d'une valeur de $x$, l'addition à $x$ de toute fonction $m(x)$ croissante telle-que $m(x) > e^x$ (à partir d'une certaine valeur de $x$) altère l'ordre de croissance de la fonction donnée.*

En effet, si on suppose que l'addition à $x$ de la quantité $m(x)$ n'altère pas l'ordre de la croissance de la fonction $\varphi(x)$, alors, étant donné un nombre A assez grand, mais fini, à partir d'une valeur de $x = x_0$, nous aurons l'inégalité

$$\frac{\varphi(x + m(x))}{\varphi(x)} < A$$

Posons

$$\begin{cases} x_0 + m(x_0) = x_1 \\ x_1 + m(x_1) = x_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n-1} + m(x_{n-1}) = x_n \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &< A\varphi(x_0) \\ \varphi(x_2) &< A\varphi(x_1) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi(x_n) &< A\varphi(x_{n-1}) \end{aligned}$$

par conséquent

$$\varphi(x_n) < A^n\varphi(x_0) \qquad \text{ou bien} \qquad \log \varphi(x_n) < n \log A + \log \varphi(x_0). \tag{4}$$

Or

$$x_n = x_{n-1} + m(x_{n-1}) > e^{x_{n-1}} \qquad \text{alors} \qquad \varphi(x_n) > \varphi(e^{x_{n-1}}) > (e^{\rho x_{n-1}})$$

mais

$$\rho x_{n-1} \geqslant \rho x_0 + \rho(n-1)m(x_0)$$

parce que la fonction $m(x)$ est croissante et $\rho$ un nombre positif; nous avons donc finalement

$$\log \varphi(x_n) > \rho x_0 + \rho(n-1)m(x_0);$$

en tenant compte de l'inégalité (4) on en déduit

$$n \log A + \log \varphi(x_0) > \rho x_0 + \rho(n-1)m(x_0)$$

et si nous faisons $n$ tendre vers l'infini nous obtenons

$$A > e^{\rho m(x_0)}$$

ce qui est absurde parce que nous pouvons, aussi grand que soit A, choisir la valeur $x_0$ de sorte que la quantité $e^{\rho m(x_0)}$ soit plus grand que A, étant donné que la fonction $m(x)$ est croissante.

Notre théorème est donc démontré.

Théorème II. — *Pour toute fonction $\varphi(x)$ croissante et positive qui croît moins vite que $x$ nous aurons l'inégalité*

$$\varphi[x + m(x)] < \theta.\varphi(x),$$

*vérifiée constamment à partir d'une valeur de $x$, $\theta$ étant un nombre supérieur à l'unité et quelconque, et $m(x)$ une fonction décroissante quelconque.*

Supposons que, à partir d'une valeur de $x = x_0$, l'on ait l'inégalité

$$\varphi[x + m(x)] \gtreqless \theta.\varphi(x).$$

Nous posons toujours

$$x_i + m(x_i) = x_{i+1} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

et nous aurons les inégalités suivantes :

$$\varphi(x_1) > \theta.\varphi(x_0),$$
$$\varphi(x_2) > \theta.\varphi(x_1),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\varphi(x_n) > \theta.\varphi(x_{n-1}).$$

et en multipliant

$$\varphi(x_n) > \theta^n\varphi(x_0),$$

et, puisque $\varphi(x)$ croît moins vite que $x$, on en déduit

$$ax_n > \theta^n\varphi(x_0),$$

$a$ étant une certain nombre positif.

Or $$x_n = x_0 + m(x_0) + m(x_1) + \cdots + m(x_{n-1}),$$

et comme $m(x)$ est décroissante nous aurons

$$x_n < x_0 + n.m(x_0),$$

alors

$$a[x_0 + n.m(x_0)] > \theta^n\varphi(x_0),$$

ce qui est visiblement impossible puisque le rapport

$$\theta^n.\varphi(x_0) : a[x_0 + n.m(x_0)]$$

tend vers l'infini avec $n$, par conséquent l'inégalité

$$\varphi(x + m(x)) < \theta . \varphi(x)$$

est constamment vérifiée à partir d'une valeur de $x$.

THÉORÈME III. — *Une fonction $\varphi(x)$ croissante et positive telle que*

$$\log \varphi(x) < ax,$$

*$a$ étant un nombre positif quelconque, satisfait constamment à l'inégalité*

$$\varphi(x + m(x)) < \theta . \varphi . (x),$$

*à partir d'une valeur de $x$, $\theta$ étant un nombre supérieur à l'unité, quelconque, et $m(x)$ une fonction arbitraire décroissante.*

Supposons que l'on ait

$$\varphi(x + m(x)) > \theta \varphi(x)$$

à partir de la valeur $x = x_0$,
et posons

$$x_i + m(x_i) = x_{i+1}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, (n - 1),$$

nous aurons

$$\varphi(x_{i+1}) > \theta \varphi(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, (n - 1).$$

En multipliant :

$$\varphi(x_n) > \theta^n \varphi(x_0)$$

ou

$$\log \varphi(x_n) > n \log \theta + \log \varphi(x_0), \qquad (\log \theta > 0);$$

mais par hypothèse

$$\log \varphi(x_n) < ax_n < a(x_0 + n.m(x_0)), \qquad (a > 0),$$

alors

$$n \log \theta + \log \varphi(x_0) < ax_0 + an.m(x_0),$$

faisons $n$ tendre vers l''infini nous obtenons

$$\log \theta < am(x_0)$$

ce qui est absurde puisque $\log \theta$ est un nombre positif et $m(x)$ une fonction décroissante; alors on pourra parfaitement choisir $x_0$ telle que $am(x_0)$ soit inférieur à une quantité positive aussi petite qu'elle soit.

Notre proposition, qui comprend la précédente comme cas particulier, est donc démontrée.

**3**. Le théorème que nous venons de démontrer est susceptible d'une généralisation intéressante.

Considérons, en effet, toutes les fonctions croissantes et positives vérifiant l'inégalité

$$\varphi(x) < e^{e^{ax}} \qquad (a > 0 \text{ quelconque})$$

alors notre proposition précédente est appliquable aux fonctions log $\varphi(x)$ et on aura à partir d'une valeur de $x = x_0$ l'inégalité

$$\log \varphi(x + m(x)) < (1 + \varepsilon) \log \varphi(x),$$

$\varepsilon > 0$ quelconque et $m(x)$ étant une fonction décroissante quelconque.

Cette inégalité peut s'écrire de la façon suivante :

$$\varphi(x + m(x)) < \varphi(x)^{1+\varepsilon}$$

Nous avons donc établi le théorème suivant, concernant une classe très générale des fonctions croissantes.

Théorème IV. — *Considérons toutes les fonctions croissantes et positives $\varphi(x)$ qui croissent moins vite que la transcendante $e^{e^{ax}}$ a étant positif et quelconque, l'addition à $x$ d'une fonction positive et décroissante quelconque n'altère pas l'ordre de la croissance de la fonction donnée.*

Il n'en est pas de même pour les fonctions $\varphi(x)$ qui satisfont à l'inégalité

$$\varphi(x) < e^{e^{e^{ax}}}$$

pour ces fonctions nous avons

$$\varphi(x + m(x)) < e^{[\log \varphi(x)]^{1+\varepsilon}}$$

$\varepsilon > 0$ et quelconque et m$(x)$ une fonction décroissante.

Pour l'établir nous n'avons qu'à appliquer le théorème précédent aux fonctions croissantes log $\varphi(x)$.

# DEUXIEME PARTIE

## CHAPITRE I

## UNE CLASSE DE FONCTIONS TRANSCENDANTES ET SES VALEURS DITES EXCEPTIONNELLES

**1**. Une fonction $u = a(x)$ algébroïde, ayant $\nu$ branches, entière, satisfait à une équation de la forme

$$(5) \qquad f(x, u) = u^{\nu} + A_1(x)u^{\nu-1} + A_2(x)u^{\nu-2} + \cdots + A_{\nu-1}(x)u + A_{\nu}(x) = 0$$

où $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_{\nu}(x)$ désignent des fonctions uniformes de $x$.

Considérons la fonction $u = a(x)$ définie par cette équation et une valeur $u = u_1$ telle que l'équation

$$u_1 = a(x)$$

n'admette qu'un nombre *fini* de racines; et alors il en sera de même pour l'équation

$$f(x, u_1) = 0.$$

Une telle valeur de $u$ doit être considérée comme *exceptionnelle*, parce que leur nombre est fini et jamais supérieur à $2\nu$, l'infini compris, comme M. Rémoundos l'a démontré dans son mémoire « *Sur les zéros d'une classe des fonctions transcendantes* (1) ».

(1) *Thèse*, Gauthier-Villars, 1906, et *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*

**2**. Deux valeurs $u_1$, $u_2$ de $u$ seront dites *équivalentes* si le rapport

$$f(x, u_1) : f(x, u_2)$$

est une fonction rationnelle de $x$. Si l'une de ces valeurs est exceptionnelle, l'autre l'est aussi. Nous verrons que cette *notion* sera utile pour ce qui va suivre

**3**. J'étudie une classe de fonctions multiformes $u = a(x)$ qui sont définies par une équation de la forme (5), en supposant qu'il n'y a aucune relation de la forme :

$$R(c, A_i(x)) = 0, \qquad (c),$$

R étant une fonction algébrique par rapport à $A_i(x)$ et à coefficients constants. *C'est-à-dire je suppose que les fonctions* $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_n(x)$ *ne sont liées par aucune relation algébrique par rapport à* $A_i(x)$, *dont les coefficients sont constants*. Il peut y avoir de telles relations avec des coefficients fonctions de $x$, mais non constants

Cette condition sera mentionnée au cours de ce travail par l'expression *condition* (c).

Nous nous bornerons pour fixer les idées au cas où l'*ordre* des coefficients $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_\nu(x)$ est fini. Soit $\varrho$ le plus grand des ordres de ces fonctions, alors *l'ordre* de la fonction algébroïde $u = a(x)$ en question sera $\varrho$. D'une façon plus précise, si $\mathcal{M}(r)$ désigne le module maximum d'une branche quelconque de $a(x)$, on démontre que l'inégalité

$$\mathcal{M}(r) < e^{r^{\varrho+\varepsilon}} \qquad |x| = r \qquad (\varepsilon > 0 \quad \text{quelconque})$$

est satisfaite à partir d'une certaine valeur de $r$, et que l'inégalité

$$\mathcal{M}(r) > e^{r^{\varrho-\varepsilon}}$$

sera satisfaite pour une infinité de valeurs de $r$ croissant indéfiniment.

Je vais démontrer que *le nombre* N *des valeurs exceptionnelles des fonctions* $a(x)$ en question ne dépasse jamais $\nu + 1$ *l'infini compris*.

Nous remarquons que l'infini et toutes les valeurs de $u$ pour lesquelles $f(x, u)$ est un polynôme, sont bien des valeurs exceptionnelles.

Ces valeurs se calculent algébriquement puisqu'elles ne dépendent pas de la nature des transcendantes figurant dans l'équation (5).

Leur nombre ne peut pas dépasser $\nu - 1$, puisque, autrement, la résolution des équations

$$f(x, u_i) = \mathfrak{P}_i(x) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$$

($\mathfrak{P}_i(x)$ étant des polynômes par rapport à $x$), par rapport à $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_\nu(x)$ serait possible et ces fonctions seraient toutes des polynômes, ce qui est absurde, parce que une au moins est supposée transcendante.

Envisageons donc le cas ou le nombre de ces valeurs, que nous appellerons, avec M. Rémoundos, valeurs (E), est $\nu - 1$. Soient $u_1$, $u_2$ ..., $u_{\nu-1}$ ces valeurs. Je démontre que le nombre de toutes les autres ne dépasse jamais 2 lorsque toutes les fonctions $A_i(x)$ ne sont pas des polynômes.

Supposons le contraire, et soient $u_\nu$, $u_{\nu+1}$ deux telles valeurs.

On aura les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x, u_1) = \varphi_1(x) \\ f(x, u_2) = \varphi_2(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f(x, u_{\nu-1}) = \varphi_{\nu-1}(x) \\ f(x, u_\nu) = \varphi_\nu(x) e^{Q_\nu(x)} \\ f(x, u_{\nu+1}) = \varphi_{\nu+1}(x) e^{Q_{\nu+1}(x)} \end{array}\right.$$

$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, . , $\varphi_\nu$, $\varphi_{\nu+1}(x)$ et $Q_\nu(x)$, $Q_{\nu+1}(x)$ étant des polynômes, les secondes au plus de degré égal à $\varrho$ En éliminant les coefficients $A_1(x)$, $A_2(x)$, .. , $A_\nu(x)$ entre ces $\nu + 1$ équations (ce qui est toujours possible) nous arriverons à la rélation suivante :

$$(6) \qquad \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \quad + \lambda_{\nu-1}\varphi_{\nu-1}(x) + \lambda_\nu\varphi_\nu(x)e^{Q_\nu(x)} + \lambda_{\nu+1}\varphi_{\nu+1}(x)e^{Q_{\nu+1}(x)} = \lambda$$

avec

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & \ldots & u_1^\nu \\ 1 & u_2 & u_2^2 & \ldots & u_2^\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & u_{\nu+1} & u^2_{\nu+1} & \ldots & u_{\nu+1} \end{vmatrix}, \qquad \lambda_i = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & \ldots & u_1^\nu \\ 1 & u_2 & u_2^2 & \ldots & u_2^\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & u_{i-1} & u_{i-1}^2 & \ldots & u_{i-1}^\nu \\ 1 & u_{i+1} & u_{i+1}^2 & \ldots & u_{i+1}^\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & u_{\nu+1} & u_{\nu+1}^2 & \ldots & u_{\nu+1}^\nu \end{vmatrix}.$$

Une telle relation est impossible. Voici la démonstration :

1° Si le terme algébrique, celui qui n'a pas d'exponentielle,

$$\lambda - \sum_1^{\nu-1} \lambda_i \varphi_i(x)$$

est différent de zéro, l'impossibilité est visible, puisque les polynômes $Q_\nu(x)$, $Q_{\nu+1}(x)$ ne sont pas des constantes, à cause du fait qu'aucune des valeurs $u_\nu$, $u_{\nu+1}$ n'appartient, par hypothèse, à l'ensemble (E).

2° Le terme algébrique est nul.

Nous allons démontrer qu'il n'y a aucune réduction qui puisse avoir lieu dans les termes exponentiels. Or, cette réduction arrive dans le cas où il y a des termes exponentiels dont le rapport est un polynôme (ou fonction rationnelle de $x$), il nous suffit donc de vérifier que la *différence* $Q_\nu(x) - Q_{\nu+1}(x)$ *ne peut pas être constante.*

En effet soit $Q_\nu(x) - Q_{\nu+1}(x) = c$ (constant). Considérons le rapport

$$\mu(x) = \frac{f(x, u_\nu)}{f(x, u_{\nu+1})}$$

qui ne peut pas être constant, autrement il y aurait une relation entre les coefficients $A_i(x)$ (linéaire et homogène) algébriques à coefficients constants de la forme

$$c = \sum_1^\nu c_i A_i(x)$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite (*condition c*).

Les relations

$$f(x, u_\nu) = \varphi_\nu(x) e^{Q_\nu(x)}$$

$$f(x, u_{\nu+1}) = \varphi_{\nu+1}(x) e^{Q_{\nu+1}(x)},$$

en vertu de l'identité $Q_\nu(x) - Q_{\nu+1}(x) = c$ nous donnent

$$[u_\nu^\nu - \mu(x) u_{\nu+1}^\nu] + A_1(x)[u_\nu^{\nu-1} - \mu(x) u_{\nu+1}^{\nu-1}] + \cdots + A_\nu(x)[1 - \mu(x)] = 0$$

ce qui peut bien se présenter, car les coefficients

$$u_\nu^i - \mu(x) u_{\nu+1}^i \qquad (i = 0, 1, \ldots, \nu)$$

ne sont pas constants.

Cela étant ainsi, je considère le système des $\nu$ équations en $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$

$$\left\{\begin{array}{ll} [u_i^\nu + A_1(x) u_i^{\nu-1} + \cdots + A_{\nu-1}(x) u_i + A_\nu(x) = \varphi_i(x) & i = 1, 2, \ldots, \nu - 1 \\ [u_\nu^\nu - \mu(x) u_{\nu+1}^\nu] + A_1(x)[u_\nu^{\nu-1} + \mu(x) u_{\nu+1}^{\nu-1}] + \cdots + A_\nu(x)[1 - \mu(x)] = 0 & \end{array}\right.$$

dont la résolution est parfaitement possible parce que

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} u_1^{\nu-1} & u_1^{\nu-2} & \dots & u_1 & 1 \\ u_2^{\nu-1} & u_2^{\nu-2} & \dots & u_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{\nu-1}^{\nu-1} & u_{\nu-1}^{\nu-2} & \dots & u_{\nu-1} & 1 \\ u_\nu^{\nu-1} - \mu(x)u_{\nu+1}^{\nu-1} & u_\nu^{\nu-2} - \mu(x)u_{\nu+1}^{\nu-2} & \dots & u_\nu - \mu(x)u_{\nu+1} & 1 - \mu(x) \end{vmatrix}$$

est essentiellement différent de zéro, à cause de la relation

$$\mu(x) \neq \text{constante}$$

qui nous exprime que $\mu(x)$ ne se réduit pas à une constante

Alors cette résolution déterminerait les fonctions $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_\nu(x)$, toutes comme fonctions algébriques (d'ordre inférieur à $\varrho$), ce qui est impossible, puisque l'une au moins de ces fonctions est transcendante.

Donc la différence $Q_\nu(x) - Q_{\nu+1}(x)$ n'est pas constante et par conséquent l'identité (6) est impossible).

Notre proposition s'énonce de la façon suivante :

*Étant données* $\nu$ *fonctions uniformes*

$$A_1(x),\ A_2(x),\ \dots,\ A_{\nu-1}(x),\ A_\nu(x),$$

*non liées par aucune relation algébrique à coefficients constants, toute algébroïde* $u = a(x)$, *à* $\nu$ *branches, définie par l'équation*

$$u^\nu + A_1(r)u^{\nu-1} + A_2(x)u^{\nu-} + \dots + A_{\nu-1}(x)u + A_\nu(x) = 0$$

*prend, dans le domaine de l'infini (qui est le point essentiel) toutes les valeurs sauf, peut-être,* $\nu+1$ *l'infini compris.*

*Si le nombre de ces valeurs exceptionnelles est supérieur à* $\nu+1$, *la fonction* $u = a(x)$ *n'est pas transcendante, elle est algébrique.*

4 On peut donner, de ce théorème, des généralisations analogues à celles que M Borel a données pour les fonctions entières ou méromorphes, en indiquant la relation qui existe entre l'ordre de la transcendante algébroïde considérée $u = a(x)$ et l'exposant de convergence de la suite de zéros de l'équation

$$a(x) = A,$$

A étant une valeur non exceptionnelle.

Nous avons donc :

*L'exposant de convergence de la suite des zéros de l'équation*

$$a(x) = A$$

*ne saurait être inférieur à l'ordre de la transcendante algébroïde* $u = a(x)$ *pour plus de* $\nu + 1$ *valeurs de la constante* A, *l'infini compris.*

**5**. Jusqu'ici nous avons supposé que les fonctions $A_1(x), A_2(x), \ldots, A_\nu(x)$ étaient d'ordre *fini*.

Mais grâce au théorème général de M. Borel (*Acta Mathematica*, 1897, t. 20) le théorème que nous venons d'établir s'étend au cas plus général d'une transcendante $a(x)$ quelconque d'ordre *infini*.

Nous avons ainsi le théorème suivant :

*Considérons* $\nu$ *fonctions uniformes*

$$A_1(x),\ A_2(x),\ \ldots,\ A_{\nu-1}(x),\ A_\nu(x)$$

*non liées par aucune relation algébrique à coefficients constants et la transcendante algébroïde* $u = a(x)$ *définie par l'équation*

$$f(x, u) = u^\nu + A_1(x)u^{\nu-1} + A_2(x)u^{\nu-2} + \cdots + A_\nu(x) = 0$$

*Soit*

$$f(x, u_i) = P_i(x)e^{Q_i(x)}$$

$u_i$ *étant une certaine valeur de* $u$, *et* $e^{\mu(r)}$ *le plus grand des ordres de grandeur de tous les coefficients* $A_i(x)$, *il n'y a pas plus de* $\nu + 1$ *valeurs de* $u$ *(l'infini est compris) pour lesquelles* $P_i(x)$ *croissent moins vite que* $e^{\mu(r)^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon$ *étant un nombre positif et quelconque.*

**6**. Je profite ici de l'occasion pour faire quelques remarques concernant quelques points de la théorie du nombre.

Considérons un polynôme

$$\varphi(x) = x^\mu + a_1 x^{\mu-1} + \cdots + a_{\mu-1}x + a_\mu$$

dont les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ ne sont pas tous des nombres algébriques. Soit une équation de la forme

$$\varphi(x) = Ae^\alpha$$

les nombres A, $\alpha$ étant algébriques.

Le second membre de cette équation sera, conformément au théorème de M. Lindemann, un nombre transcendant quand $\alpha$ est différent de zéro.

Généralement, les racines d'une telle équation sont des nombres transcendants et une équation de cette forme admettant des racines algébriques doit être considérée comme *exceptionnelle*.

Appelons E l'ensemble des valeurs algébriques de $x$ pour lesquelles $\varphi(x)$ est un nombre algébrique, E′ l'ensemble de valeurs de $x$ pour lesquelles $\varphi(x)$ prend la forme $Ae^{\alpha}$ (A, $\alpha$ étant algébriques et différents de zéro).

Deux valeurs de $x$ : $x_1$ et $x_2$ seront appelées *équivalentes* lorsque le quotient

$$\varphi(x_1) : \varphi(x_2)$$

est un nombre algébrique; il est évident que si l'une des valeurs $x_1$, $x_2$ est exceptionnelle, l'autre l'est aussi.

Soit $E_1$ l'ensemble des valeurs E′ non équivalentes.

Dans ces conditions, je vais établir un théorème qui concerne les ensembles E, $E_1$.

*L'ensemble des valeurs* E, $E_1$ *ne surpasse jamais le nombre* $\mu$. En effet, nous ne pouvons avoir $\mu$ équations de la forme

$$\varphi(x) = A,$$

admettant des racines algébriques, si A est algébrique, parce que la résolution de ces équations par rapport aux coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ donnerait pour eux valeurs algébriques, ce qui est absurde puisque un, au moins, des coefficients $a_i$ est transcendant. J'élimine donc les nombres $a_1$, $a_2, \ldots, a_\mu$ parmi les équations

$$\varphi(x_i) = A_i, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, \mu - 1,$$
$$\varphi(x_j) = A_j e^{\alpha j} \qquad j = \mu, \mu + 1,$$

ce qui est toujours possible, et on obtiendra l'égalité suivante

$$\sum_1^{\mu-1} \lambda_i A_i + \lambda_\mu A_\mu e^{\alpha_\mu} + \lambda_{\mu+1} A_{\mu+1} e^{\alpha_{\mu+1}} = \lambda \tag{7}$$

avec

$$\lambda_i = \begin{vmatrix} 1 & x_{i+1} & x_{i+1}^2 & \ldots & x_{i+1}^{\mu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{\mu+1} & x_{\mu+1}^2 & \ldots & x_{\mu+1}^{\mu-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{\mu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{i-1} & x_{i-1}^2 & \ldots & x_{i-1}^{\mu-1} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^\mu \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^\mu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_\mu & x_\mu^2 & \ldots & x_\mu^\mu \\ 1 & x_{\mu+1} & x_{\mu+1}^2 & \ldots & x_{\mu+1}^\mu \end{vmatrix}$$

le déterminant qui donne le nombre $\lambda$ est d'ordre $\mu + 1$, tandis que celui qui donne $\lambda_i$ est d'ordre $\mu$. Ces deux nombres $\lambda_i$, $\lambda$ sont algébriques et essentiellement différents de zéro. Les deux derniers termes de l'égalité (7) sont des nombres transcendants parce que les exposants $\alpha_\mu$, $\alpha_{\mu+1}$ ont été supposés différents de zéro. De plus, ces exposants sont nécessairement différents entre eux, puisque les valeurs correspondantes de $x$ appartiennent à l'ensemble $E_1$. Donc, il n'y a pas de réduction dans le premier membre de l'identité (7); il peut y avoir des réductions parmi les termes algébriques, mais les termes transcendants resteront intacts et finalement notre égalité (7) prendra une forme irréductible telle que

$$(7') \qquad a_\mu e^{\alpha_\mu} + a_{\mu+1} e^{\alpha_{\mu+1}} = a \qquad (\alpha_\mu \neq \alpha_{\mu+1})$$

$a_\mu$, $a_{\mu+1}$ étant des nombres algébriques essentiellement différents de zéro, et $a$ algébrique *quelconque*. Alors, en vertu du théorème de M. Lindemann « *Si les nombres* $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ *sont algébriques, l'égalité*

$$a_1 e^{\alpha_1} + a_2 e^{\alpha_2} + \cdots + a_n e^{\alpha_n} = 0$$

*entraîne la nullité de tous les coefficients* $a_1$, $a_2$ ..., $a_n$ ».

L'identité (7') est impossible parce que les nombres $a_\mu$ $a_{\mu+1}$ sont sûrement différents de zéro. Notre proposition est démontrée.

## Les valeurs doublement exceptionnelles

**7**. Soit $a(x)$ une fonction multiforme d'ordre fini $\varrho$ (pour fixer les idées), et considérons un nombre $a$. Formons une autre fonction $\varphi(x)$ algébroïde admettant les mêmes zéros et les mêmes infinis avec les mêmes ordres de multiplicité que la fonction $a(x) - a$, alors on pourra poser

$$\frac{a(x) - a}{\varphi(x)} = e^{Q(x)} \qquad \text{ou bien} \qquad a(x) - a = \varphi(x) e^{Q(x)}.$$

Si l'algébroïde $\varphi(x)$ est d'ordre $\varrho_1$ inférieur à $\varrho$, l'exposant $Q(x)$ sera en général une fonction à une infinité de branches. *Si* $\varphi(x)$ *étant d'ordre inférieur* $\varrho$, $Q(x)$ *est une fonction algébroïde, cette valeur a doit être considérée comme exceptionnelle*, puisque leur nombre ne peut pas dépasser le nombre *un* comme l'a démontré M. Rémoundos dans son mémoire « *Sur les fonctions ayant un nombre fini des branches* (1) ». Nous appelons la valeur *a doublement exceptionnelle*.

(1) *Journal de Mathématiques*, t. II, 1906.

Nous voyons donc que, par rapport aux nombres doublement exceptionnels, les fonctions algébroïdes ne se distinguent pas du tout des transcendantes entières, le cas de cette exception étant *unique* quel que soit le nombre des branches, qui ne jouent aucun rôle ici, tandis que le nombre des valeurs simplement exceptionnelles (nous prenons ici l'expression, valeur exceptionnelle dans le sens restreint du mot) peut atteindre $2\nu$, $\nu$ étant le nombre des branches.

Dans ce qui va suivre, nous allons établir une classe remarquable de fonctions transcendantes, dont le nombre des valeurs doublement exceptionnelles *dépend* du degré de l'équation algébrique qui les définit.

Considérons la transcendante $u = f(x)$ définie par une équation de la forme :

$$F(x, u) = u^\nu + a_1(x)u^{\nu-1} + \cdot \cdot + a_{\nu-1}(x)u + a_\nu(x) = 0$$

$a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_\nu(x)$ étant des transcendantes dont une au moins est algébroïde *multiforme*.

Convenons d'appeler *ordre* de la fonction $f(x)$ le plus grand $\varrho$ des ordres des coefficients $a_i(x)$. Soit $a$ un nombre *doublement exceptionnel*, alors la fonction $f(x) - a$ peut se mettre sous la forme

$$f(x) - a = h(x)e^{Q(x)}$$

$h(x)$ étant une fonction d'ordre inférieur à $\varrho$ et $Q(x)$ ayant un nombre *fini* des branches; il est clair qu'il en est de même pour la fonction

$$F(x, a).$$

Ces valeurs $a$ doivent être considérées comme *exceptionnelles*, car nous démontrerons que leur nombre *ne dépasse pas* $2\nu$, *l'infini compris*.

Évidemment les valeurs $a$ de $u$ pour lesquelles la fonction algébroïde $F(x, a)$ est d'ordre inférieur à $\varrho$, sont bien des valeurs doublement exceptionnelles et leur nombre ne peut pas dépasser $\nu - 1$, autrement toutes les algébroïdes $a_i(x)$ seraient d'ordre inférieur à $\varrho$

Je démontre, en m'appuyant toujours sur la méthode de l'élimination, que le nombre de toutes les autres valeurs doublement exceptionnelles ne dépasse pas $\nu$.

Supposons que l'on ait

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_\nu \qquad \nu + 1 \text{ telles valeurs,}$$

alors en éliminant les fonctions algébroïdes $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_\nu(x)$ parmi les équations

$$\left\{\begin{array}{l} F(x, u_0) = h_0(x)e^{Q_0(x)} \\ F(x, u_1) = h_1(x)e^{Q_1(x)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ F(x, u_\nu) = h_\nu(x)e^{Q_\nu(x)} \end{array}\right.$$

on aura la relation

$$(8) \qquad a_0 h_0(x)e^{Q_0(x)} + a_1 h_1(x)e^{Q_1(x)} + \quad + a_\nu h_\nu(x)e^{Q_\nu(x)} = a$$

$a_i$, $a$ étant des nombres parfaitement définis et essentiellement différents de zéro. Puisque aucune des fonctions algébroïdes multiformes $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, ..., $Q_\nu(x)$ n'est une constante, alors, quelle que soit la réduction qui puisse avoir lieu dans le terme du premier membre de (8), le terme qui n'a pas d'exponentielle sera toujours égal à $a$, quantité essentiellement différente de zéro. Une telle relation est impossible.

Nous avons par conséquent obtenu le théorème suivant :

*Le nombre total des valeurs doublement exceptionnelles d'une transcendante quelconque $u = f(x)$ définie par une équation de la forme*

$$u^\nu + a_1(x)u^{\nu-1} + a_2(x)u^{\nu-2} + \quad + a_{\nu-1}(x)u + a_\nu(x) = 0$$

*$a_i(x)$ étant des transcendantes, dont une au moins est multiforme, peut atteindre $2\nu$, l'infini compris.*

Les fonctions $f(x)$ ainsi définies se distinguent des transcendantes multiformes (algébroïdes) par rapport aux nombres doublement exceptionnels, car *le cas de cette exception n'est pas unique.*

CHAPITRE II

# CLASSIFICATION DES VALEURS EXCEPTIONNELLES DES FONCTIONS MULTIFORMES

**1**. Considérons une fonction $u = a(x)$ algébroïde quelconque définie par l'équation

$$f(x, u) = u^{\nu} + A_1(x)u^{\nu-1} + A_2(x)u^{\nu-2} + \cdots + A_{\nu-1}(x)u + A_{\nu}(x) = 0$$

et l'ensemble E des valeurs exceptionnelles qui ne dépendent pas du tout de la nature des transcendantes qui figurent dans l'équation $f(x, u) = 0$.

Soit E′ l'ensemble des autres valeurs de $u$ pour lesquelles la fonction $f(x, u_i)$ prend la forme $H_i(x)e^{Q_i(x)}$, $Q_i(x)$ n'étant pas constant.

Je distingue les trois catégories :

1° l'ensemble $E_1$ des valeurs (parmi les valeurs de l'ensemble E′ toujours) *non équivalentes* dans le sens déjà plusieurs fois indiqué;

2° l'ensemble $E_2$ des valeurs (exceptionnelles) *équivalentes*, telles que le rapport

$$f(x, u_i) : f(x, u_j)$$

n'est pas constant;

3° l'ensemble $E_3$ des valeurs équivalentes pour lesquelles le rapport

$$f(x, u_i) : f(x, u_j) = \text{quantité constante.}$$

Nous établissons facilement les propositions suivantes :

*a) Le nombre des valeurs* E *ne dépasse pas* $\nu - 1$.

*b) L'ensemble des valeurs* E, $E_1$ *ne dépasse jamais* $\nu + 1$.

En effet, la méthode de l'élimination nous conduira à une identité qui contient au moins deux termes exponentiels irréductibles, parce que les valeurs correspondantes de $u$ appartiennent à l'ensemble $E_1$, dont les éléments sont des valeurs non équivalentes. Quel que soit donc le terme algébrique de cette identité, on établira immédiatement son impossibilité.

$c$) Si les coefficients $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_\nu(x)$ ne sont pas liés par aucune *relation algébrique à coefficients constants*, nous avons l'énoncé suivant :

*L'ensemble des valeurs* $E$, $E_1$, $E_2$ *ne dépasse pas* $\nu+1$, *l'infini compris.* Cela à cause de l'absence des valeurs de l'ensemble $E_3$ et du fait que le nombre total des valeurs exceptionnelles est $\nu+1$.

**2**. A propos de cette proposition, je vais indiquer un moyen qui assure l'absence des valeurs exceptionnelles équivalentes $E_3$, quand il s'agit d'une transcendante algébroïde $u = a(x)$ quelconque.

*Soit* $u = a(x)$ *une transcendante algébroïde définie par l'équation*

$$u^\nu + A_1(x)u^{\nu-1} + \quad + A_\nu(x) = 0$$

*les coefficients étant des fonctions entières ou méromorphes. Si les fonctions* $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_\nu(x)$, *ont, au moins, une racine commune* $x = a$ *et si* $\nu - 1$ *fonctions quelconques parmi les* $A_i(x)$ *ont aussi une racine* $x = \beta \neq a$ *commune il n'existe pas de valeurs* $E_3$.

Supposons, en effet, que pour les valeurs $u_1$, $u_2$, *l'on ait*

$$f(x, u_1) : f(x, u_2) = c \text{ constant,}$$

alors nous aurons l'identité

$$(9) \qquad (u_1^\nu - cu_2^\nu) + A_1(x)(u_1^{\nu-1} - cu_2^{\nu-1}) + \cdot \cdot + (u_1 - cu_2)A_{\nu-1}(x) + (1-c)A_\nu(x) = 0$$

qui nous donne pour $x = a$

$$u_1^\nu - cu_2^\nu = 0$$

c'est-à-dire

$$c = \left| \frac{u_1}{u_2} \right|^\nu$$

en vertu de cette égalité, notre identité (9) s'écrit ainsi

$$A_1(x)(u_1^{\nu-1} - cu_2^{\nu-1}) + A_2(x)(u_1^{\nu-2} - cu_2^{\nu-2}) + \quad \cdot + A_\nu(x)(1-c) = 0$$

soit $A_k(x)$ le coefficient parmi les $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_\nu(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = \beta \neq \alpha$, alors pour $x = \beta$ nous aurons

$$A_k(\beta)(u_1^{\nu-k} - cu_2^{\nu-k}) = 0 \qquad (k \neq 0)$$

ou bien

$$c = \left(\frac{u}{u_2}\right)^{\nu}$$

nous devons donc avoir l'égalité

$$\left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{\nu} = \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{\nu-n}$$

qui entraîne

$$u_1 = u_2.$$

Notre proposition est démontrée.

## Classes de fonctions à un nombre infini de branches dont le nombre des valeurs exceptionnelles est limité

**3**. Je me propose maintenant d'entendre les résultats précédents à une classe des fonctions ayant un nombre *infini* de branches.

I. Je vais parler d'abord des fonctions définies par une équation de la forme

$$f(x, u) = A_0(x) + uA_1(x) + u^2A_2(x) + \cdots + u^{\nu-1}A_{\nu-1}(x) + \varphi(x, u)$$

avec

$$\varphi(x, u) = \mu_1(u)\, a_1(x) + \mu_2(u)\, a_2(x) + \cdots + \mu_\lambda(u)\, a_\lambda(x)$$

où $\lambda$ désigne un entier quelconque, $\mu_i(u)$ des fonctions quelconques de $u$, et $a_i(x)$ des fonctions entières de $x$ ayant un ordre de grandeur toujours inférieur au plus grand des ordres $e^{M(r)}$ des fonctions *entières ou méromorphes* $A_i(x)$.

Je suppose de plus que *les coefficients* $A_0(x)$, $A_1(x)$, ..., $A_{\nu-1}(x)$ sont des *fonctions linéairement indépendantes.* J'entends par là qu'il n'y a pas de relations linéaires de la forme

$$a_0(x)A_0(x) + a_1(x)A_1(x) + \cdots + a_{\nu-1}(x)A_{\nu-1}(x) + a_\nu(x) = 0$$

$a_i(x)$désignant des fonctions entières croissant moins vite que $e^{M(r)}$.

Alors des valeurs exceptionnelles appartenant aux ensembles E, $E_2$, $E_3$ n'existent pas et l'élimination des fonctions $A_i(x)$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1)$ entre les équations

$$f(x, u_i) = P_i(x)e^{Q_i(x)} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, \nu+1$$

(ce qui est toujours possible), $P_i(x)$ étant des polynômes, nous conduira à une identité de la forme

$$(10) \qquad \sum_{1}^{\nu+1} a_i P_i(x) e^{Q_i(x)} = \sum_{1}^{\nu+1} a_i \varphi(x, u_i) = g(x),$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu+1}$ sont les valeurs de l'ensemble $E_1$, $a_i$ des nombres essentiellement différents de zéro et $g(x)$ une fonction de $x$ qui croît moins vite que $e^{M(r)}$.

Aucune des valeurs exceptionnelles $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu+1}$ ne fait partie de l'ensemble E, qui comprend toutes les valeurs de $u$ pour lesquelles $f(x, u)$ est d'ordre de grandeur inférieur à $e^{M(r)}$; alors toutes les exponentielles $e^{Q_i(x)}$ croissent comme la fonction $e^{M(r)}$; par conséquent les conditions exigées par la proposition fondamentale de M. Borel sont bien réalisées et l'identité (10) est impossible.

Nous arrivons à l'énoncé suivant :

*Le nombre total des valeurs exceptionnelles ne dépasse jamais* $\nu + 1$ *l'infini y compris.*

Il y a là une classe de fonctions transcendantes avec un nombre infini de branches dont le nombre total des valeurs exceptionnelles est limité.

Ce résultat nous sera utile plus loin.

II. Nous sommes ramenés, jusqu'ici, à la *proposition fondamentale* de M. Borel en éliminant toutes les fonctions $A_i(x)$ figurant dans le premier membre de l'équation $f(x, u) = 0$ qui définit la transcendante $u = a(x)$. En nous contentant d'une élimination partielle, nous arriverons à préciser et compléter les résultats précédents, en établissant une autre classe de fonctions d'un nombre infini des branches qui admettent un nombre fini de valeurs exceptionnelles.

Je considère la fonction $u = a(x)$ définie par une équation de la forme

$$(11) \qquad f(x, u) = A_0(x) + A_1(x)u + A_2(x)u^2 + \cdots + A_n(x)u^n + \cdots = 0$$

et soient $e^{\mu_n(r)}$ l'ordre pour $|x| = r$ des grandeurs des fonctions (entières ou méromorphes) $A_n(x)$ $[n = 0, 1, 2, \ldots]$. Soit $e^{\mu(r)}$ le plus grand des ordres de toutes ces fonctions $A_i(x)$. Supposons que $e^{\mu_n(r)}$ décroît notablement lorsque $n$ croît indéfiniment et que la décroissance de l'ordre de grandeur avec $\frac{1}{n}$ est telle que, à partir d'une certaine valeur de $r = r_0$ (qui soit indépendante de $n$) la différence

$$\mu_{n+1}(r) - \mu_n(r)$$

est négative, pour $n$ assez grand, et inférieure à un nombre $-k$ fixe, mais aussi petit que l'on voudra.

Cela veut dire qu'à partir d'une valeur $a$ de $n$ nous aurons

$$e^{\mu_{n+1}(r)-\mu_n(r)} < e^{-k} < \frac{1}{|u_0|}$$

$u_0$ étant une valeur de $u$ aussi grande qu'elle soit.

Ecrivons l'équation (11) comme il suit

$$A_0(x) + A_1(x)u + \cdots + A_{a-1}(x)u^{a-1} + R_a(x, u) = f(x, u) = 0$$

avec

$$R_a(x, u) = A_a(x)u^a + A_{a+1}(x)u^{a+1} + \cdots$$

et considérons une valeur quelconque de $u = u_0$. Nous avons

$$R_a(x, u_0) = A_a(x)u_0^a + A_{a+1}(x)u_0^{a+1} + \cdots$$

$$|R_a(x, u_0)| \leqslant |u_0|^a e^{\mu_a(r)} + |u_0|^{a+1} e^{\mu_{a+1}(r)} + |u_0|^{a+2} e^{\mu_{a+2}(r)} + \cdots$$

Par conséquent :

$$|R_a(x, u_0)| < |u_0|^a e^{\mu_a(r)} \left\{ 1 + |u_0| e^{\mu_{a+1}(r)-\mu_a(r)} + |u_0|^2 e^{\mu_{a+2}(r)-\mu_a(r)} + \cdots \right\}$$

Or

$$e^{\mu_{a+1}(r)-\mu_a(r)} < e^{-k},\ e^{\mu_{a+2}(r)-\mu_a(r)} < e^{-2k},\ e^{\mu_{a+3}(r)-\mu_a(r)} < e^{-3k},\ \ldots,\ e^{\mu_{a+\nu}(r)-\mu_a(r)} < e^{-\nu k},\ \ldots$$

alors

$$|R_a(x, u_0)| < |u_0|^a e^{\mu_a(r)} \left\{ 1 + |u_0| e^{-k} + |u_0|^2 e^{-2k} + |u_0|^3 e^{-3k} + \cdots \right\}$$

et comme

$$|u_0| e^{-k} < 1$$

on en déduit, quelle que soit $u_0$,

$$|R_a(x, u_0)| < |u_0|^a e^{\mu_a(r)} \frac{1}{1 - |u_0| e^{-k}}$$

c'est-à-dire

$$|R_a(x, u_0)| < e^{\mu(r)^{1-\varepsilon}}$$

$\varepsilon$ étant un nombre positif aussi petit que l'on veut.

Je suppose toujours que les coefficients $A_n(x)$ quel que soit $n$ sont des fonctions linéairement indépendantes et je considère $a+1$ valeurs de $u$ exceptionnelles.

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_a$$

l'élimination des $a$ coefficients $A_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, a-1$ entre les équations

$$\left\{\begin{array}{l} f(x, u_0) = P_0(x)e^{Q_0(x)} \\ f(x, u_1) = P_1(x)e^{Q_1(x)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f(x, u_a) = P_a(x)e^{Q_a(x)} \end{array}\right.$$

qui est toujours possible, nous conduit à l'identité

$$\lambda_0 P_0(x)e^{Q_0(x)} + \lambda_1 P_1(x)e^{Q_1(x)} + \cdots + \lambda_a P_a(x)e^{Q_a(x)} = g(x)$$

les exponentielles croissent comme $e^{\mu(r)}$, $g(x)$ est une fonction d'ordre de grandeur au plus égal à $e^{\mu(r)^{1-\varepsilon}}$ et les nombres $\lambda_i$ sont des quantités essentiellement différentes de zéro, on en déduit immédiatement l'impossibilité de cette identité, et par conséquent

*Le nombre total des valeurs exceptionnelles de la transcendante $a(x)$ définie par l'équation* (11) *ne dépasse pas $a+1$ l'infini compris.*

III. On voit facilement que les mêmes résultats subsistent pour les transcendantes multiformes définies par une équation de la forme

$$A_0 + A_1(x)u + A_2(x)u^2 + \cdots + A_{\nu-1}(x)u^{\nu-1} + u^\nu + x.\varphi(x, u) = 0$$

$\varphi(x, u)$ étant une fonction uniforme quelconque de $u$ et entière en $x$ (pour toutes les valeurs de $u$) avec un ordre de grandeur inférieur à $e^{\mu(r)^{1-\varepsilon}}$, $\varepsilon$ étant un certain nombre positif aussi petit que l'on voudra.

## Application à une classe d'équations différentielles

**4**. Considérons une équation différentielle de la forme

$$(12)\quad A_0(x) + uA_1(x) + \cdots + A_{\nu-1}(x)u^{\nu-1} + u^\nu + x.\varphi\left(u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nu}{dx^n}\right) = 0$$

et désignons par $e^{\mu(r)}$ le plus grand des ordres de grandeur des coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{\nu-1}$ linéairement indépendants. Supposons que $\varphi(u, u', u'', \ldots, u^{(n)})$ soit un polynôme par rapport à $u, u', u'', \ldots, u^{(n)}$ quelconque.

Je considère une intégrale $u = q(x)$ de l'équation différentielle et j'élimine la variable $x$ entre les équations

$$u = q(x), \qquad u' = q'(x).$$

Soit

$$u' = h_1(u)$$

le résultat de cette élimination. D'une façon générale, soit

$$u^{(n)} = h_n(u)$$

la fonction obtenue par l'élimination de $x$ entre les deux équations

$$u = q(x), \qquad u^{(n)} = q^{(n)}(x).$$

Par conséquent l'élimination des $u'$, $u''$, $u'''$, ..., $u^{(n)}$ entre les équations

$$u' = h_1(u), \qquad u'' = h_2(u), \qquad \dots, \qquad u^{(n)} = h_n(u)$$

et de l'équation (12) nous conduit à une équation de la forme

$$(12') \qquad A_0(x) + uA_1(x) + u^2A_2(x) + \cdots + A_{\nu-1}(x)u^{\nu-1} + u^\nu + xf(u) = 0$$

qui sera satisfaite par l'intégrale $u = q(x)$.

Nous dirons que l'équation (12′) est irréductible lorsque cette équation ne définit qu'une fonction *unique*.

Puisque la fonction $\varphi(u, u', u'', \dots, u^{(n)})$ est un polynôme entier par rapport à $u$, $u'$, $u''$, ..., $u^{(n)}$, si aucune des fonctions $h_1(u)$, $h_2(u)$, ..., $h_n(u)$ n'a pas des valeurs infinies pour une valeur $u = u_0$ la fonction ne devient pas infinie pour $u = u_0$.

Pour une valeur $u = a$ telle que $f(a)$ soit infini, l'équation (12′) n'admet aucune racine finie et différente de zéro, et, puisque, — nous le supposons — elle est irréductible, il en sera de même de l'équation

$$a = q(x).$$

Alors : *l'intégrale $u = q(x)$ ne prend la valeur $a$ pour aucune valeur finie de $x$ sauf, peut-être, pour la valeur $x = 0$*

Convenons d'appeler une telle valeur $u = a$ valeur *exceptionnelle parfaite* (1) et laissons de côté ces valeurs de l'intégrale $u = q(x)$, c'est-à-dire de la fonction définie par l'équation (12′). Nous aurons pour les autres valeurs exceptionnelles le théorème suivant :

*Le nombre des valeurs exceptionnelles non parfaites d'une intégrale $q(x)$ d'une équation différentielle de la forme*

(1) M Rémoundos, *Comptes rendus*, t 147, p 416, 1908.

$$A_0(x) + uA_1(x) + \cdots + u^{\nu-1}A_{\nu-1}(x) + u^\nu + x\varphi\left(u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx_2}, \ldots, \frac{d^nu}{dx^n}\right) = 0$$

*$A_i(x)$ étant des fonctions linéairement indépendantes et $\varphi(u, u', \ldots, u^{(n)})$ un polynôme entier quelconque par rapport à $u, u', u'', \ldots, u^{(n)}$, ne peut pas dépasser $\nu + 1$ l'infini compris.*

J'entends par là que

*L'équation $u = q(x)$ ne peut pas avoir un nombre fini de racines que pour $\nu$ valeurs finies, au plus, de $u$.*

Je ne considère pas ici le cas où l'équation (12′) admet la seule racine $x = 0$, aussi celui des valeurs de $u$ pour lesquelles la fonction $f(u)$ n'a pas d'existence.

La démonstration se fait par la méthode de l'élimination et s'appuie sur le théorème fondamental de M. Borel plusieurs fois utilisé.

## Le théorème de M. Landau et les fonctions multiformes

**5**. En 1904, M. Landau, généralisant le célèbre théorème de M. Picard sur les fonctions entières, a démontré la proposition suivante :

*Soit une fonction analytique*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m + \cdots$$

*régulière à l'origine, pour laquelle $a_1 \neq 0$, il existe un cercle*

$$|x| < R(a_0, a_1)$$

*dont le rayon dépend seulement de $a_0$ et $a_1$ et non des autres coefficients $a_2$, $a_3, \ldots, a_m, \ldots$, à l'intérieur duquel la fonction $f(x)$ possède un point singulier on prend au moins une fois l'une des valeurs zéro et un.*

Je considère ici une classe des fonctions transcendantes à un nombre *infini de branches, non régulières en $x = 0$*, définies par une équation de la forme

$$(13) \quad f(x, u) = A_0(x) + uA_1(x) + u^2A_2(x) + \cdots + A_{n-1}(x)u^{n-1} + \mathfrak{X}(x, u) = 0$$

$\mathfrak{X}(x, u)$ étant une fonction uniforme en $u$, les autres coefficients pouvant être singuliers pour $x = 0$ et même non uniformes dans le voisinage de ce point.

La seule hypothèse que nous faisons est celle qui concerne la fonction

$\mathfrak{X}(x, u)$ qui doit avoir la même valeur par rapport à $x$ : $g(x)$, pour les valeurs $u = 0$ et $u = 1$.

Nous allons étendre aux fonctions multiformes $u = a(x)$ définies par l'équation (13) le théorème de M. Landau ci-dessous énoncé en utilisant une méthode indiquée par M. Rémoundos (1) dans son mémoire « *Sur les fonctions entières et algébroïdes* ».

Supposons, en effet, que dans un cercle $|x| < r$ la fonction $u = a(x)$ ne prenne ni la valeur *zéro* ni la valeur *un*, il est alors évident que les deux fonctions

$$f(x, 0) = A_0(x) + g(x),$$
$$f(x, 1) = A_0(x) + A_1(x) + \cdots + A_{n-1}(x) + g(x)$$

ne s'annulent pas à l'intérieur du cercle

$$|x| < r$$

et par conséquent, nous aurons la même chose pour la fonction

$$\frac{f(x, 1)}{A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_{n-1}(x)} = 1 + \frac{A_0(x) + g(x)}{A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_{n-1}(x)}$$
$$= 1 + \frac{f(x, 0)}{A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_{n-1}(x)}$$

si nous nous plaçons dans le cas où la fonction

$$A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_{n-1}(x)$$

est finie dans le cercle $|x| < r$.

Posons

$$\sigma(x) = -\frac{f(x, 0)}{A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_{n-1}(x)}$$

la fonction $\sigma(x)$ dans le cercle $|x| < r$ ne prend ni la valeur *zéro* ni la valeur *un*. Alors si $\sigma(x)$ est régulière pour $x = 0$

$$\sigma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m + \cdots$$

et si nous avons

$$\gamma_1 \neq 0,$$

il existe, en vertu du théorème de M. Landau, un cercle

(1) *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, t. 30, 1913.

$$|x| < \mathrm{R}(\gamma_0, \gamma_1),$$

à l'intérieur duquel la fonction $\sigma(x)$, ou bien cesse d'être holomorphe, ou bien prend au moins une fois l'une des valeurs *zéro* et *un*, et, alors, le nombre $\mathrm{R}(\gamma_0, \gamma_1)$ ainsi déterminé est *plus grand* que le rayon $r$ du cercle

$$|x| < r.$$

Par conséquent, si le rayon $r$ est égal ou plus grand que le nombre $\mathrm{R}(\gamma_0, \gamma_1)$ correspondant à la fonction $\sigma(x)$, à l'intérieur du cercle $|x| < r$, il existe au moins un point singulier de la fonction $\sigma(x)$, ou bien elle prend au moins une fois la valeur *zéro* et *un*, c'est-à-dire, qu'à l'intérieur du cercle $|x| < r$, ou bien il existe, un zéro de la fonction

$$\mathrm{A}_1(x) + \mathrm{A}_2(x) + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}(x),$$

ou bien au moins une racine des équations

$$a(x) = 0, \qquad a(x) = 1.$$

Nous arrivons donc à l'énoncé suivant :

*Soit une fonction* $u = a(x)$ *définie par une équation de la forme*

$$f(x, u) = \mathrm{A}_0(x) + \mathrm{A}_1(x)\,u + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}(x)u^{\nu-1} + \mathfrak{L}(x, u) = 0$$

*avec la condition*

$$\mathfrak{L}(x, 0) = \mathfrak{L}(x, 1) = g(x)$$

$\mathfrak{L}(x, u)$ *étant une fonction quelconque uniforme de* $u$. *Si la fonction*

$$\sigma(x) = -\frac{g(x) + \mathrm{A}_0(x)}{\mathrm{A}_1(x) + \mathrm{A}_2(x) + \cdots + \mathrm{A}_{n-1}(x)}$$

*est régulière autour de l'origine* $x = 0$

$$\sigma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_m x^m + \cdots$$

*et si nous avons*

$$\gamma_1 \neq 0,$$

*il existe un cercle*

$$|x| < \mathrm{R}(\gamma_0, \gamma_1),$$

*dont le rayon dépend seulement des coefficients* $\gamma_0, \gamma_1$, *à l'intérieur duquel ou bien notre fonction* $u = a(x)$ *prend du moins une fois l'une des valeurs zéro et un, ou bien il existe un zéro de la fonction*

$$A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_{n-1}(x).$$

Je remarque que les raisonnements ci-dessus exposés n'exigent qu'une hypothèse seulement : la fonction $\sigma(x)$ doit être régulière en $x=0$, et alors nous n'avons pas besoin de faire aucune hypothèse particulière sur les coefficients de l'équation (13) qui peuvent être *singuliers en* $x=0$ et *non uniformes dans le voisinage de ce point*, pourvu que la fonction $\sigma(x)$ soit régulière en $x=0$.

## Extension d'un théorème de M. Montel aux fonctions à un nombre fini de branches

**6**. M. Montel, généralisant (1) le théorème de M. Landau, a démontré le théorème suivant :

« *Soit une fonction* $f(x)$ *holomorphe autour de l'origine* $x=0$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots$$

*où* $a_{p+1} \neq 0$; *il existe un nombre* R *ne dépendant que de* $a_0, a_1, \ldots, a_{p+1}$ *tel que, dans tout cercle de rayon supérieur à* R, *ou bien la fonction cesse d'être holomorphe, ou bien cette fonction prend dans le cercle plus de p fois l'une au moins des valeurs zéro et un.*

Je développe ici comment on peut étendre ce théorème de M. Montel aux fonctions qui sont *multiformes* dans le voisinage du point $x=0$.

Considérons une fonction $u=f(x)$ admettant le point $x=0$ comme *point critique*, autour duquel $n$ branches se permutent. Une telle fonction est algébroïde dans le voisinage du point $x=0$; elle sera donc définie par une équation de la forme

$$F(x, u) = u^n + A_1(x)u^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(x)u + A_n(x) = 0.$$

Si la fonction $u=f(x)$ ne prend ni la valeur *zéro* ni la valeur *un* dans le cercle

$$|x| < r,$$

les deux fonctions

(1) *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 143.

$$F(x, 0) = A_n(x),$$
$$F(x, 1) = 1 + A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_n(x)$$

ne s'annulent pas à l'intérieur du cercle $|x| < r$ et il en sera de même de la fonction

$$\frac{F(x), 1)}{1 + A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_{n-1}(x)} = 1 + \frac{A_n(x)}{1 + A_1(x) + \cdots + A_{n-1}(x)}$$

en supposant, bien entendu, que la fonction $1 + A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_{n-1}(x)$ est finie dans le cercle $|x| < r$. Alors, si nous posons

$$\sigma(x) = -\frac{A_n(x)}{1 + A_1(x) + \cdots + A_{n-1}(x)},$$

les équations

$$\sigma(x) = 0, \qquad \sigma(x) = 1$$

n'auront pas de racine à l'intérieur du cercle $|x| < r$.

Si la fonction $\sigma(x)$ est holomorphe autour de l'origine $x = 0$

$$\sigma(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{p+1} x^{p+1} + \cdots$$

et si $a_{p+1} \neq 0$ (1), c'est-à-dire si l'intégrale $\int \frac{\sigma(x) dx}{x^{p+2}}$ ne s'annule pas pour $x = 0$, en vertu du théorème de M. Moutel, il existe un nombre R qui ne dépend que de $p + 2$ nombres parfaitement déterminés, tel que, dans tout cercle de rayon supérieur à R, ou bien la fonction $\sigma(x)$ cesse d'être holomorphe, ou bien prend dans le cercle plus que $p$ fois, l'une au moins des valeurs *zéro* et *un*, c'est-à-dire, il y a plus que $p$ racines d'une au moins des équations

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = 1.$$

Nous avons donc le résultat suivant :

*Si une fonction $f(x)$ est définie par une équation de la forme*

$$u^n + A_1(x) u^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(x) u + A_n(x) = 0$$

*si la fonction*

$$\sigma(x) = -\frac{A_n(x)}{1 + A_1(x) + \cdots + A_{n-1}(x)}$$

*est holomorphe autour de l'origine $x = 0$, et si la valeur pour $x = 0$, de l'intégrale*

(1) La condition $a_{p+1} \pm 0$ revient à dire qu'il n'y a pas de polynômes de degré $p$ parmi les fonctions $f(x)$.

$$\int_c \frac{\sigma(x)dx}{x^{p+1}}$$

*est différente du zéro, p étant un nombre entier et positif quelconque, il existe un nombre* R *ne dépendant que de* $p+2$ *quantités*

$$\sigma(0),\ \sigma'(0),\ \ldots,\ \sigma^{(p+1)}(0)$$

*tel que dans tout cercle du rayon supérieur à R, ou bien la fonction f(x) prend plus de p fois l'une au moins de valeurs zéro et un, ou bien il existe dans le cercle un zéro de la fonction*

$$1 + A_1(x) + A_2(x) + \cdots + A_{n-1}(x).$$

## Algébroïdes entières

**7.** J'appelle la fonction algébroïde $u = f(x)$, définie par l'équation

$$u^n + A_1(x)u^{n-1} + \cdots + A_n(x) = 0,$$

*entière,* dans le cas où les coefficients $A_i(x)$ sont des fonctions entières.

Pour les *algébroïdes entières*, voici une autre interprétation du théorème que nous venons d'établir. Considérons une valeur $u = a$ et supposons que la fonction $u = f(x)$ ne prenne à l'intérieur du cercle

$$|x| < r$$

ni la valeur *zéro* ni la valeur $a$.

Les deux fonctions

$$A_n(x),\ A_n(x) + aA_{n-1}(x) + a^2A_{n-2}(x) + \cdots + a^{n-1}A_1(x) + a^n$$

n'ont pas de racines dans le cercle $|x| < r$.

Alors la fonction

$$\sigma(x) = -\frac{A_n(x)}{a[a^{n-1} + a^{n-2}A_1(x) + a^{n-3}A_2(x) + \cdots + aA_{n-2}(x) + A_{n-1}(x)]}$$

ne prend pas dans ce cercle ni la valeur *zéro* ni la valeur *un.*

Soient

$$A_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + \cdots + a_{i,p+1}x^{p+1} + \cdots \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Nous voyons que si le nombre $a$ n'est pas une racine de l'équation algébrique

$$z^{n-1} + a_{10}z^{n-2} + a_{20}z^{n-3} + \cdots + a_{(n-2)0}z + a_{(n-1)0} = 0$$

la fonction $\sigma(x)$ sera holomorphe autour de l'origine $x = 0$.

Posons

$$\sigma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_{p+1}x^{p+1} + \cdots;$$

les nombres

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p+1}$$

dépendent des coefficients

$$a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip+1} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n$$

et des nombres $a$, $n$, bien entendu.

Cela tient à ce que

$$\gamma_0 = \sigma(0), \qquad \gamma_1 = \sigma'(0), \ \ldots.$$

Si donc $\gamma_{p+1} \neq 0$, en vertu du théorème de M. Montel, il existe un nombre R dépendant de $n(p+2)+2$ nombres parfaitement déterminés, tel que dans tout cercle

$$|x| < R$$

notre fonction $u = f(x)$ prend plus de $p$ fois l'une au moins des valeurs zéro et $a$, ou bien l'algébroïde $z = \varphi(x)$ définie par l'équation

$$z^{n-1} + A_1(x)z^{n-2} + \cdots + A_{n-2}(x)z + A_{n-1}(x) = 0$$

prend la valeur $a$.

Je remarque que l'holomorphie de la fonction auxiliaire $\sigma(x)$ dans le voisinage du point $x = 0$ dépend du choix de la valeur $a$ et nous ne faisons qu'une hypothèse seulement pour le coefficient $\gamma_{p+1}$ qui doit être différent du zéro.

Nous avons ainsi obtenu pour les fonctions *algébroïdes entières* le théorème suivant :

*Soit* $u = f(x)$ *une algébroïde entière définie par l'équation*

$$u^n + A_1(x)u^{n-1} + A_2(x)u^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(x)u + A_n(x) = 0$$

*avec*

$$A_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + \cdots + a_{ip+1}x^{p+1} + \cdots$$

*et* $a$ *un nombre n'appartenant pas à l'ensemble des racines du polynôme*

$$z^{n-1} + a_{10}z^{n-2} + a_{20}z^{n-3} + \cdots + a_{(n-2)0}z + a_{(n-1)0}$$

*Il existe un cercle*

$$|x| < R$$

*dont le rayon* R *dépend seulement des nombres*

$$n,\ a,\ \mathrm{a}_{10},\ \mathrm{a}_{i1},\ \mathrm{a}_{i2},\ \ldots,\ \mathrm{a}_{ip+1} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

*et nullement des autres coefficients, à l'intérieur duquel, ou bien la transcendante entière* $u = f(x)$ *prend plus que* $p$ *fois l'une des valeurs zéro et* $a$ *ou bien l'algébroïde définie par l'équation*

$$z^{n-1} + \mathrm{A}_1(x)z^{n-2} + \cdots + \mathrm{A}_{n-2}(x)z + \mathrm{A}_{n-1}(x) = 0$$

*prend dans ce cercle la valeur* $a$.

*Corollaire.* — Si le nombre $\dfrac{\mathrm{a}_{\nu 0}(\mathrm{a}_{11} + \mathrm{a}_{21} + \cdots + \mathrm{a}_{\nu-1,1})}{1 + \mathrm{a}_{10} + \mathrm{a}_{20} + \cdots + \mathrm{a}_{\nu-1,0}}$ est fini et différant du $\mathrm{a}_{\nu 1}$, il existe un nombre $\varphi(\mathrm{a}_{10}, \mathrm{a}_{11}; \ldots; \mathrm{a}_{\nu 0}, \mathrm{a}_{\nu 1})$ dépendant seulement de deux premiers coefficients de chacune des séries $\mathrm{A}_i(x) = \mathrm{a}_{i0} + \mathrm{a}_{i1}x + \cdots$ tel que à l'intérieur du cercle $|x| < \varphi$ l'algébroïde ou bien prend une fois au moins l'une des valeurs zéro et un ou bien la fonction $1 + \mathrm{A}_1(x) + \cdots + \mathrm{A}_{\nu-1}(x)$ possède une racine.

CHAPITRE III

# LE MODULE MAXIMUM D'UNE CLASSE DE FONCTIONS ALGÉBROÏDES

---

**1**. Dans la théorie de la croissance des fonctions algébroïdes, il est intéressant d'avoir des relations très précises entre leur module maximum $m(r)$ et le module maximum $\mathcal{M}(r)$ des coefficients de l'équation correspondante, sur la circonférence de rayon $|x| = r$.

La quantité $m(r)$ est évidemment égale au plus grand des modules maxima des diverses branches $u_1$, $u_2$, ..., $u_\nu$ de l'algébroïde $u = f(x)$.

Je considère les équations

$$u^\nu + A_k(x)u^{\nu-k} + A_{k+1}(x)u^{\nu-k-1} + \cdots + A_{\nu-1}(x)u + A_\nu(x) = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots \nu),$$

et, pour trouver la *limite inférieure* de $m(x)$, j'utilise la formule

$$\sum u_1 u_2 \ldots u_\lambda = (-1)^\lambda A_\lambda(x)$$

$A_\lambda$ étant le coefficient qui a le plus grand des ordres de grandeur de toutes les fonctions $A_k(x)$, $A_{k+1}(x)$, ..., $A_\nu(x)$.

On en déduit facilement

$$C_{\nu,\lambda} m(r)^\lambda \geqslant \mathcal{M}(r)$$

où le symbole

$$C_{\nu,\lambda} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\lambda+1)}{1.2.3\ldots\lambda}$$

et *à fortiori*,

$$m(r) > A\mathcal{M}(r)^{\frac{1}{\nu}}$$

A étant un nombre qui dépend seulement du nombre de branches de l'algébroïde.

Cherchons maintenant la limite supérieure de $m(r)$; nous allons voir que le nombre de branches de l'algébroïde n'intervient pas du tout et que, *étant donné un nombre* $\theta$ *supérieur à l'unité, quelconque, nous avons constamment à partir d'une certaine valeur de r l'inégalité*

$$m(r) < \theta\mathcal{M}(r)^{\frac{1}{k}}.$$

Voici la démonstration :

Supposons que, pour les valeurs suffisamment grandes de $r$, l'on ait

$$m(r) > \theta\ \mathcal{M}(r)^{\frac{1}{k}}.$$

Alors nous écrivons notre équation qui détermine l'algébroïde comme il suit

$$u^{\nu}\left(1 + \frac{A_k(x)}{u^k} + \frac{A_{k+1}(x)}{u^{k+1}} + \cdots + \frac{A_\nu(x)}{u^\nu}\right) = 0$$

pour tout point du plan $x$ nous avons

$$| A_k(x) | < \mathcal{M}(r), \qquad | A_{k+1}(x) | < \mathcal{M}(r); \qquad \ldots, \qquad | A_\nu(x) | < \mathcal{M}(r)$$

et d'après notre hypothèse, il y a des points P du plan $x$ pour lesquels

$$| u | > \theta.\mathcal{M}(r)^{\frac{1}{k}},$$

pour ces points, nous avons les formules

$$\left|\frac{A_k(x)}{u^k}\right| < \frac{1}{\theta^k}, \quad \left|\frac{A_{k+1}(x)}{u^{k+1}}\right| < \frac{1}{\theta^{k+1}}\,\frac{1}{\mathcal{M}(r)^{\frac{1}{k}}}, \quad \ldots, \quad \left|\frac{A_\nu(x)}{u^\nu}\right| < \frac{1}{\theta^\nu}\,\frac{1}{\mathcal{M}(r)^{\frac{\nu-k}{k}}}$$

et par conséquent

$$\left|\frac{A_k(x)}{u^k} + \frac{A_{k+1}(x)}{u^{k+1}} + \cdots + \frac{A_\nu(x)}{u^\nu}\right| < \frac{1}{\theta^k}\left\{1 + \frac{1}{\theta}\,\frac{1}{\mathcal{M}(r)^{\frac{1}{k}}} + \frac{1}{\theta^2}\,\frac{1}{\mathcal{M}(r)^{\frac{2}{k}}} + \cdots\right\}.$$

Mais lorsque le module des points P augmente indéfiniment, le module maximum $\mathcal{M}(P)$ tend vers l'infini et alors le second membre de l'inégalité tend vers

$\frac{1}{\theta^k}$ qui est inférieur à l'unité. Il y a donc des points de rayon suffisamment grand pour lesquels il est impossible que la fonction algébroïde $f(x)$ satisfasse à l'équation qui la détermine, parce que pour ces points P la quantité

$$1 + \frac{A_k(x)}{u^k} + \cdots + \frac{A_\nu(x)}{u^\nu}$$

ne s'annule jamais. Notre proposition est établie

# TABLE DES MATIÈRES

## PREMIÈRE THÈSE